Univerza v Ljubljani

Ekonomska fakulteta

Janez Komelj

Aktuarsko modeliranje vsot koreliranih zavarovalnih tveganj

Doktorska disertacija

Ljubljana, 2012

IZJAVA O AVTORSTVU

Spodaj podpisani Janez Komelj, študent Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom Aktuarsko modeliranje vsot koreliranih zavarovalnih tveganj, pripravljene v sodelovanju s svetovalcem prof. dr. Mihaelom Permanom.

Izrecno izjavljam, da v skladu z določili Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami) dovolim objavo doktorske disertacije na fakultetnih spletnih straneh ter objavo bibliografskih podatkov z abstraktom v mednarodnih bazah disertacij. Fakulteta zadrži pravico uporabe doktorske disertacije (teksti in objavljeni rezultati) v izobraževalne namene v okviru fakultete.

S svojim podpisom zagotavljam, da

- sta predloženi tiskana in elektronska verzija besedila doktorske disertacije istovetni;
- je predloženo besedilo rezultat izključno mojega lastnega raziskovalnega dela;
- je predloženo besedilo jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem
    - poskrbel, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam v doktorski disertaciji, citirana oziroma navedena v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, in
    - pridobil vsa dovoljenja za uporabo avtorskih del, ki so v celoti (v pisni ali grafični obliki) uporabljena v tekstu, in sem to v besedilu tudi jasno zapisal;
- se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Zakonu o avtorskih in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami);
- se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predložene doktorske disertacije dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom.

Datum zagovora:	6. julij 2012
Predsednik:	prof. dr. Aleš Ahčan
Svetovalec:	prof. dr. Mihael Perman
Član:	prof. dr. Tomaž Košir

V Ljubljani, dne 18. junija 2012 Podpis doktoranda:

Aktuarsko modeliranje vsot koreliranih zavarovalnih tveganj
Povzetek

V doktorski disertaciji so obravnavani predpisi o kapitalu zavarovalnic, tveganja v zavarovalništvu, merjenje, primerjanje in urejanje tveganj, mere in modeliranje odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami, aktuarsko modeliranje agregatnih odškodnin, izračun porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih slučajnih spremenljivk in optimalna alokacija kapitala. Teorijo dopolnjuje praktičen primer izračuna porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin za več portfeljev. Poznavanje naštetega je poleg podatkov ključno za izračun solventnostnega kapitala zavarovalnice z internim modelom, ki ga kot alternativo standardnemu modelu predvideva nova zavarovalniška regulativa Solventnost 2.

Ključni problem, ki je obravnavan v disertaciji, je, kako izračunati porazdelitveno funkcijo vsote koreliranih tveganj, za katera poznamo porazdelitvene funkcije in korelacije med njimi. Splošna rešitev tega problema še ni znana. Eden od mogočih načinov za njegovo reševanje temelji na ideji, da bi karakteristično funkcijo slučajnega vektorja z dano strukturo odvisnosti med njegovimi komponentami zapisali s funkcijo robnih karakterističnih funkcij, ki bi bila odvisna le od strukture odvisnosti med komponentami. Če bi taka funkcija obstajala, bi bila analogija kopuli, ki po Sklarovem izreku povezuje porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja z njegovimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami, hkrati pa bi omogočala enostaven izračun karakteristične in porazdelitvene funkcije vsote komponent slučajnega vektorja. V disertaciji je dokazano, da v splošnem primeru taka funkcija ne obstaja.

V disertaciji je razvita metoda, ki v posebnih primerih omogoča izračun karakteristične funkcije slučajnega vektorja iz njegovih robnih karakterističnih funkcij, karakterističnih funkcij z distorzijskimi funkcijami transformiranih komponent slučajnega vektorja ter korelacijske matrike. Od tu do karakteristične in nato porazdelitvene funkcije vsote komponent slučajnega vektorja pa je le še rutinski postopek, pri katerem je kot računsko sredstvo zelo primerna hitra Fourierova transformacija.

Nova metoda je zaenkrat uporabna le za manjše število tveganj in strukturo odvisnosti, ki jo določa nova družina kopul, s katero pa je mogoče doseči le šibke do zmerne korelacije. Te omejitve ni, če odvisnost med tveganji določa normalna kopula. V disertaciji je razvita nova metoda tudi za tak primer, njena matematična korektnost pa je dokazana za dve tveganji.

Ključne besede: karakteristična funkcija, kopula, porazdelitev agregatnih škod, solventnostni kapital, tveganje.

Actuarial modelling of sums of correlated insurance risks
Summary

This doctoral thesis discusses regulations on capital in insurance companies, risks in insurance, the measuring, comparing and sorting of risks, dependence measures and random variables dependence modelling, actuarial aggregate loss modelling, the cumulative distribution functions of sums of correlated random variables calculation, and optimal capital allocation. The theory presented is illustrated by showing the aggregate loss cumulative distribution function calculation for several portfolios. In addition to data, a knowledge of the above is crucial for the calculation of the solvency capital of an insurance company with an internal model as an alternative to the standard model provided by the new Solvency 2 regulation.

A key problem addressed in this thesis is how to calculate a cumulative distribution function of the sum of correlated risks based on the distribution functions of individual risks and correlations between them. A general solution to this problem has not yet been found. One possible way to solve it is based on the idea that the characteristic function of the random vector with a given structure of dependence between its components could be a function of marginal characteristic functions dependent only on the structure of dependencies between components. If such a function existed, it would be an analogy to copula, which by Sklar's theorem links a joint cumulative distribution function with marginal cumulative distribution functions. Such a function would enable a simple calculation of the characteristic and cumulative distribution function of the sum of random vector components. I prove in the thesis that such a function in a general case does not exist.

Furthermore, I develop a method that allows, in special cases, the calculation of the characteristic function of the random vector from its marginal characteristic functions, characteristic functions of distorted components of a random vector, and correlation matrix. To get from here to the characteristic and cumulative distribution function of the sum of random vector components is only a matter of routine, especially if using the Fast Fourier Transform as a calculation tool.

The new method is currently applicable only to a small number of risks and the structure dependence imposed by the new copula family, by which only weak to moderate correlations can be achieved. This restriction does not apply if the dependence between risks is imposed by normal copula. In the thesis a new method is developed for such a case and its mathematical correctness is proved for two risks.

Keywords: aggregate loss distribution, characteristic function, copula, risk, solvency capital.

Kazalo

Tabele

Slike

Algoritmi

Priloge

1 Uvod

1.1 Opredelitev problema

Zavarovalnice so pri svojem poslovanju izpostavljene številnim tveganjem, med katerimi so najpomembnejša zavarovalna in tržna tveganja. Med zavarovalna sodijo tista tveganja, ki so neposredno ali posredno povezana z zavarovalno-tehničnimi oziroma aktuarskimi izračuni zavarovalnih premij in zavarovalno-tehničnih rezervacij, pa tudi tveganja, povezana s prehitro oziroma nenadzorovano rastjo operativnih stroškov. Med tržna pa sodijo tista tveganja, ki so povezana z nestanovitnostjo cen finančnih instrumentov in tržnih cen drugih sredstev zavarovalnice.

Posledica prevelikega zavarovalnega tveganja je lahko veliko povečanje obveznosti zavarovalnice, posledica prevelikega tržnega tveganja pa je lahko občutno zmanjšanje njenih sredstev. Seveda na višino obveznosti in sredstev vplivajo tudi druga tveganja, ki jih tu ne omenjamo, če pa se posamezna večja ali več manjših tveganj uresniči, to lahko povzroči nesolventnost zavarovalnice.

Vzroki za težave s solventnostjo so lahko zelo raznoliki. Usodne so lahko napačne odločitve pri sprejemanju posameznih velikih rizikov v zavarovanje, denimo neustrezno določene zavarovalne premije ali napačno ocenjene maksimalne pričakovane škode, za celo vrsto manjših rizikov pa so lahko kritične že v izhodišču aktuarsko napačno izračunane premijske stopnje v premijskih cenikih. Tudi če so premije pravilno določene, so lahko za zavarovalnico usodni izredno neugodni naključni škodni procesi, denimo zaradi naravnih nesreč, neustrezno pozavarovanje, nepredvideno naraščanje števila ali višine škod zaradi sprememb gospodarskega okolja in še najrazličnejši drugi vzroki, seveda tudi taki, ki niso povezani z zavarovalnimi tveganji.

Zavarovalništvo temelji na "nadzorovani" naključnosti, zaradi česar je za varno poslovanje izjemno pomembno ustrezno upravljanje tveganj. Zavarovalnice bi morale zgodaj ugotavljati probleme in s pravočasnim ukrepanjem ščititi interese zavarovancev in lastnikov, da ne bi prišlo do delne ali celo popolne izgube kapitala, s katerim zavarovalnica jamči za izplačilo zavarovalnin oziroma odškodnin[1], če zbrane premije in zavarovalno-tehnične rezervacije ne zadoščajo. Interesi

[1] V nadaljevanju bomo namesto izrazov zavarovalnina in odškodnina kot sinonim za obe vrsti dajatve zavarovalnice, ki ju predvideva Obligacijski zakonik (Ur. l. RS, št. 97/2007-UPB1), uporabljali le izraz odškodnina. Izraz zavarovalnina je sicer nevtralnejši in bi lahko pomenil tudi odškodnine, ki se nanašajo le na odgovornostna zavarovanja, vendar bomo kljub temu raje uporabljali izraz odškodnina v smislu nadomestila za škodo, kot ga pojmuje Boncelj (1983, str. 20).

lastnikov niso vedno enaki interesom zavarovancev, ki bi bili ob morebitni nesolventnosti zavarovalnice prikrajšani za izplačilo odškodnin, zato je potreben tudi neodvisen zavarovalni nadzor. Zavarovalni nadzorniki bi morali zgodaj ugotoviti morebitne težave zavarovalnice, ko te še niso kritične, in s pravočasnim ukrepanjem preprečiti nastanek nesolventnosti. Tega problema se razvite države že dolgo dobro zavedajo, zato predpisujejo minimalno višino kapitala, ki ga morajo imeti zavarovalnice, in preverjajo njihovo solventnost.

Različne metode izračuna zakonsko zahtevanega minimalnega kapitala se razlikujejo predvsem po tem, katera tveganja, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, so upoštevana pri izračunu, seveda pa tudi po tem, kako na podlagi tveganja določimo višino kapitala.

Trenutno v Evropski uniji (EU) minimalni kapital za zavarovalnice, ki se ukvarjajo s premoženjskimi zavarovanji, računamo v skladu z Direktivo 2002/13/ES (Ur. l. EU, št. L 77/17, 2002), za zavarovalnice, ki se ukvarjajo z življenjskimi zavarovanji[2], pa z Direktivo 2002/83/ES (Ur. l. EU, št. L 345/1, 2002). Predpisani izračun minimalnega kapitala v obeh direktivah pa je le izboljšana verzija prvotnega načina izračuna, ki je bil predpisan že v 70. letih prejšnjega stoletja in ima nekatere pomanjkljivosti. Tako so, denimo, pri izračunu kapitala za premoženjske zavarovalnice upoštevana le zavarovalna tveganja, delno tudi kreditna tveganja, preostala tveganja pa so popolnoma zanemarjena.

Pomanjkljivosti obstoječega zavarovalniškega solventnostnega režima, ki ne upošteva vseh glavnih tveganj, želja po odpravi velikih razlik v predpisih posameznih držav EU in novi mednarodni standardi računovodskega poročanja (MSRP) so glavni razlogi za spremembo zavarovalniške regulative, ki ureja področje solventnosti. Delo poteka v okviru projekta Solventnost 2, ki še ni končan, ključna nova Direktiva 2009/138/ES (Ur. l. EU, št. L 335/1, 2009, v nadaljevanju Direktiva Solventnost 2) pa je že sprejeta. Direktiva predpisuje izračun solventnostnega kapitala, ki temelji na glavnih tveganjih zavarovalnice, predvideva pa uporabo standardnega, delnega ali popolnega internega modela.

Zelo verjetno bodo popolne interne modele lahko razvile le zelo velike zavarovalnice, kakršnih v Sloveniji ni. Delni interni modeli pa bi morali biti izziv tudi za slovenske zavarovalnice in pozavarovalnice, če bodo hotele bolj zanesljivo preživeti. Tudi če bodo višino kapitala računale s standardnim modelom, bo boljše poznavanje in upravljanje tveganj nujno, saj Solventnost 2 poleg kvantitativne predvideva tudi kvalitativno obravnavo tveganj. Obstaja tudi vrsta možnosti za

[2]S pojmom premoženjska oziroma življenjska zavarovanja so mišljena zavarovanja, kot jih v 2. členu določa Zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 99/2010-UPB7).

izboljšanje poslovanja, ki jih lahko zavarovalnice uresničijo le, če bolje upravljajo tveganja in jih ustrezno modelirajo. Odpirajo pa se tudi nove priložnosti, denimo pridobitev oziroma lažja ohranitev primerne bonitetne ocene, ki je vsaj za pozavarovalnice pogoj za resen vstop na mednarodno tržišče.

Osrednje vprašanje, ki ga obravnavamo v doktorski disertaciji, je vprašanje, kako izračunati skupno tveganje, če poznamo posamezna tveganja, ki so med seboj odvisna oziroma korelirana. Glavna podvprašanja pa so, kako tveganja sploh meriti, jih med seboj primerjati in urejati. Naštetа vprašanja so ključna za izgradnjo (delnega) internega modela, ki bi bil boljši napovedovalec dejanskih kapitalskih potreb kot pa standardni model Solventnosti 2. Sicer pa ta vprašanja v teoriji sodijo na področje verjetnostnega računa, v praksi pa so povezana z odločanjem v negotovih razmerah. Uporabna so predvsem pri reševanju pomembnih ekonomskih problemov v zavarovalništvu in bančništvu, pa tudi na mnogih drugih področjih.

1.2 Cilji in namen dela

Splošni okvir raziskovanja v disertaciji se posredno nanaša na predpise o kapitalski ustreznosti zavarovalnic. Ti so potrebni zaradi tveganosti dejavnosti, ki temelji na obvladovanju velikega števila naključnih škodnih dogodkov. Izhodišče raziskovanja so tveganja, ki so jim izpostavljene premoženjske zavarovalnice, glavni predmet raziskovanja pa so abstraktni modeli tveganj (slučajne spremenljivke) in z njimi povezana vprašanja kvantitativne narave: kako tveganja meriti, primerjati in urejati. Predvsem pa gre za to, kako izračunati vsoto koreliranih tveganj.

Če so posamezna tveganja zaradi v zavarovanje prevzetih rizikov med seboj neodvisna in jih je veliko, zanje lahko oblikujemo ustrezne aktuarske modele, ki so dovolj dobri za praktično napovedovanje bodočega škodnega dogajanja oziroma določanje primerne zavarovalne premije. Ključne so pravilno napovedane agregatne odškodnine, ki se nanašajo na posamezno obdobje. Napoved, ki je odvisna od predvidenega števila zavarovanj, pogostosti nastanka škod in porazdelitve njihove višine, je obvladljiva oziroma praktično rešljiva. Kot taka je obravnavana v disertaciji, kjer rešitev tega vprašanja, denimo porazdelitvena funkcija agregatnih odškodnin na ravni zavarovalne vrste, pomeni le enega od vhodnih podatkov za glavni problem.

Odvisnost oziroma koreliranost med posameznimi tveganji zaradi v zavarovanje prevzetih rizikov teoretično vedno obstaja že zaradi skupnih dejavnikov, denimo vremena ali inflacije, vendar pa ocenjujemo, da je majhna. Tovrstne odvisnosti oziroma koreliranosti med posameznimi riziki za isto zavarovalno vrsto v disertaciji ne obravnavamo (glej npr. Wang, 1998b, 1998c). Za njen vpliv predpostavljamo, da je že zajet v vhodnih podatkih (porazdelitvenih funkcijah agregatnih odškodnin na ravni zavarovalne vrste) oziroma je zanemarljiv. Omenimo še, da so korelacije med posameznimi tveganji zaradi v zavarovanje prevzetih rizikov oziroma med ustreznimi odškodninami včasih tudi velike, če so škode posledica naravnih nevarnosti, denimo toče ali viharja, kar pa modeliramo s posebnimi metodami, ki jih v disertaciji ne obravnavamo.

Izračun porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin za več neodvisnih zavarovalnih vrst skupaj je obvladljiv oziroma praktično rešljiv. Ko pa predpostavimo, da so agregatne odškodnine posameznih zavarovalnih vrst med seboj korelirane, se stvari zapletejo. Rešiti je treba ključni teoretični problem, ki si ga zastavljamo v disertaciji, kako izračunati porazdelitveno funkcijo vsote med seboj koreliranih slučajnih spremenljivk za dovolj širok nabor večrazsežnih porazdelitev. Praktičnih interpretacij tega teoretičnega problema je veliko. V kontekstu projekta Solventnost 2 se kot najpomembnejše zastavlja vprašanje, kako izračunati porazdelitveno funkcijo dobička oziroma izgube zavarovalnice, če poleg prihodkov upoštevamo tudi med seboj korelirane odhodke zaradi zavarovalnih, tržnih, kreditnih in operativnih tveganj. Z znanim rezultatom lahko ob dani še sprejemljivi stopnji tveganja nesolventnosti za dani časovni okvir določimo primerno višino kapitala, kar je eden od ključnih ciljev nove solventnostne zakonodaje.

Glavni namen disertacije je rešiti vprašanje, kako izračunati skupno tveganje, če poznamo posamezna tveganja, ki so med seboj odvisna oziroma korelirana. Predpostavimo, da za vsako glavno tveganje poznamo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke, s katero ga modeliramo, hkrati pa poznamo vrsto odvisnosti oziroma korelacije med tveganji. Glavni cilj disertacije je konkretni izračun porazdelitvene funkcije vsote znanega števila koreliranih slučajnih spremenljivk, s katerimi smo modelirali posamezna tveganja. Za rešitev te naloge obstaja več posebnih metod, ki so predstavljene tudi v disertaciji, nobena med njimi pa ni splošno uporabna oziroma primerna za vse primere. Zato je dobrodošel vsak prispevek k reševanju tega vprašanja, čeprav predstavlja le nov korak na poti do njegove splošne rešitve. V disertaciji predstavljamo novo izvirno pot, ki temelji na teoriji kopul, a je do cilja prehojena le za posebne primere.

V standardnem modelu, ki ga predpisuje Solventnost 2, je uporabljen poenostavljen pristop, da bo izračun izvedljiv tudi v zavarovalnicah z manjšimi finančnimi možnostmi. Tudi če uporaba primernejših metod za izračun skupnega tveganja v majhnih zavarovalnicah ne bo vplivala na višino njihovega solventnostnega kapitala, bodo natančnejši izračuni omogočali ustreznejše upravljanje tveganj z drugimi ukrepi, denimo primernejšim pozavarovanjem. Pomembni bodo tudi drugi stranski učinki podrobnejšega poznavanja tveganj. Tako bo s primerno alokacijo kapitala po zavarovalnih produktih, odvisno od njihove tveganosti, omogočena realnejša ocena njihove dobičkonosnosti. Tudi v zavarovalnicah, v katerih operativne stroške dosledno razporejajo na posamezne zavarovalne produkte ali vsaj na zavarovalne vrste, zelo verjetno kot ključ za alokacijo stroškov kapitala uporabljajo ustrezni delež zavarovalne premije. To je sicer usklajeno s trenutno veljavnimi predpisi za izračun minimalnega kapitala, vendar bistveno premalo odraža dejstvo, da zavarovalnice kapital potrebujejo zaradi tveganosti svoje dejavnosti, med tveganostjo posameznih zavarovalnih vrst ali posameznih zavarovalnih produktov pa so zelo velike razlike.

Navedimo še temeljno hipotezo in glavno tezo doktorske disertacije ter njima podrejene teze.

Temeljna hipoteza: Tudi v majhnih zavarovalnicah in pozavarovalnicah, ki bodo v režimu Solventnosti 2 uporabljale standardni model za izračun solventnostnega kapitala, je smiselno in uresničljivo razvijati interne modele merjenja in upravljanja tveganj, oziroma je smiselno in uresničljivo dopolnjevati modele, ki bodo predpisani.

Glavna teza: Porazdelitveno funkcijo vsote šibko do srednje močno koreliranih slučajnih spremenljivk, odvisno od števila le-teh, je mogoče izračunati s pomočjo formule za večrazsežno karakteristično funkcijo. Tovrstna teoretična rešitev je za neodvisne slučajne spremenljivke preprosta, za korelirane slučajne spremenljivke pa je v strokovni literaturi še neznana.

Teza 1: Vsak model merjenja in upravljanja tveganj, četudi preprost, lahko pripomore k izboljšanju poslovanja zavarovalnice.

Teza 2: Pozitivni učinki merjenja tveganj bi lahko nastali predvsem zaradi natančnejšega določanja višine zavarovalne premije, natančnejšega določanja zavarovalno-tehničnih rezervacij in lažjega določanja primernega pozavarovanja.

Teza 3: Med agregatnimi odškodninami za posamezne zavarovalne vrste večinoma ni prevelike korelacije, vsaj majhna korelacija pa je gotovo že zaradi odvisnosti od skupnih faktorjev, denimo inflacije ali vremena. Zato so za izračune skupnih agregatnih odškodnin primerne tudi metode, ki za večje korelacije niso uporabne.

Teza 4: Med bistveno različnimi tveganji, denimo zavarovalnimi, kreditnimi, tržnimi in operativnimi, obstajajo majhne do zmerno velike korelacije, ki pa jih je težko meriti. Zato se bodo v praksi verjetno uveljavile dogovorjene vrednosti.

Teza 5: V praksi so pogojno uporabne tudi različne ne dovolj teoretično utemeljene metode izračuna porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih slučajnih spremenljivk, če le dajo rezultate, katerih uporabo lahko upravičimo z načelom previdnosti. Primerni primerjalni rezultati so rezultati, ki jih dobimo za iste slučajne spremenljivke ob predpostavki, da so med seboj neodvisne.

Namen in cilj doktorske disertacije je tudi priprava orodij, med njimi tudi novih, potrebnih za izgradnjo internega modela za izračun kapitala, kot ga predvideva projekt Solventnost 2, oziroma priprava orodij za boljše upravljanje tveganj.

1.3 Uporabljena metodologija

Doktorska disertacija vsebuje teoretični vidik problematike in praktičen primer uporabe teorije. V uvajalnem delu disertacije podajamo pregled že znanih rezultatov z uporabo metode kompilacije, deskripcije, komparacije in sinteze.

Osrednji problem disertacije je eksaktno računanje porazdelitvene funkcije vsote koreliranih slučajnih spremenljivk. Za ta problem splošna analitična rešitev, ki bi omogočala tudi praktično uporabo, še ne obstaja, zato pa je problem praktično mogoče rešiti s simulacijo. V osrednjem delu disertacije so uporabljene predvsem metode matematičnega modeliranja, verjetnostnega računa in klasični matematični metodi analize in sinteze.

Pri praktičnem prikazu teoretičnih rezultatov je uporabljena tudi metoda simulacije in komparacije.

1.4 Znanstveni prispevek dela

Znanstveni prispevek doktorske disertacije oziroma z njo tesno povezanega raziskovalnega dela, katerega delni rezultati so objavljeni v (Komelj & Perman, 2010), temelji na dokazu glavne teze disertacije. Znano je, da lahko porazdelitveno funkcijo vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk izračunamo posredno prek večrazsežne karakteristične funkcije, ki je enaka produktu karakterističnih funkcij slučajnih spremenljivk, ki jih seštevamo. Ko že poznamo večrazsežno karakteristično funkcijo danega slučajnega vektorja, je izračun porazdelitvene funkcije vsote njegovih komponent preprost, tudi če so slučajne spremenljivke korelirane. Za tak izračun je zelo primerna hitra Fourierova transformacija.

Po zgledu neodvisnih slučajnih spremenljivk bi radi isto metodo uporabili tudi za korelirane slučajne spremenljivke. Problem je le v tem, da teoretično še ni znano, kako se večrazsežna karakteristična funkcija slučajnega vektorja s koreliranimi komponentami izraža s karakterističnimi funkcijami komponent. Zato praktična uporaba sicer izjemno uporabne hitre Fourierove transformacije ne pride v poštev. Wang (1998b) je poskusil iz karakterističnih funkcij slučajnih spremenljivk sestaviti njihovo karakteristično funkcijo. Rezultat njegove metode je lahko karakteristična funkcija izhodiščnih koreliranih slučajnih spremenljivk, ni pa to nujno.

Izhodiščni izziv za raziskovalno delo, prikazano v pričujoči disertaciji, je bila prav potencialno učinkovita Wangova metoda, ki pa nima trdnih teoretičnih temeljev. V disertaciji razvita nova metoda jamči, da je ključni vmesni rezultat izračuna porazdelitvene funkcije vsote koreliranih slučajnih spremenljivk z znano korelacijsko matriko vedno pripadajoča večrazsežna karakteristična funkcija, od tu naprej pa po že znani poti pripelje do končnega rezultata. Nova metoda je učinkovita, vendar ima praktične omejitve. Uporabna je le za manjše število slučajnih spremenljivk, ki jih želimo sešteti, in za šibke do zmerne višine korelacij. Z večanjem števila slučajnih spremenljivk se namreč interval dopustnih korelacijskih koeficientov hitro krči proti nič.

Za slučajne vektorje, za katere odvisnost med komponentami določa normalna kopula s poljubno korelacijsko matriko z zunajdiagonalnimi elementi, ki so absolutno manjši kot ena, smo v disertaciji razvili novo metodo za izračun porazdelitvene funkcije vsote komponent. V tem primeru torej ni omejitve na šibke do zmerne korelacije, vendar pa v dokazu korektnosti metode obstajajo še odprte tehnične podrobnosti. Za dvorazsežni primer je metoda zrela za objavo, za večrazsežni primer pa je še v fazi domneve oziroma v fazi formalnega dokazovanja pravilnosti. Praktične primerjave z novo metodo dobljenih rezultatov z rezultati, dobljenimi s simulacijo, pa utrjujejo prepričanje o njeni pravilnosti.

1.5 Struktura dela

V drugem poglavju predstavljamo pregled ključnih predpisov o kapitalu zavarovalnic v EU od prve generacije zavarovalniških direktiv do Solventnosti 2, kar je bilo delno predstavljeno že v (Komelj, 2011b). Predstavljena so tudi nekatera poročila o stanju v EU pred sprejetjem nove solventnostne direktive in rezultati kvantitativnih študij vpliva sprememb.

V tretjem poglavju prikazujemo tveganja, ki so jim izpostavljene premoženjske zavarovalnice, slovenske predpise o obvladovanju tveganj v zavarovalnicah in načine obvladovanja tveganj, kar je bilo delno predstavljeno že v (Komelj, 2011a). Ker je pozavarovanje izjemno pomemben ukrep za zmanjšanje zavarovalnih tveganj, so predstavljene še glavne pozavarovalne oblike.

V četrtem poglavju naštevamo načine, kako merimo, primerjamo in urejamo tveganja. Predstavljena so tudi glavna načela za določanje zavarovalne premije, ki ni nič drugega kot mera tveganja iz časov, ko tega pojma še niso poznali.

V petem poglavju začenjamo osrednji del disertacije. V njem so predstavljene mere in modeliranje odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami, poudarek pa je na kopulah. V razdelku 5.5.6 obravnavamo novo družino kopul, ki je rezultat raziskovalnega dela, katerega izsledki so objavljeni v (Komelj & Perman, 2010). Na tem mestu prikazujemo, kako za slučajne vektorje, za katere odvisnost med komponentami določa nova kopula, večrazsežno karakteristično funkcijo izračunamo iz robnih karakterističnih funkcij.

V šestem poglavju navajamo že znane metode za aktuarski izračun porazdelitvenih funkcij agregatnih odškodnin. Z metodami, ki so podrobneje obravnavane že v (Komelj, 2004), izračunamo porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin za posamezne zavarovalne vrste, to pa so vhodni podatki za izračune na višjih ravneh, pri katerih upoštevamo korelacije med zavarovalnimi vrstami.

V sedmem poglavju obravnavamo metode za izračun porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih slučajnih spremenljivk. Razdelek 7.6, v katerem razvijamo metodo za izračun s kopulami in hitro Fourierovo transformacijo, predstavlja znanstveni prispevek disertacije. To velja tudi za razdelek 7.5.2, v katerem dokazujemo, da ne obstaja "kopula", ki bi povezovala večrazsežno karakteristično funkcijo z robnimi karakterističnimi funkcijami, tako kot po Sklarovem izreku kopula povezuje večrazsežne porazdelitvene funkcije z robnimi porazdelitvenimi funkcijami.

V osmem poglavju obravnavamo optimalno alokacijo kapitala po vrstah tveganj in po zavarovalnih vrstah.

V devetem poglavju predstavljamo rezultate izračunov ekonomskega kapitala za vsoto štirih odvisnih tveganj, ki se nanašajo na štiri zavarovalne vrste. Izračuni so narejeni tudi za primer, ko imamo portfelje zaščitene s škodno presežkovnim pozavarovanjem.

Delo zaključujemo s sklepom ter seznamom literature in virov.

2 Predpisi o kapitalu zavarovalnic

Temeljna dejavnost vsake zavarovalnice je prevzem tveganj, ki jih zavarovalci, fizične in pravne osebe, prenesejo na zavarovalnico, v zameno pa ji plačajo zavarovalno premijo. Na ta način raje vnaprej izgubijo znani znesek, da se izognejo negotovim in predvsem po višini neznanim finančnim posledicam morebitnega škodnega dogodka.

Zavarovalnica premijo aktuarsko izračuna tako, da na daljši rok posluje z dobičkom, časovno razliko med prejemom premije in izplačilom odškodnine pa obvladuje z zavarovalno-tehničnimi rezervacijami. Če bi premijo izenačila s pričakovanimi odškodninami in stroški, tako da bi na daljši rok poslovala brez dobička, bi postala nesolventna, ne glede na kapital (glej npr. Antal, 2009, str. 34, izrek 4). Višina kapitala bi sicer vplivala na pričakovani čas do nesolventnosti, preprečila pa je ne bi.

Zavarovalnica potrebuje kapital predvsem zato, ker mora svoje obljube, da bo povrnila škodo, če bo do nje prišlo, izpolniti tudi v letih, ko skupne odškodnine in operativni stroški presegajo skupno premijo. Brez zadostnega kapitala, s katerim lahko pokrije primanjkljaj, bi v takih primerih postala nesolventna.

Kapital je torej potreben zaradi tveganj, ki jim je zavarovalnica izpostavljena, med katerimi je že omenjeno od zavarovalcev prevzeto tveganje sicer največje, vendar le eno izmed njih. Zato je prva obrambna linija pred nesolventnostjo zavarovalnice ustrezno upravljanje tveganj, šele druga linija pa kapital (A Global Framework for Insurer Solvency Assessment, 2004, str. 7, točka 2.33).

Zaradi pomembnosti kapitala za varno poslovanje zavarovalnic je v večini razvitih držav že dolgo predpisan minimalni potrebni kapital, ki ga mora imeti zavarovalnica. Učinkovito definirani potrebni kapital ima naslednje namene (A Global Framework for Insurer Solvency Assessment, 2004, str. 9, točka 3.3):

- zagotavlja fond za slabe čase,
- motivira zavarovalnico, da se izogne neželeni ravni tveganja,
- promovira kulturo merjenja in upravljanja tveganj v smislu, da je zahtevani kapital funkcija dejanskega ekonomskega tveganja,
- zavarovalnemu nadzorniku zagotavlja orodje za prevzem nadzora nad propadlo oziroma propadajočo zavarovalnico,
- zavarovalnega nadzornika opozarja na nove trende na trgu,
- z veliko verjetnostjo zagotavlja možnost prenosa portfelja z zavarovalnice v težavah na drugo zavarovalnico.

Predpisi o minimalnem potrebnem kapitalu, prav tako pa tudi zavarovalni nadzor, ščitijo interese zavarovancev, ne pa tudi interesov lastnikov zavarovalnic. Leti svoje interese lahko zaščitijo predvsem tako, da svoje apetite po prevzemu tveganj in s tem povezanimi pričakovanimi dobički prilagodijo kapitalu, ki so ga dejansko pripravljeni tvegati.

2.1 Kratek pregled različnih predpisov o solventnosti zavarovalnic

V svetu so se oblikovali različni predpisi o solventnosti zavarovalnic, ki se razlikujejo predvsem po načinu vrednotenja sredstev in obveznosti, med katerimi so najbolj pomembe zavarovalno-tehnične rezervacije, po kriterijih za izračun solventnostnega kapitala, po sredstvih, ki jih upoštevamo kot dejansko razpoložljivi kapital, po časovnem okviru opazovanja, zavarovalnem nadzoru ter številnih drugih podrobnostih.

Tabela 2.1: Primerjava nekaterih zavarovalniških solventnostnih sistemov

		Avstralija	Kanada	Danska	Nizozemska	Singapur	Švica	Velika Britanija	ZDA
Vrednotenje	Obveznosti	Najboljša ocena	Aktuarska ocena	Najboljša ocena	Najboljša ocena	Najboljša ocena	Najboljša ocena	Najboljša ocena	Aktuarska ocena
	Zavarovalno–tehnične rezervacije	Poštena vrednost	Aktuarska ocena	Tržna vrednost	Poštena vrednost	Poštena vrednost	Poštena vrednost	Poštena vrednost	Aktuarska ocena
	Sredstva	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna vrednost	Tržna ali nabavna vrednost
Osnove sistema	Količniki	Po pravilih iz leta 1973		Po pravilih EU	Po pravilih EU		Po pravilih EU	Po pravilih EU	
	Tveganja	Da	Da		Da	Da		Da	Da
	Scenariji		Da	Da	Da	Da	Da	Da, minimalne kapitalske zahteve	Da
	Načela	Da			Da		Da	Da, povečane kapitalske zahteve	
Kapital	Zajamčeni kapital	2 mio AUD		Po pravilih EU	Po pravilih EU	5 mio SGD	Po pravilih EU	Po pravilih EU	
	Minimalne kapitalske zahteve (MCR – minimal Capital Requirement)	Da	100 % rezultata testa minimalnega kapitala oziroma 120 % rezultata testa ustreznosti sredstev	Da, po pravilih EU	Da, po pravilih EU		Da, po pravilih EU	Da, po pravilih EU	Določen odstotek kapitala, odvisnega od posameznih tveganj (upoštevaje korelacije)
	Ciljne kapitalske zahteve (SCR – Solvency Capital Requirement)		150 % rezultata testa minimalnega kapitala oziroma 150 % rezultata testa ustreznosti sredstev		Ciljni kapital	Seštevek kapitala za posamezna tveganja	Ciljni kapital	Povečane kapitalske zahteve	Kapital, odvisen od posameznih tveganj (upoštevaje korelacije)

Vir: Prirejeno po Sandström, Solvency: Models, Assessment and Regulation, 2006, str. 178

Tako obveznosti v različnih državah ocenjujejo, denimo, po metodi najboljše ocene ali pa aktuarsko, zavarovalno-tehnične rezervacije ocenjujejo aktuarsko, po tržni ali pošteni vrednosti, sredstva pa po tržni ali nabavni vrednosti. Pri tem lahko zelo poenostavljeno rečemo, da je najboljša ocena največkrat enaka pričakovani vrednosti ali pa mediani porazdelitve, ko pa k temu prištejemo še na različne načine določen pribitek na negotovost, dobimo pošteno vrednost[3].

[3]Če prilagodimo definicijo, ki jo navaja Turk (2004, str. 505), je poštena vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij znesek, ki ga v premišljenem poslu dobro obveščeni in voljni odstopnik

Ne da bi se spuščali v podrobnosti pomena posameznih celic, v tabeli 2.1 navajamo primerjalni pregled nekaterih lastnosti solventnostne ureditve nekaterih držav.

Kljub delnemu poenotenju v EU, ki je posledica že sprejetih direktiv, je celo iz te tabele razvidno, da še vedno obstajajo razlike med posameznimi članicami EU. Razlike pa so tudi tam, kjer so vsaj formalno upoštevana enaka pravila. Tako je, denimo, iz Manghettijevega poročila o zavarovalno-tehničnih rezervacijah za premoženjska zavarovanja razvidno, da obstajajo razlike pri previdnosti, s katero različne članice EU oblikujejo škodne rezervacije, na zlasti velike razlike pa naletimo pri izravnalnih rezervacijah (glej Manghetti, 2000, str. 37–39).

2.2 Kapitalske zahteve v Evropski uniji pred projektom Solventnost 1

Problematika nadzorovanja solventnosti zavarovalnic je v Evropi že dolgo aktualna, zato je bilo razvitih kar nekaj metod za preverjanje solventnosti. Tako Kastelijn in Remmerswaal (1986, str. 22–26) navajata 19 različnih, večinoma evropskih metod za preverjanje solventnosti zavarovalnic, ki se ukvarjajo s premoženjskimi oziroma življenjskimi zavarovanji. Večina metod upošteva načelo neprekinjenega poslovanja in časovni okvir eno leto, kot navajata že Kastelijn in Remmerswaal (1986, str. 19), pa jih po skupnih značilnostih lahko razvrstimo v tri skupine:

1. Metode, ki temeljijo na analizi raznih količnikov, v večini primerov določajo minimalni kapital kot odstotek neke druge količine, denimo premije, ali pa solventnostno pozicijo zavarovalnice presojajo na podlagi različnih količnikov.
2. Metode, ki temeljijo na teoriji tveganj, vključno s teorijo porušitve, upoštevajo variabilnost obveznosti – agregatnih odškodnin, ki jih primerjajo z agregatno premijo in kapitalom, ne upoštevajo pa variabilnosti sredstev.
3. Metode na podlagi kompleksnih modelov, ki upoštevajo variabilnost obveznosti in sredstev.

Čeprav metode iz prve skupine sodijo med najbolj preproste, je v EU še vedno predpisana prav metoda iz te skupine.

Finska se s problematiko solventnosti zavarovalnic intenzivno ukvarja že od 50. let prejšnjega stoletja, Evropska gospodarska skupnost (EGS) kot predhodnica EU pa je že kmalu po nastanku leta 1957 začela razmišljati o prostem zavarovalnem

obveznosti zamenja za prevzem obveznosti, zaradi katerih so potrebne zavarovalno-tehnične rezervacije, z dobro obveščenim in voljnim prevzemnikom obveznosti.

trgu in usklajevati poglede na zavarovalno-tehnične rezervacije, kritno premoženje in nadzor nad sredstvi. Na temelju raziskav, katerih rezultate je leta 1961 objavil Campagne, sodelovanja z Organizacijo za gospodarsko sodelovanje in razvoj (OECD – Organisation for Economic Co-operation and Development) in rezultati delovne skupine, ki je nadaljevala Campagnejevo delo in objavila poročilo (glej de Mori, 1965), je EGS način izračuna minimalnega kapitala za zavarovalnice, ki se ukvarjajo s premoženjskimi zavarovanji, predpisala leta 1973, za življenjska zavarovanja pa leta 1979.

V naslednjih dveh razdelkih opisana ureditev solventnosti je bila upoštevana tudi v prvem slovenskem zavarovalniškem zakonu, le da je Zakon o zavarovalnicah (Ur. l. RS, št. 64/1994 in 35/1995) uporabljal drugačno terminologijo, kot jo uporabljamo danes.

2.2.1 Direktive za premoženjska zavarovanja

Glavni namen prve premoženjske direktive (Direktiva 73/239/EGS, Ur. l. ES, št. L 228/3, 1973) je bil odstraniti omejitve pri odpiranju zavarovalniških podružnic in zastopstev v drugih državah, članicah EGS. Za dosego tega cilja je bilo nujno odstraniti razlike v nacionalnih predpisih, ki so urejali zavarovalni nadzor, in usklajevati določbe, ki se nanašajo na finančna jamstva. Zato je prva premoženjska direktiva predpisala tudi izračun minimalnega kapitala, ki ga navajamo poenostavljeno, ne da bi se spuščali v podrobnosti in izjeme za posamezne zavarovalnice oziroma zavarovalne vrste:

1. **Izračun s premijskim količnikom:** prvi rezultat izračunamo tako, da kosmato premijo zadnjega leta do 10 milijonov obračunskih enot[4] pomnožimo z 18 % in prištejemo presežek nad 10 milijonov, pomnožen s 16 %. Dobljeni seštevek pomnožimo z lastnim deležem odhodkov za škode (razmerjem med čistimi in kosmatimi[5] odhodki za škode) v zadnjem letu, vendar ne z manj kot 50 %.
2. **Izračun s škodnim količnikom:** drugi rezultat izračunamo tako, da povprečne kosmate odhodke za škode v zadnjih treh letih[6] do 7 milijonov obračunskih enot pomnožimo s 26 % in prištejemo presežek nad 7 milijonov,

[4]Obračunska enota, danes evro, je bila definirana kot enota iz 4. člena statuta Evropske investicijske banke.

[5]Kosmate vrednosti se nanašajo na vrednosti pred upoštevanjem pozavarovanja, čiste vrednosti pa na vrednosti po upoštevanju pozavarovanja, zaradi česar so čiste vrednosti običajno manjše od kosmatih.

[6]Če prevladujejo zavarovanja, ki krijejo škodo zaradi nevihte, toče ali pozebe, se upošteva zadnjih sedem let.

pomnožen s 23 %. Dobljeni seštevek pomnožimo z lastnim deležem odhodkov za škode v zadnjem letu, vendar ne z manj kot 50 %.
3. Minimalni kapital je enak večjemu od obeh rezultatov, vendar pa ne sme biti manjši od absolutno predpisane spodnje meje.

Iz primerjave faktorjev za izračun s premijskim in škodnim količnikom ugotovimo, da je normalno pričakovano razmerje med odškodninami in premijo okrog 70 %, preostanek do 100 % pa je namenjen za kritje stroškov in dobiček. Če je dejanski delež odškodnin večji od 70 %, je premija, ki je v bistvu neke vrste mera zavarovalnega tveganja, podcenjena, zato takrat prevlada rezultat, dobljen s škodnim količnikom.

Množenje z najmanj 50 % je predpisano zato, da zmanjšuje odvisnost solventnosti zavarovalnice od solventnosti pozavarovalnic, pri katerih ima pozavarovane svoje rizike. Kapitalsko šibke zavarovalnice ne morejo povečati obsega poslovanja čez razumne meje in se izogniti povečanju kapitala s prenosom večine tveganja na pozavarovalnice.

Poleg načina izračuna solventnostnega kapitala je v direktivi natančno predpisano, katera sredstva upoštevamo kot razpoložljivi (dejanski) kapital, ki ga primerjamo z minimalnim kapitalom. Zavarovalnica je kapitalsko ustrezna, če je razpoložljivi kapital najmanj enak minimalnemu kapitalu in najmanj enak zajamčenemu kapitalu. Drugi pogoj pride v poštev le pri zavarovalnicah z majhnim obsegom poslovanja, saj je zajamčeni kapital definiran kot ena tretjina minimalnega kapitala, vendar ne manj od absolutno določenega zneska, ki je odvisen le od zavarovalnih vrst, s katerimi se zavarovalnica ukvarja. Če se ukvarja z več zavarovalnimi vrstami, se upošteva tista, za katero so kapitalske zahteve najvišje. Za zavarovalnice, ki se ukvarjajo vsaj z eno od bolj tveganih zavarovalnih vrst (katero koli odgovornostno zavarovanje, kreditno zavarovanje, kavcijsko zavarovanje), je spodnja meja za zajamčeni kapital 400.000 obračunskih enot, sicer pa 300.000 oziroma 200.000 obračunskih enot, če se ukvarja le z drugim škodnim zavarovanjem in/ali zavarovanjem stroškov postopka.

Direktiva predpisuje tudi ukrepe za primer, ko razpoložljivi kapital pade pod predpisano mejo. Če pade pod minimalni kapital, mora zavarovalnica pripraviti načrt za sanacijo finančnega stanja in ga zavarovalnemu nadzorniku v državi, kjer ima sedež, predložiti v odobritev. Če pa razpoložljivi kapital pade pod zajamčeni kapital, mora zavarovalnica pripraviti kratkoročni finančni načrt in ga predložiti v odobritev zavarovalnemu nadzorniku. Le-ta lahko zavarovalnici omeji ali prepove prosto razpolaganje s sredstvi.

Kreditna direktiva (Direktiva 87/343/EGS, Ur. l. ES, št. L 185, 1987) je spodnjo mejo zajamčenega kapitala za kreditna zavarovanja zvišala na 1,4 milijona evrov in predpisala obvezno oblikovanje izravnalnih rezervacij. Te rezervacije se v bistvu nanašajo na bodoče odškodnine iz bodočih zavarovalnih pogodb in so zato v nasprotju z računovodskim načelom strogega upoštevanja časa nastanka poslovnega dogodka. Nekatere države so izravnalne rezervacije uvedle tudi za preostale zavarovalne vrste, pri tem pa določile, kako jih upoštevati pri kapitalski ustreznosti. Tako so bile na Finskem prav izravnalne rezervacije glavni steber solventnosti že od 50. let prejšnjega stoletja naprej[7]. V Sloveniji je Zakon o zavarovalnicah (Ur. l. RS, št. 64/1994 in 35/1995) predpisal izravnalne rezervacije za vse zavarovalne vrste, za katere so bili izpolnjeni določeni pogoji, in dopustil njihovo upoštevanje pri izračunu razpoložljivega kapitala. Ko jih je Zakon o spremembah in dopolnitvah Zakona o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 79/2006–ZZavar-C) odpravil, razen za kreditna zavarovanja, so bile prenesene v kapital.

Druga premoženjska direktiva (Direktiva 88/357/EGS, Ur. l. ES, št. L 172/1, 1988) pomeni velik korak k skupnemu zavarovalnemu trgu, ker ga je omogočila tudi za velike rizike, na področje kapitalskih zahtev pa ni posegla.

Tretja premoženjska direktiva (Direktiva 92/49/EGS, Ur. l. ES, št. L 228/1, 1992) je z uvedbo enotnega dovoljenja za opravljanje zavarovalnih poslov naredila pomemben korak k enotnemu zavarovalnemu trgu, posredno pa je posegla tudi na področje kapitalskih zahtev. Za izravnalne rezervacije za kreditna zavarovanja, ki so obvezne, je namreč predpisala, da se ne smejo upoštevati pri izračunu razpoložljivega kapitala.

2.2.2 Direktive za življenjska zavarovanja

Sandström (2006, str. 15) navaja, da je glavni razlog za skoraj šestletni zaostanek med prvo premoženjsko in prvo življenjsko direktivo (Direktiva 79/267/EEC, Ur. l. ES, št. L 63, 1979) nesoglasje o tem, ali se lahko zavarovalnica hkrati ukvarja s premoženjskimi in življenjskimi zavarovanji. Zato ni presenetljivo, da ima prva življenjska direktiva kljub časovni distanci podoben namen in strukturo kot premoženjska predhodnica, prav tako pa tudi Campagnejevo izhodišče za ureditev solventnosti.

Prva življenjska direktiva predpisuje izračun minimalnega kapitala, ki ga navajamo poenostavljeno, ne da bi se spuščali v podrobnosti in izjeme za posamezne zavarovalnice oziroma zavarovalne vrste:

[7] Finska ob izdaji kreditne direktive še ni bila članica EGS. V EGS je vstopila leta 1995.

1. Prvi rezultat izračunamo tako, da 4 % kosmate matematične rezervacije pomnožimo z lastnim deležem matematične rezervacije v zadnjem letu, vendar ne z manj kot 85 %.
   Za več kot petletna zavarovanja, vezana na enote investicijskih skladov, za katera zavarovalnica ne prevzema naložbenega tveganja, pogodbeno dogovorjeni stroški upravljanja pa so fiksni za več kot pet let, namesto 4 % upoštevamo 1 %.
2. Drugi rezultat izračunamo tako, da 0,3 % tveganega kapitala (seštevka pozitivnih razlik med zavarovalnimi vsotami in matematičnimi rezervacijami po vseh policah) pomnožimo z lastnim deležem tveganega kapitala v zadnjem letu, vendar ne z manj kot 50 %.
   Za zavarovanje rizika smrti z zavarovalno dobo do treh let namesto 0,3 % upoštevamo 0,1 %, za zavarovalno dobo več kot tri in ne več kot pet let pa 0,15 %.
3. Minimalni kapital je enak seštevku obeh rezultatov.
4. Za dodatna zavarovanja, priključena življenjskemu zavarovanju, minimalni kapital izračunamo po pravilih za premoženjska zavarovanja in ga prištejemo rezultatu iz tretje točke.

Tudi ta direktiva zajamčeni kapital definira kot tretjino minimalnega kapitala, vendar ne manj kot 800.000 obračunskih enot, in predpisuje, kaj lahko upoštevamo kot razpoložljivi kapital. V nasprotju s prvo premoženjsko direktivo dopušča tudi upoštevanje 50 % bodočih dobičkov, vendar le z odobritvijo zavarovalnega nadzornika.

Glede na dejstvo, da v izračunu minimalnega kapitala nastopa tudi matematična rezervacija, direktiva pri izračunu le-te po Zillmerjevi metodi, ki matematično rezervacijo zaradi razmejevanja stroškov pridobivanja zavarovanj zmanjšuje, upoštevane stroške pridobivanja zavarovanj navzgor omejuje na 3,5 %.

Za primer, ko razpoložljivi kapital pade pod predpisano višino, direktiva predpisuje enake ukrepe kot prva premoženjska direktiva.

Druga življenjska direktiva (Direktiva 90/619/EEC, Ur. l. ES, št. L 330, 1990) ureja zavarovalni nadzor v domači državi in državi gostiteljici, tretja življenjska direktiva (Direktiva 92/96/EEC, Ur. l. ES, št. L 360, 1992) pa uvaja enotno dovoljenje za opravljanje zavarovalnih poslov tudi za življenjska zavarovanja. Na področje solventnosti ti dve direktivi ne posegata.

2.3 Kapitalske zahteve v Evropski uniji – projekt Solventnost 1

Glavna pomanjkljivost izračuna minimalnega kapitala, kot ga zahteva prva premoženjska direktiva, je dejstvo, da je pri izračunu upoštevano predvsem zavarovalno tveganje. Izjema je le delno upoštevanje kreditnega tveganja, kamor uvrščamo tudi tveganje, da pozavarovalnica zavarovalnici ne bo sposobna poravnati svojih obveznosti, izvirajočih iz prevzetega dela zavarovalnega tveganja. Tako je, denimo, kreditno tveganje pri premoženjskih zavarovalnicah upoštevano le v primeru, ko zavarovalnica v lastni izravnavi obdrži manj kot 50 % prevzetega zavarovalnega tveganja, merjeno z odhodki za škode, preostanek pa cedira pozavarovalnicam. V tem primeru je v izračunu upoštevanih 50 % več od dejanskega razmerja med čistimi in kosmatimi odhodki za škode. Zato dobimo višji minimalni kapital, kot bi izhajal iz zavarovalnega tveganja, ki ga zavarovalnica obdrži v lastni izravnavi, presežek pa lahko pripišemo kreditnemu tveganju.

Podobno velja tudi za minimalni kapital, kot ga zahteva prva življenjska direktiva, saj je odvisen predvsem od zavarovalnega tveganja in tveganj, povezanih z naložbami.

Že pri pripravi tretje generacije zavarovalniških direktiv, ki so izšle leta 1992, se je pojavilo vprašanje o potrebnosti revizije obstoječega solventnostnega režima. Do sprememb pa ni prišlo, da ne bi zamujali pri uvajanju skupnega zavarovalnega trga. Naloga je bila odložena z zavezo v obeh tretjih direktivah, da bo Evropska komisija najpozneje v treh letih Zavarovalnemu odboru (Insurance Committee), ki je predhodnik Evropskega odbora za zavarovalništvo in poklicne pokojnine EIOPC (European Insurance and Occupational Pensions Committee) poročala o potrebi po nadaljnji uskladitvi minimalnega kapitala. Evropska komisija je nalogo izpolnila s poročilom (glej Report to the Insurance Committee, 1997), v katerem je upoštevala ugotovitve Müllerjevega poročila in mnenja dveh panožnih združenj ter posvetovalne aktuarske organizacije Groupe Consultatif.

Kasneje je bila sprejeta odločitev, da se v prvi fazi (Solventnost 1) obstoječi solventnostni sistem revidira, v drugi fazi (Solventnost 2) pa temeljito prenovi.

2.3.1 Müllerjevo poročilo

Evropska komisija se je za revizijo obstoječega solventnostnega sistema odločila na podlagi poročila delovne skupine pod vodstvom dr. Helmuta Müllerja, ki je bila imenovana leta 1994. Müllerjevo poročilo (Müller, 1997) analizira tveganja, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, ter vzroke za težave zavarovalnic v državah EGS v zadnjih 20 letih. Poročilo ugotavlja, da bi se sicer redkim stečajem večinoma lahko izognili s povečanjem kapitala ali prevzemom. Nekaj primerov, ko je do stečaja prišlo zaradi premajhnih rezervacij za premoženjska zavarovanja z dolgoročnim iztekanjem obveznosti, neustreznih naložb, neusklajenih sredstev in obveznosti, hitre rasti ali neustreznega pozavarovanja, pa bi lahko preprečil ustreznejši solventnostni režim.

Sicer pa poročilo ugotavlja, da se je evropski solventnostni režim izkazal kot zadovoljiv, čeprav ima nekatere metodološke slabosti. Poročilo predlaga povečanje zajamčenega kapitala ter dodatne omejitve pri sredstvih, ki jih lahko upoštevamo kot razpoložljivi kapital, ter še nekaj izboljšav. Tako, denimo, predlaga še tretji količnik, povezan z zavarovalno-tehničnimi rezervacijami za premoženjska zavarovanja, ki bi ga upoštevali pri izračunu minimalnega kapitala.

2.3.2 Direktiva za premoženjska zavarovanja

Prva faza sprememb solventnostnega režima se je končala leta 2002, ko sta bili izdani novi direktivi za premoženjska in življenjska zavarovanja.

Direktiva 2002/13/ES (Ur. l. EU, št. L 77/17, 2002) je uvedla spremembo parametrov za izračun minimalnega kapitala, ki je opisan v razdelku 2.2.1. Mejna zneska 10 oziroma 7 milijonov evrov sta povečana na 50 oziroma 35 milijonov evrov, hkrati pa je uvedenih še nekaj novosti, ki zmanjšujejo verjetnost nastanka nesolventnosti. Za zavarovanje odgovornosti pri uporabi zrakoplovov in plovil ter pri splošnem zavarovanju odgovornosti je treba pri izračunu minimalnega kapitala s premijskim oziroma škodnim količnikom premijo in odhodke za škode povečati za 50 %, pri izračunu lastnega deleža odškodnin pa je treba upoštevati zadnja tri leta.

Direktiva uvaja tudi razne korektivne mehanizme za zavarovalnice, ki se jim obseg poslovanja zmanjšuje. Tako je, denimo, pri izračunu s premijskim količnikom treba upoštevati prihodke od premij, če so večji od premije tekočega leta. To se zgodi takrat, ko obseg poslovanja pada, zaradi česar je prenosna premija na začetku obračunskega obdobja večja od tiste na koncu obračunskega obdobja. Prav tako minimalni kapital tekočega leta ne sme biti manjši od minimalnega kapitala preteklega leta, pomnoženega z razmerjem med čistimi škodnimi rezervacijami tekočega in preteklega leta, če se škodne rezervacije zmanjšujejo. S tem je zagotovljeno, da se minimalni kapital ne zmanjšuje hitreje kot škodne rezervacije.

Direktiva je spodnjo mejo zajamčenega kapitala zvišala na 3 milijone evrov, če se zavarovalnica ukvarja vsaj z eno od bolj tveganih zavarovalnih vrst (katero koli odgovornostno zavarovanje, kreditno zavarovanje, kavcijsko zavarovanje), sicer pa na 2 milijona.

Navedene dopolnitve prvotnega načina izračuna minimalnega kapitala za premoženjska zavarovanja iz leta 1973 so sicer pomembne, ne odpravljajo pa glavne pomanjkljivosti. Še vedno je pri izračunu minimalnega kapitala praktično upoštevano le zavarovalno tveganje.

2.3.3 Direktiva za življenjska zavarovanja

Novo življenjsko direktivo (Direktiva 2002/12/EC, Ur. l. ES, št. L 77/11, 2002) je že po osmih mesecih zamenjala konsolidirana Direktiva 2002/83/ES (Ur. l. EU, št. L 345/1, 2002), ki je razveljavila tudi prvi dve življenjski direktivi, delno pa tudi tretjo. Pri izračunu minimalnega kapitala, kot je poenostavljeno predstavljen v razdelku 2.2.2, je sprememba le pri zavarovanjih, vezanih na investicijske sklade, pri katerih zavarovalnica ne prevzema naložbenega tveganja. Če pogodbeno dogovorjeni stroški upravljanja niso fiksni več kot pet let, je po novem namesto štirih odstotkov od matematične rezervacije treba upoštevati 25 % čistih stroškov upravljanja premoženja v preteklem letu. Zaradi spremembe pri izračunu minimalnega kapitala za premoženjska zavarovanja je sprememba tudi pri izračunu minimalnega kapitala za dodatna zavarovanja.

Direktiva dopolnjuje tudi seznam premoženja, ki ga lahko upoštevamo kot razpoložljivi kapital, predvsem pa spodnjo mejo za zajamčeni kapital postavlja na 3 milijone evrov. Še vedno pa je izračun minimalnega kapitala odvisen od pomanjkljivega nabora tveganj.

2.4 Kapitalske zahteve v Evropski uniji – projekt Solventnost 2

Novi solventnostni režim bo bistveno drugačen od obstoječega režima, temelječega na količnikih, saj bo projekt Solventnost 2 uvedel izračun potrebnega kapitala na podlagi tveganj, ki so jim zavarovalnice izpostavljene. Za Evropsko unijo nov način, razen delno za Finsko, Veliko Britanijo in Nizozemsko, temelječ na t. i. RBC (Risk Based Capital) načelu, je marsikje že uveljavljen, denimo v ZDA, Kanadi, Avstraliji, Švici in na Japonskem, prav tako pa je temeljno načelo v bančnem kapitalskem dogovoru Basel II.

Projekt Solventnost 2 predvideva tri stebre. V prvem stebru bodo definirane kapitalske zahteve, ki jih bo morala izpolnjevati zavarovalnica, tako da bosta določeni dve višini kapitala. Če bo razpoložljivi kapital zavarovalnice padel pod prvo mejo, ki jo bo predstavljal zahtevani solventnostni kapital (SCR – Solvency Capital Requirement), bo zavarovalni nadzornik začel ukrepati po predpisih iz drugega stebra. Če pa bo dejanski kapital padel tudi pod drugo mejo, ki jo bo predstavljal zahtevani minimalni kapital (MCR – Minimal Capital Requirement), bo zavarovalni nadzornik še resneje ukrepal, lahko tudi s prepovedjo sklepanja novih zavarovanj. V prvem stebru bo določeno, katera tveganja bodo upoštevana pri izračunu kapitala, kar pomeni, da jih bo potrebno kvantitativno obravnavati – meriti, prav tako bo predpisano, kako upoštevati medsebojne odvisnosti oziroma korelacije med temi tveganji. Prvi steber bo urejal tudi zavarovalno-tehnične rezervacije in vrednotenje sredstev.

Drugi steber bo dopolnjeval prvega in bo urejal predvsem nadzor. Tu bo urejen tudi proces upravljanja tistih tveganj, ki ne bodo kvantitativno upoštevana pri izračunu potrebnega kapitala v prvem stebru. Tako tveganje bo, denimo, likvidnostno tveganje.

Tretji steber bo urejal predvsem razkritja, poročanje in drugo, kar je povezano s preglednostjo poslovanja.

2.4.1 Kapitalski dogovor Basel II za banke

Baselski odbor za bančni nadzor (Basel Committee on Bank Supervision) s sedežem pri Banki za mednarodne poravnave (Bank for International Settlements) v Baslu je leta 1988 uvedel standard za izračun kapitalskih zahtev za banke, imenovan Baselski kapitalski dogovor oziroma Basel I, po katerem je višina potrebnega kapitala odvisna od strukture oziroma rizičnosti sredstev banke. V nasprotju z zavarovalnim sektorjem, za katerega še ni na vidiku enotne ureditve, veljavne po vsem svetu, je Basel I postal temelj bančnega nadzora v več kot 100 svetovnih državah, čeprav ni zavezujoč.

Leta 1999 je bila objavljena revizija pravil, ki je bila z dopolnitvami sprejeta leta 2004 (glej International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, 2004). Novi baselski kapitalski dogovor oziroma Basel II, ki je bil nato še dopolnjen, je v uporabi od konca leta 2006 naprej in temelji na treh med seboj povezanih stebrih. Prvi steber pokriva minimalne kapitalske zahteve, odvisne od kreditnega, tržnega in operativnega tveganja, drugi nadzor in upravljanje tveganj, tretji pa tržno disciplino, kamor uvršča tudi razkritje pomembnih informacij.

Basel II tveganja iz prvega stebra obravnava kvantitativno, pri čemer dopušča tudi uporabo internih modelov, preostala tveganja, med njimi tudi tveganje spremembe obrestne mere, pa obravnava kvalitativno v drugem stebru.

Po mnenju Evropske komisije bi Basel II lahko bil dobra osnova za projekt Solventnost 2 (Note to the Solvency Subcommittee – Banking rules, 2001), čeprav so se pojavili tudi dvomi o primernosti bančnih pravil za zavarovalnice (glej Note to the Solvency Subcommittee: Risk-based capital systems, 2001).

2.4.2 Lamfalussyjev proces

Svet EU je leta 2001 za razvoj regulative za finančni sektor odobril t. i. Lamfalussyjev proces, ki temelji na štirih ravneh. V primeru Solventnosti 2 so ravni naslednje:

1. **raven**: Evropska komisija pripravi predlog direktive, ki vsebuje okvirna načela. Ko Evropski parlament in Svet EU sprejmeta direktivo, se podrobni izvedbeni predpisi pripravijo na 2. ravni.
2. **raven**: Po posvetu z EIOPC, ki je odbor druge ravni, Evropska komisija zahteva nasvet o izvedbenih predpisih od Odbora evropskih nadzornikov za zavarovalništvo in poklicne pokojnine (CEIOPS – Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors), ki je odbor tretje ravni. CEIOPS po posvetu z udeleženci na trgu, npr. Groupe Consultatif in CEA (Comité Européen des Assurances), pripravi odgovor in ga posreduje Evropski komisiji. Ta pripravi formalni predlog in ga posreduje EIOPC, ki je pristojen za sprejem.
3. **raven**: CEIOPS pripravi predlog interpretacije priporočil, navodila in standarde za zagotovitev konsistentne uvedbe v uporabo.
4. **raven**: Evropska komisija nadzoruje uvajanje zakonodaje EU v zakonodajo članic in njuno usklajenost.

Tak pristop naj bi omogočil prožnejše in učinkovitejše uravnavanje ter hitrejše odločanje in izboljšano konvergenco nadzora na ravni EU.

V primeru Solventnosti 2 je obstajalo soglasje o tem, da naj novi režim upošteva tveganja, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, hkrati pa naj bo prilagodljiv na spremembe v finančnem okolju. Zato je bilo težišče dela na nižjih ravneh. Tako je revizijska in svetovalna družba KPMG pripravila splošno poročilo o trenutnem stanju, delovna skupina Konference zavarovalnih nadzornikov EU (Insurance Conference, the Conference of Insurance Supervisory Authorities of the European Union), ki je bila ustanovljena že leta 1958 in je predhodnica CEIOPS[8], pa poročilo o vzrokih zadnjih primerov nesolventnosti zavarovalnic. Poleg teh dveh poročil, na kratko predstavljenih v nadaljevanju, je delovna skupina za življenjska zavarovanja preučila in poročala o pravilih za izračun matematičnih rezervacij in usklajevanju obveznosti in sredstev (glej Report of the working group on

[8]EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) je 1. januarja 2011 zamenjala CEIOPS in dobila tudi nove pristojnosti.

life assurance, 2002), druga delovna skupina pa je preučila škodne in izravnalne rezervacije. Tudi njeno poročilo (glej Report of the working group on non-life technical provisions, 2002), ki je dopolnitev Manghettijevega poročila, ugotavlja razlike pri previdnosti, s katero različne članice oblikujejo škodne rezervacije, zlasti pa velike razlike pri izravnalnih rezervacijah.

2.4.3 KPMG-jevo poročilo

Poročilo Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision (2002), ki ga je Evropska komisija pri KPMG-ju naročila decembra 2000, torej še pred začetkom projekta Solventnost 2, povzema takratno stanje in možnosti razvoja problematike solventnosti zavarovalnic. Poročilo ugotavlja, da solventnostni sistem temelji na predpisih o sredstvih, zavarovalno-tehničnih rezervacijah in minimalnem kapitalu, izračunanem na podlagi količnikov. Kot glavno omejitev tega sistema navaja odvisnost minimalnega kapitala od omejenega nabora tveganj oziroma neupoštevanje za posamezno zavarovalnico specifičnih tveganj pri izračunu njenega minimalnega kapitala.

Poročilo navaja priložnosti oziroma izzive zaradi konvergiranja k skupnim pravilom za ves finančni sektor zaradi bodoče uvedbe MSRP ter s tem povezane težave. Tako, denimo, ugotavlja razkorak med trenutnim preudarnim oziroma previdnim vrednotenjem zavarovalno-tehničnih rezervacij in vrednotenjem na podlagi najboljše ocene, povečane za pribitek na negotovost.

Poročilo ugotavlja, da bi moral biti kapital odvisen vsaj od zavarovalnega, tržnega, kreditnega in operativnega tveganja ter tveganja zaradi neusklajenosti sredstev in obveznosti, za bodočo ureditev pa po bančnem zgledu predlaga sistem treh stebrov, od katerih bi prvi zajemal kapitalske zahteve, drugi nadzor, tretji pa tržno disciplino.

2.4.4 Sharmovo poročilo

Ko je Evropska komisija maja 2001 začela s projektom Solventnost 2, je zaprosila Konferenco zavarovalnih nadzornikov EU za izhodišča in priporočila.

Delovna skupina, ki jo je vodil Paul Sharma, se je pri delu osredotočila na razumevanje vzrokov in posledic tveganj, ki ogrožajo solventnost zavarovalnic, na vprašanje boljšega nadzora upravljanja tveganj v zavarovalnicah ter na preventivne in kurativne ukrepe za pravočasno predvidevanje in odpravljanje težav s solventnostjo.

V poročilu (glej Sharma, 2002) je podana analiza vzrokov za propade in zelo resne težave zavarovalnic po obdobju, ki ga je že obdelalo Müllerjevo poročilo. Med letoma 1996 in 2001 je bilo v EU 85 večjih težav v zavarovalnicah, s katerimi so se ukvarjali zavarovalni nadzorniki. V 20 primerih (17 premoženjskih in 3 življenjske zavarovalnice) je prišlo do zaprtja, za preostalih 65 pa so našli obliko zaščite interesov zavarovancev z obveznim ali prostovoljnim prenosom portfelja na drugo zavarovalnico, prevzemom ali dokapitalizacijo. V teh postopkih je potem dejansko izginilo še 29 zavarovalnic.

Delovna skupina je podrobno obdelala 21 primerov in ugotovila, da je bila za vsako težavo sicer kriva uresničitev konkretnega tveganja, ki pa je bila le zaključek verige med seboj povezanih vzrokov in posledic. Do težav je vedno prihajalo od znotraj, denimo zaradi slabega ali neizkušenega vodstva, posledica pa so bile neustrezne notranje kontrole in napačne odločitve, zaradi katerih je zavarovalnica postala ranljiva na zunanje dogodke z neugodnimi finančnimi posledicami. Na podlagi teh ugotovitev je v poročilu naveden sistematičen pregled tveganj ter shematična veriga vzrokov in posledic.

Poročilo ugotavlja, da bi bil nadzor ustreznejši, če bi uporabljal orodja, s katerimi bi se lahko lotili celotne vzročne verige, in taka orodja tudi predlaga. Pri tem pa ugotavlja, da bo v bodočem sistemu treba najti ravnotežje med nadzornimi in preventivnimi aktivnostmi ter ohranitvijo svobodnega poslovanja zavarovalnic.

2.4.5 Poročilo Mednarodnega aktuarskega združenja

Pri pripravi MSRP je zaradi računovodskega načela, ki prepoveduje oblikovanje zavarovalno-tehničnih rezervacij za obveznosti, ki se nanašajo na bodoče zavarovalne pogodbe, npr. izravnalne rezervacije ali skrite rezerve v preveč previdno oblikovanih škodnih rezervacijah, kmalu postalo jasno, da se bo raven zavarovalno-tehničnih rezervacij verjetno znižala. Če ne želimo zmanjšati varnosti zavarovancev, je samoumeven odgovor na zmanjšanje rezervacij povečanje kapitala. Mednarodno aktuarsko združenje (IAA[9] – International Actuarial Association) je zaznalo priložnost za tako ureditev problematike, ki bi bila sprejemljiva za Odbor za mednarodne računovodske standarde (IASB – International Accounting Standards Board) in za Mednarodno združenje zavarovalnih nadzornikov (IAIS – International Association of Insurance Supervisors). Zato IAA sodeluje pri pripravi MSRP in novi solventnostni ureditvi, kar sta dva ločena procesa.

[9] Zaradi delnega prekrivanja področij, ki jih obravnavajo aktuarji in notranji revizorji, obstaja možnost zamenjave med International Actuarial Association in Internal Auditors Association, ker obe združenji uporabljata isto kratico. V tej disertaciji je s kratico IAA vedno mišljeno Mednarodno aktuarsko združenje.

Na pobudo IAIS, naj IAA z aktuarskega vidika razišče problematiko solventnosti, je delovna skupina IAA izdelala poročilo A Global Framework for Insurer Solvency Assessment (2004).

Poročilo ugotavlja, da je sistem treh stebrov zelo primeren, ker lahko ustvari stično točko med bančnim in zavarovalnim sektorjem, zlasti še, ker je marsikje nadzor zavarovalnic že del skupnega finančnega nadzora. Ker vseh tveganj ne bo mogoče kvantitativno ovrednotiti v prvem stebru, bo zelo pomemben tudi nadzor, predviden v drugem stebru, in razkritje bistvenih podatkov v tretjem stebru.

Poročilo podpira celovit pogled na bilanco stanja ter realno ovrednotenje sredstev in obveznosti, kar onemogoča skrite presežke ali primanjkljaje.

Poročilo ugotavlja, da mora predvideni časovni okvir upoštevati časovni zaostanek med ugotovitvami in možnimi reakcijami nadzornikov. Dovolj dolg mora biti tudi zato, da zajame tudi morebitne ekstremne dogodke. Čeprav je treba gledati daleč naprej, poročilo za ugotavljanje trenutne kapitalske pozicije priporoča časovni okvir enega leta.

Poročilo z izjemno pozornostjo obravnava tveganja in priporoča, da se ocenijo medsebojni vplivi posameznih tveganj, tako da skupni kapital za nevtralizacijo skupnega tveganja ne bo le seštevek posameznih delnih kapitalov. Zaradi zelo naprednih pogledov, če jih primerjamo z obstoječo solventnostno ureditvijo, temelječo na količnikih, so potrebna tudi ustrezna matematična orodja. Poročilo jih obravnava – od preprostih do zapletenih, kot so, denimo, kopule.

2.4.6 Standardni model

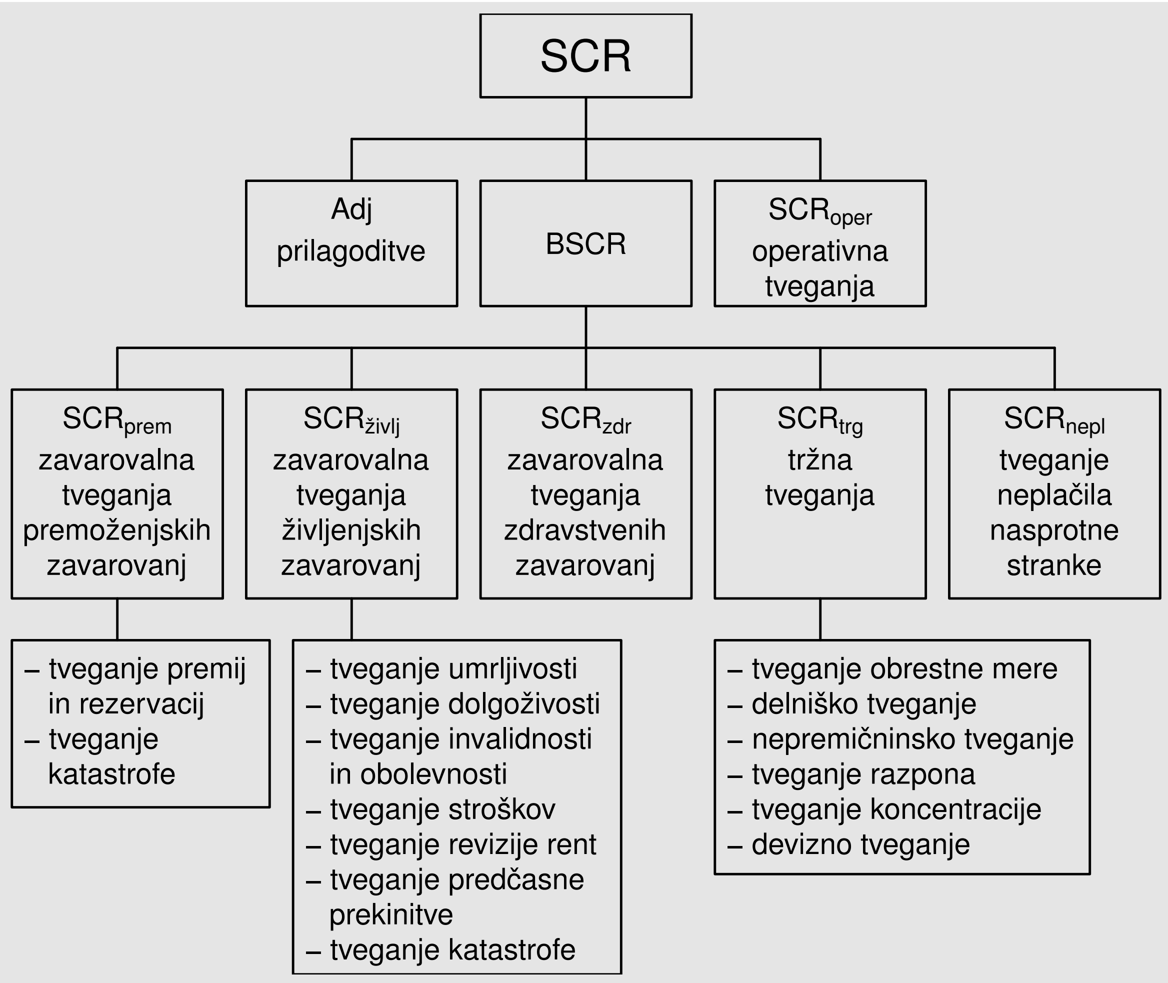
V prvem stebru Solventnosti 2 je predvideno, da bodo zavarovalnice SCR in MCR računale s standardnim modelom (s standardno formulo), delnim ali popolnim internim modelom. V vseh treh primerih bodo tveganja urejena v drevesno strukturo. Minimalni nabor tveganj, ki jih bo treba upoštevati pri izračunu, je razviden s slike 2.1, na kateri so upoštevana le tveganja, ki jih Direktiva Solventnost 2 navaja v prilogi IV, čeprav so, denimo, v besedilu direktive tudi zavarovalna tveganja zdravstvenih zavarovanj razčlenjena na štiri podtveganja.

Za izračun SCR je ključna zahteva Solventnosti 2, da mora zavarovalnica po enem letu z 99,5-odstotno verjetnostjo ostati solventna. Ta razmeroma stroga zahteva je ob ustreznih predpostavkah izpolnjena, če SCR računamo od spodaj navzgor. Najprej za vsa tveganja, ki jih ne delimo več na podtveganja[10], izračunamo delne

[10]Ta tveganja niso nujno na isti najnižji ravni drevesa tveganj, so pa njegovi listi.

SCR, s katerimi jih z 99,5-odstotno verjetnostjo nevtraliziramo, nato pa izračunamo delne SCR za tveganja na naslednji višji ravni iz delnih SCR za neposredno podrejena tveganja in korelacij med njimi. Tako postopoma priplezamo do vrha drevesa.

Slika 2.1: Komponente za izračun zahtevanega solventnostnega kapitala



Vir: Lastna izdelava na podlagi Direktive Solventnost 2, priloga IV

Ko postopoma izračunamo delne solventnostne kapitale za vsa tri zavarovalna tveganja s slike 2.1 ter tržna tveganja in tveganje neplačila nasprotne stranke, osnovni zahtevani solventnostni kapital (BSCR – Basic Solvency Capital Requirement) izračunamo s formulo

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \times SCR_i \times SCR_j}, \tag{2.1}$$

kjer indeksa i in j tečeta po vseh možnih vrednostih *prem*, *življ*, *zdr*, *trg* in *nepl* za glavna tveganja, ρ_{ij} pa so v direktivi predpisani korelacijski koeficienti med njimi. SCR dobimo tako, da k BSCR prištejemo delni SCR za operativna tveganja in seštevek prilagodimo (zmanjšamo) zaradi absorbcijske zmožnosti zavarovalno-tehničnih rezervacij in odloženih davkov.

Standardni model bo predpisan v izvedbenih predpisih Direktive Solventnost 2, zato vse podrobnosti o njem še niso znane. Bil naj bi dovolj preprost, da bi ga lahko uporabljale vse zavarovalnice. V njem bo predpisano, kako je treba izračunati delni SCR na dnu hierarhije tveganj, za vse ravni pa bodo predpisani korelacijski koeficienti med tveganji, ki sestavljajo tveganje na prvi višji ravni. Izračun delnih SCR bo za številna tveganja na dnu hierarhije temeljil na različnih faktorjih, izračunanih za povprečno zavarovalnico, za višje ravni pa bo zadoščala enačba (2.1). Tak izračun, ki bo temeljil na številnih poenostavitvah teoretičnega modela, ki stoji za njim, in na načelu previdnosti, bo verjetno za nekatere zavarovalnice, predvsem pa za zavarovalne skupine, zahteval preveč kapitala. To pa je pomemben motiv za izgradnjo natančnejših internih modelov, ki ga spodbujajo tudi rezultati pete kvantitativne študije vpliva sprememb. Z internim modelom izračunani SCR se v povprečju za posamezne zavarovalnice nepomembno razlikuje od SCR, ki je bil izračunan s standardno formulo, zato pa je pri zavarovalnih skupinah za 20 % manjši (glej EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study, 2011, str. 7 in 114).

2.4.7 Interni model

Interni modeli se bodo od standardnega modela v bistvu razlikovali le po tem, da bodo pri izračunu delnih SCR za tveganja na dnu hierarhije upoštevane specifičnosti in podatki posameznih zavarovalnic, pri izračunu SCR na višjih ravneh pa bodo uporabljene natančnejše metode.

Stroški razvoja internega modela bodo zelo veliki, potrebna pa bo tudi kritična masa strokovnjakov z različnih področij, aktuarjev, finančnikov, specialistov za posamezne vrste tveganj itd. Uporabo internega modela bo moral odobriti zavarovalni nadzornik, za kar bo moral interni model, med drugim, prestati test uporabnosti, zagotavljati ustrezno kakovost podatkov in metod ter biti ustrezno dokumentiran.

Poleg obstoječih prednosti, denimo zaradi ekonomije obsega, bodo največje zavarovalnice z uporabo internih modelov pridobile še dodatno prednost. Z internim modelom izračunani kapital bo verjetno manjši od kapitala, izračunanega s standardnim modelom, zato bodo laže dosegale donosnost na kapital, ki jo pričakujejo lastniki in morebitni investitorji. Zaradi tovrstnih pričakovanj pa pri izgradnji internih modelov obstaja tudi možnost zlorab.

2.4.8 Kvantitativne študije vpliva sprememb

Evropska komisija je v drugem valu pozivov za nasvet prosila CEIOPS, naj ugotovi kvantitativne vplive novega solventnostnega režima na zavarovalnice. Prva kvantitativna študija vpliva sprememb je bila izvedena leta 2005 s podatki za leto 2004. V študiji je sodelovalo 312 zavarovalnic iz 19 držav, vendar vse niso uspele izračunati ključnih rezultatov. Tako je dovolj podrobne rezultate pripravilo 272 zavarovalnic. Od tega je bilo 68 majhnih, 90 srednjih in 101 velika, za 13 zavarovalnic pa velikost ni znana. Kriterije za določitev velikosti so določili posamezni nacionalni zavarovalni nadzorniki in iz rezultatov študije niso razvidni.

Z rezultati, ki so objavljeni v poročilu QIS1 – Summary report (2006), naj bi ugotovili stopnjo previdnosti pri ocenjevanju zavarovalno-tehničnih rezervacij. Sodelujoče zavarovalnice so morale primerjati dejansko stanje zavarovalno-tehničnih rezervacij z zavarovalno-tehničnimi rezervacijami, izračunanimi na različne načine, ki bi po novem lahko prišli v poštev. Za ta namen je bilo potrebno izračunati najboljšo oceno rezervacij (pričakovano vrednost obveznosti), standardni odklon in višino rezervacij, ki bi z verjetnostjo 60 %, 75 % oziroma 90 % zadoščala za pokritje obveznosti. Ocene je bilo potrebno narediti za prenosno premijo in škodne rezervacije, posebej za kosmate zneske in posebej za čiste zneske, enkrat z diskontiranjem, drugič brez njega.

Ključna ugotovitev prve kvantitativne študije je, da so dejanske zavarovalno-tehnične rezervacije za klasična življenjska zavarovanja in za premoženjska zavarovanja višje od ocen, temelječih na izračunu prej navedenih kvantilov, in višje od najboljše ocene obveznosti, povečane za pribitek na negotovost v višini polovice standardnega odklona.

V drugi kvantitativni študiji, ki je bila izvedena leta 2006 s podatki za leto 2005, je sodelovalo 514 zavarovalnic iz 23 držav, od tega 155 majhnih, 220 srednjih in 132 velikih. Tokrat so bili kriteriji za velikost, ki so ostali enaki tudi v naslednjih študijah, jasno določeni. Med majhne življenjske zavarovalnice so bile uvrščene zavarovalnice, ki so imele manj kot eno milijardo evrov kosmatih zavarovalno-tehničnih rezervacij, med velike tiste, ki so jih imele več kot deset milijard, preostale pa med srednje. Med majhne premoženjske zavarovalnice so bile uvrščene zavarovalnice, ki so imele manj kot sto milijonov evrov kosmate obračunane premije, med velike tiste, ki so je imele več kot eno milijardo, preostale pa med srednje.

Študija je poleg obveznosti obravnavala tudi vrednotenje sredstev, zahtevani solventnostni in minimalni kapital ter razpoložljivi kapital, izračunan z razliko med tržno vrednostjo sredstev in obveznosti. Namen študije je bil ugotoviti vpliv predlaganih izračunov na bilanco stanja in višino kapitala, upoštevaje standardni in interni model, ter dobiti oceno o praktični uporabnosti oziroma primernosti predlaganih načinov izračunov.

Če rezultate, izračunane po metodologiji študije in predstavljene v poročilu QIS2 – Summary Report (2006), primerjamo s tistimi po pravilih za Solventnost 1, so se zavarovalno-tehnične rezervacije zmanjšale (vpliv diskontiranja je pomemben), zahtevani solventnostni kapital se je povečal, prav tako se je povečal tudi razpoložljivi kapital. Razmerje med razpoložljivim kapitalom in zahtevanim solventnostnim kapitalom za življenjske zavarovalnice se je za 11 držav zmanjšalo, vendar je ostalo nad 100 %, za 7 držav pa se je večinoma povečalo. Za premoženjske zavarovalnice se je razmerje med razpoložljivim kapitalom in zahtevanim solventnostnim kapitalom za 16 držav večinoma zmanjšalo, za 2 državi pa je za polovico zavarovalnic padlo pod 100 %.

Študija ugotavlja, da je vpliv sprememb na manjše zavarovalnice in vzajemne zavarovalnice večji kot na velike zavarovalnice, še izrazitejši pa je pri specializiranih zavarovalnicah, ki se ukvarjajo le z eno zavarovalno vrsto, zaradi česar je učinek razpršitve manjši. Za take zavarovalnice je razmerje med razpoložljivim kapitalom in minimalnim kapitalom večkrat padlo pod 100 %. Prav tako so tovrstne zavarovalnice med tistimi zavarovalnicami, za katere bi se moral kapital povečati vsaj za 50 %.

V tretji kvantitativni študiji, ki je potekala leta 2007 s podatki za leto 2006, je sodelovalo 1.027 zavarovalnic iz 28 držav, od tega 422 majhnih, 418 srednjih in 187 velikih. Pridobili naj bi informacije o primernosti v študiji predvidenih osnovnih in alternativnih izračunov ter njihovih vplivih na bilanco stanja in višino kapitala zavarovalnic ter prvič tudi zavarovalnih skupin. Rezultati študije naj bi služili tudi za umerjanje standardnega modela za izračun SCR in MCR.

Rezultati študije, objavljeni v poročilu CEIOPS's Report on its third Quantitative Impact Study (2007), so razkrili, da evropsko zavarovalništvo kot celota ne bo potrebovalo dodatnega kapitala, pričakovati pa je njegovo prerazporeditev. Pri tem naj bi 16 % zavarovalnic moralo povečati kapital. Kapitalske zahteve, izračunane z internimi modeli, so bile pomembno manjše kot tiste, dobljene s standardnim modelom, kar velja za premoženjske in življenjske zavarovalnice.

V četrti kvantitativni študiji, ki je potekala leta 2008 s podatki za leto 2007, je sodelovalo 1.412 zavarovalnic iz 30 držav, od tega 220 velikih, 522 srednjih in 667 majhnih[11]. Študija je bila osredotočena na sredstva in obveznosti, SCR in MCR, lastne vire in zavarovalne skupine. Rezultati študije, objavljeni v poročilu CEIOPS'

[11] Vsota ni enaka številu sodelujočih zavarovalnic – nekonsistentnost je že v viru.

Report on its fourth Quantitative Impact Study (2008), so spodbudni, saj naj bi 89 % zavarovalnic izpolnjevalo nove kapitalske zahteve, kar je več kot po tretji kvantitativni študiji. To je povezano z dejstvom, da se struktura bilanc stanja ne bo bistveno spremenila, ker se zmanjšanje obveznosti kompenzira s povečanimi kapitalskimi zahtevami. Sicer pa so se tehnične specifikacije za posamezne zavarovalnice izkazale kot dovolj dorečene, pri zavarovalnih skupinah pa je še precej nejasnosti.

V peti kvantitativni študiji, ki je potekala leta 2010 s podatki za leto 2009, je sodelovalo 2.520 zavarovalnic iz 30 držav, od tega 217 velikih, 791 srednjih in 1.511 majhnih[11]. Namen študije je bil vsem deležnikom zagotoviti podrobne informacije o kvantitativnem vplivu Solventnosti 2 na zavarovalnice, preveriti usklajenost tehničnih specifikacij s principi in kalibracijskimi cilji nove solventnostne direktive, spodbuditi zavarovalnice k uvedbi zahtev Solventnosti 2 ter identifikaciji internih postopkov, pravil in podatkov, kjer bi bile potrebne izboljšave, ter zagotoviti izhodišča za dialog med zavarovalnimi nadzorniki in zavarovalnicami pri pripravi novega nadzornega režima.

Rezultati študije, objavljeni v poročilu EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (2011), razkrivajo, da 15 % zavarovalnic po metodologiji študije ne dosega SCR, 5 % pa jih ne dosega niti MCR. To je slabše kot pri četrti kvantitativni študiji, kar pa je delno tudi posledica finančne krize med obema študijama. Sicer pa udeleženke študije, v kateri je tokrat sodelovalo bistveno več pozavarovalnic in majhnih zavarovalnic kot prej, ugotavljajo, da so posamezni izračuni prezapleteni, pojavljajo pa se tudi nove težave. Problematičen je, denimo, modul za izračun delnega SCR, ki ga premoženjske zavarovalnice potrebujejo zaradi katastrofalnih tveganj.

Rezultati kvantitativnih študij vpliva sprememb so dobro izhodišče za pripravo izvedbenih predpisov v okviru druge in tretje ravni Lamfalussyjevega procesa, zlasti še zaradi primernega kalibriranja. Nove kapitalske zahteve pač ne morejo biti take, da v praksi zaradi pomanjkanja kapitala ne bi bile izvedljive. Drugo vprašanje pa je, kako bodo vplivale na preživetje majhnih zavarovalnic.

3 Tveganja v zavarovalništvu

Tveganje lahko razumemo na več načinov, saj obstaja vrsta definicij. Tu bomo navedli dve starejši, vendar sočasni, iz katerih je razvidna osnovna dilema pri definiranju, in eno novejšo.

Definicija 3.1: *Tveganje je možnost, da se bo zgodilo nekaj, kar bo imelo posledice na zastavljene cilje. Merimo ga glede na posledice in verjetnost nastanka.*

Definicija 3.2: *Tveganje je možnost, da se bo zgodil dogodek, ki bo negativno vplival na doseganje zastavljenih ciljev. Priložnost je možnost, da se bo zgodil dogodek, ki bo pozitivno vplival na doseganje zastavljenih ciljev.*

Definicija 3.3: *Tveganje je učinek negotovosti na zastavljene cilje.*

Prva definicija je iz dokumenta A Global Framework for Insurer Solvency Assessment (2004, str. 26, točka 5.5[12]), druga je iz dokumenta ERM[13] – Integrated Framework: Executive Summary and Framework (2004, str. 16) in tretja iz mednarodnega standarda o upravljanju tveganj ISO 31000:2009.

Po definicijah 3.1 in 3.3 smer odmikov od zastavljenih ciljev ni opredeljena, zato so odmiki od zastavljenih ciljev lahko negativni in pozitivni. Po teh dveh definicijah torej ne razlikujemo tveganj od priložnosti. Po definiciji 3.2, v kateri je z dogodkom mišljen poljuben notranji ali zunanji pojav, ki bi lahko vplival na uresničitev zastavljenih ciljev, pa tveganje razumemo le v negativnem smislu.

V tej disertaciji bomo tveganje razumeli po definiciji 3.1, torej v širšem smislu, kar vpliva na odločitev o izbiri slučajnih spremenljivk, s katerimi bomo tveganja modelirali. Če bi se odločili za definicijo 3.2, bi lahko uporabljali le nenegativne slučajne spremenljivke, kar ima nekaj prednosti, vendar pa tudi slabosti.

Upravljanje tveganj, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, je izredno pomembno zaradi zagotavljanja in nadzorovanja solventnosti zavarovalnic. Tako bi morale zavarovalnice same, še bolj pa zavarovalni nadzorniki, zgodaj ugotavljati težave in s pravočasnim ukrepanjem preprečevati nesolventnost. To je tudi bistveni namen solventnostne zakonodaje oziroma predpisov o minimalnem kapitalu, ki je v EU za premoženjska zavarovanja odvisen praktično le od zavarovalnih tveganj, za življenjska zavarovanja pa še od tržnih tveganj.

Zavarovalnice, ki se ukvarjajo s premoženjskimi zavarovanji, so res najbolj ogrožene zaradi zavarovalnih tveganj, vendar preostala tveganja nikakor niso zanemarljiva. Zavarovalna tveganja so bila v ZDA v letih od 1969 do 1998 vzrok za 41 % primerov nesolventnosti (Solvency of non life insurers, 2000, str. 6) drugje pa verjetno tudi ni bistveno drugače, kot lahko sklepamo iz kratkih povzetkov različnih študij, navedenih v KPMG-jevem poročilu, obravnavanem v razdelku 2.4.3.

[12]Dokument se sklicuje na prvo verzijo avstralskega standarda o upravljanju tveganj iz leta 1995, vendar pa navaja dopolnjeno definicijo iz AS/NZS 4360:2004, ki je tretja verzija prvotnega standarda. V četrti verziji AS/NZS ISO 31000:2009 pa je že definicija 3.3.

[13]Enterprise Risk Management – upravljanje tveganj v podjetjih.

Tako lahko, vsaj po svetu, več kot polovico primerov nesolventnosti premoženjskih zavarovalnic pripišemo tveganjem, ki so v EU pri izračunu minimalnega kapitala popolnoma zanemarjena.

V EU sta težave s solventnostjo zavarovalnic analizirali Müllerjevo in Sharmovo poročilo. Med letoma 1996 in 2001 so se solventnostne težave za 17 premoženjskih in 3 življenjske zavarovalnice končale z zaprtjem (Sharma, 2002, str. 88). Če prištejemo še 31 primerov za premoženjske, 14 za življenjske in 3 za kompozitne zavarovalnice med letoma 2001 in 2004, ki jih navaja dokument Answers to the European Commission on the second wave of Calls for Advice (2005, str. 260), lahko ugotovimo, da je v EU med letoma 1996 in 2004 propadlo le 68 od približno 5.000 zavarovalnic, kar je razmeroma malo. Za primerjavo navedimo, da je v ZDA v letih od 1984 do 1993 število premoženjskih zavarovalnic, ki so postale nesolventne, redno predstavljalo vsaj 1 % od vseh delujočih premoženjskih zavarovalnic, v najbolj kritičnih letih pa več kot 2 %, medtem ko v Nemčiji v obdobju od leta 1980 do 1998 ni bilo niti enega primera (Solvency of non life insurers, 2000, str. 5).

3.1 Problematika klasifikacije tveganj

Trenutno v svetovnem merilu še ni enotne in splošno sprejete klasifikacije tveganj, ki so jim izpostavljene zavarovalnice (Report of Solvency Working Party, 2002, str. 12). Tako jih, denimo, IAIS, tako kot že Müllerjevo poročilo, razvršča v tri skupine. Deli jih na tehnična, naložbena in netehnična tveganja (On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues, 2000, str. 9). Tehnična tveganja so tveganja, ki so neposredno ali posredno povezana z zavarovalno-tehničnimi oziroma aktuarskimi izračuni zavarovalnih premij in zavarovalno-tehničnih rezervacij, oziroma s tveganji, povezanimi s prehitro oziroma nenadzorovano rastjo operativnih stroškov. Naložbena tveganja so tveganja, ki so neposredno ali posredno povezana z upravljanjem premoženja. Netehnična tveganja pa so vsa druga tveganja, ki jih ne moremo razvrstiti v prvi dve skupini. Konkretna tveganja IAIS navaja v dokumentu Principles on Capital Adequacy and Solvency (2002), v dokumentu Discussion Note to the Members of the IC Solvency Subcommittee (2002, str. 18) pa jih vseh 26 sistematično našteva, kar pa je le ena od možnih razvrstitev.

S klasifikacijo tveganj se ukvarja tudi IAA. V poročilu Report of Solvency Working Party (2002, str. 12–17) je navedenih več primerov iz zavarovalniške in bančne prakse, v katerih so skupne točke, vendar pa je tudi veliko razlik. Kljub velikemu številu obstoječih klasifikacij je delovna skupina IAA predlagala še svojo razvrstitev. Tveganja je razvrstila v naslednje skupine: zavarovalna, kreditna, tržna, operativna, likvidnostna in tveganja zaradi zunanjih dogodkov, vsako od navedenih skupin pa je razdelala še na nižji ravni. V kasnejšem dokumentu A Global Framework for Insurer Solvency Assessment (2004) je delovna skupina svojo razvrstitev dopolnila, tako da, denimo, tveganj zaradi zunanjih dogodkov ni uvrstila v samostojno skupino, ampak jih je dodala k operativnim tveganjem, čeprav te skupine ni razdelala še na nižjo raven.

Poleg omenjenih klasifikacij tveganj obstaja še vrsta drugih. Izdelavo enotne in splošno uporabne razvrstitve tveganj, ki bi bila hkrati tudi uravnotežena, otežujejo specifičnosti posameznih panog. Tako je, denimo, za zavarovalnice najpomembnejše zavarovalno tveganje, ki je zaradi prevzemanja različnih tveganj od zavarovancev razvejano v širino in globino, za preostala podjetja pa je analogno tveganje, povezano z njihovimi produkti, morda le eno od manj pomembnih poslovnih tveganj. Zato je, denimo, podrobna klasifikacija tveganj v (Archer-Lock et al., 2002, str. 27–30) uporabna le za zavarovalnice.

3.2 Klasifikacija tveganj za premoženjska zavarovanja

Spodnja razvrstitev tveganj je narejena na podlagi klasifikacije tveganj v obeh prej omenjenih poročilih delovne skupine IAA, vendar se od njiju v podrobnostih razlikuje. Kljub naslovu razdelka je uporabna tudi za življenjska zavarovanja, le da bi bilo mogoče zanja smiselno zavarovalna tveganja razdelati malo drugače. Ker še ne obstaja splošno sprejeta slovenska terminologija, so v oklepaju za posamezna tveganja navedeni angleški izrazi.

Zavarovalna tveganja (angl. *underwriting risks*) so tveganja, ki izvirajo iz zavarovalnih pogodb. Povezana so tako z nevarnostmi, ki so krite z zavarovalnimi pogodbami, kot tudi s spremljajočimi postopki. Med zavarovalna tveganja uvrščamo:

1. tveganje pri sprejemu rizikov v zavarovanje (angl. *underwriting process risk*),
2. cenovno tveganje (angl. *pricing risk*),
3. tveganje, da je produkt neustrezno načrtovan (angl. *product design risk*),
4. tveganje škod (angl. *claims risk*),
5. tveganje ekonomskega okolja (angl. *economic environment risk*),
6. tveganje samopridržaja (angl. *net retention risk*),
7. tveganje obnašanja zavarovalcev (angl. *policyholder behaviour risk*),
8. tveganje zavarovalno-tehničnih rezervacij (angl. *reserving risk*),
9. tveganje katastrofe (angl. *CAT risk*).

