UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

ALEŠ TOMAŽIN

VPLIV STOHASTIČNIH MODELOV OBRESTNIH MER PRI VREDNOTENJU ZAVAROVANJ, KI TEMELJIJO NA MARKOVSKIH PROCESIH Z VEČ STANJI

DOKTORSKA DISERTACIJA

Ljubljana, 2016

IZJAVA O AVTORSTVU

Spodaj podpisani, Aleš Tomažin, študent Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom Vpliv stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, ki temeljijo na markovskih procesih z več stanji, pripravljene v sodelovanju s svetovalcem prof. dr. Alešem Berkom Skokom.

Izrecno izjavljam, da v skladu z določili Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami) dovolim objavo doktorske disertacije na fakultetnih spletnih straneh.

S svojim podpisom zagotavljam, da

- je predloženo besedilo rezultat izključno mojega lastnega raziskovalnega dela;
- je predloženo besedilo jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem
  - poskrbel, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam v doktorski disertaciji, citirana oziroma navedena v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, in
  - pridobil vsa dovoljenja za uporabo avtorskih del, ki so v celoti (v pisni ali grafični obliki) uporabljena v tekstu, in sem to v besedilu tudi jasno zapisal;
- se zavedam, da je plagiatorstvo - predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih - kaznivo po Kazenskem zakoniku (Ur. l. RS, št. 55/2008 s spremembami);
- se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predložene doktorske disertacije dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom.

Datum zagovora:	2. marec 2016
Predsednica:	prof. dr. Liljana Ferbar Tratar
Mentor:	prof. dr. Aleš Berk Skok
Član:	prof. dr. Drago Bokal

V Ljubljani, dne 11. februarja 2016 Podpis doktoranda:

Vpliv stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, ki temeljijo na markovskih procesih z več stanji

Povzetek

V doktorski disertaciji so obravnavani aktuarsko modeliranje zavarovalnih produktov, markovski procesi v povezavi z zavarovalništvom, modeli obrestnih mer, razni vidiki finančnega poročanja, tveganja v zavarovalništvu skozi vrednotenje zavarovalnih produktov in vrednotenje zavarovalnih produktov, ki vključujejo stohastične modele obrestnih mer. Teoretični vidik omenjenega dopolnjujejo konkretne izpeljave neto enkratnih premij ter izračuni le-teh ob konkretnih situacijah s pomočjo tradicionalnega in tržno konsistentnega pristopa.

Ključni problem, ki je obravnavan v disertaciji, je, kako vpeljava stohastičnih modelov obrestnih mer vpliva na samo ceno zavarovanja ob dejstvu, da je treba model ustrezno kalibrirati glede na namen vrednotenja zavarovanja. Izhajajoč iz starejše literature se takšen pristop ne zdi racionalen, saj v takratnih časih tržno konsistentno vrednotenje še ni bilo tako razvito. Danes se takšno vrednotenje že uporablja, predvsem v smislu vrednotenja obveznosti iz zavarovalnih pogodb, na prodajni strani pa še ne.

V disertaciji so razviti modeli vrednotenja za razne vrste zavarovanj, ki jih lahko enakovredno zapišemo z odsekoma zveznimi markovskimi procesi, in za razne modele stohastičnih obrestnih mer. Le-ti so primerjani s klasičnimi modeli, kjer se pri vrednotenju uporablja fiksna obrestna mera.

Vse izpeljano daje dobre temelje za realizacijo bolj ali manj radikalne ideje vzpostavitve borze oziroma trga zavarovalnih pogodb. Ta ni več daleč, saj bodo to na koncu zahtevali racionalni potrošniki. V doktorski disertaciji so tako postavljeni osnovni modeli za tržno konsistentno vrednotenje zavarovanj s pomočjo stohastičnih modelov obrestnih mer.

Ključne besede: model pričakovane življenjske dobe, odsekoma zvezni markovski proces, tržno konsistentno vrednotenje, stohastični modeli obrestnih mer.

The impact of usage of stochastic interest rate models on pricing of insurance contracts which are based on Markov processes with multiple states

Summary

This doctoral thesis discusses actuarial modeling of insurance products, Markov processes in connection with insurance, interest rate models, financial reporting issues, risks in insurance through the valuation of insurance products and valuation of insurance products using the stochastic interest rate models. The theory presented is supplemented with derivation of formulae for net single premium in specific cases with traditional and market consistent approach.

A key problem addressed in this thesis is the effect of introduction of stochastic interest rate models on the price of insurance, having in mind that model needs to be calibrated to the purpose of valuation. Looking from the older literature such approach might not be reasonable while in that time market consistent valuation was not so developed yet. Today such valuation technique is generally used mainly with the valuation of insurance obligations while on the market side we still haven't see the breakthrough.

Models developed in the thesis can be used for different kind of insurance products which can be equally represented with Markov jump processes. They are compared with traditional models, the ones where fixed interest rate is used.

All developed in the thesis represent basis for introduction more or less radical idea of construction of market for insurance contracts. This is not far away while at the end of the day rational policyholders will require this. So in the thesis are presented basic models for market consistent valuation of insurance contracts which include usage of stochastic interest rate models.

Key words: life expectancy model, Markov jump process, market consistent valuation, stochastic interest rate models.

Kazalo

1 UVOD **1**

1.1 Opredelitev problema . . . 1

1.1.1 Zavarovalna dejavnost . . . 1

1.1.2 Izzivi vrednotenja obveznosti iz zavarovalnih pogodb . . . 2

1.1.3 Vrednotenje obveznosti pod Direktivo Solventnost II . . . 3

1.1.4 Zakonsko vrednotenje obveznosti iz zavarovalnih pogodb . 5

1.1.5 Sklep . . . 7

1.2 Cilj in namen dela . . . 8

1.3 Metodologija . . . 9

1.4 Znanstveni prispevek dela . . . 10

1.5 Struktura dela . . . 11

2 AKTUARSKA IZHODIŠČA **12**

2.1 Stohastični modeli . . . 13

2.2 Model življenjskih zavarovanj . . . 15

2.2.1 Jakost smrtnosti . . . 18

2.2.2 Model preživetja v splošnem . . . 20

2.3 Primeri življenjskih zavarovanj . . . 24

2.4 Ekonomski modeli za vrednotenje zavarovanj . . . 36

2.4.1 Kriteriji za izvedljivost modela . . . 37

2.4.2 Delitev modelov . . . 38

3 MARKOVSKI PROCESI **42**

3.1 Stohastični procesi . . . 42

3.1.1 Stacionarnost in prirastki . . . 44

3.1.2 Lastnost Markova . . . 44

3.1.3 Primeri osnovnih stohastičnih procesov . . . 45

3.2 Markovske verige . . . 47

3.2.1 Markovske verige v diskretnem času . . . 48

3.2.2 Slučajni hod . . . 49

3.2.3 Slučajna izplačila . . . 50

3.3 Odsekoma zvezni markovski procesi . . . 51

3.3.1 Ekvivalenca s Poissonovim procesom: homogeni primer . . 54

3.3.2 Ekvivalenca z modelom preživetja: nehomogeni primer . . 59

3.3.3 Integralska oblika enačb Kolmogorova 60
3.4 Zahtevnejši modeli 61
3.4.1 Multipli dekrementni model 61
3.4.2 Model zakonskega stanu 61
3.4.3 Model števila škod pri voznikih 62
3.4.4 Odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji 63

4 MODELI OBRESTNIH MER 66
4.1 Delitev modelov 67
4.2 Binomski modeli v diskretnem času 68
4.2.1 Model brez arbitraže 68
4.2.2 Ho in Leejev model brez arbitraže 69
4.2.3 Modeli za netvegano obrestno mero 70
4.3 Modeli obrestnih mer v zveznem času 73
4.3.1 Enofaktorski modeli za netvegano obrestno mero 73
4.3.2 Vasičkov model 76
4.3.3 Cox-Ingersoll-Ross model 78
4.4 Modeli brez arbitraže 82
4.4.1 Markovski modeli 83
4.4.2 Heath-Jarrow-Mortonovo okolje 86
4.5 Večfaktorski modeli 93
4.5.1 Afini modeli 93
4.6 Generatorji ekonomskih scenarijev 98
4.6.1 Kalibracija tržno konsistentnega ESG 98
4.6.2 Modeli 99

5 FINANČNO POROČANJE 100
5.1 Cilji finančnega poročanja pri diskontiranju 100
5.1.1 Namen 102
5.1.2 Predvidena uporabnost 103
5.1.3 Pogled deležnikov 104
5.1.4 Pogled regulatorja 105
5.2 Dekompozicija obrestnih mer 106
5.2.1 Premija za nelikvidnost 107
5.2.2 Kreditno tveganje 110

5.2.3 Politično tveganje 112
5.3 Vrednotenje zavarovalnih obveznosti 113
5.3.1 Tradicionalno vrednotenje 113
5.3.2 Tržno konsistentno vrednotenje 123

6 UPORABA STOHASTIČNIH MODELOV OBRESTNIH MER 130
6.1 Zavarovanje za doživetje 130
6.1.1 Vasičkov model 130
6.1.2 Markovski modeli 135
6.1.3 Posplošeni CIR modeli 136
6.2 Mešano zavarovanje 137
6.2.1 Vasičkov model 137
6.2.2 Markovski modeli 137
6.2.3 Posplošeni CIR modeli 138
6.3 Odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji 139
6.3.1 Vasičkov model 139

7 REZULTATI SKOZI RAZLIČNE NAČINE FINANČNEGA POROČANJA 141
7.1 Tradicionalno vrednotenje 142
7.2 Tržno konsistentno vrednotenje 150
7.2.1 Vasičkov model in zavarovanje za doživetje 150
7.2.2 CIR model in zavarovanje za doživetje 154
7.2.3 Kalibracija modela 156
7.2.4 Vrednotenje opcij in garancij 159
7.3 Ugotovitve analize z vidika postavljene hipoteze 162

8 SKLEP 164

LITERATURA IN VIRI 167

PRILOGE

Kazalo tabel

Tabela 1. Tabela kompleksnosti modelov za vrednotenje 39

Tabela 2. Primeri modelov 42

Tabela 3. Enofaktorski, časovno homogeni modeli za $r_f(t)$ 74

Tabela 4. Predpostavke za izračun neto enkratne premije (NEP) za zavarovanje za doživetje 143

Tabela 5. Predpostavke za izračun neto enkratne premije (NEP) za zavarovanje za doživetje 151

Tabela 6. Predpostavke za izračun cene brezkuponske obveznice 155

Kazalo slik

Slika 1. Krivulje obrestnih mer na 31.12.2014 142

Slika 2. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model 144

Slika 3. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od zavarovalne dobe - Tradicionalni model 145

Slika 4. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere in zavarovalne dobe - Tradicionalni model 146

Slika 5. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od verjetnosti doživetja - Tradicionalni model 147

Slika 6. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere in verjetnosti doživetja - Tradicionalni model 147

Slika 7. Neto enkratna premija (NEP) za mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model 148

Slika 8. Neto enkratna premija (NEP) za zavarovanje s tremi stanji, mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model 149

Slika 9. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in pri konstantni jakosti obrestne mere - Vasičkov model 152

Slika 10. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in od obrestne mere - Vasičkov model 152

Slika 11. VaR diskontnega faktorja v odvisnosti od α in konstanten diskontni faktor - Vasičkov model 153

Slika 12. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od σ in pri konstantni jakosti obrestne mere - Vasičkov model 154

Slika 13. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in σ - Vasičkov model 154

Slika 14. Vrednost brezkuponske obveznice - Vasičkov in CIR model 156

Slika 15. Kalibracija obrestnih mer - Vasičkov model 157

Slika 16. Tržno konsistentna cena - Vasičkov model 158

Slika 17. Vrednost prihodnjih dobičkov 160

Slika 18. Centili prihodnjih dobičkov 161

Slika 19. Izračun vrednosti opcij in garancij 162

1 UVOD

1.1 Opredelitev problema

1.1.1 Zavarovalna dejavnost

Dve tretjini finančnega napajanja kapitalskih trgov v razvitem svetu izvira iz zavarovalniških in pokojninskih sredstev oziroma skladov. To so hkrati najdolgoročnejša sredstva v narodnem gospodarstvu, z običajno ročnostjo nad 10 let. Tudi v Sloveniji hitro raste pomen teh sredstev, vendar še nismo dosegli njihove evropske udeležbe v BDP.

V Sloveniji je delež zbrane zavarovalne premije v BDP v letu 2013 znašal 5,6 % BDP. Tovrstni delež je v državah Evropske unije (EU-28) v letu 2013 znašal približno 7,8 %. Delež zbrane zavarovalne premije v Sloveniji zaostaja za primerljivimi deleži držav članic EU predvsem zaradi zbrane premije življenjskih zavarovanj. Ta je v Sloveniji leta 2013 znašala 29,8 % celotne zavarovalne premije, medtem ko je v Evropskih državah (EU-28) v letu 2013 znašala 59,6 % celotne zavarovalne premije (Letno poročilo AZN 2014, str. 30). Glavne razloge za nizek delež življenjskih zavarovanj v celotni zavarovalni premiji gre iskati predvsem v velikem deležu socialnih zavarovanj, finančni krizi in zniževanju kupne moči. Tako so leta 2013 zavarovalnice in druge članice Slovenskega zavarovalnega združenja drugič, odkar se slovenska zavarovalna dejavnost sistematično spremlja, zbrale manj bruto obračunane premije kot leto poprej, in sicer 1.977 milijonov evrov, kar je 3,73 % manj kot v letu 2012 (Statistični zavarovalniški bilten 2015, str. 50).

Slovenske zavarovalnice (brez pozavarovalnic in pokojninskih družb) so imele konec leta 2013 5.659,8 milijona evrov naložb celotnega premoženja. Zavarovalnice so precej izpostavljene do obveznic Republike Slovenije, katerih tveganje se zaradi hitre rasti zadolževanja, nizke gospodarske rasti in padanja bonitetne ocene države vse bolj povečuje. Dodatno tveganje za slovenske zavarovalnice predstavlja tudi bančni sektor, zaradi katerega so zavarovalnice v veliki meri izpostavljene preko bančnih obveznic in delnic slovenskih bank. Kljub vsem tveganjem, s katerimi se zavarovalnice srečujejo pri svojem poslovanju, se je obseg kapitala, s katerim razpolagajo zavarovalnice, pozavarovalnice in pokojninske družbe, v letu 2013 povečal (Letno poročilo AZN 2013, str. 49). Delež naložb zavarovalnic (brez naložb pozavarovalnic) se zgodovinsko veča, kar dodatno nakazuje na prihodnjo rast slovenskega zavarovalnega sektorja in s tem na njegovo vlogo pri delovanju kapitalskih trgov.

1.1.2 Izzivi vrednotenja obveznosti iz zavarovalnih pogodb

Zavarovalniški posel predstavljajo finančne obveznosti, ki so pod vplivom slučajnih dogodkov, ter plačevanje storitev vnaprej. To pripomore k temu, da je zavarovalništvo kot panoga med prvimi po akumuliranju kapitala, predvsem, če izpostavimo življenjska ter pokojninska zavarovanja (Tomažin, 2004). Vrednotenje zavarovalnih produktov v današnjih razmerah predstavlja zavarovalnicam velik izziv. Na eni strani so zavarovalnice podvržene različnim tveganjem, po drugi strani pa zavarovalnice ponujajo kompleksne zavarovalne (oziroma finančne) produkte, ki pogosto vsebujejo opcije in garancije različnih oblik.

Mnogo življenjskih zavarovalnic ponuja produkte z minimalno garantirano obrestno mero. V splošnem obstajata dve vrsti omenjene garancije. *Garancija ob doživetju* zavarovalcu zagotavlja minimalno stopnjo donosnosti skozi zavarovalno dobo do izteka zavarovalne pogodbe. Z *multi-periodno garancijo* se zavarovalna doba razdeli v periode (časovne intervale) znotraj katerih veljajo dogovorjene garancije obrestne mere. Zadnje pomeni, da se morebitni dobri začetni donosi ne izgubijo v obdobju slabih donosnosti. Zato ima takšna vrsta garancije za zavarovalca velik pomen, hkrati pa zavarovalnico izpostavi signifikantnemu finančnemu tveganju.

Po drugi strani zavarovalni produkti brez različnih opcij niso zanimivi za trg, saj danes potencialni zavarovalci želijo kupiti fleksibilen zavarovalni produkt, ki omogoča prilagajanje trenutnim potrebam zavarovalcev. Zavarovalnice v tem pogledu poleg cenovne vojne, tekmujejo tudi na področju ponujanja opcij ter garancij, vendar je potrebno poudariti, da imajo le te tudi svojo ceno, ki jo na koncu plačajo zavarovalci.

Vrednotenje in upravljanje opcij in garancij, ki so vgrajene v zavarovalne produkte, sta v današnjih časih eni izmed ključnih nalog zavarovalnic. Tako opcije kot garancije predstavljajo za zavarovalnice obveznosti, ki vplivajo na solventnost in morajo biti v tem pogledu ustrezno ovrednotene. Zgodovinsko gledano temu ni bilo tako, saj nekatere zavarovalnice niso upoštevale, da njihove zavarovalne police vsebujejo nekaj komponent, ki bi morale biti vrednotene posebej. Po drugi strani je bila vrednost opcij in garancij, vgrajenih v zavarovane pogodbe, ob sklenitvi zavarovalne pogodbe zanemarljiva v primerjavi s stroški samega procesa vrednotenja ali pa je sam proces vrednotenja takšnih polic zahteval kompleksne analitične metode kot tudi ustrezno informacijsko podporo (Homer, 2005).

V luči trenutnih ekonomskih razmer in sprememb zakonodaje so zavarovalnice pragmatično pristopile k ustreznemu vrednotenju zavarovalnih pogodb, predvsem k ustreznemu upravljanju opcij in garancij, vgrajenih v zavarovalne pogodbe. Danes so zavarovalnice izpostavljene nizkim obrestnim meram, kar tudi pomeni izziv za doseganje garancije minimalne obrestne mere. Kot rezultat omenjenega dejstva se zavarovalnice lahko soočajo s solventnostnimi problemi.