Tržna tveganja (angl. *market risks*) so tveganja, ki so povezana z nestanovitnostjo cen finančnih instrumentov in tržnih cen drugih sredstev. Med tržna tveganja uvrščamo:

1. tveganje obrestne mere (angl. *interest rate risk*),
2. tveganje lastniških vrednostnih papirjev (angl. *equity risk*),
3. tveganje premoženja (angl. *property risk*),
4. valutno tveganje (angl. *currency risk*),
5. tveganje kreditnega razpona (angl. *spread risk* oziroma *basis risk*),
6. tveganje reinvestiranja (angl. *reinvestment risk*),
7. tveganje koncentracije (angl. *concentration risk*),
8. tveganje neusklajenosti obveznosti in naložb (angl. *asset/liability missmatch risk*).

Kreditna tveganja (angl. *credit risks*) so tveganja, povezana z neizpolnitvijo obveznosti in spremembo kreditne bonitete izdajateljev vrednostnih papirjev, ki jih ima zavarovalnica v portfelju, pozavarovateljev, posrednikov in drugih poslovnih partnerjev, ki imajo obveznosti do zavarovalnice. Med kreditna tveganja uvrščamo:

1. tveganje neposredne neizpolnitve obveznosti (angl. *direct default risk*),
2. padec ali sprememba bonitetne ocene (angl. *downgrade or migration risk*),
3. posredno kreditno tveganje (angl. *indirect credit or spread risk*),
4. poravnalno tveganje (angl. *settlement risk*),
5. deželno tveganje (angl. *sovereign risk*),
6. tveganje koncentracije (angl. *concentration risk*),
7. tveganje nasprotne stranke (angl. *counterparty risk*).

Operativna tveganja (angl. *operational risks*) so tveganja, povezana z neprimernimi ali spodletelimi notranjimi postopki, ljudmi, računalniškimi sistemi in zunanjimi dogodki. Med operativna tveganja uvrščamo:

1. tveganje človeških virov (angl. *human capital risk*),
2. upravljalsko tveganje (angl. *management control risk*),
3. računalniška tveganja (angl. *system risks*),
4. postopkovna tveganja (angl. *process risks*),
5. pravno tveganje (angl. *legal risk*),
6. tveganje katastrofe (angl. *disaster risk*),
7. regulatorno tveganje (angl. *regulatory risk*),
8. politično tveganje (angl. *political risk*).

Likvidnostna tveganja (angl. *liquidity risks*) so tveganja, povezana z izgubo zaradi prenizkih likvidnih sredstev ob zapadlosti obveznosti ali s povečanimi stroški unovčevanja manj likvidnih sredstev. Med likvidnostna tveganja uvrščamo:

1. tveganje nepričakovanih denarnih obveznosti zaradi velikih škod (angl. *cash calls following major loss events*),
2. padec bonitetne ocene (angl. *credit rating downgrade*),
3. tveganje negativne publicitete (angl. *negative publicity*),
4. tveganje poslabšanja ekonomije (angl. *deterioration of economy*),
5. tveganje zaradi problemov v sorodnih podjetjih (angl. *reports of problems in other companies in the same or similar line of business*),
6. tveganje zaupanja v varnost in učinkovitost virov (angl. *extent of reliance on and performance of secured sources of fundings and their terms*),
7. tveganje kapitalskih trgov (angl. *breadth of funding and accessibility/liquidity of capital market*).

Tveganje katastrofe, tveganje koncentracije in padec bonitetne ocene se pojavljajo po dvakrat, vendar imajo v različnem kontekstu različen pomen. Tako, denimo, se tveganje katastrofe pri zavarovalnih tveganjih nanaša na velika izplačila odškodnin zaradi katastrofe, pri operativnih tveganjih pa na dejstvo, da zavarovalnica ne bi mogla poslovati, če bi ji, denimo, potres porušil poslovno stavbo.

Našteti seznam tveganj še zdaleč ni popoln, predvsem pa ni razgrajen še na nižje ravni. Iz dokumentov, ki so trenutno dostopni, se vidi, da je v projektu Solventnost 2 okrog tveganj odprtih še nekaj vsebinskih vprašanj. Zato bo za dokončen seznam vseh tveganj, ki bodo upoštevana v standardnem modelu, treba počakati vsaj na dokumente druge Lamfalussyjeve ravni, seveda pa to še bolj velja za metodologijo merjenja.

Zavarovalna, kreditna, tržna in operativna tveganja bodo obravnavana v prvem stebru, kar pomeni, da jih bo treba obravnavati kvantitativno, likvidnostna tveganja pa bodo obravnavana v drugem stebru. Med tveganja v zgornjem seznamu lahko uvrstimo vsa tveganja, ki so bila upoštevana v CEIOPS-ovi peti kvantitativni študiji učinkov, so pa v seznamu tudi tveganja, ki v standardnem modelu za izračun SCR ne bodo upoštevana, kar pa še ne pomeni, da jih lahko kar zanemarimo.

Med operativna tveganja bi vsaj načeloma lahko uvrstili tudi strateško tveganje in tveganje izgube dobrega imena. Ker pa sta ti dve tveganji pri Baslu II izrecno izključeni (International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, 2006, str. 144), ju tudi tu nismo upoštevali. Verjetno so operativna tveganja za kvantifikacijo še najmanj primerna, ker so analitično težko obvladljiva, zato pa zanje lahko predvidimo določene (neugodne) scenarije.

3.3 Slovenski predpisi o obvladovanju tveganj v zavarovalnicah

Zakoni, ki so v Sloveniji veljali pred osamosvojitvijo, niso imeli posebnega poglavja o tveganjih. Zakon o temeljih sistema premoženjskega in osebnega zavarovanja (Ur. l. SFRJ, št. 24/1976), imenovan tudi Boncljev zakon, je dopuščal le po načelih vzajemnosti in solidarnosti organizirane zavarovalne skupnosti, ki so za posamezne rizične skupnosti same določale višino varnostne rezerve, upoštevaje vrsto nevarnosti, pred katerimi so zavarovale premoženje in osebe. Bistveno spremembo je uvedel enako imenovani zakon iz leta 1990. Po njem so se zavarovalnice lahko organizirale tudi kot delniške družbe. Za premoženjska zavarovanja so potrebovale vsaj 10 milijonov dinarjev začetnega varnostnega sklada, kar je ob koncu leta 1990 pri "Markovićevem" tečaju 7 din/DEM pomenilo 1,429 milijona DEM oziroma 0,695 milijona ECU[14], za življenjska pa 5 milijonov din. Po tem zakonu so leta 1991 iz Zavarovalne skupnosti Triglav nastale štiri zavarovalnice.

Zakon o zavarovalnicah (Ur. l. RS, št. 64/1994 in 35/1995) je prvi v samostojni Sloveniji sprejeti zakon, ki ureja zavarovalništvo, vendar tudi ta še nima posebnega poglavja o tveganjih. To pa še zdaleč ne pomeni, da tveganjem ne posveča pozornosti. Zakon predpisuje izračun minimalnega kapitala, ki je predstavljen v razdelku 2.2.1, in določa, koliko mora znašati zajamčeni kapital ter kaj se šteje za razpoložljivi kapital[15]. Zneski, ki se upoštevajo pri izračunu minimalnega kapitala oziroma pri določanju zajamčenega kapitala v odvisnosti od zavarovalnih vrst, s katerimi se zavarovalnica ukvarja, so izraženi v tolarjih, vendar večinoma v ekvivalentni višini, kot je takrat veljala v EU.

K obvladovanju oziroma upravljanju tveganj lahko uvrstimo tudi določbe o obveznem pozavarovanju presežkov v zavarovanje prevzetih nevarnosti in o zavarovalno-tehničnih rezervacijah in varnostni rezervi. Zraven sodijo tudi načela in določbe o nalaganju zavarovalno-tehničnih rezervacij in varščin, pa tudi določbe o nadzoru v zavarovalnici.

Zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 13/2000) vsebuje tudi poglavje o obvladovanju tveganj. Začne se s 104. členom, ki določa:

> *(1) Zavarovalnica mora zagotoviti, da vedno razpolaga z ustreznim kapitalom, glede na obseg in vrste zavarovalnih poslov, ki jih opravlja, ter tveganja, ki jim je izpostavljena pri opravljanju teh poslov (kapitalska ustreznost).*

[14] Evropska denarna enota ECU je bila določena s košarico valut. 1. januarja 1999 jo je zamenjal evro z enako vrednostjo.

[15] Zakon za minimalni kapital, zajamčeni kapital in razpoložljivi kapital uporablja izraze solventna meja, garancijski sklad in viri sredstev solventnosti.

(2) *Zavarovalnica mora poslovati tako, da tveganja, ki jim je zavarovalnica izpostavljena pri posameznih oziroma vseh vrstah zavarovalnih poslov, ki jih opravlja, nikoli ne presežejo omejitev, določenih s tem zakonom in na njegovi podlagi izdanih predpisov.*
(3) *Zavarovalnica mora poslovati tako, da je v vsakem trenutku sposobna pravočasno izpolnjevati zapadle obveznosti (likvidnost) ter da je trajno sposobna izpolniti vse svoje obveznosti (solventnost).*

V poglavju o obvladovanju tveganj je podrobno predpisano, kaj se upošteva kot razpoložljivi kapital, kako se izračuna minimalni kapital ter koliko znaša zajamčeni kapital, kar je vse usklajeno z zahtevami EU. Obdelane so še zavarovalno-tehnične rezervacije, vrste in omejitve naložb kritnega premoženja ter drugi ukrepi za obvladovanje tveganj, med njimi dolžnost pozavarovanja in upravljanje z likvidnostjo.

Poglavje o obvladovanju tveganj je obsežno, saj z upoštevanjem kasnejših dopolnitev v zadnjem uradnem prečiščenem besedilu Zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 99/2010-UPB7) vsebuje kar 42 členov. Kljub temu pa podrobnejše predpisovanje pravil za obvladovanje tveganj prepušča Agenciji za zavarovalni nadzor, ki je izdala že vrsto podzakonskih predpisov.

3.4 Obvladovanje tveganj za premoženjska zavarovanja

Obvladovanje oziroma upravljanje tveganj v podjetju lahko opišemo s spodnjo definicijo iz dokumenta ERM – Integrated Framework: Executive Summary and Framework (2004, str. 16).

Definicija 3.4: *Upravljanje tveganj je proces, ki omogoča, da ugotovimo potencialne dogodke z vplivom na cilje, omogoča, da obdržimo tveganja znotraj toleranc, ter zagotavlja razumno doseganje ciljev.*

Ta definicija sodi v okvir metodologije odbora COSO (Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission), ki je splošno sprejeta med notranjimi revizorji, zajema pa definicije, koncepte, kategorije ciljev, smernice za vzpostavitev in vzdrževanje upravljanja tveganj v podjetjih ter kriterije za ocenjevanje uspešnosti upravljanja tveganj.

Cilj uporabe COSO metodologije je doseči strateške in operativne cilje, denimo uspešnost in učinkovitost, ter zanesljivo poročanje in skladnost s predpisi. Želene cilje naj bi bilo mogoče doseči z uporabo osmih povezanih komponent metodologije, ki so: postavitev notranjega okolja, definiranje ciljev, opredelitev dogodkov, ocena tveganj, obravnava tveganj, izvajanje kontrolnih aktivnosti, informiranje in komuniciranje ter nadziranje (ERM – Integrated Framework: Executive Summary and Framework, 2004, str. 22). Pri tem se proces nikoli ne zaključi, ker ga je potrebno stalno vzdrževati, po možnosti pa tudi izboljševati. Zato je zelo pomembno, da v podjetju ustvarimo in nenehno dopolnjujemo kulturo upravljanja tveganj.

Upravljanja tveganj v zavarovalnicah se lahko lotimo še na veliko drugih načinov, od katerih nekatere navaja Dvoršak Bugarija (2005), seveda pa tudi po metodologiji, navedeni v spremljajoči dokumentaciji mednarodnega standarda o upravljanju tveganj (glej IEC/ISO 31010:2009). Neodvisno od načina upravljanja pa je vsekakor najprej treba vedeti, katera konkretna tveganja ogrožajo zavarovalnico, predvsem pa, kolikšna je izpostavljenost in z njo povezan pričakovani učinek uresničitve tveganja. Zato je koristno narediti register tveganj, v katerem poleg identifikacijskih podatkov in procesa, kjer se tveganje pojavlja, evidentiramo izmerjeno ali ocenjeno izpostavljenost tveganju, oceno verjetnosti uresničitve tveganja, njene posledice, pričakovani učinek tveganja, maksimalno dopustno mejo, kontrolne mehanizme, primerne ukrepe za zmanjšanje tveganja, izpostavljenost tveganju po ukrepih, odgovorne osebe pa še kaj.

Izpostavljenost bi morali meriti na določene presečne datume, denimo ob koncu kvartalov, pa tudi intervalno. Priporočena enota izpostavljenosti pri presečnem merjenju je kar denarna enota, kar je naravno za tržna in kreditna tveganja, pa tudi za nekatera zavarovalna tveganja. Tako, denimo, za požarno zavarovanje, potres, poplavo, vihar, točo, pa tudi za nezgodno in še kakšno zavarovanje presečno izpostavljenost lahko merimo s seštevkom zavarovalnih vsot $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, kjer je n število rizikov ter S_i zavarovalna vsota i-tega rizika. Mimogrede lahko izračunamo še povprečno zavarovalno vsoto, standardni odklon in Herfindahlov indeks koncentriranosti, definiran s $H_S = \sum_{i=1}^{n} (\frac{S_i}{S})^2$. Pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti in nekaterih drugih zavarovanjih, kjer razlike med zavarovanimi objekti ali zavarovalnimi vsotami niso prevelike, pa izpostavljenost lahko merimo kar s številom zavarovanih objektov ali celo s številom zavarovalnih polic.

Poleg višine izpostavljenosti je vsekakor pomemben tudi čas izpostavljenosti. Zato izpostavljenost v določenem obdobju merimo bodisi s povprečno presečno izpostavljenostjo v obdobju bodisi intervalno. V drugem primeru za enoto izpostavljenosti upoštevamo enoto za presečno izpostavljenost, pomnoženo s časovno enoto. Tako, denimo, za zavarovanje avtomobilske odgovornosti za osebne avtomobile lahko upoštevamo kar enoto $vozilo \times leto$.

Podatek o izpostavljenosti pri nespremenjenih drugih okoliščinah omogoča primerjavo tveganja ob različnem času, ne zadostuje pa za oceno dejanskega tveganja. Zato za posamezno tveganje posebej določimo še verjetnost uresničitve tveganja v določenem obdobju, posebej pa njene finančne učinke, s produktom obeh vrednosti pa dobimo oceno pričakovanih posledic uresničitve tveganja v določenem obdobju. Ta podatek, ki ga pri zavarovalnih tveganjih prepoznamo kot nevarnostno premijo, pa je že praktično uporaben za urejanje tveganj po pomembnosti ter s tem povezano določitvijo prioritet, zlasti pa za določitev primernih ukrepov za upravljanje tveganj.

Za vsako od registriranih tveganj moramo določiti še sprejemljivo zgornjo mejo pričakovanih posledic uresničitve tveganja, kontrolne mehanizme ter odgovorno osebo (skrbnika tveganja), predvsem pa ustrezne ukrepe. Po COSO metodologiji so osnovni ukrepi za upravljanje tveganj štirje: izogibanje, sprejetje, zmanjšanje in razdelitev (ERM – Integrated Framework: Aplication Techniques, 2004, str. 55). S prvim ukrepom s preprečitvijo izpostavljenosti bodočim možnim dogodkom tveganje odstranimo, z drugim ga vzdržujemo na sprejemljivi ravni, s tretjim ga z ustrezno politiko in postopki zmanjšamo, s četrtim pa ga v celoti ali delno s prenosom na druge neodvisne in finančno sposobne organizacije razdelimo med več subjektov. Za vsakega od osnovnih ukrepov obstaja več načinov izvedbe oziroma konkretnih ukrepov, ki jih tu ne bomo naštevali (glej npr. Guide to ERM, 2006, str. 75).

Množico ukrepov za upravljanje tveganj bi v drevesno strukturo lahko organizirali tudi drugače, tako da bi na najvišji ravni dobili druge osnovne ukrepe. Tako, denimo, IAA za zavarovalnice poleg preudarnega obravnavanja odškodninskih zahtevkov navaja naslednje ukrepe: zmanjšanje, integracija, razpršitev, ščitenje, prenos in razkritje tveganj (A Global Framework for Insurer Solvency Assessment, 2004, str. 6, točka 2.26).

Pri odločitvi za konkreten ukrep je poleg pričakovanih posledic uresničitve tveganja, ki jih želimo zmanjšati, vsekakor treba upoštevati tudi stroške izbranega ukrepa. Pri tem se je treba zavedati, da s posameznim ukrepom sicer lahko zmanjšamo posamezno tveganje, zato pa lahko hkrati povečamo kakšno drugo tveganje. Tipičen primer je pozavarovanje, s katerim zavarovalnica del zavarovalnega tveganja prenese na pozavarovalnice, hkrati pa poveča kreditno tveganje. Zaradi izjemnega pomena pozavarovanja, ki je glavni ukrep za zmanjšanje zavarovalnega tveganja, si bomo v naslednjem razdelku ogledali glavne pozavarovalne oblike.

3.5 Predstavitev glavnih pozavarovalnih oblik

Bistvo zavarovanja je prenos tveganja z zavarovanca na zavarovalnico. Analogno je pri pozavarovanju, le da na višji ravni – zavarovalnica ima vlogo zavarovanca, pozavarovalnica pa vlogo zavarovalnice. Zavarovalnica in pozavarovalnica lahko skleneta obvezno pozavarovalno pogodbo, s katero se dogovorita, da mora zavarovalnica vse rizike, ki izpolnjujejo pogoje iz pogodbe, ponuditi v pozavarovanje, pozavarovalnica pa jih mora sprejeti. Za izjemne rizike, ki ne izpolnjujejo pogojev iz obvezne pozavarovalne pogodbe, pa se lahko za vsak primer posebej dogovorita o pogojih sprejema v pozavarovanje. V takih primerih govorimo o fakultativnem pozavarovanju.

S pozavarovanjem zmanjšujemo variabilnost odškodnin, kar povzroča manjša nihanja poslovnih rezultatov zavarovalnice. Poleg tega ima pozavarovanje tudi druge pomembne vloge, saj z njim lahko financiramo rast zavarovalnice, nadomeščamo kapital, optimiziramo davke ter zagotavljamo likvidnost (Antal, 2009, str. 2).

Za celovito pozavarovalno zaščito lahko kombiniramo različne pozavarovalne oblike tudi za isto podmnožico portfelja, pri čemer moramo pri računanju čistih odškodnin iz kosmatih upoštevati dogovorjeni vrstni red učinkovanja posamezne pozavarovalne oblike.

3.5.1 Kvotno pozavarovanje

Kvotno pozavarovanje je oblika pozavarovanja, pri katerem se zavarovalnica odloči za lastni delež tveganja $\alpha \in (0,1)$, ki ga bo zadržala, presežek pa odstopi pozavarovalnici. Pri kvotnem pozavarovanju si zavarovalnica in pozavarovalnica premijo in odškodnine delita v razmerju $\alpha : 1 - \alpha$, zaradi česar kvotno pozavarovanje sodi med t. i. proporcionalna pozavarovanja.

Zavarovalnica lahko enotno kvotno pozavaruje celoten portfelj, lahko pa se odloči le za kvotno pozavarovanje posameznih zavarovalnih vrst ali drugače izbranih podmnožic portfelja, za katere lahko izbere različne lastne deleže, za posamezno podmnožico izbrani lastni delež pa velja za vse rizike iz te podmnožice.

Naj nenegativna slučajna spremenljivka $X = X_l + X_p$ pomeni kosmato odškodnino, ki jo zavarovalnica izplača zavarovancu. Čista odškodnina X_l odpade na zavarovalnico, pozavarovalni del X_p pa na pozavarovalnico. Ker je $X_l = \alpha X$, je $\mathbb{E}[X_l] = \alpha\,\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}[X_l] = \alpha^2\,\mathrm{var}[X]$ in $\sigma_{X_l} = \alpha\,\sigma_X$. Analogne enačbe veljajo tudi za pozavarovalni del odškodnine $X_p = (1 - \alpha)\,X$, za kosmate agregatne odškodnine v določenem obdobju, denimo enem letu, ter pripadajoče čiste agregatne odškodnine in pozavarovalni del agregatnih odškodnin.

Pri primernem pozavarovanju se zmanjšajo povprečne odškodnine in povprečne agregatne odškodnine, ki bremenijo zavarovalnico, predvsem pa se zmanjša njihova varianca. Oboje pa moramo gledati povezano. Relativno nihanje okoli pričakovanih vrednosti pogosto merimo s koeficientom variacije ϱ, izračunanim kot razmerje med standardnim odklonom in povprečno vrednostjo. Pri kvotnem pozavarovanju velja $\varrho_X = \varrho_{X_l} = \varrho_{X_p}$ tako za posamezne kot tudi agregatne odškodnine.

Pri kvotnem pozavarovanju se varianca čistih agregatnih odškodnin zmanjša, vendar koeficient variacije ostaja nespremenjen. Zato si zavarovalnica s kvotnim pozavarovanjem zmanjšuje predvsem lastni delež odhodkov za škode, ki vpliva na izračun minimalnega kapitala, opisan v razdelku 2.2.1. Posledično se pri dani kosmati premiji zmanjšajo kapitalske zahteve, pri danem kapitalu pa poveča zgornja meja kosmate premije, do katere lahko zavarovalnica sklepa zavarovanja. Za zmanjšanje koeficienta variacije agregatnih odškodnin pa mora zavarovalnica uporabiti druge pozavarovalne oblike.

Kvotno pozavarovanje je primerno za vsa zavarovanja, odlikuje pa se po svoji preprostosti in z njo povezanimi nizkimi administrativnimi stroški. Za pozavarovalne obračune zadošča poznavanje kosmate agregatne premije in kosmatih agregatnih odškodnin, lastnega deleža zavarovalnice in provizijske stopnje, ki jo pozavarovalnica prizna zavarovalnici kot nadomestilo za stroške pridobivanja zavarovanj, reševanje odškodninskih zahtevkov in druge stroške zavarovalnice.

3.5.2 Vsotno presežkovno pozavarovanje

Glavna slabost kvotnega pozavarovanja je v tem, da zavarovalnica odstopi pozavarovalnici isti odstotek tveganja za vse rizike iz iste kvotno pozavarovane podmnožice portfelja. Majhne rizike bi lahko v celoti obdržala sama, za velike rizike pa bi bilo morda primerneje, če bi več tveganja prenesla na pozavarovalnico. To slabost odpravlja vsotno presežkovno pozavarovanje, pri katerem se lastni delež posebej določi za vsak riziko, ki izpolnjuje pogoje iz pozavarovalne pogodbe.

Zavarovalnica mora najprej oceniti višino maksimalne posamezne škode, ki jo lahko krije sama, ne da bi bila ogrožena, tudi če bi se v enem letu zgodilo več takih škod. Dobljena ocena M se imenuje maksimalni samopridržaj in služi kot kriterij za odločanje o potrebnosti vsotno presežkovnega pozavarovanja posameznih rizikov. Optimalno določanje maksimalnega samopridržaja je zelo zahtevno delo (glej npr. Komelj, 2004, str. 53–70), zato zavarovalnice maksimalne samopridržaje zelo pogosto določajo kar izkustveno.

Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju obstajata dva pristopa, ki se razlikujeta le po merilu, na podlagi katerega med zavarovalnico in pozavarovalnico delimo premijo in odškodnine za posamezni riziko. Pri prvem pristopu upoštevamo zavarovalno vsoto, pri drugem pa maksimalno pričakovano škodo (EML – Expected Maximum Loss). Pri nekaterih zavarovanjih, npr. požarnem ali strojelomnem, je za velike rizike popolna škoda, ko je odškodnina enaka zavarovalni vsoti, zelo malo verjetna. Pri takih zavarovanjih se je v praksi izkazalo, da je bolje upoštevati maksimalno pričakovano škodo, ki pa jo je treba oceniti za vsak riziko posebej.

Zavarovalnica mora pozavarovati vse tiste rizike, za katere je zavarovalna vsota večja od maksimalnega samopridržaja, če se razmerje med deležem zavarovalnice in pozavarovalnice določa na podlagi zavarovalne vsote, oziroma tiste rizike, za katere je maksimalna pričakovana škoda večja od maksimalnega samopridržaja, če se razmerje med deležem zavarovalnice in pozavarovalnice določa na podlagi EML. Ker sta računsko oba načina ekvivalentna, bomo v nadaljevanju uporabljali EML, kar lahko povsod nadomestimo z zavarovalno vsoto.

Pozavarovalnica včasih ne želi, da bi zavarovalnica obdržala premajhen delež celotnega tveganja, zato je v pozavarovalni pogodbi dogovorjeno, da bo prevzela le tveganje do m-kratnika samopridržaja M oziroma m t. i. linij. Morebitni presežek tveganja nad $(m+1)M$ ostane zavarovalnici, seveda pa se ta s pozavarovalnico lahko dogovori tudi za t. i. fakultativno pozavarovanje, ki pa se sklepa od primera do primera.

Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju s samopridržajem M in m linijami nad samopridržajem je za kosmato odškodnino X, ki se nanaša na i-ti riziko s pričakovano maksimalno škodo EML_i, $X_l = \alpha_i X$ in $X_p = (1-\alpha_i)X$, kjer je

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{za } EML_i \le M, \\ \frac{M}{EML_i} & \text{za } M < EML_i \le (m+1)M, \\ 1 - \frac{mM}{EML_i} & \text{za } EML_i > (m+1)M. \end{cases}$$

V praksi je določanje EML strokovno zelo zahteven problem. Zato se včasih zgodi, da je dejanska škoda večja od EML[16], kar pa ne spremeni lastnega deleža zavarovalnice. Zato pozavarovalnice iz previdnosti običajno zahtevajo, da pričako-

[16] Uporaba okrajšave EML za *expected (estimated) maximum loss* je zato primernejša od uporabe bolj pogoste okrajšave PML za *probable (possible) maximum loss*. EML in PML sta v praksi sinonima.

vana maksimalna škoda ni manjša od predpisanega odstotka zavarovalne vsote, ki predstavlja teoretično maksimalno odškodnino, ki jo plača zavarovalnica.

Vsotno presežkovna pozavarovalna pogodba z m linijami omogoča kvalitetno pozavarovanje rizikov, za katere je EML manjši ali enak $(m+1)\,M$ (t. i. limit pogodbe). Za rizike z večjim EML presežek rizika nad limitom pogodbe ne bi bil pozavarovan, zato se je treba v takem primeru posebej dogovoriti o fakultativnem pozavarovanju.

Vpliv vsotno presežkovnega pozavarovanja na pričakovane čiste agregatne odškodnine in ustrezno varianco je odvisen od strukture portfelja. Ključna je seveda porazdelitev maksimalnih pričakovanih škod (t. i. profil rizikov) oziroma z njimi linearno povezanih lastnih deležev. Učinek vsotno presežkovnega pozavarovanja na zmanjšanje koeficienta variacije je običajno pomemben, kar je posledica dejstva, da z vsotno presežkovnim pozavarovanjem bistveno omejimo potencialne maksimalne čiste odškodnine oziroma dele rizikov, ki ostanejo v lastni izravnavi zavarovalnice, homogeniziramo. Za predpostavke in formule, ki omogočajo praktično oceno učinka vsotno presežkovnega pozavarovanja na začetne momente čistih odškodnin, s tem pa tudi izračun učinka na koeficient variacije, glej (Komelj, 2004, str. 55–57).

Vsotno presežkovno pozavarovanje je primerno za zavarovanje premoženja (požarno ali strojelomno zavarovanje itd.), nezgodno in življenjsko zavarovanje, pomorska zavarovanja itd., zahteva pa več administriranja kot kvotno pozavarovanje. Tudi vsotno presežkovno pozavarovanje sodi med t. i. proporcionalna pozavarovanja, ker za delitev premije in odškodnin, ki se nanašajo na isti zavarovani riziko, velja isti vnaprej dogovorjeni delež.

3.5.3 Škodno presežkovno pozavarovanje

Pri škodno presežkovnem pozavarovanju s kritjem v višini L nad maksimalnim samopridržajem M, ki ga v tem primeru imenujemo tudi prioriteta, je čista odškodnina določena z enačbo

$$X_l = \begin{cases} X & \text{za } X \leq M, \\ M & \text{za } M < X \leq M + L, \\ X - L & \text{za } X > M + L, \end{cases}$$

kar krajše zapišemo kot $X_l = \min\{X, M\} + \max\{X - M - L, 0\}$. Na pozavarovalnico odpade $X_p = \min\{\max\{X - M, 0\}, L\}$. Če je kritje nad prioriteto M neomejeno, $X_l = \min\{X, M\}$ odpade na zavarovalnico, $X_p = \max\{X - M, 0\}$ pa na pozavarovalnico. Zato je $X = \min\{X, M\} + \max\{X - M, 0\}$. Od skupne nevarnostne premije $\mathbb{E}[X]$ zavarovalnici pripada $\mathbb{E}[X_l] = \mathbb{E}[\min\{X, M\}]$, kar bomo označili z $\mathbb{E}[X; M]$ in imenovali omejena pričakovana vrednost, pozavarovalnici pa

$$\mathbb{E}[X_p] = \mathbb{E}[\max\{X - M, 0\}] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X; M]. \tag{3.1}$$

Pri omejenem pozavarovalnem kritju v višini L nad maksimalnim samopridržajem M je del nevarnostne premije, ki pripada pozavarovalnici, enak

$$\mathbb{E}[X_p] = \mathbb{E}[X; M + L] - \mathbb{E}[X; M], \tag{3.2}$$

razlika do $\mathbb{E}[X]$ pa pripada zavarovalnici. Omejeno pričakovano vrednost za nenegativno slučajno spremenljivko X izračunamo z enačbo

$$\mathbb{E}[X; M] = \int_0^M (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x,$$

v razdelku 4.1 pa bomo spoznali še alternativni izračun $\mathbb{E}[X; M]$ in t. i. stop-loss premije $\mathbb{E}[X_p]$ s stop-loss transformiranko slučajne spremenljivke X.

Z navedenimi enačbami lahko izračunamo razmerje med pozavarovalno nevarnostno premijo in kosmato nevarnostno premijo, ki za neomejeno kritje nad prioriteto M znaša $1 - \frac{\mathbb{E}[X;M]}{\mathbb{E}[X]}$, kar lahko uporabimo kot premijsko stopnjo za pozavarovanje. V tem primeru si zavarovalnica in pozavarovalnica premije in odškodnin ne delita v enakih razmerjih, zato škodno presežkovno pozavarovanje sodi med neproporcionalna pozavarovanja.

Vpliv škodno presežkovnega pozavarovanja na pričakovane čiste agregatne odškodnine in ustrezno varianco je odvisen od porazdelitvene funkcije posameznih odškodnin. Za formule, ki omogočajo praktično oceno učinka škodno presežkovnega pozavarovanja na začetne momente čistih odškodnin, s tem pa tudi izračun učinka na koeficient variacije, glej (Komelj, 2004, str. 58).

Škodno presežkovno pozavarovanje v praksi večkrat uredimo v več slojih oziroma intervalih, ki jih lahko pozavarujemo pri različnih pozavarovateljih. V prvem sloju pričakujemo zmerno število škod, višji sloji pa so namenjeni zaščiti pred velikimi ali celo izjemno velikimi škodami, ki jih običajno ne pričakujemo veliko, če pa se zgodijo, včasih že ena sama lahko pomeni preveliko breme za zavarovalnico brez ustreznega pozavarovanja.

Škodno presežkovno pozavarovanje je primerno predvsem za zavarovanje premoženja (požarno ali strojelomno zavarovanje itd.), razna odgovornostna zavarovanja, pomorska zavarovanja itd. Ker se pozavarovalna premija obračunava od kosmate zavarovalne premije za vse zavarovane rizike iz ustrezne podmnožice portfelja, je administriranje v glavnem povezano s prijavljanjem škod, ki presegajo prioriteto.

Škodno presežkovno pozavarovanje se lahko nanaša le na posamezne rizike, lahko pa tudi na posamezen dogodek. V prvem primeru se pozavarovalno kritje aktivira za vsak škodni primer, kjer odškodnina presega prioriteto. V drugem primeru pa je prvi pogoj za aktiviranje pozavarovalnega kritja, da sta vsaj dva škodna primera posledica istega dogodka, drugi pogoj pa je, da skupne odškodnine, že zmanjšane za pozavarovalni del preostalih pozavarovanj, presegajo prioriteto škodno presežkovnega pozavarovanja. Tovrstno škodno presežkovno pozavarovanje je primerno predvsem za zavarovanja, ki krijejo škode zaradi naravnih nesreč, kot so vihar, toča, poplava ali potres, pri katerih običajno kot en škodni dogodek upoštevamo vse škode, nastale v največ 72-urnem obdobju. Zato takemu pozavarovanju rečemo škodno presežkovno pozavarovanje za katastrofe ali pa škodno presežkovno pozavarovanje za zaščito samopridržaja.

3.5.4 Pozavarovanje letnega presežka škod

Škodno presežkovno pozavarovanje za katastrofe je že primer pozavarovanja, ki se nanaša na agregatne odškodnine, ki so posledica enega škodnega dogodka. Poleg tega pa obstaja tudi pozavarovanje letnega presežka škod, ki se nanaša na agregatne odškodnine celotnega leta, ne le enega dogodka. Pri pozavarovanju letnega presežka škod pozavarovalnica zavarovalnici izplača morebitno pozitivno razliko (ali njen del) med letnimi agregatnimi odškodninami in samopridržajem zavarovalnice. Le-ta je lahko izražen v absolutnem znesku ali pa posredno s škodnim količnikom. Tovrstno pozavarovanje je najbolj pogosto pri zavarovanju posevkov, ko je, denimo, dogovorjeno, da pozavarovalnica izplača morebitni del agregatnih odškodnin, ki leži v pasu letnih agregatnih odškodnin od 110 % do 160 %, računano od letne tehnične premije, to je dela letne kosmate premije, ki je namenjen kritju škod.

3.5.5 Primerjava učinkovitosti posameznih pozavarovalnih oblik

Gledano dolgoročno, zavarovalnica s prenosom dela tveganja na pozavarovalnico prenaša tudi del dobička. Pri tem mislimo le na tisti del dobička, ki izvira iz tehnične premije, ne pa na dobiček iz naložb ali razlike med dejanskimi in vračunanimi stroški. Zavarovalnica po eni strani teži k zadrževanju več tveganja v lastni izravnavi, ker s tem pričakuje, da ji bo ostalo več dobička, po drugi pa teži k večjemu prenosu tveganja na pozavarovalnice, kar ji povečuje varnost. Kje je optimum, je težko presoditi, odgovor pa je odvisen tudi od kriterija optimalnosti. V tem razdelku bomo le predstavili problem, mnogo več o optimiziranju pozavarovanja pa najdemo v (Krvavych, 2005).

Za poljuben $t \geq 0$, ki naj meri čas v letih, in konstanto $c > 0$ naj bo $P(t) = ct$ kosmata tehnična premija, zbrana od trenutka 0 do t. V istem obdobju nastale škode naj šteje slučajna spremenljivka $N(t)$, skupne kosmate odškodnine pa meri slučajna spremenljivka $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, če je $N(t) > 0$, in $S(t) = 0$, če je $N(t) = 0$. Predpostavimo, da je $\{N(t) : t \geq 0\}$ Poissonov proces, kosmate odškodnine $X_1, X_2, \ldots$ pa so med seboj in od $\{N(t) : t \geq 0\}$ neodvisne ter enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Pri navedenih predpostavkah je $\{S(t) : t \geq 0\}$ sestavljen Poissonov proces, slučajne spremenljivke $S = S_1 = S(1), S_2 = S(2) - S(1), S_3 = S(3) - S(2), \ldots$, ki predstavljajo skupne kosmate odškodnine v posameznih letih, pa so neodvisne in enako porazdeljene.

Naj bo K kapital, ki ga je zavarovalnica pripravljena tvegati, $\Psi(K)$ pa verjetnost, da bo za nek $t > 0$ izpolnjen pogoj $K + P(t) - S(t) < 0$. Z znano Lundbergovo neenačbo

$$\Psi(K) \leq e^{-RK} \tag{3.3}$$

(glej npr. Teugels & Sundt, 2004, str. 1050, in Komelj, 2004, str. 63) lahko izračunamo zgornjo mejo te verjetnosti. Poznati moramo le konstanto R, ki je najmanjši pozitivni koren enačbe

$$M_S(t) = e^{ct}, \tag{3.4}$$

kjer je $M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}]$ momentno rodovna funkcija slučajne spremenljivke S.

Zavarovalnica s pozavarovanjem letno premijo, ki ji ostane, zmanjša na P_l, s tem pa tudi letne odškodnine zmanjša na S_l. Pri korektno določeni premiji se zato zmanjša tudi verjetnost, da čista premija skupaj s kapitalom ne bo zadoščala za izplačilo čistih odškodnin. Hkrati se zmanjša tudi pričakovani čisti tehnični izid, merjen z razliko med čisto premijo in čistimi odškodninami. Seveda enačba (3.3) še vedno velja, le v enačbi (3.4), iz katere izračunamo R, je treba za S in c upoštevati vrednosti, ki se nanašata na čiste zneske.

Kriterijev za optimalnost pozavarovanja je več. Večina jih je povezanih s čistim tehničnim izidom, z verjetnostjo izgube tveganega kapitala ter s kombinacijo obojega. Klasičen cilj optimiziranja pozavarovanja je doseči minimalno varianco $\mathrm{var}[P_l - S_l]$ pri predpisanem čistem tehničnem izidu $\mathbb{E}[P_l - S_l]$. Za proporcionalna pozavarovanja je temu cilju ekvivalenten cilj, da dosežemo maksimalni pričakovani čisti tehnični izid $\mathbb{E}[P_l - S_l]$ pri predpisani varianci $\mathrm{var}[P_l - S_l]$ (Bühlmann, 1970, str. 114).

Za cilj optimizacije si lahko postavimo tudi maksimalni koeficient R pri pogoju, da je pričakovani čisti tehnični izid $\mathbb{E}[P_l - S_l]$ večji ali enak predpisani vrednosti (glej npr. Dickson & Waters, 1997). Nasprotno pa lahko za cilj postavimo maksimalni pričakovani čisti tehnični izid $\mathbb{E}[P_l - S_l]$ ob pogoju, da je koeficient R večji ali enak predpisani vrednosti. Še natančnejši pa smo, če namesto spodnje meje za R predpišemo maksimalno verjetnost ϵ, s katero je zavarovalnica še pripravljena izgubiti tvegani kapital K. Ta kriterij, ko iščemo maksimalni pričakovani čisti tehnični izid $\mathbb{E}[P_l - S_l]$ ob pogoju $\mathbb{P}(K + P_l - S_l < 0) \leq \epsilon$, je podrobno obdelan v (Komelj, 2004).

V praksi večinoma nismo sposobni najti optimalne pozavarovalne zaščite, zato se zadovoljimo s primerno pozavarovalno zaščito. Običajno nam manjkajo ustrezni podatki za izračun, znanje ali pa na pozavarovalnem trgu ni ustrezne ponudbe. Pogosto so težave tudi s kriteriji, ko se je treba odločiti za višino tveganega kapitala K in še dopustno verjetnost ϵ, da ga bomo izgubili. Kljub temu pa učinkovitost posameznih pozavarovalnih oblik lahko razvrstimo enako kot njihovo teoretično optimalnost.

Optimalna pozavarovalna oblika je zavarovanje letnega presežka škod, ki pa ga je na trgu težko dobiti. Sledi škodno presežkovno pozavarovanje ter vsotno presežkovno pozavarovanje. Najslabše pa je kvotno pozavarovanje. O teoretičnem ozadju teh trditev glej npr. (Wang & Young, 1998, str. 157, in Gerber & Pafumi, 1998, str. 79). Seveda pa praksa in teorija ne gresta vedno z roko v roki s ponudbo in povpraševanjem. Zato zavarovalnice zaradi različnih omejitev, ki jih postavljajo pozavarovatelji, svoj portfelj zaščitijo s kombinacijo različnih pozavarovalnih oblik.

4 Merjenje, primerjanje in urejanje tveganj

Če hočemo neko tveganje matematično obravnavati, mu moramo prirediti slučajno spremenljivko X, s katero ga modeliramo. V nekaterih primerih iz podatkov, ki so nam na voljo, lahko zelo dobro ocenimo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X. Tak primer je, denimo, škodno dogajanje v zavarovalnicah, kjer število škod modeliramo z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami, višine odškodnin pa z zveznimi, pa tudi z mešanimi, ki imajo odsekoma zvezno porazdelitveno funkcijo z diskretnimi skoki na mejah odsekov. Kako iz konkretnih podatkov pridemo do modela, glej npr. (Hogg & Klugman, 1984; Klugman, Panjer & Willmot, 2004; Komelj, 2004).

Ko se odločamo za modeliranje tveganj, so pomembni predvsem cilji, ki jih želimo doseči, pa tudi dejanske možnosti. Če je tveganje zelo pomembno, denimo eno iz prvega stebra Solventnosti 2, je vsaj za izgradnjo internega modela zelo smiselno tveganje modelirati na način, ki bo omogočal natančno kvantitativno obravnavo. Seveda morajo biti izpolnjeni potrebni pogoji, kot je obstoj ustrezne teorije, primerno znanje in zanesljivi podatki. Če ti pogoji niso izpolnjeni ali pa obravnavamo manj pomembno tveganje, se lahko zadovoljimo tudi s preprostimi merami tveganja, kot sta varianca in standardni odklon.

V najbolj neugodnih primerih, ko imamo o tveganju zelo malo podatkov, pa še ti so nezanesljivi, ga lahko opišemo s posameznimi mogočimi scenariji. Vsakemu scenariju priredimo oceno izgube in verjetnost uresničitve, pa smo že pri diskretni slučajni spremenljivki, ki jo lahko uporabimo kot model.

4.1 Osnovni pojmi

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, kjer je Ω množica elementarnih dogodkov, $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ σ-algebra podmnožic množice Ω oziroma množica vseh dogodkov in $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ verjetnostna mera. Naj bo $(G, \mathcal{G})$ merljiv prostor in $\mathcal{X}$ množica vseh $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-merljivih funkcij $X\colon \Omega \to G$, torej takih, za katere je praslika $X^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{F}$ za vsak $\mathcal{B} \in \mathcal{G}$. Funkcijo $X \in \mathcal{X}$ bomo imenovali $(G, \mathcal{G})$-slučajna spremenljivka. V tej disertaciji bomo privzeli, da je vedno $G \subseteq \mathbb{R}^n$ za $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathcal{G}$ pripadajoča σ-algebra Borelovih množic in $\mathcal{X}$ množica vseh Borelovo merljivih funkcij $X\colon \Omega \to G$. Funkcijo $X \in \mathcal{X}$ bomo imenovali slučajna spremenljivka, če je $n = 1$, sicer pa slučajni vektor.

Naj bo X slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, ki je definirana s $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Vsaka porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ je z desne zvezna naraščajoča funkcija[17], za katero je $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. Če je $F_X(x)$ absolutno zvezna, kar pomeni, da jo za neko nenegativno funkcijo $f_X(x)$ lahko napišemo kot $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$, bomo rekli, da je X zvezna slučajna spremenljivka. V nadaljevanju bomo zapis, da je porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ zvezna, vedno razumeli kot sinonim za to, da je slučajna spremenljivka X zvezna, torej kot dogovor, da zveznost porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ dejansko pomeni njeno absolutno zveznost.

Porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke X je naraščajoča zvezna funkcija, ki ima lahko tudi horizontalne segmente, to je intervale $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha] \subset$

[17] V tej disertaciji bomo naraščajočo funkcijo vedno razumeli v nestrogem smislu, torej kot nepadajočo funkcijo. Analogno velja za padajočo funkcijo.

$\mathbb{R}$ za $\alpha \in (0,1)$ in $a_\alpha < b_\alpha$, za katere je $F_X(x) = \alpha$ za vsak $x \in I_\alpha$. Porazdelitvena funkcija diskretne ali mešane slučajne spremenljivke pa ima tudi skoke. Ker v splošnem primeru inverzna funkcija porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ ne obstaja, bomo oznako za inverzno funkcijo uporabljali za psevdoinverzno oziroma kvantilno funkcijo, ki je za vsak $\alpha \in [0,1]$ definirana z enačbo

$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{F_X(x) \geq \alpha\} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{F_X(x) < \alpha\}. \tag{4.1}$$

Ker je mogoče, da ne obstaja tak $x \in \mathbb{R}$, ki bi izpolnjeval pogoj $F_X(x) \geq \alpha$ oziroma $F_X(x) < \alpha$, je po dogovoru $\inf\emptyset = +\infty$ in $\sup\emptyset = -\infty$.

Za zvezno slučajno spremenljivko X, ki ima strogo naraščajočo porazdelitveno funkcijo, inverzna funkcija vedno obstaja in je enaka psevdoinverzni oziroma kvantilni funkciji $F_X^{-1}(\alpha)$. Če pa ima porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ horizontalne segmente, je včasih koristna tudi funkcija

$$F_X^{-1+}(\alpha) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\{F_X(x) > \alpha\} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{F_X(x) \leq \alpha\},$$

ki je tudi definirana za $\alpha \in [0,1]$, in linearna kombinacija

$$F_X^{-1(\beta)}(\alpha) = \beta F_X^{-1}(\alpha) + (1-\beta)F_X^{-1+}(\alpha), \tag{4.2}$$

ki je definirana za $\alpha \in (0,1)$ in $\beta \in [0,1]$. Njena prednost pred F_X^{-1} in F_X^{-1+} je v tem, da za vsak x, za katerega je $0 < F_X(x) < 1$, lahko najdemo tak $\beta_x \in [0,1]$, da je $F_X^{-1(\beta_x)}(F_X(x)) = x$.

Funkcije F_X^{-1}, F_X^{-1+} in $F_X^{-1(\beta)}$ so naraščajoče. Prva je zvezna z leve, druga pa z desne. Za vsak $\alpha \in (0,1)$ in $\beta \in [0,1]$ je $F_X^{-1}(\alpha) \leq F_X^{-1(\beta)}(\alpha) \leq F_X^{-1+}(\alpha)$, vse tri vrednosti pa so končne, medtem ko je $F_X^{-1}(0) = -\infty$ in $F_X^{-1+}(1) = \infty$. Če je $F_X^{-1+}(0)$ končna vrednost, je za $x \in (-\infty, F_X^{-1+}(0))$ porazdelitena funkcija $F_X(x)$ konstantno 0. Analogno je konstantno 1, če je $F_X^{-1}(1)$ končna vrednost in $x \in (F_X^{-1}(1), \infty)$. Zato bomo s tem, da je porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ strogo naraščajoča, vedno mislili, da je strogo naraščajoča na intervalu $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$. S takim dogovorom veljata ekvivalenci

$$F_X \text{ je strogo naraščajoča} \iff F_X^{-1} \text{ je zvezna na } (0,1)$$

$$F_X \text{ je zvezna} \iff F_X^{-1} \text{ je strogo naraščajoča na } (0,1)$$

(glej Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas & Vyncke, 2002b, str. 20).

Naj bo X slučajna spremenljivka, $g(x)$ naraščajoča zvezna funkcija in $\alpha \in (0,1)$.

Potem je $F^{-1}_{g(X)}(\alpha) = g(F^{-1}_X(\alpha))$ in $F^{-1+}_{g(X)}(\alpha) = g(F^{-1+}_X(\alpha))$ (glej Dhaene et al., 2002b, str. 11, izrek 1).

Večkrat se izkaže za koristno, če pričakovano vrednost $\mathbb{E}[X]$ slučajne spremenljivke X izrazimo s funkcijo preživetja $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$. Če je pričakovana vrednost $\mathbb{E}[X]$ končna, potem je $\lim_{x\to-\infty} xF_X(x) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} x(1 - F_X(x)) = 0$ (Dhaene et al., 2002b, str. 6). Zato z integriranjem per partes za

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{d}F_X(x) - \int_0^{\infty} x\,\mathrm{d}(1 - F_X(x))$$

dobimo

$$\mathbb{E}[X] = -\int_{-\infty}^{0} (1 - \overline{F}_X(x))\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x, \tag{4.3}$$

kar se za nenegativne slučajne spremenljivke poenostavi v $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x$.

V prejšnjem poglavju smo z enačbo (3.1) izračunali $\mathbb{E}[\max\{X-M,0\}]$, kar je nevarnostna pozavarovalna premija za neomejeno škodno presežkovno pozavarovanje nad prioriteto M. Pri tem nas je pričakovana vrednost $\mathbb{E}[\max\{X-M,0\}]$ zanimala le za poseben primer, ko je $X \geq 0$ in $M \geq 0$. Opustimo obe omejitvi in se dogovorimo, da bomo z X_+ krajše označevali $\max\{X,0\}$. Ker je $(X-M)_+ = 0$ za $X < M$ in $(X-M)_+ = X - M$ za $X \geq M$, z integriranjem per partes za $\mathbb{E}[(X-M)_+]$ dobimo

$$\int_M^{\infty} (x - M) f_X(x)\mathrm{d}x = -\int_M^{\infty} (x - M)\mathrm{d}(1 - F_X(x)) = \int_M^{\infty} \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x.$$

Za dano slučajno spremenljivko X oziroma porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ stop-loss transformiranko $\pi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirajmo z enačbo

$$\pi_X(t) = \mathbb{E}[\max\{X - t,0\}] = \mathbb{E}[(X - t)_+] = \int_t^{\infty} \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Stop-loss transformiranka $\pi_X(t)$ je padajoča konveksna funkcija. Če pričakovana vrednost $\mathbb{E}[X]$ obstaja, je $\lim_{t\to\infty} \pi_X(t) = 0$, iz

$$\pi_X(t) + t = \mathbb{E}[(X - t)_+] + t = \mathbb{E}[(X - t)_+ + t] = \mathbb{E}[\max\{X, t\}]$$

pa sledi $\lim_{t\to-\infty}(\pi_X(t) + t) = \mathbb{E}[X]$ (Dhaene et al., 2002b, str. 7).

Z znano stop-loss transformiranko $\pi_X(t)$omejeno pričakovano vrednost $\mathbb{E}[X;M]$ izračunamo z $\mathbb{E}[X;M] = \mathbb{E}[X] - \pi_X(M)$. Enačbo (3.1), kjer je $X_p = (X - M)_+$, poenostavimo v $\mathbb{E}[X_p] = \pi_X(M)$, enačbo (3.2), kjer je $X_p = \max\{(X - M)_+, L\}$, pa predelamo v

$$\mathbb{E}[X_p] = \pi_X(M) - \pi_X(M + L) = \int_M^{M+L} \overline{F}_X(x)\,dx,$$

kar pomeni, da je nevarnostna pozavarovalna premija za škodno presežkovno kritje sloja oziroma intervala dolžine L, ki se začne v točki M, odvisna le od funkcije preživetja oziroma porazdelitvene funkcije na istem intervalu.

V zavarovalnicah se največ ukvarjamo s škodami oziroma z odškodninami, katerih višine modeliramo s slučajnimi spremenljivkami. Zato so za modeliranje ustrezne nenegativne slučajne spremenljivke, večja vrednost pa pomeni večjo škodo oziroma odškodnino, torej za zavarovalnico manj ugoden izid. V bankah se največ ukvarjamo z naložbami, katerih vrednosti modeliramo s slučajnimi spremenljivkami. Zato večja vrednost slučajne spremenljivke pomeni večjo vrednost naložbe, torej ugodnejši izid za banko. Za modeliranje odmikov od pričakovane vrednosti naložbe nenegativne slučajne spremenljivke niso primerne, ker ne dopuščajo negativnih odmikov. Skratka, pogled na bančni in zavarovalniški model tveganja se razlikuje vsaj v predznaku, če ne tudi v definicijskem območju slučajne spremenljivke.

Tudi v novejši aktuarski literaturi (glej npr. Denuit, Dhaene, Goovaerts & Kaas, 2005, str. 9, definicija 1.4.3, in Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit, 2008, str. 152) so tveganja modelirana z nenegativnimi slučajnimi spremenljivkami, kar pomeni, da v bistvu upoštevajo definicijo 3.2. S tem so vsekakor povezane nekatere težave in nedoslednosti, denimo uporaba normalne porazdelitve, ki pa jih avtorji molče preskočijo. Tu bomo raje izhajali iz definicije 3.1, prirejene za modeliranje.

Definicija 4.1: *Slučajno spremenljivko X, za katero je dogodek $X = x_1$ manj ugoden od dogodka $X = x_2$, če je $x_1 \geq x_2$, bomo imenovali tveganje. Če s tveganjem X modeliramo naključne odmike od nekega nevtralnega stanja, dogodek $X = x$ pomeni neugoden dogodek (izgubo), če je $x > 0$, ugoden dogodek (dobiček), če je $x < 0$, in nevtralen dogodek, če je $x = 0$. Slučajna spremenljivka X je priložnost, če je $-X$ tveganje.*

Opomba 4.1: V definiciji 4.1 z oznako "manj ugoden" dejansko mislimo na "manj ali enako ugoden", tako kot pri naraščajoči ali konkavni funkciji ne mislimo na strogo naraščajočo ali strogo konkavno funkcijo, če tega izrecno ne navedemo. □

Če ne bomo izrecno povedali drugače, bomo pojma slučajna spremenljivka in tveganje v nadaljevanju uporabljali kot sinonima.

Včasih dve različni tveganji modeliramo s slučajnima spremenljivkama X in Y s porazdelitvenima funkcijama $F_X(x)$ in $F_Y(x)$, ki sta enaki. Taki slučajni spremenljivki sta enako porazdeljeni oziroma enaki v porazdelitvi, kar bomo označevali z $X \stackrel{d}{=} Y$. Če pa bomo hoteli poudariti, da nista enako porazdeljeni, bomo zapisali $X \stackrel{d}{\neq} Y$.

Slučajne vektorje bomo označevali s krepkimi črkami. Razlikovanje med vrstičnimi in stolpičnimi vektorji večinoma ne bo potrebno. Kadar pa bo potrebno, denimo pri matričnih operacijah, bomo $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ razumeli kot vrstični vektor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ pa kot stolpični vektor.

4.2 Mere tveganja

Različni tveganji X in Y, o katerih imamo vse potrebne podatke, pod čemer razumemo poznavanje njunih porazdelitvenih funkcij $F_X(x)$ in $F_Y(x)$, v splošnem primeru težko primerjamo glede tveganosti. Le v posebnih primerih se ni težko odločiti. Če je $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$ ter $\mathrm{var}[X] \leq \mathrm{var}[Y]$, se brez težav odločimo, da je X manj tvegana izbira kot Y. Kaj pa, če je $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$, vendar $\mathrm{var}[X] > \mathrm{var}[Y]$? V tem primeru pri X sicer pričakujemo ugodnejši izid kot pri Y, hkrati pa večjo variabilnost. Kateri pogoj naj v takem primeru prevlada? V nekaterih primerih prvi, v nekaterih drugi. Idealno bi bilo, če bi lahko upoštevali primerno kombinacijo obeh, zraven pa še vse preostale informacije, ki se skrivajo v obeh porazdelitvenih funkcijah, na koncu pa vse skupaj izrazili z eno samo realno vrednostjo – mero tveganja.

Poskusi, kako z eno vrednostjo konsistentno ovrednotiti tveganje X, so že stari in bolj ali manj uspešni. Pregled merjenja tveganja v različnih panogah, npr. psihologiji, operacijskih raziskavah, znanosti o upravljanju, financah in ekonomiji, navajata Pedersen in Satchell (1998). Čeprav navajata kar 30 že obstoječih mer tveganja, avtorja na podlagi Stonove definicije družine mer tveganja iz leta 1973 definirata še splošnejšo družino in uvedeta sistem štirih aksiomov, od katerih prve tri izpolnjujejo vse mere iz nove družine, četrtega (subaditivnost) pa le nekatere. Praktično sočasno so drugi avtorji razvili nov sistem aksiomov za koherentne mere tveganja, ki je postal trenutno še vedno veljavni standard za dobre mere tveganja, čeprav tudi ta ni brez pomanjkljivosti. Tako, denimo, v člankih (Dhaene, Goovaerts & Kaas, 2003; Goovaerts, Kaas, Dhaene & Tang, 2003a) avtorji na primerih ugotavljajo, da različne potrebe narekujejo različne aksiome za mere tveganja.

4.2.1 Koherentne mere tveganja

Vsako funkcijo ρ, ki slučajni spremenljivki X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ priredi realno število, bomo imenovali mera tveganja. Ponavadi zahtevamo, da funkcija ρ izpolnjuje še kakšne dodatne lastnosti. Take lastnosti običajno združimo v sistem aksiomov, ki naj bi ga izpolnjevale "dobre" mere tveganja.

V članku (Artzner, Delbaen, Eber & Heath, 1999) je postavljen trenutno še vedno aktualen sistem aksiomov, ki ga izpolnjujejo t. i. koherentne mere tveganja, nanaša pa se na priložnosti, ker je prirejen za potrebe bank. Zato v spodnji definiciji navajamo aksiome, ki se od prvotnih razlikujejo, ker so prirejeni za tveganja (glej Tsanakas, 2004, str. 225).

Definicija 4.2: *Funkcija $\rho\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, ki slučajni spremenljivki $X \in \mathcal{X}$ priredi vrednost $\rho(X)$, je koherentna mera tveganja, če za poljubni slučajni spremenljivki X in Y izpolnjuje naslednje aksiome:*

1. *Monotonost: Če je $\mathbb{P}(X \le Y) = 1$, potem je $\rho(X) \le \rho(Y)$.*
2. *Subaditivnost: $\rho(X + Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$.*
3. *Pozitivna homogenost: Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}^+$ je $\rho(\alpha X) = \alpha\,\rho(X)$.*
4. *Neobčutljivost na premik: Za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$.*

Opomba 4.2: Pod pojmom neobčutljivost na premik bi običajno pričakovali enačbo $\rho(X + \alpha) = \rho(X)$. Vendar $X + \alpha$ pomeni tveganje X, ki ga spremenimo za konstantno tveganje, kar se mora odražati tudi pri merjenju. Za trivialno slučajno spremenljivko $X = \alpha$ po tretjem aksiomu dobimo $\rho(2\alpha) = 2\rho(\alpha)$, po četrtem pa $\rho(\alpha + \alpha) = \rho(\alpha) + \alpha$, iz česar sledi $\rho(\alpha) = \alpha$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Včasih se zadovoljimo tudi z merami tveganja, ki izpolnjujejo manj zahtevne pogoje od tistih v definiciji 4.2. Ena od možnosti je, da zahtevamo monotonost in neobčutljivost na premik ter izpolnjenost neenačbe $\rho(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) \le \lambda_1 \rho(X) + \lambda_2 \rho(Y)$ za poljubni tveganji X in Y in poljubni konstanti $\lambda_1 \ge 0$ in $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Mere tveganja, ki izpolnjujejo navedene tri pogoje, so konveksne mere tveganja. Vsaka koherentna mera tveganja ρ je tudi konveksna, saj zaradi subaditivnosti in pozitivne homogenosti sledi

$$\rho(\lambda_1 X + \lambda_2 Y) \le \rho(\lambda_1 X) + \rho(\lambda_2 Y) = \lambda_1 \rho(X) + \lambda_2 \rho(Y),$$

nasprotno pa ne velja. Če pa je konveksna mera tveganja ρ tudi pozitivno homogena, je zaradi $\rho(X + Y) = 2\,\rho(X/2 + Y/2) \le 2\,(\rho(X/2) + \rho(Y/2)) = \rho(X) + \rho(Y)$ subaditivna in zato koherentna.

Iz znanih koherentnih mer tveganja s konveksno linearno kombinacijo spet dobimo koherentno mero tveganja. Če se pri merjenju tveganja X ne moremo odločiti med dvema koherentnima merama tveganja ρ_1 in ρ_2, lahko določimo uteži $\lambda_1 > 0$ in $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, ter tveganje izmerimo z $\rho(X) = \lambda_1\,\rho_1(X) + \lambda_2\,\rho_2(X)$, kar je spet koherentna mera tveganja.

Definiciji 4.2 daje težo drugi aksiom, ki zahteva subaditivnost in s tem spodbuja združevanje portfeljev tveganj, ne pa razdruževanje. Če za zavarovalnici s portfeljema X in Y potrebni kapital K_x in K_y izračunamo s koherentno mero tveganja kot $K_x = \rho(X)$ in $K_y = \rho(Y)$, potem združena zavarovalnica za portfelj $X + Y$ potrebuje manj kapitala, če v neenačbi $K = \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) = K_x + K_y$ dosežemo strogi neenačaj. Dejstvo lahko pojasnimo z ekonomijo obsega in opažanjem, da se medsebojni pozitivni in negativni učinki posameznih tveganj v večjem portfelju laže nevtralizirajo kot v manjšem, seveda pa tudi s trdnimi teoretičnimi razlogi, denimo z Lundbergovo neenačbo. Vendar pa so mnenja o subaditivnosti deljena. Tako si Acerbi in Tasche (2002a, str. 382) sicer zlahka predstavljata alternativni sistem aksiomov za mere tveganja, vendar pa trdno verjameta, da ne sme dopustiti kršitve subaditivnosti. Po drugi strani pa je vsaj v nekaterih okoliščinah subaditivnost lahko sporna, včasih pa je sporna celo pozitivna homogenost – glej, denimo, primere, ki jih navajajo Dhaene et al. (2003). V (Goovaerts, Kaas, Dhaene & Tang, 2003b, str. 183, opomba 3.8) je celo mnenje, da bi morali za določanje kapitala upoštevati superaditivne mere tveganja, za katere je $\rho(X+Y) \geq \rho(X)+\rho(Y)$, ali pa aditivne, za katere je $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Omenimo le še to, da obstaja več definicij za koherentne mere tveganja. Razlike med njimi so v definicijskem območju in zalogi vrednosti funkcije ρ, ki je večkrat definirana le za nenegativne slučajne spremenljivke in preslikuje v $\mathbb{R}^+$, ter pri različnem pomenu predznaka pri priložnostih in tveganjih. Poleg takih razlik, ki so formalne narave in se jih da s pravilno interpretacijo izničiti, pa obstajajo tudi vsebinske razlike. Zato definicije med seboj niso vedno ekvivalentne – primerjaj definicijo 4.2 in definicijo v (Wirch & Hardy, 1999, str. 338), prav tako še ne obstaja splošno sprejeti sistem aksiomov za koherentne mere tveganja (Denuit et al., 2005, str. 65).

4.2.2 Varianca in standardni odklon

Varianca in standardni odklon sta med seboj tesno povezani meri tveganja, saj je za slučajno spremenljivko X standardni odklon definiran kot $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}$. Zato imata obe skupne slabosti, a tudi nekaj različnih lastnosti.

Varianca in standardni odklon sta zaradi zelo pogoste uporabe v statistiki, ekonomiji in finančni teoriji poleg pričakovane vrednosti $\mathbb{E}[X]$, ki je koherentna mera tveganja, verjetno najbolj znani meri tveganja. Žal sta primerni predvsem takrat, ko lahko predpostavimo normalno porazdelitev. Pri asimetričnih porazdelitvah, ki so zlasti v zavarovalništvu zelo pogoste, pa nista uporabni, kar navaja veliko avtorjev (glej npr. Ramsay, 1993, str. 312).

Varianca in standardni odklon nista koherentni meri tveganja. Varianca ne izpolnjuje nobene zahteve za koherentnost, standardni odklon pa ni monoton in ni neobčutljiv na premik, preostali dve zahtevi pa izpolnjuje. Varianca je aditivna za neodvisne slučajne spremenljivke, kar pa za standardni odklon ne velja.

4.2.3 Tvegana vrednost

Tvegana vrednost (VaR – Value at Risk) slučajne spremenljivke X pri stopnji zaupanja $\alpha \in (0,1)$ je definirana z enačbo

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Tvegana vrednost pri dani stopnji zaupanja α je le sinonim za ustrezni kvantil, saj je $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$, kjer je $F_X^{-1}(\alpha)$ kvantilna funkcija, ki smo jo definirali z enačbo (4.1).

Tvegana vrednost je pogosto uporabljana mera tveganja in bo uporabljena tudi v Solventnosti 2, čeprav ni koherentna. Izpolnjuje vse aksiome iz definicije 4.2, razen drugega. Da ni subaditivna, so z diskretnim primerom ugotovili že avtorji originalne verzije definicije koherentne mere tveganja (glej Artzner et al., 1999, str. 216 in 217). Dokaz, da kvantili tudi v zveznem primeru niso subaditivni, pa lahko najdemo v (Antal, 2009, str. 44 in 45).

Tvegana vrednost ima nekaj pomanjkljivosti. Tako ji, denimo, očitajo, da ne prepoznava koncentracije tveganj in ne spodbuja razprševanja tveganj, ker ne upošteva ekonomskih posledic dogodkov, katerih verjetnosti nadzoruje (glej Artzner et al., 1999, str. 216–218). Wang (2002a, str. 3) ugotavlja, da tvegana vrednost sicer upošteva verjetnost, da bo tveganje preseglo določeno mejo, ne upošteva pa velikosti prekoračitve. Balbás, Garrido in Mayoral (2002, str. 2), ki se sicer sklicujejo na druge vire, pa navajajo, da jo je težko optimizirati, ker ni konveksna in ima lahko več lokalnih ekstremov.

Kljub številnim očitkom pa je tvegana vrednost v posebnih primerih lahko ustrezna mera tveganja. Tako Embrechts, McNeil in Straumann (1999, str. 12) navajajo, da je v okolju eliptičnih porazdelitev (za definicijo glej razdelek 5.1) tudi tvegana vrednost koherentna mera tveganja. Za eliptične porazdelitve, ki so v nekem smislu razširitev večrazsežne normalne porazdelitve, se celo izkaže, da je uporaba koherentnih mer tveganja pri reševanju določenih problemov ekvivalentna uporabi variance. Tako bi znani Markowitzev pristop k minimizaciji tveganja pri predpisani donosnosti portfelja, ki temelji na minimiziranju variance donosnosti, hkrati minimiziral vsako mero tveganja, ki je pozitivno homogena in neobčutljiva na premik – torej vsako koherentno mero tveganja in tudi tvegano vrednost. Za dodaten primer, ko se tvegana vrednost obnaša kot subaditivna mera tveganja, glej (Daníelsson, Jorgensen, Sarma, Samorodnitsky & de Vries, 2005).

Da tvegana vrednost kljub pomanjkanju subaditivnosti ni daleč od koherentnosti, pove tudi enačba

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{\rho(X) : \rho \text{ je koherentna mera tveganja in } \rho(X) > \mathrm{VaR}_\alpha(X)\}$$

iz (Artzner et al., 1999, str. 224, trditev 5.2).

4.2.4 Končna tvegana vrednost

Izberimo poljubno stopnjo zaupanja $\alpha \in (0,1)$ in poljubno konstanto x_α. Vsaki zvezni slučajni spremenljivki X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$, ki v točki x_α doseže vrednost $F_X(x_\alpha) = \alpha$ in je tam strogo naraščajoča, pripada tvegana vrednost $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = x_\alpha$. To pomeni, da je popolnoma vseeno, kako hitro narašča $F_X(x)$ za $x \geq x_\alpha$ proti svoji končni vrednosti 1. Rep gostote verjetnosti $f_X(x)$ na intervalu $[x_\alpha, \infty)$ tako prav nič ne vpliva na $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Po drugi strani pa iz prakse dobro vemo, da je rep izjemno pomemben, saj so prav z njim povezana velika tveganja.

To pomanjkljivost tvegane vrednosti odpravlja končna tvegana vrednost (TVaR ali TailVaR – Tail Value at Risk) slučajne spremenljivke X, ki je za stopnjo zaupanja $\alpha \in (0,1)$ definirana z enačbo

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_q(X)\mathrm{d}q\,.$$

Končna tvegana vrednost $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ je torej enaka povprečju vseh tveganih vrednosti za stopnje zaupanja od α do 1.

Definirajmo še pogojno tvegano vrednost (CVaR – Conditional Value at Risk) in TVaR sorodno pogojno končno tvegano vrednost (CTE – Conditional Tail Expectation). Za stopnjo zaupanja $\alpha \in (0,1)$ je prva definirana z enačbo

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X - \mathrm{VaR}_\alpha(X) | X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)],$$

druga pa z enačbo

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)].$$

Očitno je $\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$, velja pa tudi

$$\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{TVaR}_\beta(X) \quad \text{za} \quad \beta = F_X(\mathrm{VaR}_\alpha(X))$$

(Dhaene et al., 2004b, str. 6, izrek 1). Za zvezne slučajne spremenljivke je $\beta = \alpha$

in $\mathrm{CTE}_\alpha(X) = \mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$, sicer pa se $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ in $\mathrm{CTE}_\alpha(X)$ razlikujeta za tiste stopnje zaupanja, ki jih porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ zaradi skoka ne more doseči.

Pomembnejša je razlika, da je TVaR koherentna mera tveganja, CTE pa ni, ker ni subaditivna (Dhaene et al., 2004b, str. 15). Pri tovrstnih trditvah, na katere naletimo v literaturi, pa je treba biti zelo pozoren na definicije. Obstaja namreč kar precej vsebinskih razlik v terminologiji, ki lahko vodijo do različnih sklepov. Tako nekateri viri, denimo (Wang, 2002a, str. 4), TVaR in CTE uporabljajo kot sinonima, pri drugih pa za istimi pojmi lahko stojijo različne definicije, ki med seboj niso ekvivalentne. Da je terminološka zmešnjava precejšnja, ugotavljata tudi Acerbi in Tasche (2002b, str. 1488), ki pa na problematiko gledata z bančnega zornega kota.

Kljub koherentnosti pa tudi končna tvegana vrednost ni brez slabosti. Čeprav upošteva verjetnost prekoračitve določene meje in velikost prekoračitve, pa popolnoma zanemarja tisti del porazdelitvene funkcije, ki se nanaša na $x < \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Kot ugotavlja Wang (2002a, str. 2), končna tvegana vrednost ne upošteva dovolj tveganj z majhno verjetnostjo uresničitve, vendar pa ekstremnimi posledicami, ker upošteva povprečje prekoračitve meje, ne pa tudi višjih momentov.

4.2.5 Pričakovani primanjkljaj

Pričakovani primanjkljaj (ESF – Expected Shortfall) slučajne spremenljivke X za stopnjo zaupanja $\alpha \in (0,1)$ je definiran z enačbo

$$\mathrm{ESF}_\alpha(X) = \mathbb{E}[\max\{X - \mathrm{VaR}_\alpha(X), 0\}] = \mathbb{E}[(X - \mathrm{VaR}_\alpha(X))_+].$$

Pričakovani primanjkljaj lahko, denimo, obravnavamo kot pozavarovalno premijo za pozavarovanje letnega presežka škod nad $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Predpostavimo, da zavarovalnica za portfelj X s pripadajočo letno premijo P določi kapital K, ki ga je pripravljena tvegati, oziroma stopnjo zaupanja α, za katero je $P + K = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Z verjetnostjo α lahko pričakuje, da bo to dovolj za izplačilo odškodnin. Če bo, morebitnega presežka premije nad odškodninami ne bo delila s pozavarovalnico, seveda pa lahko že v tem primeru delno ali v celoti izgubi tvegani kapital K. Zavarovalnica z verjetnostjo $1 - \alpha$ pričakuje izgubo celotnega tveganega kapitala K in še dodatni primanjkljaj v višini $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) - \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, ki pa ga krije pozavarovanje. Če upoštevamo obe možnosti, ugotovimo, da je $\mathrm{ESF}_\alpha(X) = (1 - \alpha)(\mathrm{TVaR}_\alpha(X) -$

$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$) korektno določena pozavarovalna premija, hkrati pa dobimo še zvezo

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{\mathrm{ESF}_\alpha(X)}{1-\alpha}. \tag{4.5}$$

Naj bo $X_p = (X-M)_+$, kjer je M prioriteta neomejenega škodno presežkovnega pozavarovanja. Porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ naj bo v točki M strogo naraščajoča. Če je $F_X(M) = \alpha$, potem je $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = M$. Zato enačbo (3.1) za izračun nevarnostne pozavarovalne premije za neomejeno škodno presežkovno pozavarovanje nad prioriteto M lahko zapišemo še kot $\mathbb{E}[X_p] = \mathrm{ESF}_{F_X(M)}(X)$.

Pričakovani primanjkljaj ni koherentna mera tveganja, ker ni subaditivna (Dhaene et al., 2004a, str. 58), prav tako ni neobčutljiva na premik, je pa monotona in pozitivno homogena.

Tudi v tem primeru ni terminološke enotnosti. Tako, denimo, je z izrazom pričakovani primanjkljaj večkrat mišljena mera tveganja $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ ali $\mathrm{CTE}_\alpha(X)$, zlasti v finančni literaturi pri merjenju tveganj z zornega kota bank (glej npr. Tasche, 2002, str. 1525, trditev 3.4). Da pa je zmeda še večja, je v finančni literaturi CVaR sinonim za pričakovani primanjkljaj, kot je razumljen tam. Včasih naletimo tudi na pričakovani primanjkljaj, definiran s $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) - \mathbb{E}[X]$ ali $\mathrm{CTE}_\alpha(X) - \mathbb{E}[X]$. Malo pa bomo k zmedi dodali še sami. Izraz pričakovani primanjkljaj bomo uporabljali tudi za mero tveganja φ, definirano z enačbo

$$\varphi(X,K) = \mathbb{E}[\max\{X-K,0\}] = \mathbb{E}[(X-K)_+],$$

kjer je K konstanta. Tako definirani pričakovani primanjkljaj je monoton, ni pa subaditiven, ni neobčutljiv na premik in ni pozitivno homogen. Kljub temu pa je uporaben pri alociranju skupnega kapitala K za tveganje $S = \sum_{i=1}^n X_i$ na posamezna tveganja $X_1, \ldots, X_n$, kar si bomo ogledali v 8. poglavju.

4.2.6 Mere tveganja na podlagi funkcij koristnosti

Funkcije koristnosti sta v ekonomijo leta 1944 v svoji znameniti knjigi o teoriji iger in ekonomičnem obnašanju vpeljala von Neumann in Morgenstern (1953), v letu 1947 pa sta v drugi izdaji knjige dodala njihovo aksiomatsko izpeljavo. Funkcije koristnosti omogočajo primerjavo dveh poljubnih negotovih priložnosti, s tem pa tudi racionalno odločanje v razmerah negotovosti. Zanje običajno zahtevamo, da so strogo naraščajoče in strogo konkavne (Gerber & Pafumi, 1998, str. 75). Ti dve zahtevi temeljita na prepričanju, da je za racionalnega odločevalca več dobrin bolje kot manj, in spoznanju, da se koristnost vsake dodatne enote dobrine manjša z večanjem količine, ki jo že ima. Obe zahtevani lastnosti si bomo zagotovili posredno s pogojema o odvodih v spodnji definiciji, le da bomo namesto stroge konkavnosti zahtevali le konkavnost. S tem bomo dosegli, da bo tudi linearna funkcija $u(t) = t$ funkcija koristnosti.

Definicija 4.3: *Realna dvakrat odvedljiva funkcija $u(t)$, definirana na $\mathbb{R}$, za katero sta izpolnjena pogoja $u'(t) > 0$ in $u''(t) \leq 0$, se imenuje funkcija koristnosti. Če je še $u(0) = 0$ in $u'(0) = 1$, je $u(t)$ normirana funkcija koristnosti.*

Opomba 4.3: Poleg zgornje definicije obstajajo tudi definicije, ki ne zahtevajo, da je funkcija $u(t)$ definirana na celi realni osi, nekatere ne zahtevajo odvedljivosti, se zadovoljijo z naraščanjem namesto strogim naraščanjem, ne zahtevajo konkavnosti, dopuščajo tudi strogo padanje ipd. V nadaljevanju bomo v razdelkih 4.2.9 in 4.3.6 pri primerjanju klasičnega in dualnega odločanja v razmerah negotovosti oziroma pri obravnavi relacij med različnimi urejenostmi tveganj omilili pogoje iz definicije 4.3, na kar pa bomo posebej opozorili. □

Za poljubni konstanti $\alpha > 0$ in β je tudi $v(t) = \alpha u(t) + \beta$ funkcija koristnosti, ki je s stališča odločanja med različnimi možnostmi ekvivalentna $u(t)$. Ker je sistem linearnih enačb $\alpha u(0) + \beta = 0$ in $\alpha u'(0) = 1$ vedno enolično rešljiv, vsako funkcijo koristnosti lahko normiramo, ne da bi s tem spremenili način odločanja.

S funkcijo $r(t) = \frac{-u''(t)}{u'(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log u'(t)$, ki se ob morebitnem normiranju ne spremeni, definirajmo absolutno averzijo do tveganja. Pozitivna absolutna averzija pomeni nenaklonjenost tveganju, negativna naklonjenost tveganju, nič pa nevtralnost. Za vsako funkcijo koristnosti, ki izpolnjuje pogoje iz definicije 4.3, je $r(t) \geq 0$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. To pomeni, da imajo različne osebe sicer lahko različne funkcije koristnosti, vendar pa je vsem skupno, da tveganju niso naklonjene. Spodnja meja tolerance do tveganja, ki jo dopušča definicija 4.1, je nevtralnost, ki jo predstavlja linearna funkcija koristnosti $u(t) = t$ z absolutno averzijo $r(t) \equiv 0$.

Funkcije koristnosti uporabljamo za izbiro med negotovimi priložnostmi, tako da se odločamo na podlagi pričakovanih koristnosti, za katere molče predpostavljamo obstoj. Med priložnostma X in Y se odločevalec s funkcijo koristnosti $u(t)$ odloči za X, če je $\mathbb{E}[u(X)] \geq \mathbb{E}[u(Y)]$ (seveda je Y enakovredna izbira, če velja enačaj). Tveganjema X in Y v okolju funkcij koristnosti, ki so prirejene za priložnosti, ustrezata priložnosti $-X$ in $-Y$. Ko se med njima odločimo za priložnost $-X$, če je $\mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)]$, se s tem dejansko odločimo za tveganje X, ki je manjše ali enako tveganju Y.

Z normirano funkcijo koristnosti $u(t)$ lahko naravno definiramo mero tveganja $\rho_u(X) = -\mathbb{E}[u(-X)]$. Ker je za normirane funkcije koristnosti $u(t) \leq u(0) = 0$

za $t \leq 0$ in $u(t) \geq u(0) = 0$ za $t \geq 0$, je $\rho_u(X) \geq 0$ za $X \geq 0$, $\rho_u(X) \leq 0$ za $X \leq 0$ in $\rho_u(X) = 0$ za $X = 0$. To pa ni edina možnost, kako s funkcijo koristnosti definiramo mero tveganja. Še nekaj možnosti si bomo ogledali v razdelku 4.4.4 o premijskih principih. Za zavarovalništvo so namreč funkcije koristnosti postale zanimive in tudi praktično uporabne za določanje premij že relativno zgodaj (glej npr. Borch, 1961).

4.2.7 Mere tveganja na podlagi distorzijskih funkcij

Distorzijske funkcije je v aktuarsko matematiko s svojo PH (proportional hazards) transformacijo vpeljal Wang (1995), čeprav jim je ime dal šele kasneje (Wang, 1996). Distorzijske funkcije imajo pomembno in raznoliko vlogo, saj jih uporabljamo pri določanju zavarovalnih premij, odločanju v razmerah negotovosti, merjenu tveganj in še marsikje. To je presenetljivo, saj je njihova definicija zelo preprosta.

Definicija 4.4: *Naraščajoča funkcija* $g\colon [0,1] \to [0,1]$ *je distorzijska funkcija, če je* $g(0) = 0$ *in* $g(1) = 1$.

Če distorzijski funkciji $g(x)$ priredimo funkcijo $g^*(x) = 1 - g(1 - x)$, dobimo distorzijsko funkcijo, imenovano dualna distorzijska funkcija. Tej dualna pa je prvotna $g(x)$.

Lastnosti distorzijskih funkcij zagotavljajo, da ima transformiranka $g^*(F_X(x))$ porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ vse potrebne lastnosti za porazdelitveno funkcijo, razen zveznosti z desne, ker kompozitum $g^* \circ F_X$ ni nujno z desne zvezen. Če je $g(x)$ z desne zvezna funkcija, je taka tudi $g^*(x)$. V tem primeru je tudi kompozitum $g^* \circ F_X$ z desne zvezen, ker je $F_X(x)$ naraščajoča funkcija, $g^*(F_X(x))$ pa je porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke X_g^*. Njena funkcija preživetja je $1 - g^*(F_X(x)) = 1 - (1 - g(1 - F_X(x))) = g(\overline{F}_X(x))$, torej transformiranka funkcije preživetja slučajne spremenljivke X. Če je $g(x)$ konkavna, je $g^*(x)$ konveksna, zato poteka $g^*(F_X(x))$ pod $F_X(x)$, $g(\overline{F}_X(x))$ pa nad $\overline{F}_X(x)$. S konkavno distorzijsko funkcijo $g(x)$ slučajno spremenljivko X preslikamo v bolj tvegano slučajno spremenljivko X_g^*. Zato smo na varni strani, če zavarovalno premijo, rezervacije, kapital ipd. računamo z X_g^* namesto z X. Če uporabimo terminologijo iz nadaljevanja (glej razdelek 4.3.1), je slučajna spremenljivka X v stohastičnem smislu manj tvegana od X_g^*, če je $g(x)$ konkavna distorzijska funkcija.

Distorzijski funkciji $g(x)$, za katero je $g^*(F_X(x))$ porazdelitvena funkcija, priredimo mero tveganja $\mathbb{H}_g[X] = \mathbb{E}[X_g^*]$, ki jo zaradi enačbe (4.3) lahko zapišemo kot

$$\mathbb{H}_g[X] = -\int_{-\infty}^{0} (1 - g(\overline{F}_X(x)))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} g(\overline{F}_X(x))\mathrm{d}x, \tag{4.6}$$

kar se v posebnem primeru, ko je $X \geq 0$, poenostavi v

$$\mathbb{H}_g[X] = \int_{0}^{\infty} g(\overline{F}_X(x))\mathrm{d}x. \tag{4.7}$$

Tudi če $g^*(F_X(x))$ ni porazdelitvena funkcija, ker ni z desne zvezna, z enačbo (4.6) definiramo mero tveganja $\mathbb{H}_g[X]$, seveda pa je v tem primeru ne moremo interpretirati kot pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X_g^*.

Če v integralih na desni strani enačbe (4.6) vstavimo $g(\overline{F}_X(x)) = \int_0^{\overline{F}_X(x)} \mathrm{d}g(q)$, s Fubinijevim izrekom z zamenjavo vrstnega reda integriranja dobimo

$$\mathbb{H}_g[X] = \int_0^1 F_X^{-1}(1-q)\,\mathrm{d}g(q) = \int_0^1 \overline{F}_X^{-1}(q)\,\mathrm{d}g(q) \tag{4.8}$$

(Dhaene et al., 2004b, str. 18). V posebnem primeru, ko je $g(x) = x$ in zato $X_g^* = X$ ter $\mathbb{H}_g[X] = \mathbb{E}[X]$, se enačba (4.8) poenostavi v

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 F_X^{-1}(1-q)\,\mathrm{d}q = \int_0^1 \overline{F}_X^{-1}(q)\,\mathrm{d}q. \tag{4.9}$$

Mera tveganja $\mathbb{H}_g$, definirana z enačbo (4.6), je monotona, pozitivno homogena in neobčutljiva na premik (Dhaene et al., 2004b, str. 20). Če je $g(x)$ konkavna funkcija, je ustrezna mera tveganja tudi subaditivna in zato koherentna (Dhaene et al., 2004b, str. 23). Vsaka konkavna distorzijska funkcija je na intervalu $(0,1)$ zvezna (glej Rudin, 1970, str. 60, izrek 3.2), vendar bomo vedno molče predpostavili zveznost na intervalu $[0,1]$. To pa pomeni, da je za konkavne distorzijske funkcije $g^*(F_X(x))$ vedno porazdelitvena funkcija, zato zanje lahko napišemo $\mathbb{H}_g[X] = \mathbb{E}[X_g^*]$.

Distorzijske funkcije nam omogočajo preprosto generiranje različnih t. i. distorzijskih mer tveganja, kamor sodijo tudi nekatere že znane mere tveganja. Tako za $\alpha \in (0,1)$ z $g(x) = 0$ za $x \in [0,1-\alpha)$ ter $g(x) = 1$ za $x \in [1-\alpha,1]$ dobimo $\mathbb{H}_g[X] = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, z $g(x) = \min\{\frac{x}{1-\alpha},1\}$, ki je konkavna funkcija, dobimo $\mathbb{H}_g[X] = \mathrm{TVaR}_\alpha(X)$, CTE in ESF pa nista distorzijski meri tveganja (Dhaene et al., 2004b, str. 18 in 19).

Naj bo $g(x)$ odvedljiva distorzijska funkcija. V tem primeru lahko enačbo (4.6) z integriranjem per partes preoblikujemo v

$$\mathbb{H}_g[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, g'(\overline{F}_X(x)) f_X(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[Xg'(\overline{F}_X(X))] = \mathbb{E}[X\,\zeta(X)], \tag{4.10}$$

kjer je $\zeta(x) = g'(\overline{F}_X(x))$. Če je $g(x)$ konkavna funkcija, je njen odvod nenegativna padajoča funkcija. Taka je tudi funkcija preživetja $\overline{F}_X(x)$, zato je kompozitum $\zeta = g' \circ \overline{F}_X$ nenegativna naraščajoča funkcija. Poleg tega zaradi $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$ s substitucijo $u = \overline{F}_X(x)$ dobimo

$$\mathbb{E}[\zeta(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(\overline{F}_X(x)) f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g'(u)\mathrm{d}u = 1.$$

To pa pomeni, da je za vsako odvedljivo konkavno distorzijsko funkcijo $g(x)$ mera tveganja $\mathbb{H}_g[X]$ le poseben primer mer tveganja, ki so za naraščajoče funkcije $\zeta(x)$, za katere je $\mathbb{E}[\zeta(X)] = 1$, definirane z enačbo

$$\mathbb{H}_\zeta(X) = \mathbb{E}[X\,\zeta(X)] \tag{4.11}$$

(glej Tsanakas, 2007, str. 10).

Za odvedljivo konkavno distorzijsko funkcijo $g(x)$ in $\zeta(x) = g'(\overline{F}_X(x))$ enačbo (4.10) lahko zapišemo kot

$$\mathbb{H}_g[X] = \mathbb{E}[X\,\zeta(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X],$$

kjer je $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X, ki jo računamo z verjetnostno mero $\mathbb{Q}$ namesto s $\mathbb{P}$, funkcija ζ pa je Radon-Nikodýmov odvod verjetnostne mere $\mathbb{Q}$ glede na $\mathbb{P}$, torej $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}(X) = \zeta(X) = g'(\overline{F}_X(X))$.

Omenimo še, da distorzijske mere tveganja pod imenom spektralne mere tveganja srečamo tudi v literaturi, ki problem merjenja tveganj obravnava z zornega kota bank (glej Acerbi, 2002).

4.2.8 Medsebojna primerjava posameznih mer tveganja

V tem razdelku si oglejmo primerjalno tabelo, iz katere je razvidno, katere lastnosti izpolnjujejo naslednje mere tveganja: $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}[X]$, σ_X, $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$, $\mathrm{CTE}_\alpha(X)$, $\mathrm{ESF}_\alpha(X)$ in $\mathbb{H}_g[X]$, kjer je $\alpha \in (0,1)$ in g poljubna distorzijska funkcija. Poleg znanih lastnosti smo v tabelo dodali tudi aditivnost za komonotona tveganja. Natančno definicijo komonotonosti navajamo v razdelku 5.4, tu pa naj zadošča pojasnilo, da sta tveganji X in Y komonotoni, če se njune uresničitve hkrati večajo oziroma manjšajo.

Tabela 4.1: Primerjava različnih mer tveganja

Lastnost	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{var}[X]$	σ_X	VaR	TVaR	CTE	ESF	$\mathbb{H}_g$
Monotonost	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Subaditivnost	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗*
Pozitivna homogenost	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Neobčutljivost na premik	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓
Aditivnost	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
– za neodvisna tveganja	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
– za komonotona tveganja	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✓

* *$\mathbb{H}_g$ je subaditivna mera tveganja, če je g konkavna distorzijska funkcija*

Med lastnostmi, ki so navedene v tabeli 4.1, je še vedno najbolj sporna subaditivnost, vendar pa argumente proti subaditivnosti vsaj delno ublažimo, če je konkretna mera tveganja aditivna za komonotona tveganja. Take pa so vse subaditivne mere tveganja, ki so navedene v tabeli 4.1.

Iz tabele 4.1 bi lahko sklepali, da je pričakovana vrednost idealna mera tveganja, saj izpolnjuje vse v tabeli navedene lastnosti. Vendar pa ni tako preprosto, saj različne potrebe upravičujejo uporabo različnih mer tveganja. Kot smo že omenili, je linearna kombinacija koherentnih mer tveganja spet koherentna mera tveganja. To pa ni edini način sestavljanja novih mer tveganja iz že znanih. Kot bomo videli v razdelku 4.4 o premijskih principih, je smiselno tudi sestavljanje novih mer tveganja iz pričakovane vrednosti in variance ter pričakovane vrednosti in standardnega odklona.

4.2.9 Primerjava klasičnega in dualnega odločanja v razmerah negotovosti

Funkcije koristnosti so eleganten pripomoček za odločanje med različnimi negotovimi priložnostmi oziroma tveganji. Odločanje med priložnostma X in Y na podlagi primerjave pričakovanih vrednosti $\mathbb{E}[u(X)]$ in $\mathbb{E}[u(Y)]$, kjer je u funkcija koristnosti, v bistvu temelji na relaciji "$\preccurlyeq$", ki je v množici priložnosti $\mathcal{X}_u = \{X \in \mathcal{X} : \mathbb{E}[u(X)] \text{ obstaja}\}$ definirana z ekvivalenco $X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)]$. Tako se med priložnostma X in Y, za kateri je $X \preccurlyeq Y$, kar lahko zapišemo tudi kot $Y \succcurlyeq X$, odločimo za "več", torej za Y.

Originalen sistem aksiomov Johna von Neumanna in Oskarja Morgensterna ni popoln, zaradi česar so ga kasneje mnogi dopolnjevali, Yaari (1987, str. 97–98) pa naj bi to naredil najbolj jedrnato (Denuit et al., 2005, str. 79). Relacija "$\preccurlyeq$" izpolnjuje zahteve njegovega sistema aksiomov, ki se nanaša na priložnosti z zalogo vrednosti $[0,1]$, natanko takrat, ko obstaja taka naraščajoča zvezna funkcija u, definirana na intervalu $[0,1]$, da je $X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)]$ (Yaari, 1987, str. 98, izrek 0).

Primarno nas zanimajo tveganja. Zato naj bo $\mathcal{X}_u = \{X \in \mathcal{X} : \mathbb{E}[u(-X)] \text{ obstaja}\}$ množica tveganj, ki so primerljiva s funkcijo koristnosti u, in $\mathcal{F}_u = \bigcup_{X \in \mathcal{X}_u} \{F_X\}$ množica pripadajočih porazdelitvenih funkcij. V tem primeru se med tveganji odločamo na podlagi relacije, ki je v množici $\mathcal{X}_u$ definirana z ekvivalenco $X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)]$. Če za tveganji X in Y velja $X \preccurlyeq Y$, se odločimo za "manj", torej za X.

Relacija "$\preccurlyeq$" je refleksivna ($X \preccurlyeq X$ za vsak $X \in \mathcal{X}_u$), tranzitivna (iz $X \preccurlyeq Y$ in $Y \preccurlyeq Z$ sledi $X \preccurlyeq Z$) in sovisna (za poljubni različni tveganji $X, Y \in \mathcal{X}_u$ je $X \preccurlyeq Y$ ali $Y \preccurlyeq X$). Primerjava tveganj X in Y na podlagi primerjave $\mathbb{E}[u(-X)]$ in $\mathbb{E}[u(-Y)]$ je pri dani funkciji koristnosti odvisna le od porazdelitvenih funkcij F_X in F_Y. Zato lahko relacijo "$\preccurlyeq$" v množici $\mathcal{X}_u$ nadomestimo z relacijo "$\preceq$" v množici $\mathcal{F}_u$, ki jo definiramo z ekvivalenco $F_X \preceq F_Y \iff X \preccurlyeq Y$. V množico $\mathcal{X}_u$ z Wassersteinovo razdaljo $d_W(X,Y) = \|F_X - F_Y\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(x) - F_Y(x)| \mathrm{d}x$ vpeljimo še metriko. Funkcija $d_W \colon \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_u \to R^+$ je enostavna verjetnostna razdalja, saj za poljubne $X, Y, Z \in \mathcal{X}_u$ izpolnjuje zahtevane pogoje (glej Denuit et al., 2005, str. 389):

1. $X \stackrel{d}{=} Y \implies d_W(X,Y) = 0$.
2. Simetrija: $d_W(X,Y) = d_W(Y,X)$.
3. Trikotniška neenakost: $d_W(X,Y) \leq d_W(X,Z) + d_W(Z,Y)$.

Naj bodo $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ tveganja s porazdelitvenimi funkcijami F_X, F_Y in F_Z. Za poljuben $\alpha \in [0,1]$ definirajmo še tveganji

$$X_{\alpha,Z} = \begin{cases} X & \text{z verjetnostjo } \alpha, \\ Z & \text{z verjetnostjo } 1-\alpha, \end{cases} \qquad Y_{\alpha,Z} = \begin{cases} Y & \text{z verjetnostjo } \alpha, \\ Z & \text{z verjetnostjo } 1-\alpha, \end{cases}$$

ki imata funkciji preživetja

$$\overline{F}_{X_{\alpha,Z}}(x) = \alpha \overline{F}_X(x) + (1-\alpha)\overline{F}_Z(x), \tag{4.12}$$

$$\overline{F}_{Y_{\alpha,Z}}(x) = \alpha \overline{F}_Y(x) + (1-\alpha)\overline{F}_Z(x). \tag{4.13}$$

Kriteriji odločevalca, ki primerja tveganja v skladu s teorijo Johna von Neumanna in Oskarja Morgensterna, izpolnjujejo aksiome EU1–EU5, ki jih navajamo prirejene po (Wang & Young, 1998, str. 146, in Denuit et al., 2005, str. 79). V prvem viru so aksiomi prirejeni še za tveganja v smislu nenegativnih slučajnih spremenljivk, v drugem pa je omejitev na nenegativnost opuščena, vendar pa vse trditve niso podkrepljene z ustreznimi dokazi ali sklici nanje.

EU1: *Če je* $X \overset{d}{=} Y$*, potem je* $X \preccurlyeq Y$ *in* $Y \preccurlyeq X$*, kar pomeni, da sta tveganji* X *in* Y *ekvivalentni.*

EU2: *Relacija "*$\preccurlyeq$*" je refleksivna, tranzitivna in sovisna.*

EU3: *Relacija "*$\preccurlyeq$*" je zvezna glede na razdaljo* d_W*. Za poljubni tveganji* X *in* Y*, ki nista ekvivalentni in za kateri je* $X \preccurlyeq Y$*, obstaja tak* $\epsilon > 0$*, da iz* $d_W(X, X') < \epsilon$ *in* $d_W(Y, Y') < \epsilon$ *sledi* $X' \preccurlyeq Y'$*.*

EU4: *Če je* $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_Y(x)$ *za vsak* x*, potem je* $X \preccurlyeq Y$*.*

EU5: *Za poljuben* Z *in* $\alpha \in [0,1]$ *iz* $X \preccurlyeq Y$ *sledi* $X_{\alpha,Z} \preccurlyeq Y_{\alpha,Z}$*.*

Sovisnost, ki jo zahteva aksiom EU2, v praksi lahko povzroča težave, kar ugotavlja Maccheroni (2004, str. 702) in mnogi drugi avtorji, zaradi česar so bile razvite tudi teorije odločanja v razmerah negotovosti brez zahteve po sovisnosti. Druge lastnosti relacije "$\preccurlyeq$", ki jih zahtevajo aksiomi EU1–EU5, pa vsaj na prvi pogled niso problematične.

V preostanku tega razdelka začasno omilimo pogoje iz definicije 4.3 za funkcijo koristnosti $u(t)$. Zadošča naj, da je $u(t)$ realna naraščajoča zvezna funkcija, definirana na $\mathbb{R}$. Definirajmo še dualno funkcijo koristnosti $u^*(t)$, ki jo dobimo z zrcaljenjem prek obeh koordinatnih osi, torej $u^*(t) = -u(-t)$, tej dualna pa je $u(t)$. Ker je $u(x_1) \leq u(x_2) \iff -u(-x_1) \leq -u(-x_2)$, je $u^*(t)$ naraščajoča zvezna funkcija. Zrcaljenje prek y-osi ne vpliva na konkavnost in konveksnost, zrcaljenje prek x-osi pa konkavne funkcije preslika v konveksne in obratno, tiste funkcije, ki niso niti konkavne niti konveksne, pa take ostanejo tudi po zrcaljenju. Zato je $u^*(t)$ konveksna funkcija natanko takrat, ko je $u(t)$ konkavna, in konkavna natanko takrat, ko je $u(t)$ konkveksna. To je razlog, da funkcija $u^*(t)$ ne more biti hkrati z $u(t)$ funkcija koristnosti po definiciji 4.3, razen če je $u(t) = t$, ko je $u^*(t) = u(t)$.

Relacija "$\preccurlyeq$" izpolnjuje zahteve aksiomov EU1–EU5 natanko takrat, ko obstaja naraščajoča zvezna funkcija koristnosti u, za katero je

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)]$$

(glej Yaari, 1987, str. 98, izrek 0, in Wang & Young, 1998, str. 147), kar z dualno funkcijo koristnosti u^* lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{E}[u^*(X)] \leq \mathbb{E}[u^*(Y)].$$

Če funkcijo koristnosti u normiramo, da je $u(0) = u^*(0) = 0$, lahko pričakovano vrednost $\mathbb{E}[u(X)]$ izračunamo z enačbo

$$\mathbb{E}[u(X)] = -\int_{-\infty}^{0}(1-\overline{F}_X(x))\mathrm{d}u(x) + \int_0^{\infty}\overline{F}_X(x)\mathrm{d}u(x),$$

$\mathbb{E}[u(-X)]$ pa z analogno enačbo za $\mathbb{E}[u^*(X)]$ in zvezo $\mathbb{E}[u(-X)] = -\mathbb{E}[u^*(X)]$.

Aksiom EU5 se imenuje aksiom neodvisnosti, saj se odločevalec med tveganjema $X_{\alpha,Z}$ in $Y_{\alpha,Z}$ odloča le na podlagi primerjave tveganj X in Y, torej neodvisno od α in Z. Funkciji preživetja $\overline{F}_{X_{\alpha,Z}}$ in $\overline{F}_{Y_{\alpha,Z}}$, definirani z enačbama (4.12) in (4.13), sta linearni kombinaciji funkcij preživetja $\overline{F}_X$ in $\overline{F}_Z$ oziroma $\overline{F}_Y$ in $\overline{F}_Z$, torej linearni kombinaciji vrednosti na y-osi, ki pomenijo verjetnost. Yaari (1987) je na vsebino aksioma neodvisnosti pogledal z drugega zornega kota, tako da je raje sestavil linearne kombinacije vrednosti na x-osi, ki pomenijo denarne zneske. To je storil tako, da je funkcije preživetja zamenjal s pripadajočimi inverznimi funkcijami. Pri njegovem alternativnem pogledu se enačbi (4.12) in (4.13) spremenita v enačbi

$$\overline{F}^{-1}_{\tilde{X}_{\alpha,Z}}(x) = \alpha\overline{F}_X^{-1}(x) + (1-\alpha)\overline{F}_Z^{-1}(x), \tag{4.14}$$

$$\overline{F}^{-1}_{\tilde{Y}_{\alpha,Z}}(x) = \alpha\overline{F}_Y^{-1}(x) + (1-\alpha)\overline{F}_Z^{-1}(x). \tag{4.15}$$

V posebnem primeru, ko so tveganja X, Y in Z paroma komonotona, se inverzni funkciji preživetja $\overline{F}^{-1}_{\tilde{X}_{\alpha,Z}}$ in $\overline{F}^{-1}_{\tilde{Y}_{\alpha,Z}}$ nanašata na tveganji $\tilde{X}_{\alpha,Z} = \alpha X + (1-\alpha)Z$ in $\tilde{Y}_{\alpha,Z} = \alpha Y + (1-\alpha)Z$.

Yaarijeva zamenjava funkcij preživetja z ustreznimi inverznimi funkcijami na aksiome EU1–EU4 ne vpliva, vpliva pa na aksiom neodvisnosti EU5, ki se spremeni v aksiom

DU5: *Za poljuben Z in $\alpha \in [0,1]$ iz $X \preccurlyeq Y$ sledi $\tilde{X}_{\alpha,Z} \preccurlyeq \tilde{Y}_{\alpha,Z}$, kjer sta $\tilde{X}_{\alpha,Z}$ in $\tilde{Y}_{\alpha,Z}$ tveganji z inverznima funkcijama preživetja, definiranima z enačbama* (4.14) *in* (4.15).

Sistem aksiomov EU1–EU4 in DU5 je Yaarijev dualni sistem aksiomov, prirejen za tveganja. Relacija "$\preccurlyeq$" izpolnjuje Yaarijev dualni sistem aksiomov natanko takrat, ko obstaja zvezna distorzijska funkcija g, za katero je

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{H}_g[-X] \geq \mathbb{H}_g[-Y]$$

(glej Yaari, 1987, str. 99, izrek 1, in Wang & Young, 1998, str. 148), kar z dualno distorzijsko funkcijo g^* lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$X \preccurlyeq Y \iff \mathbb{H}_{g^*}[X] \leq \mathbb{H}_{g^*}[Y].$$

Mero tveganja $\mathbb{H}_g[X]$ lahko izračunamo z enačbo (4.6), $\mathbb{H}_g[-X]$ pa z analogno enačbo

$$\mathbb{H}_{g^*}[X] = -\int_{-\infty}^{0}(1 - g^*(\overline{F}_X(x)))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} g^*(\overline{F}_X(x))\mathrm{d}x$$

in zvezo $\mathbb{H}_g[-X] = -\mathbb{H}_{g^*}[X]$.

Dualno odločanje med tveganjema X in Y se od klasičnega razlikuje po tem, da se ne odločamo na podlagi pričakovanih vrednosti $\mathbb{E}[u(-X)]$ in $\mathbb{E}[u(-Y)]$, ampak na podlagi mer tveganja $\mathbb{H}_g[-X]$ in $\mathbb{H}_g[-Y]$. To pa sta pričakovani vrednosti $\mathbb{E}[-X_g^*]$ in $\mathbb{E}[-Y_g^*]$, kjer sta X_g^* in Y_g^* tveganji s porazdelitvenima funkcijama $g^*(F_X)$ in $g^*(F_Y)$ ter funkcijama preživetja $g(\overline{F}_X)$ in $g(\overline{F}_Y)$. Seveda sta tu mišljeni funkciji g in u, pripadajoči relaciji "$\preccurlyeq$", ki izpolnjuje zahteve aksiomov EU1–EU4 in DU5 oziroma EU1–EU5. Če se omejimo na slučajne spremenljivke z zalogo vrednosti $[0,1]$, je $g = u^{-1}$ (Yaari, 1987, str. 102).

Yaarijeva dualna teorija odločanja v razmerah negotovosti je alternativa za klasično teorijo Johna von Neumannova in Oskarja Morgensterna. Za obe teoriji obstaja ustrezna ekonomska interpretacija, prav tako pa je za obe teoriji empirično preverjanje odkrilo nekatere paradokse. Pri tem Yaarijeva dualna teorija pojasnjuje nekatere paradokse klasične teorije, zato pa v njej obstajajo dualni paradoksi, ki jih v klasični teoriji ni.

4.3 Primerjanje in urejanje tveganj

Ko za množico slučajnih spremenljivk $\mathcal{X}$ izberemo mero tveganja, s tem vanjo uvedemo tudi relacijo popolne urejenosti. Slučajne spremenljivke primerjamo in urejamo na podlagi njihovih mer tveganja, tako kot to delamo v množici realnih števil. Možnosti izbire mere tveganja je seveda več, zato se lahko zgodi, da je za slučajni spremenljivki X in Y za prvo mero tveganja $\rho_1(X) < \rho_1(Y)$, za drugo pa $\rho_2(X) > \rho_2(Y)$. Zato je izbira mere tveganja odvisna tudi od tega, kaj želimo pri primerjanju poudariti.

V tem poglavju bomo tveganja primerjali neodvisno od mer tveganja, tako da bomo primerjali njihove porazdelitvene funkcije. V množico enorazsežnih porazdelitvenih funkcij bomo vpeljali relacijo "$\preceq$", za katero je zaželeno, da je refleksivna, antisimetrična (iz $F_X \preceq F_Y$ in $F_Y \preceq F_X$ sledi $F_X \equiv F_Y$) in tranzitivna. Čeprav bomo z relacijo "$\preceq$" dejansko primerjali porazdelitvene funkcije, bomo hkrati primerjali tudi slučajne spremenljivke, za katere relacijo "$\preccurlyeq$" definirajmo z ekvivalenco $X \preccurlyeq Y \iff F_X \preceq F_Y$. Zavedati pa se moramo, da iz $X \preccurlyeq Y$ in $Y \preccurlyeq X$ sledi le $F_X \equiv F_Y$, torej $X \overset{d}{=} Y$, ne pa $X = Y$, kar pomeni, da relacija "$\preccurlyeq$" ni antisimetrična. Še več, kot ugotavlja Møller (2004, str. 487), se enako porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y v splošnem primeru lahko nanašata tudi na različna verjetnostna prostora, ko enačba $X = Y$ niti ni mogoča. Po opozorilu se zaradi enostavnosti dogovorimo, da bomo v nadaljevanju namesto $X \preccurlyeq Y$ pisali kar $X \preceq Y$ in enakost kot posledico antisimetričnosti razumeli kot $X \stackrel{d}{=} Y$.

Vsaka refleksivna, antisimetrična in tranzitivna relacija "$\preceq$" v množici porazdelitvenih funkcij določa delno urejenost, do popolne urejenosti pa ji običajno manjka sovisnost, ker poljubnih dveh porazdelitvenih funkcij ni mogoče primerjati. Ko relacijo "$\preceq$" z zaželenimi lastnostmi imamo, lahko poskusimo najti še tako mero tveganja ρ, ki relacijo ohranja v smislu, da iz $X \preceq Y$ sledi $\rho(X) \leq \rho(Y)$. Če jo najdemo, porazdelitveni funkciji F_X in F_Y, ki za relacijo "$\preceq$" nista primerljivi, postaneta primerljivi z uporabo $\rho(X)$ in $\rho(Y)$. V takem primeru lahko na izhodiščno relacijo "$\preceq$" celo pozabimo, saj jo mera tveganja ρ konsistentno nadomešča, hkrati pa namesto delne zagotavlja popolno urejenost.

4.3.1 Stohastična urejenost

Definicija 4.5: *Slučajna spremenljivka X je v stohastičnem smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_{st} Y$, če je $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_Y(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.*

Opomba 4.4: V tej in kasnejših definicijah z oznako "manj tvegana" dejansko mislimo "manj ali enako tvegana", torej ne v strogem smislu. □

Relacija "$\preceq_{st}$" je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, ne omogoča pa primerjave poljubnih dveh slučajnih spremenljivk.

Če je $X \preceq_{st} Y$, obstajata slučajni spremenljivki $\tilde{X}$ in $\tilde{Y}$, da je $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$, $\tilde{Y} \stackrel{d}{=} Y$ in $\mathbb{P}(\tilde{X} \leq \tilde{Y}) = 1$ (Shaked & Shanthikumar, 2007, str. 5).

Varianca ne ohranja prve stohastične urejenosti, prav tako je ne ohranja standardni odklon (Wang, 1998a, str. 95). Ohranjajo pa jo vse distorzijske mere tveganja, torej tudi VaR in TVaR. Velja tudi obratno, saj je

$$X \preceq_{st} Y \iff \mathbb{H}_g[X] \leq \mathbb{H}_g[Y] \text{ za vse distorzijske funkcije } g$$

(Dhaene, Vanduffel et al., 2006, str. 594, izrek 5.1.1). Stohastična urejenost je še posebej tesno povezana s tvegano vrednostjo, saj je

$$X \preceq_{st} Y \iff \mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y) \text{ za vsak } \alpha \in (0,1)$$

(glej Dhaene, Vanduffel et al., 2006, str. 582, izrek 3.1). Ker je $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$, iz $X \preceq_{st} Y$ zaradi zgornje ekvivalence in enačbe (4.9) pri predpostavki, da pričakovani vrednosti $\mathbb{E}[X]$ in $\mathbb{E}[Y]$ obstajata, dobimo

$$\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 (F_X^{-1}(q) - F_Y^{-1}(q))\mathrm{d}q \leq 0$$

oziroma $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Velja celo

$$X \preceq_{st} Y \iff \mathbb{E}[h(X)] \leq \mathbb{E}[h(Y)] \quad \begin{array}{l}\text{za vse naraščajoče funkcije } h, \text{ za} \\ \text{katere pričakovani vrednosti obstajata}\end{array} \tag{4.16}$$

(Bäuerle & Müller, 2006, str. 134, definicija 2.1 in izrek 2.2).

Naj bo $X \preceq_{st} Y$ in $h(x) = x^n$. Če začetna momenta $\mathbb{E}[X^n]$ in $\mathbb{E}[Y^n]$ obstajata, je za nenegativne slučajne spremenljivke $\mathbb{E}[X^n] \leq \mathbb{E}[Y^n]$, v splošnem pa to velja le za lihe n.

Kompozitum $h \circ f$ naraščajočih funkcij je naraščajoča funkcija. Zato pri dani naraščajoči funkciji $f(x)$ iz $X \preceq_{st} Y$ zaradi implikacije $\Longrightarrow$ v (4.16) za vsako naraščajočo funkcijo $h(x)$ velja $\mathbb{E}[h(f(X))] \leq \mathbb{E}[h(f(Y))]$, če pričakovani vrednosti obstajata. To pa zaradi implikacije $\Longleftarrow$ v (4.16) pomeni, da je $f(X) \preceq_{st} f(Y)$. Zato iz $X \preceq_{st} Y$ za vsako naraščajočo funkcijo $f(x)$ sledi $f(X) \preceq_{st} f(Y)$.

Če imamo dve zaporedji $\{X_1, \ldots, X_n\}$ in $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, za katere je $X_i \preceq_{st} Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, potem je $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{st} \sum_{i=1}^n Y_i$ (Denuit et al., 2005, str. 114, trditev 3.3.17). Tej lastnosti pravimo stabilnost za konvolucijo.

Ugotavljanje primerljivosti X in Y z relacijo "$\preceq_{st}$" po definiciji 4.5 ali z zgoraj navedenimi lastnostmi stohastične urejenosti je lahko nepraktično, zato si včasih pomagamo z zadostnimi pogoji. Če se za zvezni slučajni spremenljivki X in Y njuni gostoti verjetnosti $f_X(x)$ in $f_Y(x)$ enkrat sekata, potem je $X \preceq_{st} Y$ (Denuit et al., 2005, str. 122, lastnost 3.3.32). Pri tem z enkratnim sekanjem razumemo obstoj take konstante c, da je $f_X(x) \geq f_Y(x)$ za $x < c$ in $f_X(x) \leq f_Y(x)$ za $x \geq c$. Za zadostne pogoje za $X \preceq_{st} Y$ za nenegativne slučajne spremenljivke glej še (Hesselager, 1995).

4.3.2 Stop-loss urejenost

Definicija 4.6: *Slučajna spremenljivka X je v stop-loss smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_{sl} Y$, če je $\int_x^\infty \overline{F}_X(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^\infty \overline{F}_Y(t)\mathrm{d}t$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.*

Spomnimo se, da v zgornji definiciji primerjamo stop-loss transformiranko $\pi_X(x)$, ki smo jo definirali v enačbi (4.4), s stop-loss transformiranko $\pi_Y(x)$.

Relacija "$\preceq_{sl}$" je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, ne omogoča pa primerjave poljubnih dveh slučajnih spremenljivk.

Kot ugotavlja Müller (1996, str. 217), je stop-loss urejenost za aktuarsko uporabo mnogo bolj zanimiva od stohastične urejenosti. Zanimive primere, kako jo lahko praktično uporabimo, najdemo v (Antal, 2009).

Vse distorzijske mere tveganja, ki temeljijo na konkavnih distorzijskih funkcijah, ohranjajo stop-loss urejenost, zato jo ohranja tudi TVaR. Velja tudi obratno, saj je

$$X \preceq_{sl} Y \iff \mathbb{H}_g[X] \le \mathbb{H}_g[Y] \text{ za vse konkavne distorzijske funkcije } g \tag{4.17}$$

(Dhaene, Vanduffel et al., 2006, str. 594, izrek 5.2.1). Stop-loss urejenost je zelo tesno povezana s končno tvegano vrednostjo, saj je

$$X \preceq_{sl} Y \iff \mathrm{TVaR}_\alpha(X) \le \mathrm{TVaR}_\alpha(Y) \text{ za vsak } \alpha \in (0,1) \tag{4.18}$$

(Dhaene, Vanduffel et al., 2006, str. 582, izrek 3.2). Velja tudi

$$X \preceq_{sl} Y \iff \mathbb{E}[h(X)] \le \mathbb{E}[h(Y)] \quad \begin{array}{l}\text{za vse naraščajoče konveksne funkcije}\\ h\text{, za katere pričak. vrednosti obstajata}\end{array} \tag{4.19}$$

(Denuit et al., 2005, str. 152, trditev 3.4.6). Zaradi navedene ekvivalence namesto oznake "$\preceq_{sl}$" pogosto naletimo na oznako "$\preceq_{icx}$" (icx – increasing convex) za isto relacijo.

Naj bo $X \preceq_{sl} Y$ in $h(x) = x^n$. Če začetna momenta $\mathbb{E}[X^n]$ in $\mathbb{E}[Y^n]$ obstajata, je za nenegativne slučajne spremenljivke $\mathbb{E}[X^n] \le \mathbb{E}[Y^n]$, v splošnem primeru pa to velja le za $n = 1$.

Kompozitum $h \circ f$ naraščajočih konveksnih funkcij je naraščajoča konveksna funkcija. Zato pri dani naraščajoči konveksni funkciji $f(x)$ iz $X \preceq_{sl} Y$ zaradi implikacije $\Longrightarrow$ v (4.19) velja $\mathbb{E}[h(f(X))] \le \mathbb{E}[h(f(Y))]$ za vsako naraščajočo konveksno funkcijo $h(x)$, če pričakovani vrednosti obstajata. To pa zaradi implikacije $\Longleftarrow$ v (4.19) pomeni, da je $f(X) \preceq_{sl} f(Y)$. Zato iz $X \preceq_{sl} Y$ sledi $f(X) \preceq_{sl} f(Y)$ za vsako naraščajočo konveksno funkcijo $f(x)$.

Če imamo dve zaporedji $\{X_1, \dots, X_n\}$ in $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ neodvisnih slučajnih spremenljivk, za katere je $X_i \preceq_{sl} Y_i$, $i = 1, \dots, n$, potem je $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{sl} \sum_{i=1}^n Y_i$ (Denuit et al., 2005, str. 163, trditev 3.4.25). Torej je stop-loss urejenost stabilna za konvolucijo.

Ugotavljanje primerljivosti X in Y z relacijo "$\preceq_{sl}$" po definiciji 4.6 ali z zgoraj navedenimi lastnostmi stop-loss urejenosti je lahko nepraktično, zato si včasih pomagamo z zadostnimi pogoji. Če je $\mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y]$ ter se $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ enkrat sekata, potem je $X \preceq_{sl} Y$ (Dhaene et al., 2002b, str. 7). Pri tem z enkratnim sekanjem razumemo obstoj take konstante c, da je $F_X(x) \le F_Y(x)$ za $x < c$ in $F_X(x) \ge F_Y(x)$ za $x \ge c$. Za zadostne pogoje za $X \preceq_{sl} Y$ za nenegativne slučajne spremenljivke glej še (Hesselager, 1995).

4.3.3 Zaporedje stohastičnih urejenosti

V strokovni literaturi stohastično urejenost "$\preceq_{st}$" iz definicije 4.5 večkrat poimenujejo prva stohastična urejenost in jo označujejo z "$\preceq_{1st}$" ali "$\preceq_1$", stop-loss urejenost iz definicije 4.6 pa druga stohastična urejenost, kar označujejo z "$\preceq_{2nd}$" ali "$\preceq_2$". To je povezano z dejstvom, da je mogoče smiselno definirati zaporedje stohastičnih urejenosti, ki so na različne načine povezane s hitrostjo približevanja funkcij preživetja slučajnih spremenljivk, ki jih primerjamo, k ničli.

Izhodišče za spodnjo definicijo je definicija, ki jo Wang in Young (1998, str. 150, definicija 3.3) navajata za nenegativne slučajne spremenljivke, tu pa te omejitve ni.

Definicija 4.7: *Naj bo ${}^1\overline{F}_X(x) = \overline{F}_X(x)$ in ${}^{n+1}\overline{F}_X(x) = \int_x^\infty {}^n\overline{F}_X(t)\mathrm{d}t$, $n = 1, 2, \ldots$, in $x \in \mathbb{R}$. Slučajna spremenljivka X je v smislu n-te stohastične urejenosti manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_n Y$, če sta izpolnjena pogoja:*

1. $\mathbb{E}[X^k] \le \mathbb{E}[Y^k]$ *za* $k = 1, \ldots, n-1$,
2. ${}^n\overline{F}_X(x) \le {}^n\overline{F}_Y(x)$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}$.

Relacija "$\preceq_n$" je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, ne omogoča pa primerjave poljubnih dveh slučajnih spremenljivk.

Za $n = 1$ je prvi pogoj v definiciji 4.7 na prazno izpolnjen, drugi pa je enak tistemu iz definicije 4.5, zato je $X \preceq_1 Y \iff X \preceq_{st} Y$. Za $n = 2$ je drugi pogoj v definiciji 4.7 le drugače zapisan pogoj iz definicije 4.6. Če je izpolnjen, pa je zaradi implikacije $\Longrightarrow$ v (4.19) za $h(x) = x$ vedno hkrati izpolnjen tudi prvi pogoj v definiciji 4.7. Zato je $X \preceq_2 Y \iff X \preceq_{sl} Y$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ in slučajni spremenljivki X in Y, za kateri je $X \preceq_n Y$, je

$$ {}^{n+1}\overline{F}_X(x) - {}^{n+1}\overline{F}_Y(x) = \int_x^\infty \left({}^n\overline{F}_X(t) - {}^n\overline{F}_Y(t) \right) \mathrm{d}t \le 0 $$

oziroma ${}^{n+1}\overline{F}_X(x) \le {}^{n+1}\overline{F}_Y(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Da bi iz $X \preceq_n Y$ sledilo $X \preceq_{n+1} Y$, pa mora biti izpolnjen še pogoj $\mathbb{E}[X^n] \le \mathbb{E}[Y^n]$. Ta pogoj je za $n = 1$ vedno izpolnjen, če pričakovani vrednosti obstajata, zato iz $X \preceq_1 Y$ sledi $X \preceq_2 Y$.

Naj bo $t \in \mathbb{R}$ in $(X-t)_+^n$ krajši zapis za $((X-t)_+)^n$. Za vsak $n \in \mathbb{N}^+$, za katerega obstaja začetni moment $\mathbb{E}[X^n]$, s Fubinijevim izrekom dobimo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-t)_+^n] &= \int_t^\infty (x-t)^n f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_t^\infty \left(n\int_t^x (u-t)^{n-1}\mathrm{d}u\right) f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= n\int_t^\infty \left(\int_u^\infty f_X(x)\mathrm{d}x\right)(u-t)^{n-1}\mathrm{d}u \\ &= n\int_t^\infty \overline{F}_X(u)(u-t)^{n-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Če je $n \geq 2$, $(u-t)^{n-1}$ spet zapišemo z integralom, še enkrat uporabimo Fubinijev izrek in dobimo $\mathbb{E}[(X-t)_+^n] = n(n-1)\int_t^\infty {}^2\overline{F}_X(u)(u-t)^{n-2}\mathrm{d}u$. Če je $n \geq 3$, naredimo še $n-2$ analognih korakov in ugotovimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ velja enačba

$$\mathbb{E}[(X-t)_+^n] = n!\int_t^\infty {}^n\overline{F}_X(x)\mathrm{d}x = n!\,{}^{n+1}\overline{F}_X(t),$$

ki je posplošitev enačbe (4.4).

Naj bo $X \preceq_n Y$. Zaradi zgornje enačbe in drugega pogoja v definiciji 4.7 za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja $\mathbb{E}[(X-t)_+^n] - \mathbb{E}[(Y-t)_+^n] = n!\int_t^\infty({}^n\overline{F}_X(x) - {}^n\overline{F}_Y(x))\mathrm{d}x \leq 0$ oziroma

$$\mathbb{E}[(X-t)_+^n] \leq \mathbb{E}[(Y-t)_+^n]. \tag{4.20}$$

Kot navajata Shaked in Shanthikumar (2007, str. 206), je izpolnjenost neenačbe (4.20) za vsak $t \in \mathbb{R}$ potreben in zadosten pogoj za izpolnjenost drugega pogoja v definiciji 4.7.

V razdelkih 4.3.1 in 4.3.2 smo ugotovili, da za nenegativne slučajne spremenljivke iz $X \preceq_1 Y$ in iz $X \preceq_2 Y$ sledi $\mathbb{E}[X^n] \leq \mathbb{E}[Y^n]$ za vsak $n \in \mathbb{N}^+$, za katerega n-ta začetna momenta obstajata. Zato veljata implikaciji $X \preceq_1 Y \Rightarrow X \preceq_n Y$ za $n > 1$ in $X \preceq_2 Y \Rightarrow X \preceq_n Y$ za $n > 2$. Za slučajni spremenljivki $X \geq 0$ in $Y \geq 0$, za kateri je $X \preceq_n Y$, iz neenačbe (4.20) za $t = 0$ sledi $\mathbb{E}[X^n] \leq \mathbb{E}[Y^n]$. To pa pomeni, da je $X \preceq_{n+1} Y$, saj smo za drugi pogoj iz definicije 4.7 že ugotovili, da je izpolnjen. Z matematično indukcijo ugotovimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ velja implikacija $X \preceq_n Y \Rightarrow X \preceq_k Y$ za vsak $k > n$, za katerega začetna momenta $\mathbb{E}[X^k]$ in $\mathbb{E}[Y^k]$ obstajata. Zato za nenegativne slučajne spremenljivke lahko napišemo verigo implikacij

$$X \preceq_1 Y \Rightarrow X \preceq_2 Y \Rightarrow X \preceq_3 Y \Rightarrow \cdots,$$

ki velja, dokler ustrezni začetni momenti obstajajo. Za dani slučajni spremenljivki $X \geq 0$ in $Y \geq 0$ je izhodiščno pozicijo $X \preceq_n Y$ v verigi treba utemeljiti z dokazom, da sta pogoja v definiciji 4.7 izpolnjena, kar pa je lahko nepraktično. Zato si včasih pomagamo tudi z zadostnimi pogoji (glej npr. Wang & Young, 1998, str. 150, trditev 3.6).

Omenimo še, da je tudi pri relacijah treba biti previden pri interpretiranju raznih izrekov, ki se lahko nanašajo na različne definicije, podobno kot to velja pri merah tveganja, ali pa le na nenegativne slučajne spremenljivke. Tako, denimo, Shaked in Shanthikumar (2007, str. 208, izrek 4.A.62) navajata, da iz $X \preceq_{n-icx} Y$ sledi $X \preceq_{k-icx} Y$ za vsak $k > n$, če ustrezni začetni momenti obstajajo. Pri tem je "$\preceq_{1-icx}$" sinonim za "$\preceq_{st}$" in "$\preceq_{2-icx}$" sinonim za "$\preceq_{icx}$" oziroma "$\preceq_{sl}$", vendar pa v tem primeru "$\preceq_{n-icx}$" in "$\preceq_{n}$" za $n \geq 3$ nista sinonima. Shaked in Shanthikumar (2007, str. 206) namreč za relacijo "$\preceq_{n-icx}$" zahtevata le izpolnitev drugega pogoja v definiciji 4.7, ne pa tudi prvega. Ta pa je za $n = 1$ in $n = 2$ avtomatično izpolnjen, če je izpolnjen drugi pogoj, za $n \geq 3$ pa ne.

4.3.4 Konveksna urejenost

Definicija 4.8: *Slučajna spremenljivka X je v konveksnem smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z* $X \preceq_{cx} Y$*, če je* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ *in* $\int_x^\infty \overline{F}_X(t)\mathrm{d}t \leq \int_x^\infty \overline{F}_Y(t)\mathrm{d}t$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}$.

Relacija "$\preceq_{cx}$" je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna, ne omogoča pa primerjave poljubnih dveh slučajnih spremenljivk.

Definicija 4.8 se od definicije 4.6 razlikuje po dodanem pogoju $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. Zato je

$$X \preceq_{cx} Y \iff X \preceq_{sl} Y \text{ in } \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y], \tag{4.21}$$

zaradi ekvivalence (4.18) pa velja še

$$X \preceq_{cx} Y \iff \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \text{ in } \mathrm{TVaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(Y) \text{ za vsak } \alpha \in (0,1).$$

Iz $X \preceq_{cx} Y$ sledi vse, kar sledi iz $X \preceq_{sl} Y$, denimo neenačba $\mathbb{H}_g[X] \leq \mathbb{H}_g[Y]$, ki velja za vsako konkavno distorzijsko funkcijo g, in stabilnost za konvolucijo.

Konveksna urejenost je ime dobila zaradi naslednje ekvivalence

$$X \preceq_{cx} Y \iff \mathbb{E}[h(X)] \leq \mathbb{E}[h(Y)] \quad \begin{array}{l}\text{za vse konveksne funkcije } h\text{, za}\\ \text{katere pričakovani vrednosti obstajata}\end{array} \tag{4.22}$$

(Bäuerle & Müller, 2006, str. 134 in 135, definicija 2.1 in izrek 2.5).

Naj bo $X \preceq_{cx} Y$ in $h(x) = x^n$. Če začetna momenta $\mathbb{E}[X^n]$ in $\mathbb{E}[Y^n]$ obstajata, je za nenegativne slučajne spremenljivke $\mathbb{E}[X^n] \leq \mathbb{E}[Y^n]$, v splošnem primeru pa to velja za sode n in zaradi pogoja $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ tudi za $n = 1$. Ker je $\mathbb{E}[X^2] \leq \mathbb{E}[Y^2]$, je $\text{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 = \text{var}[Y]$. Zato iz $X \preceq_{cx} Y$ sledi $\text{var}[X] \leq \text{var}[Y]$, obratno pa v splošnem ne drži (Kaas, Dhaene & Goovaerts, 2000, str. 152).

Ugotavljanje primerljivosti med X in Y z relacijo "$\preceq_{cx}$" po definiciji 4.8 je lahko nepraktično, zato si včasih pomagamo z zadostnimi pogoji. Če je $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ in se $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ enkrat sekata, potem je $X \preceq_{cx} Y$ (Dhaene et al., 2002b, str. 8). Pri tem enkratno sekanje razumemo tako kot pri stop-loss urejenosti v razdelku 4.3.2.

4.3.5 Korelacijska urejenost

Potreba in želja po urejanju obstaja tudi za slučajne vektorje. Tu si oglejmo le eno od možnosti, ki je primerna za delno urejanje dvorazsežnih slučajnih vektorjev z različnimi dvorazsežnimi porazdelitvenimi funkcijami, vendar pa z enakimi robnimi porazdelitvami. Take slučajne vektorje za dani robni porazdelitveni funkciji $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ združimo v množico

$$\mathcal{R}_2(F_X, F_Y) = \{(X, Y) : \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) \text{ in } \mathbb{P}(Y \leq x) = F_Y(x)\},$$

ki ji rečemo Fréchetov prostor.

Definicija 4.9: *Slučajni vektor* $(X_1, Y_1) \in \mathcal{R}_2(F_X, F_Y)$ *je manj koreliran od slučajnega vektorja* $(X_2, Y_2) \in \mathcal{R}_2(F_X, F_Y)$*, kar označujemo z* $(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2)$*, če je* $\text{cov}[f(X_1), h(Y_1)] \leq \text{cov}[f(X_2), h(Y_2)]$ *za vse naraščajoče funkcije* $f(x)$ *in* $h(x)$*, za katere kovarianci, ki ju primerjamo, obstajata.*

Dhaene in Goovaerts (1996, str. 203, definicija 2) se pri definiranju korelacijske urejenosti omejujeta na slučajne vektorje z nenegativnimi komponentami, enako tudi Wang in Dhaene (1998, str. 238, definicija 3), vendar pa Tsanakas (2004, str. 227) ugotavlja, da so njihovi rezultati splošnejši in veljajo tudi brez omejitve na nenegativne komponente.

Definiciji 4.9 je ekvivalentna definicija z dvorazsežnima porazdelitvenima funkcijama slučajnih vektorjev (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2), po kateri je

$$(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2) \iff F_{X_1,Y_1}(x, y) \leq F_{X_2,Y_2}(x, y) \text{ za vsak } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(glej Tsanakas, 2004, str. 227, trditev 3, oziroma Dhaene & Goovaerts, 1996, str. 204, izrek 1).

Razlog za uvrstitev relacije "$\preceq_{corr}$" za dvorazsežne slučajne vektorje v to poglavje je implikacija

$$(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2) \Longrightarrow X_1 + Y_1 \preceq_{sl} X_2 + Y_2 \tag{4.23}$$

(Dhaene & Goovaerts, 1996, str. 206, izrek 2), ki omogoča primerjavo tveganosti vsot $X_1 + Y_1$ in $X_2 + Y_2$, kjer seštevamo odvisne slučajne spremenljivke. Distorzijske mere tveganja, definirane s konkavnimi distorzijskimi funkcijami $g(x)$, torej koherentne distorzijske mere tveganja, zaradi implikacije $\Longrightarrow$ v (4.17) ohranjajo stop-loss urejenost. Zato zanje, upoštevaje implikacijo (4.23), velja, da iz $(X_1, Y_1) \preceq_{corr} (X_2, Y_2)$ sledi $\mathbb{H}_g[X_1 + Y_1] \leq \mathbb{H}_g[X_2 + Y_2]$.

4.3.6 Relacije med različnimi urejenostmi

Stohastično, stop-loss in konveksno urejenost lahko med seboj primerjamo tudi na podlagi njihovih definicij s funkcijami koristnosti, ki jih navajamo v nadaljevanju in so ekvivalentne že navedenim definicijam 4.5, 4.6 in 4.8. Pri tem pa moramo funkcijo koristnosti razumeti širše, kot to dopušča definicija 4.3. Če dopustimo, da imajo odločevalci tudi negativno absolutno averzijo do tveganja, ker so tveganju naklonjeni, potem moramo opustiti zahtevo o konkavnosti. Če pa dopustimo še možnost, da za nekatere odločevalce več dobrin ni bolje kot manj, moramo opustiti zahtevo o naraščanju funkcije koristnosti. Prav tako se odpovejmo zahtevi o dvakratni odvedljivosti. V takem najbolj splošnem okolju je treba v tem razdelku razumeti funkcije koristnosti, za katere nam ostane le še zahteva, da so realne in definirane na $\mathbb{R}$. Kljub temu, da smo dopustili ekonomsko neracionalno odločanje, pa še vedno trdno velja kriterij, da je tveganje X ugodnejša izbira od tveganja Y, če je $\mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)]$.

V razdelku 4.2.9 smo ugotovili, da je dualna funkcija koristnosti $u^*(t) = -u(-t)$ konveksna, ko je $u(t)$ konkavna, in obratno. Sodili $\mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)]$ in $\mathbb{E}[-u(-X)] \leq \mathbb{E}[-u(-Y)]$ za odločanje med tveganjema X in Y sta ekvivalentni, zato je

$$\mathbb{E}[u(-X)] \geq \mathbb{E}[u(-Y)] \Longleftrightarrow \mathbb{E}[u^*(X)] \leq \mathbb{E}[u^*(Y)], \tag{4.24}$$

kar smo tudi že upoštevali v razdelku 4.2.9. Če pričakovani vrednosti, ki ju primerjamo na levi strani zgornje ekvivalence, obstajata, obstajata tudi pričakovani vrednosti, ki ju primerjamo na desni strani, in obratno.

Oglejmo si še definicije za nekatere relacije med tveganji, ki so usklajene s teorijo odločanja na podlagi funkcij koristnosti. Zato v definicijah 4.10 do 4.12 predpostavljamo, ne da bi posebej navajali, da je za odločevalca s funkcijo koristnosti $u(t)$ X ugodnejša izbira od Y, če je izpolnjena leva neenačba v ekvivalenci (4.24).

Prav tako brez navajanja predpostavljamo, da upoštevamo le tiste odločevalce oziroma funkcije koristnosti, za katere pričakovani vrednosti, ki ju primerjamo, obstajata.

Definicija 4.10: *Slučajna spremenljivka X je v stohastičnem smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_{st} Y$, natanko takrat, ko je X ugodnejša izbira od Y za vse odločevalce z naraščajočo funkcijo koristnosti.*

Opomba 4.5: Definicija 4.10 je zaradi ekvivalenc (4.24) in (4.16) ekvivalentna definiciji 4.5. □

Definicija 4.11: *Slučajna spremenljivka X je v stop-loss smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_{sl} Y$, natanko takrat, ko je X ugodnejša izbira od Y za vse odločevalce z naraščajočo konkavno funkcijo koristnosti.*

Opomba 4.6: Definicija 4.11 je zaradi ekvivalenc (4.24) in (4.19) ter dejstva, da je za naraščajočo konkavno funkcijo koristnosti $u(t)$ njena dualna funkcija koristnosti $u^*(t)$ naraščajoča konveksna funkcija, in obratno, ekvivalentna definiciji 4.6. □

Definicija 4.12: *Slučajna spremenljivka X je v konveksnem smislu manj tvegana od Y, kar označujemo z $X \preceq_{cx} Y$, natanko takrat, ko je X ugodnejša izbira od Y za vse odločevalce s konkavno funkcijo koristnosti.*

Opomba 4.7: Definicija 4.12 je zaradi ekvivalenc (4.24) in (4.22) ter dejstva, da je za konkavno funkcijo koristnosti $u(t)$ njena dualna funkcija koristnosti $u^*(t)$ konveksna funkcija, in obratno, ekvivalentna definiciji 4.8. □

Opomba 4.8: V definiciji 4.12 je lepotna napaka, saj govorimo o konveksni urejenosti, merodajni odločevalci pa imajo konkavne funkcije koristnosti. Morda bi bila definicija malo bolj informativna, če bi na podlagi ekvivalence (4.21) in definicije 4.11 definirali, da je $X \preceq_{cx} Y$ natanko takrat, ko je $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ in je X ugodnejša izbira od Y za vse odločevalce z naraščajočo konkavno funkcijo koristnosti, lepotne napake pa s tem ne bi odpravili. □

Če je $X \preceq_{st} Y$, je X ugodnejša izbira od Y za vse odločevalce z naraščajočo funkcijo koristnosti, torej tudi za vse odločevalce z naraščajočo konkavno funkcijo koristnosti, kar pomeni že znano implikacijo $X \preceq_{st} Y \Longrightarrow X \preceq_{sl} Y$.

V razdelku 4.3.1 smo ugotovili, da iz $X \preceq_{st} Y$ sledi $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Če pa je hkrati $X \preceq_{st} Y$ in $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, potem je $X \stackrel{d}{=} Y$ (Denuit et al., 2005, str. 114, trditev

3.3.17). Zato z relacijo "$\preceq_{st}$" ne moremo primerjati različno porazdeljenih slučajnih spremenljivk X in Y z enako pričakovano vrednostjo. Stohastična urejenost oziroma primerjava z relacijo "$\preceq_{st}$" je povezana predvsem z velikostjo slučajnih spremenljivk, merjeno s pričakovano vrednostjo. Po drugi strani smo v razdelku 4.3.4 ugotovili, da iz $X \preceq_{cx} Y$ sledi $\text{var}[X] \leq \text{var}[Y]$. Če je hkrati $X \preceq_{cx} Y$ in $\text{var}[X] = \text{var}[Y]$, potem je $X \stackrel{d}{=} Y$ (Denuit et al., 2005, str. 151, lastnost 3.4.5). Ta ugotovitev in dejstvo, da z relacijo "$\preceq_{cx}$" že po definiciji lahko primerjamo samo slučajne spremenljivke z enako pričakovano vrednostjo, pomeni, da je konveksna urejenost oziroma primerjava z relacijo "$\preceq_{cx}$" povezana predvsem z variabilnostjo slučajnih spremenljivk, merjeno z varianco.

Če je $X \stackrel{d}{\neq} Y$, ne more hkrati veljati $X \preceq_{st} Y$ in $X \preceq_{cx} Y$, saj iz $X \preceq_{cx} Y$ sledi $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, nato pa iz $X \preceq_{st} Y$ še $X \stackrel{d}{=} Y$, kar je protislovje. Zato sta relaciji "$\preceq_{st}$" in "$\preceq_{cx}$" tuji v smislu, da je

$$\{(X,Y) : X \stackrel{d}{\neq} Y \text{ in } X \preceq_{st} Y\} \cap \{(X,Y) : X \stackrel{d}{\neq} Y \text{ in } X \preceq_{cx} Y\} = \emptyset.$$

Stop-loss urejenost oziroma primerjava z relacijo "$\preceq_{sl}$" je povezana z velikostjo in z variabilnostjo slučajnih spremenljivk. Za poljubni slučajni spremenljivki X in Y je namreč $X \preceq_{sl} Y$ natanko takrat, ko obstaja taka slučajna spremenljivka Z, da je $X \preceq_{st} Z \preceq_{cx} Y$ (Bäuerle & Müller, 2006, str. 135, izrek 2.4). To pa ne pomeni, da iz $X \preceq_{sl} Y$ sledi $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ in $\text{var}[X] \leq \text{var}[Y]$. Brez težav se da namreč skonstruirati primer, ko je $X \preceq_{sl} Y$, $\mathbb{E}[X] < \mathbb{E}[Y]$ in $\text{var}[X] > \text{var}[Y]$.

4.4 Premijski principi

Zavarovalnice že od nekdaj ocenjujejo tveganja, ki jih prevzemajo. Zato so že davno pred pojavom aksiomov o merah tveganj uvedle svojo mero tveganja – zavarovalno premijo, za katero so tveganje pripravljene prevzeti.

Zavarovalec zavarovalnici za prevzem tveganja plača kosmato zavarovalno premijo, ki naj bi bila izračunana tako, da na daljši rok zadošča za izplačilo odškodnin, kritje stroškov zavarovalnice, vključno s pozavarovanjem, in dobiček. Tu nas ne bodo zanimale vse sestavine kosmate zavarovalne premije (glej npr. Komelj, 2004, str. 3), ampak le t. i. tehnična premija, pa še ta le za premoženjska zavarovanja. Tovrstna zavarovanja, razen v redkih izjemnih primerih, v nasprotju z večino življenjskih zavarovanj ne vsebujejo varčevalne komponente. Njihova tehnična premija je sestavljena iz nevarnostne premije in varnostnega dodatka. Nevarnostna premija je določena tako, da dolgoročno ravno zadostuje za izplačilo odškodnin, medtem ko varnostni dodatek kratkoročno (vsaj delno) nevtralizira naključne neugodne odmike dejanskih odškodnin od pričakovanih, dolgoročno pa se akumulira in je vir dobička.

V nadaljevanju tega poglavja nas bo zanimala izključno tehnična premija, zato bomo s premijo $\pi(X)$, ki se nanaša na posamezno tveganje X, mislili tehnično premijo za enoletno zavarovanje, ne da bi to posebej navajali. Analogno velja za letno agregatno premijo $\pi(S)$ za skupno tveganje $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ki se nanaša na skupino neodvisnih istovrstnih tveganj. V tem razdelku, ko s tveganji mislimo izključno na škode oziroma odškodnine, se lahko omejimo na nenegativne slučajne spremenljivke.

Od premije običajno zahtevamo ali pa le želimo, da izpolnjuje določene zahteve. Tako mora biti premija vsaj tako velika, kot je pričakovana odškodnina, torej $\pi(X) \geq \mathbb{E}[X]$, hkrati pa ne sme biti večja od največje mogoče odškodnine, torej $\pi(X) \leq \max(X)$. Ti dve zahtevi, ki ju, denimo, navajata Gerber in Jones (1976, str. 216), sta nujni. Če prva ni izpolnjena, dolgoročno vsaka zavarovalnica propade, če druga ni izpolnjena, pa se nihče noče zavarovati. Zato je varnostni dodatek $\pi(X) - \mathbb{E}[X]$ nenegativen, prav tako tudi varnostni koeficient $\delta = \frac{\pi(X)}{\mathbb{E}[X]} - 1$.

Včasih želimo, da je premija aditivna za neodvisne rizike, aditivna po slojih, kar bomo opisali v razdelku 4.4.5, pa še marsikaj. Zahtevamo ali želimo lahko, da izpolnjuje določene posebne aksiome (glej npr. Wang, 1998a, str. 92), lahko pa se zadovoljimo tudi z izpolnjevanjem standardnih aksiomov za koherentne mere tveganja. Pri tem pa se moramo zavedati, da ni dovolj le matematični pogled na tveganje X in pripadajočo premijo $\pi(X)$, ampak je nujen tudi ekonomski pogled in upoštevanje razmer na trgu (glej npr. Bühlmann, 1980, 1985a, 1985b; Landsman & Sherris, 2007). Šele s celovitim pogledom na problem določanja premije so se izkristalizirale zaželene lastnosti premije.

4.4.1 Neto premijski princip

Najbolj preprost je neto premijski princip, po katerem je $\pi(X) = \mathbb{E}[X]$. Ker je pričakovana vrednost aditivna, je seštevek premij po vseh rizikih v portfelju enak pričakovanim agregatnim odškodninam, torej $\pi(S) = \mathbb{E}[S]$. To pomeni, da z neto premijskim principom določimo nevarnostno premijo, ki zadošča za izplačilo pričakovanih odškodnin. Tako določena premija ne vsebuje varnostnega dodatka in služi le za osnovo, na katero dodamo varnostni dodatek, izračunan z eno od preprostih metod, denimo kot določen odstotek nevarnostne premije, standardnega odklona ali variance. Kot smo ugotovili že v uvodu drugega poglavja, bi z uporabo nevarnostne premije vsaka zavarovalnica postala nesolventna, ne glede na višino kapitala. Seveda to velja za primer, ko v kosmato premijo vračunani stroški zadoščajo le za kritje dejanskih stroškov, tako da v tem delu kosmate zavarovalne premije ni kakšne dodatne rezerve, denimo za dobiček, ki bi pod drugim imenom lahko predstavljala varnostni dodatek.

Kljub temu, da z neto premijskim principom določena premija izpolnjuje vse aksiome za koherentne mere tveganja, pa sama zase brez varnostnega dodatka ni primerna za uporabo.

4.4.2 Princip variance

Po tem premijskem principu premijo izračunamo z enačbo $\pi(X) = \mathbb{E}[X]+\beta\,\mathrm{var}[X]$, kjer je $\beta > 0$. Tako izračunana premija, gledana kot mera tveganja, je neobčutljiva za premik, preostalih treh pogojev za koherentnost pa ne izpolnjuje. Kot je razvidno iz primera, ki ga navajata Gerber in Jones (1976, str. 216), tudi pogoja $\pi(X) \leq \max(X)$ ne izpolnjuje. Ima pa vsaj to lepo lastnost, da je aditivna za neodvisna tveganja $X_1, \dots, X_n$, saj za $\pi(S) = \mathbb{E}[S] + \beta\,\mathrm{var}[S]$ velja

$$\pi(S) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] + \beta\,\mathrm{var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] + \beta\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}[X_i] = \sum_{i=1}^{n}\pi(X_i).$$

Kljub številnim pomanjkljivostim, če za standard upoštevamo koherentnost, ima princip variance zelo trdno teoretično ozadje, ki nam daje tudi praktičen kriterij za izbiro konstante β.

Naj tveganje X_i pomeni skupne kosmate odškodnine v enem letu, ki se nanašajo na i-to zavarovanje, tako da S pomeni skupne kosmate odškodnine v enem letu za celoten portfelj. K naj bo kapital, ki ga je zavarovalnica pripravljena tvegati, $\Psi(K)$ pa verjetnost, da bo za nek $t > 0$ izpolnjen pogoj $K + P(t) - S(t) < 0$. Kot smo videli v razdelku 3.5.5, zgornjo mejo za to verjetnost lahko izračunamo z Lundbergovo neenačbo (3.3), kjer je R najmanjši koren enačbe (3.4), torej $M_S(R) = \mathbb{E}[e^{RS}] = e^{cR}$. Z logaritmiranjem dobimo $\log M_S(R) = \log \mathbb{E}[e^{RS}] = cR$. Ko levo stran te enačbe aproksimiramo s prvimi tremi členi Taylorjeve vrste okrog 0, dobimo $\mathbb{E}[S]\,R + \frac{1}{2}\mathrm{var}[S]\,R^2 \approx cR$ (glej Komelj, 2004, str. 59). Ker čas merimo v letih, je $\pi(S) = P(1) = c$, tako da iz prejšnje enačbe dobimo

$$\pi(S) = \frac{1}{R}\log \mathbb{E}[e^{RS}] \approx \mathbb{E}[S] + \frac{R}{2}\mathrm{var}[S], \tag{4.25}$$

iz Lundbergove neenačbe pa dobimo še $R \leq -\frac{\log \Psi(K)}{K}$. Zato smo na varni strani, če konstanto β pri dani stopnji tveganja $\epsilon = \Psi(K)$ določimo z $\beta = -\frac{\log \epsilon}{2K}$. Koeficient

β je tako sorazmeren z relativno averzijo do tveganja, ki jo merimo z $-\frac{\log \epsilon}{2}$, in obratno sorazmeren z višino tveganega kapitala K.

Omenimo le še to, da je za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko $S \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ $\log M_S(t) = \mu\, t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$. V tem primeru smo dejansko upoštevali vse člene Taylorjeve vrste, zaradi česar za normalno porazdeljene slučajne spremenljivke v enačbi (4.25) namesto znaka za aproksimacijo velja enačaj.

4.4.3 Princip standardnega odklona

Po tem premijskem principu premijo izračunamo z enačbo $\pi(X) = \mathbb{E}[X] + \beta_X\, \sigma_X$, kjer je $\beta_X > 0$. Tako izračunana premija ni monotona, druge pogoje za koherentnost pa izpolnjuje. Kot je razvidno iz primera, ki ga navajata Gerber in Jones (1976, str. 216), tudi pogoja $\pi(X) \leq \max(X)$ ne izpolnjuje, prav tako ni aditivna za neodvisna tveganja. Zato je bolj primerno, da premijski princip standardnega odklona gledamo na ravni vseh istovrstnih tveganj in agregatno premijo določimo z enačbo $\pi(S) = \mathbb{E}[S] + \beta_S\, \sigma_S$, nato pa iz konstante $\beta_S > 0$ izračunamo β_X.

Za tem premijskim principom stoji predpostavka o normalni porazdelitvi slučajne spremenljivke S, zato konstanto β_S določimo z ustreznim kvantilom standardizirane normalne porazdelitve. Tako naj bi konstanta $\beta_S = \Phi^{-1}(\alpha)$ zagotavljala, da bo skupna premija z verjetnostjo α zadoščala za izplačilo skupnih odškodnin.

Predpostavimo, da je portfelj S sestavljen iz n neodvisnih in enako porazdeljenih tveganj. Po izhodiščni premijski enačbi bi za n enakih tveganj zbrali $n\, \mathbb{E}[X] + n\, \beta_X\, \sigma_X$ premije, alternativno izračunano za cel portfelj skupaj pa $\mathbb{E}[S] + \beta_S\, \sigma_S$. Ker je $\mathbb{E}[S] = n\, \mathbb{E}[X]$ in $\mathrm{var}[S] = n\, \mathrm{var}[X]$ oziroma $\sigma_S = \sqrt{n}\, \sigma_X$, z izenačitvijo obeh premij dobimo $\beta_X = \frac{\beta_S}{\sqrt{n}}$.

V praksi predpostavka o normalni porazdelitvi slučajne spremenljivke S marsikdaj ni izpolnjena. Kljub temu pa vsaj včasih premijski princip standardnega odklona še vedno lahko uporabljamo, le konstanto β_S moramo ustrezno spremeniti. Tako, denimo, za slučajno spremenljivko S, ki nima prevelikega koeficienta asimetričnosti γ_S, zadošča, da vzamemo $\beta_S = x_\alpha + \frac{\gamma_S}{6}\,(x_\alpha^2 - 1)$, kjer je $x_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$. Ta priredba temelji na t. i. NP-aproksimaciji (glej Komelj, 2004, str. 25). Pri tem ni nujno, da na S gledamo kot na $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kjer se X_i nanaša na i-to zavarovanje. Izhajamo lahko tudi iz kolektivnega modela rizikov, kjer je naključno število odškodnin N neodvisno od neodvisnih in enako porazdeljenih odškodnin $X_1, \ldots, X_N$ ter $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Zadošča, da iz momentov slučajnih spremenljivk N in X_1 ocenimo $\mathbb{E}[S]$, σ_S in γ_S (glej npr. Komelj, 2004, str. 12), nato pa pri dani stopnji zaupanja α izračunamo β_S in $\beta_X = \frac{\beta_S}{\sqrt{n}}$, kjer je n število zavarovanj.

Omenimo še principu standardnega odklona podoben premijski princip, ki ga dobimo tako, da standardni odklon zamenjamo s pričakovano vrednostjo absolutnega odklona od mediane $\mathrm{M}(X) = F_X^{-1}(0{,}5)$. Pri tem premijskem principu, ki ga je predlagal Denneberg (1990), premijo izračunamo z enačbo $\pi(X) = \mathbb{E}[X] + \beta_X \tau_X$, kjer je $\tau_X = \mathbb{E}[|X - \mathrm{M}(X)|]$ in $\beta_X \in [0{,}1]$. Premija $\pi(X)$ izpolnjuje pogoje za koherentnost, je aditivna za komonotona tveganja, velja pa še $\mathbb{E}[X] \leq \pi(X) \leq \max(X)$. Kot navaja Wang (1996, str. 82), je tako dobljena premija distorzijska mera tveganja za konkavno odsekoma linearno funkcijo g, ki povezuje točke $(0{,}0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1+\beta_X}{2})$ in $(1{,}1)$.

Če je $\mathbb{P}[X = 0] \geq \frac{1}{2}$, je $\mathrm{M}(X) = 0$ in $\tau_X = \mathbb{E}[X]$. V tem primeru se določanje premije poenostavi v $\pi(X) = (1 + \beta_X)\mathbb{E}[X]$. Skratka, nevarnostno premijo povečamo za varnostni dodatek, določen na najbolj preprost način, kar tukaj pomeni slabost. V praksi namreč običajno pričakujemo, da za posamezno tveganje z več kot 50-odstotno verjetnostjo ne bo škode. Prav v takem primeru pa se Dennebergov premijski princip izrodi, medtem ko izračun $\pi(S)$ v bistvu zahteva poznavanje porazdelitvene funkcije $F_S(x)$. Če jo že izračunamo, pa raje neposredno uporabimo kakšen drug kvantil, ki je za določanje premije primernejši od mediane.

4.4.4 Princip funkcije koristnosti

Z vsako mero tveganja lahko primerjamo tudi tveganja, ki jih prevzemajo zavarovalnice, vendar s tem še ni nujno vzpostavljen tudi primeren kvantitativen odnos med tveganjem in zavarovalno premijo. Tako, denimo, mera tveganja $\rho_u(X) = -\mathbb{E}[u(-X)]$, ki smo jo za poljubno normirano funkcijo koristnosti $u(t)$ definirali v razdelku 4.2.6, v splošnem ni primerna za določanje premije. Če za funkcijo koristnosti izberemo $u(t) = t$, dobimo že znani neto premijski princip.

Za zavarovalnico, ki tveganje X zavaruje za premijo $\pi(X)$, je priložnost za dobiček v pričakovani pozitivni razliki $\pi(X) - X$, seveda pa se lahko zgodi, da se pričakovanja ne bodo uresničila. Premija $\pi(X)$ mora biti vsaj tako velika, da je pričakovana koristnost večja ali enaka koristnosti v primeru, ko zavarovalnica tveganja X ne zavaruje, to pa je $\mathbb{E}[u(0)] = u(0)$, kar je za normirane funkcije koristnosti enako 0. Na opisanem razmisleku temelji princip ničle funkcije koristnosti, ki ga je uvedel Bühlmann (1970, str. 86). Po tem principu za tveganje X s končno pričakovano vrednostjo $\mathbb{E}[X]$ premijo $\pi(X)$ izračunamo kot rešitev enačbe $\mathbb{E}[u(\pi(X) - X)] = u(0)$.

Razmišljamo lahko tudi širše, tako da namesto posameznega tveganja X gledamo agregatne letne odškodnine S in agregatno letno premijo $\pi(S)$. Če ima zavarovalnica na začetku leta kapital K, ga na koncu leta lahko pričakuje $K + \pi(S) - S$. V tem primeru premijo $\pi(S)$ izračunamo kot rešitev enačbe

$$\mathbb{E}[u(K + \pi(S) - S)] = u(K). \tag{4.26}$$

Zgornja enačba ima enolično rešitev, ki pa se v splošnem primeru ne da eksplicitno zapisati (Gerber & Pafumi, 1998, str. 78). Zato enačbe ne bomo še dodatno zapletali s tem, da bi upoštevali davek na dobiček, stroške kapitala ipd. Princip določanja premije z enačbo (4.26) se imenuje princip ekvivalentne koristnosti, princip ničle funkcije koristnosti pa je le njegov poseben primer, ko je $K = 0$.

S principom ničle funkcije koristnosti določena premija $\pi(X)$, gledana kot mera tveganja, je monotona in neobčutljiva na premik, vendar v splošnem primeru ni pozitivno homogena, prav tako ni subaditivna, zato tudi koherentna ni. Vedno pa izpolnjuje praktično zelo pomemben pogoj $\mathbb{E}[X] \leq \pi(X) \leq \max(X)$ (Denuit et al., 2005, str. 82), s primerno izbiro funkcije koristnosti pa lahko pridobimo še kakšno zaželeno lastnost.

Kot zelo pomembna in primerna izbira se izkaže eksponentna funkcija koristnosti, ki je za dani $\alpha > 0$ definirana z $u(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$. Zavarovalnica s tako funkcijo koristnosti ima absolutno averzijo, ki je neodvisna od velikosti priložnosti oziroma tveganja, saj je $r(t) \equiv \alpha$. Zato niti ni pomembno, ali gledamo posamezno tveganje X ali skupno tveganje S. Enačba (4.26) ima od kapitala K neodvisno eksplicitno rešitev $\pi(S) = \frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}[e^{\alpha S}]$ (Gerber & Pafumi, 1998, str. 78). To pa je le z drugim parametrom zapisana leva enačba (4.25). Skratka, parameter α ni nič drugega kot koeficient R v Lundbergovi neenačbi. S tem smo spet dobili uporaben kriterij za določitev α. Če pri danem tveganem kapitalu K in dani stopnji tveganja $\epsilon = \Psi(K)$ izberemo $\alpha = -\frac{\log \epsilon}{K}$, smo na varni strani.

Za neodvisni tveganji X in Y iz $\mathbb{E}[e^{\alpha(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]\,\mathbb{E}[e^{\alpha Y}]$ z logaritmiranjem in deljenjem z α dobimo $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$. Zato je z eksponentno funkcijo koristnosti določena premija aditivna za neodvisna tveganja. To dodatno potrjuje ugotovitev, da isti α lahko uporabljamo za posamezno in skupno tveganje, ki je seštevek med seboj neodvisnih tveganj.

Zaradi enačbe (4.25) je premija, izračunana po principu variance, aproksimacija premije, izračunane po principu ničle eksponentne funkcije koristnosti. V razdelku 4.4.2 smo ugotovili, da za normalno porazdeljene slučane spremenljivke znak za aproksimacijo v enačbi (4.25) lahko zamenjamo z enačajem. Zato premija, določena z eksponentno funkcijo koristnosti, ki je v takem primeru enaka premiji, določeni s principom variance, ni subaditivna niti aditivna, ker varianca nima teh dveh lastnosti.

Po principu ničle funkcije koristnosti dobimo aditivnost premije za neodvisna tveganja za eksponentno funkcijo koristnosti (Gerber, 1974, str. 217) in za linearno funkcijo $u(t) = t$, ki je limitni primer eksponentne funkcije koristnosti, ko gre α proti 0. Z $u(t) = t$ po principu ničle funkcije koristnosti dobimo neto premijski princip, ki je aditiven tudi za odvisna tveganja.

Poleg navedenih obstaja še nekaj premijskih principov, povezanih s funkcijami koristnosti, denimo Esscherjev premijski princip ali švicarski premijski princip (glej npr. Goovaerts et al., 2003b; Bühlmann, Gagliardi, Gerber & Straub, 1977).

4.4.5 Wangov premijski princip

Wangov premijski princip je pomemben primer premijskega principa, temeljećega na distorzijski funkciji. Wang (1998d) priporoča PH (proportional hazards) transformacijo z distorzijsko funkcijo $g(x) = x^r$, $r \in (0,1]$, ter navaja veliko praktičnih primerov uporabe v zavarovalništvu oziroma pozavarovalništvu. Po njegovem premijskem principu premijo izračunamo tako, da jo izenačimo z mero tveganja, ki je za $X \geq 0$ definirana z enačbo (4.7). Ker je v tem posebnem primeru distorzijska funkcija g enolično določena s parametrom r, namesto indeksa g v $\mathbb{H}_g$ pišimo kar r. Z upoštevanjem enačbe (4.8) dobimo

$$\pi(X,r) = \mathbb{H}_r[X] = \int_0^\infty (\overline{F}_X(x))^r \mathrm{d}x = r\int_0^1 \overline{F}_X^{-1}(q)q^{r-1}\mathrm{d}q.$$

Premija $\mathbb{H}_r[X]$ je padajoča funkcija r, ki spodnjo mejo $\mathbb{E}[X]$ doseže pri $r = 1$, sicer pa je $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{H}_r[X] \leq \max(X)$ (Wang, 1995, str. 45). Pri dani porazdelitveni funkciji $F_X(x)$ potrebno višino varnostnega koeficienta $\delta = \frac{\mathbb{H}_r[X]}{\mathbb{E}[X]} - 1$ dosežemo s primerno izbiro parametra r. Ker je $g(x) = x^r$ konkavna distorzijska funkcija, je z njo določena distorzijska mera tveganja $\mathbb{H}_r[X]$ tudi subaditivna in zato koherentna.

Tveganje X, ki ga želimo škodno presežkovno pozavarovati pri eni ali več pozavarovalnicah, večkrat razstavimo na sloje oziroma intervale $X = X_{(x_0,x_1]} + X_{(x_1,x_2]} + X_{(x_2,x_3]} + \cdots$, kjer je $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, sloj $X_{(x_i,x_{i+1}]}$ pa je za $i = 0,1,2\ldots$ definiran z

$$X_{(x_i,x_{i+1}]} = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq X < x_i, \\ X - x_i & \text{za } x_i \leq X < x_{i+1}, \\ x_{i+1} - x_i & \text{za } x_{i+1} \leq X. \end{cases}$$

Zavarovalnica obdrži sloj $X_{(x_0,x_1]}$, preostale pa pozavaruje pri različnih pozavarovalnicah. Na ta način lahko vsak sloj prilagodi pričakovanemu številu škod, ki ga bodo "zadele", in razprši kreditno tveganje.

Z Wangovim principom določena premija je aditivna po slojih (Wang, 1995, str. 47), saj je $\mathbb{H}_r[X] = \mathbb{H}_r[X_{(x_0,x_1]}] + \mathbb{H}_r[X_{(x_1,x_2]}] + \mathbb{H}_r[X_{(x_2,x_3]}] + \cdots$ Aditivnost po slojih je sicer mogoče doseči tudi enostavneje, če za vse nevarnostne premije za posamezne sloje, izračunane z enačbo (3.2), uporabimo isti varnostni koeficient. Prednost Wangovega premijskega principa je v tem, da je za poljubno delitev tveganja X na sloje aditiven po slojih, hkrati pa višjim in zato bolj tveganim slojem priredi večji varnostni koeficient. To je posledica dejstva, da je za infinitezimalno majhne sloje $X_{(x,x+dx]}$ razmerje $\phi(x) = \frac{\mathbb{H}_r[X_{(x,x+dx]}]}{\mathbb{E}[X_{(x,x+dx]}]}$ naraščajoča funkcija ter $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = g'(0) = rx^{r-1}$ (Wang, 1996, str. 78). V našem primeru je $g'(0) = 1$ za $r = 1$ in $\lim_{x\to 0} g'(x) = \infty$ za $0 < r < 1$, zaradi česar varnostni koeficient z večanjem levega krajišča sloja raste čez vse meje. S tem pa ni nič narobe. V nasprotnem primeru bi tehnična premija za ekstremno visoke sloje, kjer so škode že zelo malo verjetne, hkrati z nevarnostno premijo težila k nič. Tako pozavarovanje pa za pozavarovalnice ne bi bilo ekonomsko zanimivo, saj bi se za zanemarljivo nadomestilo izpostavljale ekstremnim tveganjem.

V tem razdelku smo se omejili na nenegativne slučajne spremenljivke. Pri tej omejitvi je funkcija $g(x) = x^r$ odvedljiva in konkavna, zato velja enačba (4.11). Tako je $\mathbb{H}_r[X] = \mathbb{E}[X\,\zeta(X)]$, kjer je $\zeta(x) = g'(\overline{F}_X(x)) = r(\overline{F}_X(x))^{r-1}$. Z enačbo (4.11) in različnimi funkcijami $\zeta(x)$ se da zapisati še mnoge znane primere premijskih principov, ki pa jih tu ne bomo navajali – glej (Furman & Zitikis, 2008a), kjer pa so zahteve za funkcijo $\zeta(x)$ nebistveno drugačne od tu navedenih.

5 Mere in modeliranje odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami

Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, ki ju združimo v slučajni vektor (X, Y). Slučajni spremenljivki X in Y sta lahko neodvisni, lahko se hkrati večata ali manjšata (sta komonotoni), z večanjem prve se druga zmanjšuje in obratno (sta nasprotno monotoni), seveda pa je med njima mogoča še cela vrsta drugačnih odvisnosti.

Vse informacije o slučajnem vektorju (X, Y) se skrivajo v njegovi porazdelitveni funkciji $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$. Kako sta porazdeljeni posamezni komponenti, ugotovimo tako, da poiščemo t. i. robni porazdelitveni funkciji, ki ju izračunamo z enačbama

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y),$$
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y).$$

Analogno za slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ s porazdelitveno funkcijo

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

robno porazdelitveno funkcijo $F_{X_i}(x_i)$ slučajne spremenljivke X_i dobimo tako, da v porazdelitveni funkciji $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ vse spremenljivke, razen x_i, pošljemo v neskončnost.

S pridobivanjem popolne ali delne informacije o stopnji odvisnosti med X in Y iz $F_{X,Y}(x,y)$ se bomo ukvarjali v naslednjih razdelkih. Ker postopek ni enostaven, najprej preverimo potrebni in zadostni pogoj $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ za njuno neodvisnost. Analogno so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne natanko takrat, ko je $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$. Iz neodvisnosti slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$ sledi, da je poljuben par slučajnih spremenljivk X_i in X_j, $1 \leq i < j \leq n$, neodvisen, obratno pa ne velja. Če so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ paroma neodvisne, ni nujno, da so tudi neodvisne (glej npr. Jamnik, 1971, str. 134).

V zavarovalniški praksi ni nič nenavadnega, da so posamezne škode med seboj odvisne. Tako se, denimo, ob toči ali viharju na prizadetem področju hkrati zgodi veliko škod. Prav tako so zaradi neugodnih vremenskih razmer lahko odvisne posamezne škode, nastale na zelo oddaljenih cestah, čeprav sicer med njimi ni videti nobene povezave. Če ne vidimo vremenske ali kakšne druge povezave, pa vedno lahko pomislimo na inflacijo, ki zvišuje odškodnine.

Kako lahko že en sam skupni faktor vpliva na dve sicer neodvisni slučajni spremenljivki, si oglejmo na primeru, povzetem po (Denuit et al., 2005, str. 192).

Primer 5.1: Slučajni spremenljivki $X|(\Theta = \theta) \sim \text{Exp}(\theta)$ in $Y|(\Theta = \theta) \sim \text{Exp}(\theta)$ naj bosta pogojno neodvisni. Če je $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, je $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ in $Y \sim \text{Pareto}(\alpha, \lambda)$ (glej npr. Komelj, 2004, str. 10). Naj bo konkreten parameter θ odvisen od realizacije istega naključnega dogodka. Potem sta X in Y odvisni slučajni spremenljivki.

Ker je $\mathbb{P}(X > x, Y > y | \Theta = \theta) = e^{-\theta x} e^{-\theta y} = e^{-\theta(x+y)}$, je

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \int_0^\infty e^{-\theta(x+y)} f_\Theta(\theta) \mathrm{d}\theta = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-(\lambda+x+y)\theta}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}\theta.$$

S substitucijo $t = (\lambda + x + y)\theta$ dobimo

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x + y}\right)^{\alpha}. \tag{5.1}$$

Ker je $\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = 1 - \mathbb{P}(X > x) - \mathbb{P}(Y > y) + \mathbb{P}(X > x, Y > y)$, zveza med dvorazsežno porazdelitveno funkcijo in pripadajočo funkcijo preživetja vključuje tudi robni funkciji preživetja

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - \overline{F}_X(x) - \overline{F}_Y(y) + \overline{F}_{X,Y}(x, y), \tag{5.2}$$

kar z upoštevanjem $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ in $\overline{F}_Y(y) = 1 - F_Y(y)$ lahko zapišemo tudi kot

$$\overline{F}_{X,Y}(x, y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y). \tag{5.3}$$

Upoštevajmo enačbo (5.1) in dejstvo, da je $\overline{F}_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$ ter analogno za $\overline{F}_Y(y)$, pa nam enačba (5.2) razkrije porazdelitveno funkcijo dvorazsežne Paretove porazdelitve

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + y}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + x + y}\right)^{\alpha}.$$

Če bi bili slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, bi se njuna skupna porazdelitvena funkcija $F_{X,Y}(x, y)$ od izraza na desni v zgornji enačbi razlikovala le v četrtem členu, ki bi bil $\left(\frac{\lambda^2}{(\lambda+x)(\lambda+y)}\right)^{\alpha}$. □

Podobno kot pri merah tveganja bi tudi tu radi odvisnost med slučajnima spremenljivkama X in Y izrazili z enim številom, t. i. mero konkordance, ki mora izpolnjevati določene pogoje. Z njo bi radi merili, kako se velike oziroma majhne vrednosti ene slučajne spremenljivke pojavljajo hkrati z velikimi oziroma majhnimi vrednostmi druge slučajne spremenljivke. Oglejmo si mero konkordance, kot je definirana v (Denuit et al., 2005, str. 247), le z drugimi oznakami.

Definicija 5.1: *Funkcija κ, ki vsakemu paru slučajnih spremenljivk X in Y priredi vrednost $\kappa(X, Y)$, je mera konkordance, če izpolnjuje naslednje aksiome:*

1. $\kappa(X, Y) = \kappa(Y, X)$ *(simetričnost).*
2. $-1 \le \kappa(X, Y) \le 1$ *(normalizacija).*
3. $\kappa(X, Y) = 1 \iff X$ *in* Y *sta komonotoni.*
4. $\kappa(X, Y) = -1 \iff X$ *in* Y *sta nasprotno monotoni.*
5. *Če je* $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *strogo monotona transformacija, definirana na zalogi vrednosti slučajne spremenljivke* X*, potem je:*

$$\kappa(T(X), Y) = \begin{cases} \kappa(X, Y) & \textit{za naraščajočo transformacijo } T, \\ -\kappa(X, Y) & \textit{za padajočo transformacijo } T. \end{cases}$$

Hitro se lahko prepričamo, da iz neodvisnosti slučajnih spremenljivk X in Y sledi $\kappa(X, Y) = 0$. Nasprotno pa ne velja. Zahteva, da je $\kappa(X, Y) = 0$ natanko takrat, ko sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, ni združljiva s peto zahtevo definicije 5.1 (Denuit et al., 2005, str. 247).

5.1 Pearsonov korelacijski koeficient

Za slučajni spremenljivki X in Y s končnima standardnima odklonoma $\sigma_X > 0$ in $\sigma_Y > 0$ ter kovarianco $\text{cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ je Pearsonov korelacijski koeficient definiran z $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$. Pearsonov korelacijski koeficient je za neodvisni slučajni spremenljivki X in Y nič, saj je zanju $\text{cov}[X, Y] = 0$, nasprotno pa ne velja. Če je, denimo, slučajna spremenljivka X enakomerno porazdeljena na intervalu $[-1,1]$ ter je $Y = X^2$, je zaradi simetrije $\mathbb{E}[X] = 0$ in $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = 0$. Zato je $\text{cov}[X, Y] = 0$ in $\rho(X, Y) = 0$. V tem primeru sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani, očitno pa nista neodvisni.

Za Pearsonov korelacijski koeficient velja neenačba $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. Enačaja dosežemo pri linearni zvezi $Y = aX + b$. Za $a > 0$ je $\rho(X, Y) = 1$, za $a < 0$ je $\rho(X, Y) = -1$, možnost $a = 0$ pa zaradi pogoja $\sigma_Y > 0$ ni mogoča. Ker je za poljubne $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sgn}(ac)\rho(X, Y)$, Pearsonov korelacijski koeficient ni invarianten na linearne transformacije, ker se lahko spremeni predznak, vendar pa je invarianten na strogo naraščajoče linearne transformacije.

Pearsonov korelacijski koeficient na nek način meri linearno odvisnost, zato mu rečemo tudi linearni korelacijski koeficient. Je zelo pogosto uporabljana mera odvisnosti v prostoru n-razsežnih normalno porazdeljenih slučajnih vektorjev $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ s porazdelitveno funkcijo

$$\Phi^n_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mu)^t \Sigma^{-1}(\mathbf{z}-\mu)} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \tag{5.4}$$

in gostoto verjetnosti

$$\phi^n_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)},$$

kar bomo označevali z $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$. Tu sta $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ in $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$ vektorja stolpca, Σ je kovariančna matrika z elementi $\Sigma_{ij} = \text{cov}[X_i, X_j]$ za $i \neq j$

in $\Sigma_{ii} = \text{cov}[X_i, X_i] = \text{var}[X_i] = \sigma_i^2$, $|\Sigma|$ njena determinanta ter $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$ pričakovana vrednost slučajnega vektorja **X**.

Naj bo $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^t$. Ker je $X_i \sim \text{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, so robne porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja **X** natanko določene z vektorjema μ in σ. Pearsonove korelacijske koeficiente med vsemi možnimi pari komponent slučajnega vektorja **X** zložimo v n-razsežno korelacijsko matriko **P** z elementi $P_{ij} = \rho(X_i, X_j)$. Korelacijska matrika **P** ima enice na diagonali, absolutne vrednosti preostalih elementov pa ne presegajo enice, je simetrična ter pozitivno semidefinitna oziroma pozitivno definitna, če so komponente slučajnega vektorja **X** linearno neodvisne. Naj bo **D** diagonalna matrika, ki ima na diagonali vektor σ. Ker je $\Sigma = \mathbf{DPD}$, je n-razsežna normalna porazdelitev natanko določena z vektorjema μ in σ ter s korelacijsko matriko **P**, torej z robnimi porazdelitvami in korelacijsko matriko **P**. To pa pomeni, da v okolju večrazsežnih normalno porazdeljenih slučajnih vektorjev $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ Pearsonovi korelacijski koeficienti $\rho(X_i, X_j)$ popolnoma določajo njihovo strukturo odvisnosti. Zato je v takem okolju Pearsonov korelacijski koeficient brez dvoma kvalitetna mera odvisnosti.

Pearsonov korelacijski koeficient popolnoma določa odvisnost tudi v okolju eliptično porazdeljenih slučajnih vektorjev. Eliptično so porazdeljeni vsi n-razsežni slučajni vektorji **X**, za katere je $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \mathbf{A}\mathbf{Z}$, kjer je $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$ konstanten vektor, **A** $n \times m$ razsežna matrika in **Z** m-razsežen slučajni vektor, ki je porazdeljen sferično (McNeil, Frey & Embrechts, 2005, str. 93, definicija 3.26). Slučajni vektor **Z** je porazdeljen sferično, če je $\mathbf{QZ} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}$ za vse ortogonalne matrike **Q**, za katere je torej $\mathbf{QQ}^t = \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ (McNeil et al., 2005, str. 89, definicija 3.18).

Večrazsežna normalna porazdelitev je poseben primer eliptične porazdelitve, večrazsežna standardizirana normalna porazdelitev z nekoreliranimi komponentami pa je tudi sferična. Poseben primer eliptične porazdelitve je tudi večrazsežna Studentova porazdelitev.

Naj bo $\mu \in \mathbb{R}^n$, **A** $n \times m$ razsežna nesingularna matrika in $\Sigma = \mathbf{AA}^t$ t. i. disperzijska matrika. Slučajni vektor **X** je porazdeljen Studentovo, kar bomo označili z $\mathbf{X} \sim t_n(\nu, \mu, \Sigma)$, če je njegova n-razsežna porazdelitvena funkcija pri danem številu prostostnih stopenj $\nu \in \mathbb{N}^+$ enaka

$$t^n_{\nu,\mu,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(\nu\pi)^n|\Sigma|}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \left(1 + \frac{(\mathbf{z}-\mu)^t\Sigma^{-1}(\mathbf{z}-\mu)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n,$$

gostota verjetnosti pa

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(\nu\pi)^n|\Sigma|}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{(\mathbf{x}-\mu)^t\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}.$$

Pričakovana vrednost obstaja le za $\nu > 1$, ko je $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu$, kovariančna matrika pa obstaja le za $\nu > 2$, ko je enaka $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ (Embrechts, Lindskog & McNeil, 2003, str. 26). Matrika $\mathbf{P}$, ki jo iz disperzijske matrike Σ izračunamo s formulami $P_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $i, j = 1, \ldots, n$, je korelacijska matrika za $\nu > 2$, sicer pa ji bomo rekli psevdokorelacijska matrika, saj izpolnjuje formalne pogoje za korelacijsko matriko – je pozitivno semidefinitna simetrična matrika z enicami na diagonali, absolutne vrednosti preostalih elementov pa ne presegajo enice.

V splošnem primeru zunaj okolja eliptično porazdeljenih slučajnih vektorjev ima Pearsonov korelacijski koeficient kar nekaj pomanjkljivosti. Tako, denimo, Embrechts, McNeil in Straumann (1999, str. 233) kot pomanjkljivost navajajo dejstvo, da Pearsonov korelacijski koeficient $\rho(X, Y)$ ni definiran, če varianci slučajnih spremenljivk X in Y nista končni, da iz nekoreliranosti ne smemo sklepati o neodvisnosti, predvsem pa, da ni invarianten na strogo naraščajoče nelinearne transformacije. Poleg tega navajajo primer, ko pri danih robnih porazdelitvah niso mogoče odvisnosti, ki bi ustrezale poljubni linearni korelaciji $\rho \in [-1,1]$ (glej primer 5.3 na str. 97). To pa niso edine pomanjkljivosti linearnega korelacijskega koeficienta, ki od pogojev iz definicije 5.1 izpolnjuje le prva dva. Nekaj referenc na članke, ki obravnavajo njegove slabosti, navajajo tudi De la Peña, Ibragimov in Sharakhmetov (2006).

5.2 Spearmanov korelacijski koeficient ranga

Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama $F_X(x)$ in $F_Y(x)$. Spearmanov korelacijski koeficient ranga ρ_S je definiran s pomočjo Pearsonovega korelacijskega koeficienta ρ kot $\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y))$. Slučajni spremenljivki $F_X(X)$ in $F_Y(Y)$ očitno lahko zavzameta samo vrednosti z intervala $[0,1]$. Če sta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, je za vsak $x \in [0,1]$

$$\mathbb{P}(F_X(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x,$$

zato je $F_X(X) \sim \mathrm{U}[0,1]$ in analogno $F_Y(Y) \sim \mathrm{U}[0,1]$. V takem primeru velja enačba $\rho_S(X, Y) = 12\,\mathbb{E}[(F_X(X) - 0{,}5)(F_Y(Y) - 0{,}5)]$ (Mildenhall, 2006, str. 111).

Spearmanov korelacijski koeficient ranga za vzorca $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(y_1, \ldots, y_n)$ slučajnih spremenljivk X in Y izračunamo z upoštevanjem vzorčnih porazdelitvenih funkcij. Pri računanju korelacijskega koeficienta ranga se v ulomku velikost vzorca krajša, zato dobimo enak rezultat, če vzorčne vrednosti nadomestimo z njihovimi rangi (mesti v naraščajoče urejenem vzorcu) in izračunamo linearni korelacijski koeficient.

Spearmanov korelacijski koeficient lahko izračunamo za poljubni slučajni spremenljivki X in Y. Izpolnjuje vse pogoje iz definicije 5.1, iz neodvisnosti slučajnih spremenljivk X in Y pa sledi $\rho_S(X,Y) = 0$ (Embrechts, McNeil & Straumann, 2002, str. 16). Če delamo s slučajnim vektorjem, Spearmanove korelacijske koeficiente izračunamo za vse pare njegovih komponent in jih zložimo v korelacijsko matriko rangov.

5.3 Kendallov tav

Kendallov τ temelji na pojmu konkordance in diskordance. Če imamo para slučajnih spremenljivk (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) ter je hkrati $X_1 > X_2$ in $Y_1 > Y_2$ ali pa hkrati $X_1 < X_2$ in $Y_1 < Y_2$, govorimo o konkordanci. Če je hkrati $X_1 > X_2$ in $Y_1 < Y_2$ ali pa hkrati $X_1 < X_2$ in $Y_1 > Y_2$, govorimo o diskordanci. Če je produkt $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)$ pozitiven, imamo konkordanco, če je negativen, imamo diskordanco. Kendallov τ za slučajni vektor (X, Y) izračunamo kot razliko verjetnosti konkordance in diskordance

$$\tau(X,Y) = \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0) - \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0),$$

kjer je (X', Y') od (X, Y) neodvisen, vendar enako porazdeljen slučajni vektor.

Kendallov τ lahko izračunamo za poljubni slučajni spremenljivki X in Y. Izpolnjuje vse zahteve definicije 5.1, iz neodvisnosti slučajnih spremenljivk X in Y pa sledi $\tau(X,Y) = 0$ (Embrechts et al., 2002, str. 16). Če delamo s slučajnim vektorjem, Kendallove τ izračunamo za vse pare njegovih komponent in jih zložimo v korelacijsko matriko Kendallovih τ.

5.4 Komonotonost

V razdelku 5.1 smo se seznanili s Pearsonovim oziroma linearnim korelacijskim koeficientom $\rho(X,Y)$, ki meri linearno odvisnost med slučajnima spremenljivkama X in Y. Linearno povezani slučajni spremenljivki se hkrati povečujeta in hkrati zmanjšujeta, če je $\rho(X,Y) = 1$, oziroma se ena zmanjšuje, ko se druga povečuje, če je $\rho(X,Y) = -1$. Tako usklajeno gibanje pa je mogoče tudi v bolj splošnem primeru, kot je linearna povezanost, če sta slučajni spremenljivki X in Y komonotoni oziroma nasprotno monotononi.

Definicija 5.2: *Slučajni spremenljivki X in Y sta komonotoni, če med porazdelitveno funkcijo $F_{X,Y}(x,y)$ slučajnega vektorja (X,Y) in robnima porazdelitvenima funkcijama $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ velja zveza $F_{X,Y}(x,y) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}$. Slučajni spremenljivki X in Y sta nasprotno monotoni, če sta X in $-Y$ komonotoni.*

Iz definicije, povzete po (Wang & Dhaene, 1998, str. 236), vendar z opuščeno zahtevo po nenegativnosti slučajnih spremenljivk X in Y, se še ne vidi njunega usklajenega gibanja. To postane razvidno iz naslednjega izreka.

Izrek 5.1: *Slučajni spremenljivki X in Y sta komonotoni natanko takrat, ko obstaja slučajna spremenljivka Z in taki naraščajoči realni funkciji $u(x)$ in $v(x)$, da sta slučajna vektorja (X,Y) in $(u(Z), v(Z))$ enako porazdeljena, torej $(X,Y) \stackrel{d}{=} (u(Z), v(Z))$.*

Dokaz: Glej (Wang & Dhaene, 1998, str. 236, izrek 1). V tem viru je sicer omejitev na slučajne vektorje z nenegativnimi komponentami, vendar kot ugotavlja Tsanakas (2004, str. 227), v njem navedeni rezultati veljajo tudi brez nje. Sicer pa je izrek le poseben primer splošnejšega izreka za slučajne vektorje z razsežnostjo $n \geq 2$, kjer omenjene omejitve ni (glej Dhaene et al., 2002b, str. 13, izrek 2). □

Izrek 5.2: *Slučajni spremenljivki X in Y sta komonotoni natanko takrat, ko za slučajno spremenljivko $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ velja $(X,Y) \stackrel{d}{=} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U))$.*

Dokaz: Naj bo $U \sim \mathrm{U}[0,1]$. Vemo, da je $F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$ in $F_Y^{-1}(U) \stackrel{d}{=} Y$ (Angus, 1994, str. 652, izrek 2), kar je potrebni pogoj za $(X,Y) \stackrel{d}{=} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U))$. Ker sta kvantilni funkciji F_X^{-1} in F_Y^{-1} naraščajoči, iz izreka 5.1 sledi

$$(X,Y) \stackrel{d}{=} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)) \Longrightarrow X \text{ in } Y \text{ sta komonotoni slučajni spremenljivki.}$$

Pokažimo še, da velja tudi obratno. Če sta X in Y komonotoni slučajni spremenljivki, iz

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x, F_Y^{-1}(U) \leq y) &= \mathbb{P}(U \leq F_X(x), U \leq F_Y(y)) \\ &= \mathbb{P}(U \leq \min\{F_X(x), F_Y(y)\}) \\ &= \min\{F_X(x), F_Y(y)\} \\ &= F_{X,Y}(x,y) \end{aligned}$$

sledi $(X,Y) \stackrel{d}{=} (F_X^{-1}(U), F_Y^{-1}(U))$. □

Izrek 5.2 je zelo uporaben, saj nam omogoča generiranje komonotonih vzorcev slučajnega vektorja (X, Y). Najprej z generatorjem (psevdo)naključnih števil za $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ naključno generiramo vrednost u, nato pa izračunamo vektor $(x, y) = (F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u))$.

Komonotoni slučajni spremenljivki X in Y nista neodvisni, saj ju po izreku 5.2 tesno povezuje slučajna spremenljivka U. Ker Spearmanov korelacijski koeficient ranga in Kendallov τ izpolnjujeta vse zahteve definicije 5.1, je po njeni tretji točki $\rho_S(X, Y) = \tau(X, Y) = 1$. Pearsonov oziroma linearni korelacijski koeficient je za komonotoni slučajni spremenljivki X in Y sicer vedno nenegativen, ker je njuna kovarianca nenegativna (glej Wang, 1998a, str. 90, lema 2.3), vendar je lahko poljubno blizu 0 – glej primer 5.3 na strani 97.

Komonotonost je posplošitev pojma linearna koreliranost in jo lahko definiramo tudi za $n > 2$ slučajnih spremenljivk. Čeprav bi analogno kot v definiciji 5.2 lahko izhajali iz enačbe $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \min\{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\}$, bomo tokrat ravnali drugače.

Definicija 5.3: *Slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ s porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ so komonotone natanko takrat, ko velja*

$$(X_1, \dots, X_n) \overset{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)) ,$$

kjer je $U \sim \mathrm{U}[0,1]$.

Komonotonost pomeni največjo možno stopnjo odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami $X_1, \dots, X_n$. Kot tako jo lahko uporabimo predvsem za ocenjevanje raznih zgornjih mej. Tako, denimo, lahko želimo izračunati porazdelitveno funkcijo vsote $S = \sum_{i=1}^n X_i$ slučajnih spremenljivk, ki niso neodvisne. Ker problem ni enostavno rešljiv, smo včasih zadovoljni, če znamo izračunati zgornjo mejo za porazdelitev S, ki jo dobimo tako, da namesto originalnih slučajnih spremenljivk $X_1, \dots, X_n$ seštejemo komonotone slučajne spremenljivke $X_1^c, \dots, X_n^c$, za katere je $X_i^c \overset{d}{=} X_i$, $i = 1, \dots, n$. Za $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ namreč velja $S \preceq_{cx} S^c$ (Dhaene et al., 2002b, str. 23, izrek 7), kar pomeni, da je S^c bolj tvegana slučajna spremenljivka kot S. Več o metodi, ki je podrobneje razdelana za logaritemsko normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, glej (Dhaene, Denuit, Goovaerts, Kaas & Vyncke, 2002a; Vanduffel, 2005; Vanduffel, Hoedemakers & Dhaene, 2005; Ahčan, 2005), za logaritemsko eliptično porazdeljene slučajne spremenljivke pa (Valdez, Dhaene, Maj & Vanduffel, 2009). Tu le omenimo, da je tovrstna velika uporabnost komonotonije posledica dejstva, da kvantilno funkcijo $F_{S^c}^{-1}$ izračunamo precej enostavneje kot kvantilno funkcijo F_S^{-1}. Velja namreč naslednji izrek.

Izrek 5.3: *Naj bodo $X_1^c,\ldots,X_n^c$ komonotone slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$ in $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$. Linearno kombinirano kvantilno funkcijo $F_{S^c}^{-1(\beta)}(\alpha)$, definirano z enačbo* (4.2)*, za vsak $\alpha \in (0,1)$ in $\beta \in [0,1]$ izračunamo z enačbo*

$$F_{S^c}^{-1(\beta)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\beta)}(\alpha).$$

Dokaz: Glej (Dhaene et al., 2002b, str. 19, izrek 5). □

Opomba 5.1: Kot navajajo Dhaene, Goovaerts, Lundin in Vanduffel (2005, str. 15), nasprotno ne velja. Iz dejstva, da je $F_S^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(\alpha)$, ne sledi nujno, da so slučajne spremenljivke $X_1,\ldots,X_n$ komonotone. □

Kvantilno funkcijo $F_{S^c}^{-1}$ z izrekom 5.3 za $\beta = 1$ izračunamo kot vsoto robnih kvantilnih funkcij $F_{X_1}^{-1},\ldots,F_{X_n}^{-1}$, kar je bistveno preprosteje kot računanje porazdelitvene funkcije F_S in pripadajoče kvantilne funkcije F_S^{-1}. Če želimo, lahko porazdelitveno funkcijo F_{S^c} izračunamo z obratom $F_{S^c}^{-1}$, kar pa večkrat niti ni potrebno, denimo takrat, ko nas zanima le tvegana vrednost $\mathrm{VaR}_\alpha(S^c)$.

5.5 Kopule

5.5.1 Definicija kopule

V razdelku 4.3.5 smo primerjali dvorazsežne slučajne vektorje (X,Y) iz Fréchetovega prostora $\mathcal{R}_2(F_X,F_Y)$. Slučajni vektorji iz tega prostora imajo enako porazdeljene istoležne komponente, njihove dvorazsežne porazdelitvene funkcije pa so v splošnem različne. Analogno velja za n-razsežne slučajne vektorje, ki pripadajo istemu n-razsežnemu Fréchetovemu prostoru

$$\mathcal{R}_n(F_{X_1},\ldots,F_{X_n}) = \{(X_1,\ldots,X_n) : \mathbb{P}(X_i \le x) = F_{X_i}(x), i = 1,\ldots,n\}.$$

Naj bo $U \sim \mathrm{U}[0,1]$. Če je $F_{X_1} = \cdots = F_{X_n} = F_U$, so porazdelitvene funkcije slučajnih vektorjev iz $\mathcal{R}_n(F_U,\ldots,F_U)$ tako pomembne, da so dobile posebno ime.

Definicija 5.4: *Funkcija $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$ je n-razsežna kopula, če je večrazsežna porazdelitvena funkcija n slučajnih spremenljivk, ki so enakomerno porazdeljene na intervalu* $[0,1]$.

Nekatere lastnosti kopul so razvidne iz spodnje definicije, povzete po (Ibragimov, 2005, str. 17), ki je ekvivalentna definiciji 5.4.

Definicija 5.5: *Funkcija $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$ je n-razsežna kopula, če izpolnjuje naslednje pogoje:*

1. *$C(u_1, \ldots, u_n)$ je naraščajoča funkcija spremenljivke u_i, $i = 1, \ldots, n$.*
2. *$C(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) = 0$ za vse $u_i \in [0,1], i \neq k, k = 0,1, \ldots, n$.*
3. *$C(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1) = u_i$ za vsak $u_i \in [0,1], i = 1, \ldots, n$.*
4. *Za vse $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in [0,1]^n$, za katere je $a_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, je*

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+i_n} C(x_{1i_1}, \ldots, x_{ni_n}) \quad \geq \quad 0,$$

kjer je $x_{k1} = a_k$ in $x_{k2} = b_k$ za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Zaradi omejitve definicijskega območja funkcije C na n-razsežno enotno kocko vrednosti 0 in 1 opravljata analogni vlogi kot $-\infty$ in ∞ pri splošni porazdelitveni funkciji $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Prvi pogoj v definiciji 5.5 je potreben za vsako večrazsežno porazdelitveno funkcijo. Drugi pogoj je analogija pogoja $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ za splošne n-razsežne porazdelitvene funkcije. Tretji pogoj zagotavlja, da so robne porazdelitvene funkcije enake F_U za $U \sim \mathrm{U}[0,1]$. Pomen četrtega pogoja pa ni tako očiten. Zagotavlja nam, da je $\mathbb{P}(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq U_n \leq b_n) \geq 0$ za vsak n-razsežen kvader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Naj bo $n > 2$ in $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ slučajni vektor, katerega porazdelitvena funkcija je kopula $C(u_1, \ldots, u_n)$. Izberimo k, $2 \leq k \leq n-1$, komponent slučajnega vektorja $\mathbf{U}$, preostalih $n-k$ pa zbrišimo. Porazdelitvena funkcija tako dobljenega slučajnega vektorja je k-razsežna robna kopula kopule C, ki jo dobimo tako, da v $C(u_1, \ldots, u_n)$ spremenljivke, ki se nanašajo na $n-k$ zbrisanih komponent, zamenjamo z 1.

Definicija 5.6: *Kopula $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$ je absolutno zvezna, če ima gostoto verjetnosti. Če je kopula ustrezno parcialno odvedljiva, je njena gostota verjetnosti $c(u_1, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}$.*

Definicija 5.7: *Za n-razsežni kopuli C_1 in C_2 bomo rekli, da je C_1 manjša od C_2, kar bomo označili s $C_1 \preceq C_2$, če je $C_1(u_1, \ldots, u_n) \leq C_2(u_1, \ldots, u_n)$ za vse $u_1, \ldots, u_n \in [0,1]$.*

Množica vseh n-razsežnih kopul je z relacijo "$\preceq$" le delno urejena, saj poljubni dve kopuli nista primerljivi. Obstajajo pa družine kopul, ki so s to urejenostjo, imenovano konkordančna urejenost, popolnoma urejene.

Izrek 5.4: *Za vsako n-razsežno kopulo C velja neenačba*

$$W^n(u_1, \ldots, u_n) \leq C(u_1, \ldots, u_n) \leq M^n(u_1, \ldots, u_n),$$

kjer sta t. i. Fréchet-Hoeffdingova spodnja in zgornja meja enaki

$$\begin{aligned} W^n(u_1,\ldots,u_n) &= \max\{u_1+\cdots+u_n-n+1,0\}, \\ M^n(u_1,\ldots,u_n) &= \min\{u_1,\ldots,u_n\}. \end{aligned}$$

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 47, izrek 2.10.12 v povezavi z definicijo 2.10.6 na str. 45 in izrekom 2.10.11 na str. 47). □

M^n je kopula za vsak $n \geq 2$, medtem ko je W^n kopula le za $n = 2$ (McNeil et al., 2005, str. 200, primer 5.21). Kljub temu pa predstavlja najboljšo mogočo spodnjo mejo. Za vsak $n \geq 3$ in za vsak vektor $(u_1,\ldots,u_n) \in [0,1]^n$ sicer obstaja taka kopula C, da je $C(u_1,\ldots,u_n) = W^n(u_1,\ldots,u_n)$, vendar je odvisna od $(u_1,\ldots,u_n)$ (Nelsen, 2006, str. 48, izrek 2.10.13).

5.5.2 Lastnosti kopul

Malo podrobneje si oglejmo kopuli W^2 in M^2. Iz njune definicije lahko ugotovimo, da nista absolutno zvezni. Gostota verjetnosti kopule W^2 je enakomerno razmazana na diagonali $u_2 = 1 - u_1$ enotnega kvadrata, gostota verjetnosti kopule M^2 pa na diagonali $u_2 = u_1$. Kopula W^2 je porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(U, 1-U)$, kjer je $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, in povezuje nasprotno monotone slučajne spremenljivke. Kopula M^2 je porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U,U) in povezuje komonotone slučajne spremenljivke. Tudi za $n > 2$ je M^n porazdelitvena funkcija n-razsežnega slučajnega vektorja $(U,\ldots,U)$, povezuje pa slučajne spremenljivke, ki so komonotone v smislu definicije 5.3.

Oglejmo si še nekaj lastnosti kopul, pri čemer se bomo omejili le na dvorazsežne kopule.

Izrek 5.5: *Za vsako kopulo $C(u_1,u_2)$ velja:*

1. *Za poljubne $u_1,u_2,v_1,v_2 \in [0,1]$ je $|C(u_1,u_2)-C(v_1,v_2)| \leq |u_1-v_1|+|u_2-v_2|$, zato je $C(u_1,u_2)$ enakomerno zvezna funkcija.*
2. *Horizontalni presek $C(t,u_0)$ je naraščajoča in enakomerno zvezna funkcija iz $[0,1]$ v $[0,1]$ za vsak $u_0 \in [0,1]$.*
3. *Vertikalni presek $C(u_0,t)$ je naraščajoča in enakomerno zvezna funkcija iz $[0,1]$ v $[0,1]$ za vsak $u_0 \in [0,1]$.*
4. *Diagonalni presek $C(t,t)$ je naraščajoča in enakomerno zvezna funkcija iz $[0,1]$ v $[0,1]$.*
5. *Parcialni odvod $\frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2)$, če obstaja, je za vsak $u_2 \in [0,1]$ naraščajoča funkcija spremenljivke u_1, ki je definirana skoraj povsod na $[0,1]$. Za $u_1,u_2 \in [0,1]$, za katera je definirana, je $0 \leq \frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2) \leq 1$.*

6. *Parcialni odvod* $\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$*, če obstaja, je za vsak* $u_1 \in [0,1]$ *naraščajoča funkcija spremenljivke* u_2*, ki je definirana skoraj povsod na* $[0,1]$*. Za* $u_1, u_2 \in [0,1]$*, za katera je definirana, je* $0 \le \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \le 1$*.*

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 11, izrek 2.2.4, str. 12, posledica 2.2.6, in str. 13, izrek 2.2.7). □

Iz zadnjih dveh točk izreka 5.5 sledi, da parcialni odvod $\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$ obstaja skoraj povsod na $[0,1]^2$, seveda pa za absolutno zvezne kopule obstaja za vsak urejeni par $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.