1.1.3 Vrednotenje obveznosti pod Direktivo Solventnost II

Direktiva 2009/138/ES (Ur. l. EU, št. L 335/1, 2009, v nadaljevanju Direktiva Solventnost II) predstavlja nov zakonodajni okvir za zavarovalniško industrijo. Direktiva, ki naj bi se prvotno vpeljala konec leta 2012, je bila jeseni 2012 prestavljena v leto 2014 in kasneje v leto 2016, pri čemer se leti 2014 in 2015 štejeta za pripravljalno obdobje za vpeljavo Direktive Solventnost II. Skupek pravil, ki jih vpeljuje Direktiva Solventnost II, predstavlja mnogo novih ter dodatnih zahtev za zavarovalnice glede kapitalskih zahtev, sistema vodenja (po)zavarovalnice, kakor tudi sistema upravljanja s tveganji ter sistema skladnosti in transparentnosti.

Direktiva Solventnost II sestoji iz treh stebrov, pri čemer prvi steber vsebuje kvantitativne zahteve (na primer način vrednotenja sredstev in obveznosti ter način izračunavanja kapitalske zahteve). Drugi steber vsebuje kvalitativne zahteve (na primer kako naj se upravlja in vodi tveganja, kakor tudi sam nadzor nad zavarovalnicami). Tretji steber postavlja zahteve za razkritja in transparentnost (na primer poročanje nadzorniku).

Prvi steber Direktive Solventnost II definira dva nivoja kapitalske zahteve: minimalno kapitalsko zahtevo (v nadaljevanju MCR) in solventnostno kapitalsko zahtevo (v nadaljevanju SCR). MCR tako predstavlja absolutni minimalni kapital, ki ga mora imeti zavarovalnica. V primeru, da kapital zavarovalnice pade pod MCR, bo nadzornik ukrepal zelo strogo. SCR predstavlja zahtevan nivo kapitala, ki naj bi ga imela zavarovalnica in se ga lahko izračuna ali z uporabo standardne formule ali pa z uporabo notranjega modela, ki ga mora predhodno odobriti nadzornik.

Da bi izračunali kapitalske zahteve zavarovalnice, moramo med drugim izračunati tudi vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij. Zavarovalno-tehnične rezervacije predstavljajo znesek, ki ga mora imeti zavarovalnica, da bi zadostila vse pričakovane prihodnje obveznosti iz zavarovalnih pogodb. Zavarovalno-tehnične rezervacije vsebujejo tveganja, ki jih lahko zaščitimo s finančnimi instrumenti, in tveganja, katerih s temi instrumenti ne moremo zaščititi. Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij za tveganja, ki jih ne moremo zaščititi, je enaka vsoti najboljše ocene pričakovanih obveznosti in dodatka za tveganje.

Zavarovalna industrija je bila povabljena k sodelovanju v tako imenovanih kvantitativnih študijah učinkov (v nadaljevanju QIS), pri čemer se je peta študija (QIS5) izvedla jeseni 2010. Študije so Evropski komisiji omogočile vpogled in ideje, kako bo predlagana zakonodaja vplivala na industrijo in še posebej na potreben nivo kapitala, ki ga bodo morale imeti zavarovalnice. Za vrednotenje sredstev in obveznosti pod Solventnostjo II je Evropska komisija za namen pete študije v juniju 2010 izdala tudi *QIS5 Tehnične specifikacije*.

Poudariti je treba, da je QIS5 študija ustvarjena za testne namene, da bi zagotovili čim večjo pravilnost okvirja Solventnost II ob vpeljavi le-tega. Zadnje pomeni, da podatki zapisani v QIS5 Tehničnih specifikacijah ne odražajo nujno dejanskega učinka vpeljave Direktive Solventnost II. Kljub vsemu, pa gre pričakovati, da drastičnih sprememb metod, predlaganih v QIS5 Tehničnih specifikacijah, ne bo.

Po QIS5 Tehničnih specifikacijah je najboljša ocena zavarovalno-tehničnih rezervacij, z verjetnostjo uteženo povprečje prihodnjih denarnih tokov, diskontiranih na sedanjo vrednost. V specifikacijah so predlagane tri metode za izračunavanje najboljše ocene, in sicer analitične tehnike, deterministične tehnike in simulacijske tehnike.

Uporaba analitične tehnike pomeni, da mora zavarovalnica poiskati končno obliko rešitev za izračun najboljše ocene. Primer analitičnih tehnik je lahko za vrednotenje garancij kar izračun stroškov za popolno kritje garancije. Drug primer je predpostavka, da prihodnje škode sledijo določeni verjetnostni porazdelitvi.

Z uporabo deterministične tehnike projekcija denarnih tokov temelji na fiksni množici predpostavk. Primeri determinističnih tehnik so testiranje scenarijev in stres testi, za aktuarsko delo pa aktuarske metode kot npr. ChainLadder metoda.

Simulacijska tehnika pomeni uporabo stohastičnega modela za generiranje prihodnjih scenarijev. Pri uporabi omenjene tehnike ni potrebno, da generiramo vse mogoče prihodnje scenarije. Kljub vsemu je potrebno zagotoviti reprezentativnost vzorca uporabljenih scenarijev.

Za omenjeno kalkulacijo se lahko uporabijo tudi druge metode, vendar morajo le-te zadostiti določenim kriterijem. Kot primer lahko navedemo, da morajo biti ali aktuarske ali statistične metode, ki upoštevajo tveganja prihodnjih denarnih tokov. Simulacijske tehnike se praviloma uporabljajo za izračun najboljše ocene zavarovalno-tehničnih rezervacij za zavarovalne pogodbe z vgrajenimi opcijami in garancijami. Deterministični in analitični pristopi so bolj primerni za izračun najboljše ocene ne-življenjskih obveznosti kot tudi za življenjske obveznosti brez opcij in garancij.

1.1.4 Zakonsko vrednotenje obveznosti iz zavarovalnih pogodb

Osnova zakonskega oziroma statutarnega vrednotenja obveznosti iz zavarovalnih pogodb je podana v Zakonu o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 13/2000 s spremembami, v nadaljevanju Zakon). V 113. členu Zakona je podana obveza oblikovanja ustreznih zavarovalno-tehničnih rezervacij glede na vrste poslov, ki jih zavarovalnica opravlja.

Če se omejimo na posle življenjskih zavarovanj, mora zavarovalnica v skladu s 113. členom Zakona oblikovati tudi matematične rezervacije. Oblikovanje in izračun matematičnih rezervacij je opredeljeno v 117. členu Zakona. Dodatno k temu so v Sklepu o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij (Ur. l. RS, št. 3/2001 s spremembami, v nadaljevanju Sklep) opredeljena podrobnejša pravila in minimalni standardi za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij, posledično tudi za izračun matematičnih rezervacij.

V 10. členu Sklepa je opredeljeno vrednotenje matematičnih rezervacij oziroma dolgoročnih obveznosti, razen tistih, ki so zapadle pred dnevom vrednotenja. Vrednotenje se izvaja po aktuarskih načelih, ki temeljijo na razumnih pričakovanjih zavarovalcev in obveznostih zavarovatelja. Obveznosti zavarovatelja so izračunane na previdnih predpostavkah, ki vključujejo primerne presežke (varnostne dodatke) za morebitna neugodna odstopanja upoštevanih faktorjev. Vrednotenje dolgoročnih obveznosti upošteva vse prihodnje obveznosti zavarovatelja, določene s splošnimi in posebnimi pogoji za vsako posamezno zavarovalno pogodbo, pri kateri je po Zakonu potrebno oblikovati matematične rezervacije, upoštevajoč premije, ki bodo še plačane. Pri vrednotenju dolgoročnih obveznosti se med drugim upošteva:

- vsa zajamčena izplačila, do katerih je zavarovanec upravičen, vključno z zajamčeno odkupno vrednostjo;
- vse bonuse oziroma dobičke, do katerih je zavarovanec upravičen bodisi samostojno bodisi skupaj z drugimi zavarovanci, ne glede na to, v kakšni obliki so izraženi;
- vsa upravičenja, med katerimi lahko zavarovanec izbira na podlagi zavarovalne pogodbe;
- stroške, vključno s provizijo za sklepanje pogodb.

Vrednotenje dolgoročnih obveznosti je potrebno izvesti v skladu z določili 11. do 19. člena Sklepa, ki opredeljujejo podrobnosti posameznih sestavin vrednotenja.

Zavarovalnice so po drugi strani dolžne poročati oziroma sestavljati finančna poročila in izkaze v skladu z mednarodnimi standardi finančnega poročanja, kar je opredeljeno v Zakonu o gospodarskih družbah (Ur. l. RS, št. 42/2006 s spremembami). Tako je ne glede na zakonske zahteve o vrednotenju obveznosti potrebno, v skladu z Mednarodnim standardom računovodskega poročanja 4 (v nadaljevanju MSRP 4), izvesti test ustreznosti oblikovanih obveznosti. Zahteva za izvedbo testa za zavarovalne pogodbe je podana v MSRP 4.15-19. V MSRP 4.35 je zahtevana tudi izvedba testa za finančne pogodbe z možnostjo diskrecijske udeležbe, vendar je izvedba odvisna od obravnave diskrecijske udeležbe (kot obveznost ali kot kapital). Zavarovatelj ob vsakem poročanju ugotovi, ali so njegove pripoznane zavarovalne obveznosti ustrezne. Pri tem uporablja trenutne ocene prihodnjih finančnih tokov iz zavarovalnih pogodb. Test je treba izvesti na vsak obračunski datum in se izvaja v takem obsegu, da lahko utemeljimo ustreznost obveznosti.

1.1.5 Sklep

Vrednotenje zavarovalnih pogodb predstavlja zavarovalnicam tako danes, kot tudi v prihodnosti, velik izziv. Poleg opcij in garancij, ki so zgodovinsko gledano pridobile na pomenu tudi z razvojem mednarodnih standardov računovodskega poročanja in same zavarovalniške zakonodaje, je ključna točka razvoja vrednotenja preskok iz tradicionalnega oziroma zakonskega aktuarskega izračunavanja obveznosti iz zavarovalnih pogodb na tako imenovani tržno konsistentni način vrednotenja preko denarnih tokov, kar je določeno tako v Direktivi Solventnost II kot tudi v predlogu sprememb MSRP 4. Korak dlje je integracija stohastičnih modelov obrestnih mer v določen model zavarovanja, kar je glavna tema doktorske disertacije.

Začetek razmišljanja v omenjeno smer lahko postavimo v leto 1995, ko je švicarski zavarovalni nadzornik poskušal določiti aktuarske smernice. Tako je delovna skupina pod vodstvom profesorja Embrechtsa med drugim definirala izzive za prihodnost, med katerimi najdemo tudi stohastične modele za obrestne mere.

Uporaba stohastičnih obrestnih mer pri vrednotenju zavarovalnih pogodb je zagotovo radikalna poteza, vendar jo omili dejstvo, da so slovenska finančna podjetja privzela prenovljene mednarodne standarde računovodskega poročanja, ki za namen vrednotenja v zavarovalnicah predpostavljajo zelo kompleksne stohastične modele (princip poštene oziroma tržno konsistentne vrednosti). Uporaba stohastičnih obrestnih mer intuitivno v večini primerov poveča tveganje, vendar modeli bolj realno ponazarjajo dejansko tveganje iz zavarovalnih pogodb. Koncept same vpeljave stohastičnih modelov obrestne mere v model vrednotenja zavarovanj bodo v prihodnosti določali lastniki zavarovalnic s svojo (ne)naklonjenostjo tveganjem v kontekstu Direktive Solventnost II, po kateri bodo zavarovalnice morale opredeliti apetit po tveganju. Le-ta bo poleg gibanja kapitalskega trga zajeta v modelih za vrednotenje.

1.2 Cilj in namen dela

Vpeljava stohastičnih modelov obrestnih mer v vrednotenje zavarovanj oziroma v sam model zavarovanja predstavlja široko področje raziskovanja. Uporabijo se lahko različni stohastični modeli obrestnih mer, pri čemer je pomembno meriti tveganje, ki ga ti modeli vnašajo v samo ceno zavarovanja. Še posebej je pomembna primerjava pričakovane sedanje vrednosti takšnega zavarovanja oziroma njegove cene (premije) s klasičnim načinom vrednotenja (Norberg: [47],[49],[51], Slapar: 2006).

Modele obrestnih mer v splošnem razdelimo na dve skupini, in sicer na ravnotežne modele in na modele brez arbitraže (Cairns, 2004). Ravnotežni modeli so zgrajeni na predpostavkah o delovanju ekonomskega okolja. Upoštevajo se investitorjeva nagnjenja k tveganju in težijo k ravnotežju med ponudbo obveznic in drugih vrednostnih papirjev ter povpraševanjem investitorjev. Tako se v tem kontekstu raziskuje vpliv ekonomskega okolja na krivuljo obrestnih mer. Pri enofaktorskih modelih to preprosto pomeni konstrukcijo preprostega stohastičnega modela, ki opisuje razvoj netvegane obrestne mere. Modeli brez arbitraže kot začetno točko uporabljajo krivuljo terminskih obrestnih mer v trenutnem času. Tako je krivulja obrestnih mer, ki velja v trenutku izračuna, osnova za izračun parametrov modela. Prihodnje cene finančnih instrumentov (ki jih modeliramo) se tako razvijajo konsistentno z začetno krivuljo obrestnih mer, ki je brez arbitraže. Takšni modeli se uporabljajo za določanje cen predvsem kratkoročnih izvedenih finančnih instrumentov.

Glavni namen doktorske disertacije je zapisati matematičen model, na podlagi katerega bo možno po eni strani izvesti tržno konsistentno vrednotenje določenega zavarovanja in hkrati izmeriti določeno tveganje, ki ga dodajo stohastične obresti. Zadnje tudi odloča o sami uporabnosti izpeljanih modelov v praksi.

Končni cilj doktorske disertacije je z razvitimi modeli neposredno preveriti trditev Hansa Gerberja (Gerber, 1996, str. 67), ki trdi, da modeliranje obrestnih mer s stohastičnimi procesi pri vrednotenju življenjskih zavarovanj ni smiselno. Za rešitev te naloge obstaja več možnih pristopov v smislu različnih modelov obrestnih mer.

Osnovna hipoteza doktorske disertacije je: "Uporaba stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, ki so modelirana preko markovskih procesov, ima direkten vpliv na ceno zavarovanja, kar pomeni, da lahko uporaba stohastičnih modelov pri vrednotenju zavarovanj pripelje do nižje ali višje cene zavarovanja v primerjavi s tradicionalnim pristopom vrednotenja zavarovanj." Posledično se postavlja vprašanje: "Ali so stohastični modeli obrestnih mer dovolj zanesljivi, da lahko na dolgi rok (deset in več let) ustrezno nadomestijo klasično metodo vrednotenja zavarovalnih produktov, pri kateri se uporablja fiksno obrestno mero?"

Zgornje trditve izpodbija razvoj teorije stohastičnih modelov obrestnih mer v povezavi z življenjskimi zavarovanji, ki se razvija dnevno in je od leta, ko so bile zapisane zgornje trditve, doživela razcvet. To konec koncev potrjuje tudi razvoj samega zakonodajnega okvirja vrednotenja zavarovalnih obveznosti (na primer: Solventnost II in prihajajoči MSRP 4, faza 2). Več o sami uporabi stohastičnih modelov obrestnih mer je na primer navedeno v (Siegl, 1997, Persson, 1998, Bühlmann, 2000, Mao, 2000, Bacinello, 2003, Poncet, 2003, Gaillardetz, 2008, Zaglauer, 2008 Wuethrich, 2010, Paetzmann, 2011, Koller, 2012, Devolder, 2015)

Analitični prispevek doktorske disertacije se osredotoča na združevanje več stohastičnih procesov znotraj enega modela, pri čemer je predpostavljena neodvisnost slučajnih spremenljivk. Konkretno so izpeljane enačbe za Vasičkov in druge modele obrestne mere pod predpostavkami konstantnosti ali slučajnosti obrestne mere znotraj posameznega leta, s čimer se pri modelu vrednotenja obveznosti posameznih oblik življenjskih zavarovanj izračuna konkretne vrednosti obveznosti. Omenjeno se presoja s stališča različnih oblik finančnega poročanja, kar prispeva k vpogledu razlik med posameznimi oblikami finančnega poročanja.

1.3 Metodologija

Doktorska disertacija vsebuje teoretičen vidik obravnavane problematike tržno konsistentnega vrednotenja zavarovanj, kot tudi praktičen primer uporabe teorije. Metode dela tako temeljijo na uporabi teorije modeliranja, stohastičnih procesov, novejših trendov v aktuarstvu ter finančni matematiki, pri čemer se uporabljajo metode kompilacije, deskripcije, komparacije in sinteze.

Za preverjanje osnovne hipoteze so uporabljene predvsem metode matematičnega modeliranja, verjetnostnega računa in matematični metodi analize in sinteze, s čimer se teoretično izpelje modele in nato uporabi empirični postopek izračunavanja pričakovane neto sedanje vrednosti izbranega zavarovanja pri stohastičnih modelih obrestnih mer in primerjava le-te z vrednotenjem po tradicionalni metodi (t.j. z uporabo fiksne obrestne mere).

Pri prikazu rezultatov je uporabljena metoda simulacije in komparacije.

V doktorski disertaciji je uporabljeno izrazoslovje, ki je značilno za aktuarsko ter matematično stroko in zavarovalništvo.

1.4 Znanstveni prispevek dela

Znanstveni prispevek doktorske disertacije in samega teoretičnega raziskovanja temelji na proučevanju in dokazovanju osnovne hipoteze. Za izvedbo samega preizkusa hipoteze so uporabljene klasične oblike življenjskih zavarovanj, ki jih ekvivalentno aktuarski izpeljavi, lahko definiramo s pomočjo markovskih procesov. Tako je dokazana ekvivalenca med modelom preživetja, ki je osnova za vse klasične oblike življenjskih zavarovanj, in ustreznim markovskim procesom.

Osrednji izziv za raziskovalno delo, prikazano v doktorski disertaciji, je vpeljava slučajne komponente v izračun pričakovane neto sedanje vrednosti določenih zavarovanj v duhu tržno konsistentnega vrednotenja in analiza rezultatov ob različnih vrednostih vhodnih podatkov.

Ob različnih vrednostih vhodnih parametrov je izmerjena občutljivost obeh načinov izračuna pričakovane sedanje vrednosti zavarovanj, torej klasičnega vrednotenja s konstantno obrestno mero in vrednotenja s slučajno obrestno mero. Na osnovi rezultatov je podan zaključek, ki nakazuje, v katerih primerih tveganje slučajnih modelov obrestnih mer prevzame zavarovalnica in v katerih zavarovalec.

Primerjava obeh načinov vrednotenja poda tudi odgovor o uporabnosti stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, predvsem z vidika zavarovalnih pogodb, iz katerih ima zavarovalnica dolgoročne obveznosti, kar je tudi zgoraj navedeni cilj doktorske disertacije.