5.5.3 Sklarov izrek

Pojem kopula je znan iz slovnice, kar je bil povod za uporabo istega pojma v matematiki (glej Sklar, 1996, str. 5), kjer kopule povezujejo večrazsežne porazdelitvene funkcije z njihovimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami, kot je razvidno iz naslednjega izjemno pomembnega izreka.

Izrek 5.6: *(Sklar, 1959) Naj bodo* $X_1, \dots, X_n$ *slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami* $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ *in skupno* n*-razsežno porazdelitveno funkcijo* $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$*. Potem obstaja taka* n*-razsežna kopula* $C_{X_1,\dots,X_n}(u_1, \dots, u_n)$*, da je*

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = C_{X_1,\dots,X_n}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \tag{5.5}$$

za vsak $x_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \dots, n$*. Če so vse porazdelitvene funkcije* $F_{X_i}(x_i)$ *zvezne, potem je taka kopula ena sama, izračunamo pa jo z enačbo*

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{X_1,\dots,X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)). \tag{5.6}$$

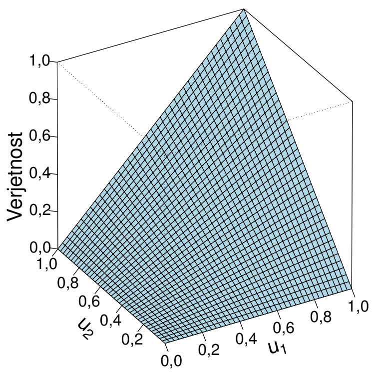
Velja tudi nasprotno. Če je $C_{X_1,\dots,X_n}(u_1, \dots, u_n)$ *kopula in so* $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$ *porazdelitvene funkcije, potem je funkcija* $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$*, ki je definirana z enačbo* (5.5)*,* n*-razsežna porazdelitvena funkcija z robnimi porazdelitvenimi funkcijami* $F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)$*.*

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 46, izrek 2.10.9, in str. 47, posledica 2.10.10, ter Sklar, 1996, str. 7). □

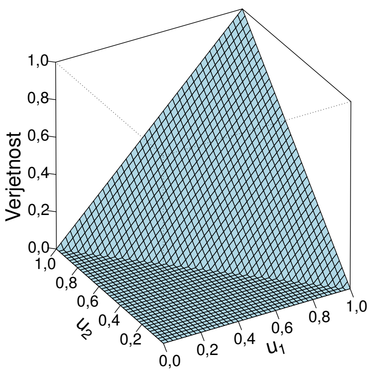
Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(X_1, \dots, X_n)$ z neodvisnimi komponentami je enaka produktu robnih porazdelitvenih funkcij. Iz Sklarovega izreka sledi, da jih povezuje t. i. kopula neodvisnosti $\Pi^n = u_1 u_2 \cdots u_n$, ki ima na $[0,1]^n$ gostoto verjetnosti konstantno 1. Če so slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ zvezne, je po Sklarovem izreku to edina taka kopula, sicer pa jih je lahko tudi več (glej npr. Genest & Nešlehová, 2007, str. 488, primer 5).

Na slikah 5.1, 5.2 in 5.3 so prikazane kopule Π^2, W^2 in M^2, na slikah 5.4, 5.5 in 5.6 pa njihove nivojnice. Zaradi tretjega pogoja v definiciji 5.5 lahko vrednosti kopule na posameznih nivojnicah preberemo na desnem robu slike.

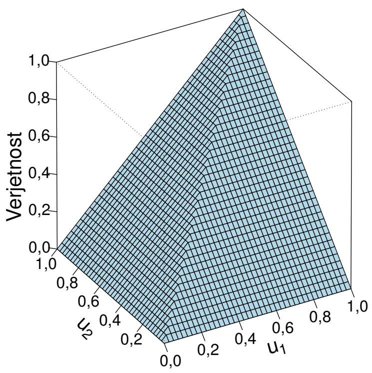
Slika 5.1: Kopula Π^2



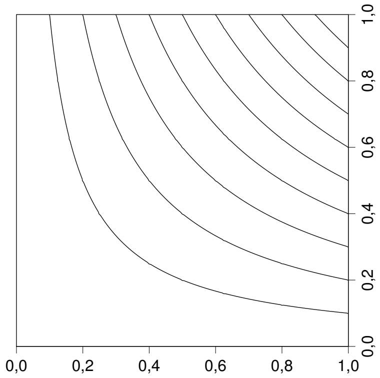
Slika 5.2: Kopula W^2



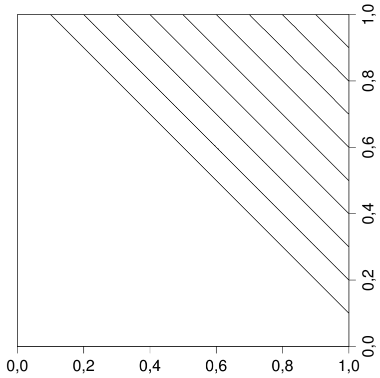
Slika 5.3: Kopula M^2



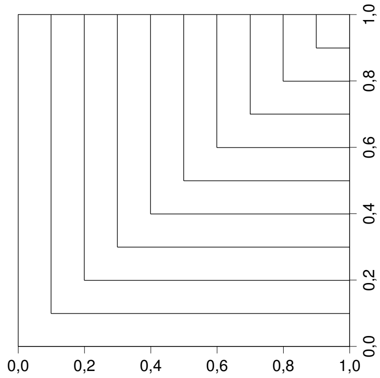
Slika 5.4: Nivojnice kopule Π^2



Slika 5.5: Nivojnice kopule W^2



Slika 5.6: Nivojnice kopule M^2



Naj bo kopula C, ki z enačbo (5.5) povezuje $F_{X_1,\ldots,X_n}$ z njenimi zveznimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$, absolutno zvezna. Potem gostoto verjetnosti $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ z robnimi gostotami verjetnosti $f_{X_1}(x_1) = F'_{X_1}(x_1),\ldots,f_{X_n}(x_n) = F'_{X_n}(x_n)$ povezuje enačba

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = c(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)) \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)\,, \tag{5.7}$$

kjer je $c(u_1,\ldots,u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1\cdots\partial u_n} C(u_1,\ldots,u_n)$ gostota verjetnosti kopule C. To pomeni, da odvisnost med slučajnimi spremenljivkami $X_1,\ldots,X_n$ dejansko določa gostota verjetnosti $c(u_1,\ldots,u_n)$, ki lokalno spreminja gostoto verjetnosti $\Pi_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$, kakršna bi bila, če bi bile slučajne spremenljivke $X_1,\ldots,X_n$ neodvisne.

V porazdelitveni funkciji $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ so zajete vse lastnosti slučajnega vektorja $(X_1,\dots,X_n)$, tako posameznih komponent $X_1,\dots,X_n$ kot tudi struktura odvisnosti med njimi. Sklarov izrek omogoča, da brez izgube informacij ločeno obravnavamo posamezne komponente slučajnega vektorja (robne porazdelitvene funkcije) in strukturo odvisnosti med njimi (kopulo). To se odraža tudi v dejstvu, da sta za poljubni različni komponetni X_i in X_j slučajnega vektorja $(X_1,\dots,X_n)$ z zveznimi komponentami, ki jih povezuje kopula C, Spearmanov korelacijski koeficient ranga $\rho_S(X_i,X_j)$ in Kendallov $\tau(X_i,X_j)$ odvisna le od kopule C. Še več. Odvisna sta le od dvorazsežne robne kopule $C_{ij}(u_i,u_j)$, ki jo dobimo tako, da v $C(u_1,\dots,u_n)$ vse u_k, $k \neq i$ in $k \neq j$, postavimo na 1. Spearmanov korelacijski koeficient ranga izračunamo z enačbo

$$\begin{aligned}\rho_S(X_i,X_j) &= 12\int_0^1\int_0^1 u_i u_j \,\mathrm{d}C_{ij}(u_i,u_j) - 3\\ &= 12\int_0^1\int_0^1 C_{ij}(u_i,u_j)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j - 3\end{aligned}$$

(glej Nelsen, 2006, str. 167, izrek 5.1.6), kjer v prvem integralu integriramo po meri, ki jo na kvadratu $[0,1]^2$ generira kopula C_{ij}. Kendallov $\tau(X_i,X_j)$ izračunamo z enačbama

$$\tau(X_i,X_j) = 4\int_0^1\int_0^1 C_{ij}(u_i,u_j)\mathrm{d}C_{ij}(u_i,u_j) - 1\,,$$

$$\int_0^1\int_0^1 C_{ij}(u_i,u_j)\mathrm{d}C_{ij}(u_i,u_j) = \frac{1}{2} - \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial C_{ij}(u_i,u_j)}{\partial u_i}\,\frac{\partial C_{ij}(u_i,u_j)}{\partial u_j}\,\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j$$

(glej Nelsen, 2006, str. 161, izrek 5.1.3, in str. 164, izrek 5.1.5).

Pearsonov korelacijski koeficient $\rho(X_i,X_j)$, za katerega smo že v razdelku 5.1 navedli, da ima kar nekaj pomanjkljivosti, pa ni odvisen le od kopule C_{ij}, ampak tudi od robnih porazdelitvenih funkcij F_{X_i} in F_{X_j}.

Naj bo $n > 2$, $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n) \in \mathcal{R}_n(F_{X_1},\dots,F_{X_n})$ in C kopula, ki z enačbo (5.5) povezuje porazdelitveno funkcijo $F_{X_1,\dots,X_n}$ z njenimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami. Izberimo k, $2 \le k \le n-1$, komponent slučajnega vektorja $\mathbf{X}$, preostalih $n-k$ pa zbrišimo. Porazdelitveno funkcijo tako dobljenega slučajnega vektorja z njenimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami z enačbo (5.5) povezuje k-razsežna robna kopula kopule C, ki jo dobimo tako, da v $C(u_1,\dots,u_n)$ spremenljivke, ki se nanašajo na $n-k$ zbrisanih komponent, zamenjamo z 1.

Definicija 5.8: *Slučajni spremenljivki X in Y sta istega tipa, če obstajata konstanti $a > 0$ in b, da je $Y \stackrel{d}{=} aX+b$. To pomeni, da je $F_Y(x) = F_X(\frac{x-b}{a})$ in $F_X(x) = F_Y(ax+b)$.*

Primer 5.2: Naj bo $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ in $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ter $\sigma_X, \sigma_Y > 0$. Naj bo $Z = aX + b$ za $a > 0$. Potem je $F_Z(x) = F_X(\frac{x-b}{a}) = \Phi(\frac{x-a\mu_X-b}{a\sigma_X})$, kar pomeni, da je $Z \sim \mathrm{N}(a\mu_X + b, (a\sigma_X)^2)$. Če izberemo $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ in $b = \mu_Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$, je $Y \stackrel{d}{=} Z$, kar pomeni, da sta X in Y istega tipa. □

Izrek 5.7: *Naj bo $(X, Y) \in R_2(F_X, F_Y)$ slučajni vektor z neznano strukturo odvisnosti. Naj bo $0 < \sigma_X, \sigma_Y < \infty$. Potem je množica vseh mogočih linearnih korelacijskih koeficientov $\rho(X, Y)$ interval $[\rho_{min}, \rho_{max}]$, kjer je $\rho_{min} < 0 < \rho_{max}$. Korelacijski koeficient ρ_{min} dosežemo natanko takrat, ko sta X in Y nasprotno monotoni, ρ_{max} pa natanko takrat, ko sta X in Y komonotoni slučajni spremenljivki. Spodnjo mejo $\rho_{min} = -1$ dosežemo natanko takrat, ko sta slučajni spremenljivki X in $-Y$ istega tipa. Zgornjo mejo $\rho_{max} = 1$ dosežemo natanko takrat, ko sta slučajni spremenljivki X in Y istega tipa.*

Dokaz: Glej (McNeil et al., 2005, str. 204, izrek 5.25). □

Primer 5.3: (Embrechts et al., 1999, str. 240) Naj bo $X \sim \mathrm{LN}(0,1)$ ter $Y \sim \mathrm{LN}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. Čeprav sta logaritma slučajnih spremenljivk X in Y istega tipa, X in Y nista. Za $Z = aX + b$ porazdelitvene funkcije $F_Z(x) = F_X(\frac{x-b}{a}) = \Phi(\log(\frac{x-b}{a}))$ z izbiro konstant $a > 0$ in b ne moremo izenačiti s $F_Y(x) = \Phi(\frac{\log x}{\sigma}) = \Phi(\log(x^{\frac{1}{\sigma}}))$, če je $\sigma \neq 1$.

Naj bo $U \sim \mathrm{N}(0,1)$. Nasprotno monotonima slučajnima spremenljivkama X in Y (oziroma komonotonima X in $-Y$) pripada $\rho_{min} = \rho(e^U, e^{-\sigma U}) = \frac{e^{-\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}}$, komonotonima pa $\rho_{max} = \rho(e^U, e^{\sigma U}) = \frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}}$. Če je $\sigma = 1$, sta slučajni spremenljivki X in Y enako porazdeljeni, torej sta tudi istega tipa, zato je $\rho_{max} = 1$, vendar pa je $\rho_{min} = -e^{-1}$. Možnosti, da bi dosegli $\rho_{min} = -1$, ni, saj slučajna spremenljivka $-Y$, ki v tem primeru lahko zavzame le negativne vrednosti, ne more biti enako porazdeljena kot $aX + b$, $a > 0$.

Ker je $\lim_{\sigma\to\infty} \rho_{min} = 0$ in $\lim_{\sigma\to\infty} \rho_{max} = 0$, se interval $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ s povečevanjem σ približuje točki 0. Konvergenca je zelo hitra. Dolžina intervala je za $\sigma = 4{,}2$ že manjša od 0,01. □

Primer 5.3 je poučen. Splošno znano dejstvo, da iz nekoreliranosti slučajnih spremenljivk ne sledi njuna neodvisnost, še dodatno poudari. Tudi če je linearni korelacijski koeficient poljubno blizu ničle, med ustreznima slučajnima spremenljivkama lahko obstaja največja stopnja odvisnosti – komonotonost. Še pomembnejše pa je spoznanje, da naloga, kako iz znanih robnih porazdelitvenih funkcij in predpisane korelacijske matrike določiti večrazsežno porazdelitveno funkcijo, ni vedno rešljiva. V okolju eliptično porazdeljenih večrazsežnih slučajnih vektorjev ima omenjena naloga natanko eno rešitev. Kot je razvidno iz primera 5.3, pa rešitev ne obstaja vedno. Mogoče je tudi, da je rešitev več (glej Embrechts et al., 1999, str. 239, primer 1), oziroma celo neskončno, kot navajajo Embrechts et al. (1999, str. 3).

Čeprav smo mero konkordance že definirali, zaradi naravne vloge kopul pri merjenju odvisnosti navedimo še prvotno definicijo (glej Scarsini, 1984, str. 205), prirejeno po (Lindskog, 2000, str. 15).

Definicija 5.9: *Naj bo κ neka numerična mera odvisnosti med zveznima slučajnima spremenljivkama X in Y, povezanima s kopulo C, kar bomo označevali s $\kappa_{X,Y}$ oziroma s κ_C. κ je mera konkordance, če izpolnjuje naslednje pogoje:*

1. *κ je definirana za vsak par zveznih slučajnih spremenljivk X in Y.*
2. $-1 \le \kappa_{X,Y} \le 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ *in* $\kappa_{X,-X} = -1$.
3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
4. *Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, potem je $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi^2} = 0$.*
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
6. *Če sta C_1 in C_2 kopuli ter je $C_1 \preceq C_2$, potem je $\kappa_{C_1} \le \kappa_{C_2}$.*
7. *Naj bo $\{(X_n, Y_n)\}$ zaporedje parov zveznih slučajnih spremenljivk, povezanih s kopulami C_n. Če zaporedje $\{C_n\}$ po točkah konvergira h kopuli C, potem je $\lim_{n\to\infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.*

Opomba 5.2: Definicija 5.9 zahteva zveznost slučajnih spremenljivk, definicija 5.1 pa je njena posplošitev, ki zveznosti ne zahteva. Zato zanjo tudi sedma zahteva definicije 5.9 ni smiselna. □

Izrek 5.8: *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, povezani s kopulo C. Potem sta Spearmanov korelacijski koeficient ranga $\rho_S(X,Y)$ in Kendallov $\tau(X,Y)$ meri konkordance v smislu definicije 5.9.*

Dokaz: Glej (Lindskog, 2000, str. 15, izrek 3.6). □

Izrek 5.9: *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, povezani s kopulo C. Potem za Spearmanov korelacijski koeficient ranga $\rho_S(X,Y)$ in Kendallov $\tau(X,Y)$ velja*

$$-1 \le 3\,\tau(X,Y) - 2\,\rho_S(X,Y) \le 1\,,$$

$$\frac{1+\rho_S(X,Y)}{2} \ge \left(\frac{1+\tau(X,Y)}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1-\rho_S(X,Y)}{2} \ge \left(\frac{1-\tau(X,Y)}{2}\right)^2.$$

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 175, izrek 5.1.10, in str. 176, izrek 5.1.11). □

S kopulami lahko povezujemo tudi večrazsežne diskretne porazdelitvene funkcije z njihovimi robnimi diskretnimi porazdelitvenimi funkcijami, vendar pa nam v takem primeru Sklarov izrek ne zagotavlja enoličnosti kopule. Iz tega lahko izvira kar nekaj težav, ki jih s primeri navajata Genest in Nešlehová (2007).

5.5.4 Konstruiranje kopul

V zelo redkih primerih lahko kopulo enostavno izluščimo iz večrazsežne porazdelitvene funkcije in ustreznih robnih porazdelitvenih funkcij. Tak primer je dvorazsežna Paretova kopula, ki si jo bomo ogledali v naslednjem primeru.

Primer 5.4: (Nadaljevanje primera 5.1 na strani 83) Enačbo (5.1) iz primera 5.1 preoblikujmo v

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x + y}\right)^{\alpha} = \left(\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) + \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right) - 1\right)^{-\alpha},$$

nato pa jo zaradi enačbe $1 - F_X(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}$ in analogne enačbe za drugo spremenljivko zapišimo kot

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \left((1 - F_X(x))^{-\frac{1}{\alpha}} + (1 - F_Y(y))^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha}.$$

Desno stran vstavimo v enačbo (5.2), ki jo za malenkost preuredimo. Dobimo enačbo

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) + F_Y(y) - 1 + \left((1 - F_X(x))^{-\frac{1}{\alpha}} + (1 - F_Y(y))^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha},$$

ki je za robni porazdelitveni funkciji iz primera 5.1 na strani 83 ekvivalentna enačbi (5.3), sicer pa je veliko bolj splošna. Če spreminjamo robni porazdelitveni funkciji $F_X(x)$ in $F_Y(y)$ na desni strani, se spreminja tudi dvorazsežna porazdelitvena funkcija na levi strani.

Zgornjo enačbo lahko zapišemo kot $F_{X,Y}(x, y) = C_{\alpha}^{Pa}(F_X(x), F_Y(y))$, kjer je

$$C_{\alpha}^{Pa}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \left((1 - u_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + (1 - u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} \tag{5.8}$$

dvorazsežna Paretova kopula. Kopulo z izhodiščno dvorazsežno Paretovo porazdelitvijo veže le še ime in pogoj $\alpha > 0$. □

Če na poljubno kopulo $C(u_1, u_2)$ gledamo kot na dvorazsežno porazdelitveno funkcijo, potem ji pripada dvorazsežna funkcija preživetja, ki jo izračunamo z enačbo (5.3). Upoštevajmo, da sta robni porazdelitveni funkciji enaki u_1 in u_2, pa dobimo funkcijo preživetja $\overline{C}(u_1, u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$, ki pa ni kopula. Oglejmo si še funkcijo $\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1$, za katero je

$$\hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = C(u_1, u_2) - u_1 - u_2 + 1 = \overline{C}(u_1, u_2) = \mathbb{P}(U_1 > u_1, U_2 > u_2) .$$

Hitro se lahko prepričamo, da $\hat{C}$ izpolnjuje vse pogoje iz definicije 5.5 za kopulo, kar sledi iz izpolnjenosti istih pogojev za kopulo C in prve točke izreka 5.5. Zato je smiselna naslednja definicija.

Definicija 5.10: *Za dano dvorazsežno kopulo C se kopula $\hat{C}$, definirana z enačbo*

$$\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1 ,$$

imenuje kopuli C pripadajoča kopula preživetja.

Pripadnost kopule preživetja $\hat{C}$ kopuli C je simetrična relacija, saj je kopula C kopula preživetja, ki pripada kopuli $\hat{C}$. Simetrija se kaže tudi v tem, da z upoštevanjem enačbe (5.5) iz Sklarovega izreka in enačbe (5.3) dobimo

$$\begin{aligned}
\hat{C}(\overline{F}_X(x), \overline{F}_Y(y)) &= C(1 - \overline{F}_X(x), 1 - \overline{F}_Y(y)) + \overline{F}_X(x) + \overline{F}_Y(y) - 1 \\
&= C(F_X(x), F_Y(y)) - F_X(x) - F_Y(y) + 1 \\
&= F_{X,Y}(x, y) - F_X(x) - F_Y(y) + 1 \\
&= \overline{F}_{X,Y}(x, y) .
\end{aligned}$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da kopula preživetja $\hat{C}$ povezuje dvorazsežno funkcijo preživetja in robni funkciji preživetja, tako kot kopula C povezuje dvorazsežno porazdelitveno funkcijo in robni porazdelitveni funkciji. To ugotovitev se da posplošiti tudi na več razsežnosti. Kot navajajo McNeil et al. (2005, str. 195), obstaja enačbi (5.5) analogna enačba

$$\overline{F}_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}_{X_1,\dots,X_n}(\overline{F}_{X_1}(x_1), \dots, \overline{F}_{X_n}(x_n)) ,$$

ki s kopulo preživetja $\hat{C}_{X_1,\dots,X_n}$ povezuje n-razsežno funkcijo preživetja

$$\overline{F}_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$$

in robne funkcije preživetja $\overline{F}_{x_1}, \dots, \overline{F}_{X_n}$.

Če na dano kopulo C gledamo kot na porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja $(U_1, \dots, U_n)$, potem je kopuli C pripadajoča kopula preživetja $\hat{C}$ porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(1 - U_1, \ldots, 1 - U_n)$.

Primer 5.5: Ni nujno, da se kopula $\hat{C}$ razlikuje od C. Tako je, denimo, $\hat{M}^2 = M^2$, $\hat{W}^2 = W^2$ in $\hat{\Pi}^2 = \Pi^2$. Paretovi kopuli C_α^{Pa}, definirani z enačbo (5.8), pripada Paretova kopula preživetja $\hat{C}_\alpha^{Pa}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha}$, ki se od kopule C_α^{Pa} razlikuje. Ker parameter $\alpha > 0$ lahko spreminjamo, govorimo kar o družini Paretovih kopul in pripadajoči družini Paretovih kopul preživetja. □

Na slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ lahko gledamo z zornega kota njegove večrazsežne porazdelitvene funkcije oziroma njegovih robnih porazdelitvenih funkcij in pripadajoče kopule C, lahko pa tudi z zornega kota njegove večrazsežne funkcije preživetja oziroma njegovih robnih funkcij preživetja in pripadajoče kopule preživetja $\hat{C}$, ki se v splošnem razlikuje od C. Po drugi strani pa lahko z dano kopulo C, v katero vstavimo porazdelitvene funkcije $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)$, sestavimo večrazsežno porazdelitveno funkcijo, če pa vanjo vstavimo robne funkcije preživetja $\overline{F}_{X_1}(x_1), \ldots, \overline{F}_{X_n}(x_n)$, sestavimo večrazsežno funkcijo preživetja, ki se v splošnem nanaša na drugo večrazsežno porazdelitveno funkcijo. Za obe konstrukciji pa sta korelacijski matriki rangov enaki, prav tako tudi korelacijski matriki Kendallovih τ, saj sta odvisni le od kopule C.

Konstruiranje kopul s Sklarovim izrekom

Kot smo videli v primeru 5.1 na strani 83, je konstruiranje dvorazsežne Paretove porazdelitvene funkcije enostavno, v splošnem pa ne vemo, če je na podoben način mogoče konstruirati dvorazsežno porazdelitveno funkcijo s predpisanima robnima porazdelitvama, še manj pa, kako je v več kot dveh razsežnostih. Sklarov izrek pa omogoča prav to za vsak $n \geq 2$. Ker lahko izbiramo različne kopule, lahko enostavno sestavljamo različne večrazsežne porazdelitve z istimi robnimi porazdelitvami. Seveda pa za tak postopek najprej potrebujemo ustrezen nabor kopul.

S Sklarovim izrekom lahko enostavno konstruiramo tudi nove kopule. Vzamemo poljubno zvezno porazdelitveno funkcijo $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ in strogo naraščajoče zvezne porazdelitvene funkcije $F_{X_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ter uporabimo enačbo (5.6). Tako je skonstruirana tudi izjemno pomembna normalna kopula.

Izrek 5.10: *Naj bodo $Z_1, \ldots, Z_n$ slučajne spremenljivke s skupno n-razsežno standardizirano normalno porazdelitveno funkcijo*

$$\Phi_\Sigma^n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^t \Sigma^{-1} \mathbf{z}} \, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n, \qquad (5.9)$$

kjer je $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$ *vektor stolpec,* Σ *pozitivno definitna korelacijska matrika z elementi* $\Sigma_{ij} = \rho(Z_i, Z_j)$*,* $|\Sigma|$ *pa njena determinanta. Potem je funkcija*

$$C_\Sigma^{Ga}(u_1, \ldots, u_n) = \Phi_\Sigma^n(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)) \tag{5.10}$$

kopula, imenovana n*-razsežna normalna kopula.*

Za poljubno izbrane porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ *imajo slučajne spremenljivke* $X_1 = F_{X_1}^{-1}(\Phi(Z_1)), \ldots, X_n = F_{X_n}^{-1}(\Phi(Z_n))$ *skupno porazdelitveno funkcijo*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = C_\Sigma^{Ga}(F_{X_1}^{-1}(\Phi(Z_1)), \ldots, F_{X_n}^{-1}(\Phi(Z_n)))$$

z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$*.*

Spearmanove korelacijske koeficiente ranga in Kendallove τ *za* $i, j = 1, \ldots, n$ *izračunamo z enačbama*

$$\rho_S(X_i, X_j) = \rho_S(Z_i, Z_j) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}\rho(Z_i, Z_j)\right), \tag{5.11}$$

$$\tau(X_i, X_j) = \tau(Z_i, Z_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho(Z_i, Z_j)). \tag{5.12}$$

Dokaz: Glej (Wang, 1998c, str. 890, izrek 2). □

Opomba 5.3: V izreku 5.10 ni enačbe za $\rho(X_i, X_j)$. Če bi obstajala funkcijska zveza $f(\rho(X_i, X_j), \rho(Z_i, Z_j), \rho_S(Z_i, Z_j), \tau(Z_i, Z_j)) = 0$, bi jo zaradi enačb (5.11) in (5.12) lahko zapisali kot $\tilde{f}(\rho(X_i, X_j), \rho(Z_i, Z_j)) = 0$. Taka od robnih porazdelitvenih funkcij neodvisna zveza bi za $i \neq j$ morala omogočiti poljuben $\rho(X_i, X_j) \in (-1,1)$, kar pa zaradi izreka 5.7 ni mogoče. □

Zaradi Sklarovega izreka je porazdelitev slučajnega vektorja z zveznimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami natanko določena z njimi in kopulo, ki povezuje njegove komponente. Zato na robne porazdelitvene funkcije in kopulo, ki povezuje komponente slučajnega vektorja, lahko gledamo kot na njegove atribute. V taki vlogi je kopula invariantna na strogo naraščajoče transformacije robnih porazdelitvenih funkcij.

Izrek 5.11: *Naj bo* $(X_1, \ldots, X_n)$ *slučajni vektor s komponentami, ki imajo zvezne porazdelitvene funkcije in jih povezuje kopula* C*. Če so* $T_1, \ldots, T_n$ *strogo naraščajoče funkcije, potem komponente slučajnega vektorja* $(T_1(X_1), \ldots, T_n(X_n))$ *povezuje kopula* C*.*

Dokaz: Glej (McNeil et al., 2005, str. 188, trditev 5.6). □

Primer 5.6: Naj bo $\mu \in \mathbb{R}^n$ in Σ pozitivno definitna kovariančna matrika z vektorjem $(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$ na diagonali. Slučajni vektor $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$ ima komponente $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, ki jih s funkcijami $T_i(x) = \frac{x-\mu_i}{\sigma_i}$ preslikajmo v slučajni vektor $\mathbf{Z}$ s komponentami $Z_i = T_i(X_i) = \frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i} \sim \mathrm{N}(0,1)$, $i = 1, \ldots, n$. Za dobljeni slučajni vektor velja $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{P})$, kjer je $\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}\Sigma\mathbf{D}^{-1}$ in $\mathbf{D}$ diagonalna matrika z vektorjem $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ na diagonali. Matrika $\mathbf{P}$ z elementi $P_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$, kar so linearni korelacijski koeficienti $\rho(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, je pozitivno definitna korelacijska matrika. Ker so vse funkcije $T_i(x)$ strogo naraščajoče, po izreku 5.11 komponente slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$ povezuje ista kopula C, ki povezuje komponente slučajnega vektorja $\mathbf{X}$.

Če bi v izreku 5.10 namesto n-razsežne standardizirane normalne porazdelitvene funkcije vzeli n-razsežno normalno porazdelitveno funkcijo $\Phi^n_{\mu,\Sigma}(\mathbf{x})$, definirano z enačbo (5.4), bi dobili kopulo, ki jo po istem izreku že dobimo s korelacijsko matriko $\mathbf{P}$. Skratka, dobili ne bi nič novega. □

Normalna kopula je uporabna, ker je fleksibilna. Kot je razvidno iz izreka 5.10, dopušča poljubne robne porazdelitve in poljubno pozitivno definitno korelacijsko matriko Σ, kar je pogoj za konsistentnost linearne korelacijske strukture in linearno neodvisnost slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$. Zaradi pomembnosti si normalno kopulo podrobneje oglejmo za $n = 2$. V tem primeru je korelacijska matrika Σ določena že z elementom $\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \rho$, kar bomo upoštevali pri oznaki in indeks Σ zamenjali z ρ. Zahteva, da je matrika Σ pozitivno definitna, je v tem primeru ekvivalentna zahtevi, da je $|\rho| < 1$.

Enačba (5.9) se poenostavi v

$$\Phi^2_\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{s^2-2\rho st+t^2}{2(1-\rho^2)}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,,$$

enačba (5.10) pa v $C^{Ga}_\rho(u_1, u_2) = \Phi^2_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$, kar pa raje zapišimo kot

$$C^{Ga}_\rho(u_1, u_2) = \Phi^2_\rho(\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \Phi^{-1}(u_1), \quad \xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)\,.$$

Upoštevajmo, da iz $\xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$ oziroma $u_i = \Phi(\xi_i)$ sledi $\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\xi_i} = \Phi'(\xi_i) = \phi(\xi_i)$ oziroma $\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}u_i} = \frac{1}{\phi(\xi_i)} = \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{1}{2}\xi_i^2}$, $i = 1,2$, in izračunajmo gostoto verjetnosti normalne kopule. Dobimo

$$c^{Ga}_\rho(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C^{Ga}_\rho(u_1, u_2)}{\partial u_1\,\partial u_2} = \frac{\partial^2 \Phi^2_\rho(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1\,\partial \xi_2}\,\frac{1}{\phi(\xi_1)\,\phi(\xi_2)} \tag{5.13}$$

oziroma

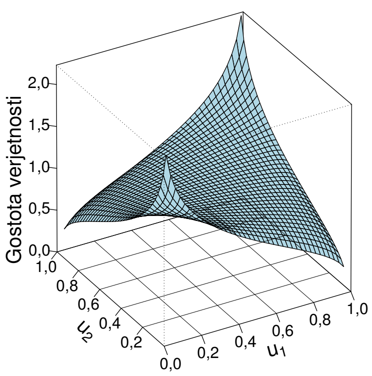
$$c_\rho^{Ga}(u_1,u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{\xi_1^2-2\rho\xi_1\xi_2+\xi_2^2}{2(1-\rho^2)}}\, e^{\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{\frac{2\rho\xi_1\xi_2-\rho^2(\xi_1^2+\xi_2^2)}{2(1-\rho^2)}}\,, \tag{5.14}$$

kjer je $\xi_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ in $\xi_2 = \Phi^{-1}(u_2)$.

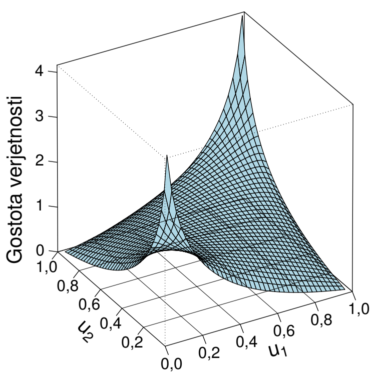
Normalna kopula je absolutno zvezna kopula. Če dopustimo tudi pozitivno semidefinitne korelacijske matrike Σ, za $n = 2$ dopustimo tudi skrajni vrednosti $\rho = -1$ in $\rho = 1$, s tem pa izgubimo absolutno zveznost. V prvem primeru namreč dobimo kopulo W^2, ki povezuje nasprotno monotone slučajne spremenljivke, v drugem pa kopulo M^2, ki povezuje komonotone slučajne spremenljivke. Tako se s spreminjanjem linearnega korelacijskega koeficienta ρ od -1 do 1 lahko zvezno premikamo od ene skrajne oblike odvisnosti do druge, vmes pa za $\rho = 0$ dobimo tudi kopulo neodvisnosti Π^2.

Gostota verjetnosti dvorazsežne normalne kopule za nekaj korelacijskih koeficientov je razvidna s slik 5.7, 5.8 in 5.9.

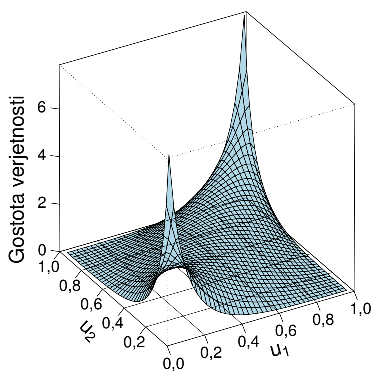
Slika 5.7: Gostota verjetnosti kopule $C_{1/4}^{Ga}$



Slika 5.8: Gostota verjetnosti kopule $C_{1/2}^{Ga}$



Slika 5.9: Gostota verjetnosti kopule $C_{3/4}^{Ga}$



Na analogen način, kot je uporabljen v izreku 5.10, tudi za vsako n-razsežno Studentovo porazdelitveno funkcijo lahko sestavimo kopulo. Tako, kot smo videli v primeru 5.6, tudi v tem primeru dobljena kopula ni odvisna od parametra μ. Odvisna je le od disperzijske matrike Σ oziroma od matrike $\mathbf{P}$ z elementi $P_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $i,j = 1,\ldots,n$ (Embrechts et al., 2003, str. 26). Če je $\nu > 2$, je $\mathbf{P}$ korelacijska matrika, sicer pa psevdokorelacijska matrika. V obeh primerih lahko vzamemo $\mu = \mathbf{0}$ in z n-razsežno Studentovo porazdelitveno funkcijo

$$t_{\nu,\mathbf{P}}^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(\nu\pi)^n|\mathbf{P}|}}\,\frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\left(1+\frac{\mathbf{z}^t\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n$$

ter enorazsežnimi Studentovimi porazdelitvenimi funkcijami

$$t_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{d}z$$

dobimo n-razsežno Studentovo kopulo

$$C^t_{\nu,\mathbf{P}}(u_1,\dots,u_n) = t^n_{\nu,\mathbf{P}}(t_\nu^{-1}(u_1),\dots,t_\nu^{-1}(u_n)) \,.$$

Tudi pri Studentovi kopuli bomo v posebnem primeru, ko je $n = 2$, v oznaki kopule matriko $\mathbf{P}$ zamenjali z ρ.

Analogno kot pri normalni kopuli izračunajmo gostoto verjetnosti dvorazsežne Studentove kopule $C^t_{\nu,\rho}$. Dobimo

$$c^t_{\nu,\rho}(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 C^t_{\nu,\rho}(u_1,u_2)}{\partial u_1\, \partial u_2} = \frac{\partial^2 t^2_{\nu,\rho}(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2} \frac{1}{t'_\nu(\xi_1)\, t'_\nu(\xi_2)}$$

oziroma

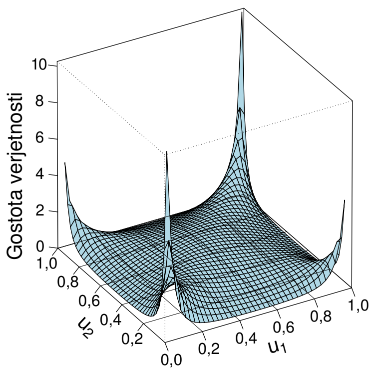
$$c^t_{\nu,\rho}(u_1,u_2) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\sqrt{1-\rho^2}\,\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^2} \left(1 + \frac{\xi_1^2 - 2\rho\,\xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2}{\nu\,(1-\rho^2)}\right)\left[\left(1+\frac{\xi_1^2}{\nu}\right)\left(1+\frac{\xi_2^2}{\nu}\right)\right]^{\frac{\nu+1}{2}},$$

kjer je $\xi_1 = t_\nu^{-1}(u_1)$ in $\xi_2 = t_\nu^{-1}(u_2)$.

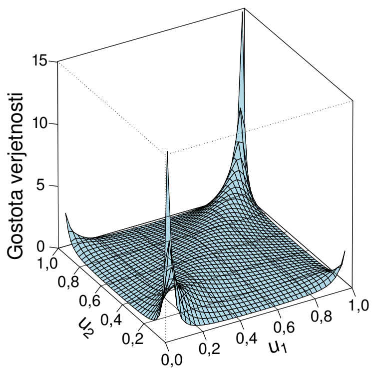
S Studentovo kopulo povezane slučajne spremenljivke za $\nu < \infty$ ne morejo biti neodvisne, tudi če so nekorelirane (McNeil et al., 2005, str. 191 in str. 74, lema 3.5). Ko pa gre ν proti neskončnosti, Studentova kopula konvergira k normalni kopuli (Demarta & McNeil, 2005, str. 3).

Gostota verjetnosti dvorazsežne Studentove kopule za nekaj korelacijskih koeficientov je razvidna s slik 5.10, 5.11 in 5.12.

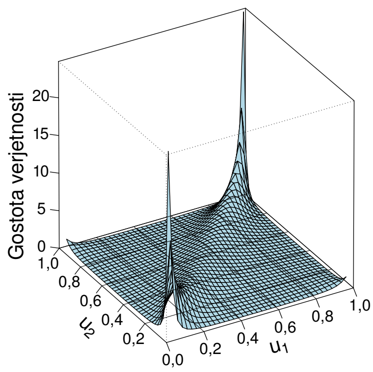
Slika 5.10: Gostota verjetnosti kopule $C^t_{1,1/4}$



Slika 5.11: Gostota verjetnosti kopule $C^t_{1,1/2}$



Slika 5.12: Gostota verjetnosti kopule $C^t_{1,3/4}$



Arhimedske kopule

V praksi konstruiranje kopul z enačbo (5.6) iz Sklarovega izreka, v kateri nastopajo inverzne porazdelitvene funkcije, ni ravno preprosto. Dobljeni izrazi za kopule so prezapleteni za nadaljno analitično obravnavo. Zato je bilo razvitih več različnih metod za konstruiranje kopul, ki jih podrobno obravnava Nelsen (2006). Na kratko si oglejmo le konstruiranje dvorazsežnih arhimedskih kopul.

Izrek 5.12: *Naj bo* $\phi\colon [0,1] \to [0,\infty]$ *zvezna in strogo padajoča funkcija, za katero je* $\phi(1) = 0$*, in* $\phi^{[-1]}\colon [0,\infty] \to [0,1]$ *njena psevdoinverzna funkcija, definirana s*

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & \text{za } 0 \le t \le \phi(0), \\ 0 & \text{za } \phi(0) \le t \le \infty. \end{cases}$$

Funkcija $C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$ *je kopula natanko takrat, ko je* ϕ *konveksna.*

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 111, izrek 4.1.4). □

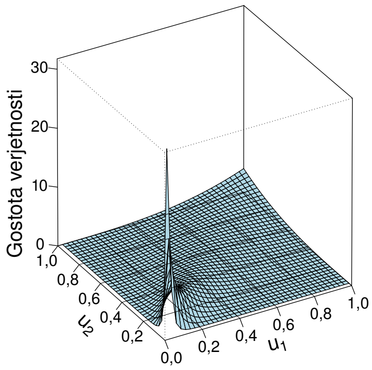
Z vsako zvezno in strogo padajočo konveksno funkcijo $\phi\colon [0,1] \to [0,\infty]$, za katero je $\phi(1) = 0$, lahko generiramo arhimedsko kopulo, zaradi česar funkciji ϕ rečemo generator arhimedskih kopul. Če je $\phi(0) = \infty$, potem je $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$, za generator ϕ pa rečemo, da je strog. Ker je generatorjev neskončno, je tudi znanih arhimedskih družin kopul veliko. Iz seznama, ki ga navaja Nelsen (2006, str. 116), navedimo tri:

- Claytonova kopula $C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = \max\{(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0\}$, $\theta \in (-1,\infty] \setminus \{0\}$, ima generator $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, ki je za $\theta > 0$ strog.
- Frankova kopula $C_\theta^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta}\log(1 + \frac{(e^{-\theta u_1}-1)(e^{-\theta u_2}-1)}{e^{-\theta}-1})$, $\theta \neq 0$, ima strog generator $\phi(t) = -\log\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$.
- Gumbelova kopula $C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = e^{-((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta)^{1/\theta}}$, $\theta \ge 1$, ima strog generator $\phi(t) = (-\log t)^\theta$.

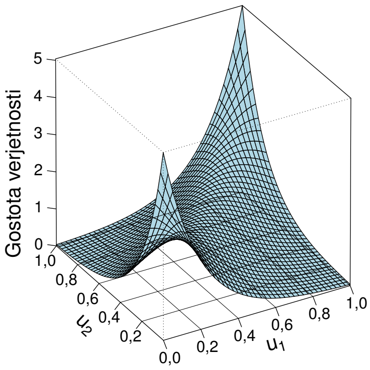
Včasih naletimo na različne definicije. Tako, denimo, je Claytonova kopula v (Denuit et al., 2005, str. 205) definirana s $C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = ({u_1}^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$ za $\theta > 0$, kar je ekvivalentno že navedeni definiciji, če se omejimo na $\theta > 0$. Isto družino kopul lahko srečamo tudi pod različnimi imeni. Tako se Cook-Johnsonova družina $C(u_1, u_2) = ({u_1}^{-1/\theta} + u_2^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}$, $\theta > 0$, ne razlikuje od Claytonove družine pri pogoju $\theta > 0$, le parameter θ moramo preslikati v $\frac{1}{\theta}$. Še več, Cook-Johnsonovo družino kopul smo spoznali že v primeru 5.5 na strani 101 kot družino Paretovih kopul preživetja.

Na slikah 5.13, 5.14 in 5.15 vidimo gostote verjetnosti za Claytonovo, Frankovo in Gumbelovo kopulo.

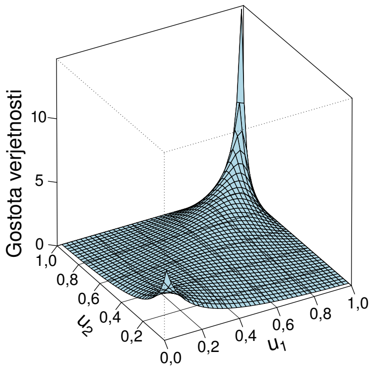
Slika 5.13: Gostota verjetnosti kopule C_3^{Cl}



Slika 5.14: Gostota verjetnosti kopule C_5^{Fr}



Slika 5.15: Gostota verjetnosti kopule C_2^{Gu}



Med arhimedske kopule sodi tudi kopula neodvisnosti Π^2, ki jo dobimo s strogim generatorjem $\phi(t) = -\log t$ za $t \in [0,1]$, prav tako kopula W^2 z generatorjem $\phi(t) = 1 - t$ za $t \in [0,1]$, kopula M^2 pa ni arhimedska.

Navedimo še, kako za arhimedske kopule iz znanega generatorja ϕ lahko izračunamo Kendallov τ.

Izrek 5.13: *Naj kopula C povezuje komponenti slučajnega vektorja (X_1, X_2) z zveznima robnima porazdelitvenima funkcijama. Če je C arhimedska kopula, generirana s funkcijo ϕ, potem je $\tau(X_1, X_2) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,\mathrm{d}t$.*

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 163, posledica 5.1.4). □

Omenimo le še, da so arhimedske kopule dobile ime zato, ker imajo lastnost, ki spominja na lastnost realnih števil, za katera velja Arhimedov aksiom, po katerem za poljubni pozitivni realni števili $a < b$ obstaja tako naravno število n, da je $na > b$. V podrobnosti, ki si jih lahko ogledamo v (Nelsen, 2006, str. 115 in 122), pa se tu ne bomo spuščali. Prav tako le omenimo, da je mogoče generirati n-razsežne arhimedske kopule tudi za $n > 2$. Več o tem najdemo npr. v (Denuit et al., 2005, str. 229) ali (Nelsen, 2006, str. 151).

5.5.5 Potrebni in zadostni pogoji za večrazsežno porazdelitveno funkcijo z danimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami

V tem razdelku sta navedena dva izreka, ki sta ključnega pomena za znanstveni prispevek avtorja, objavljen v članku (Komelj & Perman, 2010) in predstavljen v naslednjem razdelku. Čeprav se nanju ne bomo neposredno sklicevali, ju navajamo zato, ker sta temelj za rezultate iz omenjenega članka. Določata namreč potrebne in zadostne pogoje za absolutno zvezne večrazsežne kopule in porazdelitvene funkcije z danimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami. To je omogočilo konstruiranje takih novih kopul, da za ustrezne slučajne vektorje večrazsežne karakteristične funkcije lahko razmeroma enostavno izračunamo iz robnih karakterističnih funkcij.

Naj bodo $X_1, \dots, X_n$ slučajne spremenljivke, $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ njihove porazdelitvene funkcije in $\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n}$ pripadajoče porazdelitve. Predpostavimo, da ima porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ gostoto verjetnosti $g_{\mathbf{X}}$ glede na produktno mero $\Pi_{i=1}^n \mu_{X_i}$ v smislu, da je za vsako Borelovo množico $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A g_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \mu_{X_i}(\mathrm{d}x_i)\,.$$

Predpostavimo še, da ima slučajni vektor $\mathbf{X}$ gostoto verjetnosti $f_{\mathbf{X}}$ glede na Lebesgueovo mero na $\mathbb{R}^n$.

Izrek 5.14: *(De la Peña et al., 2006) Naj bodo $V_1, \dots, V_n$ na $[0,1]$ enakomerno porazdeljene neodvisne slučajne spremenljivke. Funkcija $C\colon [0,1]^n \to [0,1]$ je absolutno zvezna n-razsežna kopula natanko takrat, ko obstajajo take funkcije $\tilde{g}_{i_1,\dots,i_c}\colon \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_c \le n$, $c = 2, \dots, n$, ki izpolnjujejo naslednje pogoje:*

C1 (integrabilnost):

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |\tilde{g}_{i_1,\dots,i_c}(t_{i_1}, \dots, t_{i_c})|\, \mathrm{d}t_{i_1} \cdots \mathrm{d}t_{i_c} < \infty\,,$$

C2 (degeneriranost):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\tilde{g}_{i_1,\dots,i_c}(V_{i_1}, \dots, V_{i_{k-1}}, V_{i_k}, V_{i_{k+1}}, \dots, V_{i_c}) | V_{i_1}, \dots, V_{i_{k-1}}, V_{i_{k+1}}, \dots, V_{i_c}\Big] \\ = \int_0^1 \tilde{g}_{i_1,\dots,i_c}(V_{i_1}, \dots, V_{i_{k-1}}, t_{i_k}, V_{i_{k+1}}, \dots, V_{i_c})\, \mathrm{d}t_{i_k} = 0 \quad (a.s.),\end{aligned}$$

$1 \le i_1 < \cdots < i_c \le n$, $k = 1, \dots, c$, $c = 2, \dots, n$,

C3 (pozitivna definitnost):

$$\tilde{U}_n(V_1, \dots, V_n) \equiv \sum_{c=2}^n \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_c \le n} \tilde{g}_{i_1,\dots,i_c}(V_{i_1}, \dots, V_{i_c}) \ge -1 \quad (a.s.)\,,$$

da je

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \Big(1 + \tilde{U}_n(t_1, \dots, t_n)\Big) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}t_i\,.$$

Dokaz: Glej (De la Peña et al., 2006, str. 189, izrek 3.2). □

Izrek 5.15: *(De la Peña et al., 2006) Funkcija* $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *je* n*-razsežna porazdelitvena funkcija z enorazsežnimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami* $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$*, absolutno zvezna glede na produktno mero* $\Pi_{i=1}^n \mu_{X_i}$*, natanko takrat, ko obstajajo take funkcije* $\tilde{g}_{i_1,\ldots,i_c}\colon \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}$*,* $1 \le i_1 < \cdots < i_c \le n$*,* $c = 2, \ldots, n$*, ki izpolnjujejo pogoje C1–C3 iz izreka 5.14, da je*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^{F_{X_1}(x_1)} \cdots \int_0^{F_{X_n}(x_n)} \left(1 + \tilde{U}_n(t_1, \ldots, t_n)\right) \prod_{i=1}^n \mathrm{d}t_i\,.$$

Dokaz: Glej (De la Peña et al., 2006, str. 189, izrek 3.3). □

De la Peña et al. (2006) so zagotovili učinkovito metodo za konstruiranje večrazsežnih kopul s konstrukcijo izraza $1 + \tilde{U}_n(t_1, \ldots, t_n)$, ki jo bomo uporabili v naslednjem razdelku. Hkrati so, temelječ na Sklarovem izreku, zagotovili tudi učinkovito metodo za konstruiranje večrazsežnih porazdelitvenih funkcij s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami.

Naj bo $n = 2$ in $\tilde{g}_{1,2}(x_1, x_2) = \theta c(x_1, x_2)$, kjer je θ konstanta, $c(x_1, x_2)$ pa zvezna funkcija na enotnem kvadratu. Če je $\int_0^1 c(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \int_0^1 c(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 = 0$ in $1 + \theta c(x_1, x_2) \ge 0$ za $0 \le x_1, x_2 \le 1$, potem po izreku 5.15 dobimo dvorazsežno porazdelitveno funkcijo s pripadajočo gostoto verjetnosti

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \left(1 + \theta c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))\right),$$

kakršno so študirali Rüschendorf (1985) ter Long in Krzysztofowicz (1995). Iz izreka 5.15 sledi še, da za poljubno dvorazsežno gostoto verjetnosti $f_{\mathbf{X}}$ obstaja enolično določena funkcija $\theta c(x_1, x_2)$, za katero velja zgornja enačba.

Opomba 5.4: V (De la Peña et al., 2006) imata funkciji $\tilde{g}$ and g različna pomena. V naslednjem razdelku bomo brez tveganja dvoumnosti zaradi poenostavitve zapisa namesto $\tilde{g}$ uporabljali g. □

5.5.6 Splošen razred večrazsežnih porazdelitvenih funkcij

V tem razdelku si bomo ogledali, kako lahko na podlagi izrekov 5.14 in 5.15 konstruiramo poseben razred večrazsežnih kopul in večrazsežnih porazdelitvenih funkcij slučajnih vektorjev $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Vsi rezultati, predstavljeni v tem razdelku, so objavljeni v (Komelj & Perman, 2010).

Kot smo videli v prejšnjem razdelku, je vsaka absolutno zvezna n-razsežna kopula natanko določena s funkcijo $\tilde{U}_n(t_1, \ldots, t_n)$. V tem razdelku se bomo omejili na kopule, za katere lahko spremenljivke ločimo, in z njimi povezane večrazsežne porazdelitvene funkcije. Zato ne bomo potrebovali celotne moči izrekov 5.14 in 5.15, ki ju bomo uporabili le za poseben primer. Parameter c iz omenjenih izrekov bomo omejili na $c = 2$, tako da bo $g_{i_1,i_2,\ldots,i_c} = 0$ za $c = 3,\ldots,n$, ter predpostavili, da je $g_{i_1,i_2}(t_{i_1},t_{i_2}) = \theta_{i_1,i_2}\, g_{i_1}(t_{i_1})\, g_{i_2}(t_{i_2})$, kjer sta $g_{i_1}(t_{i_1})$ in $g_{i_2}(t_{i_2})$ zvezni funkciji, θ_{i_1,i_2} pa konstanta. Pri takih omejitvah bomo uspeli izračunati večrazsežno karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{X}}$ slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ iz robnih karakterističnih funkcij $\varphi_{X_1},\ldots,\varphi_{X_n}$. To pa nam bo omogočilo izračun porazdelitvene funkcije vsote koreliranih slučajnih spremenljivk z enorazsežno Fourierovo transformacijo, kar si bomo ogledali v razdelku 7.6.

V naslednjih dveh definicijah bomo združili definicije in pogoje, da jih ne bomo ponavljali v vsakem izreku posebej, ampak se bomo nanje raje sklicevali.

Definicija 5.11: *Za dani zaporedji realnih števil $a_1,\ldots,a_n$ in $b_1,\ldots,b_n$ naj bo*

$$M_{ij}^a = \max\{a_i a_j, b_i b_j\}\,, \quad M_{ij}^b = \max\{a_i b_j, b_i a_j\} \quad \textit{in} \quad M_{ij} = \max\{M_{ij}^a, M_{ij}^b\}\,.$$

Definirajmo še

$$M^a = \sum_{1\le i<j\le n} M_{ij}^a\,, \quad M^b = \sum_{1\le i<j\le n} M_{ij}^b \quad \textit{in} \quad M = \sum_{1\le i<j\le n} M_{ij}\,. \tag{5.15}$$

Definicija 5.12: *Naj bo $g_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, zvezna funkcija, ki ni identično nič, za katero je $\int_0^1 g_i(t)\mathrm{d}t = 0$. Naj bo $G_i(t) = \int_0^t g_i(u)\mathrm{d}u$, $a_i = -\min_{0\le t\le 1} g_i(t)$, $b_i = \max_{0\le t\le 1} g_i(t)$ in M^a, M^b ter M, kot je definirano z enačbo* (5.15) *v definiciji 5.11. Naj vse konstante θ_{ij}, $1 \le i < j \le n$, ležijo na enem od intervalov $[-\frac{1}{M},\frac{1}{M}]$, $[-\frac{1}{M^a},0]$ in $[0,\frac{1}{M^b}]$.*

Opomba 5.5: Za $n = 2$ je predpostavka, da konstanta θ_{12} leži na enem od treh navedenih intervalov, ekvivalentna predpostavki $\theta_{12} \in [-\frac{1}{M^a},\frac{1}{M^b}]$. □

Izrek 5.16: *Naj bodo izpolnjeni pogoji iz definicije 5.12. Potem je*

$$c(u_1,\ldots,u_n) = 1 + \sum_{1\le i<j\le n} \theta_{ij}\, g_i(u_i)\, g_j(u_j) \tag{5.16}$$

gostota verjetnosti absolutno zvezne n-razsežne kopule

$$C(u_1,\ldots,u_n) = \prod_{i=1}^n u_i + \sum_{1\le i<j\le n} \theta_{ij}\, G_i(u_i)\, G_j(u_j) \prod_{\substack{k=1\\ k\notin\{i,j\}}}^n u_k \tag{5.17}$$

in za absolutno zvezne slučajne spremenljivke $X_1,\ldots,X_n$ s porazdelitvenimi funk-

cijami $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ *je*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \left(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, g_i\left(F_{X_i}(x_i)\right) g_j\left(F_{X_j}(x_j)\right)\right)$$

n*-razsežna gostota verjetnosti, ki pripada absolutno zvezni* n*-razsežni porazdelitveni funkciji*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, G_i\left(F_{X_i}(x_i)\right) G_j\left(F_{X_j}(x_j)\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} F_{X_k}(x_k)$$

z enorazsežnimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$.

Dokaz: Glej (Komelj & Perman, 2010, str. 139, izrek 4). □

Posledica 5.1: *Naj bo* $n = 2$ *in naj bodo izpolnjeni pogoji iz definicije 5.12. Potem je*

$$c(u_1, u_2) = 1 + \theta_{12}\, g_1(u_1)\, g_2(u_2) \tag{5.18}$$

gostota verjetnosti absolutno zvezne dvorazsežne kopule

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta_{12}\, G_1(u_1)\, G_2(u_2) \tag{5.19}$$

in za absolutno zvezni slučajni spremenljivki X_1 *in* X_2 *s porazdelitvenima funkcijama* F_{X_1} *in* F_{X_2} *je*

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, (1 + \theta_{12}\, g_1(F_{X_1}(x_1))\, g_2(F_{X_2}(x_2)))$$

dvorazsežna gostota verjetnosti, ki pripada absolutno zvezni dvorazsežni porazdelitveni funkciji

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) + \theta_{12}\, G_1(F_{X_1}(x_1))\, G_2(F_{X_2}(x_2))$$

z robnima porazdelitvenima funkcijama F_{X_1} *in* F_{X_2}.

Dokaz: Glej (Komelj & Perman, 2010, str. 140, posledica 1). □

Opomba 5.6: Z enačbo (5.17) za $n > 2$ dobimo nove kopule, medtem ko za $n = 2$ oziroma z enačbo (5.19) dobimo že znane dvorazsežne kopule, zapisane malo drugače kot

$$C(u, v) = uv + f(u)g(v). \tag{5.20}$$

Take kopule, kjer sta f in g absolutno zvezni funkciji, ki sta definirani na enotnem intervalu in imata omejena odvoda, kjer obstajata, sta študirala Rodríguez-

Lallena in Úbeda-Flores (2004). Ugotovila sta, da je z enačbo (5.20) definirana funkcija $C(u,v)$ absolutno zvezna kopula, če je $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ in $\min\{\alpha\delta, \beta\gamma\} \geq -1$. Pri tem je $\alpha = \inf\{f'(u) : u \in \mathcal{A}\} < 0$, $\beta = \sup\{f'(u) : u \in \mathcal{A}\} > 0$, kjer je $\mathcal{A} = \{u \in [0,1] : f'(u) \text{ obstaja}\}$, in $\gamma = \inf\{g'(v) : v \in \mathcal{B}\} < 0$ ter $\delta = \sup\{g'(v) : v \in \mathcal{B}\} > 0$, kjer je $\mathcal{B} = \{v \in [0,1] : g'(v) \text{ obstaja}\}$ (Rodríguez-Lallena & Úbeda-Flores, 2004, str. 317, izrek 2.3, in str. 318, posledica 2.4). □

Interval $[-\frac{1}{M^a}, \frac{1}{M^b}]$ za θ_{12} je najširši dopustni interval za $n = 2$, medtem ko so za $n > 2$ intervali $[-\frac{1}{M^a}, 0]$, $[0, \frac{1}{M^b}]$ in $[-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$ najširši za nepozitivne, nenegativne in različno predznačene konstante θ_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$. Brez težav lahko najdemo primere, ko je $M \neq M^a$, $M \neq M^b$ in $M^a \neq M^b$. Ker so vse tri konstante M, M^a in M^b vsote $n(n-1)/2$ členov, se z večanjem n dopustni intervali zelo hitro ožajo, kar omejuje praktično uporabo izreka 5.16 za večje n. Kot bomo videli, so linearni korelacijski koeficienti $\rho(X_i, X_j)$ linearno odvisni od konstant θ_{ij}. V posebnih primerih je smiselno dodatno omejiti kakšnega od θ_{ij}, kar omogoča razširiti meje za preostale ob hkratnem izpolnjevanju pogoja C3 iz izreka 5.16. To je tudi razlog za ločeno obravnavo treh dopustnih intervalov v izreku 5.16 in izrekih, ki sledijo. Na opisani način lahko dosežemo večje ali manjše linearne korelacijske koeficiente, ne moremo pa ekstremnih vrednosti doseči hkrati.

Definicija 5.13: *Naj bo g zvezna funkcija na enotnem intervalu, ki ni identično nič, in $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$. Naj bo $G(x) = \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$, $b = \max_{0 \leq x \leq 1} g(x)$ in*

$$h(x) = x - \frac{G(x)}{b}.$$

Opomba 5.7: Funkcija h je konstruirana tako, da izpolnjuje vse pogoje iz definicije 4.4, zato je distorzijska funkcija. Za dano porazdelitveno funkcijo F_Z je $h \circ F_Z$ porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke, ki jo bomo označili z $\tilde{Z}$,

$$f_{\tilde{Z}}(x) = \left(1 - \frac{g\left(F_Z(x)\right)}{b}\right) f_Z(x) \tag{5.21}$$

pa je njena gostota verjetnosti. □

Naslednji izrek omogoča konstruiranje večrazsežne karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ iz robnih karakterističnih funkcij.

Izrek 5.17: *Naj bodo izpolnjeni pogoji iz definicije 5.12, funkcije $h_1, \ldots, h_n$ definirane z $G_1, \ldots, G_n$ tako kot v definiciji 5.13 in $X_1, \ldots, X_n$ absolutno zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$. Naj bodo $F_{\tilde{X}_1} = h_1 \circ F_{X_1}, \ldots, F_{\tilde{X}_n} = h_n \circ F_{X_n}$ porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ ter $\Delta f_i(x) = f_{X_i}(x) - f_{\tilde{X}_i}(x)$ in $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{X_i}(t) - \varphi_{\tilde{X}_i}(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Potem velja:*

(a) *Funkcija* $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$*, definirana s*

$$\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, b_i\, b_j\, \Delta f_i(x_i)\, \Delta f_j(x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} f_{X_k}(x_k), \tag{5.22}$$

je skupna n*-razsežna gostota verjetnosti z robnimi gostotami verjetnosti* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$*.*

(b) *Funkcija* $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)$*, definirana s*

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, b_i\, b_j\, \Delta \varphi_i(t_i)\, \Delta \varphi_j(t_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} \varphi_{X_k}(t_k), \tag{5.23}$$

je skupna n*-razsežna karakteristična funkcija z robnimi karakterističnimi funkcijami* $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$*.*

Dokaz: Glej (Komelj & Perman, 2010, str. 140, izrek 5). □

Opomba 5.8: Z integriranjem izraza (5.22) dobimo še n-razsežno porazdelitveno funkcijo $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, ki je enaka

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, b_i\, b_j\, \Delta F_i(x_i)\, \Delta F_j(x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} F_{X_k}(x_k), \tag{5.24}$$

kjer je $\Delta F_i(x_i) = F_{X_i}(x_i) - F_{\tilde{X}_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. □

Oglejmo si še, kako izračunamo korelacijske koeficiente za slučajne spremenljivke iz izreka 5.17.

Izrek 5.18: *Predpostavke naj bodo enake kot v izreku 5.17. Potem velja:*

(a) *Če imajo slučajne spremenljivke* $X_1, \ldots, X_n$ *končne variance* $\sigma^2_{X_1}, \ldots, \sigma^2_{X_n}$*, potem je za vsak* i *in* j *Pearsonov korelacijski koeficient enak*

$$\begin{aligned} \rho(X_i, X_j) &= \frac{\theta_{ij}\, b_i\, b_j}{\sigma_{X_i}\, \sigma_{X_j}} \left(\mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(\tilde{X}_i)\right) \left(\mathbb{E}(X_j) - \mathbb{E}(\tilde{X}_j)\right) \\ &= \frac{\theta_{ij}}{\sigma_{X_i}\, \sigma_{X_j}} \int_0^1 F^{-1}_{X_i}(u)\, g_i(u) \mathrm{d}u \int_0^1 F^{-1}_{X_j}(u)\, g_j(u) \mathrm{d}u\,, \end{aligned} \tag{5.25}$$

kjer je $F^{-1}_{X_i}(u) = \inf\{x \colon F_{X_i}(x) \ge u\}$ *in* $\inf \emptyset = +\infty$ *po dogovoru.*

(b) *Za vsak* i *in* j *je Spearmanov korelacijski koeficient ranga enak*

$$\begin{aligned} \rho_C(X_i, X_j) &= 12\, \theta_{ij} \int_0^1 G_i(t) \mathrm{d}t \int_0^1 G_j(t) \mathrm{d}t \\ &= 12\, \theta_{ij} \int_0^1 t\, g_i(t) \mathrm{d}t \int_0^1 t\, g_j(t) \mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

(c) *Za vsak i in j je Kendallov τ enak*

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{3}\,\rho_C(X_i, X_j)\,. \tag{5.27}$$

Dokaz: Glej (Komelj & Perman, 2010, str. 141, izrek 6). □

Opomba 5.9: Neenačba $-1 \le 3\,\tau(X_i, X_j) - 2\,\rho_S(X_i, X_j) \le 1$ iz izreka 5.9 se v našem primeru zaradi enačbe (5.27) izrodi v $0 \le 3\,\tau(X_i, X_j) - 2\,\rho_S(X_i, X_j) \le 0$. □

Pri konstrukciji kopul in drugih večrazsežnih porazdelitvenih funkcij na način, opisan v tem razdelku, smo imeli za primarni cilj ločljivost spremenljivk, kar se bo kot koristno izkazalo šele v razdelku 7.6. Stranski učinek te omejitve pa je, da korelacijski koeficienti, izračunani z enačbami (5.25), (5.26) in (5.27), ne morejo doseči poljubnih vrednosti na intervalu $[-1,1]$, kar bomo videli v naslednjem izreku.

Izrek 5.19: *Naj bodo izpolnjeni vsi pogoji iz definicije 5.12. $X_1, \ldots, X_n$ naj bodo absolutno zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in skupno n-razsežno gostoto verjetnosti in karakteristično funkcijo, definirano v točki (a) oziroma (b) izreka 5.17. Vse konstante $c_i = \int_0^1 t\, g_i(t)\mathrm{d}t$, $i = 1, \ldots, n$, naj imajo enak predznak. Potem velja:*

(a) *Če je $n = 2$ in $\theta_{12} \in [-\frac{1}{M^a}, \frac{1}{M^b}]$, potem je*

$$-\frac{3}{4} < \rho_C(X_1, X_2) < \frac{3}{4}\,.$$

(b) *Če je $n > 2$, $\theta_{ij} \in [-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$ ali $\theta_{ij} \in [-\frac{1}{M^a}, 0]$ ali $\theta_{ij} \in [0, \frac{1}{M^b}]$, $1 \le i < j \le n$, in sta slučajni spremenljivki X_i in X_j privilegirani z namenom, da dosežeta maksimalni ali minimalni $\rho_C(X_i, X_j)$, potem je*

$$-\frac{3}{4} < \rho_C(X_i, X_j) < \frac{3}{4}\,.$$

(c) *Če je $\theta_{ij} \in [-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$, $1 \le i < j \le n$, in imajo vse slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ enak status, potem je*

$$-\frac{3}{2\,n\,(n-1)} < \rho_C(X_i, X_j) < \frac{3}{2\,n\,(n-1)}\,.$$

(d) *Če je $\theta_{ij} \in [-\frac{1}{M^a}, 0]$, $1 \le i < j \le n$, in imajo vse slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ enak status, potem je*

$$-\frac{3}{2\,n\,(n-1)} < \rho_C(X_i, X_j) \le 0\,.$$

(e) Če je $\theta_{ij} \in [0, \frac{1}{M^b}]$, $1 \le i < j \le n$, in imajo vse slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ enak status, potem je

$$0 \;\le\; \rho_C(X_i, X_j) \;<\; \frac{3}{2\,n\,(n-1)}\,.$$

Za vsak $\epsilon > 0$ obstajajo take funkcije $g_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, ki izpolnjujejo predpostavke izreka, da Spearmanovi korelacijski koeficienti $\rho_C(X_i, X_j)$, $1 \le i < j \le n$ (za trditev (b) samo za privilegirana i in j), aproksimirajo spodnjo ali zgornjo mejo z natančnostjo ϵ.

Dokaz: Glej (Komelj & Perman, 2010, str. 141, izrek 7). □

Opomba 5.10: Pogoj, da imajo vse konstante c_i enak predznak, je le navidezna omejitev. Z njim si zagotovimo, da $\theta_{ij} > 0$ pomeni pozitivno korelirani, $\theta_{ij} < 0$ negativno korelirani in $\theta_{ij} = 0$ nekorelirani slučajni spremenljivki X_i in X_j. □

Opomba 5.11: Zaradi enostavnosti smo v definiciji 5.12 za funkcije $g_1, \ldots, g_n$ predpostavili zveznost. To lahko omilimo in zahtevamo le merljivost in omejenost skoraj povsod. V definicijah 5.12 ter 5.13 moramo $\min_{0 \le t \le 1} g_i(t)$ zamenjati z $\operatorname{ess\,inf} g_i = \sup\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{t \in [0,1] : g_i(t) > c\}) = 0\}$, $\max_{0 \le t \le 1} g_i(t)$ pa z $\operatorname{ess\,sup} g_i = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(\{t \in [0,1] : g_i(t) < c\}) = 0\}$. Po spremembi izreki 5.16 do 5.19 še vedno veljajo, le meje za $\rho_C(X_i, X_j)$ v trditvah (a) do (e) izreka 5.19 niso več stroge.

Rodríguez-Lallena in Úbeda-Flores (2004, str. 320, primer 3.1) sta našla primere dvorazsežnih kopul, za katere je $\rho_C \in [-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}]$. Postavila sta domnevo, da je to najširši interval za njuno družino kopul, konstruirano z enačbo (5.20). Trditev (a) iz izreka 5.19 njuno domnevo potrjuje. □

Čeprav lahko z normalno kopulo dosežemo vse linearne korelacijske koeficiente med -1 in 1, včasih vseeno želimo uporabiti enostavnejšo kopulo, hkrati pa doseči čim manjši ali čim večji korelacijski koeficient. Tako sta Huang in Kotz (1999) dosegla minimum $-\frac{1}{3}$ in maksimum $\approx 0{,}39$ z modificirano dvorazsežno Farlie-Gumbel-Morgensternovo kopulo, ki jo bomo spoznali v primeru 5.8. Drugi avtorji (glej Bairamov, Kotz & Bekçi, 2001; Bairamov & Kotz, 2003; Bairamov & Eryilmaz, 2004) so študirali posplošeno Farlie-Gumbel-Morgensternovo porazdelitev, za katero sta Bairamov in Kotz (2002) našla minimalni linearni korelacijski koeficient $\approx -0{,}48$ in maksimalnega $\approx 0{,}61$. Tako so meje iz izreka 5.19 za $n = 2$ ugodnejše od navedenih, prav tako jih ni mogoče preseči za kopule z ločljivima spremenljivkama. Za doseganje poljubnega linearnega korelacijskega koeficienta med -1 in 1 pa glej konstrukcijo v (Long & Krzysztofowicz, 1995).

Primer 5.7: (Komelj & Perman, 2010, str. 142, primer 1) Ta primer kot ilustracijo možnosti uporabe izreka 5.14 za konstruiranje kopul oziroma večrazsežnih porazdelitvenih funkcij z znanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami navajajo že De la Peña et al. (2006, str. 190), vendar pa ga razvijajo v drugo smer.

Naj bo $g_j(t) = 1-2t$, $j = 1,\dots,n$. Potem je $a_j = b_j = 1$, $c_j = \int_0^1 t\,(1-2t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}$, $G_j(x) = x - x^2$, $h_j(x) = x^2$, $M = M^a = M^b = \frac{n\,(n-1)}{2}$ in $\theta_{jk} \in [-\frac{2}{n\,(n-1)}, \frac{2}{n\,(n-1)}]$, $1 \le j < k \le n$. Po izreku 5.16 in enačbi (5.17) dobimo dobro znano FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern) kopulo (glej npr. Nelsen, 2006, str. 77 in 108)

$$C(u_1,\dots,u_n) = \prod_{i=1}^{n} u_i \left(1 + \sum_{1\le i<j\le n} \theta_{ij}\,(1-u_i)(1-u_j)\right), \tag{5.28}$$

ki ni arhimedska (Nelsen, 2006, str. 131, primer 4.7), prav tako pa se ne da generirati z distorzijsko metodo, ki jo je razvil Wang (1998c, str. 904 in 932). Za $n = 2$ dobimo $\theta_{12} \in [-1,1]$, kar nam po enačbah (5.26) in (5.27) da $-\frac{1}{3} \le \rho_C(X_1, X_2) = \frac{\theta_{12}}{3} \le \frac{1}{3}$ in $-\frac{2}{9} \le \tau(X_1,X_2) = \frac{2\theta_{12}}{9} \le \frac{2}{9}$. Za $n > 2$ moramo vse meje pomnožiti z $\frac{2}{n\,(n-1)}$.

Naj bo $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda_j)$ za $j = 1,2,\dots,n$. Ker je $F_{\tilde{X}_j}(x_j) = (1-e^{-\lambda_j x_j})^2$, $\sigma_j = \frac{1}{\lambda_j}$ in $\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[\tilde{X}_j] = -\frac{1}{2\lambda_j}$, nam izrazi (5.22) do (5.25) po krajšem računanju dajo

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{j=1}^{n} \lambda_j\, e^{-\lambda_j x_j} \left(1 + \sum_{1\le j<k\le n} \theta_{jk}\,(2e^{-\lambda_j x_j}-1)(2e^{-\lambda_k x_k}-1)\right),\\
\varphi_{\mathbf{X}}(t_1,\dots,t_n) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - i\,t_j} \left(1 - \sum_{1\le j<k\le n} \frac{\theta_{jk}\,t_j\,t_k}{(2\,\lambda_j - i\,t_j)(2\,\lambda_k - i\,t_k)}\right),\\
F_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n) &= \prod_{j=1}^{n} (1-e^{-\lambda_j x_j}) \left(1 + \sum_{1\le j<k\le n} \theta_{jk}\, e^{-\lambda_j x_j}\, e^{-\lambda_k x_k}\right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

in $\rho(X_j, X_k) = \frac{\theta_{jk}}{4}$. □

Primer 5.8: (Komelj & Perman, 2010, str. 143, primer 2) Naj bo $g_i(t) = 1-(p+1)\,t^p$, $p > 0$, $i = 1,\dots,n$. V tem primeru je $a_i = p$, $b_i = 1$, $c_i = \int_0^1 t\,(1-(p+1)\,t^p)\,\mathrm{d}t = -\frac{p}{2\,(p+2)}$, $G_i(x) = x - x^{p+1}$ in $h_i(x) = x^{p+1}$. Po izreku 5.16 in enačbi (5.17) dobimo modificirano FGM kopulo

$$C(u_1,\dots,u_n) = \prod_{i=1}^{n} u_i \left(1 + \sum_{1\le i<j\le n} \theta_{ij}\,(1-u_i^p)(1-u_j^p)\right), \tag{5.30}$$

ki sta jo študirala Huang in Kotz (1999).

V tem primeru je $M = M^a = \frac{n\,(n-1)}{2} \max\{1, p^2\}$ in $M^b = \frac{n\,(n-1)}{2}\, p$. Za $n = 2$ dobimo $\theta_{12} \in [-\frac{1}{\max\{1,p^2\}}, \frac{1}{p}]$ in $-\frac{3\,p^2}{\max\{1,p^2\}(p+2)^2} \leq \rho_C(X_1, X_2) \leq \frac{3\,p}{(p+2)^2}$. Minimalno spodnjo mejo $-\frac{1}{3}$ dosežemo pri $p = 1$, vendar je potem zgornja meja $\frac{1}{3}$. Maksimalno zgornjo mejo $\frac{3}{8}$ dosežemo pri $p = 2$, vendar je potem spodnja meja $-\frac{3}{16}$. Za $n > 2$ moramo vse meje pomnožiti z $\frac{2}{n\,(n-1)}$, primera $\theta_{ij} \in [-\frac{2}{n\,(n-1)\max\{1,p^2\}}, \frac{2}{n\,(n-1)\max\{1,p^2\}}]$ in $\theta_{ij} \in [0, \frac{2}{n\,(n-1)\,p}]$ pa moramo obravnavati ločeno, ker tu ni simetrije kot v primeru 5.7. Primer lahko posplošimo s predpostavko, da je $g_i(t) = 1 - (p_i + 1)\, t^{p_i}$, $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, vendar pa se s tem navedena dejstva o spodnji in zgornji meji za $\rho_C(X_1, X_2)$ ne spremenijo. Ker je $\Delta F_i(x_i) = F_{X_i}(x_i) - F_{\tilde{X}_i}(x_i) = F_{X_i}(x_i)(1 - (F_{X_i}(x_i))^p)$ in $\Delta f_i(x_i) = f_{X_i}(x_i) - f_{\tilde{X}_i}(x_i) = f_{X_i}(x_i)(1 - (p+1)(F_{X_i}(x_i))^p)$, se izraza (5.22) in (5.24) za $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ in $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ poenostavita v

$$\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \left(1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{ij}\, (1 - (p+1)(F_{X_i}(x_i))^p)\, (1 - (p+1)(F_{X_j}(x_j))^p)\right),$$

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \left(1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{ij}\, (1 - (F_{X_i}(x_i))^p)\, (1 - (F_{X_j}(x_j))^p)\right).$$

Izraza (5.23) v splošnem primeru ne moremo poenostaviti, kljub temu pa ga lahko brez večjih težav uporabimo za numerični izračun. V našem primeru z enačbo (5.21) dobimo $f_{\tilde{X}_i}(x_i) = (1 - g_i(f_{X_i}(x_i)))\, f_{X_i}(x_i) = (p+1)(f_{X_i}(x_i))^p\, f_{X_i}(x_i)$, kar poleg $f_{X_i}(x_i)$ potrebujemo za izračun $\varphi_{X_i}(x_i)$ in $\varphi_{\tilde{X}_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, oziroma $\varphi_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

Primer 5.9: (Komelj & Perman, 2010, str. 143, primer 3) Naj bo $g_i(t) = (1 - 2t)^{\frac{1}{2p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. V tem primeru je $a_i = b_i = 1$, $c_i = \int_0^1 t\,(1 - 2\,t)^{\frac{1}{2p+1}}\,\mathrm{d}t = -\frac{2p+1}{2\,(4p+3)}$, $M = M^a = M^b = \frac{n\,(n-1)}{2}$, $\theta_{ij} \in [-\frac{2}{n\,(n-1)}, \frac{2}{n\,(n-1)}]$ ter $G_i(x) = \frac{2p+1}{4(p+1)}\left(1 - (1 - 2x)^{\frac{2(p+1)}{2p+1}}\right)$ in $h_i(x) = x - \frac{2p+1}{4(p+1)}\left(1 - (1 - 2x)^{\frac{2(p+1)}{2p+1}}\right)$. Po izreku 5.16 in enačbi (5.17) za $p = 0$ dobimo iz primera 5.7 znano FGM kopulo, za $p > 0$ pa dobimo novo družino kopul

$$\begin{aligned} C(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} u_i + \left(\frac{2p+1}{4(p+1)}\right)^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{ij} \\ \times \left(1 - (1 - 2u_i)^{\frac{2(p+1)}{2p+1}}\right) \left(1 - (1 - 2u_j)^{\frac{2(p+1)}{2p+1}}\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} u_k\,. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ta kopula je bila skonstruirana z namenom, da bi z njo dosegli minimalni oziroma maksimalni Spearmanov korelacijski koeficient ranga. Ker za $n = 2$ dobimo

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{2p+1}{2p+3/2}\right)^2 \leq \rho_C(X_1, X_2) \leq \frac{3}{4}\left(\frac{2p+1}{2p+3/2}\right)^2$$

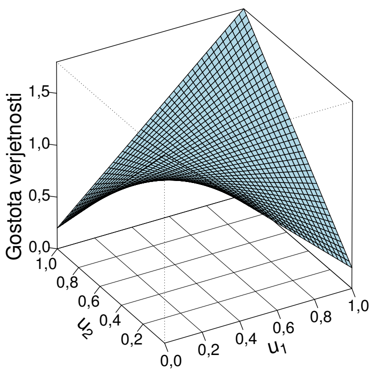
in je $\lim_{p\to\infty}(\frac{2p+1}{2p+3/2})^2 = 1$, za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $p \in \mathbb{N}$, da je $\rho_C(X_1, X_2) < -\frac{3}{4} + \epsilon$, ko je $\theta_{12} = -1$, in $\rho_C(X_1, X_2) > \frac{3}{4} - \epsilon$, ko je $\theta_{12} = 1$. Že za $p = 7$ lahko izpolnimo neenačbo $\rho_C(X_1, X_2) < -0{,}7$ oziroma $\rho_C(X_1, X_2) > 0{,}7$. Seveda moramo za $n > 2$ vse meje pomnožiti z $\frac{2}{n\,(n-1)}$, zaradi simetrije pa lahko obravnavamo le primer, ko je $\theta_{ij} \in [-\frac{2}{n\,(n-1)}, \frac{2}{n\,(n-1)}]$.

Čeprav je v tem primeru izraz (5.23) še bolj zapleten kot v prejšnjem primeru, pa ga lahko brez večjih težav uporabimo za numerični izračun.

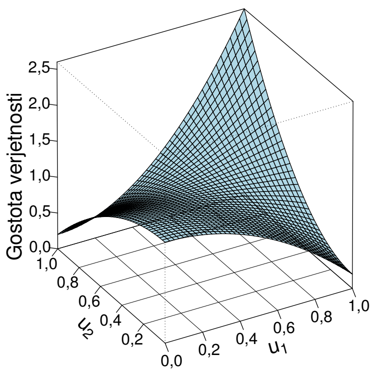
Tudi tokrat primer lahko posplošimo s predpostavko $g_i(t) = (1 - 2\,t)^{\frac{1}{2p_i+1}}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. □

Primer 5.10: (Nadaljevanje primerov 5.7, 5.8 in 5.9) Za $n = 2$ gostote verjetnosti FGM kopule za $\theta_{12} = \frac{4}{5}$, modificirane FGM kopule za $p = 2$ in $\theta_{12} = \frac{2}{5}$ ter nove kopule iz primera 5.9 za $p = 3$ in $\theta_{12} = \frac{3}{5}$ vidimo na slikah 5.16, 5.17 in 5.18, pripadajoče nivojnice pa na slikah 5.19, 5.20 in 5.21.

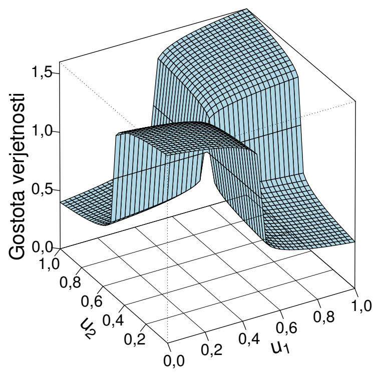
Slika 5.16: Gostota verjetnosti kopule iz primera 5.7



Slika 5.17: Gostota verjetnosti kopule iz primera 5.8

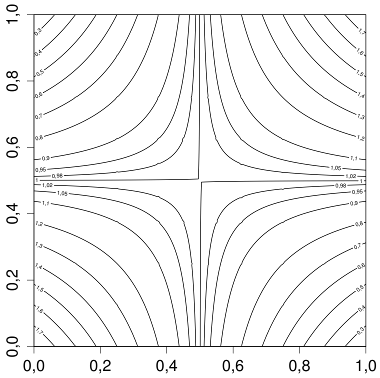


Slika 5.18: Gostota verjetnosti kopule iz primera 5.9

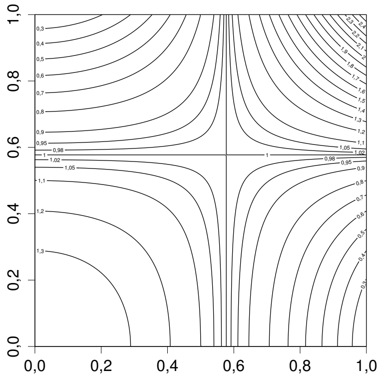


Gostota verjetnosti na sliki 5.18 je zvezna, videti pa je, kot da se bo pretrgala na obeh srednjicah enotnega kvadrata. Taka je zato, ker je funkcija $g(t) = (1 - 2t)^{\frac{1}{2p+1}}$ za $p = 3$ na enotnem intervalu že precej podobna nezvezni funkciji $f(t) = \lim_{p\to\infty}(1 - 2t)^{\frac{1}{2p+1}}$, ki je za $t < 0{,}5$ enaka 1, -1 za $t > 0{,}5$ in 0 za $t = 0{,}5$. Z enačbo (5.18) ter s f namesto g_1 in g_2 bi v našem primeru za gostoto verjetnosti $c(u_1, u_2)$ dobili $1 + \theta_{12} = 1{,}6$ za $(u_1, u_2) \in [0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2})$ in $(u_1, u_2) \in (\frac{1}{2}, 1] \times (\frac{1}{2}, 1]$, $1 - \theta_{12} = 0{,}4$ za $(u_1, u_2) \in [0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1]$ in $(u_1, u_2) \in (\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2})$ ter 1 za $(u_1, u_2) \in \frac{1}{2} \times [0, 1]$ in $(u_1, u_2) \in [0, 1] \times \frac{1}{2}$.

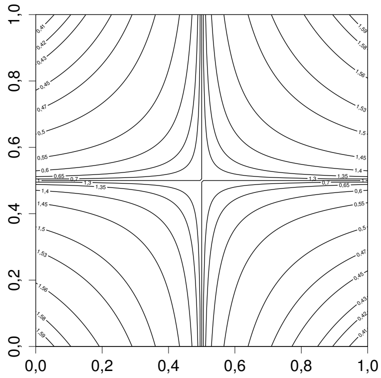
Slika 5.19: Nivojnice gost. verjet. kopule iz primera 5.7



Slika 5.20: Nivojnice gost. verjet. kopule iz primera 5.8



Slika 5.21: Nivojnice gost. verjet. kopule iz primera 5.9



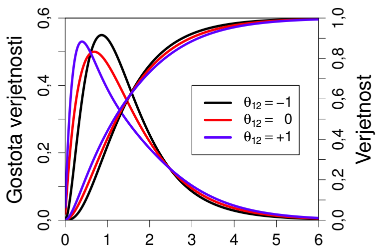
Naj bo $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, $S = X_1 + X_2$ in $\theta_{12} \in [-1,1]$. Za dvorazsežno FGM kopulo, definirano z enačbo (5.28), z enačbo (5.29) dobimo

$$\varphi_S(t) = \varphi_X(t,t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - it)(\lambda_2 - it)} \left(1 - \frac{\theta_{12}\, t^2}{(2\,\lambda_1 - it)(2\,\lambda_2 - it)}\right).$$

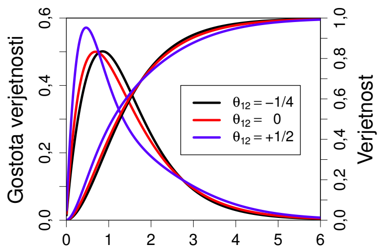
Od tu z inverzno Fourierovo transformacijo lahko izračunamo $f_S(x)$, nato pa še $F_S(x)$.

Naj bo $X_1 \sim \text{Exp}(1)$ in $X_2 \sim \text{Exp}(2)$. Za $\theta_{12} \in \{-1,0,1\}$, kar ustreza $\rho_C(X_1,X_2) \in \{-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\}$, gostoto verjetnosti $f_S(x)$ in porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ vidimo na sliki 5.22.

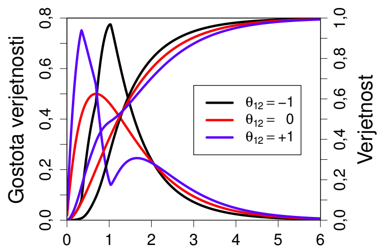
Slika 5.22: F_S in f_S za kopulo iz primera 5.7



Slika 5.23: F_S in f_S za kopulo iz primera 5.8



Slika 5.24: F_S in f_S za kopulo iz primera 5.9



Za dvorazsežno modificirano FGM kopulo, definirano z enačbo (5.30), smo za $p = 2$ in $\theta_{12} \in \{-\frac{1}{4},0,\frac{1}{2}\}$, kar ustreza $\rho_C(X_1,X_2) \in \{-\frac{3}{16},0,\frac{3}{8}\}$, iz numerično izračunane karakteristične funkcije $\varphi_S(t) = \varphi_X(t,t)$ z inverzno diskretno Fourierovo transformacijo izračunali gostoto verjetnosti $f_S(x)$ in porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, ki ju vidimo na sliki 5.23. Analogno smo za kopulo, definirano z enačbo (5.31), za $p = 3$ in $\theta_{12} \in \{-1,0,1\}$, kar ustreza $\rho_C(X_1,X_2) \in \{-\frac{49}{75},0,\frac{49}{75}\}$, izračunali funkciji $f_S(x)$ in $F_S(x)$, ki sta na sliki 5.24. □

5.5.7 Merjenje odvisnosti med ekstremnimi vrednostmi

V uvodu tega poglavja smo ugotovili, da na škodno dogajanje lahko pomembno vpliva tudi vreme, na višino posameznih odškodnin pa inflacija. Zato predpostavka o odvisnosti med slučajnima spremenljivkama X_1 in X_2, s katerima modeliramo agregatne odškodnine za različni zavarovalni vrsti, ni nerealna. Če se zavedamo, da odvisnost obstaja, ocenjujemo pa, da je majhna, običajno predpostavimo, da sta slučajni spremenljivki X_1 in X_2 neodvisni. S tem si poenostavimo model, ki ga sicer morda niti ne bi matematično obvladali. Vse se odvija po pričakovanjih, dokler se bolj ali manj neodvisno dogajajo posamezne škode. Če pa se zgodi večja naravna nesreča, se hkrati pojavi veliko škod oziroma odškodnin, ki se lahko nanašajo na obe zavarovalni vrsti, zato seštevka odškodnin za posamezni zavarovalni vrsti nista več neodvisna. Opisani primer se zgodi, denimo, pri zavarovanju požara in pri zavarovanju avtomobilskega kaska, če pride do katastrofalne toče. Obe zavarovalni vrsti namreč krijeta tudi škodo zaradi toče.

Zanima nas, kako meriti odvisnost, ki se nanaša le na hkratni pojav velikih škod oziroma na hkratni pojav majhnih škod, pri čemer nas ne zanima, kakšne so siceršnje mere odvisnosti, kot so linearni korelacijski koeficient, Spearmanov korelacijski koeficient ranga in Kendallov τ. Opisano odvisnost bomo merili asimptotično s koeficientom odvisnosti zgornjih oziroma spodnjih repov porazdelitvenih funkcij.

Definicija 5.14: *Naj bosta X_1 in X_2 zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F_{X_1} in F_{X_2}. Koeficient odvisnosti zgornjih repov λ_U je definiran z enačbo*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \to 1^-} \mathbb{P}(X_1 > F_{X_1}^{-1}(u) | X_2 > F_{X_2}^{-1}(u)), \tag{5.32}$$

koeficient odvisnosti spodnjih repov λ_L pa z enačbo

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \to 0^+} \mathbb{P}(X_1 \le F_{X_1}^{-1}(u) | X_2 \le F_{X_2}^{-1}(u)). \tag{5.33}$$

Koeficienta λ_U in λ_L očitno ležita na intervalu $[0,1]$. Z večanjem koeficienta λ_U oziroma λ_L se veča asimpotična verjetnost, da se bodo velike oziroma majhne vrednosti slučajnih spremenljivk X_1 in X_2 pojavljale hkrati.

Naj bo $(U_1, U_2) = (F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2))$ slučajni vektor, kopula C njegova porazdelitvena funkcija, $\hat{C}$ kopula preživetja in $\overline{C}(u_1, u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$ funkcija preživetja. Če sta F_{X_1} in F_{X_2} zvezni in strogo naraščajoči funkciji, po izreku 5.11 tudi komponenti slučajnega vektorja (X_1, X_2) povezuje kopula C. Desno stran enačbe (5.32) zapišimo kot $\lim_{u \to 1^-} \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) > u | F_{X_2}(X_2) > u)$ oziroma kot

$\lim_{u\to 1^-} \mathbb{P}(U_1 > u | U_2 > u)$, kar nam da

$$\lambda_U = \lim_{u\to 1^-} \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)}{\mathbb{P}(U_2 > u)} = \lim_{u\to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u}.$$

Isto enačbo s kopulo preživetja zapišemo kot

$$\lambda_U = \lim_{u\to 1^-} \frac{\mathbb{P}(U_1 > u, U_2 > u)}{\mathbb{P}(U_2 > u)} = \lim_{u\to 1^-} \frac{\hat{C}(1-u, 1-u)}{1-u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\hat{C}(u,u)}{u}.$$

Desno stran enačbe (5.33) zapišimo kot $\lim_{u\to 0^+} \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \le u | F_{X_2}(X_2) \le u)$ oziroma kot $\lim_{u\to 0^+} \mathbb{P}(U_1 \le u | U_2 \le u)$, kar nam da enačbo

$$\lambda_L = \lim_{u\to 0^+} \frac{\mathbb{P}(U_1 \le u, U_2 \le u)}{\mathbb{P}(U_2 \le u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}.$$

Ugotovili smo, da sta koeficienta odvisnosti zgornjih in spodnjih repov za komponenti dvorazsežnega slučajnega vektorja z zveznima in strogo naraščajočima robnima porazdelitvenima funkcijama odvisna le od kopule. Zato ju bomo ekvivalentno definirali še alternativno. Ker pa smo zgoraj strogo naraščanje porazdelitvenih funkcij uporabili le zaradi lažje ilustracije smiselnosti prehoda s prve definicije na drugo, strogega naraščanja ne bomo več zahtevali.

Definicija 5.15: *Naj kopula C povezuje komponenti slučajnega vektorja (X_1, X_2) z zveznima robnima porazdelitvenima funkcijama. Koeficient odvisnosti zgornjih repov λ_U je definiran z enačbo*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u\to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1-u},$$

koeficient odvisnosti spodnjih repov λ_L pa z enačbo

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u,u)}{u}.$$

Če je $\lambda_U(X_1, X_2) > 0$, sta slučajni spremenljivki X_1 in X_2 asimptotično odvisni v zgornjem repu, če je $\lambda_U(X_1, X_2) = 0$, sta asimptotično neodvisni v zgornjem repu.

Če je $\lambda_L(X_1, X_2) > 0$, sta slučajni spremenljivki X_1 in X_2 asimptotično odvisni v spodnjem repu, če je $\lambda_L(X_1, X_2) = 0$, sta asimptotično neodvisni v spodnjem repu.

Opomba 5.12: Pri uporabi definicije 5.15 nismo omejeni le na dve razsežnosti. Za $n > 2$ za slučajne vektorje $(X_1, \ldots, X_n)$, katerih komponente povezuje kopula C, asimptotično odvisnost zgornjih ali spodnjih repov za različni slučajni spremenljivki X_i in X_j ugotavljamo na podlagi dvorazsežne robne kopule $C_{ij}(u_i, u_j)$, ki jo dobimo tako, da v $C(u_1, \ldots, u_n)$ vse u_k, $k \ne i$ in $k \ne j$, postavimo na 1. □

Arhimedske kopule so določene s svojim generatorjem, zato koeficienta odvisnosti repov lahko izračunamo iz generatorja.

Izrek 5.20: *Naj bo C arhimedska kopula z generatorjem $\phi(t)$, ki izpolnjuje pogoje iz izreka 5.12, ter $\phi^{[-1]}$ njegova psevdoinverzna funkcija, definirana v izreku 5.12. Potem je*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \to 1^-} \frac{1 - \phi^{[-1]}(2\phi(t))}{1-t} = 2 - \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \phi^{[-1]}(2x)}{1 - \phi^{[-1]}(x)}$$

in

$$\lambda_L = \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi^{[-1]}(2\phi(t))}{t} = \lim_{x \to \infty} \frac{\phi^{[-1]}(2x)}{\phi^{[-1]}(x)}.$$

Dokaz: Glej (Nelsen, 2006, str. 215, posledica 5.4.3). □

Za Claytonovo družino kopul C_θ^{Cl} v ožjem smislu (z omejitvijo $\theta > 0$) je $\lambda_U = 0$ in $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$, za Frankovo kopulo C_θ^{Fr} je $\lambda_U = \lambda_L = 0$, za Gumbelovo kopulo C_θ^{Gu} pa je $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ in $\lambda_L = 0$ (glej Nelsen, 2006, str. 215). Gumbelova kopula C_θ^{Gu} je za $\theta = 1$ kar kopula neodvisnosti Π^2, ko gre θ v neskončnost, pa limitira h kopuli M^2, ki povezuje komonotone slučajne spremenljivke in ni arhimedska. Tako z Gumbelovo kopulo lahko dosežemo ves spekter med neodvisnostjo in največjo stopnjo odvisnosti. Ker lahko dosežemo λ_U poljubno blizu zgornje meje 1, je Gumbelova kopula zelo primerna za povezovanje slučajnih spremenljivk, za katere se ekstremne vrednosti pojavljajo hkrati. Tako Faivre (2003, str. 6) navaja, da je Gumbelova kopula primerna za razne neugodne scenarije (stresne teste), po katerih so velike škode oziroma odškodnine povezane, preostale pa so neodvisne.