1.5 Struktura dela

V drugem poglavju so predstavljene osnovne oblike zavarovanj, ki so kasneje zajeta v analizo. Nakazana so aktuarska izhodišča, katera predstavljajo osnovo za kasnejša poglavja, na primer problematika modeliranja, osnovna aktuarska in finančna matematika. Predstavljena izhodišča so obravnavana v (Gerber, 1997, Denuit, 2005 ter Norberg, 2001).

Sledijo tri poglavja, sicer po vsebini neodvisna, vendar je v vsakem poglavju nakazana implikacija na zavarovanja. Tako so v tretjem poglavju predstavljeni markovski procesi kot ena izmed možnosti implementacije stohastičnih procesov. Z markovskimi procesi se teoretično da zapisati večino zavarovanj, kar je tudi predstavljeno. Teoretičen del je del literature za angleški aktuarski študij in je predstavljen v *Core Reading 103 - Stochastic Modelling*.

V četrtem poglavju so sistematično predstavljeni modeli obrestnih mer in osnove generatorja ekonomskih scenarijev, ki se uporabljajo pri vrednotenju časovne komponente opcij in garancij. Ker se teorija na tem področju razvija dnevno, so prikazani razviti modeli od najpreprostejših do bolj kompleksnih modelov obrestnih mer. Teorija je črpana iz (Babbel 1997, 1998, 1998b, Merrill, 1997, Cairns, 2004 in Baldvinsdottir, 2011).

V petem poglavju je predstavljena teorija izbire krivulj obrestnih mer za različne načine finančnega poročanja, ki je povzeta iz osnutka monografije Mednarodnega aktuarskega društva *Issues Associated with the Determination of Discount Rates for Financial Reporting Purposes.* Podrobno je opredeljeno vrednotenje zavarovalnih obveznosti po Direktivi Solventnost II in po zakonskih zahtevah ter MSRP 4.

V šestem poglavju so izpeljani teoretični modeli za vrednotenje osnovnih oblik zavarovanj ob predpostavki vpeljave stohastičnih modelov obrestnih mer. Predstavljeni so enostavni in bolj kompleksni stohastični modeli obrestnih mer.

V sedmem poglavju je predstavljena sinteza rezultatov, s poudarkom na primerjavi med tradicionalnim modelom vrednotenja zavarovanj in modelom vrednotenja s stohastično obrestno mero v kontekstu izbire krivulje obrestnih mer za različne načine finančnega poročanja. Prikazana je tudi kalibracija stohastičnih modelov obrestnih mer z namenom uporabe tržno konsistentnega vrednotenja ter vpliv časovne komponente opcij in garancij na vrednost zavarovalne pogodbe.

Delo je zaključeno s sklepom in seznamom literature in virov.

2 AKTUARSKA IZHODIŠČA

Razvoj finančne matematike vpliva tudi na razvoj aktuarske stroke, kar se kot posledica pozna v novih zakonodajnih zahtevah v smislu novih aktuarskih pristopov k vrednotenju zavarovalnih pogodb ali po drugi strani v prihajajočih zahtevah mednarodnih standardov finančnega poročanja. Tako so se včasih aktuarji ukvarjali zgolj z upravljanjem in kontrolo tveganj, ki izhajajo iz zavarovalnega portfelja, hkrati pa je bilo zavarovalništvo kot panoga omejeno na stroge institucionalne okvirje (zelo eksplicitno definirana zakonodaja). V premiji je bila vključena tudi verjetnost obrata ekonomije (inflacija, nizke obrestne mere, nelikvidnost ...), dobički, ki so izhajali iz takšnega načina poslovanja so se delili delničarjem v obliki bonusov ter dividend in kot panoga je bilo zavarovalništvo zaščiteno pred konkurenco ter ločeno od ostalih panog. V omenjenih, zelo zaprtih, okoliščinah je jasno, da se aktuarji niso ukvarjali z upravljanjem ostalih tveganj (tržna tveganja, tveganja neplačila poslovnih partnerjev, operativna tveganja ...), hkrati pa je bila teorija za omenjeno področje slabo razvita (Norberg, 2001, str. 74).

Danes, ko se srečujemo s posledicami finančne krize, je slika povsem drugačna. Banke in zavarovalnice se v procesu optimizacije kapitalskih zahtev združujejo, novi, bolj transparentni zavarovalniški produkti se razvijajo dnevno, ostale finančne institucije ponujajo zavarovalne produkte (večinoma kot pogoj za sklenitev njihovih finančnih produktov), konkurenca je močneja, vse našteto pa ima neposreden vpliv na višino premije posameznega zavarovalnega produkta. Večina novejših zavarovalnih/finančnih produktov (oziroma delov le-teh) je vezanih na moderno finančno matematiko – katastrofične obveznice, zavarovalne police z naložbenim tveganjem, hibridi ..., saj se tako z vidika zakonodaje kot računovodskih standardov pričakuje zelo eksplicitne izračune. Vsi omenjeni faktorji so pripomogli k temu, da so aktuarji začeli z upravljanjem ter kontrolo še ostalih tveganj (predvsem tržnih tveganj) in so razvili različne modele, na osnovi katerih se napoveduje prihodnji denarni tok zavarovalnice (Daykin, 1994).

2.1 Stohastični modeli

Aktuarsko modeliranje je postalo temelj tako zavarovalništva kot bančništva. Matematični modeli, ki jih aktuarji uporabljajo pri svojem delu, predstavljajo ključno orodje za ocenjevanje tveganj in vrednotenje zavarovalnih pogodb. Večinoma gre za vprašanje sedanje vrednosti prihodnjih slučajnih dogodkov (plačilo premije, izplačilo obveznosti iz zavarovanih pogodb, poplačilo stroškov ...) (Atkison, 2000, Belič, 1997, Gubta, 2005).

V strokovni literaturi se pri aktuarskih in ostalih operacijskih raziskovanjih velikokrat pojavlja metoda markovskih procesov. Kadar nas zanima, kako se slučajne spremenljivke spreminjajo skozi čas, je ena od možnih metod analize uporaba markovskih procesov. V svoji diskretni varianti je markovski proces uporaben pri reševanju konkretnih problemov na različnih področjih: trženju, financah, računovodstvu, šolstvu, zdravstvu ...

Model je v splošnem posnetek nekega dejanskega sistema ali procesa. Modeliramo lahko različne stvari, na primer kapitalsko ustreznost zavarovalnice, poslovni rezultat zavarovalnice, dobičkonosnost zavarovalnega produkta, ki ga mislimo začeti prodajati, ali, v skrajnem primeru, verjetnost propada zavarovalnice. Seveda lahko modeliramo tudi procese, ki niso v direktni povezavi z zavarovalništvom, na primer ekonomijo države, delovanje človeških organov ter mnogo drugih realnih sistemov oziroma procesov iz vsakdanjega življenja.

Model je odvisen od množice matematičnih ter logičnih predpostavk oziroma parametrov (Booth, 1999, str. 593). Kompleksnost modela je določena s kompleksnostjo povezav med parametri. Pri modeliranju življenjske zavarovalnice moramo definirati povezave med zakonodajo, davčno politiko ter zavarovalnimi pogoji in nenazadnje obnašanjem vseh deležnikov (delničarji, zavarovalci, zaposleni oziroma management zavarovalnice) v procesu, ki ga želimo modelirati. To je na prvi pogled nemogoča naloga. Kompleksnost povezav je v tem primeru odvisna tudi od prihodnjih dogodkov, ki bodo vplivali na obrestne mere, inflacijo, umrljivost, stroške poslovanja, obseg poslovanja ...

Modeli in analiza njihovih rezultatov nam omogočata, da se spremembe vrednosti določenih parametrov prouči, še preden jih implementiramo v realnosti.

Modeli imajo vitalno vlogo, saj nam nevede lajšajo življenje. Če bi želeli oceniti vpliv spremembe vrednosti nekega parametra na rezultate enega izmed zgornjih modelov, bi bilo to v realnem svetu preveč tvegano, predrago ali prepočasno. Vsekakor bi morali imeti v mislih posledice spremembe, če bi le-to izvedli brez predhodne analize rezultatov. Črni scenariji, ki bi se lahko zgodili, so naslednji:

- zavarovalnica bi lahko zašla v kapitalske ali poslovne probleme, pri čemer manjši dobički oziroma izguba posledično lahko pripeljejo do nesolventnosti oz. ne-likvidnosti, kar lahko zavarovalnico stane dovoljenja za opravljanje zavarovalnih poslov,

- namesto obljubljenega dobička, bi nam nov produkt prinesel izgubo, s čimer lastniki zavarovalnice ne bi bili zadovoljni,

- država bi zašla v recesijo, kar bi vlado stalo določenega števila glasov na prihodnjih volitvah,

- pacient lahko umre, če bi uporabili model, ki napačno simulira na primer utrip srca.

Prednosti in slabosti določenega modela se pokažejo v praksi, vendar je le-te možno opredeliti še pred samo implementacijo modela v realni svet. S pomočjo korakov modeliranja lahko že narejeni model izboljšamo oziroma prilagodimo dejanskim zahtevam. Koraki modeliranja nam tako služijo kot opora pri definiranju in izdelavi novega modela. Več o korakih modeliranja je opredeljeno v (Core Reading 103, 2000, Tomažin, 2005).

Na splošno se lahko med največje prednosti modeliranja šteje možnost analiziranja procesa oziroma sistema, ki deluje, ali bo deloval veliko let (na primer pokojninska ali življenjska zavarovanja), v zelo kratkem času, kar je seveda pogojeno z ustrezno informacijsko podporo. Kljub vsemu se je potrebno zavedati, da modeli ne dajejo enostavnih odgovorov na vsa aktuarska in finančna vprašanja (Booth, 1999, str. 595). Obstajajo omejitve, ki jih moramo razumeti, ko interpretiramo rezultate, oziroma, ko jih posredujemo strankam.

V splošnem si želimo, da bi realnost čim bolj natančno zajeli oziroma implementirali v modelu. Model mora zajemati lastnosti, ki jih opisujejo slučajne spremenljivke. V takšnem primeru govorimo o stohastičnih modelih, ki po definiciji upoštevajo slučajnost svojih vhodnih komponent. Modeli, ki ne vsebujejo nobenih slučajnih komponent, so po svoji naravi vnaprej določeni oziroma deterministični.

Rezultate pri determinističnemu modelu dobimo takoj, ko definiramo množico fiksnih vhodnih parametrov in njihovih povezav. Nasprotno je pri stohastičnem modelu rezultat slučajen, kot so vhodni podatki, ki so praviloma slučajne spremenljivke. Tako rezultat v tem primeru opišemo z verjetnostno porazdelitvijo.

2.2 Model življenjskih zavarovanj

Matematična formulacija zavarovalniških produktov (zavarovanj) kot tudi sama konstrukcija modelov, ki opisujejo različna zavarovanja, poteka v verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, pri čemer je Ω vzorčni prostor, $\mathcal{F}$ je σ-algebra in P je verjetnostna mera. Verjetnostni prostor tako določa okvirje vseh naslednjih definicij, izrekov ter izpeljav. Pri izpeljavi le teh se je izhajalo iz (Gerber, 1997).

Model pričakovane življenjske dobe, oziroma model preživetja, je začetna točka modeliranja v aktuarstvu na področju življenjskih zavarovanj (Norberg, 2004).

Model temelji na dejstvu, da nam pričakovana življenjska doba opazovane osebe ni znana, oziroma je slučajna, kar nam potrjuje tudi sam življenjski tok. Definirajmo slučajno spremenljivko T kot prihodnjo življenjsko dobo novorojene osebe. Slučajna spremenljivka T je zvezna na intervalu $[0, \omega]$, pri čemer je $0 < \omega < \infty$ in ω predstavlja maksimalno starost ljudi, ki je bila zabeležena.

Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T označimo s $F(t)$,

$$F(t) \;=\; \mathrm{P}(T \leq t),\; t \geq 0. \tag{2.1}$$

Tako za vsak (čas) t porazdelitvena funkcija $F(t)$ predstavlja verjetnost, da bo novorojena oseba umrla v naslednjih t letih. Verjetnost nasprotnega dogodka, da bo novorojena oseba preživela naslednjih t let, predstavlja tako imenovana funkcija preživetja

$$S(t) \;=\; \mathrm{P}(T > t) = 1 - F(t). \tag{2.2}$$

Obe funkciji določata porazdelitev slučajne spremenljivke T in velja $F(t)+S(t) = 1$. Funkcija preživetja $S(t)$ se uporablja v aktuarstvu in demografiji, saj se na samo preživetje vežejo različni opazovani procesi oziroma izplačila denarnih nadomestil (zavarovalnih vsot). Po drugi strani se v teoriji verjetnosti in statistiki po sami definiciji uporablja porazdelitvena funkcija $F(t)$ (Bowers, 1986).

Pri vrednotenju zavarovalniških produktov in modeliranju imamo v praksi opravka z osebo staro x let – potencialni zavarovanec. V tem primeru označimo prihodnjo življenjsko dobo x let stare osebe s T_x, kjer je $0 \leq x \leq \omega$. T_x je tudi zvezna slučajna spremenljivka, saj je prihodnja življenjska doba x let stare osebe prav tako slučajna in nam ni znana.

Podobno definiramo porazdelitveno funkcijo in funkcijo preživetja za slučajno spremenljivko T_x. Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_x označimo s $F_x(t)$,

$$F_x(t) \;=\; \mathrm{P}(T_x \leq t),\; t \geq 0,\; 0 \leq x \leq \omega. \tag{2.3}$$

Porazdelitvena funkcija $F_x(t)$ tako predstavlja verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v naslednjih t letih. Funkcija preživetja je v tem primeru definirana s

$$S_x(t) \;=\; \mathrm{P}(T_x > t),\ t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \omega. \tag{2.4}$$

Tudi v tem primeru velja, da obe funkciji določata porazdelitev slučajne spremenljivke T_x in $F_x(t) + S_x(t) = 1$.

V nadaljevanju privzemimo, da je porazdelitvena funkcija $F_x(t)$ zvezna funkcija in s $f_x(t)$ označimo verjetnostno gostoto. Tako izraz

$$f_x(t)\ dt \;=\; \mathrm{P}(t < T_x < t + dt), \tag{2.5}$$

predstavlja verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v starosti med $x + t$ in $x + t + dt$, oziroma v neskončno majhnem (infinitezimalnem) časovnem intervalu pri t.

S pomočjo funkcij $F_x(t)$ in $f_x(t)$ lahko izrazimo poljubne verjetnosti, momente in druge vrednosti, ki nas zanimajo. V aktuarskih in tudi statističnih krogih so se udomačile oznake, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. Tako s ${}_tq_x$ označimo verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v naslednjih t letih, s ${}_tp_x$ označimo verjetnost nasprotnega dogodka, torej da bo x let stara oseba preživela naslednjih t let. V primeru, ko je $t = 1$, indeks t v simbolih ${}_tq_x$, ${}_tp_x$, ${}_{s|t}q_x$ običajno izpustimo. Sledita relaciji

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= F_x(t), &(2.6)\\
{}_tp_x &= S_x(t). &(2.7)
\end{aligned}
$$

S pomočjo povezav med $F_x(t)$, $S_x(t)$, $F(t)$ in $S(t)$ lahko zapišemo mnogo enakosti in izpeljav. Pomembni enakosti sta

$$
\begin{aligned}
{}_{s+t}p_x &= S_x(s+t) = (1 - F_x(s))\frac{1 - F_x(s+t)}{1 - F_x(s)} = {}_sp_x\ {}_tp_{x+s}, &(2.8)\\
{}_{s|t}q_x &= F_x(s+t) - F_x(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x = {}_sp_x\ {}_tq_{x+s}. &(2.9)
\end{aligned}
$$

Prva enakost pomeni, da je verjetnost preživetja x let stare osebe nadaljnjih $s+t$ let enaka produktu verjetnosti preživetja x let stare osebe s let in verjetnosti, da bo opazovana oseba, zdaj stara $x+s$ let, preživela še nadaljnjih t let. Druga enakost prikazuje tako imenovano odloženo verjetnost smrti, ki jo lahko izračunamo kot produkt verjetnosti preživetja x let stare osebe s let in verjetnosti smrti $x+s$ let stare osebe v naslednjih t letih.

Matematično upanje slučajne spremenljivke T_x označimo z $\mathring{e}_x$. Matematično upanje predstavlja pričakovan preostanek življenjske dobe x let stare osebe. Po definiciji matematičnega upanja velja

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t f_x(t)\, dt. \tag{2.10}$$

Z uporabo porazdelitvene funkcije ga zapišemo kot

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty [1 - F_x(t)]\, dt = \int_0^\infty {}_tp_x\, dt. \tag{2.11}$$

2.2.1 Jakost smrtnosti

Jakost smrtnosti je količina, ki ima v modelu preživetja osrednjo vlogo. Laično jakost smrtnosti predstavlja hitrost umiranja oseb v določenem časovnem intervalu. Jakost smrtnosti x let stare osebe (v starosti x let) definiramo kot

$$\mu_x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}(T \le x + h | T > x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathrm{P}(T_x \le h), \tag{2.12}$$

pri čemer predpostavljamo, da limita obstaja. Za majhne vrednosti h izraz preide v

$${}_hq_x \simeq h\mu_x, \tag{2.13}$$

kjer smo upoštevali, da je verjetnost $\mathrm{P}(T \le x + h | T > x)$ enaka ${}_hq_x$. S tem smo dobili aproksimacijo vrednosti verjetnosti, da bo x let stara oseba umrla v zelo kratkem času h.

Jakost smrtnosti lahko izrazimo tudi s pomočjo porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke T

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathrm{P}(T \leq x+h|T>x) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)} \\
&= \frac{F'(x)}{1-F(x)} = -[\ln(1-F(x))]'. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Jakost smrtnosti x let stare osebe v starosti $x+t$ definiramo kot

$$\mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{1-F_x(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(1-F_x(t)), \qquad (2.15)$$

kar zapišemo z aktuarskimi simboli

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln\ {}_tp_x. \qquad (2.16)$$

Integracija in ustrezna preureditev (2.16) rezultirata v

$${}_tp_x = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}\ ds}, \qquad (2.17)$$

kar je ključna povezava med verjetnostjo preživetja in časom t, pri čemer smo pri integraciji upoštevali robni pogoj ${}_0p_x = 1$.