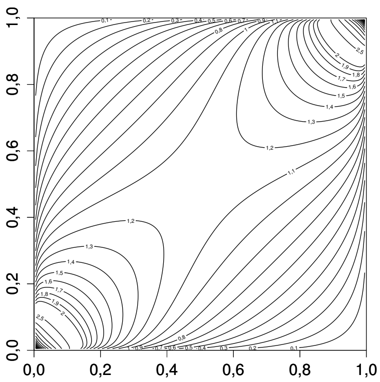
Za normalno kopulo sta koeficienta λ_U in λ_L nič (glej npr. McNeil et al., 2005, str. 211). Kljub njeni siceršnji veliki prilagodljivosti je včasih to ključna slabost, zaradi katere raje uporabimo kakšno drugo kopulo. Ena takih je Studentova kopula, ki pa ne omogoča modeliranja neodvisnosti. Za Studentovo kopulo in $\rho > -1$ koeficienta repne odvisnosti izračunamo po formuli

$$\lambda_U = \lambda_L = 2\, t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$$

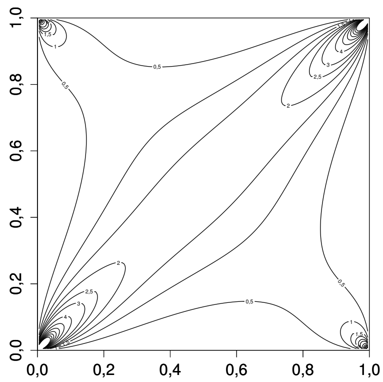
(McNeil et al., 2005, str. 211).

Tudi najboljša mera odvisnosti z eno samo vrednostjo ne more plastično ponazoriti vse kompleksnosti strukture odvisnosti. Predstavo si lahko olajšamo z grafičnim prikazom nivojnic. Na slikah 5.25, 5.26 in 5.27 vidimo nivojnice dvorazsežne gostote verjetnosti normalne, Studentove in Gumbelove kopule s parametri, ki jih je za ilustracijo uporabil že Faivre (2003, str. 7).

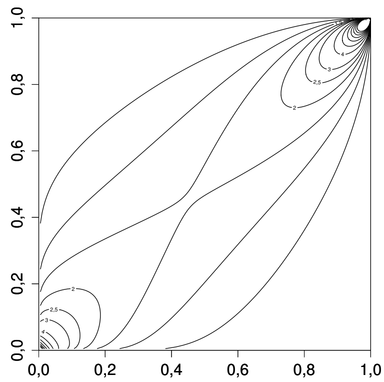
Slika 5.25: Nivojnice gostote verjetnosti kopule $C^{Ga}_{1/2}$



Slika 5.26: Nivojnice gostote verjetnosti kopule $C^{t}_{1,1/2}$

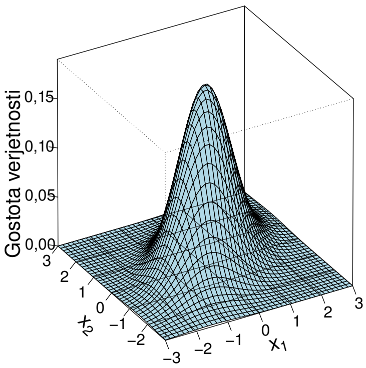


Slika 5.27: Nivojnice gostote verjetnosti kopule C^{Gu}_{2}

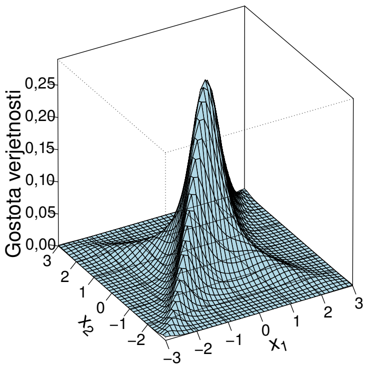


Oglejmo si še tri dvorazsežne slučajne vektorje (X_1, X_2) s standardizirano normalno porazdeljenimi komponentami, ki jih povezujejo pravkar omenjene kopule. Gostote verjetnosti f_{X_1,X_2}, izračunane z enačbo (5.7), so razvidne s slik 5.28, 5.29 in 5.30, njihove nivojnice pa s slik 5.31, 5.32 in 5.33.

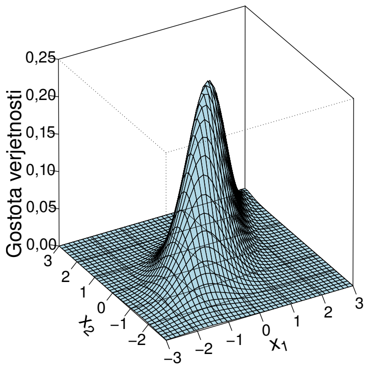
Slika 5.28: Gostota verjetnosti f_{X_1,X_2} s kopulo $C^{Ga}_{1/2}$.



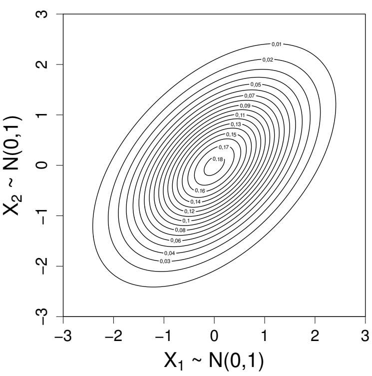
Slika 5.29: Gostota verjetnosti f_{X_1,X_2} s kopulo $C^{t}_{1,1/2}$.



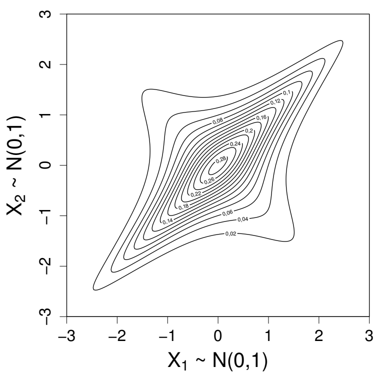
Slika 5.30: Gostota verjetnosti f_{X_1,X_2} s kopulo C^{Gu}_{2}.



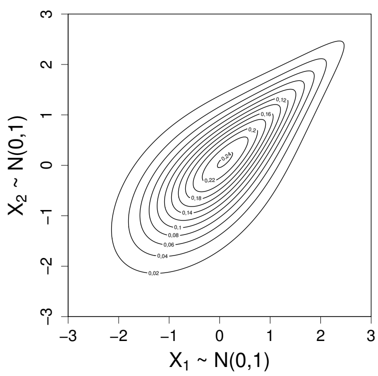
Slika 5.31: Nivojnice f_{X_1,X_2} s kopulo $C^{Ga}_{1/2}$.



Slika 5.32: Nivojnice f_{X_1,X_2} s kopulo $C^{t}_{1,1/2}$.



Slika 5.33: Nivojnice f_{X_1,X_2} s kopulo C^{Gu}_{2}.



6 Aktuarsko modeliranje agregatnih odškodnin

V razdelku 4.4 smo pri nekaterih premijskih principih premijo določili tudi na podlagi agregatnih odškodnin S, pri tem pa nismo zahtevali več kot poznavanje pričakovane vrednosti $\mathbb{E}[S]$ in variance $\mathrm{var}[S]$ oziroma standardnega odklona σ_S. Omenjene parametre lahko razmeroma preprosto izračunamo, kar pa običajno ne zadošča za natančnejši izračun primerne premije. Če želimo premijo določiti na podlagi kakšne od aktualnih mer tveganja, npr. tvegane vrednosti ali končne tvegane vrednosti, moramo poznati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$.

Praktično izračunavanje porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ je ena od ključnih aktuarskih nalog. Pred nekaj desetletji je bil to tudi eden od osrednjih aktuarskih problemov, ki pa je danes razmeroma preprosto rešljiv, če le predpostavimo, da so odškodnine, ki jih seštevamo, med seboj neodvisne. Danes so za izračune na voljo tudi prosto dostopne programske rešitve, ki nam precej olajšajo delo (glej npr. Dutang, Goulet & Pigeon, 2008).

V tem poglavju si bomo kot uvod v naslednje poglavje ogledali nekaj metod za izračunavanje agregatnih odškodnin, ki temeljijo na predpostavki o neodvisnosti in na kolektivnem modelu rizikov. Ti dve predpostavki sta bistveni omejitvi, sicer pa so v nadaljevanju predstavljene metode primerne tudi za agregiranje drugih tveganj, ki bodo vplivala na višino solventnostnega kapitala v režimu Solventnost 2, ne le za odškodnine.

Kolektivni model rizikov zahteva, da so odškodnine, ki se nanašajo na različne rizike, enako porazdeljene. Poleg tega modela obstaja tudi individualni model rizikov, ki dopušča, da so višine odškodnin, ki se nanašajo na različne rizike, različno porazdeljene, zato pa ima nekatere druge omejitve. Najosnovnejše informacije o individualnem modelu, ki ga v praksi večkrat aproksimiramo prav s kolektivnim modelom, najdemo v (Komelj, 2004, str. 18). Sicer pa je to poglavje v celoti le pregledna predstavitev nekaterih v aktuarski praksi uporabnih metod oziroma delni povzetek tega, kar je podrobneje obdelano v (Komelj, 2004), z malenkostnimi dopolnitvami.

6.1 Kolektivni model rizikov

Pri kolektivnem modelu rizikov lahko obravnavamo množico rizikov, zavarovanih z eno samo zavarovalno polico, skupino polic ali celotnim portfeljem istovrstnih polic. Poleg izbrane množice rizikov je pomemben tudi čas opazovanja. Ena od možnosti je, da opazujemo vse škode, ki se nanašajo na posamezne rizike, zavarovane npr. z enoletnimi zavarovalnimi policami, sklenjenimi v določenem koledarskem letu, pri tem pa posamezen riziko opazujemo od sklenitve do izteka zavarovanja, čemur bomo rekli opazovanje po letu sklenitve zavarovanja. Druga možnost je, da opazujemo vse škode, ki se nanašajo na vse rizike, ki so bili v določenem koledarskem letu vsaj en dan zavarovani, ne glede na datum sklenitve zavarovanja, pri tem pa posamezen riziko opazujemo le v preseku zavarovalnega in koledarskega leta, čemur bomo rekli opazovanje po letu nastanka škode. Pri opazovanju po letu sklenitve zavarovanja je opazovani čas izpostavljenosti nevarnostim za vse rizike eno leto (morebitne uničene rizike opazujemo do izteka zavarovanja, čeprav škoda ne more več nastati), zato pa vse škode nastanejo šele v dveh zaporednih koledarskih letih. Pri opazovanju po letu nastanka škode pa opazovani čas izpostavljenosti nevarnostim ni enak za vse rizike, zato pa vse škode nastanejo v istem koledarskem letu. Tako ima vsak od obeh navedenih pristopov opazovanja svoje prednosti in slabosti.

S kolektivnim modelom rizikov želimo izračunati agregatne odškodnine, ki jih predstavlja vsota naključnega števila naključno velikih odškodnin $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, pri čemer je po dogovoru $S = 0$, če je $N = 0$. Pri tem je N število odškodnin, ki se nanašajo na izbrano množico rizikov in čas opazovanja, $X_1, \ldots, X_N$ pa so posamezne odškodnine. Ker množico rizikov gledamo kot celoto, indeks i pomeni le zaporedno številko odškodnine za škodo, nastalo v opazovanem obdobju, saj ni pomembno, na kateri riziko se odškodnina X_i nanaša.

V tem poglavju predpostavimo, da so slučajne spremenljivke N in $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne, $X_1, X_2, \ldots$ pa so še nenegativne in enako porazdeljene. Glavne naloge tega poglavja, kako izračunati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke S, se lotimo tako, da najprej določimo verjetnostno funkcijo $p_n = \mathbb{P}(N = n)$, $n = 0,1,2\ldots$, slučajne spremenljivke N in porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$

Omenimo le še, da včasih kolektivni model rizikov ni uporaben, ker ni praktično ali pa ni mogoče škodnega dogajanja ločiti na del, ki se nanaša na število odškodnin, in na del, ki se nanaša na višino odškodnin. Tak primer obravnavajo Papush, Patrik in Podgaits (2001), ki ugotavljajo, da je za modeliranje agregatnih odškodnin med normalno, logaritemsko normalno in gama porazdelitvijo najprimernejša izbira gama porazdelitev, zlasti še, če nas zanima le rep porazdelitve.

6.2 Določanje verjetnostnih funkcij, ki modelirajo število odškodnin

Pri kolektivnem modelu rizikov se slučajna spremenljivka N nanaša na število vseh odškodnin za škode, ki se nanašajo na izbrano množico rizikov in opazovano obdobje, npr. eno leto. Če se število odškodnin po letih nastanka škode bistveno spreminja, kar pa ni posledica sočasnega spreminjanja obsega poslovanja, bi morali za dovolj velik vzorec letnega števila odškodnin, iz katerega bi s statističnimi metodami zanesljivo določili verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N, zelo dolgo čakati. Zato se naloge običajno lotimo tako, da najprej ocenimo porazdelitev števila odškodnin, ki se nanašajo na en riziko, nato pa z upoštevanjem števila rizikov oziroma njihovih opazovanih časov izpostavljenosti nevarnostim ocenimo verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N.

Opisani pristop zahteva, da je opazovana množica rizikov homogena nevarnostna skupina neodvisnih rizikov, za katere lahko predpostavimo enako porazdelitev števila odškodnin za en riziko. V praksi sicer večkrat ni tako, vendar pa se predpostavka o enaki porazdelitvi odškodnin za en riziko večkrat da upravičiti. Če kolektiv rizikov opazujemo po letu sklenitve zavarovanja, homogenost lahko utemeljimo z mešanjem slučajnih spremenljivk (glej npr. Komelj, 2004, str. 8). V tem primeru skupno izpostavljenost kolektiva rizikov merimo kar s številom rizikov, saj je izpostavljenost vseh posameznih rizikov eno leto.

Za utemeljitev homogenosti kolektiva rizikov, ki ga opazujemo po letu nastanka škode, potrebujemo še predpostavko o linearni odvisnosti števila škod oziroma odškodnin od časa izpostavljenosti nevarnostim. Tako, denimo, dva dejanska rizika s polletno opazovano izpostavljenostjo nadomestimo z enim fiktivnim rizikom z enoletno opazovano izpostavljenostjo. Tak pristop običajno ni sporen, čeprav dopušča nekatere pomisleke, saj, denimo, verjetnost nastanka škode pri avtomobilskih zavarovanjih ni enaka v poletni in zimski polovici leta. Pri dovolj velikem številu dejanskih rizikov, za katere je opazovani čas izpostavljenosti krajši od enega leta, pa omenjeni pomislek nima velike teže, saj se napake zaradi kombiniranja dejanskih v fiktivne rizike med seboj večinoma izničijo. Seštevek vseh fiktivnih in dejanskih izpostavljenosti, ki so ostale po transformaciji dejanskih rizikov v fiktivne, merjeno v letih, lahko proglasimo za skupno izpostavljenost kolektiva rizikov, ki ga opazujemo po letu nastanka škode. S stališča števila odškodnin je kolektiv rizikov, ki ga opazujemo po letu nastanka škode, ekvivalenten kolektivu rizikov z enako izpostavljenostjo, ki ga opazujemo po letu sklenitve zavarovanja, zato je nadaljevanje uporabno za obe vrsti opazovanja.

Za določitev verjetnostne funkcije porazdelitve števila odškodnin, ki se nanašajo na en riziko iz kolektiva rizikov, najprej predpostavimo tip porazdelitve, nato pa z eno od metod, denimo z metodo momentov ali metodo največjega verjetja, na podlagi zgodovinskih podatkov določimo konkretne parametre. Za izračun zadostuje, če poznamo število rizikov brez odškodnin, z eno odškodnino, dvema odškodninama itd. Če zgodovinske podatke opazujemo po letu nastanka škode, ko so časi opazovanja posameznih rizikov praviloma krajši od enega leta, nam podatek o številu rizikov brez odškodnin ne pove veliko. Nobene garancije namreč ni, da odškodnine ne bi bilo, če bi riziko opazovali celo leto. Analogno velja za rizike z eno odškodnino, dvema odškodninama itd. Zato je za računanje verjetnostne funkcije porazdelitve števila odškodnin, ki se nanašajo na en riziko, bolj primerno opazovanje po letu sklenitve zavarovanja, ki pa tudi ni brez pasti. Če opazujemo podatke za bližnja pretekla leta, nam namreč lahko za obe vrsti opazovanja manjkajo podatki o odškodninah, ki se nanašajo na že nastale škode, ki še niso prijavljene. Tovrstno napako pa se da z ustreznimi metodami zmanjšati.

Če izberemo Poissonovo, negativno binomsko ali binomsko porazdelitev, se pri seštevanju neodvisnih slučajnih spremenljivk tip porazdelitve ohranja, parametre verjetnostne funkcije slučajne spremenljivke N pa dobimo tako, da ustrezni parameter za en riziko pomnožimo z izpostavljenostjo. Pri tem izračunane parametre za en riziko lahko korigiramo zaradi različnih trendov ipd.

Tehnične podrobnosti za konkretno delo so razvidne npr. iz (Komelj, 2004) ali (Klugman et al., 2004). V nadaljevanju privzemimo, da tip in parametre verjetnostne funkcije slučajne spremenljivke N poznamo.

6.3 Določanje porazdelitvenih funkcij, ki modelirajo višino odškodnin

Porazdelitveno funkcijo višine odškodnin ocenjujemo na podlagi vzorca vseh odškodnin, ki se nanašajo na določen kolektiv rizikov in določeno časovno obdobje. Če se višina odškodnin ne spreminja bistveno zaradi raznih dejavnikov, kot so inflacija, praksa sodišč ali vremenske razmere, je priporočljivo upoštevati podatke za več let, saj s tem povečujemo velikost vzorca, sicer pa upoštevamo podatke vsaj za eno leto, da izločimo sezonske vplive.

Najbolj preprosto je, če porazdelitveno funkcijo odškodnin modeliramo kar z vzorčno porazdelitveno funkcijo, vendar pa si s tem onemogočimo izračune, v katerih bi uporabljali analitično izražene porazdelitvene funkcije. Pomembna slabost uporabe vzorčne porazdelitvene funkcije je tudi v tem, da si z njo onemogočimo modeliranje odškodnin, ki presegajo največjo vrednost iz vzorca.

Obe omenjeni pomanjkljivosti vzorčne porazdelitvene funkcije odpravimo, če jo uspemo dovolj dobro aproksimirati z analitično izraženimi porazdelitvenimi funkcijami. Pri tem običajno najprej prosto določimo tip porazdelitve, nato pa z različnimi metodami, npr. z metodo momentov ali metodo največjega verjetja, določimo konkretne parametre. Kvaliteto aproksimacije preverimo z različnimi testi, denimo s χ^2-testom ali s testom Kolmogorov-Smirnova. Če aproskimacija ne izpolnjuje minimalnih pogojev, poskusimo z drugim tipom porazdelitvene funkcije. Čeprav imamo danes na voljo velik nabor porazdelitvenih funkcij in tudi programe za izračun njihovih parametrov, pa je iskanje primerne porazdelitvene funkcije še vedno večkrat odvisno od občutka in izkušenj. Sicer pa ni nujno, da najdemo zelo dobro aproksimacijo, če se zadovoljimo s tako, ki je varna, ker se nanaša na bolj tvegano slučajno spremenljivko.

Tehnične podrobnosti za konkretno delo so razvidne npr. iz (Komelj, 2004) ali (Klugman et al., 2004). V nadaljevanju privzemimo, da tip in parametre porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ poznamo.

6.4 Izračun agregatnih odškodnin

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj načinov izračuna agregatnih odškodnin, ki temeljijo na kolektivnem modelu rizikov z znano verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N ter znano porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ nenegativnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$

6.4.1 Eksaktna porazdelitvena funkcija agregatnih odškodnin

Porazdelitveno funkcijo agregatnih odškodnin S lahko zapišemo kot

$$F_S(x) = \mathbb{P}(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}(S \le x | N = n).$$

Pri danem n je verjetnost $\mathbb{P}(S \le x|N = n)$ enaka n-kratni konvoluciji $F_X^{*n}(x)$, zato zgornjo enačbo lahko zapišemo kot

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, F_X^{*n}(x). \tag{6.1}$$

Konvolucija $F_X^{*n}(x)$ je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Izračunamo jo rekurzivno z

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0, \\ 1 & \text{za } x \ge 0, \end{cases}$$

$$F_X^{*n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X^{*(n-1)}(x - z)\mathrm{d}F_X(z) \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Druga enačba se zaradi nenegativnosti slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ poenostavi v

$$F_X^{*n}(x) = \int_0^x F_X^{*(n-1)}(x-z)\mathrm{d}F_X(z) \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Za zvezno slučajno spremenljivko X z odvajanjem in z matematično indukcijo ugotovimo, da je

$$\frac{\mathrm{d}F_X^{*n}(x)}{\mathrm{d}x} = f_X^{*n}(x) \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

kjer je

$$\begin{aligned} f_X^{*1}(x) &= f_X(x), \\ f_X^{*n}(x) &= \int_0^x f_X^{*(n-1)}(x-z)\, f_X(z)\mathrm{d}z \qquad (n = 2,3,\ldots). \end{aligned}$$

Če definiramo še

$$f_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \neq 0, \\ 1 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke S lahko zapišemo kot

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, f_X^{*n}(x). \tag{6.2}$$

Če je $p_0 = 0$, je $F_S'(x) = f_S(x)$ za vsak x, če pa je $p_0 > 0$, porazdelitvena funkcija $F_S(x)$ zaradi $F_X^{*0}(x)$ v točki 0 ni odvedljiva, ker ima v njej skok za p_0.

Oglejmo si še primer, ko so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_N$ diskretne in imajo pri danem $h > 0$ verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(X_1 = kh) = f_k$, $k = 0,1,2\ldots$ Pri danem n verjetnosti $\mathbb{P}(S = kh|N = n)$, $k = 0,1,2\ldots$, izračunamo kot n-kratno diskretno konvolucijo verjetnostne funkcije f_k, $k = 0,1,2\ldots$, same s seboj. Konvolucijo f_k^{*n}, $k = 0,1,2\ldots$, ki je v tem primeru verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke $\sum_{i=1}^n X_i$, izračunamo rekurzivno

$$f_k^{*0} = \begin{cases} 1 & \text{za } k = 0, \\ 0 & \text{za } k = 1,2,\ldots, \end{cases} \tag{6.3a}$$

$$f_k^{*n} = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}^{*(n-1)} f_j \qquad (n = 1,2,\ldots) \quad (k = 0,1,2\ldots). \tag{6.3b}$$

Naj bo $g_k = \mathbb{P}(S = kh)$. Verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke S izračunamo z

$$g_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_k^{*n} \qquad (k = 0,1,2\ldots). \tag{6.4}$$

Teoretično je problem izračuna porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ slučajne spremenljivke S in njene gostote verjetnosti $f_S(x)$, oziroma verjetnostne funkcije g_k, $k = 0,1,2\ldots$, rešen. Vendar v praksi računanje po enačbah (6.1), (6.2) in (6.4) tudi z uporabo računalnikov ni enostavno, pogosto pa sploh ni izvedljivo v razumnem času, ker je število potrebnih računskih operacij preveliko, pa še težave z numerično stabilnostjo imamo.

6.4.2 Metoda momentov

Metoda momentov je aproksimativna metoda, pri kateri porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ aproksimiramo z neko predpostavljeno porazdelitveno funkcijo, ki ima nekaj prvih momentov, običajno dva ali tri, enakih momentom $F_S(x)$. Za kolektivni model rizikov potrebne momente lahko izračunamo iz momentov, ki se nanašajo na slučajno spremenljivko N oziroma na slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots,$ z enačbami (glej npr. Komelj, 2004, str. 12)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1],\\
\mathrm{var}[S] &= \mathbb{E}[N]\,\mathrm{var}[X_1] + \mathrm{var}[N]\,\mathbb{E}^2[X_1],\\
\mu_3[S] &= \mathbb{E}[N]\,\mu_3[X_1] + 3\,\mathrm{var}[N]\,\mathbb{E}[X_1]\,\mathrm{var}[X_1] + \mu_3[N]\,\mathbb{E}^3[X_1].
\end{aligned}$$

V zelo pomembnem primeru, ko je slučajna spremenljivka $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ porazdeljena Poissonovo, se zgornje enačbe poenostavijo v

$$\mathbb{E}[S] = \lambda m_1, \quad \mathrm{var}[S] = \lambda m_2, \quad \mu_3[S] = \lambda m_3,$$

kjer so m_1, m_2 in m_3 prvi trije začetni momenti slučajne spremenljivke X_1. Za prav tako zelo pomemben primer, ko je slučajna spremenljivka $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$ porazdeljena negativno binomsko, pa ustrezne formule najdemo v (Komelj, 2004, str. 14). V nadaljevanju ni bistveno, kako smo momente slučajne spremenljivke S izračunali oziroma ocenili, zadošča nam, da predpostavimo poznavanje pričakovane vrednosti $\mu_S = \mathbb{E}[S]$, standardnega odklona $\sigma_S = \sqrt{\mathrm{var}[S]}$ in koeficienta asimetrije $\gamma_S = \frac{\mu_3[S]}{\sigma_S^3}$ slučajne spremenljivke S.

Porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ najlaže aproksimiramo tako, da predpostavimo normalno porazdelitev, torej $S \sim \mathrm{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$. V takem primeru govorimo o normalni aproksimaciji. Normalna porazdelitev ima koeficient asimetrije nič, zato v splošnem ni ravno dobra aproksimacija za porazdelitev agregatnih odškodnin, ki je običajno asimetrična z $\gamma_S > 0$. Slabost se pokaže predvsem pri repu porazdelitve, od katerega pa so odvisne mere tveganja, kot sta tvegana in končna tvegana vrednost. Tako z aproksimacijo $\mathrm{VaR}_\alpha(S) \approx \Phi^{-1}(\alpha)$ praviloma dobimo podcenjeno vrednost.

Slabost normalne aproksimacije lahko vsaj delno odpravimo tako, da poiščemo tako transformacijo $Y = h(S)$ slučajne spremenljivke S, da bo gostota verjetnosti slučajne spremenljivke Y čim bolj simetrična, nato pa porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke $S = h^{-1}(Y)$ aproksimiramo s $F_S(x) \approx \Phi(h(x))$. Izkaže se (glej Komelj, 2004, str. 25–27), da je dobra izbira

$$S = h^{-1}(Y) = \mu_S + \sigma_S \left(Y + \frac{\gamma_S}{6} (Y^2 - 1) \right),$$
$$Y = h(S) = -\frac{3}{\gamma_S} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_S^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_S} \cdot \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}},$$

vendar le za $S > \mu_S$, ker je v izrazu za Y upoštevan le večji od obeh korenov kvadratne enačbe.

S to aproksimacijo, imenovano NP-aproksimacija, lahko relativno dobro aproksimiramo rep porazdelitvene funkcije $F_S(x)$, če koeficient asimetrije γ_S ne presega ene. Tako lahko tvegano vrednost agregatnih odškodnin $\mathrm{VaR}_\alpha(S)$ aproksimiramo s korenom enačbe $\alpha = \Phi(h(x))$, ki je $x_\alpha = h^{-1}(\Phi^{-1}(\alpha))$. Izračunamo ga v dveh korakih

$$y_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha),$$
$$x_\alpha = \mu_S + \sigma_S \left(y_\alpha + \frac{\gamma_S}{6} \left(y_\alpha^2 - 1 \right) \right),$$

nato pa preverimo, če je $x_\alpha > \mu_S$, saj je aproksimacija uporabna le za dovolj velike α.

Omenimo le še aproksimaciji s premaknjeno in s transformirano gama porazdelitvijo, o katerih več podrobnosti najdemo v (Komelj, 2004), ter aproksimacijo s premaknjeno logaritemsko normalno porazdelitvijo, ki je predstavljena v razdelku 7.2. Vse tovrstne aproksimacije so namreč z razvojem računalništva, ki je omogočilo praktično uporabo natančnejših metod, svoj nekdanji velik pomen izgubile. Kljub temu pa ostajajo standardno aktuarsko orodje vsaj za hitro ocenjevanje.

6.4.3 Izračuni na podlagi rekurzije

Rekurzivne metode za izračun agregatnih odškodnin poleg standardnih zahtev za kolektivni model rizikov zahtevajo, da so vse odškodnine $X_1, X_2, \ldots$ mnogokratnik koraka h. V praksi je vedno tako, če za h vzamemo najmanjši del denarne enote oziroma denarno enoto, če odškodnine zaokrožujemo na cele vrednosti. Vendar pa bi bilo upoštevanje tega dejstva in vzorčne porazdelitvene funkcije praktično neuporabno, ker bi izračuni zahtevali preveč korakov oziroma časa izvajanja tudi na najhitrejših računalnikih. Tudi če bi bil izvedljiv, tak način izračuna ne bi bil smiseln, saj bi po eni strani računali z nepotrebno veliko natančnostjo, po drugi pa bi zanemarili možnost, da bi bile posamezne odškodnine lahko večje od največje vzorčne odškodnine.

Obema težavama se izognemo, če iz vzorčnih podatkov najprej ocenimo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$, nato pa jo s primernim korakom h diskretiziramo, tako da dobimo verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(X_1 = kh) = f_k$, $k = 0,1,\ldots,r$. Pri tem r izberemo tako, da je $F_S(rh)$ dovolj blizu 1, kar pa ni vedno nujno. Če nas, denimo, zanimajo čiste agregatne odškodnine po upoštevanju škodno presežkovnega pozavarovanja, r in h določimo tako, da je produkt rh enak prioriteti. Po razporeditvi verjetnosti $F_X(rh)$ na točke mreže s korakom h na intevalu $[0, rh]$ preostanek verjetnosti do 1 prištejemo k f_r.

Ekvidistantno diskretizacijo lahko naredimo na več načinov. Verjetnost, ki odpade na posamezen interval dolžine h, ki ga definira mreža $0, h, 2h, \ldots, rh$, lahko priredimo levemu ali desnemu krajišču, lahko pa jo porazdelimo tudi na več točk mreže, kar nam omogoča ohraniti vrednost enega ali več momentov. Diskretizacijski algoritem, ki verjetnost posameznega intervala delno priredi levemu, delno pa desnemu krajišču, hkrati pa ohranja pričakovano vrednost, je naveden v (Komelj, 2004, str. 23), za realizacijo v programskem jeziku R pa glej (Dutang et al., 2008, str. 15). Ker taka diskretizacija poveča originalno varianco (Daykin, Pentikäinen & Pesonen, 1994, str. 505), smo z uporabo bolj tvegane porazdelitvene funkcije na varni strani. Če pa želimo natančnejšo diskretizacijo v smislu ohranjanja več momentov, lahko uporabimo algoritem iz (Klugman, Panjer & Willmot, 1998, str. 314). Zaradi diskretizacije pride do sistematične napake metode, ki pa jo vsaj za nekatere načine diskretizacije lahko ocenimo (glej npr. Walhin & Paris, 1998), od tu naprej pa so rekurzijske metode eksaktne.

Izhodišče za rekurzivno računanje verjetnostne funkcije $\mathbb{P}(S = kh) = g_k$, $k = 0,1,2\ldots$, slučajne spremenljivke S je dejstvo, da verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N, ki je porazdeljena Poissonovo, negativno binomsko ali binomsko, iz znane vrednosti p_0 lahko izračunamo rekurzivno po enačbi $p_n = (a + \frac{b}{n})p_{n-1}$, $n = 1,2,\ldots$, kjer sta a in b konstanti. Hitro se lahko prepričamo, da je $a = 0$ in $b = \lambda$, če je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $a = 1-p$ in $b = (\alpha-1)(1-p)$, če je $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$, ter $a = -\frac{p}{1-p}$ in $b = \frac{(n+1)p}{1-p}$, če je $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Poleg naštetih treh možnosti izpolni navedeno rekurzijsko enačbo le še trivialna porazdelitev $p_0 = 1$, ki ji ustrezata $a = b = 0$.

Zaradi rekurzijske enačbe za p_n ter enačb (6.3a) in (6.3b) lahko enačbo (6.4) predelamo v Panjerjevo rekurzijsko formulo (glej Komelj, 2004, str. 39 in 40)

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) f_j \, g_{k-j} \qquad (k = 1,2,\ldots). \tag{6.5}$$

Začetno vrednost za izračun s Panjerjevo rekurzijo, prvič predstavljeno v (Panjer, 1981) oziroma v (Panjer, 1980) za poseben primer, izračunamo z

$$g_0 = \begin{cases} e^{\lambda(f_0-1)} & \text{za } N \sim \mathrm{Po}(\lambda), \\ \left(\frac{p}{1-(1-p)f_0}\right)^{\alpha} & \text{za } N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p), \\ (pf_0 + 1 - p)^n & \text{za } N \sim \mathrm{Bin}(n, p). \end{cases}$$

V primeru, ko je $f_0 = 0$, se zgornja enačba poenostavi v $g_0 = p_0$.

Bistvena prednost Panjerjeve rekurzije pred računanjem s konvolucijo po enačbi (6.4) je manjše število operacij, saj v prvem primeru potrebujemo $O(m^2)$, v drugem pa $O(m^3)$ množenj in deljenj, če računamo do g_m in je $r = m$. Tudi če želimo $F_S(x)$ poznati do mh, porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ običajno ni treba diskretizirati do mh, saj je verjetnost, da bi posamezna odškodnina dosegla mh, praktično nič. Če je $r < m$ in je $f_k = 0$ za $k > r$ oziroma je $\sum_{k=0}^{r} f_k \approx 1$, za rekurzivni izračun zadošča že $O(mr)$ operacij (glej Komelj, 2004, str. 40).

Omenimo le še to, da pri praktični uporabi Panjerjeve rekurzije hitro naletimo na numerične težave z obsegom števil (pogoja underflow in overflow), ki pa se jih da odpraviti na več načinov (glej npr. Komelj, 2004, str. 42 in 43). Ena od rešitev je tudi uporaba Waldmannove rekurzije (glej Waldmann, 1996, in Komelj, 2004, str. 43), katere stranski produkt je tudi izračun stop-loss premije.

Po odkritju Panjerjeve rekurzije, ki je uporabna le za računanje agregatnih odškodnin, porazdeljenih sestavljeno Poissonovo, sestavljeno negativno binomsko ali sestavljeno binomsko, so različni avtorji odkrili rekurzivne formule še za precej drugih verjetnostnih funkcij slučajne spremenljivke N (glej npr. Sundt & Jewell, 1981; Willmot, 1988; Sundt, 1992; Hesselager, 1994; Wang & Sobrero, 1994). Prav tako se da Panjerjeva rekurzija posplošiti tudi za večrazsežne porazdelitve (glej Sundt, 1999), kar je uporabno npr. pri optimizaciji pozavarovanja (glej Walhin, 2003).

Omenimo še, da je mogoče verjetnostno funkcijo vseh treh porazdelitev, za katere je primerna Panjerjeva rekurzija, zapisati z eno samo formulo za verjetnostno funkcijo enotne porazdelitve z dvema parametroma (glej Fackler, 2009).

6.4.4 Izračuni s simulacijo

Za simulacijo potrebujemo generator naključnih števil, ki so enakomerno porazdeljena na enotnem intervalu. Naključnih števil ne smemo generirati z naključno izbranimi metodami (Knuth, 1981, str. 5), zato generatorji naključnih števil običajno iz neke začetne vrednosti (semena) po natanko določenem postopku generirajo zaporedje psevdonaključnih števil. Tako dobljena števila sicer niso naključna, vendar jih z različnimi statističnimi testi ne moremo razločiti od dejansko naključnih števil, če je le generator dober. Če s takim generatorjem dobimo naključno vrednost u, ki se nanaša na slučajno spremenljivko $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, potem je $x = F_X^{-1}(u)$ naključna vrednost, ki se nanaša na slučajno spremenljivko X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$, saj je $F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$.

Opisana metoda je izredno enostavna, kadar je mogoče funkcijo $F_X^{-1}(x)$ analitično izraziti. Za tiste porazdelitve, za katere funkcije $F_X^{-1}(x)$ ne znamo analitično izraziti, pa vrednost $x = F_X^{-1}(u)$ poiščemo z numeričnim reševanjem enačbe $F_X(x) - u = 0$, če zanje ne obstajajo posebni generatorji naključnih števil. Tudi taki generatorji, npr. Box-Mullerjeva oziroma polarna metoda za standardizirano normalno porazdelitev (glej npr. Press, Flannery, Teukolsky & Vetterling, 1992, str. 224), temeljijo na generatorjih enakomerno porazdeljenih naključnih števil na enotnem intervalu, vendar pa pogosto s primerno transformacijo zaobidejo reševanje enačbe $F_X(x) - u = 0$, da so hitrejši.

Načeloma za celoštevilske slučajne spremenljivke naključne vrednosti generiramo analogno kot pri zveznih slučajnih spremenljivkah, seveda pa tudi v tem primeru za doseganje večje hitrosti obstajajo različni posebni prijemi za posamezne porazdelitve.

Več o problematiki generiranja ustrezno porazdeljenih slučajnih spremenljivk najdemo v (Komelj, 2004, str. 46–49, in Press et al., 1992), predvsem pa v (Knuth, 1981).

S simulacijo oziroma z metodo Monte Carlo, kot večkrat rečemo, razmeroma preprosto določimo porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, če poznamo verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N in porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ Zadošča namreč, da za dovolj veliko število let najprej simuliramo letno število odškodnin, nato pa še posamezne odškodnine, ki jih seštejemo. Tako dobimo vzorec agregatnih odškodnin, iz katerega lahko sestavimo vzorčno porazdelitveno funkcijo. Če je potrebno, na podlagi dobljenega vzorca na način, opisan v razdelku 6.3, določimo analitično izraženo porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$. Vsekakor za reševanje našega problema počasnost, ki jo nekateri še vedno pripisujejo metodi simulacije, ni resna ovira.

6.4.5 Izračuni na podlagi inverzne Fourierove transformacije

Problema, kako izračunati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, se lahko lotimo tudi tako, da najprej izračunamo karakteristično funkcijo $\varphi_S(t) = \mathbb{E}[e^{itS}]$ slučajne spremenljivke S, ki enolično določa $f_S(x)$, iz $\varphi_S(t)$ izračunamo $f_S(x)$, nato pa z integriranjem še $F_S(x)$.

Za začetek računanja zadošča poznavanje verjetnostne funkcije p_n, $n = 0,1,2\ldots$, slučajne spremenljivke N in porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ To omogoča izračun rodovne funkcije $G_N(s) = \mathbb{E}[s^N] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ slučajne spremenljivke N in karakteristične funkcije $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}]$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$ Ker ima slučajna spremenljivka $S = X_1 + \cdots + X_n$ gostoto verjetnosti $f_X^{*n}(x)$ in karakteristično funkcijo $(\varphi_X(t))^n$, zaradi aditivnosti pričakovane vrednosti in enačbe (6.2) dobimo

$$\varphi_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\varphi_X(t))^n = G_N(\varphi_X(t)).$$

To pomeni, da lahko predpostavimo poznavanje karakteristične funkcije $\varphi_S(t)$ in se osredotočimo na problem, kako iz nje izračunati $f_S(x)$.

Za diskretno slučajno spremenljivko N z zalogo vrednosti $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ je karakteristična funkcija $\varphi_N(t)$ Fourier-Stieltjesova transformiranka verjetnostne funkcije p_n, $n = 0,1,2\ldots$ Le-to iz znane karakteristične funkcije izračunamo z inverzno Fourier-Stieltjesovo transformacijo po enačbi

$$p_n = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{-itx_n} \varphi_N(t) \mathrm{d}t \qquad (n = 0,1,2\ldots),$$

ki se za slučajno spremenljivko N z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$ poenostavi v

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} \varphi_N(t) \mathrm{d}t \qquad (n = 0,1,2\ldots).$$

Za zvezno slučajno spremenljivko X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ je karakteristična funkcija $\varphi_X(t)$ Fourierova transformiranka gostote verjetnosti $f_X(x)$. Iz znane karakteristične funkcije gostoto verjetnosti izračunamo z inverzno Fourierovo transformacijo. Če je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| \mathrm{d}t < \infty$, potem je $F_X(x)$ absolutno zvezna,

$f_X(x)$ pa zvezna funkcija. Izračunamo jo po enačbi

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\,\varphi_X(t)\mathrm{d}t, \tag{6.6}$$

ki jo lahko predelamo v

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}[e^{-itx}\,\varphi_X(t)]\mathrm{d}t.$$

V splošnem primeru velja, da je za točko x, v kateri je funkcija $F_X(x)$ zvezna,

$$F_X(x) = \lim_{y\to-\infty}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\,\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

Če je $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(t)|\mathrm{d}t < \infty$, zgornjo enačbo lahko predelamo v

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[e^{-itx}\,\varphi_X(t)]}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

Vrnimo se k slučajni spremenljivki S, ki je zvezna, če je $p_0 = 0$, sicer pa je mešana, ker ima porazdelitvena funkcija $F_S(x)$ v točki $x = 0$ skok z 0 na p_0. V obeh primerih jo lahko zapišemo kot $S = (1-p_0)\,S_1 + p_0\,S_2$, kjer sta S_1 in S_2 neodvisni slučajni spremenljivki. S_1 je zvezna s porazdelitveno funkcijo

$$F_{S_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0,\\ \frac{F_S(x)-p_0}{1-p_0} & \text{za } x \geq 0,\end{cases}$$

S_2 pa je diskretna z verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(S_2 = 0) = 1$. Ker je

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E}[e^{it((1-p_0)S_1+p_0S_2)}] = \mathbb{E}[e^{it(1-p_0)S_1}]\,\mathbb{E}[e^{itp_0S2}] = \varphi_{S_1}((1-p_0)\,t)\,\varphi_{S_2}(p_0\,t)$$

in je $\varphi_{S_2}(t) \equiv 1$, je $\varphi_S(t) = \varphi_{S_1}((1-p_0)\,t)$ oziroma $\varphi_{S_1}(t) = \varphi_S(\frac{t}{1-p_0})$. Iz absolutne integrabilnosti $\varphi_{S_1}(t)$ na realni osi sledi absolutna integrabilnost $\varphi_S(t)$ in nasprotno. Tako ni nobene potrebe, da bi $F_S(x)$ računali po ovinku, tako da bi po enačbi (6.7) izračunali $F_{S_1}(x)$, nato pa sestavili $F_S(x) = p_0 + (1-p_0)\,F_{S_1}(x)$.

V praksi je zelo pomemben primer, ko porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ ni zvezna, ker ima v točki $x = M$ skok na končno vrednost 1. Na tako možnost naletimo, če je jamstvo zavarovalnice z zavarovalno vsoto navzgor omejeno, tako da odškodnina ne more preseči zgornje meje M, pa tudi takrat, ko imamo škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M, zanimajo pa nas čiste agregatne odškodnine. V takem primeru porazdelitvena funkcija $F_S(x)$ ni zvezna, ker ima skok v točki

$x = M$ in v njenih pozitivnih mnogokratnikih. Tudi v takem primeru pa lahko uporabimo enačbo (6.7).

V splošnem primeru je praktično računanje $F_S(x)$ po enačbi (6.7) zahtevno. Če pa je slučajna spremenljivka N porazdeljena Poissonovo, negativno binomsko ali binomsko, $F_X(x)$ pa aproksimiramo z odsekoma linearno funkcijo, se da enačbo (6.7) predelati v obliko, ki je primerna za numerično računanje. Za podrobnosti glej (Komelj, 2004, str. 32–34), predvsem pa (Heckman & Meyers, 1983, 1984).

V prejšnjem odstavku omenjenem postopku preskočimo z zvezne obravnave na diskretno šele pri numeričnem integriranju, v nadaljevanju pa si bomo ogledali še zelo pomembno varianto izračuna, kjer tak preskok naredimo že kmalu na začetku. V ta namen si najprej oglejmo diskretno Fourierovo transformacijo.

Naj bo $\{f_k\} = \langle \ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ neskončno periodično zaporedje kompleksnih števil s periodo n, za katero je $f_k = f_{k \bmod n}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Vrednosti $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ natanko določajo zaporedje $\{f_k\}$ in periodično funkcijo $f\colon k \mapsto f_k$ iz $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{C}$. Zaporedje $\{f_k\}$ preslikajmo z diskretno Fourierovo transformacijo

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{6.8}$$

v zaporedje $\{\tilde{f}_k\} = \langle \ldots, \tilde{f}_{-2}, \tilde{f}_{-1}, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots \rangle$. Tudi to zaporedje, ki ga lahko interpretiramo kot funkcijo $\tilde{f}\colon k \mapsto \tilde{f}_k$ iz $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{C}$, je očitno periodično s periodo n in zato natanko določeno z vrednostmi $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n-1}$. Iz njega z inverzno diskretno Fourierovo transformacijo

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j \, e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{6.9}$$

$\{\tilde{f}_k\}$ preslikamo nazaj v $\{f_k\}$ (glej npr. Komelj, 2004, str. 35). Z enačbama (6.8) in (6.9) sta definirani preslikavi, ki ju simbolično zapišemo z operatorjem DFT (Discrete Fourier Transform) kot $\{\tilde{f}_k\} = \mathrm{DFT}\,\{f_k\}$ in $\{f_k\} = \mathrm{DFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k\}$, pri tem pa zaradi periodičnosti zadošča računanje le za $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Računanje diskretne Fourierove transformacije po enačbi (6.8) in inverzne Fourierove transformacije po enačbi (6.9) zahteva $O(n^2)$ operacij, a se da zmanjšati na $O(n \log_2 n)$. To je za velike n bistveno hitreje, zato se izboljšani postopek, ki je skiciran tudi v (Komelj, 2004, str. 37), imenuje hitra Fourierova transformacija. Uporablja se predvsem v procesiranju signalov in je po mnenju mnogih eden najpomembnejših algoritmov sploh (glej npr. Rockmore, 2000). Zato bomo v nadaljevanju namesto operatorja DFT raje uporabljali kar operator FFT (Fast Fourier

Transform), ki se od DFT ne razlikuje po vsebini, ampak le po implementaciji. S podrobnostmi izračuna, ki ga je mogoče opraviti tudi v originalni kompleksni tabeli, v kateri je shranjen izhodiščni vektor $\langle f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle$, se tu ne bomo ukvarjali. Algoritem je zaradi svoje pomembnosti teoretično dobro obdelan, obstaja pa tudi cela paleta algoritmov, prirejenih za posebne primere (glej npr. Press et al., 1992), in prosto dostopnih programskih implementacij, npr. tista v programu R (glej R Development Core Team, 2011).

Poleg hitrosti je za naš namen bistveno to, da FFT transformacija zelo poenostavi izračun ciklične diskretne konvolucije. Naj bosta $\{f_k\}$ in $\{g_k\}$ poljubni neskončni kompleksni periodični zaporedji s periodo n, $\{(fg)_k\}$ zaporedje, dobljeno z množenjem istoležnih členov zaporedij $\{f_k\}$ in $\{g_k\}$, $\{(f * g)_k\}$ pa njuna ciklična diskretna konvolucija, definirana z enačbo

$$(f * g)_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \, g_{k-j} \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{6.10}$$

Tudi ciklična diskretna konvolucija $\{(f * g)_k\}$ je natanko določena že s členi zaporedja z indeksi $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Namesto da bi jo računali po definiciji (6.10), jo lahko izračunamo hitreje z $\{(f * g)_k\} = \mathrm{FFT}^{-1}\{\tilde{f}_k \tilde{g}_k\}$ (glej npr. Komelj, 2004, str. 35). To pomeni, da najprej izračunamo hitri Fourierovi transformiranki $\{\tilde{f}_k\} = \mathrm{FFT}\{f_k\}$ in $\{\tilde{g}_k\} = \mathrm{FFT}\{g_k\}$, zmnožimo istoležne člene, nato pa izračunamo še inverzno hitro Fourierovo transformacijo.

Če za slučajno spremenljivko X z zalogo vrednosti $\{0, h, \ldots, (n-1)h\}$ in verjetnostno funkcijo $f_k = \mathbb{P}(X = kh)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, izračunamo $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ v točki $t = \frac{2\pi k}{nh}$ za $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, dobimo $\tilde{f}_k$. Zato včasih tudi vektorju $\langle \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n-1} \rangle$ rečemo kar karakteristična funkcija.

V nadaljevanju opisana metoda za izračun agregatnih odškodnin temelji na hitri Fourierovi transformaciji. Uporabna je v primerih, ko je porazdelitev odškodnin podana z verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(X = kh) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$, kjer sta h in r primerno izbrani vrednosti. Ustrezno obliko iz zvezne porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ dobimo s postopkom ekvidistantne diskretizacije, ki smo ga opisali pri rekurzivnem izračunu, le da smo tam funkcijo $F_X(x)$ diskretizirali do rh, tu pa do $(r-1)h$. Kot bomo videli, je izjemno pomembno, da računamo z ekvivalentno verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, kjer je $n = 2r$ ter $f_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2} = r$. Na tako definirano verjetnostno funkcijo lahko gledamo kot na podzaporedje periodičnega zaporedja $\{f_k\} = \langle \ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ s periodo n, za katerega je $f_k = f_{k \bmod n}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$.

Naj bo Y slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $g_k = \mathbb{P}(Y = kh)$, $k =$

$0,1,\ldots,n-1$, ki določa zaporedje $\{g_k\} = \langle \ldots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$ s periodo n, in $g_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2}$. Naj bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni in $Z = X + Y$. Vse mogoče vrednosti slučajne spremenljivke Z so mnogokratniki koraka h. Največja mogoča vrednost je $2(r-1)h = (n-2)h$, zato je $h_k = \mathbb{P}(Z = kh) = 0$ za $k \geq n-1$. Preostale verjetnosti izračunamo z diskretno konvolucijo

$$h_k = \sum_{j=0}^{k} f_j \, g_{k-j} \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1). \tag{6.11}$$

Da enačba velja tudi za $k = n-1$, ko je vrednost $(n-1)h$ za vsoto $X+Y$ nedosegljiva, smo lahko zapisali zato, ker je $f_j \, g_{n-1-j} = 0$ za $j = 0,1,\ldots,n-1$, saj je $f_j = 0$ za $j \geq \frac{n}{2}$ in $g_{n-1-j} = 0$ za $j \leq \frac{n}{2} - 1$.

Če na verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke Z gledamo kot na podzaporedje cikličnega zaporedja s periodo n, enačba (6.11) velja za vsak $k \in \mathbb{Z}$ in se od enačbe (6.10) razlikuje le po meji, do katere seštevamo. V našem primeru, ko na verjetnostni funkciji f_k in g_k, $k = 0,1,\ldots,r-1$, gledamo kot na podzaporedji dolžine r, dopolnjeni z r ničlami do dolžine $n = 2r$, sta enačbi (6.10) in (6.11) ekvivalentni. Nadaljevanje seštevanja na desni strani enačbe (6.11) namreč nima smisla, ker je $\sum_{j=k+1}^{n-1} f_j \, g_{k-j} = 0$ (glej Komelj, 2004, str. 36).

Ugotovili smo, da v primeru, ko je izpolnjen pogoj $f_k = g_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2}$, verjetnostno funkcijo vsote $Z = X + Y$ namesto z diskretno konvolucijo lahko izračunamo tudi s ciklično diskretno konvolucijo. Zato lahko uporabimo enačbo

$$\{h_k\} = \{(f * g)_k\} = \mathrm{FFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k \, \tilde{g}_k\} \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1).$$

Naj bo N slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(N = k) = p_k$, $k = 0,1,2\ldots$, in rodovno funkcijo $G_N(s)$. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ od N in med seboj neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0,1,\ldots,r-1$. Verjetnostno funkcijo $\mathbb{P}(S = kh) = g_k$, $k = 0,1,2\ldots$, slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ lahko izračunamo po enačbi (6.4). Če na zaporedje $\{g_k\}$ uporabimo FFT operator, za katerega iz enačbe (6.8) vidimo, da je linearen, dobimo

$$\mathrm{FFT}\,\{g_k\} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \, \mathrm{FFT}\,\{f_k^{*j}\} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \,\{\tilde{f}_k^{\,j}\} = \{G_N(\tilde{f}_k)\}$$

in od tu

$$\{g_k\} = \mathrm{FFT}^{-1}\,\{G_N(\tilde{f}_k)\}.$$

Pri računanju po zgornji enačbi je pomembna pravilna izbira števila n. Če je n premajhen, zaradi cikličnosti dobimo izkrivljene rezultate. Če bi računali verjetnostno funkcijo za $S = X_1 + \cdots + X_j$ po enačbi $\{f_k^{*j}\} = \mathrm{FFT}^{-1}\{\tilde{f}_k^j\}$, bi morali podzaporedje $f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}$ dopolniti z ničlami do dolžine n, ki je večja ali enaka jr. Zaradi specifičnosti implementacije hitre Fourierove transformacije običajno zahtevamo še, da je n potenca števila 2, ni pa to nujno. V našem primeru j teče v neskončnost, zato bi morali analizirati velikosti elementov $p_j \tilde{f}_k^j$ oziroma hitrost konvergence neskončne vrste. Enostavneje in dovolj natančno pa je, če izračunamo $\mathbb{E}[S]$ in σ_S ter z normalno aproksimacijo določimo tak $n = 2^m$, da bo $F_S(nh) \approx 1$.

S hitro Fourierovo transformacijo lahko preprosto izračunamo tudi porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^n X_i$, kjer so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne in različno porazdeljene. Porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ moramo diskretizirati z istim korakom h, za vsako od njih izračunati karakteristično funkcijo, dobljeno s hitro Fourierovo transformacijo, karakteristične funkcije po komponentah zmnožiti in izračunati inverzno hitro Fourierovo transformacijo. Tako lahko zelo enostavno dodatno agregiramo odškodnine na višjih ravneh, če jih, denimo, na prvi ravni računamo za posamezne zavarovalne vrste. Tako najprej za k-to zavarovalno vrsto izračunamo karakteristično funkcijo vsote $S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{ki}$, kjer so $X_{k1}, \ldots, X_{kN_k}$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke ter N_k od njih neodvisna slučajna spremenljivka, nato pa z množenjem dobljenih karakterističnih funkcij po komponentah izračunamo še karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $S = \sum_{k=1}^n S_k$.

Zanimivo in podrobno predstavitev uporabe hitre Fourierove transformacije za izračun agregatnih odškodnin, vključno s podrobno predstavitvijo algoritmov in obravnavo nezanesljivosti parametrov, si lahko ogledamo v (Robertson, 1992). Tu le še omenimo, da je bila v prejšnjem odstavku opisana prožnost izračunov s hitro Fourierovo transformacijo pomemben motiv za iskanje metode, ki bi omogočila njeno uporabo tudi pri seštevanju koreliranih slučajnih spremenljivk. Pot do tega cilja je za poseben primer predstavljena v naslednjem poglavju v razdelku 7.5.

7 Izračun porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih slučajnih spremenljivk

V prejšnjem poglavju smo si ogledali, kako za kolektivni model rizikov izračunamo vsoto $S = \sum_{i=1}^N X_i$ naključnega števila neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so enako porazdeljene. Če opustimo predpostavko o neodvisnosti, za izračun S potrebujemo še informacijo o strukturi odvisnosti slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_N$. V praksi je običajno pričakovano število $\mathbb{E}[N]$ slučajnih spremenljivk veliko, zlasti v zavarovalništvu, ko z njimi modeliramo višine odškodnin. Zato je iluzorno pričakovati poznavanje medsebojne odvisnosti za vse mogoče pare X_i, X_j, $1 \leq i < j \leq N$, zlasti še, če ocenjujemo, da je odvisnost zanemarljiva oziroma je sploh ni, če izvzamemo skupne vplive, kot sta vreme in inflacija. Oba omenjena sistemska vpliva lahko v model vgradimo posredno. Vremenu pripisujemo vpliv na število škod oziroma odškodnin, inflaciji pa vpliv na višino odškodnin. Zato lahko vpliv vremena v model vgradimo tako, da ustrezno priredimo verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N, vpliv inflacije pa tako, da priredimo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ slučajnih spremenljivk $X_1, \dots, X_N$, nato pa S izračunamo s predpostavko o neodvisnosti. Poleg navedene poenostavitve obstajajo tudi druge metode, podrobno opisane v (Wang, 1998b, 1998c), ki pa nas v nadaljevanju ne bodo zanimale. Prav tako nas ne bodo zanimali redki ekstremni primeri, ki so običajno posledica naravnih nesreč, zaradi katerih se število škod in odškodnin zelo poveča, odvisnosti med njimi pa so zelo velike. Za obravnavo ekstremnih dogodkov obstaja teorija ekstremne vrednosti (glej npr. McNeil et al., 2005), prav tako pa tudi posebne metode za modeliranje (glej npr. Grossi & Kunreuther, 2005). Posledice naravnih nesreč so lahko katastrofalne, zlasti še pri potresu, zato se je predvsem potrebno primerno pozavarovati (glej Komelj, 2005).

V tem poglavju nas bodo zanimali primeri, ko imamo vnaprej znano število slučajnih spremenljivk $X_1, \dots, X_n$, ki so običajno različno porazdeljene. Število spremenljivk n je odvisno od zapletenosti modela, ki nas zanima. Tu ni težav teoretične narave, zato pa obstajajo praktične omejitve. Zgornjo mejo za n nam narekuje dejstvo, da je za n slučajnih spremenljivk $\frac{n(n-1)}{2}$ parov, za katere moramo poznati medsebojne odvisnosti. Dodatna omejitev pa je lahko tudi premajhna učinkovitost same metode izračuna oziroma prevelika časovna kompleksnost ustreznega algoritma.

V nadaljevanju bomo večkrat namesto o (ne)odvisnosti slučajnih spremenljivk $X_1, \dots, X_n$ govorili o njihovi (ne)koreliranosti, čeprav vemo, da to ni ekvivalentno. Zadostovalo nam bo, da iz neodvisnosti sledi nekoreliranost, iz koreliranosti pa odvisnost. Ne bo nas motilo, da iz nekoreliranosti ne moremo sklepati o neodvisnosti, iz odvisnosti pa ne o koreliranosti. To velja za Pearsonov korelacijski koeficient, Spearmanov korelacijski koeficient ranga in Kendallov τ.

Predpostavimo, da za slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ poznamo porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ in kovariančno (ali disperzijsko) matriko Σ oziroma (psevdo)-korelacijsko matriko $\mathbf{P}$. Za variance privzemimo, da je $0 < \sigma_i^2 < \infty$, $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{D}$ pa naj bo diagonalna matrika, ki ima na diagonali standardne odklone $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, tako da je $\Sigma = \mathbf{DPD}$ oziroma $\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1}\Sigma\mathbf{D}^{-1}$. Kot smo omenili že v razdelku 5.1 v komentarju, ki sledi primeru 5.3 na strani 97, je s temi informacijami v okolju eliptično porazdeljenih slučajnih vektorjev $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ večrazsežna porazdelitvena funkcija $F_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n)$ enolično določena. V splošnem primeru pa je mogoče, da ustrezna večrazsežna porazdelitvena funkcija sploh ne obstaja, lahko pa jih je celo neskončno. Tudi v tem primeru pa je težko najti že eno samo, kot ugotavlja Wang (1998b, str. 30).

Ko poznamo porazdelitveno funkcijo $F_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n)$, vsaj teoretično ne bi smelo biti težav, kako izračunati porazdelitveno funkcijo vsote $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Po drugi strani pa ravno zato, ker nas zanima le porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke S, poznavanje porazdelitvene funkcije $F_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n)$ ni nujno. Dejstvo, da je morda neskončno večrazsežnih porazdelitvenih funkcij z danimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami in z dano korelacijsko strukturo, celo upravičuje praktično uporabo metod, s katerimi dobimo uporabne rezultate, ne vemo pa, na katero večrazsežno porazdelitev se nanašajo, včasih pa tudi tega ne, če taka večrazsežna porazdelitev, ki bi dala enake rezultate, sploh obstaja.

7.1 Metoda momentov

Na podlagi znanih porazdelitvenih funkcij $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in kovariančne matrike Σ lahko izračunamo $\mu_S = \mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ in $\sigma_S = \sqrt{\mathrm{var}[S]}$, kjer je

$$\mathrm{var}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}[X_i, X_j],$$

kar s korelacijsko matriko $\mathbf{P}$, ki jo izračunamo iz kovariančne matrike Σ, lahko zapišemo tudi matrično kot $\mathrm{var}[S] = \sigma^t \, \mathbf{P} \, \sigma$, kjer je $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^t$.

Z znanima prvima dvema začetnima momentoma $m_1(S) = \mu_S$ in $m_2(S) = \mu_S^2 + \sigma_S^2$ lahko porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke S aproksimiramo s kakšno od porazdelitvenih funkcij z dvema parametroma. Glavne kandidatke so normalna, logaritemsko normalna in gama porazdelitev, ustrezne parametre pa izračunamo z izenačitvijo prvih dveh momentov. Za normalno porazdelitev ni več kaj računati, saj lahko predpostavimo $S \sim \mathrm{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$.

Logaritemsko normalna porazdelitvena funkcija $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2}}{t} \, \mathrm{d}t$, $\sigma > 0$, je definirana za $x > 0$ in ima prva dva začetna momenta $m_1 = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ in $m_2 = e^{2\mu + 2\sigma^2}$. Po logaritmiranju in razrešitvi sistema dveh enačb z dvema neznankama dobimo[18]

$$\begin{aligned}\mu &= 2\,\log m_1 - \frac{1}{2}\,\log m_2 = \log\left(\frac{m_1^2}{\sqrt{m_2}}\right),\\ \sigma &= \sqrt{\log m_2 - 2\,\log m_1} = \sqrt{\log\left(\frac{m_2}{m_1^2}\right)}\,.\end{aligned}$$

Ko v zgornji enačbi za m_1 in m_2 vstavimo μ_S in $\mu_S^2 + \sigma_S^2$, dobimo

$$\begin{aligned}\mu &= \log \mu_S - \frac{1}{2}\log(1 + \varrho_S^2),\\ \sigma &= \sqrt{\log(1 + \varrho_S^2)},\end{aligned}$$

kjer je $\varrho_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$ koeficient variacije, in privzamemo $S \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Gama porazdelitvena funkcija $F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\lambda x} t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t,\ \alpha, \lambda > 0$, ima prva dva začetna momenta enaka $m_1 = \frac{\alpha}{\lambda}$ in $m_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$. Z razrešitvijo sistema dveh enačb z dvema neznankama dobimo $\alpha = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2}$ in $\lambda = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}$. Ko za m_1 in m_2 vstavimo μ_S in $\mu_S^2 + \sigma_S^2$, dobimo $\alpha = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2}$ in $\lambda = \frac{\mu_S}{\sigma_S^2}$ ter privzamemo $S \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Seveda lahko uporabimo tudi kakšno drugo dvoparametrično porazdelitveno funkcijo, vendar v nobenem primeru nimamo zanesljivega kriterija, s katerim bi lahko ocenili kvaliteto aproksimacije. Morda je še najboljši praktični kriterij, da najprej eksaktno in po metodi momentov izračunamo oziroma aproksimiramo porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $\tilde{S} = \sum_{i=1}^n X_i$ ob predpostavki, da so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne. Če se tako dobljeni pomožni porazdelitvi kvečjemu nebistveno razlikujeta, sklepamo, da to velja tudi v koreliranem primeru, sicer pa aproksimaciji ne zaupamo. Pri tem opozorimo še na to, da je od metod iz razdelka 6.4 za preverjanje uporaben izračun na podlagi inverzne Fourierove transformacije, pa tudi simulacija, saj jo brez težav priredimo za slučajne spremenljivke, ki so vsote znanega števila različno porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Opisanemu načinu preverjanja kvalitete aproksimacije poleg nezanesljivosti lahko očitamo tudi neracionalnost, saj z zapleteno metodo rešujemo pomožni problem, da bi upravičili uporabo preproste metode za reševanje glavnega problema. To slabost sicer neobveznega preverjanja kvalitete aproksimacije odpravlja metoda dodanega šuma, ki zna koristno uporabiti pomožni rezultat za slučajno

[18] V (Komelj, 2004, priloge, str. 30) sta navedeni enačbi, ki ju iz vzorca dobimo z metodo največjega verjetja. Zraven piše, da ju dobimo tudi z metodo momentov, kar je napaka. Dejansko ju dobimo z metodo momentov za logaritem izhodiščne slučajne spremenljivke.

spremenljivko $\tilde{S}$.

7.2 Metoda dodanega šuma

Tudi metoda dodanega šuma je aproksimacijska metoda, ki temelji na izenačitvi prvih dveh momentov. Njeno izhodišče je predpostavka, da je $S = \tilde{S} + Z$, kjer je $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ob predpostavki, da so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne, Z pa od $\tilde{S}$ neodvisna neznana slučajna spremenljivka. Ob teh predpostavkah je $\mathbb{E}[\tilde{S}] = \mathbb{E}[S]$, iz česar sledi $\mathbb{E}[Z] = 0$, ter $\text{var}[\tilde{S}] = \sum_{i=1}^{n} \text{var}[X_i]$ in $\text{var}[S] = \text{var}[\tilde{S}] + \text{var}[Z]$, tako da je $\sigma_Z^2 = \text{var}[Z] = 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \text{cov}[X_i, X_j]$. Neznano slučajno spremenljivko Z lahko proglasimo za dodani šum, ki med neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ vnaša koreliranost, pri tem pa ne vpliva na pričakovano vrednost njihove vsote, povečuje pa njeno varianco.

Seveda moramo za praktičen izračun izbrati porazdelitev neznane slučajne spremenljivke Z, denimo $Z \sim \text{N}(0, \sigma_Z^2)$, nato pa z eno od metod za izračun vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk v prvem koraku izračunati porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $\tilde{S}$, v drugem pa porazdelitveno funkcijo $S = \tilde{S} + Z$. Če nas ne zanima primerjava med porazdelitvijo vsote odvisnih in neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$, lahko oba koraka tudi združimo. Zelo primerna metoda za seštevanje neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki v tem primeru zahteva izjemno malo dodatnega dela, je izračun na podlagi inverzne Fourierove transformacije. Zahteva le dodatno množenje karakterističnih funkcij $\varphi_{\tilde{S}}(t)$ in $\varphi_Z(t)$ ter dodatni izračun inverzne Fourierove transformacije, če nas zaradi primerjave poleg porazdelitve slučajne spremenljivke S zanima tudi porazdelitev slučajne spremenljivke $\tilde{S}$.

Kot navaja Mildenhall (2006, str. 136), poleg normalne porazdelitve slučajne spremenljivke Z pride v poštev tudi premaknjena logaritemsko normalna porazdelitev, ki pa ima tri parametre. Zato si najprej oglejmo, kako jih določimo v splošnem primeru, če poznamo μ_Z, σ_Z in γ_Z. Ker je za simetrične porazdelitve primerna že normalna porazdelitev in ker z logaritemsko normalno porazdelitvijo ne moremo doseči $\gamma_Z = 0$, privzemimo, da je $\gamma_Z \neq 0$.

Naj bo $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$. Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena premaknjeno logaritemsko normalno, če je $Z = d \pm X$, $d \in \mathbb{R}$. Ker je $\mathbb{E}[Z] = d \pm \mathbb{E}[X]$, dobimo prvi pogoj $\mu_Z = d \pm e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$. Drugi pogoj dobimo z upoštevanjem dejstva, da je varianca invariantna na zrcaljenje prek y-osi in na premik, zaradi česar je $\sigma_Z = \sigma_X = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$. Koeficient asimetrije je invarianten na premik, zrcaljenje prek y-osi pa mu spremeni predznak, zato je $\gamma_Z = \pm\gamma_X = \pm(e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$. Ker je $\gamma_X > 0$, je predznak v enačbi $Z = d \pm X$ enak predznaku γ_Z.

Naj bo $\eta = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$. Ker je $\gamma_X = (\eta^2 + 3)\eta$, za $\gamma_Z > 0$ dobimo enačbo $\eta^3 + 3\eta - \gamma_Z = 0$, za $\gamma_Z < 0$ pa $\eta^3 + 3\eta + \gamma_Z = 0$. Obe lahko združimo v tretji pogoj $\eta^3 + 3\eta - |\gamma_Z| = 0$. Na levi strani enačaja je naraščajoč kubični polinom, ki je v točki 0 negativen. Zato ima samo eno realno ničlo $\hat{\eta}$, ki pa je pozitivna. Z njo izračunamo $\sigma = \sqrt{\log(1 + \hat{\eta}^2)}$, iz prvih dveh pogojev pa dobimo še $d = \mu_Z - \operatorname{sgn}(\gamma_Z)\,\frac{\sigma_Z}{\hat{\eta}}$ in $\mu = \log \sigma_Z - \log \hat{\eta} - \frac{1}{2}\log(1 + \hat{\eta}^2)$.

V našem posebnem primeru je poleg $\mu_Z = 0$ predpisan le še standardni odklon σ_Z. Zato lahko poljubno izberemo koeficient asimetrije γ_Z, poiščemo koren kubične enačbe $\eta^3 + 3\eta - |\gamma_Z| = 0$ ter z njim izračunamo $\sigma = \sqrt{\log(1 + \hat{\eta}^2)}$, $d = -\operatorname{sgn}(\gamma_Z)\,\frac{\sigma_Z}{\hat{\eta}}$ in $\mu = \log \sigma_Z - \log \hat{\eta} - \frac{1}{2}\log(1 + \hat{\eta}^2)$. Tako tudi v tem primeru lahko najdemo poljubno število različnih aproksimacij porazdelitvene funkcije $F_S(x)$. Za nobeno od njih pa nimamo garancije, da je taka, kot bi jo dobili s kakšno večrazsežno porazdelitveno funkcijo z danimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami in predpisano kovariančno oziroma korelacijsko matriko.

Premaknjena logaritemsko normalna porazdelitev nam omogoča modeliranje negativno asimetričnih nenegativnih slučajnih spremenljivk, za kar logaritemsko normalna porazdelitev ni primerna. Z dovolj velikim pozitivnim premikom za d lahko praktično izničimo učinek zrcaljenja prek y-osi, ki pozitivne vrednosti spremeni v negativne in obratno, seveda pa so teoretično še vedno mogoče negativne vrednosti. To pa je enaka napaka, kot jo zagrešimo, če z normalno porazdelitvijo aproksimiramo nenegativne slučajne spremenljivke.

7.3 Izračuni s simulacijo normalne in Studentove kopule

Naj bo $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m)^t$ slučajni vektor z neodvisnimi standardizirano normalno porazdeljenimi komponentami. Če je $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$ in $\mathbf{A}$ poljubna $n \times m$ razsežna matrika, potem je slučajni vektor $\mathbf{X} = \mu + \mathbf{A}\,\mathbf{Z}$ n-razsežno normalno porazdeljen. To je ena od več ekvivalentnih definicij večrazsežne normalne porazdelitve, ki jo navajajo npr. McNeil et al. (2005, str. 66). Iz nje sledi, da je $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mu$ in $\operatorname{cov}[\mathbf{X}] = \Sigma$, kjer je $\Sigma = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^t$ $n \times n$ razsežna kovariančna matrika.

Naj bo $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ n-razsežno normalno porazdeljen slučajni vektor s pričakovano vrednostjo μ in s pozitivno definitno kovariančno matriko Σ. Matriko Σ z metodo Choleskega (glej npr. Bohte, 1994, str. 113) razcepimo na produkt $\Sigma = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^t$, kjer je $\mathbf{L}$ spodnje trikotna matrika. Naj bo $m = n$ in $\mathbf{Y} = \mu + \mathbf{L}\,\mathbf{Z}$. Slučajni vektor $\mathbf{Y}$ je porazdeljen n-razsežno normalno s pričakovano vrednostjo μ in kovariančno matriko Σ, torej enako kot slučajni vektor $\mathbf{X}$. To nam omogoča učinkovito generiranje naključnih n-razsežnih normalno porazdeljenih slučajnih vektorjev z algoritmom 7.1 (glej npr. McNeil et al., 2005, str. 66).

Algoritem 7.1: Generiranje naključnega vzorca slučajnega vektorja $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$.

Podatki:

1. n – razsežnost vzorca.
2. μ – n-razsežen vektor (pričakovana vrednost).
3. Σ – $n \times n$ razsežna pozitivno definitna kovariančna matrika.

Rezultat:

$\mathbf{x}$ – naključen n-razsežen vzorec slučajnega vektorja $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$.

Postopek:

1. Matriko Σ po metodi Choleskega razcepi na $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$, kjer je $\mathbf{L}$ spodnje trikotna matrika.
2. Naključno generiraj n standardizirano normalno porazdeljenih vrednosti in jih združi v vektor $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$.
3. Izračunaj $\mathbf{x} = \mu + \mathbf{L}\,\mathbf{z}$.

Opomba 7.1: V algoritmu 7.1 smo se osredotočili le na ključne korake. Zato generiranje standardizirano normalno porazdeljenih naključnih vrednosti obravnavamo kot elementaren korak. Opravimo ga lahko na več načinov, npr. z Box-Mullerjevo oziroma polarno metodo, ki jo najdemo v (Press et al., 1992, str. 224, in Knuth, 1981, str. 117), ali pa z metodo razmerja (Knuth, 1981, str. 125). Seveda imajo razni programi, denimo R, ustrezno funkcijo že vgrajeno. □

Med Studentovo in normalno porazdelitvijo obstaja stohastična povezava

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{W}}\,\mathbf{Z},$$

po kateri je $\mathbf{X} \sim t_n(\nu, \mu, \Sigma)$, če je $\mathbf{Z} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ in $W \sim \chi^2_\nu$ od $\mathbf{Z}$ neodvisna slučajna spremenljivka (Embrechts et al., 2003, str. 26). To nam omogoča, da z malenkostno spremembo algoritma 7.1 sestavimo algoritem 7.2 za generiranje naključnih n-razsežnih Studentovo porazdeljenih slučajnih vektorjev.

Algoritem 7.2: Generiranje naključnega vzorca slučajnega vektorja $\mathbf{X} \sim t_n(\nu, \mu, \Sigma)$.

Podatki:

1. n – razsežnost vzorca.
2. ν – število prostostnih stopenj.
3. μ – n-razsežen vektor (pričakovana vrednost, če je $\nu > 1$).
4. Σ – $n \times n$ razsežna pozitivno definitna disperzijska matrika.

Rezultat:

$\mathbf{x}$ – naključen n-razsežen vzorec slučajnega vektorja $\mathbf{X} \sim t_n(\nu, \mu, \Sigma)$.

Postopek:

1. Matriko Σ po metodi Choleskega razcepi na $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$, kjer je $\mathbf{L}$ spodnje trikotna matrika.
2. Naključno generiraj n standardizirano normalno porazdeljenih vrednosti in jih združi v vektor $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$.
3. Za slučajno spremenljivko $W \sim \chi^2_\nu$ naključno generiraj od vektorja $\mathbf{z}$ neodvisen w.
4. Izračunaj $\mathbf{x} = \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{w}}\mathbf{L}\,\mathbf{z}$.

Naj bo slučajni vektor $\mathbf{Y}$ porazdeljen standardizirano normalno, torej $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, kjer je Σ hkrati kovariančna in korelacijska matrika. Normalna kopula C_Σ^{Ga}, ki povezuje njegove komponente, po izreku 5.11 povezuje tudi komponente slučajnega vektorja, ki ga iz $\mathbf{Y}$ dobimo s strogo naraščajočimi transformacijami komponent. Če komponente naključnega vzorca $\mathbf{y}$, dobljenega z algoritmom 7.1, transformiramo s funkcijo Φ, dobimo naključni vzorec $\mathbf{u}$ slučajnega vektorja $\mathbf{U}$, katerega porazdelitvena funkcija je kopula C_Σ^{Ga}. Če nato komponente naključnega vzorca $\mathbf{u}$ transformiramo s funkcijami $F_{X_1}^{-1}, \ldots, F_{X_n}^{-1}$, po izreku 5.10 dobimo naključni vzorec $\mathbf{x}$ slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in komponentami, ki jih povezuje kopula C_Σ^{Ga}. To pa ne pomeni, da je matrika $\Sigma_\mathbf{X}$ linearnih korelacijskih koeficientov med komponentami slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ enaka matriki Σ.

Predpostavimo, da komponente slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ povezuje normalna kopula C_Σ^{Ga}, za katero matrike Σ še ne poznamo. Porazdelitev slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ želimo s simulacijo modelirati tako, da se bo dobro prilegala izkustveno dobljenim m vzorčnim podatkom, ki jih po stolpcih zložimo v $n \times m$ razsežno matriko $\mathbf{A}$. Izračunajmo vzorčna povprečja vrstic $\hat{\mu}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m A_{ij}$, vzorčne standardne odklone $\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m A_{ij}^2 - \hat{\mu}_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$, ter matriko $\mathbf{B}$ z elementi $B_{ij} = A_{ij} - \hat{\mu}_i$. To zadošča za izračun vzorčne kovariančne matrike $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{B}^t$ in vzorčne korelacijske matrike $\hat{\Sigma}$ z elementi $\hat{\Sigma}_{ij} = \frac{C_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Matrika $\hat{\Sigma}$ je primerna ocena za $\Sigma_\mathbf{X}$, ni pa primerna ocena za Σ, ker matrika $\Sigma_\mathbf{X}$ ni odvisna le od kopule C_Σ^{Ga}, ampak tudi od robnih porazdelitvenih funkcij $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$. Njihov vpliv izničimo, če namesto matrike $\mathbf{A}$ vzamemo matriko $\mathbf{D}$ z elementi $D_{ij} = F_{X_i}(A_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, ter na opisani način izračunamo matriko $\hat{\Sigma}$, ki jo privzamemo za Σ.

Izhajamo lahko tudi iz korelacijske matrike rangov ali Kendallovih τ, ki sta odvisni le od kopule, ocenimo pa ju lahko na podlagi vzorčnih podatkov v matriki $\mathbf{A}$. Z eno od omenjenih matrik zaradi enačb (5.11) in (5.12) iz izreka 5.10, ki ju obrnemo v

$$\rho_{ij} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\, \rho_S(X_i, X_j)\right), \tag{7.1}$$

$$\rho_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\, \tau(X_i, X_j)\right), \tag{7.2}$$

izračunamo elemente ρ_{ij} korelacijske matrike Σ za $1 \le i < j \le n$ ter upoštevamo simetričnost in enice na diagonali.

Analogno razmišljanje kot za $\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ velja tudi za $\mathbf{Y} \sim t_n(\nu, \mathbf{0}, \Sigma)$. Ker tudi za Studentovo kopulo velja enačba (5.12) iz izreka 5.10 (glej Lindskog, McNeil & Schmock, 2003, str. 3, in Embrechts et al., 2003, str. 25), zanjo velja tudi enačba (7.2). Algoritma 7.1 in 7.2 se le malenkostno razlikujeta, zato bomo tokrat za normalno in Studentovo kopulo sestavili skupni algoritem, ki je po zgledu iz (Wang, 1998c, str. 891) dopolnjena kombinacija algoritmov 7.1 in 7.2, prirejena za m vzorcev in korelacijsko matriko namesto kovariančne.

Algoritem 7.3: *Generiranje m naključnih vzorcev n-razsežnega slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami. Komponente povezuje normalna ali Studentova kopula, ki jo določa predpisana korelacijska matrika.*

Podatki:

1. m – število vzorcev.
2. n – razsežnost vzorca.
3. ν – število prostostnih stopenj ($\nu = 0$ pomeni izbiro normalne kopule).
4. $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ – robne porazdelitvene funkcije.
5. Σ – $n \times n$ razsežna pozitivno definitna korelacijska matrika.
6. Tip korelacijske matrike (matrika linearnih korelacijskih koeficientov ali Kendallovih τ, za normalno kopulo tudi korelacijska matrika rangov – algoritem združljivosti tipa kopule in matrike ne kontrolira).

Rezultat:

$\mathbf{X}$ – $n \times m$ razsežna matrika s stolpci, ki so naključni n-razsežni vzorci slučajnega vektorja z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ in komponentami, ki jih povezuje s korelacijsko matriko Σ in njenim tipom določena n-razsežna normalna ali Studentova kopula z ν prostostnimi stopnjami.

Postopek:

1. Če je Σ matrika linearnih korelacijskih koeficientov, naj bo $\mathbf{P} = \Sigma$.
2. Če je Σ korelacijska matrika Kendallovih τ, z enačbo $\rho_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\Sigma_{ij}\right)$ za $i, j = 1, \dots, n$ izračunaj elemente ρ_{ij} korelacijske matrike $\mathbf{P}$.
3. Če je Σ korelacijska matrika rangov, z enačbo $\rho_{ij} = 2\sin(\frac{\pi}{6}\Sigma_{ij})$ za $i, j = 1, \dots, n$ izračunaj elemente ρ_{ij} korelacijske matrike $\mathbf{P}$.
4. Matriko $\mathbf{P}$ po metodi Choleskega razcepi na $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t$, kjer je $\mathbf{L}$ spodnje trikotna matrika.
5. Naključno generiraj mn neodvisnih standardizirano normalno porazdeljenih vrednosti, iz katerih po stolpcih sestavi $n \times m$ razsežno matriko $\mathbf{Z}$.
6. Izračunaj $\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{Z}$.
7. Če je $\nu > 0$, za slučajno spremenljivko $W \sim \chi^2_\nu$ naključno generiraj m neodvisnih vrednosti $w_1, \dots, w_m$, ki so neodvisne tudi od naključno generiranih vrednosti v 5. koraku, nato pa vse elemente j-tega stolpca matrike $\mathbf{Y}$ pomnoži s $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{w_j}}$, $j = 1, \dots, m$.
8. Če je $\nu = 0$, izračunaj matriko $\mathbf{U}$ z elementi $u_{ij} = \Phi(y_{ij})$, sicer pa z elementi $u_{ij} = t_\nu(y_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.
9. Izračunaj matriko $\mathbf{X}$ z elementi $x_{ij} = F^{-1}_{X_i}(u_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Opomba 7.2: Pri generiranju velikih naključnih vzorcev z računalniškimi programi je pomembno tudi varčevanje s pomnilnikom. Ker v algoritmu 7.3 enačbo $a = b$ razumemo kot prirejanje $a \leftarrow b$, bi lahko namesto štirih matrik $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$ in $\mathbf{X}$ uporabljali eno samo, denimo $\mathbf{X}$. Pri tem bi prirejanje $\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{L}\mathbf{Z}$ v 6. koraku nadomestili z $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{L}\mathbf{X}$, vendar pa bi morali produkt spodnje trikotne matrike $\mathbf{L}$ in matrike

$\mathbf{X}$ računati po vrsticah od zadnje proti prvi, da si ne bi prezgodaj starih vrednosti matrike $\mathbf{X}$ prepisali z novimi. Druga spremenjena prirejanja ($x_{ij} \leftarrow \Phi(x_{ij})$ in $x_{ij} \leftarrow t_\nu(x_{ij})$ v 8. koraku ter $x_{ij} \leftarrow F_{X_i}^{-1}(x_{ij})$ v 9. koraku) niso problematična, ker z njimi matriko $\mathbf{X}$ spreminjamo po elementih. □

Z algoritmom 7.3 lahko rešimo našo glavno nalogo z dvema različnima kopulama. Za slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in znano korelacijsko strukturo za dovolj veliko število m generiramo m naključnih vektorskih vzorcev. Za vsakega od njih seštejemo vseh n komponent in dobimo vzorec m vsot $s_1, \ldots, s_m$, iz katerega sestavimo vzorčno stopničasto porazdelitveno funkcijo $\hat{F}_S(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1_{(-\infty,x]}(s_i)$, kjer je indikator $1_{\mathcal{A}}(a)$ enak 1, če je $a \in \mathcal{A}$, sicer pa 0. $\hat{F}_S(x)$ privzamemo za porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Seveda pa lahko dobljeno vzorčno porazdelitveno funkcijo $\hat{F}_S(x)$ aproksimiramo še s kakšno od znanih porazdelitvenih funkcij, če zaradi nadaljnje obdelave potrebujemo analitično izraženo porazdelitveno funkcijo, in dobljeno aproksimacijo $\tilde{F}_S(x)$ namesto $\hat{F}_S(x)$ privzamemo za iskano porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$.

Omenimo še, da so simulacije mogoče tudi za druge kopule, seveda pa vsaka zahteva svoj postopek. Kako za dvorazsežno kopulo C generiramo ustrezno porazdeljene naključne pare $(u_1, u_2)^t$, glej (Nelsen, 2006, str. 41), za posplošitev na več dimenzij pa (Embrechts et al., 2003, str. 8). Iz danega naključnega vzorca $(u_1, \ldots, u_n)^t$ za n-razsežno kopulo C enostavno izračunamo naključni vzorec slučajnega vektorja $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_n(F_{X_1}, \ldots, F_{X_n})$, katerega komponente povezuje kopula C. Ustrezno porazdelitev nam za vektor $(F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, F_{X_n}^{-1}(u_n))^t$ zagotavlja enačba (5.6) iz Sklarovega izreka.

V praksi je pomembno vprašanje, kateri tip kopule in katere parametre naj izberemo za naključno generiranje vzorcev slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$. Tako kot njegove robne porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ določamo na podlagi vzorčnih podatkov, iz njih izhajamo tudi pri določanju kopule C, ki povezuje njegove komponente. Za več o tem glej npr. (Frees & Valdez, 1998; Klugman & Parsa, 1999; De Matteis, 2001; Tang & Valdez, 2006; Genest & Favre, 2007).

7.4 Iman-Conoverjeva metoda

Metoda iz prejšnjega razdelka že v osnovi generira naključne vzorčne vektorje, katerih komponente so porazdeljene tako, kot zahtevajo predpisane robne porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja $\mathbf{X}$, hkrati pa med njimi ustvarja korelacijsko strukturo, ki jo zahteva predpisana korelacijska matrika Σ, zagotavlja pa ustrezna normalna ali Studentova kopula. Tudi metoda, ki jo bomo opisali v tem razdelku, temelji na simulaciji, ki zagotavlja predpisane robne porazdelitve. Dopolnjena pa je z izvirnim postopkom, s katerim sta Iman in Conover (1982) zagotovila aproksimacijo predpisane korelacijske strukture. Omenimo še, da je bilo v prejšnjem razdelku naravno, da je bil slučajni vektor **X** vektor stolpec, v tem pa je naravno, da je **X** vrstični vektor.

V prvi fazi postopka naključno generiramo m naključnih vzorcev slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, pri tem pa upoštevamo le predpisane robne porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$. Na predpisano korelacijsko matriko Σ se ne oziramo, ampak predpostavljamo, da so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke. Dobljene vzorčne vektorje po vrsticah zložimo v $m \times n$ razsežno matriko **A**. Tako so v i-tem stolpcu vrednosti, ki se nanašajo na slučajno spremenljivko X_i. S permutiranjem vrednosti v i-tem stolpcu ne vplivamo na robno porazdelitev, zato pa spreminjamo linearne korelacijske koeficiente, korelacijske koeficiente ranga in Kendallove τ med X_i in drugimi slučajnimi spremenljivkami.

V drugi fazi tako premešamo vrednosti v stolpcih matrike **A**, da se približamo predpisani korelacijski strukturi. Način mešanja nam narekujejo referenčni normalno oziroma Studentovo porazdeljeni vzorci v $m \times n$ razsežni matriki **B**, ki imajo predpisano linearno korelacijsko strukturo. Ta je lahko predpisana neposredno z matriko linearnih korelacijskih koeficientov, lahko pa posredno s korelacijsko matriko rangov oziroma Kendallovih τ. V tem primeru linearne korelacijske koeficiente izračunamo z enačbo (7.1) oziroma (7.2). Vrednosti v stolpcih matrike **A** premešamo tako, da korelacijske koeficiente rangov izenačimo s korelacijskimi koeficienti rangov v referenčni matriki **B**. S tem izenačimo tudi Kendallove τ, ne pa tudi linearnih korelacijskih koeficientov, kar zaradi odvisnosti od robnih porazdelitvenih funkcij v splošnem tudi ni mogoče.

V nadaljevanju bomo podrobneje opisali, kako sestavimo referenčno matriko **B**, pri tem pa bomo s spremenjenimi oznakami sledili viru (Mildenhall, 2006).

Naj bo $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$ slučajni vektor z neodvisnimi standardiziranimi komponentami, za katere je $\mathbb{E}[Z_i] = 0$ in $\text{var}[Z_i] = 1$, $i = 1, \ldots, n$. V tem primeru je $\mathbb{E}[Z_i^2] = 1$ in $\mathbb{E}[ZZ^t] = n$. Če je **Y** od **Z** neodvisen, vendar enako porazdeljen slučajni vektor, je $\mathbb{E}[YZ^t] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n Y_i Z_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i Z_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i]\mathbb{E}[Z_i] = 0$.

Za slučajni vektor **Z** naključno generirajmo m neodvisnih vzorčnih vektorjev, ki jih po vrsticah zložimo v $m \times n$ razsežno matriko **M**. Vrednosti v i-tem stolpcu se nanašajo na slučajno spremenljivko Z_i, zato za dovolj velik m lahko predpostavimo, da je povprečje vrednosti v i-tem stolpcu 0, varianca pa 1, kar velja za $i = 1, \ldots, n$. V tem primeru je vzorčna kovariančna matrika enaka $\frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ in je hkrati tudi vzorčna korelacijska matrika. Zaradi neodvisnosti bi morale biti vrstice matrike $\mathbf{M}$ nekorelirane, zato lahko zahtevamo, da je $\frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M} = \mathbf{I}$, kjer je $\mathbf{I}$ $n \times n$ razsežna enotna matrika.

Naj bo Σ predpisana pozitivno definitna matrika linearnih korelacijskih koeficientov. Po metodi Choleskega jo razcepimo na produkt $\Sigma = \mathbf{U}^t\mathbf{U}$, kjer je $\mathbf{U}$ zgornje trikotna matrika. Naj bo $\mathbf{B} = \mathbf{MU}$, kar je spet $m \times n$ razsežna matrika. Stolpci matrike $\mathbf{B}$ so linearne kombinacije stolpcev matrike $\mathbf{M}$, zato tudi zanje velja, da je povprečje vrednosti v poljubnem stolpcu enako nič. Ker je $\frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M} = \mathbf{I}$, je $\frac{1}{m}\mathbf{B}^t\mathbf{B} = \frac{1}{m}(\mathbf{MU})^t\mathbf{MU} = \frac{1}{m}\mathbf{U}^t\mathbf{M}^t\mathbf{MU} = \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \Sigma$.

Ker je kovariančna matrika enaka korelacijski, je tudi povprečje kvadratov v poljubnem stolpcu matrike $\mathbf{B}$ enako 1. Bistveno pa je, da ima matrika $\mathbf{B}$ predpisano linearno korelacijsko strukturo. Če je slučajni vektor $\mathbf{Z}$ n-razsežno standardizirano normalno porazdeljen, mu zaradi neodvisnosti komponent pripada korelacijska matrika $\mathbf{I}$. V tem primeru je $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}^t\mathbf{M}^t$ produkt spodnje trikotne matrike z matriko $\mathbf{M}^t$, v kateri so stolpci naključni vzorci slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$. Zato tako kot v razdelku 7.3 ugotovimo, da stolpci matrike $\mathbf{B}^t$ predstavljajo naključne vzorce n-razsežnega standardizirano normalno porazdeljenega slučajnega vektorja $\mathbf{U}^t\mathbf{Z}$ s kovariančno in hkrati korelacijsko matriko Σ.

Opisani postopek je ključen za Iman-Conoverjevo metodo, pomembna pa je tudi izbira porazdelitve slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$ oziroma porazdelitev izhodiščnih vzorčnih vektorjev, ki jih običajno ne generiramo naključno, ampak kar sestavimo. Avtorja metode sta ugotovila, da na končni rezultat pomembno vpliva izbira konstant $a_1, \ldots, a_m$, za katere je $\sum_{i=1}^m a_i = 0$ in $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, s katerimi sestavimo izhodiščno matriko $\mathbf{M}$. Kljub svoji ugotovitvi pa sta v primerih uporabila le normalno porazdeljene vrednosti. Le-te lahko naključno generiramo in z dodatnimi transformacijami zagotovimo, da izpolnjujejo pogoja $\sum_{i=1}^m a_i = 0$ in $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$, lahko pa jih kar določimo. Če izberemo $b_i = \Phi^{-1}(\frac{i}{m+1})$ in $a_i = \frac{b_i}{\sqrt{m_{xx}}}$, $i = 1, \ldots, m$, kjer je $m_{xx} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m b_i^2$, sta oba pogoja izpolnjena, z naključnim mešanjem vrednosti v posameznih stolpcih matrike $\mathbf{M}$ pa dobimo matriko referenčnih vzorcev. Ker je malo verjetno, da bo po mešanju vrednosti v stolpcih matrike $\mathbf{M}$ pogoj $\frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M} = \mathbf{I}$ natančno izpolnjen, naredimo še zadnjo korekcijo. Matriko $\mathbf{E} = \frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ po metodi Choleskega razcepimo na $\mathbf{E} = \mathbf{F}^t\mathbf{F}$, kjer je $\mathbf{F}$ zgornje trikotna matrika, namesto $\mathbf{B} = \mathbf{MU}$ pa raje vzamemo $\mathbf{B} = \mathbf{MF}^{-1}\mathbf{U}$. Sedaj je $\frac{1}{m}\mathbf{B}^t\mathbf{B} = \frac{1}{m}(\mathbf{MF}^{-1}\mathbf{U})^t\mathbf{MF}^{-1}\mathbf{U} = \frac{1}{m}\mathbf{U}^t(\mathbf{F}^t)^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{MF}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{U}^t\mathbf{U} = \Sigma$, kar smo želeli. Čeprav se pri dovolj velikem vzorcu matrika $\mathbf{E}$ ne razlikuje dosti od $\mathbf{I}$, se lahko zgodi, da ni pozitivno definitna. V takem primeru razcep po metodi Choleskega ni mogoč, kar pa ni prehuda težava. Stolpce matrike $\mathbf{M}$ dodatno naključno premešamo in poskusimo znova, dokler nam razcep ne uspe. To pa se v praksi skoraj vedno zgodi že v prvem poskusu, tako da dodatno mešanje ni potrebno.

Ostane nam še zadnji korak, da strukturo rangov posameznih elementov v stolpcih matrike **A** izenačimo s tisto v referenčni matriki **B**. Če je element b_{ij} v j-tem stolpcu matrike **B** k-ti po velikosti, potem mora biti tudi a_{ij} po velikosti k-ti element v j-tem stolpcu matrike **A**. Če ni, tja prestavimo pravega.

Od opisanega postopka se algoritem 7.4 razlikuje le v tehnični podrobnosti. Tako v 6. in 7. koraku upoštevamo, da je $\Phi^{-1}(0{,}5-x) = -\Phi^{-1}(0{,}5+x)$ za $x \in [0, \frac{1}{2}]$, kar naj bi zagotovilo, da je kljub zaokrožitvenim napakam $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$. V algoritem smo vgradili tudi varianto za Studentovo kopulo, v zadnjem koraku pa smo s transponiranjem dosegli, da je rezultat formalno tak kot rezultat algoritma 7.3.

Poleg razcepa korelacijskih matrik **P** in **E** z metodo Choleskega je v algoritmu 7.4 ključno naključno mešanje elementov v stolpcih matrike **M** v 9. koraku, malo zahtevnejši pa je tudi izračun matrike rangov **R** v 15. koraku. Algoritem za naključno mešanje navaja Knuth (1981, str. 139), algoritem za izračun rangov za en stolpec pa najdemo v (Press et al., 1992, str. 261). Za oba navedena koraka v nekaterih programih, denimo v R, obstaja ustrezna že vgrajena funkcija.

Če bi v 13. koraku algoritma 7.4 ostali pri izhodiščni referenčni matriki $\mathbf{B} = \mathbf{MU}$, bi stolpci matrike $\mathbf{B}^t$ predstavljali naključne vzorce n-razsežnega standardizirano normalno oziroma Studentovo porazdeljenega slučajnega vektorja s kovariančno in hkrati korelacijsko matriko Σ. Dodatna korekcija, po kateri je $\mathbf{B} = \mathbf{MY} = \mathbf{MF}^{-1}\mathbf{U}$, pri velikem m nebistveno vpliva na dejansko referenčno matriko **B**. Ne glede na velikost vzorca pa korekcijo zaradi $\mathbf{B}^t = \mathbf{U}^t(\mathbf{F}^{-1})^t\mathbf{M}^t$ lahko interpretiramo tako, da naključne vzorce, ki so po stolpcih zloženi v matriko $\mathbf{M}^t$, spremeni v $(\mathbf{F}^{-1})^t\mathbf{M}^t$, da se empirična dejstva natančno ujemajo s teoretično pričakovanimi. Zato so stolpci matrike **X**, dobljene z algoritmom 7.4, naključni vzorci slučajnega vektorja z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in identično korelacijsko strukturo rangov, kot jo ima referenčna matrika **B**. Ta pa ima natanko tako linearno korelacijsko strukturo, kot jo zahteva matrika **P**.

Vsaj približno tako linearno korelacijsko strukturo naj bi imeli tudi naključni vzorci, dobljeni z algoritmom 7.4. To pa v splošnem ne drži, kar tudi praktično preverjeno sledi iz primera 5.3. Predpostavka, da se linearni korelacijski koeficient ne razlikuje dosti od korelacijskega koeficienta ranga, v splošnem ne velja, čeprav velja za normalno kopulo, če jo gledamo kot večrazsežno porazdelitev. Enačba (7.1) namreč pomeni $\rho_{ij} \approx \rho_S(X_i, X_j)$, saj se funkcija $y = 2\sin(\frac{\pi x}{6})$ na intervalu $[-1{,}1]$ absolutno za manj kot 0,02 razlikuje od funkcije $y = x$, relativno pa za manj kot 5 %.

Algoritem 7.4: *Generiranje m naključnih vzorcev n-razsežnega slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami z Iman-Conoverjevo metodo. Komponente povezuje normalna ali Studentova kopula, ki jo določa predpisana korelacijska matrika.*

Podatki:

1. m – število vzorcev.
2. n – razsežnost vzorca.
3. ν – število prostostnih stopenj ($\nu = 0$ pomeni izbiro normalne kopule).
4. $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ – robne porazdelitvene funkcije.
5. Σ – $n \times n$ razsežna pozitivno definitna korelacijska matrika.
6. Tip korelacijske matrike (matrika linearnih korelacijskih koeficientov ali Kendallovih τ, za normalno kopulo tudi korelacijska matrika rangov – algoritem združljivosti tipa kopule in matrike ne kontrolira).

Rezultat:

$\mathbf{X}$ – $n \times m$ razsežna matrika s stolpci, ki so naključni n-razsežni vzorci slučajnega vektorja z robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in komponentami, ki jih povezuje n-razsežna normalna ali Studentova kopula z ν prostostnimi stopnjami in z aproksimativno korelacijsko strukturo, določeno s korelacijsko matriko Σ in njenim tipom.

Postopek:

1. Če je Σ matrika linearnih korelacijskih koeficientov, naj bo $\mathbf{P} = \Sigma$.
2. Če je Σ korelacijska matrika Kendallovih τ, z enačbo $\rho_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\Sigma_{ij}\right)$ za $i, j = 1, \ldots, n$ izračunaj elemente ρ_{ij} korelacijske matrike $\mathbf{P}$.
3. Če je Σ korelacijska matrika rangov, z enačbo $\rho_{ij} = 2\sin(\frac{\pi}{6}\Sigma_{ij})$ za $i, j = 1, \ldots, n$ izračunaj elemente ρ_{ij} korelacijske matrike $\mathbf{P}$.
4. Za $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ m-krat generiraj po n neodvisnih naključnih vrednosti $u_1, \ldots, u_n$, izračunaj $x_i = F_{X_i}^{-1}(u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, in dobljene vektorje $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ po vrsticah zloži v $m \times n$ razsežno matriko $\mathbf{A}$.
5. Matriko $\mathbf{P}$ po metodi Choleskega razcepi na $\mathbf{P} = \mathbf{U}^t\mathbf{U}$, kjer je $\mathbf{U}$ zgornje trikotna matrika.
6. Naj bo $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ in $b_i = \Phi^{-1}(\frac{i}{2k+1})$, $i = 1, \ldots, k$.
7. Za lihe m sestavi vektor stolpec $\mathbf{a} = (b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1, 0, -b_1, \ldots, -b_{k-1}, -b_k)^t$, za sode m pa $\mathbf{a} = (b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1, -b_1, \ldots, -b_{k-1}, -b_k)^t$. Vektor $\mathbf{a}$ normiraj, da bo $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$.
8. Sestavi $m \times n$ razsežno matriko $\mathbf{M}$, tako da so vsi njeni stolpci enaki vektorju $\mathbf{a}$.
9. V matriki $\mathbf{M}$ v vseh stolpcih naključno premešaj vrednosti.
10. Izračunaj $n \times n$ razsežno korelacijsko matriko $\mathbf{E} = \frac{1}{m}\mathbf{M}^t\mathbf{M}$.
11. Matriko $\mathbf{E}$ po metodi Choleskega razcepi na $\mathbf{E} = \mathbf{F}^t\mathbf{F}$, kjer je $\mathbf{F}$ zgornje trikotna matrika. Če razcep ni mogoč, ker $\mathbf{E}$ ni pozitivno definitna matrika, se vrni na 9. korak.
12. Izračunaj $\mathbf{Y} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}$, kar učinkovito storiš, če poiščeš rešitev n zgornje trikotnih sistemom linearnih enačb $\mathbf{F}\mathbf{Y} = \mathbf{U}$, kjer je $\mathbf{Y}$ neznana $n \times n$ razsežna matrika.
13. Izračunaj referenčno matriko $\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}$, ki ima zahtevano linearno korelacijsko strukturo.
14. Če je $\nu > 0$, za slučajno spremenljivko $W \sim \chi^2_\nu$ naključno generiraj m neodvisnih vrednosti $w_1, \ldots, w_m$, ki so neodvisne tudi od naključno generiranih vrednosti v 4. koraku, nato pa vse elemente i-te vrstice matrike $\mathbf{B}$ pomnoži s $\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{w_i}}$, $i = 1, \ldots, m$.
15. Za referenčno matriko $\mathbf{B}$ sestavi matriko rangov $\mathbf{R}$. Element $R_{ij} = k$ pove, da je B_{kj} po velikosti i-ti element v j-tem stolpcu matrike $\mathbf{B}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
16. Za $j = 1, \ldots, n$ naraščajoče uredi j-ti stolpec matrike $\mathbf{A}$ in ga shrani v vektor $\mathbf{a}$, nato pa za $i = 1, \ldots, m$ določi indeks $k = R_{ij}$ in postavi $A_{kj} = a_i$.
17. Izračunaj $\mathbf{X} = \mathbf{A}^t$.

Dodajmo še, da bi v 7. koraku lahko izpustili normiranje vektorja **a**. Če ga pomnožimo s poljubno konstanto $\alpha \neq 0$, s tem z α pomnožimo tudi matriko **M**. S tem posredno z α pomnožimo tudi matriko **F**, matriko $\mathbf{F}^{-1}$ pa z $\frac{1}{\alpha}$. Zato normiranje ne vpliva na referenčno matriko $\mathbf{B} = \mathbf{M}\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{U}$.

Omenimo le še to, da uspešnost oziroma izvedljivost postopka, ki sta ga odkrila Iman in Conover (1982), temelji na kasneje odkritem rezultatu – Vitalejevem izreku. Po njem vsak slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ z zveznimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ lahko aproksimiramo s slučajnimi vektorji $\mathbf{Z}_k = (F_{X_1}^{-1}(T_{1k}(U)), \ldots, F_{X_n}^{-1}(T_{nk}(U)))$, $k = 1,2,\ldots$, ki v porazdelitvi konvergirajo k **X**, ko gre k v neskončnost. Pri tem je $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, $T_{ik} : [0,1] \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1,2,\ldots$, pa so obrnljive funkcije, odvisne od večrazsežne porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja **X**. Za podrobnosti glej (Mildenhall, 2006, str. 185–188, in Vitale, 1990, str. 465, izrek 3).

Z algoritmom 7.4 lahko rešimo našo glavno nalogo na način, ki smo ga opisali že na koncu razdelka 7.3, saj seštevki stolpcev matrike **X** predstavljajo m naključnih vzorcev slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, s katerimi lahko sestavimo vzorčno porazdelitveno funkcijo $\hat{F}_S(x)$.

7.5 Izračuni na podlagi inverzne Fourierove transformacije

Vsak izračun agregatnih odškodnin na podlagi inverzne Fourierove transformacije je v bistvu sestavljen iz dveh ključnih korakov. V prvem koraku izračunamo karakteristično funkcijo $\varphi_S(t)$ slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, v drugem koraku pa z inverzno Fourierovo transformacijo po enačbi (6.6) izračunamo gostoto verjetnosti $f_S(x)$. Z integriranjem $f_S(x)$ lahko izračunamo še porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, če pa $f_S(x)$ ne potrebujemo, lahko drugi korak reduciramo na neposredni izračun $F_S(x)$ z enačbo (6.7).

Drugi korak ni prav nič odvisen od tega, ali so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne ali odvisne. Zato k tistemu, kar smo o inverzni Fourierovi transformaciji že povedali v razdelku 6.4.5, ne bomo nič dodajali, ampak se bomo osredotočili le na izračun $\varphi_S(t)$.

Iz znanih robnih porazdelitvenih funkcij $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ lahko izračunamo robne karakteristične funkcije $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$, zato v nadaljevanju privzemimo, da so znane.

7.5.1 Wangova metoda s (psevdo)karakteristično funkcijo

Wang (1998b) se je izračuna karakteristične funkcije $\varphi_S(t)$ lotil tako, da je za slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ s predpisanimi robnimi karakterističnimi funkcijami $\varphi_{X_1}, \dots, \varphi_{X_n}$ in predpisano kovariančno matriko Σ konstruiral n-razsežno (psevdo)karakteristično funkcijo

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i) \Big(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij} \left[1 - \varphi_{X_i}(t_i) \right] \left[1 - \varphi_{X_j}(t_j) \right] \Big), \tag{7.3}$$

v kateri so ω_{ij} konstante. Funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$ je lahko n-razsežna karakteristična funkcija, ni pa nujno. Za primer, ko je, Wang (1998b, str. 28, izrek 11.1) ugotavlja, da velja enačba $\mathrm{cov}[X_i, X_j] = \omega_{ij}\, \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$, $1 \le i < j \le n$. Pri predpisani kovariančni matriki Σ in predpisanih robnih porazdelitvenih funkcijah so konstante $\omega_{ij} = \frac{\mathrm{cov}[X_i, X_j]}{\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]}$, ki jih imenujmo kovariančni koeficienti, enolično določene, če zahtevamo, da so slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$ nenegativne. Po opustitvi zahteve po nenegativnosti pa je to enolična izbira za tiste pare indeksov i in j, $1 \le i < j \le n$, za katere je $\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \ne 0$. Za morebitne preostale pare indeksov, za katere je $\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = 0$, pa naj bo $\omega_{ij} = 0$, saj je enačba $\mathrm{cov}[X_i, X_j] = \omega_{ij}\, \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ neodvisno od izbire ω_{ij} izpolnjena le v primeru, ko je $\mathrm{cov}[X_i, X_j] = 0$. Že to dejstvo jasno kaže, da z enačbo (7.3) definirana funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$ ne more biti vedno n-razsežna karakteristična funkcija.

Desno stran enačbe (7.3) lahko zapišemo kot vsoto členov, ki so produkti konstante in vseh robnih karakterističnih funkcij, od katerih sta največ dve kvadrirani. V vsakem členu so spremenljivke ločene, zato brez težav določimo izhodiščno n-razsežno gostoto verjetnosti kot vsoto produktov konstant in vseh robnih gostot verjetnosti oziroma njihovih konvolucij samih s seboj, kjer pri pripadajoči robni karakteristični funkciji nastopa kvadrat. Ko dobljeno vsoto preoblikujemo v obliko, analogno tisti v enačbi (7.3), dobimo

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \left(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij} \left[1 - \frac{f_{X_i}^{*2}(x_i)}{f_{X_i}(x_i)} \right] \left[1 - \frac{f_{X_j}^{*2}(x_j)}{f_{X_j}(x_j)} \right] \right) \tag{7.4}$$

(Wang, 1998b, str. 30). Ker mora biti gostota verjetnosti nenegativna, na podlagi zgornje enačbe lahko določimo zadostne pogoje, da je z enačbo (7.3) definirana n-razsežna karakteristična funkcija. Če so vsi izrazi $\frac{f_{X_i}^{*2}(x_i)}{f_{X_i}(x_i)}$ navzgor omejeni, s primerno izbiro dopustnega intervala za parametre ω_{ij} vedno lahko dosežemo nenegativnost desne strani enačbe (7.4). To je mogoče, če je $\lim_{x_i \to \infty} \frac{f_{X_i}^{*2}(x_i)}{f_{X_i}(x_i)} = C_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Če je $C_i = 2$, rečemo, da ima porazdelitvena funkcija F_{X_i} (oziroma njena gostota verjetnosti f_{X_i}) težek rep, če pa je $2 < C_i < \infty$, ima zmeren rep.

Težave lahko nastopijo, če je, denimo, $\lim_{x_k\to\infty} \frac{f^{*2}_{X_k}(x_k)}{f_{X_k}(x_k)} = \infty$, ko pravimo, da ima porazdelitvena funkcija F_{X_k} lahek rep. V takem primeru nenegativnost desne strani enačbe (7.4) lahko dosežemo le z $\omega_{ij} = 0$ za vse pare indeksov i in j, $1 \le i < j \le n$, za katere je $i = k$ ali $j = k$.

Če je funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$, definirana z enačbo (7.3), n-razsežna karakteristična funkcija, potem je

$$\varphi_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) \Big(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \omega_{ij} \left[1 - \varphi_{X_i}(t)\right]\left[1 - \varphi_{X_j}(t)\right] \Big) \tag{7.5}$$

karakteristična funkcija slučajne spremenljivke Z, za katero velja $Z \overset{d}{=} S$. Tudi če funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$, definirana z enačbo (7.3), ni n-razsežna karakteristična funkcija, je mogoče, da je $\varphi_Z(t)$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke Z. Če je, potem je $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[S]$ in $\text{var}[Z] = \text{var}[S]$, tako da lahko naš problem vsaj približno rešimo.

Wang (1998b, str. 32) za praktično uporabo priporoča, da z enačbo (7.5) sestavimo (psevdo)karakteristično funkcijo $\varphi_Z(t)$ ter si ne belimo preveč glave z vprašanjem, ali je $\varphi_Z(t)$ res karakteristična funkcija, še manj pa z vprašanjem, če z enačbo (7.3) dobimo n-razsežno karakteristično funkcijo. Iz znane funkcije $\varphi_Z(t)$ z inverzno Fourierovo transformacijo numerično izračunamo (psevdo)porazdelitveno funkcijo $f_Z(x)$. Če je $f_Z(x)$ nenegativna funkcija, rezultat priznamo za rešitev naloge, sicer pa razmislimo o primernosti kovariančne matrike oziroma uporabljene metode. Wangovemu priporočilu dodajmo le to, da pri diskretnem računanju s hitro Fourierovo transformacijo za rezultat dobimo (psevdo)verjetnostno funkcijo, zato poleg nenegativnosti brez težav lahko preverimo vsaj še to, če je vsota dobljenih verjetnosti dovolj blizu 1.

Primer 7.1: Naj bodo $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$ karakteristične funkcije slučajnih spremenljivk $X_i \sim \text{LN}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Eksplicitne formule za φ_{X_i} sicer ne poznamo, za praktično uporabo pa jo lahko izračunamo z vrsto (glej npr. Leipnik, 1991). Sicer pa to ni bistveno. Pomembno je, da ima logaritemsko normalna porazdelitvena funkcija težek rep (Wang, 1998b, str. 29). Zato je za primerne ω_{ij} z enačbo (7.3) definirana funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$ n-razsežna karakteristična funkcija, z enačbo (7.4) definirana funkcija $f_{\mathbf{X}}$ je pripadajoča gostota verjetnosti, z enačbo (7.5) definirana funkcija $\varphi_Z(t)$ pa je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Wang (1998b, str. 41) navaja, da je $\varphi_{\mathbf{X}}$ karakteristična funkcija n-razsežno logaritemsko normalno porazdeljenega slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ s parametroma μ in Σ. To pomeni, da je slučajni vektor $\log \mathbf{X} = (\log X_1, \ldots, \log X_n)^t$

porazdeljen n-razsežno normalno z istima parametroma. V našem primeru je $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$, diagonalni elementi matrike Σ so $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $i = 1, \ldots, n$, zunajdiagonalnih elementov Σ_{ij}, $i \neq j$, pa še ne poznamo.

Iz enačbe $\mathrm{cov}[X_i, X_j] = e^{\mu_i + \mu_j + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)}(e^{\Sigma_{ij}} - 1)$, ki jo navaja Wang (1998b, str. 41), ob dejstvu, da je $\mathbb{E}[X_i] = e^{\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2}$ in analogno $\mathbb{E}[X_j]$, sledi $\omega_{ij} = e^{\Sigma_{ij}} - 1$, od tu pa $\Sigma_{ij} = \log(1 + \omega_{ij})$. Ker je $\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}[\log X_i, \log X_j] = \rho(\log X_i, \log X_j)\sigma_i\sigma_j$, je $e^{-\sigma_i\sigma_j} - 1 \leq \omega_{ij} \leq e^{\sigma_i\sigma_j} - 1$. Upoštevajmo še $\mathrm{var}[X_i] = e^{2\mu_i + \sigma_i^2}(e^{\sigma_i^2} - 1)$ in analogno enačbo za $\mathrm{var}[X_j]$ ter izračunajmo linearni korelacijski koeficient

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{e^{\Sigma_{ij}} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_i^2} - 1)(e^{\sigma_j^2} - 1)}}.$$

Ker je

$$\frac{e^{-\sigma_i\sigma_j} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_i^2} - 1)(e^{\sigma_j^2} - 1)}} \leq \rho(X_i, X_j) \leq \frac{e^{\sigma_i\sigma_j} - 1}{\sqrt{(e^{\sigma_i^2} - 1)(e^{\sigma_j^2} - 1)}},$$

ga dopustni interval tako, kot smo videli v primeru 5.3 na strani 97, lahko precej utesnjuje. Skratka, če vnaprej predpišemo robne logaritemsko normalne porazdelitvene funkcije in kovariančno oziroma korelacijsko matriko, še zdaleč ni rečeno, da obstaja večrazsežno logaritemsko normalno porazdeljen vektor **X**, ki izpolnjuje predpisane zahteve. Prav tako tudi neodvisno izbiranje parametrov $\omega_{ij} \in [e^{-\sigma_i\sigma_j} - 1, e^{\sigma_i\sigma_j} - 1]$, $1 \leq i < j \leq n$, ne vodi vedno do n-razsežno logaritemsko normalno porazdeljenega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$, ker taka konstrukcija ne zagotavlja, da je matrika Σ pozitivno semidefinitna. □

Wangova metoda je edini avtorju te disertacije znani način konstruiranja karakteristične funkcije vsote komponent slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi karakterističnimi funkcijami in predpisano kovariančno oziroma korelacijsko matriko, pa še ta ima nekaj slabosti. Metoda ne zagotavlja rešitve problema, saj je njen rezultat lahko iskana ali pa neka druga karakteristična funkcija, lahko pa je funkcija, ki ni karakteristična funkcija. Le v zadnjem primeru lahko preprosto ugotovimo, da je rezultat nesmiseln. Če je smiseln, brez dodatnih zahtevnih testov ne vemo, če smo res dobili iskano karakteristično funkcijo. Seveda nas tu moti predvsem napaka metode, ne pa tudi druge napake, ki so posledica numeričnih izračunov in jih vsaj grobo lahko ocenimo. Argument, ki kljub temu upravičuje uporabo Wangove (ali kakšne druge) metode, pa je dejstvo, da so že izhodiščni podatki, denimo korelacijska matrika, lahko tako nezanesljivi, da je morda zaradi tega nastala napaka še večja od (morebitne) napake metode.

Nedorečenost Wangove metode je za avtorja te disertacije pomenila zanimiv izziv in ključni motiv za znanstveni prispevek na področju konstruiranja večrazsežnih karakterističnih funkcij iz znanih robnih karakterističnih funkcij in korelacijske matrike. Pri tem so bile zelo pomembne tudi avtorjeve izjemno dobre praktične izkušnje z uporabo hitre Fourierove transformacije pri izračunu porazdelitvenih funkcij vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk. Zanimanje je dodatno povečala tudi aktualnost, povezana s problematiko izračuna kapitalskih zahtev po standardnem ali internem modelu v okviru projekta Solventnost 2.

Na nov pristop k reševanju problema s hitro Fourierovo transformacijo, ki je predstavljen v zadnjem razdelku tega poglavja, pomembno vpliva nekaj praktičnih omejitev, ki jih obravnavamo v naslednjem razdelku.

7.5.2 "Sklarov" izrek za karakteristične funkcije ne obstaja

Naj bo $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni vektor. Če poznamo njegovo gostoto verjetnosti $f_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n)$, vsaj načeloma z integriranjem lahko izračunamo tudi njegovo karakteristično funkcijo $\varphi_\mathbf{X}(t_1, \ldots, t_n)$, nato pa še $\varphi_S(t) = \varphi_\mathbf{X}(t, \ldots, t)$. Tudi pri izračunu večrazsežne karakteristične funkcije $\varphi_\mathbf{X}$ si lahko pomagamo z diskretizacijo in z večrazsežno hitro Fourierovo transformacijo. Za primer praktične uporabe dvorazsežne FFT (za definicijo glej npr. Press et al., 1992, str. 493) pri reševanju podobnih problemov, kot jih obravnavamo v tej disertaciji, glej (Homer & Clark, 2003; Homer, 2006). Tu pa nas večrazsežna FFT ne bo več zanimala, ker z večanjem števila razsežnosti prehitro postane praktično neuporabna, kar bo razvidno iz nadaljevanja.

Na začetku tega poglavja smo predpostavili le poznavanje robnih porazdelitvenih funkcij $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in kovariančne oziroma korelacijske matrike, zato gostote verjetnosti slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ne poznamo in je tudi ne bomo iskali. Že za dvorazsežne slučajne vektorje $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ je računanje po formuli $\varphi_S(t) = \varphi_\mathbf{X}(t, t)$ neekonomično, če moramo $\varphi_\mathbf{X}(t_1, t_2)$ računati iz dvorazsežne gostote verjetnosti. Tako, denimo, moramo iz $r \times r$ razsežne matrike (diskretizirane dvorazsežne gostote verjetnosti na danem kvadratu) z dvorazsežno hitro Fourierovo transformacijo izračunati r^2 vrednosti karakteristične funkcije $\varphi_\mathbf{X}$, čeprav dejansko potrebujemo le r vrednosti na glavni diagonali. V splošnem n-razsežnem primeru je analogen izračun še bolj neekonomičen, saj še vedno potrebujemo le r vrednosti funkcije $\varphi_\mathbf{X}$ na glavni diagonali n-razsežne kocke, izračunati pa jih moramo r^n.

Pri opisanem načinu izračuna $\varphi_S(t)$ je jalovega dela že za $n = 2$ zelo veliko, saj mora biti za natančne rezultate r dovolj velik. To je glavni razlog, da želimo karakteristično funkcijo $\varphi_\mathbf{X}$ oziroma φ_S izračunati iz robnih karakterističnih funkcij in korelacijske matrike, ne pa po definiciji. Če bi nam to učinkovito uspelo, bi v bistvu n-razsežni problem razbili na n lažjih enorazsežnih problemov. S tem bi se število potrebnih izračunov karakteristične funkcije z r^n zmanjšalo na nr, pri čemer se prva vrednost nanaša na n-razsežno karakteristično funkcijo, druga pa na enorazsežne. Če bi računali s FFT, bi to pomenilo $O(nr^n \log_2 r)$ oziroma $O(nr \log_2 r)$ operacij. Pri praktično uporabnih r (nekaj tisoč do milijon in več) že pri majhnih n prva ocena števila operacij lahko pomeni nemogoče, druga pa le nekaj trenutkov računanja.

V primeru, ko so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne, z znanimi robnimi karakterističnimi funkcijami $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$ trivialno izračunamo $\varphi_S(t)$. Iz

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it_kX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{it_kX_k}] = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k)$$

namreč sledi $\varphi_S(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t, \ldots, t) = \Pi_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$. V tem primeru o neekonomičnem izračunu karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ iz večrazsežne gostote verjetnosti, ki je tudi produkt enorazsežnih robnih gostot verjetnosti, ne moremo govoriti. Zaradi neodvisnosti n-razsežen problem kar sam od sebe razpade na n enorazsežnih.

Enostavnost izračuna $\varphi_S(t)$ iz robnih karakterističnih funkcij v primeru neodvisnosti je močan motivacijski element za primer, ko so slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ korelirane. Najti moramo le dovolj preprost način, kako večrazsežno karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{X}}$ izračunati iz njenih robnih karakterističnih funkcij in korelacijske matrike. Poleg teoretične vrednosti bi bil tak postopek zaradi velike učinkovitosti enorazsežne hitre Fourierove transformacije tudi zelo uporaben. Skratka, zelo lepo bi bilo, če bi za vsako kopulo C obstajala funkcija $K\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, ki bi z enačbo $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = K(\varphi_{X_1}(t_1), \ldots, \varphi_{X_n}(t_n))$ povezovala n-razsežno karakteristično funkcijo z njenimi robnimi karakterističnimi funkcijami, tako kot enačba $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n))$ po Sklarovem izreku povezuje n-razsežno porazdelitveno funkcijo z njenimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami. Žal taka elegantna rešitev v splošnem ne obstaja, kar bomo dokazali s protiprimerom.

Definicija 7.1: *Naj bo $C \neq \Pi^n$ n-razsežna kopula in $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ poljubne zvezne porazdelitvene funkcije. Množico slučajnih vektorjev*

$$\mathcal{R}_n(C) = \{\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) : F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n))\},$$

katerih komponente povezuje kopula C, imenujemo C-povezani slučajni vektorji.

Izrek 7.1: *Za nobeno dvorazsežno normalno kopulo C_ρ^{Ga}, $\rho \in (-1,1) \setminus \{0\}$, ne obstaja taka funkcija $K_\rho^{Ga}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, da bi bila za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$ in za vsak*

$(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ *izpolnjena enačba* $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = K_\rho^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2))$.

Dokaz: Predpostavimo, da obstaja $\rho \in (-1,1) \setminus \{0\}$ in taka funkcija $K_\rho^{Ga} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, da je $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = K_\rho^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2))$ za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$ in za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Vzemimo slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, za katerega je $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ in $X_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$. Vemo, da je slučajni vektor $\mathbf{X}$ porazdeljen dvorazsežno standardizirano normalno. Njegovi robni karakteristični funkciji sta $\varphi_{X_i}(t_i) = e^{-\frac{1}{2}t_i^2}$, $i = 1,2$, njegova karakteristična funkcija pa je

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + 2\rho\, t_1 t_2 + t_2^2)} = e^{-\frac{1}{2}t_1^2}\, e^{-\frac{1}{2}t_2^2}\, e^{-\rho\, t_1 t_2} = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2) e^{-\rho\, t_1 t_2}.$$

Naj bo $t_1 \neq 0$ in $t_2 \neq 0$. Ker je $\varphi_{X_i}(-t_i) = \varphi_{X_i}(t_i) > 0$, z zgornjo enačbo dobimo

$$\varphi_{\mathbf{X}}(-t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\, \varphi_{X_2}(t_2)\, e^{\rho\, t_1 t_2} \neq \varphi_{X_1}(t_1)\, \varphi_{X_2}(t_2)\, e^{-\rho\, t_1 t_2} = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2),$$

kar je v protislovju z enačbo $\varphi_{\mathbf{X}}(-t_1, t_2) = K_\rho^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2)) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$. $\square$

Opomba 7.3: V zgornjem izreku zavestno nismo dopustili možnosti $\rho = -1$ in $\rho = 1$, ko se kopula C_ρ^{Ga} izrodi v kopulo W^2 oziroma M^2, vendar pa izrek očitno velja tudi za ta dva primera. $\square$

Posledica 7.1: *Naj bo* $n \geq 3$ *in* Σ *poljubna* $n \times n$ *razsežna pozitivno definitna korelacijska matrika,* $\Sigma \neq \mathbf{I}$. *Ne obstaja taka funkcija* $K_\Sigma^{Ga} \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, *da bi bila enačba* $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = K_\Sigma^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \ldots, \varphi_{X_n}(t_n))$ *izpolnjena za vsak* $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_n(C_\Sigma^{Ga})$ *in za vsak* $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz: Predpostavimo obstoj pozitivno definitne korelacijske matrike $\Sigma \neq \mathbf{I}$ in take funkcije $K_\Sigma^{Ga} \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, da je $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = K_\Sigma^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \ldots, \varphi_{X_n}(t_n))$ za vsak $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{R}_n(C_\Sigma^{Ga})$ in za vsak $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Zaradi pozitivne definitnosti in pogoja $\Sigma \neq \mathbf{I}$ obstaja vsaj en zunajdiagonalni element $\Sigma_{ij} \notin \{-1,0,1\}$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je to element $\Sigma_{12} = \rho$.

Naj bo $\mathbf{Z} = (X_1, X_2) \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, kjer je $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2) = C_\Sigma^{Ga}(u_1, u_2, 1, \ldots, 1)$ robna dvorazsežna normalna kopula kopule C_Σ^{Ga}. Potem je

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1, t_2) = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, 0, \ldots, 0) = K_\Sigma^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2), 1, \ldots, 1),$$

kar s $K_\rho^{Ga}(z_1, z_2) = K_\Sigma^{Ga}(z_1, z_2, 1, \ldots, 1)$ za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(t_1, t_2) = K_\rho^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2)).$$

Ta enačba velja za vsak $\mathbf{Z} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, saj vedno obstaja primeren $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_n(C_\Sigma^{Ga})$, ki ga lahko skrajšamo v $\mathbf{Z}$. To pa je protislovje, saj po izreku 7.1 taka funkcija K_ρ^{Ga} ne obstaja. $\square$

Za vsako enorazsežno karakteristično funkcijo $\varphi(t)$ velja $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, zaradi česar je dovolj, če jo poznamo na $\mathbb{R}^+$. Za vsako dvorazsežno karakteristično funkcijo $\varphi(t_1, t_2)$ pa velja $\varphi(-t_1, -t_2) = \overline{\varphi(t_1, t_2)}$ in $\varphi(t_1, -t_2) = \overline{\varphi(-t_1, t_2)}$. V tem primeru je dovolj, če jo poznamo na prvem in drugem kvadrantu $\mathbb{R}^2$. Dokaz izreka 7.1 je temeljil na tem, da je izraz $K_\rho^{Ga}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2))$ v izbranem posebnem primeru za vse štiri kvadrante določal iste vrednosti, odvisne le od $|t_1|$ in $|t_2|$. Zato poskusimo še z možnostjo, da obstajata funkciji K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-}, za kateri velja enačba $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = K_\rho^{Ga\pm}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2))$, kjer se predznak plus nanaša na (t_1, t_2) iz prvega in tretjega kvadranta, minus pa na (t_1, t_2) iz drugega in četrtega kvadranta $\mathbb{R}^2$. Ugotovili bomo, da tudi taka možnost ne obstaja. Še prej pa si oglejmo kriterij za presojo, ali je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke.

Definicija 7.2: *Zvezna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je pozitivno definitna, če za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ in za vsak nabor realnih števil $t_1, \ldots, t_n$ ter vsak nabor kompleksnih števil $z_1, \ldots, z_n$ velja*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_i - t_j)\, z_i\, \overline{z}_j \geq 0\,.$$

Brez težav se s primerno izbiro n, $t_1, \ldots, t_n$ in $z_1, \ldots, z_n$ lahko prepričamo (glej npr. Gnedenko, 1976, str. 239), da za vsako pozitivno definitno funkcijo f velja $f(0) \geq 0$, $f(-t) = \overline{f(t)}$ in $|f(t)| \leq f(0)$. Če za poljubno izbrane realne vrednosti $t_1, \ldots, t_n$ sestavimo $n \times n$ razsežno matriko $\mathbf{A}$ z elementi $A_{ij} = f(t_i - t_j)$, dobimo Hermitsko matriko, saj je $A_{ji} = f(t_j - t_i) = \overline{f(t_i - t_j)} = \overline{A_{ij}}$. Če vzamemo še poljuben kompleksen vektor $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$, potem v dvojni vsoti v definiciji 7.2 prepoznamo kvadratno formo $\mathbf{z}^t \mathbf{A} \overline{\mathbf{z}}$. To pa pomeni, da je funkcija f pozitivno definitna, če je za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ in za vsak nabor realnih števil $t_1, \ldots, t_n$ pripadajoča matrika $\mathbf{A}$ pozitivno semidefinitna.

Izrek 7.2: *(Bochner-Hinčin) Zvezna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je karakteristična funkcija natanko takrat, ko je pozitivno definitna in je $f(0) = 1$.*

Dokaz: Glej (Gnedenko, 1976, str. 240). $\square$

Izrek 7.3: *Če za $\rho \in (-1,1)$ obstajata taki funkciji $K_\rho^{Ga+}, K_\rho^{Ga-}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, da je za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$ in za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ izpolnjena enačba*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \begin{cases} K_\rho^{Ga+}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2)) & \textit{za}\ \operatorname{sgn}(t_1 t_2) \geq 0, \\ K_\rho^{Ga-}(\varphi_{X_1}(t_1), \varphi_{X_2}(t_2)) & \textit{za}\ \operatorname{sgn}(t_1 t_2) < 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

potem je $\rho = 0$.

Dokaz: Za normalno kopulo iz nekoreliranosti sledi neodvisnost, zaradi česar je $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$. Za $\rho = 0$ in $K_0^{Ga+}(z_1, z_2) = K_0^{Ga-}(z_1, z_2) = z_1 z_2$ je enačba (7.6) očitno izpolnjena za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_0^{Ga}) = \mathcal{R}_2(\Pi^2)$ in za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Vzemimo poljuben $\rho \in (-1,1) \setminus \{0\}$ in kot izhodišče predpostavimo obstoj takih funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-}, da enačba (7.6) velja za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$ in za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. S protislovjem bomo dokazali, da to ni mogoče.

Na bo $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, kjer je $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ in $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Slučajni vektor $\mathbf{X}$ je porazdeljen dvorazsežno normalno. Njegovi robni karakteristični funkciji sta $\varphi_{X_j}(t_j) = e^{i\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t_j^2}$, $j = 1,2$, karakteristična funkcija pa

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = e^{i(t_1\mu_1 + t_2\mu_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)} = \varphi_{X_1}(t_1)\, \varphi_{X_2}(t_2)\, e^{-\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2}.$$

Iz enačbe $|\varphi_{X_j}(t_j)| = e^{-\frac{1}{2}\sigma_j^2 t_j^2}$ ob dejstvu, da je $\sigma_j > 0$, medtem ko je t_j poljubno predznačeno realno število, z doslednim upoštevanjem enačbe $\sqrt{x^2} = |x|$ dobimo $\sigma_j t_j = \mathrm{sgn}(t_j)\sqrt{-2\log|\varphi_{X_j}(t_j)|}$ ter

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\, \varphi_{X_2}(t_2)\, e^{-2\,\mathrm{sgn}(t_1 t_2)\,\rho\,\sqrt{\log|\varphi_{X_1}(t_1)|\,\log|\varphi_{X_2}(t_2)|}}.$$

Tu nam povzroča težave izraz $\mathrm{sgn}(t_1 t_2)$, ki ga vsaj v primeru, ko je $\mu_1 = \mu_2 = 0$, ne moremo izraziti s funkcijama $\varphi_{X_1}(t_1) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2}$ in $\varphi_{X_2}(t_2) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2}$. Na tem dejstvu v bistvu temelji dokaz izreka 7.1, zato je čas za razvejanje

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \begin{cases} z_1 z_2\, e^{-2\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}} & \text{za } \mathrm{sgn}(t_1 t_2) \geq 0, \\ z_1 z_2\, e^{+2\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}} & \text{za } \mathrm{sgn}(t_1 t_2) < 0, \end{cases} \tag{7.7}$$

kjer je $z_1 = \varphi_{X_1}(t_1)$ in $z_2 = \varphi_{X_2}(t_2)$. Trdimo, da mora za vsak $(z_1, z_2) \in \mathbb{D}_0^2$, kjer je $\mathbb{D}_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, veljati

$$K_\rho^{Ga+}(z_1, z_2) = z_1 z_2\, e^{-2\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}}, \tag{7.8}$$

$$K_\rho^{Ga-}(z_1, z_2) = z_1 z_2\, e^{+2\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}}. \tag{7.9}$$

Če bi obstajal tak par $(w_1, w_2) \in \mathbb{D}_0^2$, da enačba (7.8) ne bi bila izpolnjena, bi za $X_j \sim \mathrm{N}(\arg(w_j), -2\log|w_j|)$ in $t_j = 1$ ter $z_j = \varphi_{X_j}(1) = e^{i\arg(w_j) + \log|w_j|} = w_j$, $j = 1,2$, po enačbi (7.7) dobili

$$\varphi_{\mathbf{X}}(1,1) = w_1 w_2\, e^{-2\rho\sqrt{\log|w_1|\,\log|w_2|}} \neq K_\rho^{Ga+}(w_1, w_2) = K_\rho^{Ga+}(\varphi_{X_1}(1), \varphi_{X_2}(1)),$$

kar je protislovje z izhodiščno predpostavko.

Če bi obstajal tak par $(w_1, w_2) \in \mathbb{D}_0^2$, da enačba (7.9) ne bi bila izpolnjena, bi izbrali $X_1 \sim \mathrm{N}(-\arg(w_1), -2\log|w_1|)$ in $X_2 \sim \mathrm{N}(\arg(w_2), -2\log|w_2|)$. Za $t_1 = -1$ in $t_2 = 1$ bi dobili $z_1 = \varphi_{X_1}(-1) = e^{i\arg(w_1)+\log|w_1|} = w_1$ in $z_2 = \varphi_{X_2}(1) = w_2$ ter po enačbi (7.7)

$$\varphi_{\mathbf{X}}(-1,1) = w_1 w_2\, e^{+2\rho\sqrt{\log|w_1|\,\log|w_2|}} \neq K_\rho^{Ga-}(w_1, w_2) = K_\rho^{Ga-}(\varphi_{X_1}(-1), \varphi_{X_2}(1)),$$

kar je protislovje z izhodiščno predpostavko. To pa pomeni, da pri izhodiščni predpostavki enačbi (7.8) in (7.9) veljata za vsak $(z_1, z_2) \in \mathbb{D}_0^2$. Zato enačba (7.7) velja splošno, ne le za normalno porazdeljene slučajne spremenljivke X_1 in X_2, vendar zaenkrat še z omejitvijo na vse urejene pare $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $0 < |\varphi_{X_1}(t_1)| < 1$ in $0 < |\varphi_{X_2}(t_2)| < 1$.

Oba pogoja omilimo z dopustitvijo možnosti, ko je $t_j = 0$ in $z_j = \varphi_{X_j}(0) = 1$, saj z enačbo (7.7) za poljubno porazdeljeni slučajni spremenljivki X_1 in X_2 dobimo pravilne rezultate $\varphi_{\mathbf{X}}(0,0) = 1$, $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1,0) = \varphi_{X_1}(t_1)$ in $\varphi_{\mathbf{X}}(0, t_2) = \varphi_{X_2}(t_2)$. S tem smo razširili definicijsko območje funkcije K_ρ^{Ga+} z $\mathbb{D}_0^2$ na $(\mathbb{D}_0 \cup \{1\})^2$ in izčrpali vse možnosti, ki se lahko pojavijo pri uporabi enačbe (7.6) z izhodiščnima normalno porazdeljenima slučajnima spremenljivkama X_1 in X_2.

Za karakteristično funkcijo $\varphi(t)$ zvezne slučajne spremenljivke je $|\varphi(t)| < 1$ za $t \neq 0$ (Feller, 1971, str. 501, lema 4), v splošnem pa $\varphi(t)$ lahko doseže vrednost $\varphi(t) \neq 1$, za katero je $|\varphi(t)| = 1$. Čeprav za nadaljevanje dokaza ni potrebno, definicijsko območje funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-} razširimo na $\overline{\mathbb{D}}_0^2$, kjer je $\overline{\mathbb{D}}_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$. To storimo tako, da enačbi (7.8) in (7.9) upoštevamo tudi za $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}^2$, kar ohranja zveznost funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-}.

Nekatere karakteristične funkcije zveznih slučajnih spremenljivk imajo ničle. Zanje je trenutno definicijsko območje $\overline{\mathbb{D}}_0^2$ funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-} še vedno preozko. Ker moramo pri razširitvah zagotavljati zveznost, si oglejmo obnašanje absolutne vrednosti desnih strani enačb (7.8) in (7.9), ko se $|z_1|$ pri konstantni vrednosti $|z_2|$, $0 < |z_2| \leq 1$, približuje ničli. Pri tem za obe možnosti, ki se nanašata na funkciji K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-}, uporabimo skupen zapis s simboloma $\pm$ in $\mp$ ter dogovorom, da zgornji predznak velja za K_ρ^{Ga+}, spodnji pa za K_ρ^{Ga-}. Iz zapisa

$$l = \lim_{|z_1|\to+0} \left| z_1 z_2 e^{\mp\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}} \right| = \lim_{|z_1|\to+0} |z_1||z_2| c^{\sqrt{-\log|z_1|}},$$

kjer je $c = e^{\mp\rho\sqrt{-\log|z_2|}}$, z novo spremenljivko $x = \sqrt{-\log|z_1|}$ dobimo

$$l = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2}|z_2| c^x = \lim_{x\to\infty} |z_2|\, e^{-x^2+x\log c} = 0.$$

Zato neodvisno od tega, kako se z_1 bliža k 0, desni strani enačb (7.8) in (7.9) konvergirata k 0, zaradi simetrije pa analogno velja tudi za z_2.

Definicijsko območje funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-} razširimo na $\overline{\mathbb{D}}^2$, kjer je $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. Zaradi zagotavljanja zveznosti z enačbo (7.6) konstruiranih karakterističnih funkcij je edina izbira $K_\rho^{Ga\pm}(0{,}0) = K_\rho^{Ga\pm}(0,z) = K_\rho^{Ga\pm}(z{,}0) = 0$ za $z \in \overline{\mathbb{D}}_0$. Končno lahko zapišemo

$$K_\rho^{Ga\pm}(z_1,z_2) = \begin{cases} z_1 z_2\, e^{\mp 2\rho\sqrt{\log|z_1|\,\log|z_2|}} & \text{za } z_1,z_2 \in \{z : 0 < |z| \le 1\}, \\ 0 & \text{za } z_1 z_2 = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Poudarimo, da smo do tu dokazali, da sta z zgornjo enačbo definirani funkciji K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-} edini funkciji, ki pri izhodiščni predpostavki zagotavljata izpolnjenost enačbe (7.6) za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$ in za vsak $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$. Z razširitvijo izhodiščnega definicijskega območja funkcij K_ρ^{Ga+} in K_ρ^{Ga-} na $\overline{\mathbb{D}}^2$ smo zagotovili, da kot parametre lahko sprejmeta vse mogoče vrednosti enorazsežnih karakterističnih funkcij. Nismo pa preverjali, če z enačbama (7.6) in (7.10) konstruirane funkcije izpolnjujejo vse potrebne oziroma zadostne pogoje za karakteristično funkcijo.

Naj bo $\mathbf{X} = (X_1,X_2) \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, kjer je $X_1 \sim \mathrm{N}(0,\rho^2)$ in X_2 slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti $f_{X_2}(x) = \frac{1}{2}(\phi(\frac{x+1}{|\rho|}) + \phi(\frac{x-1}{|\rho|}))$, torej konveksna linearna kombinacija gostot verjetnosti slučajnih spremenljivk $X_2^a \sim \mathrm{N}(-1,\rho^2)$ in $X_2^b \sim \mathrm{N}(1,\rho^2)$. Zaradi Sklarovega izreka obstoj takega slučajnega vektorja ni vprašljiv. Za nadaljevanje potrebujemo karakteristični funkciji $\varphi_{X_1}(t) = e^{-\frac{1}{2}\rho^2 t^2}$ in $\varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{2}\big(e^{-it-\frac{1}{2}\rho^2t^2} + e^{it-\frac{1}{2}\rho^2t^2}\big) = e^{-\frac{1}{2}\rho^2t^2}\cos t$, za $k \in \mathbb{Z}$ in $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ pa še $\log|\varphi_{X_1}(t)| = -\frac{1}{2}\rho^2t^2$ in $\log|\varphi_{X_2}(t)| = -\frac{1}{2}\rho^2t^2 + \log|\cos t| = -\frac{1}{2}(\rho^2t^2 - \log(\cos^2 t))$ ter $\mp 2\rho\sqrt{\log|\varphi_{X_1}(t)|\,\log|\varphi_{X_2}(t)|} = \mp\rho^2 t\sqrt{\rho^2t^2 - \log(\cos^2 t)}$.

Za $S = X_1 + X_2$ dobimo $\varphi_S(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t,t) = K_\rho^{Ga+}(\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(t))$ oziroma

$$\varphi_S(t) = \begin{cases} e^{-\rho^2 t\left(t + \sqrt{\rho^2t^2 - \log(\cos^2 t)}\right)}\cos t & \text{za } t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ in } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{za } t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ in } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

za $R = X_1 - X_2$ pa $\varphi_R(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t,-t) = K_\rho^{Ga-}(\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(-t))$ oziroma

$$\varphi_R(t) = \begin{cases} e^{-\rho^2 t\left(t - \sqrt{\rho^2t^2 - \log(\cos^2 t)}\right)}\cos t & \text{za } t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ in } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{za } t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ in } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Po izreku 7.2 sta karakteristični funkciji $\varphi_S(t)$ in $\varphi_R(t)$ pozitivno definitni. Izberimo $n = 3$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$ in $t_3 = \frac{\pi}{2}$ ter sestavimo matriko argumentov $\mathbf{A}$ z elementi $A_{ij} = t_i - t_j$, matriko funkcijskih vrednosti $\mathbf{B}^+$ z elementi $B^+_{ij} = \varphi_S(t_i - t_j)$ in matriko funkcijskih vrednosti $\mathbf{B}^-$ z elementi $B^-_{ij} = \varphi_R(t_i - t_j)$. Dobimo

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{matrix} 0 & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} & 0 & -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} & 0 \end{matrix}\right\| \qquad \text{in} \qquad \mathbf{B}^\pm = \left\|\begin{matrix} 1 & b^\pm & 0 \\ b^\pm & 1 & b^\pm \\ 0 & b^\pm & 1 \end{matrix}\right\|,$$

kjer je $b^\pm = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\rho^2\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\pi}{4}\right)^2 + \log 2}\right)}$.

Matriki $\mathbf{B}^+$ in $\mathbf{B}^-$ sta simetrični, zato imata po 3 realne lastne vrednosti in 3 ortogonalne lastne vektorje. Za pozitivno semidefinitnost morajo biti vse lastne vrednosti nenegativne, zaradi česar je nenegativen tudi njihov produkt, ki je enak determinanti $\det(\mathbf{B}^+) = 1 - 2(b^+)^2$ oziroma $\det(\mathbf{B}^-) = 1 - 2(b^-)^2$. Zato je

$$\det(\mathbf{B}^\pm) = 1 - e^{-\frac{\rho^2\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\pi}{4}\right)^2 + \log 2}\right)} \geq 0.$$

Od tu sledi $\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho\pi}{4}\right)^2 + \log 2} \geq 0$ in $\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \geq \left(\frac{\rho\pi}{4}\right)^2 + \log 2$ ter $\rho^2 \leq 1 - \frac{16 \log 2}{\pi^2} < 0$, kar je protislovje. To pa pomeni, da izhodiščna predpostavka ni izpolnjena. Zato iz izpolnjenosti enačbe (7.6) za vsak $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_2(C^{Ga}_\rho)$ in za vsak $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ sledi edina možnost, da je $\rho = 0$. □

Opomba 7.4: V zgornjem izreku smo korelacijski koeficient ρ omejili na interval $(-1,1)$, ker se za $\rho = -1$ kopula C^{Ga}_ρ izrodi v kopulo W^2, za $\rho = 1$ pa v M^2. Izrek 7.3 velja tudi za $\rho \in [-1,1]$. □

7.6 Izračuni s kopulami in hitro Fourierovo transformacijo

V tem razdelku je predstavljeno računanje večrazsežne karakteristične funkcije iz njenih robnih karakterističnih funkcij z uporabo enorazsežne hitre Fourierove transformacije. Zaenkrat je tak način reševanja izhodiščnega problema uporaben le za posebne primere, med katerimi pa je tudi pomemben primer, ko komponente slučajnega vektorja povezuje normalna kopula.

7.6.1 Kopule z ločljivimi spremenljivkami in hitra Fourierova transformacija

V razdelku 5.5.3 smo za slučajni vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ z zveznimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in absolutno zvezno kopulo $C_\mathbf{X}$ za gostoto verjetnosti izpeljali enačbo (5.7), tu zapisano le z drugimi indeksi

$$f_\mathbf{X}(x_1, \ldots, x_n) = c_\mathbf{X}(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)) \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)\,. \qquad (7.11)$$

Računanje večrazsežne karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ po definiciji je zaradi zapletenosti enačbe (7.11) v večini primerov neizvedljivo. Če pa lahko ločimo spremenljivke, tako da je $c_{\mathbf{X}}(u_1, \ldots, u_n) = \Pi_{k=1}^{n} g_k(u_k)$, se računanje precej poenostavi, ker za karakteristično funkcijo dobimo

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) &= \mathbb{E}[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it_kX_k}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} e^{it_kx_k} \mathrm{d}x_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)\, g_k(F_{X_k}(x_k)) \prod_{k=1}^{n} e^{it_kx_k} \mathrm{d}x_k \\
&= \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_k}(x_k)\, g_k(F_{X_k}(x_k))\, e^{it_kx_k} \mathrm{d}x_k.
\end{aligned}
$$

Ta enačba se od analogne enačbe za neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$ razlikuje le v tem, da v njej namesto Fourierovih transformirank gostot verjetnosti f_{X_k} nastopajo Fourierove transformiranke funkcij $f_{X_k} \cdot (g_k \circ F_{X_k})$, $k = 1, \ldots, n$, katerih obstoj pri izhodiščni predpostavki o ločljivosti spremenljivk ni vprašljiv. Če katera od njih ne bi obstajala, tudi njihov produkt ne bi obstajal, s tem pa ne bi obstajala tudi večrazsežna karakteristična funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}$, kar bi bilo protislovje z dejstvom, da vedno obstaja. Čeprav zelo verjetno karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ še vedno ne bomo znali analitično izračunati, pa jo bomo znali izračunati vsaj numerično.

Analogno ugotovimo, da n-razsežen problem lahko rešujemo z enorazsežno Fourierovo transformacijo tudi v splošnejšem primeru, ko gostoto verjetnosti absolutno zvezne kopule lahko zapišemo kot vsoto

$$
c_{\mathbf{X}}(u_1, \ldots, u_n) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} g_{jk}(u_k), \tag{7.12}
$$

saj je potem

$$
\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k) + \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_k}(x_k)\, g_{jk}(F_{X_k}(x_k))\, e^{it_kx_k} \mathrm{d}x_k. \tag{7.13}
$$

Na desni strani enačbe (7.12) smo enico, ki ustreza gostoti verjetnosti kopule neodvisnosti, napisali le zato, da se jasno vidi preostanek, ki je povezan s koreliranostjo. Če nas enica moti, jo lahko izpustimo, hkrati pa zgornjo mejo indeksa j povečamo za eno in za $j = m + 1$ definiramo $g_{jk}(u_k) \equiv 1$, $k = 1, \ldots, n$. Na desni strani enačbe (7.12) sicer formalno seštevamo produkte n funkcij, pri tem pa v vsakem produktu kot funkcije g_{jk} lahko nastopajo tudi konstante, med njimi tudi enice in ničle. Zato, denimo, tudi enačbo

$$c_{\mathbf{X}}(u_1,\ldots,u_n) = 1 + \sum_{1\le i<j\le n} \theta_{ij}\, g_i(u_i)\, g_j(u_j) \tag{7.14}$$

lahko gledamo kot alternativni zapis posebnega primera enačbe (7.12). Če je $n = 3$, je $m = 3$ in

$$\begin{aligned}
&g_{11}(u_1) = g_1(u_1), && g_{12}(u_2) = g_2(u_2), && g_{13}(u_3) = \theta_{12},\\
&g_{21}(u_1) = g_1(u_1), && g_{22}(u_2) = \theta_{13}, && g_{23}(u_3) = g_3(u_3),\\
&g_{31}(u_1) = \theta_{23}, && g_{32}(u_2) = g_2(u_2), && g_{33}(u_3) = g_3(u_3),
\end{aligned}$$

kar pa ni edina možnost. Če je $n > 3$, je $m = \frac{n(n-1)}{2}$, določitev funkcij g_{jk} pa zahteva malo več truda. S podrobnostmi se ne bomo ukvarjali, ker to ni potrebno.

Ne pozabimo, da smo izhajali iz predpostavke, da je desna stran enačbe (7.12) oziroma enačbe (7.14) gostota verjetnosti neke kopule. Če je predpostavka izpolnjena, z enačbo (7.13) namesto izračuna n-razsežne Fourierove transformiranke raje izračunamo n enorazsežnih Fourierovih transformirank, kar v praksi zahteva bistveno manj operacij. Če bi računali z n-razsežno FFT na mreži n-razsežne kocke ter r točkami na posamezni osi, bi potrebovali $O(nr^n \log_2 r)$ operacij, z enorazsežno FFT pa jih potrebujemo $O(mnr \log_2 r)$. Pri praktično uporabnih parametrih m, n in r, za katere je $m \ll r^{n-1}$, je druga ocena bistveno ugodnejša.

Z opisanim načinom izračun večrazsežne karakteristične funkcije razbijemo na več izračunov enorazsežnih karakterističnih funkcij, kar ima očitne prednosti. Žal pa je tak izračun mogoč le takrat, ko se da gostota verjetnosti kopule zapisati z enačbo (7.12) oziroma z ekvivalentno enačbo, v kateri so spremenljivke ločene. To je bil eden od pomembnih motivov za iskanje kopul z ločljivimi spremenljivkami, ki smo jih obravnavali v razdelku 5.5.6. V nadaljevanju tega razdelka predpostavimo, da prav taka kopula povezuje komponente slučajnega vektorja $\mathbf{X}$, prav tako naj bodo izpolnjeni vsi pogoji za uporabo izrekov 5.16 do 5.19.

Za izračun karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ slučajnega vektorja $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_n(C)$, kjer je C kopula, definirana z enačbo (5.17) iz izreka 5.16, zadošča izračun $2n$ enorazsežnih Fourierovih transformirank. Poleg robnih karakterističnih funkcij $\varphi_{X_1},\ldots,\varphi_{X_n}$ moramo izračunati še

$$\mathcal{F}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_k}(x)\, g_k(F_{X_k}(x))\, e^{itx} \mathrm{d}x \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Ker gostoto verjetnosti kopule določa enačba (5.16) iz izreka 5.16 oziroma enačba (7.14), z enačbo (7.11) dobimo

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n) = \left(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, g_i(F_{X_i}(x_i))\, g_j(F_{X_j}(x_j))\right) \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)$$

ter

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{X}}(t_1,\dots,t_n) &= \mathbb{E}[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it_kX_k}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n)\prod_{k=1}^{n} e^{it_kx_k}\mathrm{d}x_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, g_i(F_{X_i}(x_i))\, g_j(F_{X_j}(x_j))\right) \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)\, e^{it_kx_k}\mathrm{d}x_k \\
&= \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, \mathcal{F}_i(t_i)\, \mathcal{F}_j(t_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}}^{n} \varphi_{X_k}(t_k).
\end{aligned}$$

Seveda za izračun $\varphi_{\mathbf{X}}$ lahko uporabimo tudi izraz (5.23)

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} \theta_{ij}\, b_i\, b_j\, \Delta\varphi_i(t_i)\, \Delta\varphi_j(t_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\notin\{i,j\}}}^{n} \varphi_{X_k}(t_k)$$

iz izreka 5.17. Poleg karakterističnih funkcij $\varphi_{X_1},\dots,\varphi_{X_n}$ moramo izračunati še karakteristične funkcije $\varphi_{\tilde{X}_1},\dots,\varphi_{\tilde{X}_n}$ slučajnih spremenljivk $\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n$ s porazdelitvenimi funkcijami $h_1 \circ F_{X_1},\dots,h_n \circ F_{X_n}$. Pri tem so $h_1,\dots,h_n$ distorzijske funkcije, ki jih iz funkcij $g_1,\dots,g_n$ izračunamo kot v definiciji 5.13, prav tako konstante $b_1,\dots,b_n$.

V praksi za slučajno spremenljivko X_i po diskretizaciji porazdelitvene funkcije F_{X_i} izračunamo verjetnostno funkcijo f_{X_i}, z enačbo (5.21) pa še $f_{\tilde{X}_i} = (1 - \frac{g_i(F_{X_i})}{b_i})\, f_{X_i}$. Nato s FFT izračunamo φ_{X_i} in $\varphi_{\tilde{X}_i}$ ter njuno razliko $\Delta\varphi_i = \varphi_{X_i} - \varphi_{\tilde{X}_i}$. Ta način izračuna se od prejšnjega razlikuje le po tem, da smo prej razliko karakterističnih funkcij $\Delta\varphi_i$, pomnoženo s konstanto b_i, izračunali mimogrede z eno potezo kot $\mathcal{F}_i$. Za obe varianti izračuna karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$ z uporabo enorazsežne FFT na r točkah potrebujemo $O(nr\log_2 r)$ operacij, kar omogoča učinkovit izračun $\varphi_S(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t,\dots,t)$, nato pa z inverzno hitro Fourierovo transformacijo še izračun verjetnostne funkcije $f_S(x)$ in porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

7.6.2 Normalna kopula in hitra Fourierova transformacija

Ideja iz prejšnjega razdelka je uporabna tudi v primeru, ko se da kopula zapisati kot neskončna vrsta, v kateri so v posameznih sumandih spremenljivke ločene. V tem primeru je bistveno vprašanje, ali lahko pri analognem izračunu $\varphi_{\mathbf{X}}$ kot v prejšnjem razdelku zamenjamo vrstni red integriranja in seštevanja, prav tako je pomembna hitrost konvergence, če naj bo dobljena vrsta praktično uporabna. V tem razdelku bomo dokazali, da je tak način izračuna mogoč za dvorazsežno normalno kopulo. Prav tako se da z novo metodo izračunati tudi "porazdelitveno funkcijo" slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, če odvisnost med slučajnimi spremenljivkami $X_1, \dots, X_n$ določa n-razsežna normalna kopula, tako da v vsakem od $n-1$ korakov seštejemo po dve slučajni spremenljivki, katerih odvisnost določa dvorazsežna normalna kopula. Narekovaje smo uporabili zato, ker je zgornja trditev za $n = 2$ v nadaljevanju dokazana, za $n > 2$ pa je dokazana le za normalno porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, \dots, X_n$, medtem ko za splošen primer zaenkrat ostaja na ravni domneve.

Izrek 7.4: *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ ter gostotama verjetnosti $f_X(x)$ in $f_Y(x)$. Če je $\mathbf{Z} = (X, Y) \in \mathcal{R}_2(C_\rho^{Ga})$, potem karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{Z}}(s,t)$ za $|\rho| < 1$ lahko izračunamo s konvergentno vrsto*

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(s,t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(s)\, B_m(t)\, \frac{\rho^m}{m!}, \tag{7.15}$$

kjer so funkcije

$$A_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_m(x)\, e^{itx}\, \mathrm{d}x \quad \textit{in} \quad B_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b_m(x)\, e^{itx}\, \mathrm{d}x \tag{7.16}$$

za $m = 0,1,2,\dots$ Fourierove transformiranke funkcij

$$a_m(x) = He_m(\Phi^{-1}(F_X(x)))f_X(x) \quad \textit{in} \quad b_m(x) = He_m(\Phi^{-1}(F_Y(x)))f_Y(x), \tag{7.17}$$

$He_m(x)$ pa Hermitovi polinomi, definirani s

$$He_m(x) = (-1)^m\, e^{\frac{x^2}{2}}\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (m = 0,1,2,\dots). \tag{7.18}$$

Pomožne funkcije $a_m(x)$ in $b_m(x)$ lahko izračunamo rekurzivno

$$\begin{aligned} a_0(x) &= f_X(x), \\ a_1(x) &= \Phi^{-1}(F_X(x))\, f_X(x), \\ a_m(x) &= \Phi^{-1}(F_X(x))\, a_{m-1}(x) - (m-1)\, a_{m-2}(x) \qquad (m = 2,3,\dots), \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$
\begin{aligned}
b_0(x) &= f_Y(x), \\
b_1(x) &= \Phi^{-1}(F_Y(x))\, f_Y(x), \\
b_m(x) &= \Phi^{-1}(F_Y(x))\, b_{m-1}(x) - (m-1)\, b_{m-2}(x) \qquad (m = 2,3,\dots).
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Dokaz: Začnimo s porazdelitveno funkcijo $\Phi^2_\rho(x,y)$, ki jo v praksi lahko izračunamo na več načinov (glej npr. Gai, 2001; Genz, 2004). Med njimi je tudi izračun s tetrahorično vrsto (glej npr. Vasicek, 1998, str. 2)

$$
\Phi^2_\rho(x,y) = \Phi(x)\,\Phi(y) + \phi(x)\,\phi(y) \sum_{m=0}^{\infty} He_m(x)\, He_m(y)\, \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!},
$$

ki konvergira hitreje kot geometrijska vrsta s kvocientom ρ. Konvergenco je za $\rho^2 > 0{,}5$ mogoče pospešiti z alternativno vrsto, ki konvergira kot geometrijska vrsta s kvocientom $1-\rho^2$, kar pa tu ni bistveno (glej Vasicek, 1998, str. 2–4). Desno stran zgornje enačbe parcialno odvajajmo po x in y. Dobimo

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\phi(y) + \sum_{m=0}^{\infty} &(\phi'(x)He_m(x) + \phi(x)He'_m(x)) \\
&(\phi'(y)He_m(y) + \phi(y)He'_m(y))\, \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!},
\end{aligned}
$$

kar nam po deljenju s $\phi(x)\phi(y)$ da

$$
1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} He_m(x) + He'_m(x) \right) \left(\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} He_m(y) + He'_m(y) \right) \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}.
$$

Ker je $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = -x$, zaradi rekurzijske enačbe $He_{m+1}(x) = xHe_m(x) - He'_m(x)$ za Hermitove polinome dobimo

$$
\frac{\partial^2 \Phi^2_\rho(x,y)}{\partial x\, \partial y}\; \frac{1}{\phi(x)\,\phi(y)} = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} He_{m+1}(x)\, He_{m+1}(y)\, \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}.
$$

Z zamikom sumacijskega indeksa in upoštevanjem, da je $He_0(x) = 1$, zaradi enačbe (5.13) dobimo iskano vrsto

$$
c^{Ga}_\rho(u_1,u_2) = \sum_{m=0}^{\infty} He_m(\xi_1)He_m(\xi_2)\, \frac{\rho^m}{m!}, \quad \xi_1 = \Phi^{-1}(u_1), \quad \xi_2 = \Phi^{-1}(u_2). \tag{7.21}
$$

S primerjavo z enačbo (5.14) ugotovimo, da smo mimogrede izpeljali formulo

$$
\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{\frac{2\rho x y - \rho^2(x^2+y^2)}{2(1-\rho^2)}} = \sum_{m=0}^{\infty} He_m(x)\, He_m(y)\, \frac{\rho^m}{m!},
$$

ki je znana pod imenom Mehlerjeva formula.

Uporabimo enačbo (5.5) iz Sklarovega izreka in zapišimo porazdelitveno funkcijo $F_Z(x,y) = C_\rho^{Ga}(F_X(x), F_Y(y))$. S parcialnim odvajanjem po x in y izračunajmo gostoto verjetnosti $f_Z(x,y) = c_\rho^{Ga}(F_X(x), F_Y(y))\, f_X(x)\, f_Y(y)$, nato pa še karakteristično funkcijo

$$\varphi_Z(s,t) = \mathbb{E}[e^{i(sX+tY)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c_\rho^{Ga}(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y) e^{i(sx+ty)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Z upoštevanjem enačb (7.21) dvojni integral v zgornji enačbi lahko zapišemo kot

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} He_m(\Phi^{-1}(F_X(x))) He_m(\Phi^{-1}(F_Y(y))) f_X(x) f_Y(y) e^{i(sx+ty)} \frac{\rho^m}{m!}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

z upoštevanjem enačb (7.17) pa dobimo enačbo

$$\varphi_Z(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x)\, b_m(y)\, e^{isx}\, e^{ity}\, \frac{\rho^m}{m!}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

v kateri bi radi zamenjali vrstni red integriranja in seštevanja. Po uvedbi novega para integracijskih spremenljivk $u = \Phi^{-1}(F_X(x))$ in $v = \Phi^{-1}(F_Y(y))$, ki mu pripada Jacobijeva determinanta $\frac{\phi(u)\,\phi(v)}{f_X(x)\, f_Y(y)}$, dobimo enačbo

$$\varphi_Z(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_m(u)\, c_m(v)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \frac{\rho^m}{m!}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \tag{7.22}$$

v kateri je $c_m(x) = He_m(x)\, \phi(x)$.

Poleg definicije Hermitovih polinomov z enačbo (7.18), ki smo jo uporabili v izreku 7.4, obstaja tudi definicija

$$H_m(x) = (-1)^m\, e^{x^2}\, \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\, e^{-x^2} \quad (m = 0,1,2,\dots)$$

Hermitovih polinomov, za katere velja ocena $|H_m(x)| \le 2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{4}}\, (m!)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{2}x^2}$ (Reuter, 1949, str. 159). Ker med obema vrstama Hermitovih polinomov velja zveza $He_m(x) = 2^{-\frac{m}{2}} H_m(\frac{x}{\sqrt{2}})$, je $|He_m(x)| \le 2^{\frac{1}{4}} (m!)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2}$ in

$$|c_m(x)| = |He_m(x)\phi(x)| \le 2^{\frac{1}{4}}\, (m!)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{4}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = 2^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (m!)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} \tag{7.23}$$

ter

$$\left| c_m(u)\, c_m(v)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \frac{\rho^m}{m!} \right| \le \frac{|\rho|^m}{\pi\sqrt{2}}\, e^{-\frac{1}{4}(u^2+v^2)} \le \frac{|\rho|^m}{\pi\sqrt{2}},$$

kar nam za $|\rho| < 1$ da

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| c_m(u)\, c_m(v)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \frac{\rho^m}{m!} \right| \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,(1-|\rho|)}\,.$$

Vrsta, ki jo integriramo v enačbi (7.22), je absolutno konvergentna, zato lahko zamenjamo vrstni red integriranja in seštevanja, nato pa dvojne integrale zapišemo kot dvakratne integrale, ki zaradi ločenih spremenljivk razpadejo v produkte enojnih integralov. Dobimo

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(s,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c_m(u)\, c_m(v)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \frac{\rho^m}{m!}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} c_m(u)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} c_m(v)\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \mathrm{d}v \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} A_m(s)\, B_m(t)\, \frac{\rho^m}{m!}\,,
\end{aligned}$$

kar je enačba (7.15), v kateri nastopata funkciji

$$\begin{aligned}
A_m(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_m(u)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} He_m(u)\, \phi(u)\, e^{isF_X^{-1}(\Phi(u))}\, \mathrm{d}u, \\
B_m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} c_m(v)\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} He_m(v)\, \phi(v)\, e^{itF_Y^{-1}(\Phi(v))}\, \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

S substitucijo $x = F_X^{-1}(\Phi(u))$ in $x = F_Y^{-1}(\Phi(v))$ ter upoštevanjem enačb (7.17) ugotovimo, da sta zgornji funkciji prav tisti, ki sta definirani z enačbama (7.16), saj je

$$\begin{aligned}
A_m(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} He_m(\Phi^{-1}(F_X(x)))\, f_X(x)\, e^{isx}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} a_m(x)\, e^{isx}\, \mathrm{d}x, \\
B_m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} He_m(\Phi^{-1}(F_Y(x)))\, f_Y(x)\, e^{itx}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} b_m(x)\, e^{itx}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Poglejmo še, kako hitro konvergira vrsta v enačbi (7.15). Upoštevajmo neenačbo (7.23) in ocenimo

$$|A_m(s)| \le 2^{-\frac{1}{4}}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} (m!)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}u^2}\, \mathrm{d}u = 2^{\frac{3}{4}} (m!)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Analogno je $|B_m(t)| \le 2^{\frac{3}{4}}(m!)^{\frac{1}{2}}$ in zato $|A_m(s)B_m(t)\frac{\rho^m}{m!}| \le 2^{\frac{3}{2}}|\rho|^m$. Očitno je vrsta v enačbi (7.15) za $|\rho| < 1$ absolutno konvergentna in konvergira vsaj tako hitro kot geometrijska vrsta s kvocientom $|\rho|$.

Vrednosti Hermitovih polinomov iz začetnih vrednosti $He_0(x) = 1$ in $He_1(x) = x$

lahko izračunamo z rekurzijsko formulo

$$He_m(x) = x\,He_{m-1}(x) - (m-1)\,He_{m-2}(x) \qquad (m = 2,3,\dots).$$

Vanjo za x vstavimo $\Phi^{-1}(F_X(x))$, jo na obeh straneh pomnožimo s $f_X(x)$ ter upoštevajmo levo enačbo (7.17). Dobimo rekurzijsko formulo

$$a_m(x) = \Phi^{-1}(F_X(x))\,a_{m-1}(x) - (m-1)\,a_{m-2}(x) \qquad (m = 2,3,\dots)$$

z začetnima vrednostma $a_0(x) = f_X(x)$ in $a_1(x) = \Phi^{-1}(F_X(x))f_X(x)$. Analogno velja tudi za $b_m(x)$, izrek je dokazan. □

Posledica 7.2: *Pri pogojih iz izreka 7.4 karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $S = X + Y$ lahko izračunamo s konvergentno vrsto*

$$\varphi_S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t)\,B_m(t)\,\frac{\rho^m}{m!}\,. \tag{7.24}$$

Dokaz: $\varphi_S(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \varphi_{\mathbf{Z}}(t,t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t)\,B_m(t)\,\frac{\rho^m}{m!}$. □

Opomba 7.5: Če odvisnost med komponentama slučajnega vektorja (X,Y) določa dvorazsežna normalna kopula, iz nekoreliranosti sledi neodvisnost. Da je v tem primeru potrebni in zadostni pogoj za neodvisnost izpolnjen, se vidi tudi iz enačbe (7.15), ki se za $\rho = 0$ prelevi v $\varphi_{\mathbf{Z}}(s,t) = \varphi_X(s)\,\varphi_Y(t)$, saj je $A_0(s) = \varphi_X(s)$ in $B_0(t) = \varphi_Y(t)$. Le kot zanimivost dodajmo, da iz enačbe (7.24) za $\rho = 0$ oziroma iz enačbe $\varphi_S(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$ ne smemo sklepati, da sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Za primer odvisnih slučajnih spremenljivk X in Y, za kateri je $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$, glej npr. (Gnedenko, 1976, str. 245, ali Feller, 1971, str. 51 in 99). □

V praksi porazdelitveni funkciji $F_X(x)$ in $F_Y(x)$ oziroma pripadajoči gostoti verjetnosti $f_X(x)$ in $f_Y(x)$ ekvidistantno diskretiziramo, kot smo opisali v razdelku 6.4.3, nato pa za $m = 0,1,2,\dots$ rekurzivno izračunamo $a_m(x)$ in $b_m(x)$, ju s hitro Fourierovo transformacijo preslikamo v $A_m(t)$ in $B_m(t)$, izračunamo člen $A_m(t)\,B_m(t)\,\frac{\rho^m}{m!}$ in sestavljamo vrsto na desni strani enačbe (7.15). Pri dovolj velikem m, ki ga pri danem ρ in zahtevani absolutni ali relativni natančnosti lahko določimo na podlagi hitrosti konvergiranja vrste $\sum_{m=0}^{\infty}|\rho|^m$, seštevanje prekinemo. Končno z inverzno hitro Fourierovo transformacijo izračunamo verjetnostno in porazdelitveno funkcijo vsote $S = X + Y$.

Vrsto (7.24) bi radi uporabili tudi za izračun karakteristične funkcije več kot dveh slučajnih spremenljivk, za katere medsebojno odvisnost določa normalna kopula, tako da bi postopoma prištevali po eno slučajno spremenljivko. Teoretično nam ustreznega postopka še ni uspelo utemeljiti, vendar pa praktični izračuni potrjujejo uporabnost v nadaljevanju navedenega izreka 7.6, temelječega na domnevi 7.1, primerjave z rezultati, dobljenimi s simulacijo, pa utrjujejo prepričanje o njegovi pravilnosti.

Definicija 7.3: *Naj bo* Σ n*-razsežna korelacijska matrika z elementi* $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}$ *ter* $|\rho_{ij}| < 1$ *za* $i \neq j$*. Naj bo* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t \in \mathcal{R}_n(C_\Sigma^{Ga})$ *slučajni vektor z zveznimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami* $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$*, gostotami verjetnosti* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ *ter karakterističnimi funkcijami* $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$ *in standardnimi odkloni* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$*,* $0 < \sigma_i < \infty$*,* $i = 1, \ldots, n$*. Naj bodo* $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ *slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami* $F_{S_1} = F_{X_1}, F_{S_2}, \ldots, F_{S_n}$*, gostotami verjetnosti* $f_{S_1} = f_{X_1}, f_{S_2}, \ldots, f_{S_n}$ *ter karakterističnimi funkcijami* $\varphi_{S_1} = \varphi_{X_1}, \varphi_{S_2}, \ldots, \varphi_{S_n}$*. Naj bo*

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ik}\,\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j}} \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{7.25}$$

funkcije

$$A_{mk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_{mk}(x) e^{itx} \mathrm{d}x \quad \text{in} \quad B_{mk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b_{mk}(x) e^{itx} \mathrm{d}x$$

za $m = 0,1,2,\ldots$ *in* $k = 2, \ldots, n$ *pa naj bodo Fourierove transformiranke funkcij*

$$a_{mk}(x) = He_m(\Phi^{-1}(F_{S_{k-1}}(x))) f_{S_{k-1}}(x) \quad \text{in} \quad b_{mk}(x) = He_m(\Phi^{-1}(F_{X_k}(x))) f_{X_k}(x),$$

kjer so $He_m(x)$ *Hermitovi polinomi, definirani z enačbo* (7.18).

Lema 7.1: *Naj bodo izpolnjeni pogoji iz definicije 7.3. Potem je* $\rho(S_{k-1}, X_k) = \rho_k$ *in* $|\rho_k| < 1$*,* $k = 2, \ldots, n$*, funkcije* a_{mk} *in* b_{mk} *pa za* $k = 2, \ldots, n$ *lahko izračunamo z rekurzijo*

$$\begin{aligned}
a_{-2,k}(x) &= f_{S_{k-1}}(x), \\
a_{-1,k}(x) &= 0, \\
a_{mk}(x) &= \Phi^{-1}(F_{S_{k-1}}(x)) a_{m-1,k}(x) - (m-1) a_{m-2,k}(x) \quad (m = 0,1,2,\ldots), \quad (7.26) \\
b_{-2,k}(x) &= f_{X_k}(x), \\
b_{-1,k}(x) &= 0, \\
b_{mk}(x) &= \Phi^{-1}(F_{X_k}(x)) b_{m-1,k}(x) - (m-1) b_{m-2,k}(x) \quad (m = 0,1,2,\ldots). \quad (7.27)
\end{aligned}$$

Dokaz: Ker je $\mathrm{var}[S_{k-1}] = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$ ter zaradi linearnosti kovariance

$\text{cov}[S_{k-1}, X_k] = \sum_{i=1}^{k-1} \text{cov}[X_i, X_k] = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k$, je

$$\rho(S_{k-1}, X_k) = \frac{\text{cov}[S_{k-1}, X_k]}{\sqrt{\text{var}[S_{k-1}]}\, \sigma_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ik}\, \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j}} = \rho_k \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

Izberimo poljuben $k \in \{2, \ldots, n\}$. Ker so parcialni odvodi $\frac{\partial \rho_k}{\partial \rho_{ik}}$ za $i = 1, \ldots, k-1$ večji od 0, je ρ_k strogo naraščajoča funkcija spremenljivk ρ_{ik}. Po predpostavkah iz definicije 7.3 je $|\rho_{ik}| < 1$, $i = 1, \ldots, k-1$, zato dobimo za ρ_k nedosegljivo spodnjo oziroma zgornjo mejo, če v desno stran enačbe (7.25) vstavimo $\rho_{ik} = -1$ oziroma $\rho_{ik} = 1$, kar nam da

$$\frac{-\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j}} < \rho_k < \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j}}.$$

Toda $|\rho_{ik}| = 1$ pomeni linearno zvezo med slučajnima spremenljivkama X_i in X_k. Zato iz $\rho_{ik} = -1$ oziroma iz $\rho_{ik} = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$, sledi $\rho_{ij} = 1$ za $i, j = 1, \ldots, k-1$. Zato je $\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_i\, \sigma_j} = \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i$ ter $|\rho_k| < 1$.

Funkcije a_{mk} in b_{mk} so le z dodatnim indeksom napisane funkcije a_m in b_m, ki so definirane z enačbama (7.17), v katerih X zamenjamo s S_{k-1}, Y pa z X_k. Prav tako sta enačbi (7.26) in (7.27) kar enačbi (7.19) in (7.20) iz izreka 7.4, ki zaradi umetno dodanih a_{mk} in b_{mk} za $m = -2$ in $m = -1$ veljata tudi za $m = 0$ in $m = 1$. □

Domneva 7.1: *Naj bo $n \geq 3$ in $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t \in \mathcal{R}_n(C_\Sigma^{Ga})$. Potem komponente slučajnega vektorja $\mathbf{Z} = (X_1 + X_2, X_3, \ldots, X_n)^t$ povezuje $(n-1)$-razsežna normalna kopula.*

Opomba 7.6: Če ima matrika Σ elemente $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}$, potem je matrika $\tilde{\Sigma}$ z elementi $\tilde{\Sigma}_{11} = 1$, $\tilde{\Sigma}_{1j} = \tilde{\Sigma}_{j1} = \frac{\sigma_1 \rho_{1,j+1} + \sigma_2 \rho_{2,j+1}}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$ za $j = 2, \ldots, n-1$ in $\tilde{\Sigma}_{ij} = \rho_{i+1,j+1}$ za $i, j = 2, \ldots, n-1$ korelacijska matrika slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$ iz domneve 7.1. Če domneva velja, je $\mathbf{Z} \in \mathcal{R}_{n-1}(C_{\tilde{\Sigma}}^{Ga})$. □

Domneve 7.1 še ne znamo korektno dokazati, kot sledi iz naslednjega izreka, pa velja vsaj za n-razsežno normalno porazdeljene vektorje.

Izrek 7.5: *Naj bo $n \geq 3$ in $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$ n-razsežno normalno porazdeljen slučajni vektor. Potem je slučajni vektor $\mathbf{Z} = (X_1 + X_2, X_3, \ldots, X_n)^t$ $(n-1)$-razsežno normalno porazdeljen.*

Dokaz: Naj bo $\mathbf{X} \in \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$, kjer je $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t$ pričakovana vrednost in Σ kovariančna matrika. Očitno je $\mathbb{E}[\mathbf{Z}] = (\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n)^t = \tilde{\mu}$. Ker je $\text{var}[X_1 +$

$X_2] = \mathrm{var}[X_1] + 2\,\mathrm{cov}[X_1, X_2] + \mathrm{var}[X_2]$ in

$$\mathrm{cov}[X_1 + X_2, X_j] = \mathrm{cov}[X_j, X_1 + X_2] = \mathrm{cov}[X_1, X_j] + \mathrm{cov}[X_2, X_j]$$

za $j = 3, \ldots, n$, je matrika $\tilde{\Sigma}$ z elementi $\tilde{\Sigma}_{11} = \Sigma_{11} + 2\,\Sigma_{12} + \Sigma_{22}$, $\tilde{\Sigma}_{1j} = \tilde{\Sigma}_{j1} = \Sigma_{1j} + \Sigma_{2j}$ za $j = 2, \ldots, n-1$ in $\tilde{\Sigma}_{ij} = \Sigma_{i+1,j+1}$ za $i, j = 2, \ldots, n-1$ kovariančna matrika slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$.

Naj bo $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^t$ in $\mathbf{s} = (t_1, \ldots, t_{n-1})^t$. Ker je $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^t\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^t\Sigma\mathbf{t}}$ (glej Denuit et al., 2005, str. 41), se z malo truda hitro prepričamo, da je

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{s}) = \mathbb{E}\left[e^{i(t_1(X_1+X_2)+t_2X_3+\cdots+t_{n-1}X_n)}\right] = \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = e^{i\mathbf{s}^t\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^t\tilde{\Sigma}\mathbf{s}}.$$

Ker je desna stran zgornje enačbe karakteristična funkcija $(n-1)$-razsežnega normalno porazdeljenega slučajnega vektorja, ki ga enolično določa, je izrek dokazan. □

Izrek 7.6: *Naj bodo izpolnjeni pogoji iz definicije 7.3. Predpostavimo, da je domneva 7.1 pravilna. Potem je*

$$\varphi_{S_k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mk}(t)\, B_{mk}(t)\, \frac{\rho_k^m}{m!} \qquad (k = 2, \ldots, n). \tag{7.28}$$

Dokaz: Dokazovali bomo z matematično indukcijo. Za $k = 2$ je $S_{k-1} = S_1 = X_1$. Po lemi 7.1 je $\rho(S_1, X_2) = \rho_2$, kar je po enačbi (7.25) enako ρ_{12}. Zaradi predpostavk v definiciji 7.3 so vsi pogoji izreka 7.4 in posledice 7.2 izpolnjeni. Ker je enačba (7.28) le z dodatnim indeksom napisana enačba (7.24), izrek za $k = 2$ velja.

Predpostavimo, da je $n \geq 3$ in da izrek velja za k, $2 \leq k \leq n-1$. Zaradi predpostavke o pravilnosti domneve 7.1, ki jo $(k-1)$-krat uporabimo, odvisnost med komponentami slučajnega vektorja $(S_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)^t$ določa $(n+1-k)$-razsežna normalna kopula. Ker je vsaka robna kopula normalne kopule normalna kopula, odvisnost med S_k in X_{k+1} določa dvorazsežna normalna kopula. Korelacijski koeficient $\rho(S_k, X_{k+1})$ je po lemi 7.1 enak korelacijskemu koeficientu ρ_{k+1}, ki ga izračunamo z enačbo (7.25). Vsi pogoji izreka 7.4 in posledice 7.2 so izpolnjeni, zato $\varphi_{S_{k+1}}(t)$ lahko izračunamo z vrsto (7.28). Izrek velja za $k+1$, s tem pa smo dokazali, da velja za $k = 2, \ldots, n$. □

Opomba 7.7: Zaradi izreka 7.5 izrek 7.6 velja vsaj za normalno porazdeljene slučajne vektorje. Ker pa zanje poznamo eksplicitni izraz za karakteristično funkcijo, še bolj pa zato, ker vemo, da so vsote njihovih komponent normalno porazdeljene, zanje nima praktične vrednosti. □

Algoritem 7.5: *Izračun porazdelitvene funkcije vsote komponent n-razsežnega slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami in matriko linearnih korelacijskih koeficientov ter normalno kopulo. Izvedba z zaporednim prištevanjem.*

Podatki:

1. $\mathbf{X}$ – n-razsežen slučajni vektor.
2. $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ – robne porazdelitvene funkcije.
3. $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ – robne gostote verjetnosti.
4. $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^t$ – vektor standardnih odklonov komponent vektorja $\mathbf{X}$.
5. Σ – $n \times n$ matrika linearnih korelacijskih koeficientov ρ_{ij}, $|\rho_{ij}| < 1$ za $i \neq j$.
6. ϵ – minimalna norma posameznega člena, ki ga še upoštevamo pri seštevanju vrste.

Rezultati:

1. Karakteristična funkcija $\varphi_S(t)$ za $S = X_1 + \cdots + X_n$.
2. Gostota verjetnosti $f_S(x)$.
3. Porazdelitvena funkcija $F_S(x)$.

Postopek:

$f_S(x) \leftarrow f_{X_1}(x)$
$F_S(x) \leftarrow F_{X_1}(x)$
for k $\leftarrow$ 2 **to** n **do**
  $\rho \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ik}\,\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1} \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j}}$ ▷ korelacijski koeficient $\rho_k = \rho(S_{k-1}, X_k)$
  $a_q(x) \leftarrow \Phi^{-1}(F_S(x))$ ▷ utež iz rekurzijske formule za $a_{mk}(x)$
  $b_q(x) \leftarrow \Phi^{-1}(F_{X_k}(x))$ ▷ utež iz rekurzijske formule za $b_{mk}(x)$
  $a_p(x) \leftarrow f_S(x)$ ▷ tu $a_{-2,k}(x)$, splošno pa prejšnji $a_{mk}(x)$
  $b_p(x) \leftarrow f_{X_k}(x)$ ▷ tu $b_{-2,k}(x)$, splošno pa prejšnji $b_{mk}(x)$
  $a(x) \leftarrow 0$ ▷ tu $a_{-1,k}(x)$, splošno pa tekoči $a_{mk}(x)$
  $b(x) \leftarrow 0$ ▷ tu $b_{-1,k}(x)$, splošno pa tekoči $b_{mk}(x)$
  $\varphi_S(t) \leftarrow 0$
  $r \leftarrow 1$
  $m \leftarrow -1$
  repeat
    $m \leftarrow m + 1$
    $z(x) \leftarrow a(x)$
    $a(x) \leftarrow a_q(x)a(x) - (m-1)a_p(x)$ ▷ rekurzijski izračun tekočega $a_{mk}(x)$
    $a_s(x) \leftarrow z(x)$
    $z(x) \leftarrow b(x)$
    $b(x) \leftarrow b_q(x)b(x) - (m-1)b_p(x)$ ▷ rekurzijski izračun tekočega $b_{mk}(x)$
    $b_s(x) \leftarrow z(x)$
    $A(t) \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{itx}\mathrm{d}x$ ▷ tekoči $A_{mk}(t)$
    $B(t) \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} b(x)e^{itx}\mathrm{d}x$ ▷ tekoči $B_{mk}(t)$
    if $m > 0$ **then** $r \leftarrow \frac{r\rho}{m}$ ▷ tu je vedno $r = \frac{\rho_k^m}{m!}$
    $\varphi_S(t) \leftarrow \varphi_S(t) + A(t)B(t)r$ ▷ tu je vedno $\varphi_S(t) = \sum_{i=0}^{m} A_{ik}(t)B_{ik}(t)\frac{\rho_k^i}{i!}$
  until $\|A(t)B(t)r\| < \epsilon$ ▷ zanko končamo, ko je $\|A_{mk}(t)B_{mk}(t)\frac{\rho_k^m}{m!}\| < \epsilon$
  Iz $\varphi_S(t)$ izračunaj $f_S(x)$ ▷ uporabi inverzno Fourierovo transformacijo
  Iz $f_S(x)$ izračunaj $F_S(x)$ ▷ integriraj
end for

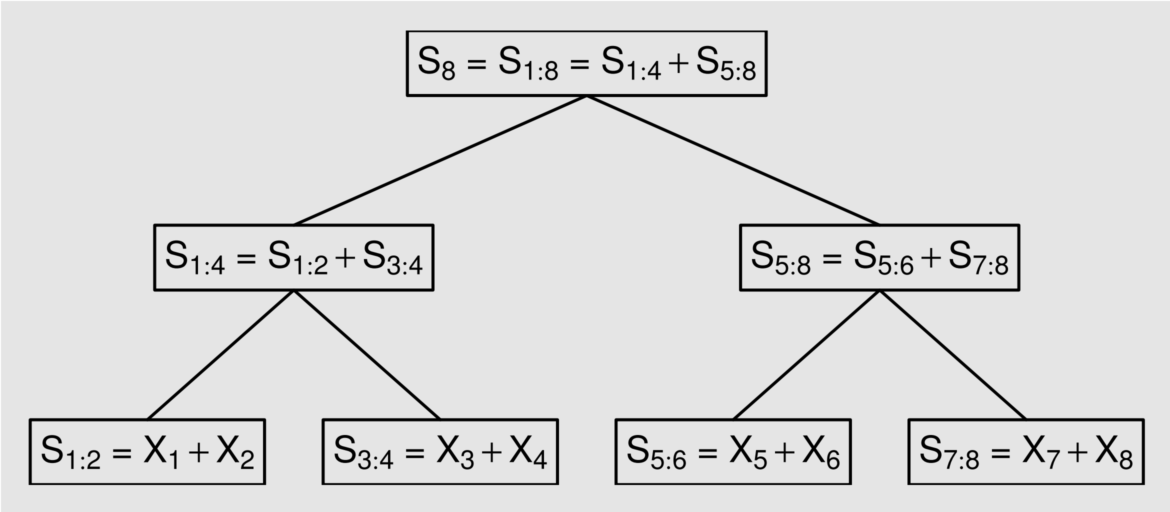
Struktura odvisnosti med komponentami slučajnega vektorja $\mathbf{X}$ ni odvisna od robnih porazdelitvenih funkcij, ampak le od pripadajoče kopule $C_{\mathbf{X}}$, ki povezuje njegove komponente. Posledično to velja tudi za strukturo odvisnosti slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$, ki ga dobimo s preureditvijo $\mathbf{X}$. Kopula $C_{\mathbf{Z}}$, ki povezuje komponente slučajnega vektorja $\mathbf{Z}$, je odvisna od kopule $C_{\mathbf{X}}$ in načina preureditve. To pa še ne pomeni, da je tudi istega tipa kot $C_{\mathbf{X}}$. V posebnem primeru, ki ga obravnava izrek 7.5, pa je. Domnevo 7.1 smo postavili na podlagi posplošitve tega posebnega primera ter na podlagi izreka 7.6 in leme 7.1 sestavili algoritem 7.5.

Opomba 7.8: Algoritem 7.5 je primeren tudi za izračun porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke S_n, ki je vsota slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots, X_n$, za katere smo ekvidistantno diskretizirali porazdelitvene funkcije. V tem primeru moramo na funkcije spremenljivk x in t v algoritmu gledati kot na vektorje vrednosti, ki se nanašajo na diskretizacijsko mrežo za x oziroma t. □

Naj bo r dolžina vektorjev $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$, s katero smo dosegli zahtevano natančnost pri diskretizaciji porazdelitvenih funkcij $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$. Fourierove transformiranke v 22. in 23. koraku algoritma 7.5 računamo s FFT. Če se dosledno držimo tehničnih zahtev FFT transformacije, moramo pred seštevanjem $S_k = S_{k-1} + X_k$, $k = 2, \ldots, n$, v 7. koraku vektor a_p z ničlami podaljšati do dvojne dolžine, v 8. koraku pa vektor b_p z ničlami podaljšati do nove dolžine vektorja a_p. Prav tako moramo do nove dolžine vektorja a_p podaljšati tudi vektorja a_q in b_q. Na ta način je po $n-1$ seštevanjih dolžina vektorja f_{S_n} enaka $r2^{n-1}$, kar že pri malo večjem n presega mejo praktične izvedljivosti algoritma. Dosledno podvajanje v tem primeru ni potrebno, saj z njim praktično omogočimo le seštevanje ničel. Če kot izhodišče upoštevamo verjetnostne funkcije, dobljene z diskretizacijo, neodvisno od načina seštevanja za S_n zadošča vektor dolžine nr. Zato pri računanju s FFT zadošča, če izhodiščne vektorje $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ po diskretizaciji z ničlami podaljšamo do $2nr$, nato pa to dolžino ohranjamo pri vseh vmesnih rezultatih. Kljub temu pa si oglejmo še eno možnost.

Naj bo, denimo, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_8)^t \in \mathcal{R}_8(C_\Sigma^{Ga})$. Pri predpostavki, da domneva 7.1 velja, brez težav dokažemo, da komponente slučajnih vektorjev $(X_1 + X_2, X_3 + X_4, X_5 + X_6, X_7 + X_8)^t$ in $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4, X_5 + X_6 + X_7 + X_8)^t$ povezuje normalna kopula. Zato si računanje lahko organiziramo na način, razviden s slike 7.1.

Slika 7.1: Shematičen izračun S_8 z dvojiškim drevesom



Najprej iz $F_{X_1}, \dots, F_{X_8}$ izračunamo porazdelitvene funkcije $F_{S_{1:2}}, F_{S_{3:4}}, F_{S_{5:6}}$ in $F_{S_{7:8}}$. Nato izračunamo korelacijski koeficient

$$\rho(S_{1:2}, S_{3:4}) = \frac{\mathrm{var}[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] - \mathrm{var}[X_1 + X_2] - \mathrm{var}[X_3 + X_4]}{2\sqrt{\mathrm{var}[X_1 + X_2]}\sqrt{\mathrm{var}[X_3 + X_4]}}$$

in $F_{S_{1:4}}$ ter analogno $F_{S_{5:8}}$. Končno izračunamo še

$$\rho(S_{1:4}, S_{5:8}) = \frac{\mathrm{var}[\sum_{i=1}^{8} X_i] - \mathrm{var}[\sum_{i=1}^{4} X_i] - \mathrm{var}[\sum_{i=5}^{8} X_i]}{2\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=1}^{4} X_i]}\sqrt{\mathrm{var}[\sum_{i=5}^{8} X_i]}}$$

in F_{S_8}.

Oglejmo si še splošnejši primer, ko je $n = 2^m$ in $m \geq 2$. Pripadajoče seštevalno dvojiško drevo ima $\log_2 n = m$ ravni. Če začnemo računati z vektorji $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$, ki jih z ničlami podaljšamo do dolžine $2r$, končamo z vektorjem f_{S_n}, ki je dolg $2r2^{\log_2 n} = 2nr$. Polno dvojiško drevo s k ravnmi ima $2^k - 1$ vozlišč, kar je v našem primeru enako $n-1$, v vsakem pa je treba izračunati vrsto (7.24). Tudi za n, ki ni potenca števila 2, se da seštevanje organizirati po dvojiškem drevesu, ki ima $\lceil \log_2 n \rceil$ ravni. Pri takem načinu je dolžina vektorja f_{S_n} enaka $2r2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, kar je za velike n bistveno manj kot $r2^{n-1}$ in vedno manj kot $4nr$.

Oglejmo si še algoritem 7.6, ki je prirejen za izračun z dvojiškim drevesom.

Algoritem 7.6: *Izračun porazdelitvene funkcije vsote komponent n-razsežnega slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami in matriko linearnih korelacijskih koeficientov ter normalno kopulo. Izvedba z dvojiškim drevesom – prvi del.*

Podatki:

1. $\mathbf{X}$ – n-razsežen slučajni vektor.
2. $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ – robne porazdelitvene funkcije.
3. $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ – robne gostote verjetnosti.
4. $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^t$ – vektor standardnih odklonov komponent vektorja $\mathbf{X}$.
5. Σ – $n \times n$ matrika linearnih korelacijskih koeficientov ρ_{ij}, $|\rho_{ij}| < 1$ za $i \neq j$.
6. ϵ – minimalna norma posameznega člena, ki ga še upoštevamo pri seštevanju vrste.
7. varianta – 1 (razcep drevesa na maksimalno uravnoteženi binarni poddrevesi) ali 2 (razcep drevesa na poddrevo s težo, ki je potenca števila 2, in preostanek). Če je n potenca števila 2, sta oba razcepa enaka.

Rezultati:

1. Karakteristična funkcija $\varphi_S(t)$ za $S = X_1 + \cdots + X_n$.
2. Gostota verjetnosti $f_S(x)$.
3. Porazdelitvena funkcija $F_S(x)$.