S pomočjo jakosti smrtnosti lahko zapišemo gostoto ter matematično upanje slučajne spremenljivke T_x. Gostota je enaka

$$\begin{aligned}
f_x(t) &= \frac{d}{dt}F_x(t) \\
&= -\frac{d}{dt}\ {}_tp_x \\
&= \mu_{x+t}\ {}_tp_x. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Posledično je matematično upanje slučajne spremenljivke T_x enako

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{e}_x &= \mathrm{E}(T_x) \\
&= \int_0^\infty t f_x(t)\ dt = \int_0^{\omega-x} t\mu_{x+t}\ {}_tp_x\ dt \\
&= -t\ {}_tp_x\Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\ dt \\
&= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\ dt. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

2.2.2 Model preživetja v splošnem

V prejšnjem razdelku smo definirali model preživetja in prišli do porazdelitve in ostalih verjetnostnih funkcij slučajne spremenljivke T_x. V splošnem pa slučajno spremenljivko T_x lahko obravnavamo v širšem smislu, tako da razširimo model, v katerem jo obravnavamo.

Oseba s pristopno starostjo x naj se nahaja v točno določenem stanju (stanje je odvisno od modela, ki ga obravnavamo). Oseba zapusti omenjeno stanje v času T_x zaradi enega od m medsebojno izključujočih vzrokov. Tako smo v bistvu definirali par slučajnih spremenljivk: T_x in J, pri čemer slučajna spremenljivka T_x prikazuje preostanek časa v specifičnem stanju (pristopna starost osebe v omenjeno stanje je x let) in slučajna spremenljivka J prikazuje vzrok izločitve.

V praksi se uporablja kar nekaj razširjenih modelov preživetja. Na primer pri življenjskem zavarovanju, ki krije tudi rizike težkih bolezni, je začetno stanje *zdrav*, ki preide v stanje *bolan* ali *mrtev*. Podobno je tudi invalidsko zavarovanje, kjer začetno stanje *aktiven* preide v stanje *invaliden* ali *mrtev*. Poznamo tudi variacijo modela preživetja, ki loči tip smrti: *smrt zaradi nezgode* in *smrt zaradi drugih vzrokov*. Zadnji model se uporablja tam, kjer se zaradi nezgodne smrti izplača večkratnik zavarovalne vsote (Promislow, 2006, Tomažin, 2005).

Model, ki smo ga opisali zgoraj, je podan s skupno porazdelitvijo slučajnih spremenljivk T_x in J. Skupno porazdelitev lahko opišemo z gostotami porazdelitev $f_{1,x}(t), \ldots, f_{m,x}(t)$, pri čemer je

$$
f_{j,x}\ dt = \mathrm{P}(t < T_x < t + dt,\ J = j), \qquad (2.20)
$$

verjetnost, da je izločitev med t in $t + dt$ posledica vzroka j. Velja

$$f_x(t) \quad = \quad f_{1,x}(t) + \cdots + f_{m,x}(t). \tag{2.21}$$

Z uvedbo aktuarskih oznak zapišemo

$${}_tq_{j,x} \quad = \quad \mathrm{P}(T_x < t,\ J = j) \tag{2.22}$$

ali splošno

$${}_tq_{j,x+s} \quad = \quad \mathrm{P}(T_x < s + t,\ J = j | T_x > s). \tag{2.23}$$

Podobno kot pri modelu preživetja omenjeno verjetnost izračunamo kot

$${}_tq_{j,x+s} \quad = \quad \int_s^{s+t} f_{j,x}(z) \frac{dz}{1 - F_x(z)}, \tag{2.24}$$

pri čemer je F_x porazdelitev za T_x in J.

V nadaljevanju bomo definirali jakost izločitve, s katero pridemo do porazdelitve T_x in J. Jakost izločitve osebe, stare x let, zaradi vzroka j je podana z

$$\mu_{j,x+t} \quad = \quad \frac{f_{j,x}(t)}{1 - F_x(t)} = \frac{f_{j,x}(t)}{{}_tp_x}. \tag{2.25}$$

Jakost izločitve dobimo podobno, kot gostoto porazdelitve

$$\mu_{x+t} \quad = \quad \mu_{1,x+t} + \cdots + \mu_{m,x+t}. \tag{2.26}$$

Izraz (2.20) zapišemo kot

$$\mathrm{P}(t < T_x < t + dt,\ J = j) \quad = \quad {}_tp_x\ \mu_{j,x+t}\ dt. \tag{2.27}$$

Zaključimo lahko s tem, da če so znane jakosti zaradi posameznih vzrokov, potem porazdelitev za T_x in J dobimo s pomočjo (2.26) in (2.17), s čimer določimo verjetnost ${}_tp_x$. Nato preko (2.25) dobimo $f_{j,x}(t)$.

Tretja možnost za definicijo porazdelitve T_x in J je preko števila dopolnjenih let v specifičnem stanju ($K_x = [T_x]$). Ob predpostavki, da so enoletne verjetnosti izločitve ($q_{j,x+k}$) znane (tablice izločitev), lahko definiramo porazdelitev za K_x in J.

Enoletne verjetnosti izločitve definiramo kot

$$q_{i,x+k} \quad = \quad \mathrm{P}(T_k + 1,\ J = j | T \geq k). \tag{2.28}$$

Skupna enoletna verjetnost izločitve je definirana

$$q_{x+k} \quad = \quad q_{1,x+k} + \cdots + q_{m,x+k}, \tag{2.29}$$

iz česar lahko izračunamo ${}_kp_x$. Sledi

$$\mathrm{P}(K_x = k,\ J = j) \quad = \quad {}_kp_x\ q_{j,x+k}, \tag{2.30}$$

za $k = 0, 1, \ldots$ in $j = 1, \ldots, m$.

Porazdelitev za T_x in J dobimo ob upoštevanju določenih predpostavk za verjetnost izločitve med letom. Pogosto se uporablja predpostavka, da je ${}_uq_{j,x+k}$ linearna funkcija argumenta u na intervalu $0 < u < 1$, k pa je naravno število (podobno kot pri modelu preživetja v razdelku 2.2). Torej

$${}_uq_{j,x+k} \quad = \quad u\ q_{j,x+k}. \tag{2.31}$$

Sledi

$$f_{j,x}(k+u) \quad = \quad {}_kp_x\ q_{j,x+k}, \tag{2.32}$$

kar pripelje do rezultata

$$\mu_{j,x+k+u} = \frac{q_{j,x+k}}{1 - u\ q_{x+k}}, \tag{2.33}$$

pri čemer smo uporabili formulo ${}_{k+u}p_x = {}_kp_x(1 - u\ q_{x+k})$. Prednosti predpostavke o linearnosti sta neodvisnost K_x in S_x ter enakomerna porazdelitev S_x med 0 in 1.

Zdaj lahko definiramo splošno zavarovanje. Predpostavimo, da plačilo zavarovalne vsote $c_{j,k+1}$ zapade na koncu leta $k+1$, če se je med letom zgodil dogodek j. Sedanja vrednost izplačila je slučajna spremenljivka

$$Z = c_{J,K_x+1}\ v^{K_x+1}, \tag{2.34}$$

pri čemer je v diskontni faktor pri letni efektivni obrestni meri r, $v = 1/(1+r)$.

Enkratna neto premija je enaka matematičnemu upanju slučajne spremenljivke Z, pri čemer dovolj velik portfelj zavarovancev omogoča zanesljivo aproksimacijo škod,

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k+1}\ v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{j,k+1}. \tag{2.35}$$

Definirali smo izraz za enkratno neto premijo splošnega zavarovanja, pri katerem se izplačilo zavarovalne vsote $c_{j,k+1}$ zgodi ob koncu leta, v katerem je nastal dogodek j. Na začetku razdelka smo našteli nekaj morebitnih dogodkov: smrt, invalidnost, upokojitev, bolezen ... V nadaljevanju se bomo omejili na zavarovanja, kjer je dogodek izločitve smrt ali doživetje.

2.3 Primeri življenjskih zavarovanj

Življenjska zavarovanja v teoriji in praksi razdelimo na kapitalska zavarovanja, življenjske rente ter zavarovanja, pri katerih zavarovalec prevzema določeno naložbeno tveganje. Ponekod v teoriji se med življenjska zavarovanja uvršča tudi zavarovanja, ki so vezana na stanje zavarovanca v smislu bolezni, odsotnosti z dela, starosti. Tako poznamo zavarovanje za določene hude bolezni, zavarovanje delovne nezmožnosti zaradi daljše bolezni ter zavarovanje za nego in oskrbo za stara leta (Atkinson, 2000, Gerber, 1996, Hoowaarts).

Pri kapitalskih zavarovanjih se zavarovalna vsota (obveznost zavarovalnice) običajno izplača v enkratnem znesku. V splošnem sta tako čas kot višina izplačila funkciji slučajne spremenljivke T_x, torej sta prav tako slučajni spremenljivki. Sedanjo vrednost izplačila označimo z Z, enkratno neto premijo pa predstavlja pričakovana sedanja vrednost slučajne spremenljivke Z, torej matematično upanje ($\mathrm{E}(Z)$). Seveda to ni pokazatelj tveganja, ki ga sprejme zavarovatelj. V ta namen je potrebno izračunati višje momente slučajne spremenljivke Z. Pri izpeljavi spodnjih definicij se je izhajalo predvsem iz (Gerber, 1997).