Postopek:

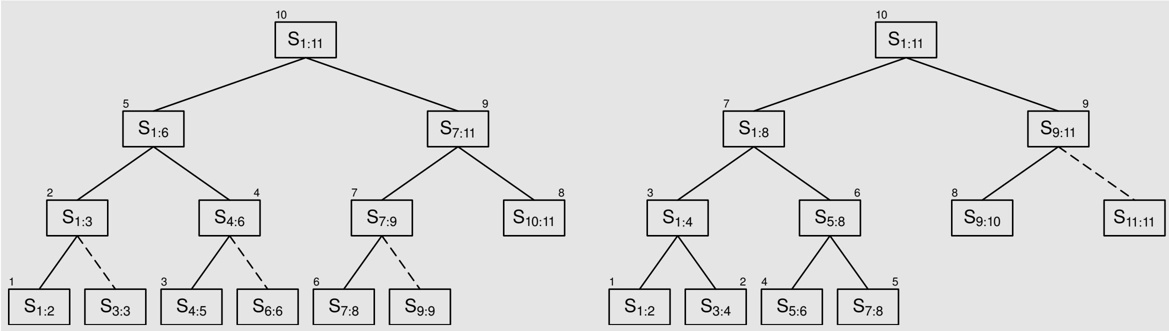
function SEŠTEJXINY($\varphi_X, \varphi_Y, \rho$) ▷ funkcija vrne $\varphi_S(t)$ za $S = X + Y$
    Iz $\varphi_X(t)$ in $\varphi_Y(t)$ izračunaj $f_X(x)$ in $f_Y(x)$
    Iz $f_X(x)$ in $f_Y(x)$ izračunaj $F_X(x)$ in $F_Y(x)$
    $a_q(x) \leftarrow \Phi^{-1}(F_X(x))$ ▷ utež iz rekurzijske formule za $a_m(x)$
    $b_q(x) \leftarrow \Phi^{-1}(F_Y(x))$ ▷ utež iz rekurzijske formule za $b_m(x)$
    $a_p(x) \leftarrow f_X(x)$ ▷ tu $a_{-2}(x)$, splošno pa prejšnji $a_m(x)$
    $b_p(x) \leftarrow f_Y(x)$ ▷ tu $b_{-2}(x)$, splošno pa prejšnji $b_m(x)$
    $a(x) \leftarrow 0$ ▷ tu $a_{-1}(x)$, splošno pa tekoči $a_m(x)$
    $b(x) \leftarrow 0$ ▷ tu $b_{-1}(x)$, splošno pa tekoči $b_m(x)$
    $\varphi_S(t) \leftarrow 0$
    $r \leftarrow 1$
    $m \leftarrow -1$
    repeat
        $m \leftarrow m + 1$
        $z(x) \leftarrow a(x)$
        $a(x) \leftarrow a_q(x)a(x) - (m-1)a_p(x)$ ▷ rekurzijski izračun tekočega $a_m(x)$
        $a_s(x) \leftarrow z(x)$
        $z(x) \leftarrow b(x)$
        $b(x) \leftarrow b_q(x)b(x) - (m-1)b_p(x)$ ▷ rekurzijski izračun tekočega $b_m(x)$
        $b_s(x) \leftarrow z(x)$
        $A(t) \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{itx}\mathrm{d}x$ ▷ tekoči $A_m(t)$
        $B(t) \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} b(x)e^{itx}\mathrm{d}x$ ▷ tekoči $B_m(t)$
        if $m > 0$ **then** $r \leftarrow \frac{r\rho}{m}$ ▷ tu je vedno $r = \frac{\rho^m}{m!}$
        $\varphi_S(t) \leftarrow \varphi_S(t) + A(t)B(t)r$ ▷ tu je vedno $\varphi_S(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i(t)B_i(t)\frac{\rho^i}{i!}$
    until $\|A(t)B(t)r\| < \epsilon$ ▷ zanko končamo, ko je $\|A_m(t)B_m(t)\frac{\rho^m}{m!}\| < \epsilon$
    return $\varphi_S(t)$
end function

Algoritem 7.6: *Izračun porazdelitvene funkcije vsote komponent n-razsežnega slučajnega vektorja s predpisanimi robnimi porazdelitvenimi funkcijami in matriko linearnih korelacijskih koeficientov ter normalno kopulo. Izvedba z dvojiškim drevesom – drugi del.*

function SEŠTEJ(i,m) ▷ funkcija vrne $\varphi_S(t)$ za $S = \sum_{k=i}^{m} X_k$
  if i=m **then** ▷ prišli smo do lista
    $\varphi_S(t) \leftarrow \varphi_{X_i}(t)$ ▷ ni več kaj računati, ker rezultat že imamo
  else
    if i=m-1 **then** ▷ sešteti je treba dve izhodiščni slučajni spremenljivki
      $\varphi_S(t) \leftarrow$ SEŠTEJXINY$(\varphi_{X_i}, \varphi_{X_m}, \rho_{im})$
    else ▷ drevo razcepimo na dve poddrevesi
      if varianta=1 **then** ▷ maksimalno možno uravnoteženi poddrevesi
        $j \leftarrow \lfloor \frac{i+m}{2} \rfloor$
      else ▷ poddrevo s težo, ki je potenca števila 2, in preostanek
        $j \leftarrow i + 2^{\lfloor \log_2 (k-i) \rfloor} - 1$
      end if ▷ j je končni indeks levega poddrevesa
      $k \leftarrow j + 1$ ▷ k je začetni indeks desnega poddrevesa
      $\varphi_1(t) \leftarrow$ SEŠTEJ(i,j) ▷ karakteristična funkcija levega poddrevesa
      $\varphi_2(t) \leftarrow$ SEŠTEJ(k,m) ▷ karakteristična funkcija desnega poddrevesa
      $v_0 \leftarrow \sigma^t_{i:m} \Sigma_{i:m,i:m} \sigma_{i:m}$ ▷ varianca korena
      $v_1 \leftarrow \sigma^t_{i:j} \Sigma_{i:j,i:j} \sigma_{i:j}$ ▷ varianca levega poddrevesa
      $v_2 \leftarrow \sigma^t_{k:m} \Sigma_{k:m,k:m} \sigma_{k:m}$ ▷ varianca desnega poddrevesa
      $\rho = \frac{v_0 - v_1 - v_2}{2\sqrt{v_1 v_2}}$ ▷ korelacijski koeficient med levim in desnim poddrevesom
      $\varphi_S(t) \leftarrow$ SEŠTEJXINY$(\varphi_1, \varphi_2, \rho)$ ▷ združi obe poddrevesi
    end if
  end if
  return $\varphi_S(t)$
end function
$\varphi_S(t) \leftarrow$ SEŠTEJ$(1,n)$
Iz $\varphi_S(t)$ izračunaj $f_S(x)$ ▷ uporabi inverzno Fourierovo transformacijo
Iz $f_S(x)$ izračunaj $F_S(x)$ ▷ integriraj

Opomba 7.9: Algoritem 7.6 deluje po načelu "deli in vladaj". Problem razbije na dva manjša problema, reši vsakega posebej, nato pa oba rezultata združi. Pri tem se rekurzivno spušča v globino, dokler ne naleti na poddrevo, za katero je treba sešteti dve slučajni spremenljivki, oziroma na osamljeno slučajno spremenljivko. Mogočih razcepov drevesa na dve poddrevesi je več. Za prvo varianto smo izbrali takega, ki poskuša izenačiti število sumandov. Pri drugi varianti pa je število sumandov v prvem poddrevesu največja potenca števila 2, ki je manjša od števila sumandov v nadrejenem drevesu, v drugem poddrevesu pa zberemo preostanek. Če je n potenca števila 2, sta oba razcepa enaka. Za $n = 11$ oba načrta seštevanja vidimo na sliki 7.2.

Slika 7.2: Izračun S_{11} z algoritmom 7.6 – levo prva, desno druga varianta



Nad pravokotniki je označen vrstni red seštevanja. Nad tistimi, v katere vodijo prekinjene povezave, oznake ni, ker v njih seštevanje ni potrebno. □

Seveda so mogoči tudi drugačni vrstni redi seštevanja po dveh slučajnih spremenljivk, vendar pa je število izračunov vrste (7.24) oziroma primerno interpretirane vrste (7.28) v vseh primerih enako $n - 1$. Izbrani vrstni red seštevanja vpliva na korelacijske koeficiente, s tem pa tudi na hitrost konvergence.

Rezultate testnih izračunov z algoritmom 7.6 smo primerjali z rezultati, dobljenimi s simulacijo. Pri tem domneve 7.1 nismo mogli ovreči, seveda pa je na ta način tudi potrditi ne moremo. Tudi vsi v 9. poglavju predstavljeni izračuni so narejeni po prvi varianti delno optimiziranega algoritma 7.6. Ker je tam $n = 4$, je izbor variante nepomemben.

Da ne bi navajali le "argumentov" za pravilnost domneve 7.1, si za konec oglejmo še primer, ko se je posplošitev rezultata za večrazsežno normalno porazdeljene slučajne vektorje po praktičnem preverjanju izkazala za nekorektno.

Naj bo $\mathbf{X} \in \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$ slučajni vektor, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^t$ vektor standardnih odklonov njegovih komponent, $\mathbf{D}$ diagonalna matrika z vektorjem σ na diagonali in $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)^t$. Na podlagi zapisa karakteristične funkcije v obliki

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) = e^{i\mathbf{s}^t\mu - \frac{1}{2}\mathbf{s}^t\Sigma\mathbf{s}} = e^{i\mathbf{s}^t\mu - \frac{1}{2}\mathbf{s}^t\mathbf{D}^2\mathbf{s}}\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^t(\Sigma - \mathbf{D}^2)\mathbf{s}} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(s_i)\, e^{-\frac{1}{2}\mathbf{s}^t(\Sigma - \mathbf{D}^2)\mathbf{s}},$$

ki smo jo za dvorazsežni primer že srečali pri dokazovanju izreka 7.3, bi lahko pomislili, da velja tudi v primeru, ko porazdelitvene funkcije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ niso normalne, kar pa se izkaže kot napačno.

8 Optimalna alokacija kapitala

Zavarovalnice so kot pravne osebe lahko organizirane na različne načine. Med njimi sta najpomembnejši organizacijski obliki delniška družba in družba za vzajemno zavarovanje. To sta v Sloveniji, kjer je večina zavarovalnic organiziranih kot delniška družba, tudi edini dovoljeni obliki[19].

Med interesi lastnikov delniških družb in njihovimi zavarovalci in zavarovanci obstaja konflikt interesov. Tako, denimo, lastniki želijo doseči željeni dobiček s čim manj kapitala, medtem ko zavarovanci želijo, da bi zavarovalnica za izpolnitev svojih obveznosti jamčila s čim več kapitala.

Med različnimi pogledi na kapital zavarovalnice, ki ga imajo deležniki zavarovalnice (zavarovalci, zavarovanci, lastniki, nadzorniki, vodstvo zavarovalnice, drugi zaposlenci, bonitetne agencije in morda še kdo), je najpomembnejši pogled lastnikov, čeprav tudi o tem lahko razpravljamo (Besson, Dacorogna, de Martin, Kastenholz & Moller, 2009). Zato na predpise o kapitalu, ki smo si jih ogledali v 2. poglavju, lahko gledamo tudi kot na robne pogoje, pri katerih lastniki zavarovalnic želijo optimalno alocirati svoj kapital. Pri tem je več možnosti za osnovne alokacijske enote, denimo organizacijske enote, tveganja, zavarovalne vrste ali posamezne produkte. Prav tako je več kriterijev optimalnosti.

V tem poglavju nas ne bo zanimal s predpisi zahtevani kapital (regulatorni kapital), ampak ekonomski kapital. Kot navajata Tang in Valdez (2006, str. 2), je to minimalni znesek kapitala, ki ga mora imeti zavarovalnica za nadomestilo pričakovanih in nepričakovanih bodočih odškodnin. To zelo splošno definicijo smo zavestno izbrali za izhodišče. Z njo bi radi ponazorili nekatere terminološke težave oziroma dvoumnosti v aktuarski in finančni literaturi, celo zmedo, kot omenjata Hesselager in Anderssen (2002, str. 2), ki navajata, da se ekonomski kapital nanaša na zaščito pred nepričakovanimi škodami oziroma odškodninami. Skratka, takoj naletimo na bistveno razliko, ki izvira iz različne obravnave pričakovanih odškodnin.

Če pogledamo zelo poenostavljeno bilanco stanja zavarovalnice, imamo na eni strani sredstva v skupni višini A (assets), na drugi pa obveznosti v skupni višini L (liabilities). Obveznosti L so sestavljene iz kapitala K, ki je obveznost do lastnikov, in (ocenjenih) obveznosti S, ki se nanašajo na prevzeta zavarovalna tveganja. Pri tem se ne obremenjujmo s tem, na kakšen način so vrednotena sredstva A in obveznosti S. Ker je v bilanci stanja $A = L$ in je $L = K + S$, je $K = A - S$. Ta presežek sredstev nad obveznostmi, ki se sčasoma spreminja oziroma prilagaja spremembam vrednosti sredstev in obveznosti, bi moral zadoščati za hude čase, ko bi dejanske obveznosti bistveno presegle pričakovane oziroma ocenjene obveznosti.

[19]Za pravne oblike, ki so dovoljene v drugih državah EU, glej Direktivo Solventnost 2, priloga III.

Na spodnjih shemah si oglejmo tri različne strukture sredstev, pri čemer so v isti liniji posamezne sheme na levi sredstva, na desni pa njihov vir.

Sredstva	Obveznosti	Sredstva	Obveznosti	Sredstva	Obveznosti
A	K	$A - \mathbb{E}[S]$	K	$A - \pi(S)$	K
	S	$\mathbb{E}[S]$	S	$\pi(S)$	S
A	L	A	L	A	L

Iz leve sheme vidimo, da je vir sredstev le kapital K. Pri tej možnosti je ekonomski kapital mišljen kot nadomestilo za pričakovane in nepričakovane odškodnine. Ta možnost sicer ne odraža realnega stanja v zavarovalnicah, lahko pa jo interpretiramo tako, da ekonomski kapital v tem primeru pomeni potrebno višino vseh sredstev. Če njihovo višino izračunamo z mero tveganja, ki je neobčutljiva na premik, in odštejemo nadomestilo za prevzem tveganja (tehnično premijo oziroma iz nje financirane naložbe), pa res dobimo ekonomski kapital. Iz srednje sheme vidimo, da je vir sredstev kapital K in nevarnostna premija v višini $\mathbb{E}[S]$, kot znašajo pričakovane obveznosti. Ta možnost odraža stališče, da se ekonomski kapital nanaša na zaščito pred nepričakovanimi odškodninami, ne upošteva pa dejstva, da je nadomestilo za pričakovane odškodnine praviloma večje od $\mathbb{E}[S]$. Tretja možnost, ki sledi iz desne sheme, je za zavarovalnice najbolj realna. Upošteva, da je vir sredstev kapital K in tehnična premija v višini $\pi(S)$. Režijskega dela kosmate premije tudi v tej bilančni shemi ni, ker lahko predpostavimo, da ga sproti porabimo za kritje stroškov.

Skratka, ekonomski kapital, zlasti pa še njegova alokacija na posamezne alokacijske enote, je predvsem teoretičen koncept. Lahko je udejanjen tudi v praksi, če je regulatorni kapital ustrezno izračunan, ni pa nujno. To še zlasti velja za alokacijo kapitala, kjer je smiselna dejanska alokacija kapitala zavarovalne skupine na posamezne članice skupine, ne pa tudi na tveganja ali zavarovalne vrste.

Če se ne želimo obremenjevati z nadomestilom za pričakovane odškodnine, drugi in tretji primer prevedemo na prvega, če namesto tveganja S gledamo tveganji $S - \mathbb{E}[S]$ in $S - \pi(S)$, s tem pa tudi upravičimo uporabo izraza ekonomski kapital v prvem primeru. Pravilna interpretacija dejanskega stanja je zlasti pomembna, če ekonomski kapital za skupno tveganje rutinsko računamo iz ekonomskih kapitalov za posamezna tveganja na nižji ravni. Tako možnost s poenostavljenim pristopom, prirejenim za srednjo bilančno shemo zgoraj, bomo predstavili v nadaljevanju.

Vrnimo se k definiciji ekonomskega kapitala. Zanj, denimo, so v dokumentu Specialty Guide on Economic Capital (2004, str. 5 in 6) navedene štiri različne definicije, ki so precej bolj natančne od že navedene. Vse omenjajo tudi predpisano toleranco do tveganja in časovni okvir, na katerega se toleranca nanaša. Tu navedimo definicijo, ki je posplošitev ene od definicij iz omenjenega dokumenta, ker nismo predpisali tudi metode vrednotenja sredstev in obveznosti.

Definicija 8.1: *Ekonomski kapital je presežek vrednosti sredstev nad vrednostjo obveznosti, ki je potreben za zagotovitev poravnave obveznosti, upoštevaje dano stopnjo tveganja in časovni okvir.*

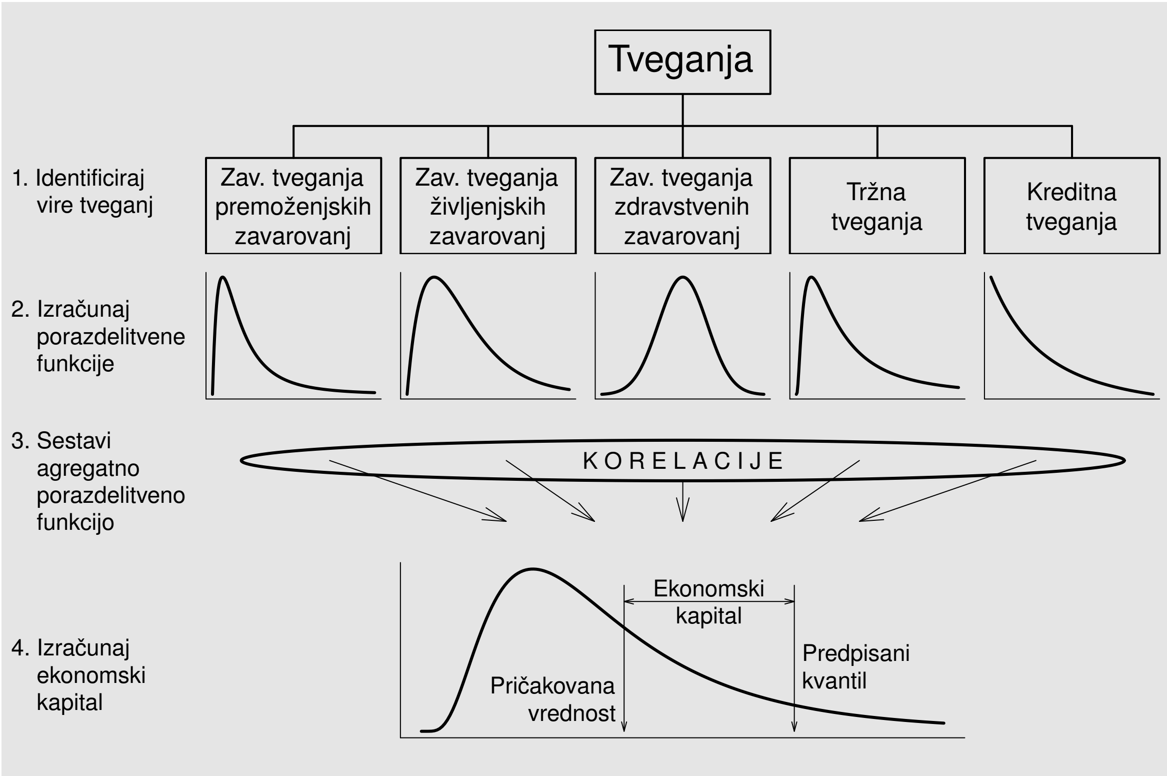
Za naš namen je ključno, da gre pri ekonomskem kapitalu za minimalno višino kapitala, ki je določena na podlagi specifičnosti posamezne zavarovalnice, medtem ko regulatorni kapital praviloma temelji na povprečju panoge. Zato naj bi bil ekonomski kapital boljše merilo kapitalskih zahtev za konkretno zavarovalnico kot pa regulatorni kapital. Razliko med obema vrstama kapitala bo odpravila Solventnost 2, če bomo solventnostni kapital računali z internim modelom namesto s standardno formulo.

Na ekonomski kapital lahko gledamo kot na kapital, ki temelji na tveganjih (RBC – Risk Based Capital, kar pa je v ZDA skoraj sinonim za regulatorni kapital), oziroma na kapital, ki je prilagojen tveganju (RAC – Risk Adjusted Capital). Zato moramo, če smo natančni, poleg višine ekonomskega kapitala navesti še mero tveganja, časovni okvir in toleranco do tveganja, da sredstev za poravnavo vseh obveznosti ne bo dovolj.

Recimo, da za poravnavo obveznosti zaradi prevzetega tveganja X, upoštevaje predpisano verjetnost in dani časovni okvir, potrebujemo $\rho(X)$ sredstev. Za pričakovane obveznosti v višini $\mathbb{E}[X]$ sredstva pridobimo kot nadomestilo za prevzem tveganja, za morebitni presežek pa je potreben ekonomski kapital v višini $\mathrm{EC[X]} = \rho(X) - \mathbb{E}[X]$. Če je tveganj več, moramo za izračun ekonomskega kapitala, ki se nanaša na njihov seštevek, poznati porazdelitvene funkcije posameznih tveganj in korelacije oziroma odvisnosti med njimi, predvsem pa ustrezne metode za izračun porazdelitvene funkcije vsote koreliranih oziroma odvisnih tveganj. Shematično je izračun ekonomskega kapitala razviden s slike 8.1.

Natančen izračun ekonomskega kapitala zahteva uporabo metod iz prejšnjih dveh poglavij, pogosto pa zaradi nepoznavanja posameznih parametrov, denimo korelacij, niti ni mogoč. Zato ga v praksi večkrat poenostavimo, tako da privzamemo večrazsežno normalno porazdelitev vseh upoštevanih tveganj, korelacije med njimi pa predpišemo s primerno stopnjo previdnosti.

Slika 8.1: Shematičen izračun ekonomskega kapitala



Vir: Prirejeno po Wason, Insurer Solvency Assessment: Towards a Global Framework, 2004, objavljeno v Komelj, Solventnost II – izračun kapitala za avtomobilska zavarovanja, 2011

Poglejmo si primer, ko za mero tveganja upoštevamo tvegano vrednost pri dani stopnji zaupanja $\alpha \in (0,1)$. Časovni okvir, denimo eno leto, je že implicitno upoštevan v porazdelitveni funkciji slučajne spremenljivke X, ki se nanaša na tveganje enega leta. V tem primeru dobimo ekonomski kapital $\mathrm{EC}_\alpha[X] = \mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathbb{E}[X]$ in analogno $\mathrm{EC}_\alpha[Y] = \mathrm{VaR}_\alpha(Y) - \mathbb{E}[Y]$. Za premajhno stopnjo zaupanja α, za katero je $\mathrm{VaR}_\alpha(X) < \mathbb{E}[X]$, sicer dobimo negativen ekonomski kapital $\mathrm{EC}_\alpha[X]$, kar pa nas na ravni posameznega tveganja ne bo motilo. V takem primeru je namreč stopnja tveganja $1-\alpha$, da posledic uresničite tveganja ne bomo mogli nadomestiti, za praktično uporabo prevelika. Seveda pa bi se negativnemu ekonomskemu kapitalu po načelu previdnosti lahko izognili tudi z definicijo $\mathrm{EC}_\alpha[X] = (\mathrm{VaR}_\alpha(X) - \mathbb{E}[X])_+$.

Predpostavimo, da je $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ in $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Izberimo stopnjo zaupanja $\alpha > \frac{1}{2}$, tako da je $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$. V tem primeru je $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(\alpha)$, $\mathrm{EC}_\alpha[X] = \sigma_X \Phi^{-1}(\alpha) > 0$ in analogno $\mathrm{EC}_\alpha[Y] = \sigma_Y \Phi^{-1}(\alpha) > 0$. Naj bosta tveganji X in Y korelirani ter $\rho = \rho(X,Y)$ in $S = X + Y$. Potem je $S \sim \mathrm{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_S^2)$, kjer je $\sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 + 2\,\rho\,\sigma_X\,\sigma_Y + \sigma_Y^2}$, in $\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sigma_S \Phi^{-1}(\alpha) > 0$. Vsi trije ekonomski kapitali $\mathrm{EC}_\alpha[X]$, $\mathrm{EC}_\alpha[Y]$ in $\mathrm{EC}_\alpha[S]$ so $\Phi^{-1}(\alpha)$-kratniki pripadajočih standardnih odklonov, zato je

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sqrt{(\mathrm{EC}_\alpha[X])^2 + 2\rho\,\mathrm{EC}_\alpha[X]\,\mathrm{EC}_\alpha[Y] + (\mathrm{EC}_\alpha[Y])^2}\,. \tag{8.1}$$

Pri danih ekonomskih kapitalih $\mathrm{EC}_\alpha[X]$ in $\mathrm{EC}_\alpha[Y]$ po zgornji enačbi dobimo najmanj za $\rho = -1$, ko je

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sqrt{(\mathrm{EC}_\alpha[X] - \mathrm{EC}_\alpha[Y])^2} = |\mathrm{EC}_\alpha[X] - \mathrm{EC}_\alpha[Y]|\,,$$

največ pa za $\rho = 1$, ko je

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sqrt{(\mathrm{EC}_\alpha[X] + \mathrm{EC}_\alpha[Y])^2} = \mathrm{EC}_\alpha[X] + \mathrm{EC}_\alpha[Y]\,.$$

Zaradi previdnosti običajno za negativne korelacije namesto $\rho = \rho(X, Y)$ upoštevamo $\rho = 0$. S tem privzetkom je v našem primeru najmanjši možni ekonomski kapital za tveganje $S = X + Y$ enak

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sqrt{(\mathrm{EC}_\alpha[X])^2 + (\mathrm{EC}_\alpha[Y])^2}\,,$$

kar ustreza ekonomskemu kapitalu za primer, ko sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Razlika $\mathrm{EC}_\alpha[X] + \mathrm{EC}_\alpha[Y] - \mathrm{EC}_\alpha[S]$, ki ji rečemo učinek razpršitve, je padajoča nenegativna funkcija spremenljivke ρ.

Formulo (8.1) brez težav posplošimo za splošen primer n-razsežne normalne porazdelitve slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$ s korelacijsko matriko Σ z elementi ρ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. V tem primeru za $S = \sum_{i=1}^n X_i$ dobimo

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij}\,\mathrm{EC}_\alpha[X_i]\,\mathrm{EC}_\alpha[X_j]}\,. \tag{8.2}$$

Tudi tukaj privzemimo, da vse morebitne negativne korelacijske koeficiente postavimo na nič, tako da velja neenačba

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\mathrm{EC}_\alpha[X_i])^2} \quad \le \quad \mathrm{EC}_\alpha[S] \quad \le \quad \sum_{i=1}^n \mathrm{EC}_\alpha[X_i]\,.$$

Spodnjo mejo dosežemo, ko so tveganja $X_1, \ldots, X_n$ neodvisna, zgornjo pa, ko so komonotono linearno odvisna, zaradi česar so vsi Pearsonovi korelacijski koeficienti ena.

Opomba 8.1: Naj bo $S = \sum_{i=1}^n X_i$ vsota komponent slučajnega vektorja, za katerega je $\frac{X_1-\mathbb{E}[X_1]}{\sigma_{X_1}} \overset{d}{=} \cdots \overset{d}{=} \frac{X_n-\mathbb{E}[X_n]}{\sigma_{X_n}} \overset{d}{=} \frac{S-\mathbb{E}[S]}{\sigma_S}$. Za take slučajne vektorje, katerih poseben primer so n-razsežno eliptično porazdeljeni slučajni vektorji, torej tudi n-razsežno normalno porazdeljeni, lahko enačbo (8.2) posplošimo. Če za tveganje X_i ekonomski kapital izračunamo z distorzijsko mero tveganja $\mathbb{H}_g$, tako da je $\mathrm{EC}[X_i] = \mathbb{H}_g[X_i] - \mathbb{E}[X_i]$, potem je $\mathrm{EC}[S] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij}\mathrm{EC}[X_i]\,\mathrm{EC}[X_j]}$ (glej Dhaene et al., 2005, str. 23). Kot smo spoznali v razdelku 4.2.7, je končna tvegana vrednost distorzijska mera tveganja. Zato za eliptično porazdeljene slučajne vektorje $(X_1,\dots,X_n)$ enačba (8.2) velja, tudi če ekonomski kapital za tveganje X_i izračunamo z $\mathrm{EC}_\alpha[X_i] = \mathrm{TVaR}_\alpha[X_i] - \mathbb{E}[X_i]$. □

Pri računanju ekonomskega kapitala, ki ga potrebujemo zaradi upravljanja zaupanega portfelja naložb, lahko s slučajnimi spremenljivkami $X_1,\dots,X_n$ modeliramo kar negotove bodoče vrednosti oziroma donose posameznih naložb, upoštevaje spremembe vrednosti naložb, obresti, dividende, upravljalske in druge stroške itd. Če lastniku naložbe X_i jamčimo, da mu bomo po pretečenem dogovorjenem času izplačali pričakovano vrednost $\mathbb{E}[X_i]$, je definicija ekonomskega kapitala s formulo $\mathrm{EC}_\alpha[X_i] = \mathrm{VaR}_\alpha[X_i]-\mathbb{E}[X_i]$ za posamezno naložbo gotovo smiselna. Prav tako je smiselna tudi enačba (8.2), s katero izračunamo ekonomski kapital za celoten portfelj naložb, če se le ne obremenjujemo z vprašanjem, ali je predpostavka o večrazsežni normalni porazdelitvi slučajnega vektorja $(X_1,\dots,X_n)$ dovolj dobro izpolnjena. Posledično se tudi ne obremenjujemo z dejstvom, da ekonomski kapital EC_α kot mera tveganja, ki jo McNeil et al. (2005, str. 38) označujejo z $\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{mean}}$, v splošnem primeru ni koherentna, ker ni subaditivna. Zato je učinek razpršitve tveganj lahko tudi negativen, vendar ne v našem primeru n-razsežne normalne porazdelitve, ko je vedno $\sum_{i=1}^n \mathrm{EC}_\alpha[X_i] - \mathrm{EC}_\alpha[S] \geq 0$.

Naj bo $(X_1,\dots,X_n)$ n-razsežno normalno porazdeljen slučajni vektor zavarovalnih tveganj s korelacijsko matriko Σ, pri čemer se tveganje X_i nanaša na vsoto vseh tveganj za i-to zavarovalno vrsto. Zavarovalnica za prevzem tveganja X_i, za katerega predpostavimo, da je $\mathbb{E}[X_i] > 0$, prejme tehnično premijo v višini $\pi(X_i) = (1+\delta_i)\,\mathbb{E}[X_i]$, $\delta_i > 0$, $i = 1,\dots,n$. Zato za tveganje X_i, če ga gledamo samostojno, dejansko potrebuje ekonomski kapital v višini $K_\alpha[X_i] = \mathrm{VaR}_\alpha[X_i] - \pi(X_i)$, kar je za varnostni dodatek $\delta_i\mathbb{E}[X_i]$ manj kot $\mathrm{EC}_\alpha[X_i]$. Pri dovolj veliki stopnji zaupanja v konkurenčnih razmerah varnostni dodatek ne more biti pretirano velik. Zato lahko predpostavimo, da je $K_\alpha[X_i] \geq 0$. Če pa navedene predpostavke niso izpolnjene, raje uporabimo enačbo $K_\alpha[X_i] = (\mathrm{VaR}_\alpha[X_i] - \pi(X_i))_+$.

Naj bo $\tilde{K}_\alpha[S]$ dejanski ekonomski kapital, ki je potreben za seštevek tveganj $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Z upoštevanjem enačb $\pi(S) = \sum_{i=1}^n \pi(X_i)$ in $\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ dobimo skupni varnostni dodatek $\pi(S) - \mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \delta_i\mathbb{E}[X_i]$, za kolikor je ekonomski kapital, izračunan z enačbo (8.2), prevelik. Zato je

$$\tilde{K}_\alpha[S] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\mathrm{EC}_\alpha[X_i]\mathrm{EC}_\alpha[X_j]} - \sum_{i=1}^{n}\delta_i\mathbb{E}[X_i] \tag{8.3}$$

oziroma

$$\tilde{K}_\alpha[S] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\,(K_\alpha[X_i] + \delta_i\mathbb{E}[X_i])(K_\alpha[X_j] + \delta_j\mathbb{E}[X_j])} - \sum_{i=1}^{n}\delta_i\mathbb{E}[X_i]\,.$$

Tudi v tem primeru morebitni negativni ekonomski kapital $\tilde{K}_\alpha[S]$ postavimo na nič.

Ekonomski kapital za slučajno spremenljivko S izračunajmo še na tretji način, tako da preprosto na desni strani enačbe (8.2) namesto ekonomskih kapitalov $\mathrm{EC}_\alpha[X_i]$ vstavimo $K_\alpha[X_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Dobimo

$$K_\alpha[S] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}\,K_\alpha[X_i]\,K_\alpha[X_j]}\,. \tag{8.4}$$

V tem primeru je učinek razpršitve tveganj vedno nenegativen, če pa privzamemo, da vse morebitne negativne korelacijske koeficiente postavimo na nič, velja neenačba

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(K_\alpha[X_i])^2} \quad\leq\quad K_\alpha[S] \quad\leq\quad \sum_{i=1}^{n}K_\alpha[X_i]\,.$$

Očitno je $\mathrm{EC}_\alpha[S] \geq \tilde{K}_\alpha[S]$ in $\mathrm{EC}_\alpha[S] \geq K_\alpha[S]$, pri tem pa enačaj lahko dosežemo le, če pogoje za varnostne koeficiente omilimo, tako da namesto $\delta_i > 0$ zahtevamo $\delta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Malo več truda zahteva dokaz, da je $K_\alpha[S] \geq \tilde{K}_\alpha[S]$. Skratka, za naše tri ekonomske kapitale velja neenačba

$$\mathrm{EC}_\alpha[S] \geq K_\alpha[S] \geq \tilde{K}_\alpha[S]\,,$$

zaradi katere smo na varni strani, če ekonomski kapital računamo z enačbo (8.4) namesto z enačbo (8.3). Z uporabo enačbe (8.2) bi bili še bolj na varni strani, vendar bi pri tem popolnoma zanemarili dejstvo, da v mnogih primerih kot nadomestilo za prevzem tveganja X zahtevamo več kot $\mathbb{E}[X]$.

Enačba (8.4) bo hierarhično uporabljena tudi kot standardna formula za izračun solventnostnega kapitala v okviru Solventnosti 2. Z njo bomo pri stopnji zaupanja $\alpha = 0{,}995$ za obdobje enega leta računali zahtevani solventnostni kapital na posameznih ravneh. Na ravni tik pod vrhom se slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_5$ nanašajo na zavarovalna tveganja pri premoženjskih, življenjskih in zdravstvenih zavarovanjih, tržna tveganja in kreditna tveganja. Pripadajoči ekonomski kapitali $K_{0,995}[X_1], \ldots, K_{0,995}[X_5]$ predstavljajo zahtevani solventnostni kapital, če vsako od navedenih tveganj gledamo samostojno, vendar pa kot seštevek morebitnih tveganj na nižji ravni. V našem primeru $K_{0,995}[S]$ pomeni osnovni zahtevani solventnostni kapital, ki se nanaša na seštevek tveganj $S = X_1 + \cdots + X_5$. Korelacijski koeficienti, ki so potrebni za izračun z enačbo (8.4), so razvidni iz tabele 8.1, v kateri se kreditna tveganja nanašajo le na tveganje neplačila nasprotne stranke.

Tabela 8.1: Korelacijski koeficienti med tveganji, ki vplivajo na solventnostni kapital

	Zavarovalna tveganja			Tržna	Kreditna
	Premoženjska	Življenjska	Zdravstvena	tveganja	tveganja
Premoženjska	1	0	0	0,25	0,50
Življenjska	0	1	0,25	0,25	0,25
Zdravstvena	0	0,25	1	0,25	0,25
Tržna	0,25	0,25	0,25	1	0,25
Kreditna	0,50	0,25	0,25	0,25	1

Vir: Direktiva Solventnost 2, priloga IV

Skupni zahtevani solventnostni kapital dobimo tako, da osnovnemu zahtevanemu solventnostnemu kapitalu prištejemo zahtevani solventnostni kapital za operativna tveganja ter upoštevamo morebitna zmanjšanja zaradi absorbcijskih zmožnosti zavarovalno-tehničnih rezervacij in odloženih davkov.

Lastnike kapitala med drugimi kazalniki uspešnosti poslovanja običajno zanima tudi donosnost na kapital (ROC – Return On Capital). Če izračun kapitala temelji na tveganjih, pa jih zanima donosnost na tveganju prilagojeni kapital (RORAC – Return On Risk Adjusted Capital oziroma RAROC – Risk Adjusted Return On Capital). Zato je eden od ciljev optimizacije alokacije kapitala, da pri predpisani meri tveganja in toleranci do tveganja dosežemo čim večji RORAC. Seveda pri iskanju optimuma upoštevamo tudi praktični pogoj, da moramo "zaposliti" vsaj toliko kapitala, kolikršna je višina regulatornega kapitala.

Če pri izračunu ekonomskega kapitala izhajamo iz danih predpostavk o obsegu poslovanja v posameznih zavarovalnih vrstah in s tem povezanimi tveganji, na prvi pogled nimamo več česa optimizirati, vendar ni tako. Zaradi učinka razpršitve potrebujemo namreč manj ekonomskega kapitala od seštevka posameznih ekonomskih kapitalov za posamezna tveganja oziroma zavarovalne vrste, če le uporabljamo subaditivno mero tveganja. Zato je treba izračunani ekonomski kapital alocirati na posamezna tveganja oziroma zavarovalne vrste, tako da posamezni alokacijski enoti dejansko priredimo največ toliko kapitala, kolikor zanjo zahteva izračun brez upoštevanja drugih tveganj oziroma zavarovalnih vrst. Lahko bi celo rekli, da gre v tem primeru za alokacijo učinka razpršitve.

Seveda lahko optimizacijsko nalogo definiramo tudi drugače. Pri danem razpoložljivem kapitalu poiščimo tak načrt poslovanja, da bo ekonomski kapital enak razpoložljivemu kapitalu, hkrati pa bomo dosegli kar največjo donosnost na kapital. Navedeni cilj optimizacije alokacije kapitala je le eden od možnih. Tako bi, denimo, lahko iskali tudi tako alokacijo razpoložljivega kapitala, za katero bi predpisali ciljno donosnost in najmanjšo še sprejemljivo verjetnost, da jo bomo dosegli, tveganje, da bomo izgubili celoten kapital (ali njegov del), pa bi radi zmanjšali na minimum. Tovrstna optimizacija ima smisel predvsem v primeru, ko želimo izpolniti kapitalske zahteve za ustrezno bonitetno oceno, kar je običajno zahtevnejše od zahtev regulatorja.

V nadaljevanju si bomo ogledali, kako že izračunani ekonomski kapital (oziroma učinek razpršitve) alociramo po posameznih alokacijskih enotah. Če posamezno zavarovalnico (ali zavarovalno skupino) gledamo celovito, so alokacijske enote na najvišji ravni običajno posamezne poslovne enote (ali podružnice) ali pa posamezne skupine tveganj. Če sestavimo matriko z vrsticami, ki se nanašajo na poslovne enote, in stolpci, ki se nanašajo na skupine tveganj, nas torej zanima alokacija kapitala po vrsticah ali stolpcih. Prva možnost nas zanima predvsem zaradi spremljanja ekonomske uspešnosti posamezne poslovne enote, za katero želimo upoštevati tudi stroške kapitala, druga pa zaradi ustreznega načrtovanja upravljanja tveganj in dejstva, da je skupni kapital odvisen od tveganj. Ker so metode alokacije kapitala enake, lahko oba primera pokrijemo z razdelkom 8.1.

V bistvu bi tudi alokacijo kapitala po zavarovalnih vrstah lahko obravnavali analogno kot alokacijo kapitala po poslovnih enotah ali skupinah tveganj. Vprašanje pa je, ali posamezni zavarovalni vrsti znamo korektno prirediti vsa tveganja, ki so z njo povezana, saj imamo v praksi težave že s korektno alokacijo stroškov po zavarovalnih vrstah. Pri tem posebnem primeru alokacije kapitala, ki ga bomo obravnavali v razdelku 8.2, je alokacija kapitala potrebna predvsem zaradi korektnega določanja primerne zavarovalne premije in spremljave rezultatov zavarovalne vrste, upoštevaje tudi stroške kapitala.

8.1 Alokacija kapitala po vrstah tveganj

Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ zvezne slučajne spremenljivke, s katerimi modeliramo n različnih tveganj, in $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ skupno tveganje, za katero moramo izračunati ekonomski oziroma tveganju prilagojeni kapital K.

Najprej si podrobneje oglejmo eno izmed možnosti, kako lahko izračunamo K za zavarovalnice. Za mero tveganja izberimo tvegano vrednost in predpostavimo, da porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ že poznamo. Ker s tem poznamo tudi $\mathbb{E}[S] = \mu_S$ in $\mathrm{var}[S] = \sigma_S^2$, poznamo tudi porazdelitveno funkcijo standardizirane slučajne spremenljivke $Z = \frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$, saj je $F_Z(x) = F_S(\mu_S + \sigma_S x)$, in pripadajočo kvantilno funkcijo $F_Z^{-1}(x)$. Čeprav bi lahko shajali tudi brez porazdelitvene funkcije $F_Z(x)$, je njeno poznavanje koristno že zaradi primerjave s standardizirano normalno porazdelitveno funkcijo $\Phi(x)$. Na podlagi primerjave namreč vsaj grobo lahko ocenimo, kako natančni so aproksimativni izračuni kapitala z enačbami (8.2), (8.3) in (8.4).

Lastniki zavarovalnice pričakujejo donosnost na tveganju prilagojeni kapital K v višini RORAC $= r_f + r$, kjer je r_f netvegana obrestna mera, r pa dodatek za tveganje. Ker donos na kapital v višini $r_f K$ lahko dosežejo že z netveganimi naložbami kapitala, morajo razliko rK do pričakovanega donosa dobiti neposredno iz premije oziroma posredno iz donosa naložb kritnega premoženja, delno pa tudi iz morebitnega donosa naložb kapitala, ki presega netvegani donos. V tem primeru seveda pričakujemo, da je med tržnimi in kreditnimi tveganji upoštevano tudi tveganje, ki se nanaša na naložbe kapitala. Pripomnimo še, da je v zavarovalnicah kapital pogosto vsaj delno "zamrznjen" v nedonosnih osnovnih sredstvih za lastno uporabo, kar vpliva tudi na tveganje premoženja zaradi spremembe cen nepremičnin. V takem primeru izpad pričakovanega netveganega donosa nadomestimo z ustreznim povečanjem r, lahko pa ga upoštevamo kot (delni) strošek kapitala, ki ga v kosmato zavarovalno premijo vračunamo skupaj z drugimi obratovalnimi stroški. Dodajmo še, da so pri danem obsegu poslovanja obratovalni stroški praktično konstantni, kljub temu pa naj bo med tveganji $X_1, \ldots, X_n$ tudi slučajna spremenljivka, ki se nanaša na morebitni presežek obratovalnih stroškov nad vračunanimi stroški. Tako nam izjemoma ne bo treba delati s tehnično premijo, ampak bomo lahko shajali kar s kosmato.

Pri navedenih predpostavkah je izhodiščno nadomestilo za prevzete obveznosti enako μ_S, kar se v glavnem nanaša na nevarnostno premijo, povečano za režijski dodatek in zmanjšano za pričakovane donose naložb kritnega premoženja, če ne omenjamo drugih komponent. Za doseganje pričakovane donosnosti na kapital potrebujemo še rK sredstev. Seveda jih lahko dobimo le, če jih vračunamo v kosmato premijo v funkciji varnostnega dodatka, ki skupaj z nevarnostno premijo sestavlja tehnično premijo, namenjeno izplačilu odškodnin. Dolgoročno se varnostni dodatek pri korektno določeni nevarnostni premiji sprosti kot dobiček. Za izračun kapitala K potrebujemo še podatek o tem, koliko so lastniki zavarovalnice pripravljeni tvegati. Denimo, da so v enem letu pripravljeni izgubiti največ βK kapitala, $0 \leq \beta \leq 1$, z verjetnostjo, ki ne presega $1 - \alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Pri teh zahtevah dobimo enačbo $\mathbb{P}(S - \mu_S - rK > \beta K) = 1 - \alpha$ oziroma $\mathbb{P}(S - \mu_S \leq (r + \beta)K) = \alpha$, od tu pa $\mathbb{P}\left(\frac{S-\mu_S}{\sigma_S} \leq \frac{(r+\beta)K}{\sigma_S}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{(r+\beta)K}{\sigma_S}\right) = \alpha$ in

$$K = \frac{\sigma_S F_Z^{-1}(\alpha)}{r + \beta}. \tag{8.5}$$

Enačbo (8.5) je Antal (2003, str. 39) uporabil za izračun ekonomskega kapitala, potrebnega za nevtralizacijo tveganja, da bodo agregatne odškodnine presegle agregatno premijo. Ker so tu poleg zavarovalnih upoštevana tudi druga tveganja, je opisani izračun le trivialna posplošitev njegovega izračuna oziroma splošnejša interpretacija.

V analizi enačbe (8.5), ki sledi, privzemimo, da se portfelj in okolje ne spreminjata, zaradi česar se porazdelitvene funkcije posameznih tveganj $X_1, \ldots, X_n$ ne spreminjajo, prav tako se ne spreminja odvisnost med njimi. Zato se tudi porazdelitveni funkciji $F_S(x)$ in $F_Z(x)$ ne spreminjata.

Pri dani porazdelitveni funkciji $F_Z(x)$ je kapital K, izračunan z enačbo (8.5), odvisen le od r, α in β. Pri danih r in α se z manjšanjem β višina kapitala povečuje, s tem pa se povečuje tudi donos na kapital v višini rK, ki ga pripisujemo prevzetemu tveganju, kar pa povečuje kosmato zavarovalno premijo za dani portfelj zavarovanj. Po drugi strani pa se znesek βK, ki so ga lastniki pripravljeni tvegati, zmanjšuje, ker je $\frac{\beta}{r+\beta}$ naraščajoča funkcija spremenljivke β. Ker se tudi razmerje med donosom rK in tveganim kapitalom βK z zmanjševanjem β povečuje, je cilj lastnikov zmanjševanje β proti 0 (in še naprej proti $-r$, če opustimo pogoj $\beta \geq 0$), dokler ne trčijo na ekonomske omejitve. Prva možnost je, da z enačbo (8.5) izračunani kapital doseže višino kapitala, ki ga imajo na razpolago, druga pa je, da trg ne sprejme povečanja kosmate premije, kar poruši naše predpostavke.

Analogno ugotovimo, da se pri danih α in β višina kapitala z večanjem r zmanjšuje, donos na kapital v višini rK, ki ga pripisujemo prevzetemu tveganju, pa se povečuje, ker je $\frac{r}{r+\beta}$ naraščajoča funkcija spremenljivke r. Ker se tudi razmerje med donosom rK in tveganim kapitalom βK z večanjem r povečuje, je logična težnja lastnikov zavarovalnic, da bi povečali r ter z manj kapitala hkrati dosegli večjo donosnost in večji donos na kapital, torej relativno in absolutno več. Ker pa se z večanjem r veča tudi kosmata premija za dani portfelj zavarovanj, se povečevanje spremenljivke r v praksi slej ko prej zaustavi zaradi vpliva cenovne elastičnosti na povpraševanje, ki spodnese predpostavko o nespremenljivem portfelju zavarovanj.

Pri izbranem α in kapitalu K, ki ga lastniki želijo investirati v zavarovalnico, je po obravnavanem modelu pri danem portfelju seštevek $r + \beta$ že določen, ne pa tudi njegova struktura. S povečevanjem r in ob hkratnem zmanjševanju β lastniki zmanjšujejo svoje tveganje na račun povečevanja premije za dani portfelj, kjer pa meje določa trg. Po drugi strani pa z zmanjševanjem r in hkratnem povečevanju β lastniki zmanjšujejo donosnost na kapital in povečujejo svoje tveganje. Tako zopet naletijo na mejo lastnih interesov oziroma predpisov o višini kapitala. Skratka, morebitni pohlep lastnikov ali pa pretirano previdnost, ki se izraža pri določanju parametrov r, α in β, ustavi tržno ravnovesje med ponudbo in povpraševanjem, čeprav včasih z zakasnitvijo. Drugo skrajnost, ko bi bili lastniki pripravljeni tvegati preveč, pa bi morali ustaviti predpisi o kapitalu in dosleden zavarovalni nadzor.

V pravkar obravnavanem posebnem primeru izračuna ekonomskega kapitala se alokacije kapitala na posamezna tveganja še nismo lotili. Zato na problem določanja višine kapitala in njegovo alokacijo spet poglejmo bolj splošno. Najprej pa se dogovorimo za poenostavitev, povezano z nadomestilom za prevzem tveganja, ki smo jo omenili že na začetku tega poglavja. Med tveganji $X_1, \dots, X_n$ so namreč lahko tudi taka, za prevzem katerih je zavarovalnica dobila nadomestilo za prevzem, denimo zavarovalna tveganja, in taka, za katera nadomestila ni prejela, denimo operativna tveganja. Tovrstne razlike, ki zapletejo problem, bi radi neškodljivo odpravili. Zato tveganje X_i, za katerega zavarovalnica prejme nadomestilo v višini $\pi(X_i)$, nadomestimo z $X_i - \pi(X_i)$. Zato bomo v nadaljevanju privzeli, da za nobeno tveganje ne dobimo nadomestila, če ne bomo posebej navedli drugače. Sicer pa posebna pozornost ni potrebna, če je mera tveganja ρ, s katero bomo določali ekonomski kapital, neobčutljiva na premik. V tem primeru je $\rho(X_i - \pi(X_i)) = \rho(X_i) - \pi(X_i)$, zaradi česar pri izračunu kapitala lahko upoštevamo izhodiščno tveganje X_i in šele po alokaciji kapitala skupni ekonomski kapital K in tveganju X_i alocirani kapital K_i zmanjšamo za $\pi(X_i)$.

Če tveganje X_i, $i = 1, \dots, n$, gledamo samostojno, za nevtralizacijo z njim povezanim nepričakovanim povečanjem obveznosti ali zmanjšanjem sredstev potrebujemo $\rho(X_i)$ kapitala. Za skupno tveganje $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ lahko ekonomski kapital K izračunamo z isto mero tveganja, torej $K = \rho(S)$, ni pa nujno. Mogoče je, da je K pač kapital, ki je na razpolago, ne glede na to, kako je določena njegova višina. Naša naloga je, da kapital K alociramo na posamezna tveganja $X_1, \dots, X_n$, tako da jim priredimo $K_1, \dots, K_n$ enot kapitala. Pri tem lahko zahtevamo, da so izpolnjeni nekateri pogoji. Tako je, denimo, Denault (2001) definiral aksiome za koherentno alokacijo kapitala, ki pa so prirejeni za primer, ko slučajna spremenljivka X pomeni priložnost. Zato tudi tu, tako kot v definiciji 4.2 za koherentne mere tveganja, navedimo ekvivalentne aksiome, prirejene za primer, ko X pomeni tveganje. Pri tem bomo sledili viru (Panjer, 2002), vendar z majhnimi korekcijami.

Definicija 8.2: *Tveganju $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ s koherentno mero tveganja ρ priredimo $K = \rho(S)$ enot kapitala, na vsako posamezno tveganje $X_1, \dots, X_n$ pa alocirajmo $K_1, \dots, K_n$ enot kapitala. Taka alokacija kapitala je koherentna, če izpolnjuje naslednje lastnosti:*

1. *$K = \sum_{i=1}^{n} K_i$, kar pomeni popolno alokacijo kapitala.*
2. *Za $\mathcal{I} \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ je $\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i \leq \rho(\sum_{i\in\mathcal{I}} X_i)$, kar pomeni, da nobeni podmnožici tveganj $\mathcal{M} \subseteq \{X_1, \dots, X_n\}$ ne alociramo več kapitala, kot bi ga alocirali, če bi jo gledali samostojno.*
3. *Če za $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$, za vsak $\mathcal{M} \subseteq \{X_1, \dots, X_n\} \setminus \{X_i, X_j\}$ množicama $\mathcal{M} \cup \{X_i\}$ in $\mathcal{M} \cup \{X_j\}$ alociramo enako kapitala, potem je $K_i = K_j$.*
4. *Za tveganje, pri katerem ni negotovosti, ne alociramo kapitala za del tveganja nad pričakovano vrednostjo.*

Zadnja zahteva bi se dala jasneje zapisati, če bi bilo vedno jasno, kaj natančno je mišljeno s kapitalom $K = \rho(S)$. Konstantnemu tveganju $X_i = \alpha$ alociramo α kapitala, če za njegov sprejem nismo dobili nadomestila, oziroma nič, če smo dobili nadomestilo v višini α.

Za koherentno alokacijo kapitala smo že v izhodišču zahtevali, da je ρ koherentna mera tveganja. Subaditivnost kot ključna lastnost koherentnih mer tveganja pa je zahtevana tudi posredno. Iz druge zahteve namreč sledi, da je $K_i \leq \rho(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, iz prve pa še $\rho(\sum_{i=1}^{n} X_i) = K = \sum_{i=1}^{n} K_i \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(X_i)$.

Kot ugotavljata Kim in Hardy (2009, str. 357), je alokacija kapitala že standarden del procesa upravljanja tveganj v družbah, vendar pa še ni splošnega soglasja, kako zahtevani kapital alocirati. Zato obstajajo tudi sistemi aksiomov za alokacijo kapitala, ki se razlikujejo od v definiciji 8.1 navedenega sistema za koherentno alokacijo, vendar nas tu ne bodo zanimali (glej npr. Hesselager & Anderssen, 2002; Kalkbrener, 2005; Kim & Hardy, 2009). Prav tako je sporen drugi aksiom za koherentno alokacijo kapitala (glej Kim & Hardy, 2009, str. 364), po katerem nobeni podmnožici tveganj ne alociramo več kapitala, kot bi ga alocirali, če bi jo gledali samostojno.

V nadaljevanju ne bomo zahtevali, da je alokacija kapitala koherentna, ker se ne želimo odreči nekoherentnim meram tveganja, med njimi zlasti ne tvegani vrednosti. Prav tako ne bomo zahtevali, da so izpolnjeni kakšni drugi alokacijski aksiomi. Predpostavili bomo le, da je $K = \rho(S)$, in zahtevali, da je alokacija popolna, torej $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$.

V posebnem primeru, ko je ρ aditivna mera tveganja, je za $K = \rho(S)$ naravna alokacija $K_i = \rho(X_i)$, $i = 1,\dots,n$, zaradi aditivnosti popolna. V splošnem primeru, ko ρ ni aditivna mera tveganja, pa se kot naravna ponuja sorazmerna alokacija $K_i = \gamma\rho(X_i)$, $i = 1,\dots,n$, ki je za $\gamma = \frac{K}{\sum_{i=1}^{n}\rho(X_i)}$ popolna. Za subaditivne mere tveganja je $\gamma \leq 1$, za superaditivne pa je $\gamma \geq 1$.

Oglejmo si nekaj primerov sorazmernih alokacij kapitala. Če za mero tveganja izberemo tvegano vrednost pri dani stopnji zaupanja $\alpha \in (0,1)$, je $K = \mathrm{VaR}_\alpha(S)$ in $K_i = \gamma\,\mathrm{VaR}_\alpha(X_i)$, $i = 1,\dots,n$, kjer je $\gamma = \frac{K}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{VaR}_\alpha(X_i)}$. Ta način alokacije kapitala Dhaene, Tsanakas, Valdez in Vanduffel (2009, str. 5) imenujejo princip alokacije kapitala s striženjem las. Primeren je tudi takrat, ko kapital K namesto s $K = \mathrm{VaR}_\alpha(S)$ določimo kako drugače.

Pri alokaciji kapitala s striženjem las kapitalu K_i oziroma tveganju X_i ustreza stopnja zaupanja $\alpha_i = F_{X_i}^{-1}(K_i)$, $i = 1,\dots,n$. V splošnem primeru so zaradi različnih porazdelitvenih funkcij $F_{X_1},\dots,F_{X_n}$ stopnje zaupanja $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ različne. To je lahko moteče, če bi radi dosegli enotno stopnjo zaupanja za vsa posamezna tveganja $X_1,\dots,X_n$. Motnjo poskusimo odpraviti tako, da s sorazmernostnim faktorjem γ ne množimo že izračunanih tveganih vrednosti $\mathrm{VaR}_\alpha(X_i)$, ampak izhodiščno stopnjo zaupanja α. To pomeni, da želimo poiskati stopnjo zaupanja $\tilde{\alpha} = \gamma\alpha$, za katero je $K_i = \mathrm{VaR}_{\tilde{\alpha}}(X_i)$, $i = 1,\dots,n$, in $K = \sum_{i=1}^{n}K_i$, kar pa ni vedno mogoče, če kakšna od porazdelitvenih funkcij $F_{X_1},\dots,F_{X_n}$ ni strogo naraščajoča. Težavo odpravimo z alokacijo $K_i = F_{X_i}^{-1(\beta)}(\tilde{\alpha})$, $i = 1,\dots,n$, kjer je $\beta \in [0,1]$ primerna konstanta, funkcije $F_{X_1}^{-1(\beta)},\dots,F_{X_n}^{-1(\beta)}$ pa so definirane z enačbo (4.2). Iskana parametra $\tilde{\alpha}$ in β poiščemo tako, da izračunamo $\tilde{\alpha} = F_{S^c}(K)$, kjer je F_{S^c} porazdelitvena funkcija komonotone vsote $S^c = \sum_{i=1}^{n}F_{X_i}^{-1}(U)$, $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, nato pa iz enačbe $K = F_{S^c}^{-1(\beta)}(F_{S^c}(K))$ izračunamo še konstanto β (glej Dhaene et al., 2009, str. 6). Takemu načinu alokacije kapitala pravimo princip alokacije na podlagi kvantilov. Za strogo naraščajoče zvezne porazdelitvene funkcije $F_{X_1},\dots,F_{X_n}$ je $\beta = 1$, princip alokacije na podlagi kvantilov pa je le poseben primer alokacije kapitala s striženjem las za stopnjo zaupanja $\tilde{\alpha} = F_{S^c}(K)$.

Kapital K lahko sorazmerno alociramo tudi po CTE principu, če za mero tveganja pri dani slučajni spremenljivki S izberemo $\rho(X) = \mathbb{E}[X|S > \mathrm{VaR}_\alpha(S)]$. Skupni kapital določimo s $K = \mathbb{E}[S|S > \mathrm{VaR}_\alpha(S)] = \mathrm{CTE}_\alpha(S)$, kar je za zvezno slučajno spremenljivko S enako $\mathrm{TVaR}_\alpha(S)$. Tveganju X_i alociramo $K_i = \mathbb{E}[X_i|S > \mathrm{VaR}_\alpha(S)]$ kapitala, kar je zaradi aditivnosti pričakovane vrednosti korekten prispevek tveganja X_i k skupnemu kapitalu. Po CTE principu alocirani kapital izpolnjuje vse pogoje iz definicije 8.2 za koherentno alokacijo kapitala (Panjer, 2002, str. 6). Za slučajne vektorje $(X_1,\dots,X_n)$, ki so n-razsežno normalno porazdeljeni, Panjer

(2002, str. 5–6) navaja eksplicitno formulo za alokacijo, ki sta jo Landsman in Valdez (2003, str. 68, izrek 3) posplošila za eliptično porazdeljene vektorje.

Od sorazmernih alokacij kapitala omenimo še alokacijo kapitala po principu kovariance. Mero tveganja ρ pri danem S definirajmo z $\rho(X) = \mathrm{cov}[X, S]$. Z njo za S dobimo kapital v višini $K = \mathrm{var}[S]$, lahko pa ga določimo tudi neodvisno od mere tveganja. Delne kapitale določimo z $\rho(X_i) = \mathrm{cov}[X_i, S]$, tako da izpolnimo pogoj o popolni alokaciji kapitala. Ker je $\mathrm{var}[S] = \mathrm{cov}[S, S] = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{cov}[X_i, S]$, cilj dosežemo s $K_i = K\,\frac{\mathrm{cov}[X_i,S]}{\mathrm{var}[S]}$, $i = 1, \ldots, n$. Očitno je v tem primeru kakšen delni kapital K_i lahko tudi negativen.

Za slučajne vektorje $(X_1, \ldots, X_n)$, ki so n-razsežno eliptično porazdeljeni in za katere je $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $i = 1, \ldots, n$, je alokacija skupnega kapitala $K = \mathrm{CTE}_\alpha(S)$ po CTE principu enaka alokaciji kapitala po principu kovariance (Dhaene et al., 2009, str. 8).

S kapitalom $K = \rho(S)$ nevtraliziramo morebitne prevelike neugodne finančne učinke uresničitve tveganja S. Kljub kapitalu K pa vedno ostane še nekaj tveganja, vendar v sprejemljivih okvirih. Za poljubno mero tveganja ρ, ki je neobčutljiva na premik, zaradi

$$K = \rho(S) = \rho(S - K + K) = \rho(S - K) + K$$

dobimo, da je preostalo tveganje $\rho(S - K) = 0$. Zato je smiselno, da za merjenje preostalega tveganja izberemo drugo mero tveganja. Denimo, da ga merimo s pričakovanim primanjkljajem $\varphi(S,K) = \mathbb{E}[(S - K)_+]$, kar je v primeru, ko je $K = \rho(S) = \mathrm{VaR}_\alpha(S)$, enako $\mathrm{ESF}_\alpha(S)$.

Zaradi pogoja $K = \sum_{i=1}^{n}K_i$ z verjetnostjo 1 velja $(S - K)_+ \leq \sum_{i=1}^{n}(X_i - K_i)_+$, kar nam zaradi aditivnosti pričakovane vrednosti da neenačbo

$$\mathbb{E}[(S - K)_+] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - K_i)_+]. \tag{8.6}$$

Pri danih robnih porazdelitvenih funkcijah $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ in danem kapitalu K je leva stran neenačbe (8.6) odvisna od kopule C, ki povezuje komponente slučajnega vektorja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, desna stran pa od $K_1, \ldots, K_n$. Če pri danem slučajnem vektorju $\mathbf{X}$ in danem kapitalu K želimo uravnotežen pogled na skupno preostalo tveganje in na seštevek posameznih preostalih tveganj, si za cilj optimizacije lahko postavimo minimizacijo desne strani neenačbe (8.6), medtem ko je leva stran z $\mathbf{X}$ in K že določena. Zato nas neposredno zanima rešitev optimizacijskega problema 8.1, le kot zanimivost pa tudi rešitev optimizacijskega problema 8.2.

Problem 8.1: Za dani slučajni vektor $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{R}_n(F_{X_1}, \dots, F_{X_n})$ poišči popolno alokacijo $K_1, \dots, K_n$ danega kapitala K, za katero vsota $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - K_i)_+]$ doseže minimum. □

Problem 8.2: Poišči slučajni vektor $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{R}_n(F_{X_1}, \dots, F_{X_n})$, ki pri danem kapitalu K za $S = \sum_{i=1}^n X_i$ maksimizira izraz $\mathbb{E}[(S - K)_+]$. □

Izkaže se, da je pri danih robnih porazdelitvenih funkcijah $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ in kapitalu K maksimum, ki pripada rešitvi problema 8.2, enak minimumu, ki pripada rešitvi problema 8.1 (Dhaene et al., 2003, str. 54). Rešitev problema 8.2 je slučajni vektor $(X_1^c, \dots, X_n^c)$ s komponentami $X_i^c = F_{X_i}^{-1}(U)$, $U \sim \mathrm{U}[0,1]$, $i = 1, \dots, n$, ki so komonotone slučajne spremenljivke. Rešitev problema 8.1 pa je $K_i = F_{X_i}^{-1(\beta)}(F_{S^c}(K))$, $i = 1, \dots, n$, kjer je $S^c = \sum_{i=1}^n X_i^c$ in β rešitev enačbe $K = F_{S^c}^{-1(\beta)}(F_{S^c}(K))$ (Dhaene et al., 2009, str. 17, izrek 2). Ker je še $\mathbb{E}[(S^c - K)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - K_i)_+]$, z alokacijo kapitala na podlagi kvantilov minimiziramo desno stran neenačbe (8.6), tako da je

$$\mathbb{E}[(S - K)_+] \leq \mathbb{E}[(S^c - K)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - K_i)_+].$$

Za rešitev problema 8.1 moramo najprej izračunati $\alpha = F_{S^c}(K)$. Pomagamo si z izrekom 5.3, po katerem je $F_{S^c}^{-1(\beta)}(\alpha) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\beta)}(\alpha)$ za $\alpha \in (0,1)$ in $\beta \in [0,1]$. Če je porazdelitvena funkcija F_{S^c} v točki K strogo naraščajoča, α izračunamo iz enačbe $K = F_{S^c}^{-1}(\alpha)$, kar lahko storimo npr. z bisekcijo. Sicer pa najprej poiščemo tak α, da je $F_{S^c}^{-1}(\alpha) = K_a \leq K \leq K_b = F_{S^c}^{-1+}(\alpha)$, ter za $\beta = \frac{K_b - K}{K_b - K_a}$ izračunamo $K_i = F_{X_i}^{-1(\beta)}(\alpha)$, $i = 1, \dots, n$.

Poudarimo, da smo v problemu 8.1 za merjenje tveganja $X_i - K_i$ uporabili pričakovani primanjkljaj $\mathbb{E}[(X_i - K_i)_+]$, ki ni neobčutljiv na premik. Če bi merili s poljubno mero tveganja ρ, ki je neobčutljiva na premik, bi za vsoto, ki jo želimo minimizirati, dobili $\sum_{i=1}^n \rho(X_i - K_i) = \sum_{i=1}^n \rho(X_i) - K$, kar je neodvisno od alokacije kapitala. Na tej podlagi Dhaene et al. (2003, str. 48, primer 3) ugotavljajo, da alokacija kapitala K znotraj finančne skupine ni pomembna za presojanje varnosti skupine, če jo ocenjujemo s primerjavo $\rho_0(S - K)$ in $\sum_{i=1}^n \rho_i(X_i - K_i)$, kjer so ρ_0 in $\rho_1, \dots, \rho_n$ na premik neobčutljive mere tveganja, s katerimi merimo preostalo tveganje skupine in njenih enot.

Oglejmo si še en zanimiv primer optimizacije iz (Dhaene, Laeven, Vanduffel, Darkiewicz & Goovaerts, 2006). Predpostavimo, da mora imeti zavarovalnica s portfeljem (oziroma tveganjem) X vsaj $K = \rho(X)$ kapitala, kjer je ρ predpisana mera tveganja. Zavarovalni nadzornik meri tudi preostalo tveganje $(X - \rho(X))_+$, pri tem pa uporablja pričakovani primanjkljaj, definiran s $\varphi(X, \rho(X)) = \mathbb{E}[(X - \rho(X))_+]$.

Če bi se pri predpisovanju mere tveganja za izračun kapitala K odločal med merama tveganja ρ_1 in ρ_2, za kateri je $\rho_1(X) \leq \rho_2(X)$ za vsak X, bi bilo zaradi neenačbe $\mathbb{E}[(X - \rho_1(X))_+] \geq \mathbb{E}[(X - \rho_2(X))_+]$ v interesu varnosti zavarovancev, če bi se odločil za ρ_2. Po drugi strani pa ima kapital svojo ceno, ki jo lahko merimo z donosnostjo nad netvegano obrestno mero. Ker bi bila donosnost na kapital pri prestrogih kapitalskih zahtevah premajhna, mora nadzornik kapitalske zahteve predpisati tako, da vsaj delno upošteva tudi interese lastnikov kapitala. To lahko naredi tako, da v funkciji, ki jo želi minimizirati, vsaj delno upošteva tudi stroške kapitala. Za opisano okolje je smiseln naslednji optimizacijski problem.

Problem 8.3: Naj bo $\mathcal{A}_X = \{\rho(X) : \rho \text{ je mera tveganja}\}$ in $\alpha \in (0,1)$. Poišči $K \in \mathcal{A}_X$, za katerega funkcija $C(X,K) = \mathbb{E}[(X - K)_+] + \alpha K$ doseže minimum. □

Če upoštevamo enačbo (3.3), s katero je definirana stop-loss transformiranka, vidimo, da pri danem X iščemo minimum funkcije $h(K) = \int_K^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x + \alpha K$. Potrebni pogoj za minimum $h'(K) = -\overline{F}_X(K) + \alpha = 0$ oziroma $F_X(K) = 1 - \alpha$ izpolnjuje vsak $K = F_X^{-1(\beta)}(1 - \alpha)$, $\beta \in [0,1]$, najmanjši pa je $K = \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)$. Ker je $h''(K) = f_X(K) \geq 0$, bi funkcija $h(x)$ v točki K lahko imela tudi prevoj, vendar ima minimum (glej Dhaene, Laeven et al., 2006, str. 8, izrek 1).

Izračunajmo še vrednost funkcije $C(X,K)$ za $K = \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)$. V njenem prvem členu prepoznamo pričakovani primanjkljaj $\mathrm{ESF}_{1-\alpha}(X)$, zato z upoštevanjem enačbe (4.5) dobimo

$$C(X, \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)) = \mathrm{ESF}_{1-\alpha}(X) + \alpha\,\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X) = \alpha \mathrm{TVaR}_{1-\alpha}(X).$$

Če v problemu 8.3 v definiciji množice $\mathcal{A}_X$ nabor mer tveganja omejimo na distorzijske mere tveganja $\rho(X) = \mathbb{H}_g[X]$ za konkavne distorzijske funkcije $g(x)$, za katere je $\mathbb{H}_g[X] \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)$, je rešitev problema $K = \mathrm{TVaR}_{1-\alpha}(X)$ (Dhaene, Laeven et al., 2006, str. 9, izrek 3).

V (Dhaene, Laeven et al., 2006, str. 9) je rešitev problema 8.3 omenjena kot možen teoretičen argument za izbor tvegane vrednosti pri določanju kapitalskih zahtev. Dodajmo, da bi to pri Solventnosti 2 pomenilo, da so v kriterijski funkciji $C(X,K)$ upoštevani stroški kapitala v višini 0,5 % nad netvegano obrestno mero. Poudarimo, da moramo tu spet pomisliti na to, kaj je mišljeno s kapitalom $\rho(X)$, ker je pomembno za določanje parametra α. Če so mišljena vsa sredstva, je osnova za izračun dejanskih stroškov kapitala prevelika, kar pa lahko nevtraliziramo z manjšim parametrom α.

Za konec omenimo še združevanje portfeljev, kjer bomo sledili viru (Dhaene, Laeven et al., 2006). Naj bo $K_1 = \rho(X_1)$ in $K_2 = \rho(X_2)$ kapital, ki je za zavarovalnici s portfeljema X_1 in X_2 določen z mero tveganja ρ, tako da izpolnjujeta vse zahtevane pogoje glede višine kapitala. Če združimo portfelja X_1 in X_2 ter kapitala K_1 in K_2, z verjetnostjo 1 velja neenačba

$$(X_1 + X_2 - K_1 - K_2)_+ \leq (X_1 - K_1)_+ + (X_2 - K_2)_+\,, \tag{8.7}$$

ki je posledica pravnih predpisov zaradi različnega jamstva za poravnavo obveznosti po združitvi in pred njo. Če zavarovalni nadzornik preostalo tveganje meri s pričakovanim primanjkljajem $\varphi(X,K) = \mathbb{E}[(X-K)_+]$, potem iz neenačbe (8.7) sledi

$$\varphi(X_1 + X_2, K_1 + K_2) \leq \varphi(X_1, K_1) + \varphi(X_2, K_2),$$

kar pomeni, da se je z združitvijo zavarovalnic varnost kvečjemu povečala.

Sedaj pa tudi kapital združene zavarovalnice določimo s $K = \rho(X_1 + X_2)$. Če je mera tveganja ρ superaditivna, potem se varnost po združitvi poveča, saj je $K \geq K_1 + K_2$ in

$$\varphi(X_1 + X_2, K) \leq \varphi(X_1, K_1) + \varphi(X_2, K_2).$$

Če pa je mera tveganja ρ subaditivna, zaradi $K \leq K_1 + K_2$ velja

$$(X_1 + X_2 - K)_+ \geq (X_1 + X_2 - K_1 - K_2)_+\,.$$

Če je $K < K_1 + K_2$, v zgornji neenačbi velja strogi neenačaj. V tem primeru so mogoče take realizacije slučajnih spremenljivk X_1 in X_2, denimo $x_1 > K_1$ in $x_2 > K_2$, da je $(x_1 + x_2 - K_1 - K_2)_+ = (x_1 - K_1)_+ + (x_2 - K_2)_+$, zaradi česar je

$$(x_1 + x_2 - K)_+ > (x_1 + x_2 - K_1 - K_2)_+ = (x_1 - K_1)_+ + (x_2 - K_2)_+\,.$$

To pa pomeni, da se varnost po združitvi zavarovalnic lahko tudi zmanjša, če je mera tveganja ρ (preveč) subaditivna.

O združevanju portfeljev glej še (Dhaene, Laeven et al., 2006; Gerber & Shiu, 2006), o različnih pogledih regulatorja in investitorja na višino zahtevanega kapitala pa (Desmedt & Walhin, 2008).

8.2 Alokacija kapitala po zavarovalnih vrstah

Kot smo že omenili, bi alokacijo kapitala po zavarovalnih vrstah lahko obravnavali tako kot alokacijo kapitala po poslovnih enotah ali skupinah tveganj. V vseh treh primerih gre v tehničnem smislu za isti problem s podobno motivacijo in interpretacijo. Prav tako je vsaj v grobem enak tudi celoten postopek, ki pripelje do rešitve problema. V prvem koraku je treba izračunati kapital za posamezne alokacijske enote, če jih gledamo neodvisno, nato pa še skupni kapital, upoštevaje korelacije med alokacijskimi enotami. Ta korak včasih kar preskočimo, če je skupni kapital že določen na kakšen drug način. V drugem koraku je treba skupni kapital, ki se praviloma razlikuje od seštevka kapitalov za posamezne alokacijske enote, gledane neodvisno, korektno razdeliti na posamezne alokacijske enote. Ker v tehničnem smislu zaradi različnih alokacijskih enot ni razlik, si bomo v tem razdelku ogledali še nekaj mogočih načinov alokacije kapitala.

Najprej problem posplošimo. Naj bo $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ odprta homogena množica, zaradi česar za vsak $\lambda > 0$ iz $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^t \in \mathcal{W}$ sledi $\lambda\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Zahtevajmo še, da je $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^t \in \mathcal{W}$. Vzemimo poljuben vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ in si oglejmo tveganje $S(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i X_i$. Zanj potrebni kapital izračunajmo z izbrano mero tveganja ρ, tako da je $K(\mathbf{w}) = \rho(S(\mathbf{w}))$. Privzemimo še, da je mera tveganja ρ pozitivno homogena, kapital $K(\mathbf{w})$ pa odvedljiva funkcija na $\mathcal{W}$.

Za poljubno konstanto $\lambda > 0$ z upoštevanjem, da je $S(\lambda\mathbf{w}) = \lambda S(\mathbf{w})$, dobimo

$$K(\lambda\mathbf{w}) = \rho(S(\lambda\mathbf{w})) = \rho(\lambda S(\mathbf{w})) = \lambda\rho(S(\mathbf{w})) = \lambda K(\mathbf{w}),$$

kar pomeni, da je $K(\mathbf{w})$ homogena funkcija stopnje ena. Z Eulerjevo enačbo (glej Vidav, 1973, str. 294) jo lahko zapišemo kot

$$K(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial K(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial \rho(S(\mathbf{w}))}{\partial w_i}.$$

V našem izhodiščnem primeru, ko nas zanima le $S = \sum_{i=1}^n X_i$, kar je $S(\mathbf{1})$, in pripadajoči kapital $K = \rho(S) = \rho(S(\mathbf{1})) = K(\mathbf{1})$, iz zgornje enačbe sledi

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial \rho(S(\mathbf{w}))}{\partial w_i}\right|_{\mathbf{w}=\mathbf{1}}.$$

Dobljena enačba nam zagotavlja, da je alokacija kapitala

$$K_i = \left.\frac{\partial \rho(S(\mathbf{w}))}{\partial w_i}\right|_{\mathbf{w}=\mathbf{1}} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{8.8}$$

popolna, za subaditivne mere tveganja ρ pa velja še $K_i \leq \rho(X_i)$ (glej Tsanakas, 2007, str. 12, za podrobnosti pa Tasche, 2008, str. 5).

Navedeni način alokacije kapitala se imenuje alokacija kapitala z Eulerjevim principom (glej Patrik, Bernegger & Rüegg, 1999, str. 87, in Tasche, 2004, str. 8) oziroma alokacija kapitala z gradientom (glej npr. Fischer, 2002, str. 3), ker je vektor $(K_1, \dots, K_n)^t$ enak gradientu $\nabla\rho(S(\mathbf{w}))$ v točki $\mathbf{w} = \mathbf{1}$, pa tudi alokacija kapitala na podlagi mejnih stroškov kapitala (glej npr. Tsanakas, 2007, str. 11). Zaradi enačbe

$$\mathrm{d}K(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K(\mathbf{w})}{\partial w_i}\,\mathrm{d}w_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho(S(\mathbf{w}))}{\partial w_i}\,\mathrm{d}w_i,$$

veljavne na $\mathcal{W}$ in izračunane v točki $\mathbf{w} = \mathbf{1}$, je $\mathrm{d}K = \sum_{i=1}^{n} K_i\,\mathrm{d}w_i$. Tako majhna sprememba tveganja X_i v strukturi S na spremembo skupnega kapitala K vpliva sorazmerno z alociranim kapitalom K_i.

Denimo, da se tveganja $\tilde{X}_i = X_i - \pi(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, nanašajo na morebitno izgubo zaradi skupnih prevzetih tveganj $X_1, \dots, X_n$ v n različnih zavarovalnih vrstah, za katera smo prejeli skupne kosmate premije $\pi(X_1), \dots, \pi(X_n)$. Ker smo tokrat $\pi(X_i)$ proglasili za kosmato premijo, se tveganje nanaša na možnost, da bo seštevek odškodnin in stroškov večji od kosmate premije, pri tem pa takoj lahko predpostavimo, da se tveganje dejansko nanaša le na prevelike odškodnine, saj so stroški praktično konstantni. Za $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ smo izračunali skupni kapital K in ga z Eulerjevim principom alocirali $K_1, \dots, K_n$ na tveganja $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$. Razmerje $\frac{K_i}{\pi(X_i)}$ nam pove, koliko kapitala potrebujemo na enoto kosmate premije za i-to zavarovalno vrsto, kar lahko primerjamo z 0,18 (oziroma 0,16), kot zahteva Solventnost 1.

Običajno so razmerja $\frac{K_1}{\pi(X_1)}, \dots, \frac{K_n}{\pi(X_n)}$ zaradi različne tveganosti posameznih zavarovalnih vrst različna, prav nič pa ne odražajo poslovnih rezultatov posameznih zavarovalnih vrst. Zato z r_i označimo razmerje med pričakovanim dobičkom in kosmato premijo v i-ti zavarovalni vrsti in izračunajmo pričakovane donosnosti $\frac{r_1\pi(X_1)}{K_1}, \dots, \frac{r_n\pi(X_n)}{K_n}$ na tveganju prilagojeni kapital za posamezne zavarovalne vrste in skupno pričakovano donosnost na tveganju prilagojeni kapital RORAC $= \frac{D}{K}$, kjer je $D = \sum_{i=1}^{n} r_i\pi(X_i)$ skupni pričakovani dobiček. Ker izračunane pričakovane donosnosti lahko primerjamo z donosnostjo na kapital, ki jo pričakujejo lastniki zavarovalnice, smo dobili merilo, na podlagi katerega se lahko odločamo o morebitnem prestrukturiranju portfelja.

Predpostavimo, da majhna relativna sprememba δ_i obsega posla v i-ti zavarovalni vrsti višino kosmate premije $\pi(X_i)$ in tveganje X_i spremeni za $\delta_i\pi(X_i)$ oziroma $\delta_i X_i$, na preostale zavarovalne vrste pa ne vpliva. Poudarimo, da to velja za majhne relativne spremembe obsega poslovanja, saj sicer sprememba obsega poslovanja v i-ti zavarovalni vrsti v splošnem primeru vpliva tudi na kapital za preostale zavarovalne vrste, če smo ga alocirali z Eulerjevim principom. Pri privzetih predpostavkah se tveganje $\tilde{X}_i$ spremeni za $\delta_i\tilde{X}_i$, pričakovani dobiček za $r_i\delta_i\pi(X_i)$, potrebni kapital pa za $\delta_i K_i$. Pri hkratnih majhnih spremembah v več zavarovalnih vrstah se skupni pričakovani dobiček spremeni za $\delta D = \sum_{i=1}^{n} r_i \delta_i \pi(X_i)$, skupni kapital pa za $\delta K = \sum_{i=1}^{n} \delta_i K_i$. S primernimi majhnimi relativnimi spremembami obsega poslovanja v dveh ali več zavarovalnih vrstah lahko dosežemo, da se skupni kapital ne spremeni, hkrati pa se morda poveča pričakovani dobiček oziroma donosnost na kapital, kar je naš cilj.

Sprememba strukture portfelja ima smisel, če se zaradi nje donosnost na kapital poveča, kar nam da pogoj $\frac{D+\delta D}{K+\delta K} > \frac{D}{K}$. Pri predpostavki, da je $\delta K > 0$, dobimo pogoj $\frac{\delta D}{\delta K} > \frac{D}{K}$, pri $\delta K < 0$ dobimo $\frac{\delta D}{\delta K} < \frac{D}{K}$, pri $\delta K = 0$ pa $\delta D > 0$. Če se sprememba nanaša le na i-to zavarovalno vrsto, za katero je $K_i > 0$, je za $\delta_i > 0$ pogoj izpolnjen, če je $\frac{r_i \pi(X_i)}{K_i} > \frac{D}{K}$, za $\delta_i < 0$ pa, če je $\frac{r_i \pi(X_i)}{K_i} < \frac{D}{K}$. Zaključek je pričakovan. Portfelj je smiselno povečevati v zavarovalnih vrstah, za katere je pričakovana donosnost na tveganju prilagojeni kapital večja od povprečne, in zmanjševati v zavarovalnih vrstah, za katere je manjša. V morebitnih primerih, ko je $K_i < 0$, pa velja nasprotno. Pri tem se ne obremenjujmo z ekonomskim pomenom donosnosti na negativni kapital, ampak upoštevajmo le aritmetiko. Če je $\frac{D}{K} > 0$, je povečevanje obsega poslovanja za dobičkonosne zavarovalne vrste z negativnim kapitalom vedno smiselno, za take, ki prinašajo izgubo, pa tudi, če je $r_i > \frac{D K_i}{K \pi(X_i)}$. Za različne strategije prestrukturiranja portfelja glej še (Meyers, 2003), za analogen problem merjenja prispevka posamezne naložbe k skupnemu tveganju in s tem povezano donosnostjo na alocirani kapital pa (Tasche, 2000).

Tasche (2008) poleg podrobne razlage Eulerjevega principa alokacije kapitala navaja precej razlogov za njegovo uporabo, navaja pa tudi druge avtorje in njihove argumente. Oglejmo si še štiri primere alokacije kapitala z Eulerjevim principom, v katerih za mere tveganja upoštevamo standardni odklon, tvegano vrednost, končno tvegano vrednost in distorzijsko mero tveganja $\mathbb{H}_g$ za dano konkavno in odvedljivo distorzijsko funkcijo $g(x)$. Čeprav prvi dve nista koherentni, izpolnjujeta potrebni pogoj za alokacijo z Eulerjevim principom, ker sta pozitivno homogeni.

Primer 8.1: Slučajni spremenljivki S priredimo kapital $K = \rho(S) = \sigma_S$. V tem primeru je $K(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathrm{var}[S(\mathbf{w})]} = \sqrt{\mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{w}}$, kjer je Σ kovariančna matrika z elementi $\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}[X_i, X_j]$, $i, j = 1, \ldots, n$. Naj bodo $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ enotni vektorji. Z upoštevanjem, da je kovariančna matrika simetrična, dobimo

$$\frac{\partial K(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{w}}}{\partial w_i} = \frac{\mathbf{e}_i^t \Sigma \mathbf{w} + \mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{e}_i}{2\sqrt{\mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{w}}} = \frac{\mathbf{e}_i^t \Sigma \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{w}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j \, \mathrm{cov}[X_i, X_j]}{K(\mathbf{w})}.$$

Upoštevajmo, da je $K(\mathbf{1}) = K = \sigma_S$, pa z enačbo (8.8) dobimo

$$K_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}[X_i, X_j]}{\sigma_S} = \frac{\operatorname{cov}[X_i, S]}{\sigma_S} = K\,\frac{\operatorname{cov}[X_i, S]}{\operatorname{var}[S]} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

kar je že prej predstavljeni princip alokacije kapitala na podlagi kovariance. □

Primer 8.2: Pri dani stopnji zaupanja $\alpha \in (0,1)$ slučajni spremenljivki S priredimo kapital $K = \mathrm{VaR}_\alpha(S)$. V tem primeru z alokacijo kapitala po Eulerjevem principu dobimo $K_i = \mathbb{E}[X_i | S = \mathrm{VaR}_\alpha(S)]$, $i = 1, \ldots, n$, kar pa je precej teže izpeljati kot v primeru 8.1 (glej Tasche, 2001, str. 5, in Tasche, 2004, str. 15, trditev 4, in str. 16, opomba 3). □

Primer 8.3: Pri dani stopnji zaupanja $\alpha \in (0,1)$ slučajni spremenljivki S priredimo kapital $K = \mathrm{TVaR}_\alpha(S)$. V tem primeru z alokacijo kapitala po Eulerjevem principu dobimo $K_i = \mathbb{E}[X_i | S \geq \mathrm{VaR}_\alpha(S)]$, $i = 1, \ldots, n$, kar je že prej predstavljeni CTE princip alokacije kapitala (glej npr. McNeil et al., 2005, str. 260). □

Primer 8.4: Naj bo $g(x)$ odvedljiva konkavna distorzijska funkcija, tako da lahko uporabimo enačbo (4.10). Slučajni spremenljivki S priredimo kapital $K = \mathbb{H}_g[S] = \mathbb{E}[S g'(\overline{F}_S(S))]$. Zaradi aditivnosti pričakovane vrednosti dobimo popolno alokacijo kapitala s $K_i = \mathbb{E}[X_i\, g'(\overline{F}_S(S))]$, $i = 1, \ldots, n$, kar je hkrati tudi alokacija kapitala po Eulerjevem principu (glej Tsanakas, 2007, str. 13, za podrobnosti pa Tsanakas, 2004, str. 228–229). □

Če mera tveganja ni pozitivno homogena, alokacija kapitala z Eulerjevim principom v splošnem primeru ni popolna in zato ni primerna. Tudi za tak primer pa obstaja njena posplošitev, t. i. Aumann-Shapleyeva metoda (glej npr. Tsanakas, 2009, str. 269). Za več o tej metodi, ki temelji na kooperativni teoriji iger, glej (Denault, 2001).

Poleg v tem in prejšnjem razdelku predstavljenih metod alokacije kapitala, ki temeljijo na merah tveganja, obstajajo tudi alternativne metode, ki vsaj neposredno ne temeljijo na merah tveganja. Zanimiv je pristop, ki temelji na vrednotenju menjalne opcije. Pri aktuarskem določanju višine zavarovalne premije običajno upoštevamo, da bo zavarovalnica vedno v celoti poravnala obveznosti zaradi prevzetih tveganj. Dejansko pa je njena odgovornost omejena, saj za poravnavo obveznosti jamči le s kapitalom. Zato imajo lastniki zavarovalnice v bistvu v rokah menjalno opcijo, s katero lahko sredstva zavarovalnice zamenjajo za njene obveznosti. Seveda je to smiselno le, ko obveznosti presežejo sredstva, zaradi česar kapital v bilanci stanja postane negativen, zavarovalnica pa nesolventna, če je nihče noče dokapitalizirati.

Myers in Read (2001) sta razvila metodo za popolno alokacijo kapitala na posamezne zavarovalne vrste, ki temelji na opisani opciji. Izhajala sta iz bilančne višine sredstev A, ki za kapital K presega bilančno vrednost obveznosti $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ zaradi tveganj v različnih zavarovalnih vrstah. Ker višina dejanskih obveznosti ni vnaprej znana, hkrati pa se s časom spreminja, kar velja tudi za sredstva, zamenjava postane smiselna, ko obveznosti presežejo sredstva. Zato sta izračunala vrednost $D = \mathbb{E}[(S - A)_+]$ menjalne opcije, ki je odvisna od danega kapitala K, in ugotovila, da je $\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial D}{\partial X_i} = D$. Majhna sprememba obsega poslovanja v i-ti zavarovalni vrsti, ki obveznosti spremeni za δX_i, S spremeni za $\delta S = \delta X_i$, D pa za $\delta D = \delta X_i \frac{\partial D}{\partial X_i}$. Če želimo ohraniti izhodiščno razmerje med vrednostjo menjalne opcije in obveznostmi, mora biti $\frac{D}{S} = \frac{\delta D}{\delta S} = \frac{\partial D}{\partial X_i}$, sicer pa moramo kapital spremeniti za δK, tako da z $\delta D = \delta X_i \frac{\partial D}{\partial X_i} + \delta K \frac{\partial D}{\partial K}$ izpolnimo enačbo $\frac{D}{S} = \frac{\delta D}{\delta S}$.

Pri predpostavki o konkurenčnem trgu, na katerem so premije korektno določene, je zaradi stroškov kapitala logična zahteva, da enake mejne spremembe obsega poslovanja v različnih zavarovalnih vrstah enako vplivajo na spremembo kapitala. Iz tega sledi zahteva, da so vsi mejni prispevki posameznih zavarovalnih vrst k vrednosti menjalne opcije enaki. Če izračunamo višine kapitala $K_1, \ldots, K_n$, s katerimi izpolnimo enačbo $\frac{D}{S} = \frac{\partial D}{\partial X_1} = \cdots = \frac{\partial D}{\partial X_n}$, se izkaže, da je $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$.

Opisana metoda je sicer splošno uporabna, konkretne formule za alokacijo kapitala pa sta Myers in Read izpeljala le pri predpostavki, da je dvorazsežna porazdelitev višine sredstev in obveznosti normalna ali logaritemsko normalna, tako da sta vrednost menjalne opcije, ki je v tem primeru znana tudi kot prodajna opcija zaradi omejene odgovornosti, izračunala z Black-Sholesovo formulo.

Venter (2004, str. 103–106) v svojem komentiranem pregledu metod za alokacijo kapitala analizira in pojasnjuje Myers-Readovo metodo na način, ki ga je pri razvoju svoje metode uporabil Butsic (1999). Pri tem ugotavlja, da tudi Myers-Readova metoda sodi med metode, ki temeljijo na merah tveganja, kar sledi tudi iz predstavitve metode v (Dhaene et al., 2009, str. 8 in 9). O tu le na kratko po Venterjevem zgledu skicirani metodi in njenih kritikah glej še (Mildenhall, 2004; Gründl & Schmeiser, 2007), o razširitvi za uporabo v bankah pa (Erel, Myers & Read, 2009).

Poleg predstavljenih metod za alokacijo kapitala obstaja še mnogo drugih. Omenimo le metodi, ki temeljita na Wangovi in Esscherjevi transformaciji (glej Wang, 2002b; Valdez & Chernih, 2003). Prva metoda funkcijo preživetja $\overline{F}_X(x)$ preslika v $\Phi(\Phi^{-1}(\overline{F}_X(x)) + \lambda)$, druga pa gostoto verjetnosti $f_X(x)$ v $\frac{f_X(x)e^{\lambda x}}{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}$.

Soglasja o optimalni metodi alokacije kapitala na zavarovalne vrste ali druge alokacijske enote očitno še ni. To je gotovo povezano tudi z različnimi potrebami in različnimi kriteriji optimizacije, ki so pregledno obdelani v (Dhaene et al., 2009). Še vedno nastajajo nove metode alociranja kapitala. Nekatere temeljijo na že znanih principih, denimo za alokacijo na podlagi vrednotenja opcij (glej Sherris, 2006; Kim & Hardy, 2009), nekatere že znane metode spreminjajo v posebne primere novih (glej Furman & Zitikis, 2008b), nekatere statičen pogled zamenjujejo z dinamičnim (glej Tsanakas, 2004), nekatere pa so specializirane za mere tveganja, ki ne izpolnjujejo vseh strogih zahtev za koherentnost (glej Tsanakas, 2009).

Čeprav se zahtevnejše metode alokacije kapitala med seboj razlikujejo, pa imajo nekaj bistvenega skupnega. Vse zahtevajo poznavanje porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kjer so $X_1, \ldots, X_n$ odvisne slučajne spremenljivke.

Za konec omenimo še dva zanimiva članka, v katerih so pri izračunu kapitala uporabljene kopule. V (Bargès, Cossette & Marceau, 2009) so izpeljane eksaktne formule za alokacijo kapitala na podlagi tvegane vrednosti za poseben primer, ko so posamezna tveganja porazdeljena eksponentno ali mešano eksponentno, odvisnost med njimi pa določa FGM kopula. V (Tang & Valdez, 2006) pa je na podlagi avstralskih statističnih podatkov za različne zavarovalne vrste primerjalno za tvegano vrednost in CTE ter za štiri različne kopule izračunan potrebni kapital in učinek razpršitve.

9 Praktičen primer izračuna agregatnih odškodnin za več portfeljev

V tem poglavju si bomo ogledali praktičen primer, kako izračunati ekonomski kapital, potreben zaradi zavarovalnega tveganja, da bodo agregatne odškodnine prevelike. Ogledali si bomo štiri odvisne zavarovalne portfelje in z njimi povezano izhodiščno tveganje in tveganje, ki ostane po primernem pozavarovanju. Na zavarovalna tveganja smo se omejili izključno zato, da lahko primerjamo ekonomska kapitala, ki se nanašata na izhodiščno in preostalo tveganje. Skratka, ta omejitev ni bistvena, saj si namesto štirih zavarovalnih tveganj, povezanih s štirimi različnimi portfelji, lahko zamislimo tudi zavarovalno tveganje premoženjskih zavarovanj, zavarovalno tveganje življenjskih zavarovanj ter tržno in kreditno tveganje. Seveda bi bile v takem primeru porazdelitvene funkcije, iz katerih bomo z upoštevanjem korelacij sestavili agregatno porazdelitveno funkcijo, potrebno za določitev ekonomskega kapitala, drugačne.

9.1 Predpostavke o posameznih portfeljih

V praktičnem primeru si bomo ogledali štiri različne izhodiščne portfelje:

A) Portfelj se nanaša na zavarovalno vrsto, za katero predpostavljamo Poissonovo porazdelitev števila odškodnin $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in inverzno Gaussovo porazdelitev višine kosmatih odškodnin $X \sim \mathrm{IG}(\mu, \lambda)$ z gostoto verjetnosti $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}}$ za $x > 0$.

B) Portfelj se nanaša na zavarovalno vrsto, za katero predpostavljamo negativno binomsko porazdelitev števila odškodnin $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$ in logaritemsko gama porazdelitev višine kosmatih odškodnin $X \sim \mathrm{L\Gamma}(\alpha, \lambda)$ z gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}(\log x)^{\alpha-1}}{x^{\lambda+1}\Gamma(\alpha)}$ za $x > 1$.

C) Portfelj se nanaša na zavarovalno vrsto, za katero predpostavljamo Poissonovo porazdelitev števila odškodnin $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in Paretovo porazdelitev višine kosmatih odškodnin $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$, ki ima gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$ za $x > 0$.

D) Portfelj se nanaša na zavarovalno vrsto, za katero predpostavljamo Poissonovo porazdelitev števila odškodnin $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in logaritemsko normalno porazdelitev za višino kosmatih odškodnin $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ z gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ za $x > 0$.

Konkretni parametri izbranih porazdelitev so razvidni iz tabele 9.1 in so izmišljeni, v praksi pa jih lahko ocenimo s statističnimi metodami.

Tabela 9.1: Osnovni podatki o izhodiščnih portfeljih

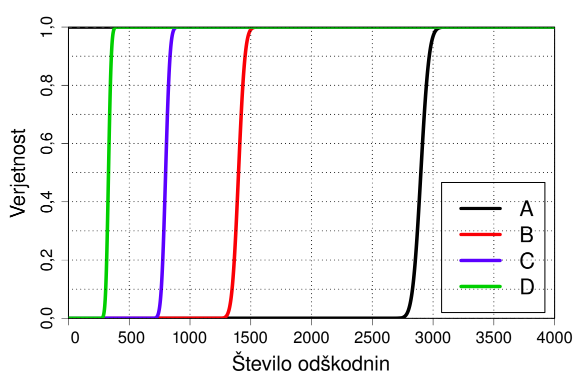
		Portfelj			
		A	B	C	D
Število odškodnin	Porazdelitev	Po(3.300)	NB(5.600; 0,8)	Po(800)	Po(330)
	$\mathbb{E}[N]$	2.900	1.400	800	330
	σ_N	53,9	41,8	28,3	18,2
	γ_N	0,019	0,036	0,035	0,055
	ϱ_N	0,019	0,030	0,035	0,055
Kosmate odškodnine	Porazdelitev	IG(1.500; 33,7)	LΓ(17,4; 2,7)	Pareto(2,1; 6.100)	LN(7,3; $2{,}1^2$)
	$\mathbb{E}[X]$	1.514	3.133	5.545	13.427
	σ_X	4.505	126.002	25.412	121.041
	γ_X	8,927	∞	∞	759,686
	ϱ_X	2,976	40,222	4,583	9,015
Čiste odškodnine	$\mathbb{E}[X]$	1.512	2.546	5.306	8.453
	σ_X	4.456	8.276	9.592	19.032
	γ_X	8,303	8,131	5,358	3,549
	ϱ_X	2,947	3,251	1,808	2,251

V nadaljevanju nas bo zanimal vpliv pozavarovanja na višino ekonomskega kapitala. Zato predpostavimo, da ima zavarovalnica neomejeno škodno presežkovno pozavarovanje nad prioriteto 100.000 evrov za zavarovanja iz vseh štirih portfeljev. Zakaj smo se odločili za navedeno pozavarovalno obliko in izbrano prioriteto, tu ni pomembno.

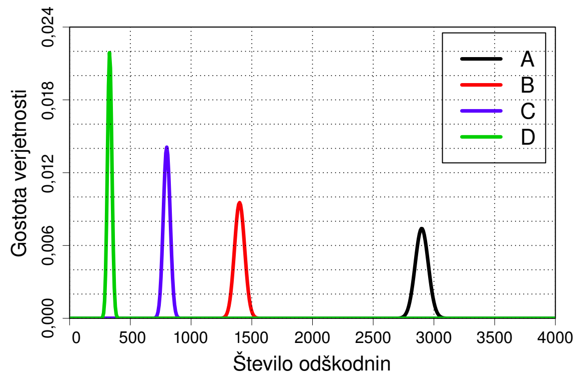
Škodno presežkovno pozavarovanje vpliva le na višino odškodnin, ki presegajo prioriteto. Pričakovano letno število takih odškodnin je 0,26 za portfelj A, 4,11 za portfelj B, 1,99 za portfelj C in 7,40 za portfelj D. To sicer ni veliko, kot bomo videli iz nadaljevanja, pa izbrano pozavarovanje kljub temu zelo pomembno vpliva na porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin. Razlog je seveda v tem, da izbrano pozavarovanje pomembno zmanjša standardne odklone in koeficiente variabilnosti, kot lahko ugotovimo iz tabele 9.1.

Porazdelitvene in verjetnostne funkcije števila odškodnin za izhodiščne portfelje so razvidne s slik 9.1 in 9.2, porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti višine kosmatih odškodnin pa s slik 9.3 in 9.4, na katerih je na x-osi logaritemsko merilo.

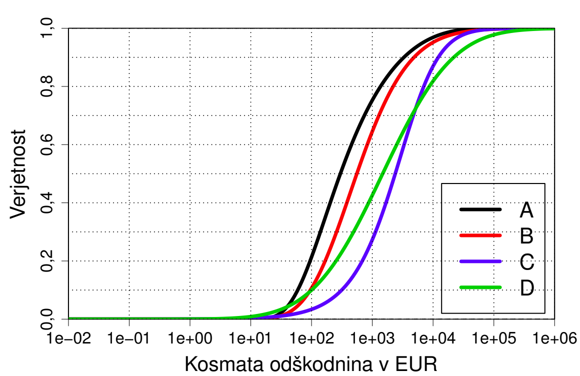
Slika 9.1: Porazdelitvena funkcija števila odškodnin



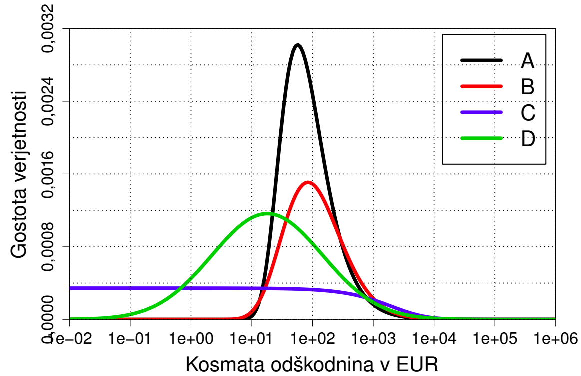
Slika 9.2: Verjetnostna funkcija števila odškodnin



Slika 9.3: Porazdelitvena funkcija kosmatih odškodnin



Slika 9.4: Gostota verjetnosti kosmatih odškodnin



Porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti višine čistih odškodnin se od tistih na slikah 9.3 in 9.4 razlikujejo le za $x \geq M = 100.000$ EUR, zato niso posebej prikazane. Pri prioriteti M porazdelitvena funkcija $F_X(x)$ čistih odškodnin X skoči na končno vrednost ena, gostota verjetnosti $f_X(x)$ pa na $1 - F_X(M)$, nato pa je za $x > M$ enaka nič.

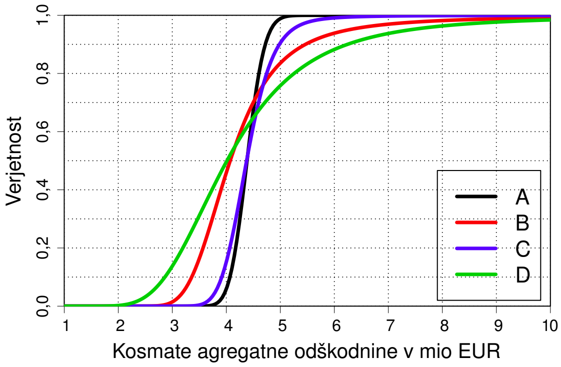
Iz znanih momentov porazdelitve števila odškodnin N in višine kosmatih ali čistih odškodnin lahko izračunamo pričakovano vrednost $\mathbb{E}[S]$, varianco $\mathrm{var}[S]$ in tretji centralni moment $\mu_3[S]$ kosmatih ali čistih agregatnih odškodnin S za posamezne portfelje (glej npr. Komelj, 2004, str. 12), če obstajajo, ter standardni odklon σ_S, koeficient asimetrije γ_S in koeficient variacije $\varrho_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$. Navedene karakteristike za obravnavane portfelje so razvidne iz tabele 9.2.

Tabela 9.2: Karakteristike agregatnih odškodnin – teoretično

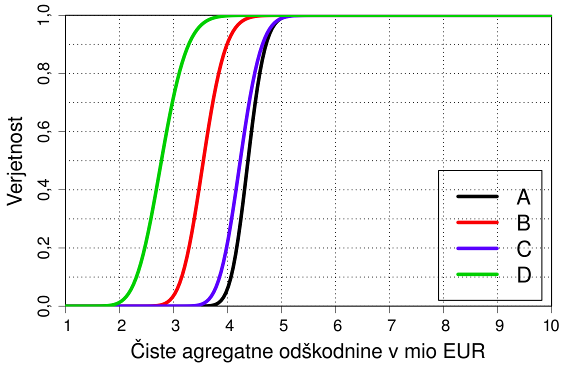
		Portfelj			
		A	B	C	D
Kosmate odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.390.600	4.385.775	4.436.364	4.430.809
	σ_S	255.933	4.716.386	735.688	2.212.307
	γ_S	0,158	∞	∞	41,077
	ϱ_S	0,058	1,075	0,166	0,499
Čiste odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.385.279	3.564.266	4.244.672	2.789.619
	σ_S	253.397	327.465	310.046	378.298
	γ_S	0,148	0,211	0,170	0,209
	ϱ_S	0,058	0,092	0,073	0,136

Kot smo že omenili, pozavarovanje pomembno vpliva na porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin, kar se lepo vidi s slik 9.5 do 9.8.

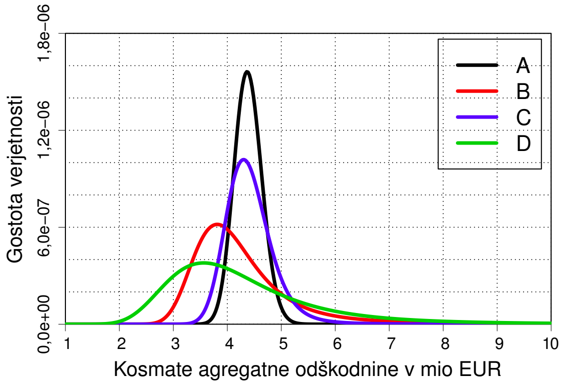
Slika 9.5: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin



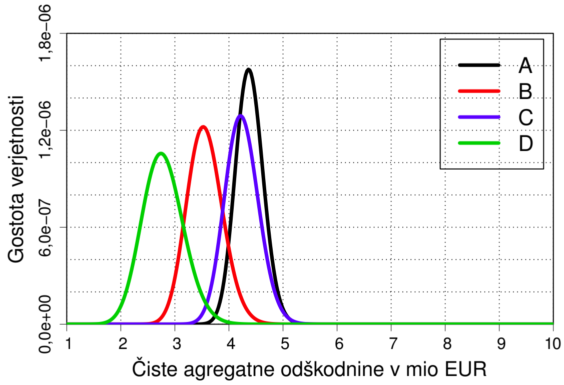
Slika 9.6: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin



Slika 9.7: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin



Slika 9.8: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin



Porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin smo izračunali s Panjerjevo rekurzijsko enačbo (6.5). Izračun s Panjerjevo rekurzijo zahteva ekvidistantno diskretizirano gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke X na končnem intervalu. Upoštevali smo interval od 0 do 40 milijonov evrov, kar je več kot 2-kratnik pričakovanih kosmatih agregatnih odškodnin za vse štiri portfelje skupaj in več kot $\mathrm{VaR}_{0,9983}(S_{A+B+C+D})$ za neodvisne portfelje oziroma več kot $\mathrm{VaR}_{0,9967}(S_{A+B+C+D})$ za odvisne portfelje, kot se je izkazalo po izračunu. Diskretizirali smo s korakom $h = 100$ evrov z metodo, ki ohranja pričakovano vrednost (glej npr. Komelj, 2004, str. 22), in dobili verjetnosti $f_i = \mathbb{P}(X = ih)$ za $i = 0,1,\dots,400000$.

Za izračun čistih agregatnih odškodnin smo najprej kosmate diskretizirane porazdelitve spremenili tako, da smo verjetnost $\mathbb{P}(x > 100.000) = \sum_{i=1001}^{\infty} f_i$ prišteli k verjetnosti $f_{1000} = \mathbb{P}(x = 100.000)$, postavili $f_i = 0$ za $i \geq 1001$, nato pa ponovili izračun s Panjerjevo rekurzijo.

Z diskretno slučajno spremenljivko X, ki lahko zavzame le končne vrednosti, ne moremo dobiti neskončnih momentov, kar v našem primeru velja tudi za slučajno spremenljivko N. Zato ni mogoče, da bi s Panjerjevo rekurzijo za portfelja B in C dobili neskončen koeficient asimetrije. Zato smo za kontrolo oziroma primerjavo računali še s simulacijo, čeprav tudi zanjo velja enaka ugotovitev. Za vsako od 100.000 simuliranih let smo za vsak portfelj najprej naključno generirali število odškodnin, nato pa še višine posameznih odškodnin, ki smo jih sešteli. Tako smo za vsak portfelj dobili 100.000 kosmatih in čistih vrednosti. Pripadajoče vzorčne porazdelitvene funkcije se na pogled ne razlikujejo od porazdelitvenih funkcij, dobljenih z rekurzijo, podrobnejša analiza pa razkrije nekatere razlike.

Če zanemarimo napako zaradi diskretizacije in zaokrožitvene napake, Panjerjeva rekurzija zagotavlja eksaktne rezultate, h katerim konvergirajo tudi rezultati, dobljeni s simulacijo, če število simuliranih let narašča proti neskončnosti. V praksi se večinoma napaki ne moremo izogniti, zato izbira metode za izračun porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin lahko pomembno vpliva na momente in iz njih izhajajoče vrednosti, kar v našem primeru lahko ugotovimo s primerjavo tabele 9.2 s tabelama 9.3 in 9.4.

Tabela 9.3: Karakteristike agregatnih odškodnin – rekurzija

		Portfelj			
		A	B	C	D
Kosmate odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.390.602	4.383.518	4.436.394	4.424.724
	σ_S	255.963	1.974.556	574.360	1.969.661
	γ_S	0,160	20,599	25,580	5,395
	ϱ_S	0,058	0,450	0,129	0,445
Čiste odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.385.281	3.564.268	4.244.673	2.789.619
	σ_S	253.426	327.477	310.056	378.298
	γ_S	0,149	0,212	0,171	0,209
	ϱ_S	0,058	0,092	0,073	0,136

Tabela 9.4: Karakteristike agregatnih odškodnin – simulacija

		Portfelj			
		A	B	C	D
Kosmate odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.389.976	4.372.311	4.436.668	4.433.574
	σ_S	255.434	1.886.573	541.618	2.208.076
	γ_S	0,167	30,521	8,541	12,939
	ϱ_S	0,058	0,431	0,122	0,498
Čiste odškodnine	$\mathbb{E}[S]$	4.384.671	3.563.058	4.244.514	2.788.943
	σ_S	252.841	327.644	310.804	378.868
	γ_S	0,156	0,207	0,163	0,220
	ϱ_S	0,058	0,092	0,073	0,136

Predpostavimo, da smo v kosmato zavarovalno premijo za zavarovanja iz portfeljev od A do D vračunali ravno toliko stroškov, kot jih bo nastalo, kosmato tehnično premijo pa smo izračunali tako, da bo s 75-odstotno verjetnostjo zadoščala za kritje kosmatih odškodnin. Pri teh predpostavkah in kriterijih Solventnosti 2 ekonomski kapital za samostojno opazovani portfelj A izračunamo kot $K[S_A] = \mathrm{VaR}_{0{,}995}(S_A) - \mathrm{VaR}_{0{,}75}(S_A)$ in analogno za portfelje B, C in D.

V praksi pri škodno presežkovnem pozavarovanju pozavarovalnica neodvisno od zavarovalnice določi razmerje med pozavarovalno in kosmato zavarovalno premijo, s tem pa določi tudi razmerje med čisto in kosmato zavarovalno premijo. V našem primeru bomo tudi čisto tehnično premijo izračunali kot razliko med 99,5-odstotnim in 75-odstotnim kvantilom za čiste agregatne odškodnine. Razmerje med tako določeno čisto tehnično premijo in kosmato tehnično premijo se le za malenkost razlikuje od razmerja med povprečno čisto in povprečno kosmato odškodnino, ki bi ga tudi lahko upoštevali pri določanju razmerja med premijama.

Podrobnosti o tehnični premiji in ekonomskem kapitalu za rekurzijo so razvidne iz tabele 9.5, za simulacijo pa iz tabele 9.6. Pripomnimo le še to, da smo tu in kasneje vse vrednosti, ki se nanašajo na rekurzijo, zaokrožili na 100 evrov, saj večja natančnost pri diskretizacijskem koraku 100 evrov ni smiselna.

Tabela 9.5: Ekonomski kapital za kosmate in čiste portfelje – rekurzija

		Portfelj			
		A	B	C	D
Kosmato	Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	5.181.800	17.927.600	7.924.500	19.378.700
	Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	5.088.100	12.181.100	6.417.700	14.140.400
	Tehnična premija ($\mathrm{VaR}_{0,75}$)	4.559.300	4.647.500	4.666.600	4.956.600
	Ekonomski kapital	528.800	7.533.600	1.751.100	9.183.800
	Kapital/tehnična premija	11,6 %	162,1 %	37,5 %	185,3 %
Čisto	Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	5.164.700	4.595.100	5.206.500	3.978.300
	Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	5.073.100	4.471.200	5.092.500	3.836.000
	Tehnična premija ($\mathrm{VaR}_{0,75}$)	4.552.600	3.778.700	4.448.800	3.037.500
	Ekonomski kapital	520.500	692.500	643.700	798.500
	Kapital/tehnična premija	11,4 %	18,3 %	14,5 %	26,3 %

Če kosmato tehnično premijo primerjamo s kosmato nevarnostno premijo (s pričakovano vrednostjo kosmatih odškodnin iz tabele 9.3), ugotovimo, da smo za portfelj A vračunali 3,8 % varnostnega dodatka, za portfelj B 6,0 %, za portfelj C 5,2 % in za portfelj D 12,0 %. To ni veliko, zato ni nenavadno, da za portfelja B in D, ki imata velik koeficient variacije, potrebujemo razmeroma veliko kapitala, pozavarovanje pa kapitalske zahteve bistveno zmanjša.

Tabela 9.6: Ekonomski kapital za kosmate in čiste portfelje – simulacija

		Portfelj			
		A	B	C	D
Kosmato	Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	5.186.417	20.418.663	8.043.397	22.415.555
	Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	5.089.021	12.098.924	6.416.543	14.650.001
	Tehnična premija ($\mathrm{VaR}_{0,75}$)	4.556.950	4.640.949	4.666.487	4.948.759
	Ekonomski kapital	532.071	7.457.975	1.750.056	9.701.242
	Kapital/tehnična premija	11,7 %	160,7 %	37,5 %	196,0 %
Čisto	Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	5.168.599	4.593.881	5.203.841	3.888.684
	Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	5.075.304	4.472.318	5.094.369	3.843.260
	Tehnična premija ($\mathrm{VaR}_{0,75}$)	4.550.282	3.778.155	4.449.724	3.037.583
	Ekonomski kapital	525.022	694.163	644.645	805.677
	Kapital/tehnična premija	11,5 %	18,4 %	14,5 %	26,5 %

V tabelah 9.5 in 9.6 navajamo tudi končno tvegano vrednost $\mathrm{TVaR}_{0,995}$, pri tem pa se podatki, izračunani rekurzivno in s simulacijo, precej razlikujejo, zlasti še za kosmata portfelja B in D. Končna tvegana vrednost za kosmate portfelje je le informativne narave. Pri simulaciji $\mathrm{TVaR}_{0,995}$ izračunamo kot povprečje vseh naključno generiranih vrednosti, ki presegajo $\mathrm{VaR}_{0,995}$. Pri 100.000 simulacijah je takih vrednosti 500, kar ne zagotavlja velike zanesljivosti. Pri računanju z rekurzijo smo izračun končali prej, kot se je porazdelitvena funkcija kosmatih odškodnin dovolj približala končni vrednosti 1. Zato izračun končne tvegane vrednosti ni dovolj natančen. Še najmanj smo dosegli za portfelj B, kjer pa smo presegli 0,99965.

Z rekurzijo izračunane porazdelitvene funkcije za portfelje A, B, C in D so vhodni podatki za delno optimizirani algoritem 7.6 (varianta algoritma ni bistvena, ker je $n = 4$ potenca števila 2). Z njim smo za različne korelacijske koeficiente izračunali porazdelitveno funkcijo portfelja A+B+C+D, kar je predstavljeno v nadaljevanju tega poglavja. S porazdelitveno funkcijo smo vedno presegli 0,9967. To je dovolj za izračun $\mathrm{VaR}_{0,995}$, ni pa dovolj za natančen izračun $\mathrm{TVaR}_{0,995}$. V vseh primerih smo razliko med 1 in z rekurzijo ali algoritmom 7.6 doseženo verjetnostjo prišteli k verjetnosti za zadnjo upoštevano vrednost 40 milijonov evrov. Zato so v tabeli 9.5 in v vseh tabelah v nadaljevanju navedene kosmate končne tvegane vrednosti le njihove spodnje meje. Čiste končne tvegane vrednosti, izračunane z rekurzijo ali algoritmom 7.6, pa so pravilne, saj smo v okviru računske natančnosti vedno dosegli 1. Seveda pa ta trditev velja le, če zanemarimo vpliv napake zaradi diskretizacije izhodiščnih porazdelitvenih funkcij, upoštevanja končnega števila členov pri izračunu neskončne vrste in kumulativnega vpliva vseh zaokrožitvenih napak.

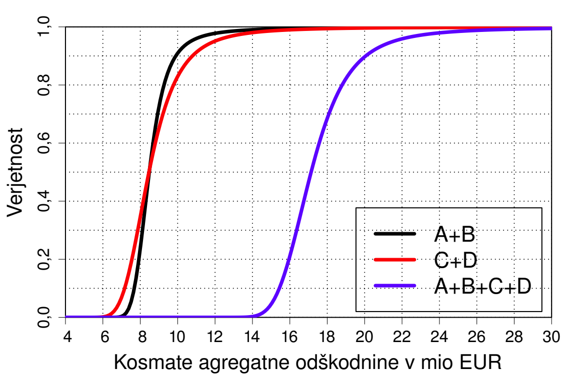
V nadaljevanju nas bo zanimala predvsem razlika med ekonomskim kapitalom za vsoto neodvisnih in vsoto odvisnih portfeljev, ne pa razlike, ki so posledica različnih napak pri različnih metodah. Zato bomo kot izhodiščne vrednosti za posamezne portfelje od A do D upoštevali vrednosti iz tabele 9.5, dobljene z rekurzijo, oziroma ekvidistantno diskretizirane slučajne spremenljivke, s katerimi modeliramo višine posameznih odškodnin. Čeprav se vsi izračuni nanašajo na diskretne slučajne spremenljivke, bomo uporabljali terminologijo za zvezne slučajne spremenljivke. Tako bomo uporabljali pojem gostota verjetnosti, čeprav bi bilo bolj natančno verjetnostna funkcija.

9.2 Izračun za neodvisne portfelje

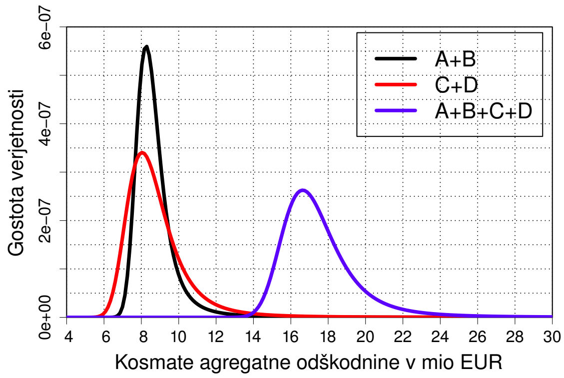
9.2.1 Primer brez pozavarovanja

Najprej smo izračunali karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke S_{A+B}, ki je zaradi neodvisnosti portfeljev A in B enaka produktu karakterističnih funkcij slučajnih spremenljivk S_A in S_B. Analogno smo izračunali karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke S_{C+D}, nato pa še karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $S_{A+B+C+D}$. Pripadajoče porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti so razvidne s slik 9.9 in 9.10.

Slika 9.9: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto neodvisnih portfeljev



Slika 9.10: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto neodvisnih portfeljev



V tabeli 9.7 je ekonomski kapital izračunan z upoštevanjem kosmate tehnične premije, ki je vsota kosmatih tehničnih premij iz tabele 9.5 za pripadajoče izhodiščne portfelje. Tako izračunani ekonomski kapital je manjši od vsote ekonomskih kapitalov iz tabele 9.5 za pripadajoče izhodiščne portfelje. Razlika je prikazana kot absolutni učinek razpršitve.

Tabela 9.7: Ekonomski kapital za vsoto neodvisnih kosmatih portfeljev

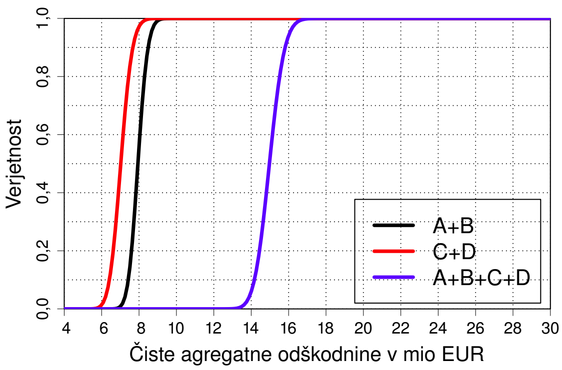
	Portfelj		
	A+B	C+D	A+B+C+D
Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	23.352.900	24.841.600	35.937.600
Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	16.583.100	18.756.100	30.539.000
Tehnična premija	9.206.800	9.623.200	18.830.000
Ekonomski kapital	7.376.300	9.132.900	11.709.000
Kapital/tehnična premija	80,1 %	94,9 %	62,2 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	7.552.100	9.349.300	12.018.500
Vsota posameznih kapitalov	8.062.400	10.934.900	18.997.300
Absolutni učinek razpršitve	686.100	1.802.000	7.288.300
Relativni učinek razpršitve	8,5 %	16,5 %	38,4 %

Kot vidimo iz tabele 9.7, z uporabo enačbe (8.4), ki bo standard v Solventnosti 2, v vseh treh primerih dobimo več, kot dobimo z natančnim izračunom.

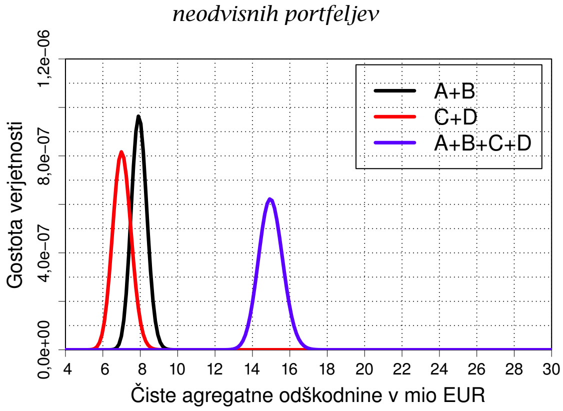
9.2.2 Primer s pozavarovanjem

Karakteristične funkcije za slučajne spremenljivke S_{A+B}, S_{C+D} in $S_{A+B+C+D}$, ki se nanašajo na neodvisne čiste portfelje, smo izračunali analogno kot za odvisne kosmate portfelje. Pripadajoče porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti so razvidne s slik 9.11 in 9.12.

Slika 9.11: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin za vsoto neodvisnih portfeljev



Slika 9.12: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin za vsoto neodvisnih portfeljev



V tabeli 9.8 je ekonomski kapital izračunan z upoštevanjem čiste tehnične premije, ki je vsota čistih tehničnih premij iz tabele 9.5 za pripadajoče izhodiščne portfelje. Tako izračunani ekonomski kapital je manjši od vsote ekonomskih kapitalov iz tabele 9.5 za pripadajoče izhodiščne portfelje. Razlika je prikazana kot absolutni učinek razpršitve.

Tabela 9.8: Ekonomski kapital za vsoto neodvisnih čistih portfeljev

	Portfelj		
	A+B	C+D	A+B+C+D
Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	9.218.300	8.532.600	16.916.300
Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	9.069.400	8.357.400	16.694.000
Tehnična premija	8.331.300	7.486.300	15.817.600
Ekonomski kapital	738.100	871.100	876.400
Kapital/tehnična premija	8,9 %	11,6 %	5,5 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	866.300	1.025.600	1.342.500
Vsota posameznih kapitalov	1.213.000	1.442.200	2.655.200
Absolutni učinek razpršitve	474.900	571.100	1.778.800
Relativni učinek razpršitve	39,2 %	39,6 %	67,0 %

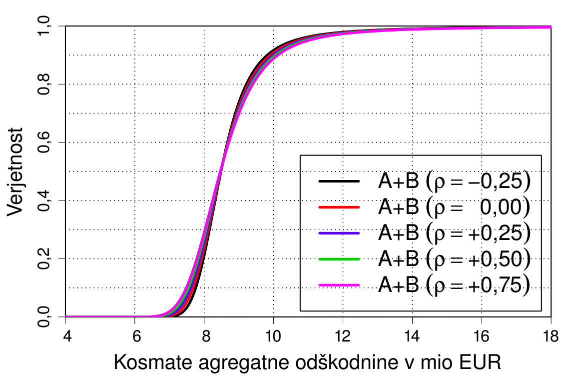
Kot vidimo iz tabele 9.8, z uporabo enačbe (8.4) v vseh treh primerih dobimo več, kot dobimo z natančnim izračunom.

9.3 Izračun za odvisne portfelje

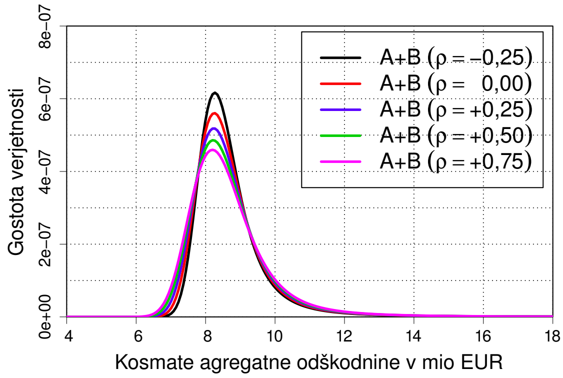
9.3.1 Primer brez pozavarovanja

Najprej smo pri predpostavki, da odvisnost med portfelji določa normalna kopula, z uporabo posledice 7.2 izračunali karakteristični funkciji slučajnih spremenljivk S_{A+B} in S_{C+D}, nato pa še pripadajoči gostoti verjetnosti in porazdelitveni funkciji. Rezultati za različne korelacijske matrike z zunajdiagonalnimi elementi ρ_{ij}, ki so vsi enaki ρ, so razvidni s slik 9.13 do 9.16. Pripomnimo še, da za $\rho = -0{,}75$ in $\rho = -0{,}50$ nismo računali le zato, ker pripadajoča matrika ni korelacijska matrika, saj ni pozitivno semidefinitna.

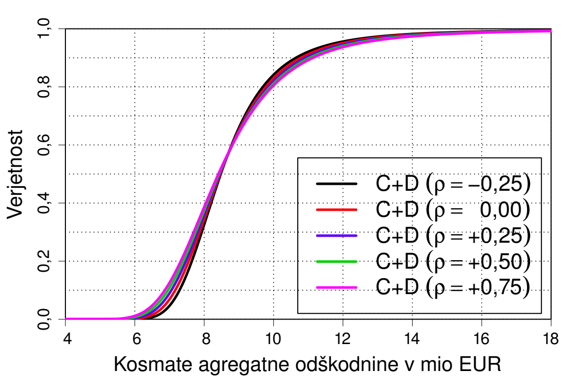
Slika 9.13: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



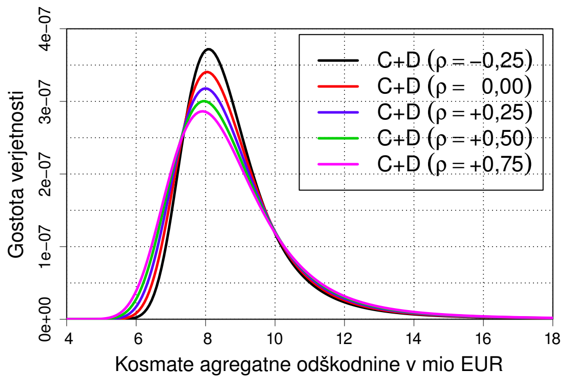
Slika 9.14: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.15: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.16: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Iz tabel 9.9 in 9.10 lahko razberemo ekonomski kapital za vsoto odvisnih kosmatih portfeljev A in B ter C in D. Učinek razpršitve se s povečevanjem korelacijskega koeficienta hitro zmanjšuje in je pri korelacijskem koeficientu $\rho = 0{,}75$ relativno že zelo majhen.

Tabela 9.9: *Ekonomski kapital za vsoto odvisnih kosmatih portfeljev A+B*

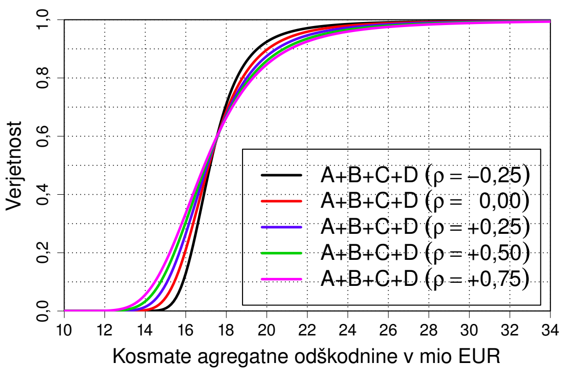
	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	23.188.900	23.352.900	23.520.900	23.692.200	23.866.000
Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	16.418.800	16.583.100	16.750.500	16.920.900	17.094.100
Tehnična premija	9.206.800	9.206.800	9.206.800	9.206.800	9.206.800
Ekonomski kapital	7.212.000	7.376.300	7.543.700	7.714.100	7.887.300
Kapital/tehnična premija	78,3 %	80,1 %	81,9 %	83,8 %	85,7 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	7.419.100	7.552.100	7.682.900	7.811.400	7.937.900
Vsota posameznih kapitalov	8.062.400	8.062.400	8.062.400	8.062.400	8.062.400
Absolutni učinek razpršitve	850.400	686.100	518.700	348.300	175.100
Relativni učinek razpršitve	10,5 %	8,5 %	6,4 %	4,3 %	2,2 %

Tabela 9.10: *Ekonomski kapital za vsoto odvisnih kosmatih portfeljev C+D*

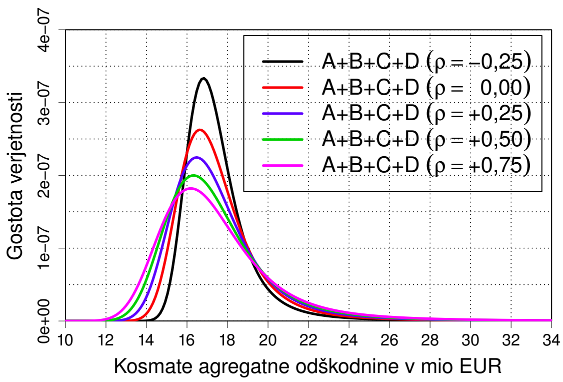
	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($\mathrm{TVaR}_{0,995}$)	24.529.600	24.841.600	25.255.700	25.803.100	26.478.100
Tvegana vrednost ($\mathrm{VaR}_{0,995}$)	18.444.300	18.756.100	19.140.900	19.593.100	20.084.700
Tehnična premija	9.623.200	9.623.200	9.623.200	9.623.200	9.623.200
Ekonomski kapital	8.821.100	9.132.900	9.517.700	9.969.900	10.461.500
Kapital/tehnična premija	91,7 %	94,9 %	98,9 %	103,6 %	108,7 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	8.908.900	9.349.300	9.769.800	10.173.000	10.560.800
Vsota posameznih kapitalov	10.934.900	10.934.900	10.934.900	10.934.900	10.934.900
Absolutni učinek razpršitve	2.113.800	1.802.000	1.417.200	965.000	473.400
Relativni učinek razpršitve	19,3 %	16,5 %	13,0 %	8,8 %	4,3 %

Z znanimi karakterističnimi funkcijami za slučajni spremenljivki S_{A+B} in S_{C+D} smo z uporabo posledice 7.2 izračunali še karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $S_{A+B+C+D}$, nato pa še pripadajočo gostoto verjetnosti in porazdelitveno funkcijo. Na podlagi primerjave z rezultati, dobljenimi s simulacijo, pa verjamemo, da so porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti, razvidne s slik 9.17 in 9.18, pravilne.

Slika 9.17: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.18: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Iz tabele 9.11 je razvidno, da se ekonomski kapital s povečevanjem korelacijskega koeficienta opazno povečuje, vendar pa je tudi pri korelacijskem koeficientu $\rho = 0{,}75$ še vedno za skoraj 10 % manjši od vsote ekonomskih kapitalov za izhodiščne portfelje.

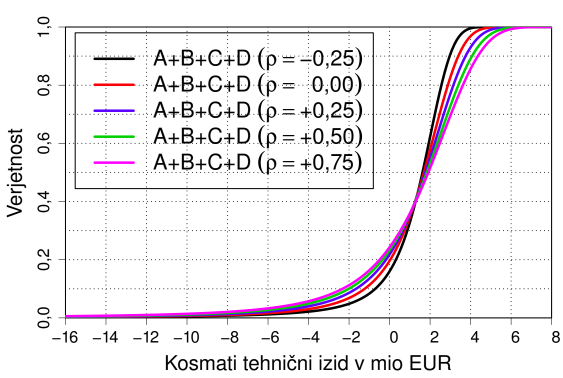
Tabela 9.11: Ekonomski kapital za vsoto odvisnih kosmatih portfeljev A+B+C+D

	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($TVaR_{0,995}$)	34.955.400	35.937.600	37.163.600	38.338.700	39.245.400
Tvegana vrednost ($VaR_{0,995}$)	29.197.500	30.539.000	32.232.400	34.084.900	35.985.900
Tehnična premija	18.830.000	18.830.000	18.830.000	18.830.000	18.830.000
Ekonomski kapital	10.367.500	11.709.000	13.402.400	15.254.900	17.155.900
Kapital/tehnična premija	55,1 %	62,2 %	71,2 %	81,0 %	91,1 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	9.504.200	12.018.500	14.091.000	15.895.600	17.515.200
Vsota posameznih kapitalov	18.997.300	18.997.300	18.997.300	18.997.300	18.997.300
Absolutni učinek razpršitve	8.629.800	7.288.300	5.594.900	3.742.400	1.841.400
Relativni učinek razpršitve	45,4 %	38,4 %	29,5 %	19,7 %	9,7 %

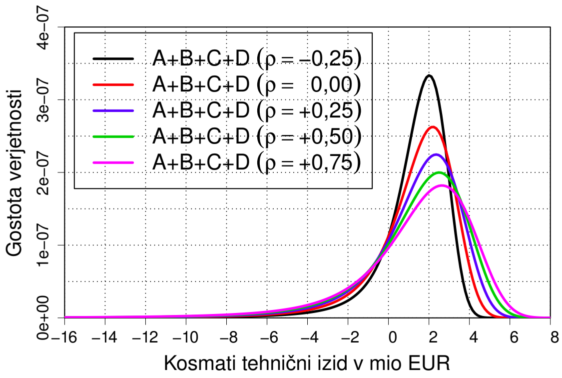
Zanimivo je, da je tokrat rezultat, dobljen z enačbo (8.4), za $\rho = -0{,}25$ manjši od eksaktnega rezultata. To pa ne pomeni, da je enačba (8.4) neprimerna, saj so v Solventnosti 2 korelacijski koeficienti navzdol omejeni z nič.

Za konec si oglejmo še porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti kosmatega tehničnega izida, merjenega z razliko med kosmato tehnično premijo in kosmatimi agregatnimi odškodninami.

Slika 9.19: Porazdelitvena funkcija kosmatega tehničnega izida za vsoto odvisnih portfeljev



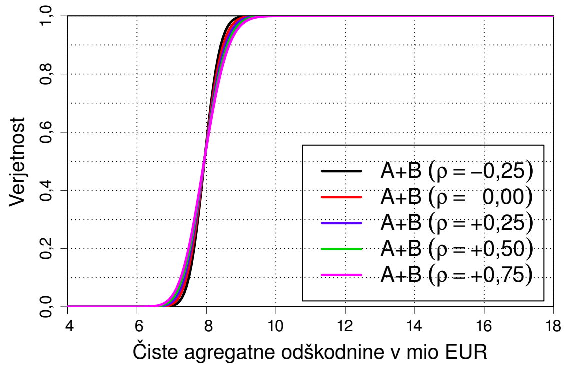
Slika 9.20: Gostota verjetnosti kosmatega tehničnega izida za vsoto odvisnih portfeljev



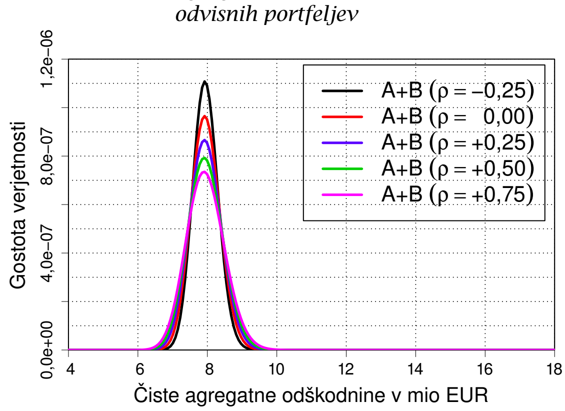
9.3.2 Primer s pozavarovanjem

Karakteristične funkcije za slučajne spremenljivke S_{A+B}, S_{C+D} in $S_{A+B+C+D}$, ki se nanašajo na odvisne čiste portfelje, smo izračunali analogno kot za odvisne kosmate portfelje. Pripadajoče porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti so razvidne s slik 9.21 do 9.26.

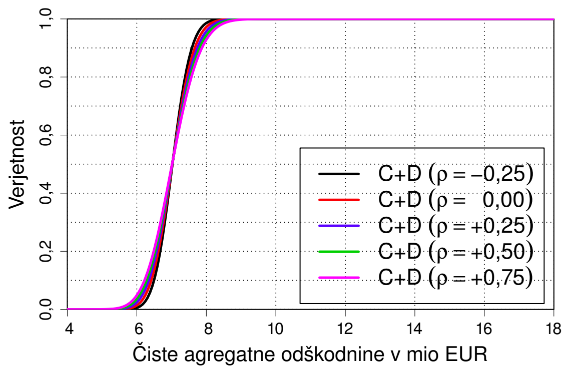
Slika 9.21: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



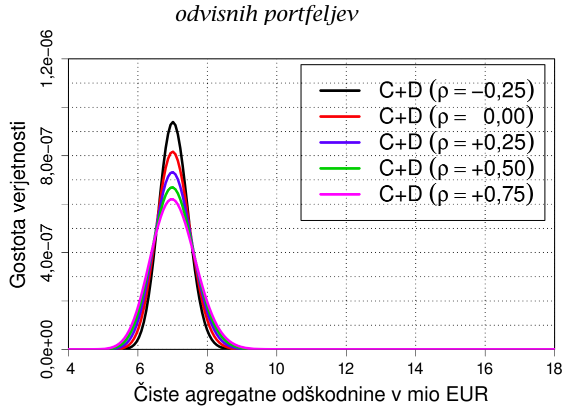
Slika 9.22: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



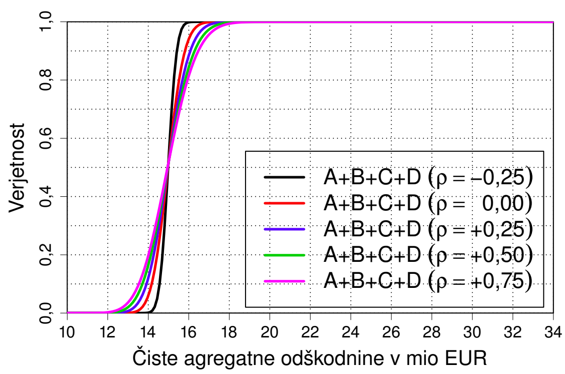
Slika 9.23: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



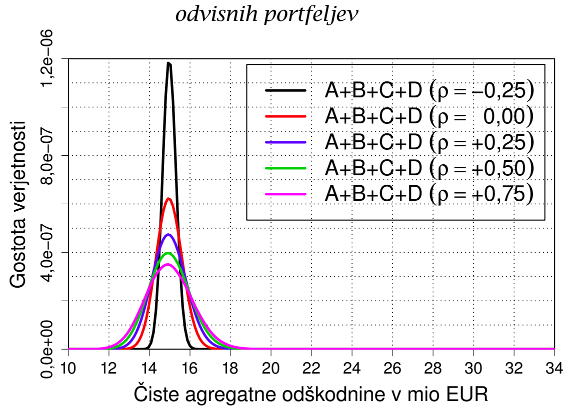
Slika 9.24: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.25: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.26: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin za vsoto odvisnih portfeljev



Iz tabel 9.12, 9.13 in 9.14 lahko razberemo ekonomski kapital za vsoto odvisnih čistih portfeljev A in B, C in D ter A, B, C in D. Učinek razpršitve se s povečevanjem korelacijskega koeficienta hitro zmanjšuje, vendar pa je precej večji kot pri ustreznih vsotah odvisnih kosmatih portfeljev.

Tabela 9.12: Ekonomski kapital za vsoto odvisnih čistih portfeljev A+B

	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($TVaR_{0,995}$)	9.049.900	9.218.300	9.369.600	9.508.500	9.637.600
Tvegana vrednost ($VaR_{0,995}$)	8.921.100	9.069.400	9.202.400	9.324.300	9.437.700
Tehnična premija	8.331.300	8.331.300	8.331.300	8.331.300	8.331.300
Ekonomski kapital	589.800	738.100	871.100	993.000	1.106.400
Kapital/tehnična premija	7,1 %	8,9 %	10,5 %	11,9 %	13,3 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	755.200	866.300	964.700	1.054.000	1.136.300
Vsota posameznih kapitalov	1.213.000	1.213.000	1.213.000	1.213.000	1.213.000
Absolutni učinek razpršitve	623.200	474.900	341.900	220.000	106.600
Relativni učinek razpršitve	51,4 %	39,2 %	28,2 %	18,1 %	8,8 %

Tabela 9.13: Ekonomski kapital za vsoto odvisnih čistih portfeljev C+D

	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($TVaR_{0,995}$)	8.329.400	8.532.600	8.715.000	8.882.200	9.037.600
Tvegana vrednost ($VaR_{0,995}$)	8.178.700	8.357.400	8.517.500	8.664.100	8.800.400
Tehnična premija	7.486.300	7.486.300	7.486.300	7.486.300	7.486.300
Ekonomski kapital	692.400	871.100	1.031.200	1.177.800	1.314.100
Kapital/tehnična premija	9,2 %	11,6 %	13,8 %	15,7 %	17,6 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	891.600	1.025.600	1.144.100	1.251.400	1.350.200
Vsota posameznih kapitalov	1.442.200	1.442.200	1.442.200	1.442.200	1.442.200
Absolutni učinek razpršitve	749.800	571.100	411.000	264.400	128.100
Relativni učinek razpršitve	52,0 %	39,6 %	28,5 %	18,3 %	8,9 %

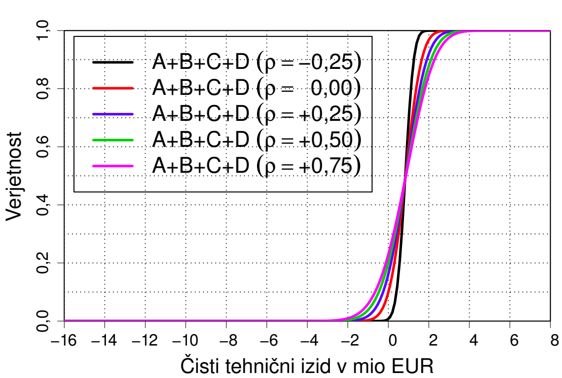
Tabela 9.14: Ekonomski kapital za vsoto odvisnih čistih portfeljev A+B+C+D

	$\rho = -0{,}25$	$\rho = 0$	$\rho = 0{,}25$	$\rho = 0{,}50$	$\rho = 0{,}75$
Končna tveg. vr. ($TVaR_{0,995}$)	15.973.500	16.916.300	17.553.900	18.075.900	18.531.600
Tvegana vrednost ($VaR_{0,995}$)	15.861.200	16.694.000	17.254.900	17.713.000	18.111.800
Tehnična premija	15.817.600	15.817.600	15.817.600	15.817.600	15.817.600
Ekonomski kapital	43.600	876.400	1.437.300	1.895.400	2.294.200
Kapital/tehnična premija	0,3 %	5,5 %	9,1 %	12,0 %	14,5 %
Kapital, izračunan z enačbo (8.4)	700.400	1.342.500	1.764.800	2.103.900	2.395.400
Vsota posameznih kapitalov	2.655.200	2.655.200	2.655.200	2.655.200	2.655.200
Absolutni učinek razpršitve	2.611.600	1.778.800	1.217.900	759.800	361.000
Relativni učinek razpršitve	98,4 %	67,0 %	45,9 %	28,6 %	13,6 %

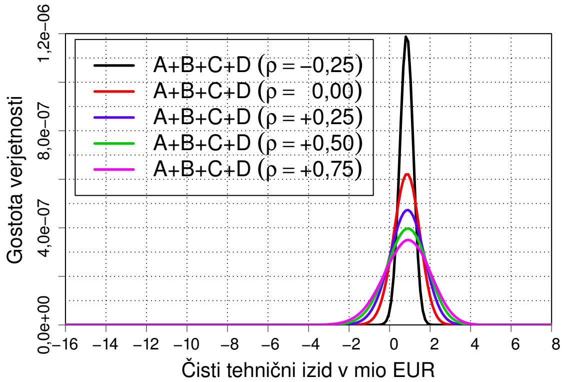
S primerjavo tabel 9.11 in 9.14 lahko ugotovimo, da škodno presežkovno pozavarovanje pomembno vpliva na višino ekonomskega kapitala. Zaradi pozavarovanja se je tehnična premija, ki ostane zavarovalnici, zmanjšala za 16,0 %, hkrati pa se je ekonomski kapital za neodvisne portfelje zmanjšal za 92,5 %. Za odvisne portfelje in korelacijski koeficient $\rho = 0{,}25$ se je ekonomski kapital zmanjšal za 89,3 %, za $\rho = 0{,}50$ se je zmanjšal za 87,6 %, za $\rho = 0{,}75$ pa za 86,6 %. To pa je še vedno 5,4-krat več kot zmanjšanje tehnične premije.

Končno si oglejmo še porazdelitvene funkcije in gostote verjetnosti čistega tehničnega izida, merjenega z razliko med čisto tehnično premijo in čistimi agregatnimi odškodninami.

Slika 9.27: Porazdelitvena funkcija čistega tehničnega izida za vsoto odvisnih portfeljev



Slika 9.28: Gostota verjetnosti čistega tehničnega izida za vsoto odvisnih portfeljev



Sklep

Osrednji problem, ki smo ga obravnavali v doktorski disertaciji, je vprašanje, kako izračunati skupno tveganje, če poznamo posamezna tveganja, ki so med seboj odvisna oziroma korelirana. Glavna praktična uporaba rešitve tega problema je natančen izračun ekonomskega kapitala pri predpisani stopnji tveganja in predpisanem časovnem okviru. Seveda pa lahko gledamo tudi z drugega zornega kota. Odločanje na podlagi rešitve problema vodstvu zavarovalnice oziroma njenim lastnikom omogoča prevzeti oziroma obdržati le toliko tveganja, da pri zanje sprejemljivi stopnji tveganja in danem časovnem okviru ne bodo izgubili več kapitala, kot so ga dejansko pripravljeni tvegati.

Iz rezultatov izračunov, predstavljenih v prejšnjem poglavju v tabelah od 9.9 do 9.14, je vsaj za tam obravnavana tveganja očitno, da so natančno izračunane kapitalske zahteve manjše od tistih, ki so izračunane po standardni formuli Solventnosti 2. Razlike med ekonomskim kapitalom, izračunanim z enačbo (8.4), in natančno izračunanim ekonomskim kapitalom so namreč pozitivne v vseh 24 primerih s pozitivnimi korelacijskimi koeficienti. Le v enem od šestih primerov z negativnimi korelacijskimi koeficienti je razlika negativna, kar pa ni relevantno, saj bo treba morebitne negativne korelacijske koeficiente postaviti na nič.

V disertaciji predstavljene metode za izračun porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih tveganj sicer niso preproste, vendar so uporabne in izvedljive tudi v manjših zavarovalnicah, če so le na voljo ustrezni podatki. Če posplošimo v prejšnjem odstavku navedene ugotovitve izračunov, lahko potrdimo temeljno hipotezo doktorske disertacije, da je tudi v majhnih zavarovalnicah in pozavarovalnicah, ki bodo v režimu Solventnosti 2 uporabljale standardni model za izračun solventnostnega kapitala, smiselno in uresničljivo razvijati interne modele merjenja in upravljanja tveganj, oziroma je smiselno in uresničljivo dopolnjevati modele, ki bodo predpisani. S tem bi namreč majhne zavarovalnice vsaj delno lahko zmanjšale konkurenčno prednost velikih zavarovalnic zaradi ekonomije obsega in dejstva, da bodo v režimu Solventnost 2 zaradi razmeroma manjših kapitalskih zahtev pridobile še dodatno prednost.

V disertaciji je potrjena tudi glavna teza, da je mogoče porazdelitveno funkcijo vsote šibko do srednje močno koreliranih slučajnih spremenljivk, odvisno od števila le-teh, izračunati s pomočjo formule za večrazsežno karakteristično funkcijo. Seveda pa tu nastane praktično vprašanje, ali kopule, za katere je v disertaciji razvita metoda, ki omogoča izračun večrazsežne karakteristične funkcije in posledično večrazsežne porazdelitvene funkcije, realno odražajo odvisnost med slučajnimi spremenljivkami. V ta del problematike, ki je povezana z iskanjem kopule, ki se najbolj prilega danim podatkom, disertacija ne posega. Sicer pa omenjeni pomislek še mnogo bolj velja za standardni model Solventnosti 2. Enačba (8.4) namreč ne predpostavlja le normalne kopule, temveč tudi normalne robne porazdelitve. Skratka, predpostavlja večrazsežno normalno porazdelitev, ne glede na to, kako se prilega dejanskim podatkom.

V disertaciji je za dvorazsežni primer razvita metoda, ki za normalno kopulo in poljubni robni porazdelitvi omogoča natančen izračun dvorazsežne porazdelitvene funkcije. Zaporedna uporaba iste metode omogoča izračun n-razsežne porazdelitvene funkcije za normalno kopulo tudi za $n > 2$ in za poljubne robne porazdelitve. Ta metoda presega glavno tezo, saj ni omejena na šibko do srednje močno korelirane slučajne spremenljivke, vendar pa za $n > 2$ zaenkrat ostaja na ravni domneve, ker še ni matematično korektno dokazana. Seveda pa je mogoče, da metoda za $n > 2$ ni korektna, če domneva ne velja.

Disertacija potrjuje tudi teze, ki so podrejene glavni tezi. Prva teza, da vsak model merjenja in upravljanja tveganj, četudi preprost, lahko prispeva k izboljšanju poslovanja zavarovalnice, je skoraj samoumevna. Dodatno potrditev lahko argumentiramo s tem, da tudi najbolj preprost model merjenja in upravljanja tveganj kot prvo fazo zahteva identifikacijo tveganj. V procesu identifikacije pa se pogosto pojavijo tudi tveganja, na katera prej nihče ni bil dovolj pozoren. Taki primeri so se pokazali med pripravami na Solventnost 2 pri sodelovanju v kvantitativnih študijah. Nekateri predpisani scenariji, denimo slovenski v študijah QIS3 in QIS4 o katastrofalnih škodah zaradi finančne krize s posledičnimi množičnimi škodami iz kreditnega zavarovanja v skupni višini 5 % od stanja neodplačanih glavnic, so nekatera tveganja prikazali precej drugače od percepcije do istih tveganj pred študijo, kar je vplivalo tudi na spremembo poslovne politike do sprejemanja tovrstnih tveganj v pozavarovanje.

Drugo tezo, da bi pozitivni učinki merjenja tveganj lahko nastali predvsem zaradi natančnejšega določanja višine zavarovalne premije, natančnejšega določanja zavarovalno-tehničnih rezervacij in lažjega določanja primernega pozavarovanja, potrjujejo nove možnosti, ki jih prinaša merjenje tveganj. Nova načela pri oblikovanju škodnih rezervacij, ki jih prinaša Solventnost 2, težišče varnosti zavarovalnic z zavarovalno-tehničnih rezervacij prenašajo na kapital. Tako v škodnih rezervacijah, oblikovanih kot najboljša ocena obveznosti, povečana za pribitek na negotovost, vsaj načeloma ne bo več skritih rezerv, seveda pa tudi skritih primanjkljajev ne bi smelo biti. Merjenje tveganj in z njimi povezana višina potrebnega kapitala omogoča preskok z alokacije kapitala na zavarovalne vrste, ki je linearno odvisna od ustreznega deleža zavarovalne premije, na alokacijo kapitala, ki je prilagojena tveganju. Z obojim zavarovalnica pridobi realnejšo sliko o uspešnosti posameznih zavarovalnih vrst ali produktov, predvsem pa realnejšo sliko o potrebni višini zavarovalne premije in pozavarovanja, s katerima lahko uravnava višino potrebnega kapitala.

Tretja teza pravi, da med agregatnimi odškodninami za posamezne zavarovalne vrste večinoma ni prevelike korelacije, vsaj majhna korelacija pa je gotovo že zaradi odvisnosti od skupnih faktorjev, denimo inflacije ali vremena, zaradi česar so za izračune skupnih agregatnih odškodnin primerne tudi metode, ki za večje korelacije niso uporabne. Disertacija prvega dela teze ne more ne potrditi ne ovreči, saj v njej dejansko nismo merili korelacij med agregatnimi odškodninami za posamezne zavarovalne vrste. Če pa so korelacije majhne, so uporabne tudi metode, ki za večje korelacije niso primerne.

Področje, ki se ga dotika ta teza, ni dovolj raziskano. To je očitno tudi iz korelacij med dvanajstimi skupinami zavarovanj, ki so bile predvidene v kvantitativni študiji QIS5. Za vseh 66 možnih parov različnih zavarovalnih skupin sta namreč predvidena le korelacijska koeficienta 0,25 in 0,50 (glej QIS5 Technical Specifications, 2010, str. 203), ki ju verjetno lahko grobo interpretiramo kot majhna in srednja korelacija. Za korelacijsko matriko, predvideno v navedenem dokumentu, je od v disertaciji predstavljenih dveh originalnih metod za izračun 12-razsežne karakteristične funkcije primerna le tista z normalno kopulo.

Četrta teza pravi, da med bistveno različnimi tveganji, denimo zavarovalnimi, kreditnimi, tržnimi in operativnimi, obstajajo majhne do zmerno velike korelacije, ki pa jih je težko meriti. Zato se bodo v praksi verjetno uveljavile dogovorjene vrednosti. Disertacija te teze neposredno ne more ne potrditi ne ovreči, saj v njej nismo merili korelacij med različnimi tveganji. Tezo pa potrjuje korelacijska matrika, razvidna iz tabele 8.1, ki jo predpisuje Direktiva Solventnost 2. Za pet različnih tveganj je med desetimi možnimi različnimi pari dvakrat predviden korelacijski koeficient 0, sedemkrat 0,25 in enkrat 0,50.

Peta teza pravi, da so v praksi pogojno uporabne tudi različne ne dovolj teoretično utemeljene metode izračuna porazdelitvenih funkcij vsot koreliranih slučajnih spremenljivk, če le dajo rezultate, katerih uporabo lahko utemeljimo z načelom previdnosti. Primerni primerjalni rezultati so rezultati, ki jih dobimo za iste slučajne spremenljivke ob predpostavki, da so med seboj neodvisne.

Teza je preprosta posledica dejstva, da še ne obstaja splošno uporabna metoda za izračun porazdelitvene funkcije vsote koreliranih slučajnih spremenljivk. To velja tudi za metodo simulacije in tiste kopule, za katere še ne znamo učinkovito naključno generirati ustrezno porazdeljenih vrednosti. Zato se dejanskim možnostim prilagajamo tako, da uporabljamo kopule, ki morda ne odražajo dovolj dobro dejanskih odvisnosti, ali pa uporabljamo metode, ki nimajo trdnega temelja, denimo metodo šuma, Wangovo metodo ali metodo za normalno kopulo, ki je kot domnevno pravilna razvita v tej disertaciji. V vseh takih primerih pa je pomembno, da testiramo, če smo na varni strani, vsaj s primerjavo s primerom, ko so slučajne spremenljivke neodvisne.

Menimo, da so v doktorski disertaciji pripravljena orodja, ki so potrebna za izgradnjo internega modela za izračun kapitala, kot ga predvideva projekt Solventnost 2, oziroma orodja za boljše upravljanje tveganj, kar je bil tudi eden od njenih namenov. Seveda so mišljena le nekatera teoretična orodja in še zdaleč ne vsa. Izgradnja internega modela zahteva veliko več, predvsem pa kvalitetne podatke, s katerimi bodo teoretični modeli lahko prestali teste, ki so potrebni za odobritev uporabe v praksi. Predvsem pa zahteva dobro razumevanje problema, sicer mehanična uporaba zahtevnih in sicer ustreznih programskih orodij lahko vodi do napačnih zaključkov.

Literatura

1. Acerbi, C. (2002). Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking and Finance*, *26*(7), 1505–1518.
2. Acerbi, C., & Tasche, D. (2002a). Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. *Economic notes*, *31*(2), 379–388.
3. Acerbi, C., & Tasche, D. (2002b). On the coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking and Finance*, *26*(7), 1487–1503.
4. Ahčan, A. (2005). *Optimal investment strategies in long-term asset allocation: applications in insurance and finance* (doktorska disertacija). Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.
5. Angus, J. E. (1994). The probability integral transform and related results. *SIAM Review*, *36*(4), 652–654.
6. Antal, P. (2003). *Quantitative Methods in Reinsurance* (Lecture notes). Zürich: ETH, Department of Mathematics. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.math.ethz.ch/finance/misc/MathMethodsReinsurance.pdf`
7. Antal, P. (2009). *Mathematical Methods in Reinsurance* (Lecture notes). Zürich: ETH, Department of Mathematics. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.actuaries.ch/images/getFile?t=downloadfiles&f=datei&id=55`
8. Archer-Lock, P. R., Czernuszewicz, A. J., Gillott, N. R., Hinton, P. H., Ibeson, D., Malde, S. A., et al. (2002). Financial Condition Assesment. *Proceedings of the* 12^{th} *AFIR Colloquium.* Cancun: International Actuarial Association.
9. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, *9*(3), 203–228.
10. Bairamov, I., & Eryilmaz, S. (2004). Characterization of symmetry and exceedance models in multivariate FGM distributions. *Journal of Applied Statistical Science*, *13*(2), 87–99.
11. Bairamov, I., & Kotz, S. (2002). Dependence structure and symmetry of Huang-Kotz FGM distributions and their extensions. *Metrika*, *56*(1), 55–72.
12. Bairamov, I., & Kotz, S. (2003). On a new family of positive quadrant dependent bivariate distributions. *International Mathematical Journal*, *3*(11), 1247–1254.
13. Bairamov, I., Kotz, S., & Bekçi, M. (2001). New generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions and concomitants of order statistics. *Journal of Applied Statistics*, *28*(5), 521–536.
14. Balbás, A., Garrido, J., & Mayoral, S. (2002). Coherent risk measures in a dynamic framework. *Proceedings of the* 6^{th} *international congress on insur-*

ance: Mathematics and economics. Lisbon: Elsevier.

15. Bargès, M., Cossette, H., & Marceau, É. (2009). TVaR-based capital allocation with copulas. *Insurance: Mathematics and Economics*, *45*(3), 348–361.
16. Bäuerle, N., & Müller, A. (2006). Stochastic orders and risk measures: Consistency and bounds. *Insurance: Mathematics and Economics*, *38*(1), 132–148.
17. Besson, J.-L., Dacorogna, M. M., de Martin, P., Kastenholz, M., & Moller, M. (2009). How Much Capital Does a Reinsurance Need? *The Geneva Papers on Insurance and Risk Issues and Practice*, *34*(2), 159–174.
18. Bohte, Z. (1994). *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb.* Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
19. Boncelj, J. (1983). *Zavarovalna ekonomika.* Maribor: Založba Obzorja.
20. Borch, K. (1961). The utility concept applied to the theory of Insurance. *Astin Bulletin*, *1*(5), 245–255.
21. Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Berlin: Springer-Verlag.
22. Bühlmann, H. (1980). An economic premium principle. *Astin Bulletin*, *11*(1), 52–60.
23. Bühlmann, H. (1985a). The general economic premium principle. *Astin Bulletin*, *14*(1), 13–21.
24. Bühlmann, H. (1985b). Premium calculation from top down. *Astin Bulletin*, *15*(2), 89–101.
25. Bühlmann, H., Gagliardi, G., Gerber, H. U., & Straub, E. (1977). Some inequalities for stop-loss premiums. *Astin Bulletin*, *9*(1), 75–83.
26. Butsic, R. P. (1999). Capital Allocation for Property-Liability Insurers: A Catastrophe Reinsurance Application. *Casualty Actuarial Society Spring Forum* (str. 1–70). Arlington: Casualty Actuarial Society.
27. COSO. (2004). *Enterprise Risk Management – Integrated Framework: Aplication Techniques.* Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission.
28. Daníelsson, J., Jorgensen, B. N., Sarma, M., Samorodnitsky, G., & de Vries, C. G. (2005). *Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk* (Technical report). Ithaca: Cornell University Operations Research and Industrial Engineering. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://ecommons.cornell.edu/bitstream/1813/9310/1/TR001437.pdf`
29. Daykin, C. D., Pentikäinen, T., & Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London: Chapman & Hall.
30. De la Peña, V. H., Ibragimov, R., & Sharakhmetov, S. (2006). Characterizations of joint distributions, copulas, information, dependence and decou-

pling, with applications to time series. *IMS Lecture Notes – Monograph Series*, *49*, 183–209.

31. De Matteis, R. (2001). *Fitting Copulas to Data* (diplomsko delo). Zurich: University of Zurich, Institute of Mathematics.
32. De Mori, B. (1965). Possibilité d'établir des bases techniques acceptables pour le calcul d'une marge minimum de solvabilité des enterprises d'assurances contre les dommages. *Astin Bulletin*, *3*(3), 286–313.
33. Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). The *t* Copula and Related Copulas. *International Statistical Review*, *73*(1), 111–129.
34. Denault, M. (2001). Coherent allocation of risk capital. *Journal of Risk*, *4*(1), 1–34.
35. Denneberg, D. (1990). Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *Astin Bulletin*, *20*(2), 181–190.
36. Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Chicester: John Wiley & Sons.
37. Desmedt, S., & Walhin, J. F. (2008). On the Subadditivity of Tail Value at Risk: An Investigation with Copulas. *Variance*, *2*(2), 231–252.
38. Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., & Vyncke, D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, *31*(2), 133–161.
39. Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M. J., Kaas, R., & Vyncke, D. (2002b). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, *31*(1), 3–33.
40. Dhaene, J., Goovaerts, M., Lundin, M., & Vanduffel, S. (2005). Aggregating Economic Capital. *Belgian Actuarial Bulletin*, *5*(1), 14–25.
41. Dhaene, J., & Goovaerts, M. J. (1996). Dependency of risks and stop-loss order. *Astin Bulletin*, *26*(2), 201–212.
42. Dhaene, J., Goovaerts, M. J., & Kaas, R. (2003). Economic Capital Allocation Derived from Risk Measures, with Disscusion. *North American Actuarial Journal*, *7*(2), 44–59.
43. Dhaene, J., Laeven, R. J. A., Vanduffel, S., Darkiewicz, G., & Goovaerts, M. J. (2006). *Can a coherent risk measure be too subadditive?* (Discussion Paper No. PI-0608). London: City University, Cass Business School, The Pensions Institute. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.pensions-institute.org/workingpapers/wp0608.pdf`
44. Dhaene, J., Tsanakas, A., Valdez, E., & Vanduffel, S. (2009). *Optimal capital allocation principles* (FBE Research Report No. AFI_0936). Leuven: Catholic

University Leuven, Faculty of Business and Economics. Najdeno 2. 12. 2011 na https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/253127/1/AFI_0936.pdf

45. Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Tang, Q., & Vyncke, D. (2006). Risk measures and comonotonicity: a review. *Stochastic Models*, *22*(4), 573–606.
46. Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M., Kaas, R., & Vyncke, D. (2004a). Capital requirements, risk measures and comonotonicity. *Belgian Actuarial Bulletin*, *4*(1), 53–61.
47. Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M. J., Kaas, R., & Vyncke, D. (2004b). *Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review* (Research Report No. OR 0416). Leuven: Catholic University Leuven, Department of Applied Economics. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.econ.kuleuven.be/insurance/pdfs/Riskmeasures.pdf
48. Dickson, D. C. M., & Waters, H. R. (1997). Relative reinsurance retention levels. *Astin Bulletin*, *27*(2), 207–227.
49. Dutang, C., Goulet, V., & Pigeon, M. (2008). actuar: An R Package for Actuarial Science. *Journal of Statistical Software*, *25*(7), 1–37.
50. Dvoršak Bugarija, J. (2005). *Obvladovanje tveganja v zavarovalnih finančnih institucijah*. Ljubljana: Pegaz international.
51. Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. V S. T. Rachev (ur.), *Handbook of heavy tailed distributions in finance* (str. 329–384). Amsterdam: Elsevier Science. (Preprint, najden 2. 12. 2011 na http://www.risklab.ch/ftp/papers/DependenceWithCopulas.pdf)
52. Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (1999). Correlation and Dependency in Risk Management. *Proceedings of the* 30^{th} *ASTIN Colloquium* (str. 227–250). Tokyo: International Actuarial Association.
53. Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (1999). Correlation: Pitfalls and Alternatives. *Risk*, *12*(5), 69–71.
54. Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (2002). Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. V M. A. H. Dempster (ur.), *Risk management: Value at risk and beyond* (str. 176–232). Cambridge: Cambridge University Press. (Preprint, najden 2. 12. 2011 na www.math.ethz.ch/~embrechts/ftp/pitfalls.pdf)
55. Erel, I., Myers, S. C., & Read, J. A., Jr. (2009). *Capital Allocation* (Dice Center WP No. 2009-10). Columbus: Ohio State University, Fisher College of Business. Najdeno 2. 12. 2011 na http://papers.ssrn.com/

sol3/Delivery.cfm/SSRN_ID1498737_code357812.pdf?abstractid=1411190&mirid=1

56. Fackler, M. (2009). Panjer class united – one formula for the Poisson, Binomial, and Negative Binomial distribution. *Proceedings of the* 39^{th} *ASTIN Colloquium.* Helsinki: International Actuarial Association.
57. Faivre, F. (2003). Copula: A New Vision for Economic Capital and Application to a Four Line of Business Company. *Proceedings of the* 34^{th} *ASTIN Colloquium.* Berlin: International Actuarial Association.
58. Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Application* (2^{nd} ed., Vol. 2). New York: John Wiley & Sons.
59. Fischer, T. (2002). Risk Capital Allocation by Coherent Risk Measures Based on One-Sided Moments. *Proceedings of the* 6^{th} *international congress on insurance: Mathematics and economics.* Lisbon: Elsevier.
60. Frees, E. W., & Valdez, E. A. (1998). Understanding Relationships Using Copulas. *North American Actuarial Journal*, *2*(1), 1–25.
61. Furman, E., & Zitikis, R. (2008a). Weighted premium calculation principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, *42*(1), 459—465.
62. Furman, E., & Zitikis, R. (2008b). Weighted risk capital allocations. *Insurance: Mathematics and Economics*, *43*(2), 263–269.
63. Gai, J. (2001). *A Computational Study of the Bivariate Normal Probability Function* (magistrsko delo). Kingston: Queen's University.
64. Genest, C., & Favre, A.-C. (2007). Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, *12*(4), 347–368.
65. Genest, C., & Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *Astin Bulletin*, *37*(2), 475–515.
66. Genz, A. (2004). Numerical Computation of Rectangular Bivariate and Trivariate Normal and t Probabilities. *Statistics and Computing*, *14*(3), 251–260.
67. Gerber, H. U. (1974). On additive premium calculation principles. *Astin Bulletin*, *7*(3), 215–222.
68. Gerber, H. U., & Jones, D. A. (1976). Some practical considerations in connection with the calculation of stop-loss premiums, with discussion. *Transactions of the SOA*, *28*, 215–235.
69. Gerber, H. U., & Pafumi, G. (1998). Utility Functions: From Risk Theory to Finance. *North American Actuarial Journal*, *2*(3), 74–91.
70. Gerber, H. U., & Shiu, S. W. (2006). On the Merger of Two Companies. *North American Actuarial Journal*, *10*(3), 60–67.

71. Gnedenko, B. V. (1976). *The Theory of Probability*. Moscow: Mir Publishers.
72. Goovaerts, M. J., Kaas, R., Dhaene, J., & Tang, Q. (2003a). Some New Classes of Consistent Risk Measures. *Proceedings of the* 13^{th} *AFIR Colloquium.* Maastricht: International Actuarial Association.
73. Goovaerts, M. J., Kaas, R., Dhaene, J., & Tang, Q. (2003b). A unified approach to generate risk measures. *Astin Bulletin*, *33*(2), 173–191.
74. Grossi, P., & Kunreuther, H. (ur.). (2005). *Catastrophe Modeling: A New Approach to Managing Risk.* New York: Springer Science+Business Media.
75. Gründl, H., & Schmeiser, H. (2007). Capital Allocation for Insurance Companies – What Good is It? *The Journal of Risk and Insurance*, *74*(2), 301–317.
76. Heckman, P. E., & Meyers, G. G. (1983). The Calculation of Aggregate Loss Distributions from Claim Severity and Claim Count Distributions, with Discussion by Gary Venter. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 70, str. 22–73). Arlington: Casualty Actuarial Society.
77. Heckman, P. E., & Meyers, G. G. (1984). The Calculation of Aggregate Loss Distributions from Claim Severity and Claim Count Distributions, Addendum. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 71, str. 49–66). Arlington: Casualty Actuarial Society.
78. Hesselager, O. (1994). A recursive procedure for calculation of some compound distributions. *Astin Bulletin*, *24*(1), 19–32.
79. Hesselager, O. (1995). Order relations for some distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, *16*(2), 129–134.
80. Hesselager, O., & Anderssen, U. (2002). *Risk Sharing and Capital Allocation* (Working paper). Ballerup, Denmark: Tryg Insurance. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.soa.org/library/research/actuarial-research-clearing-house/2000-09/2003/arch-1/arch03v37n1-16.pdf`
81. Hogg, R. V., & Klugman, S. A. (1984). *Loss Distributions.* New York: John Wiley & Sons.
82. Homer, D. L. (2006). The Report of the Research Working Party on Correlations and Dependencies Among All Risk Sources – Part 2: Aggregating Bivariate Claim Severities With Numerical Fourier Inversion. *Casualty Actuarial Society Winter Forum* (str. 205–230). Arlington: Casualty Actuarial Society.
83. Homer, D. L., & Clark, D. R. (2003). Insurance Applications of Bivariate distributions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 90, str. 274–307). Arlington: Casualty Actuarial Society.
84. Huang, J. S., & Kotz, S. (1999). Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. A tough hill to climb. *Metrika*, *49*(2), 135–145.

85. Ibragimov, R. (2005). *Copula-Based Dependence Characterizations And Modeling For Time Series* (Disscusion Paper No. 2094). Cambridge: Harvard Institute of Economic Research. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.economics.harvard.edu/pub/hier/2005/HIER2094.pdf
86. Iman, R. W., & Conover, W. J. (1982). A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, *11*(3), 311–334.
87. Jamnik, R. (1971). *Verjetnostni račun*. Ljubljana: Mladinska knjiga.
88. Kaas, R., Dhaene, J., & Goovaerts, M. J. (2000). Upper and lower bounds for sums of random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, *27*(2), 151–168.
89. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory Using R* (2^{nd} ed.). Berlin: Springer-Verlag.
90. Kalkbrener, M. (2005). An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance*, *15*(3), 425–437.
91. Kastelijn, W. M., & Remmerswaal, J. C. M. (1986). *Solvency*. Rotterdam: Nationale-Nederlanden N.V.
92. Kim, J. H. T., & Hardy, M. R. (2009). A capital allocation based on a solvency exchange option. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(3), 357–366.
93. Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1998). *Loss Models: From Data to Decisions*. New York: John Wiley & Sons.
94. Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions* (2^{nd} ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
95. Klugman, S. A., & Parsa, R. (1999). Fitting bivariate loss distributions with copulas. *Insurance: Mathematics and Economics*, *24*(1-2), 139–148.
96. Knuth, D. E. (1981). *The Art of Computer Programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms* (2^{nd} ed.). Reading: Addison-Wesley.
97. Komelj, J. (2004). *Aktuarsko računanje agregatnih odškodnin in optimalnih parametrov pozavarovanja* (magistrsko delo). Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.
98. Komelj, J. (2005). Aktuarski pogled na obvladovanje tveganj pri potresnem zavarovanju. *12. dnevi slovenskega zavarovalništva* (str. 353–370). Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
99. Komelj, J. (2011a). Enterprise risk management in insurance companies. *The ninth international symposium on insurance: Supervision and control of insurance companies' operations* (str. 48–67). Zlatibor: Faculty of Economics Belgrade.
100. Komelj, J. (2011b). Solventnost II – izračun kapitala za avtomobilska

zavarovanja. *XVII. seminar s področja avtomobilskega zavarovanja* (str. 15–27). Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

101. Komelj, J., & Perman, M. (2010). Joint characteristic functions construction via copulas. *Insurance: Mathematics and Economics*, *47*(2), 137–143.
102. Krvavych, Y. (2005). *Insurer Risk Management and Optimal Reinsurance* (doktorska disertacija). Sydney: The University of New South Wales, Faculty of Commerce and Economics.
103. Landsman, Z., & Sherris, M. (2007). An Actuarial Premium Pricing Model for Nonnormal Insurance and Financial Risks in Incomplete Markets. *North American Actuarial Journal*, *11*(1), 119–135.
104. Landsman, Z., & Valdez, E. A. (2003). Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. *North American Actuarial Journal*, *7*(4), 55–71.
105. Leipnik, R. B. (1991). On lognormal random variables: I – the characteristic function. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, *32*(3), 327–347.
106. Lindskog, F. (2000). *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management* (magistrsko delo). Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule.
107. Lindskog, F., McNeil, A., & Schmock, U. (2003). Kendall's tau for elliptical distributions. V G. Bol, G. Nakhaeizadeh, S. T. Rachev, T. Ridder, & K.-H. Vollmer (ur.), *Credit risk: Measurement, evaluation and management* (str. 149–156). Heidelberg: Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company. (Preprint, najden 2. 12. 2011 na http://www.risklab.ch/ftp/papers/KendallsTau.pdf)
108. Long, D., & Krzysztofowicz, R. (1995). A Family of Bivariate Densities Constructed from Marginals. *Journal of the American Statistical Association*, *90*(430), 739–746.
109. Maccheroni, F. (2004). Yaari's dual theory without the completeness axiom. *Economic Theory*, *23*(3), 701–714.
110. McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton: Princeton University Press.
111. Meyers, G. G. (2003). The Economics of Capital Allocation. *Casualty Actuarial Society Fall Forum* (str. 391–418). Arlington: Casualty Actuarial Society.
112. Mildenhall, S. J. (2004). A Note on the Myers and Read Capital Allocation Formula. *North American Actuarial Journal*, *8*(2), 32–44.
113. Mildenhall, S. J. (2006). The Report of the Research Working Party on Correlations and Dependencies Among All Risk Sources – Part 1: Correlation and Aggregate Loss Distributions with an Emphasis on the Iman-Conover Method. *Casualty Actuarial Society Winter Forum* (str. 103–203). Arlington:

Casualty Actuarial Society.

114. Møller, T. (2004). Stochastic orders in dynamic reinsurance markets. *Finance and Stochastic*, *8*(4), 479–499.
115. Müller, A. (1996). Orderings of risks: A comparative study via stop-loss transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, *17*(3), 215–222.
116. Myers, S. J., & Read, J. A., Jr. (2001). Capital Allocation for Insurance Companies. *The Journal of Risk and Insurance*, *68*(4), 545–580.
117. Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas* (2^{nd} ed.). New York: Springer Science+Business Media.
118. Panjer, H. H. (1980). The aggregate claims distribution and stop-loss reinsurance, with discussion. *Transactions of the SOA*, *32*, 523–545.
119. Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin*, *12*(1), 22–26.
120. Panjer, H. H. (2002). *Measurement of Risk, Solvency Requirements and Allocation of Capital within Financial Conglomerates* (Research Report No. 01-15, Amended Sept. 30, 2002). Waterloo: University of Waterloo, Institute of Insurance and Pension Research. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.soa.org/files/pdf/measurement_risk.pdf`
121. Papush, D. E., Patrik, G. S., & Podgaits, F. (2001). Approximations of the Aggregate Loss Distribution. *Casualty Actuarial Society Winter Forum* (str. 175–186). Arlington: Casualty Actuarial Society.
122. Patrik, G., Bernegger, S., & Rüegg, M. B. (1999). The Use of Risk Adjusted Capital to Support Business Decision-Making. *Casualty Actuarial Society Spring Forum* (str. 1–92). Arlington: Casualty Actuarial Society.
123. Pedersen, C. S., & Satchell, S. E. (1998). An Extended Family of Financial-Risk Measures. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, *23*(2), 89–117.
124. Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. (1992). *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge: Cambridge University Press.
125. Ramsay, C. M. (1993). Loading gross premiums for risk without using utility theory, with discussion. *Transactions of the SOA*, *45*, 305–349.
126. Reuter, G. H. E. (1949). On the Boundedness of the Hermite Orthogonal System. *Journal of the London Mathematical Society*, *s1-24*(2), 159–160.
127. Robertson, J. P. (1992). The Computation of Aggregate Loss Distributions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 79, str. 57–133). Arlington: Casualty Actuarial Society.
128. Rockmore, D. N. (2000). The FFT: An Algorithm the Whole Family Can Use. *Computing in Science and Engineering*, *2*(1), 60–64.
129. Rodríguez-Lallena, J. A., & Úbeda-Flores, M. (2004). A new class of bivariate

copulas. *Statistics & Probability Letters*, *66*(3), 315–325.
130. Rudin, W. (1970). *Real and Complex Analysis*. London: McGraw-Hill.
131. Rüschendorf, L. (1985). Construction of multivariate distributions with given marginals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, *37*(2), 225–233.
132. Sandström, A. (2006). *Solvency: Models, Assessment and Regulation*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
133. Scarsini, M. (1984). On measures of concordance. *Stochastica*, *8*(3), 201–218.
134. Shaked, M., & Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*. New York: Springer Science+Business Media.
135. Sherris, M. (2006). Solvency, Capital Allocation, and Fair Rate of Return in Insurance. *The Journal of Risk and Insurance*, *73*(1), 71–96.
136. Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, *8*, 229–231.
137. Sklar, A. (1996). Random Variables, Distibution Functions, and Copulas – A Personal Look Backward and Forward. V L. Rüschendorf, B. Schweizer, & M. D. Taylor (ur.), *Distributions with fixed marginals and related topic* (Vol. 28, str. 1–14). Hayward: Institute of Mathematical Statistics.
138. *Solvency of non life insurers: Balancing security and profitability expectations* (Sigma No. 1). (2000). Zürich: Swiss Reinsurance Company.
139. Sundt, B. (1992). On some extensions of Panjer's class of counting distributions. *Astin Bulletin*, *22*(1), 61–80.
140. Sundt, B. (1999). On multivariate Panjer recursion. *Astin Bulletin*, *29*(1), 29–45.
141. Sundt, B., & Jewell, W. S. (1981). Further results on recursive evaluation of compound distributions. *Astin Bulletin*, *12*(1), 27–39.
142. Tang, A., & Valdez, E. A. (2006). Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas. *Proceedings of the* 16^{th} *AFIR Colloquium*. Paris: International Actuarial Association.
143. Tasche, D. (2000). *Risk contributions and performance measurement* (Working paper). München: Technische Universität München, Zentrum Mathematik (SCA). Najdeno 2. 12. 2011 na `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.44.3268&rep=rep1&type=pdf`
144. Tasche, D. (2001). *Conditional Expectation as Quantile Derivative* (Quantitative Finance Papers No. math/0104190). arXiv.org. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://arxiv.org/pdf/math/0104190v1`
145. Tasche, D. (2002). Expected Shortfall and Beyond. *Journal of Banking and Finance*, *26*(7), 1519–1533.
146. Tasche, D. (2004). Allocating Portfolio Economic Capital to Sub-Portfolios.

V A. Dev (ur.), *Economic capital: A practitioner guide* (str. 275–302). London: Risk Books.

147. Tasche, D. (2008). Capital Allocation to Business Units and Sub-Portfolios: the Euler Principle. V A. Resti (ur.), *Pillar II in the New Basel Accord: The Challenge of Economic Capital* (str. 423–453). London: Risk Books.
148. Teugels, J., & Sundt, B. (ur.). (2004). *Encyclopedia of Actuarial Science* (Vol. 2). Chichester: John Wiley & Sons.
149. Tsanakas, A. (2004). Dynamic capital allocation with distortion risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, *35*(2), 223–243.
150. Tsanakas, A. (2007). Capital allocation with risk measures. M. Vanmaele et al. (ur.), 5^{th} *Actuarial and Financial Mathematics Day* (str. 3–17). Brussel: Koninklijke Vlaamse Academie van Belgié voor Wetenschappen en Kunsten.
151. Tsanakas, A. (2009). To split or not to split: Capital allocation with convex risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(2), 268–277.
152. Turk, I. (2004). *Pojmovnik računovodstva, financ in revizije*. Ljubljana: Slovenski inštitut za revizijo.
153. Valdez, E. A., & Chernih, A. (2003). Wang's capital allocation formula for elliptically contoured distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, *33*(3), 517–532.
154. Valdez, E. A., Dhaene, J., Maj, M., & Vanduffel, S. (2009). Bounds and approximations for sums of dependent log-elliptical random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(3), 385–397.
155. Vanduffel, S. (2005). *Comonotonicity: From Risk Measurement to Risk Management* (doktorska disertacija). Amsterdam: University of Amsterdam, Faculty of Economics and Econometrics.
156. Vanduffel, S., Hoedemakers, T., & Dhaene, J. (2005). Comparing Approximations for Risk Measures of Sums of Nonindependent Lognormal Random Variables. *North American Actuarial Journal*, *9*(4), 71–82.
157. Vasicek, O. A. (1998). *A Series Expansion for the Bivariate Normal Integral*. San Francisco: KMV Corporation. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://janroman.dhis.org/finance/Numerical%20Methods/A_Series_Expansion_for_the_Bivariate_Normal_Integral.pdf`
158. Venter, G. G. (2004). Capital Allocation Survey with Commentary. *North American Actuarial Journal*, *8*(2), 96–107.
159. Vidav, I. (1973). *Višja matematika I* (4. izd.). Ljubljana: Državna založba Slovenije.
160. Vitale, R. A. (1990). On Stochastic Dependence and a Class of Degenerate Distributions. V H. W. Block, A. R. Sampson, & T. H. Savits (ur.), *Topics in*

statistical dependence (Vol. 16, str. 459–469). Hayward: Institute of Mathematical Statistics.

161. Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior* (3^{rd} ed.). Princeton: Princeton University Press.
162. Waldmann, K.-H. (1996). Modified recursions for a class of compound distributions. *Astin Bulletin*, *26*(2), 213–224.
163. Walhin, J.-F. (2003). On the Optimality of Multiline Excess of Loss Covers. *Casualty Actuarial Society Spring Forum* (str. 231–243). Arlington: Casualty Actuarial Society.
164. Walhin, J. F., & Paris, J. (1998). On the use of equispaced discrete distributions. *Astin Bulletin*, *28*(2), 241–255.
165. Wang, S. (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, *17*(1), 43–54.
166. Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin Bulletin*, *26*(1), 71–92.
167. Wang, S. (1998a). An Actuarial Index of the Right-Tail Risk. *North American Actuarial Journal*, *2*(2), 88–101.
168. Wang, S. (1998b). *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms.* Casualty Actuarial Society. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://www.casact.org/library/wang.pdf`
169. Wang, S. (1998c). Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 85, str. 849–939). Arlington: Casualty Actuarial Society.
170. Wang, S. (1998d). Implementation of Proportional Hazards Transforms in Ratemaking, with Discussion. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 85, str. 940–990). Arlington: Casualty Actuarial Society.
171. Wang, S. (2002a). A Risk Measure That Goes Beyond Coherence. *Proceedings of the* 12^{th} *AFIR Colloquium.* Cancun: International Actuarial Association.
172. Wang, S. (2002b). A Set of New Methods and Tools for Enterprise Risk Capital Management and Portfolio Optimization. *Casualty Actuarial Society Summer Forum* (str. 43–77). Arlington: Casualty Actuarial Society.
173. Wang, S., & Dhaene, J. (1998). Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, *22*(3), 235–242.
174. Wang, S., & Sobrero, M. (1994). Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions. *Astin Bulletin*, *24*(2), 161–166.
175. Wang, S., & Young, V. R. (1998). Ordering risks: Expected utility theory

versus Yaari's dual theory of risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, *22*(2), 145–161.

176. Wason, S. (2004). *Insurer Solvency Assessment: Towards a Global Framework.* Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.actuaries.org/LIBRARY/Other/IAIS_Lisbon_Wason.pdf
177. Willmot, G. (1988). Sundt and Jeweel's family of discrete distributions. *Astin Bulletin*, *18*(1), 17–29.
178. Wirch, J. L., & Hardy, M. R. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance: Mathematics and Economics*, *25*(3), 337–347.
179. Yaari, M. E. (1987). The Dual Theory of Choice Under Risk. *Econometrica*, *55*(1), 95–115.

Viri

1. *AS/NZS 4360:2004, Risk management* (Australian/New Zealand standard). (2004). Sydney/Wellington: Standards Australia/Standards New Zealand.
2. *AS/NZS ISO 31000:2009, Risk management – Principles and guidelines* (Australian/New Zealand standard). (2009). Sydney/Wellington: Standards Australia/Standards New Zealand. Najdeno 2. 12. 2011 na https://infostore.saiglobal.com/store/PreviewDoc.aspx?saleItemID=2056247
3. Basel Committee on Banking Supervision. (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework.* Basel: Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf?noframes=1
4. Basel Committee on Banking Supervision. (2006). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework, Comprehensive Version.* Basel: Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.bis.org/publ/bcbs128.pdf
5. CEIOPS. (2005). *Answers to the European Commission on the second wave of Calls for Advice in the framework of the Solvency II project.* Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/DOC07_05.pdf
6. CEIOPS. (2006a). *QIS1 – Summary report.* Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno

2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/CEIOPS-FS-0106Rev32006-03-17PA.pdf

7. CEIOPS. (2006b). *QIS2 – Summary Report.* Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/QIS2/QIS2-SummaryReport.pdf
8. CEIOPS. (2007). *CEIOPS's Report on its third Quantitative Impact Study (QIS3) for Solvency II.* Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/submissionstotheec/CEIOPS-DOC-19-07%20QIS3%20Report.pdf
9. CEIOPS. (2008). *CEIOPS' Report on its fourth Quantitative Impact Study (QIS4) for Solvency II.* Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/CEIOPS-SEC-82-08%20QIS4%20Report.pdf
10. COSO. (2004). *Enterprise Risk Management – Integrated Framework: Executive Summary and Framework.* Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission.
11. Council Directive 90/619/EEC of 8 November 1990 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to direct life assurance, laying down provisions to facilitate the effective exercise of freedom to provide services and amending Directive 79/267/EEC. (1990). *Official Journal of the European Communities, št. L 330*.
12. Council Directive 92/96/EEC of 10 November 1992 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to direct life assurance and amending Directives 79/267/EEC and 90/619/EEC (third life assurance Directive). (1992). *Official Journal of the European Communities, št. L 360*.
13. Directive 2002/12/EC of the European Parliament and of the Council of 5 March 2002 amending Council Directive 79/267/EEC as regards the solvency margin requirements for life assurance undertakings. (2002). *Official Journal of the European Communities, št. L 77/11*.
14. Direktiva 2002/13/ES Evropskega parlamenta in Sveta z dne 5. marca 2002 o spremembi Direktive Sveta 73/239/EGS o zahtevani kapitalski ustreznosti zavarovalnic, ki opravljajo posle neživljenjskega zavarovanja. (2002). *Uradni list Evropske unije, št. L 77/17*.
15. Direktiva 2002/83/ES Evropskega parlamenta in Sveta z dne 5. novembra

2002 o življenjskem zavarovanju. (2002). *Uradni list Evropske unije, št. L 345/1.*

16. Direktiva 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta z dne 25. novembra 2009 o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II). (2009). *Uradni list Evropske unije, št. L 335/1.*
17. Direktiva Sveta 92/49/EGS z dne 18. junija 1992 o spremembah direktiv 73/239/EGS in 88/357/EGS in o uskladitvi zakonov in drugih predpisov o neposrednem zavarovanju razen življenjskega zavarovanja (tretja direktiva o premoženjskem zavarovanju). (1992). *Uradni list Evropskih skupnosti, št. L 228/1.*
18. Direktiva Sveta z dne 22. junija 1987 o spremembi Prve direktive 73/239/EGS o usklajevanju zakonov in drugih predpisov o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti neposrednega zavarovanja razen življenjskega zavarovanja, zlasti glede kreditnega in kavcijskega zavarovanja (87/343/EGS). (1987). *Uradni list Evropskih skupnosti, št. L 185.*
19. Druga direktiva Sveta z dne 22. junija 1988 o usklajevanju zakonov in drugih predpisov o neposrednem zavarovanju razen življenjskega zavarovanja, ki opredeljuje določbe za učinkovito uresničevanje svobode opravljanja storitev in o spremembah Direktive 73/239/EGS (88/357/EGS). (1988). *Uradni list Evropskih skupnosti, št. L 172/1.*
20. EIOPA. (2011). *EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II.* Frankfurt: European Insurance and Occupational Pensions Authority. Najdeno 2. 12. 2011 na `https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/QIS5_Report_Final.pdf`
21. Evropska komisija. (1997). *Report to the Insurance Committee on the need for further harmonisation of the solvency margin.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://aei.pitt.edu/6977/01/003402_1.pdf`
22. Evropska komisija. (2001a). *Note to the Solvency Subcommittee – Banking rules: relevance for the insurance sector?* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2056/markt-2056-01_en.pdf`
23. Evropska komisija. (2001b). *Note to the Solvency Subcommittee: Risk-based capital systems.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na `http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2085/markt-2085-01_en.pdf`
24. Evropska komisija. (2002a). *Discussion Note to the Members of the IC Solvency Subcommittee: Current and future solvency work in the IAIS and within the actuarial profession from a Solvency*

II point of view. Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2520/markt-2520-02-iais-iaa_en.pdf

25. Evropska komisija. (2002b). *Report of the working group on life assurance to the IC Solvency Subcommittee.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2528/markt-2528-life-report_en.pdf
26. Evropska komisija. (2002c). *Report of the working group on non-life technical provisions to the IC Solvency Subcommittee.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2529/markt-2529-non-life-report_en.pdf
27. Evropska komisija. (2002d). *Report of the working group on non-life technical provisions to the IC Solvency Subcommittee – Annexes.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2529/markt-2529-non-life-report-annexes_en.zip
28. Evropska komisija. (2010). *QIS5 Technical Specifications.* Bruselj: Evropska komisija. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/QIS/QIS5/QIS5-technical_specifications_20100706.pdf
29. First Council Directive of 5 March 1979 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking up and pursuit of the business of direct life assurance (79/267/EEC). (1979). *Official Journal of the European Communities, št. L 63.*
30. *IEC/ISO 31010:2009, Risk management – Risk assessment techniques* (International standard). (2009). Geneva: International Electrotechnical Commission.
31. International Actuarial Association. (2002). *Report of Solvency Working Party Prepared for IAA Insurance Regulation Committee.* International Actuarial Association. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.actuaries.org/CTTEES_INSREG/Documents/Solvency_Report_EN.pdf
32. International Actuarial Association. (2004). *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment* (Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party). International Actuarial Association. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.actuaries.org/LIBRARY/Papers/Global_Framework_Insurer_Solvency_Assessment-public.pdf
33. International Association of Insurance Supervisors. (2000). *On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues.* International Association of In-

surance Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.iaisweb.org/__temp/Solvency_assessments_and_actuarial_issues.pdf

34. International Association of Insurance Supervisors. (2002). *Principles on Capital Adequacy and Solvency.* International Association of Insurance Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.iaisweb.org/__temp/Principles_on_capital_adequacy_and_solvency.pdf
35. *ISO 31000:2009, Risk management – Principles and guidelines* (International standard). (2009). Geneva: International Organization for Standardization.
36. KPMG. (2002a). *Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision.* KPMG. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/solvency2-study-kpmg_en.pdf
37. KPMG. (2002b). *Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision – appendices.* KPMG. Najdeno 2. 12. 2011 na http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/solvency2-study-kpmg-annexes_en.pdf
38. Manghetti, G. (2000). *Technical Provisions in Non-life Insurance* (Report). Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/report_dt_i_223_00_rev2.pdf
39. Müller, H. (1997). *Solvency of Insurance Undertakings* (Report). Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/report_dt_9704.pdf
40. Obligacijski zakonik. *Uradni list RS*, *št. 97/2007-UPB1.*
41. Protiviti. (2006). *Guide to Enterprise Risk Management: Frequently Asked Questions.* Protiviti. Najdeno 2. 12. 2011 na http://www.knowledgeleader.com/KnowledgeLeader/content.nsf/dce93ca8c1f384d6862571420036f06c/87e5c452010aadc9882571c00081a23c/$FILE/ERM%20FAQ%20Guide.pdf
42. Prva direktiva Sveta z dne 24. junija 1973 o usklajevanju zakonov in drugih predpisov o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti neposrednega zavarovanja razen življenjskega zavarovanja (73/239/EGS). (1973). *Uradni list Evropskih skupnosti*, *št. L 228/3.*
43. R Development Core Team. (2011). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing,

http://www.R-project.org/ (ISBN 3-900051-07-0).

44. Sharma, P. (2002). *Prudential Supervision of Insurance Undertakings* (Report). Frankfurt: Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Najdeno 2. 12. 2011 na https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/report_dt_uk_232_02_rev6.pdf
45. Society of Actuaries. (2004). *Specialty Guide on Economic Capital, Version 1.5.* Society of Actuaries. Najdeno 2. 12. 2011 na http://rmtf.soa.org/specialty-guide-ecv1.5.pdf
46. Zakon o spremembah in dopolnitvah Zakona o zavarovalništvu. *Uradni list RS*, *št. 79/2006–ZZavar-C*.
47. Zakon o temeljih sistema premoženjskega in osebnega zavarovanja. *Uradni list SFRJ*, *št. 24/1976*.
48. Zakon o temeljih sistema premoženjskega in osebnega zavarovanja. *Uradni list SFRJ*, *št. 17/1990, 82/1990*.
49. Zakon o zavarovalnicah. *Uradni list RS*, *št. 64/1994 in 35/1995*.
50. Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS*, *št. 13/2000*.
51. Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS*, *št. 99/2010-UPB7*.

Priloge

Priloga 1: Seznam uporabljenih kratic

BSCR Osnovni zahtevani solventnostni kapital (angl. *Basic Solvency Capital Requirement*)

CEA Evropski zavarovalni komite (fr. *Comité Européen des Assurances*)

CEIOPS Odbor evropskih nadzornikov za zavarovalništvo in poklicne pokojnine (angl. *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*)

COSO Odbor podpornih organizacij komisije za ceste (angl. *Committee of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission*)

CTE Pogojna končna tvegana vrednost (angl. *Conditional Tail Expectation*)

CVaR Pogojna tvegana vrednost (angl. *Conditional Value at Risk*)

DFT Diskretna Fourierova transformacija (angl. *Discrete Fourier Transform*)

EGS Evropska gospodarska skupnost

EIOPA Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. *European Insurance and Occupational Pensions Authority*)

EIOPC Evropski odbor za zavarovalništvo in poklicne pokojnine (angl. *European Insurance and Occupational Pensions Committee*)

EML Maksimalna pričakovana škoda (angl. *Expected Maximum Loss*) ali ocenjena maksimalna škoda (angl. *Estimated Maximum Loss*)

ERM Upravljanje tveganj v podjetjih (angl. *Enterprise Risk Management*)

ESF Pričakovani primanjkljaj (angl. *Expected Shortfall*)

EU Evropska unija

FFT Hitra Fourierova transformacija (angl. *Fast Fourier Transform*)

IAA Mednarodno aktuarsko združenje (angl. *International Actuarial Association*)

IAIS Mednarodno združenje zavarovalnih nadzornikov (angl. *International Association of Insurance Supervisors*)

IASB Odbor za mednarodne računovodske standarde (angl. *International Accounting Standards Board*)

KPMG Mreža revizijskih in svetovalnih družb, poimenovana z začetnicami ustanoviteljev družb (Klynveld, Peat, Marwick, Goerdeler), iz katerih je nastala z več združitvami

MCR Minimalni kapital (angl. *Minimal Capital Requirement*)

MSRP Mednarodni standardi računovodskega poročanja

OECD Organizacija za gospodarsko sodelovanje in razvoj (angl. *Organisation* *for Economic Co-operation and Development*)

PML Maksimalna verjetna škoda (angl. *Probable Maximum Loss*) ali maksimalna mogoča škoda (angl. *Possible Maximum Loss*)

RAC Tveganju prilagojeni kapital (angl. *Risk Adjusted Capital*)

RAROC Donosnost na tveganju prilagojeni kapital (angl. *Risk Adjusted Return On Capital*)

RBC Na tveganju temelječi kapital (angl. *Risk Based Capital*)

ROC Donosnost na kapital (angl. *Return On Capital*)

RORAC Donosnost na tveganju prilagojeni kapital (angl. *Return On Risk Adjusted Capital*)

SCR Solventnostni kapital (angl. *Solvency Capital Requirement*)

TailVaR Končna tvegana vrednost (angl. *Tail Value at Risk*) – sinonim za TVaR

TVaR Končna tvegana vrednost (angl. *Tail Value at Risk*) – sinonim za TailVaR

VaR Tvegana vrednost (angl. *Value at Risk*)