Začeli bomo z zavarovanjem za primer smrti. Predpostavimo, da zavarovalna vsota c_j zapade v plačilo ob koncu leta, v katerem je nastopila smrt. Sedanja vrednost izplačila je odvisna od slučajne spremenljivke $K_x = [T_x]$,

$$Z = c_{K_x+1}\, v^{K_x+1}. \tag{2.36}$$

Neto enkratna premija je v tem primeru enaka

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\, v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{2.37}$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi višje momente slučajne spremenljivke Z

$$\mathrm{E}(Z^h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^h\, v^{h(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{2.38}$$

Naslednja posplošitev je izplačilo zavarovalne vsote takoj po smrti, kar pomeni, da je zavarovalna vsota funkcija časa, $c(t)$, $t \geq 0$. V tem primeru slučajno spremenljivko Z zapišemo kot

$$Z = c(T_x)\ v^{T_x}. \tag{2.39}$$

Neto enkratna premija je enaka

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^\infty c(t)\ v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt, \tag{2.40}$$

pri čemer smo za gostoto slučajne spremenljivke uporabili izraz (2.18). Seveda lahko iz omenjenega zveznega modela izpeljemo tudi diskretni model:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(Z|K_x = k)\ \mathrm{P}(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k+S_x)\ v^{k+S_x}|K_x = k)\ \mathrm{P}(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k+S_x)\ v^{S_x-1}|K_x = k)\ v^{k+1}\ \mathrm{P}(K_x = k).
\end{aligned}$$

Ob upoštevanju predpostavke

$$c_{k+1} = \mathrm{E}(c(k+S_x)\ v^{S_x-1}|K_x = k),$$

dobimo

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\ v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}.$$

Za izračun zavarovalnih vsot c_{k+1} potrebujemo pogojno porazdelitev S_x pri pogoju $K_x = k$.

V praksi se zavarovanja za primer smrti večinoma uporabljajo za kritje tveganja smrti, ob predpostavki, da ima zavarovanec sklenjeno kreditno pogodbo oziroma druge finančne obveznosti. Omenjeno zavarovanje tako krije morebitne finančne obveznosti v primeru zavarovančeve smrti. Poznamo dosmrtno zavarovanje za primer smrti (večinoma se uporablja za kritje stroškov pogreba) ter začasno zavarovanje za primer smrti, ki krije zgoraj omenjeno tveganje.

Predpostavimo, da se zavarovalna vsota pri dosmrtnem zavarovanju izplača ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl. Privzemimo še, da je zavarovalna vsota enaka 1, kar bo poenostavilo zapis enačb. Torej je slučajna spremenljivka Z odvisna samo od časa izplačila $(K_x + 1)$

$$Z = v^{K_x+1}. \tag{2.41}$$

Kot rečeno je porazdelitev slučajne spremenljivke Z določena s porazdelitvijo slučajne spremenljivke K_x

$$\mathrm{P}(Z = v^{k+1}) = \mathrm{P}(K_x = k) = {}_kp_x\ q_{x+k}, \tag{2.42}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$ Aktuarski simbol za enkratno neto premijo za dosmrtno zavarovanje za primer smrti je A_x,

$$A_x = \mathrm{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}. \tag{2.43}$$

Varianco slučajne spremenljivke Z zapišemo kot

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - A_x^2, \tag{2.44}$$

pri čemer je

$$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(v^{2(K_x+1)}), \tag{2.45}$$

kar lahko interpretiramo kot enkratno premijo pri jakosti obresti 2δ. Jakost obresti δ je definirana kot $\delta = \ln(1 + r)$, od koder sledi $v = e^{-\delta}$. Definicija je rezultat zmanjševanja obdobja obrestovanja (zvezno obrestovanje). Tako varianco razlagamo kot razliko dveh enkratnih premij, pri čemer prvo izračunano pri dvakratniku osnovne jakosti obresti, drugo pa pri normalni jakosti obresti.

Začasno zavarovanje za primer smrti v trajanju n let krije tveganje smrti, če zavarovanec umre v prvih n letih (zavarovalna vsota se izplača ob koncu leta smrti). Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ 0, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.46}$$

Enkratno neto premijo za začasno zavarovanje za primer smrti označimo z $A^1_{x:\overline{n}|}$

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k}. \tag{2.47}$$

Za izračun variance moramo izračunati drugi moment slučajne spremenljivke Z. Podobno kot pri dosmrtnem zavarovanju je drugi moment enak enkratni neto premiji, izračunani pri dvakratniku osnovne jakosti obresti (Wolter, 2003).

V praksi si želijo zavarovalnice čim bolj približati potrebam zavarovancev. V ta namen se na zavarovalnem trgu ponuja standardno padajoče začasno zavarovanje za primer smrti, pri katerem zavarovalne vsote c_j linearno padajo do 0. S takšnim zavarovanjem natančneje pokrijemo tveganje kreditne pogodbe, kjer se glavnica načeloma linearno zmanjšuje s časom (na podoben način se izpelje tudi premija za primer, kjer se glavnica zmanjšuje po konformnem načinu). Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} (n - K_x) \ v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ 0, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.48}$$

Enkratno neto premijo označimo z $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \ v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k}. \tag{2.49}$$

V tujini obstaja še ena različica tovrstnih zavarovanj. V tem primeru banka zavarovalnici mesečno sporoča vse nezapadle obveznosti kreditojemalcev ter povprečno starostno strukturo za posamezen spol. Zavarovalnica na podlagi omenjenih podatkov izračuna premijo za primer smrti za obdobje enega meseca. Banka omenjeno premijo obračuna preko večje efektivne obrestne mere kreditne pogodbe in kreditojemalec v bistvu ne ve, da je zavarovan za primer smrti. Banka tako zmanjšuje tveganje nepoplačila obveznosti iz naslova smrti kreditojemalca, hkrati pa je omenjen način poslovanja ugoden tudi za kreditojemalca, saj v primeru njegove smrti dediči ne podedujejo finančnih obveznosti iz naslova kreditnih pogodb (De Vylder, 1997).

Nakazan prehod od splošnega zavarovanja za primer smrti, kjer je izplačilo zavarovalne vsote funkcija slučajne spremenljivke K_x (T_x), do zavarovanja, kjer je zavarovalna vsota 1, lahko naredimo tudi za ostala kapitalska zavarovanja.

Zavarovanje za primer doživetja v trajanju n let, predvideva izplačilo zavarovalne vsote ob koncu n-tega leta pri pogoju, da je zavarovanec živ. Sedanja vrednost je enaka

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.50}$$

Enkratno neto premijo za zavarovanje za primer doživetja označimo z $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \ {}_np_x, \tag{2.51}$$

varianco izračunamo kot

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - A^2_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \\ &= v^{2n} \ {}_np_x - v^{2n} \ {}_np_x^2 \\ &= v^{2n} \ {}_np_x \ {}_nq_x. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Mešano zavarovanje je kombinacija (vsota) zavarovanja za primer doživetja v trajanju n let in začasnega zavarovanja za primer smrti v trajanju n let. Do izplačila zavarovalne vsote pride v primeru smrti, če ta nastopi v prvih n letih, sicer pa na koncu zavarovalnega obdobja. Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.53}$$

Enkratno neto premijo za mešano zavarovanje označimo z $A_{x:\overline{n}|}$. Izračunamo jo iz same definicije zavarovanja. Slučajno spremenljivko Z lahko zapišemo kot

$$Z = Z_1 + Z_2, \tag{2.54}$$

pri čemer slučajna spremenljivka Z_1 predstavlja sedanjo vrednost izplačila pri zavarovanju za primer doživetja v trajanju n let, slučajna spremenljivka Z_2 pa predstavlja sedanjo vrednost izplačila pri začasnem zavarovanju za primer smrti v trajanju n let. Sledi

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + A^1_{x:\overline{n}|} \\ &= v^n \ {}_n p_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_k p_x \ q_{x+k}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Varianca slučajne spremenljivke Z je enaka

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) + 2 \ \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2).$$

Iz same definicije slučajnih spremenljivk Z_1 in Z_2 sledi $Z_1 Z_2 = 0$, od koder zaključimo

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) &= \mathrm{E}(Z_1 Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) \\ &= -A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \ A^1_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{2.56}$$

in

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) - 2\ A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}\ A_{x:\overline{n}|}^{1} \\
&= v^{2n}\ {}_n p_x\ {}_n q_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\ {}_k p_x\ q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_k p_x\ q_{x+k} \right)^2 - \\
&\qquad -2\ v^n\ {}_n p_x \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_k p_x\ q_{x+k}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Zadnji rezultat ima za zavarovalnice pomembno vlogo, saj pri mešanem zavarovanju zavarovalnica sprejme manj tveganja, kot če bi sklenila eno začasno zavarovanje za primer smrti in eno zavarovanje za primer doživetja za dve različni osebi enake starosti in spola (Koller, 2000).

V teoriji in praksi se uporabljajo variacije omenjenih zavarovanj:

- izplačilo zavarovalne vsote neposredno po smrti,
- izplačilo zavarovalne vsote ob koncu m-tega obdobja znotraj leta,
- naraščajoče, padajoče zavarovalne vsote,
- pristopne starosti zavarovancev pri ne celi starosti,
- zavarovanja za več življenj.

Življenjske rente predstavljajo življenjsko zavarovanje, pri katerem se renta izplačuje tako dolgo, dokler je določena oseba, z začetno starostjo x let, še živa. Življenjske rente se ponujajo na zavarovalnem trgu kot varianta izplačila zavarovalne vsote ob doživetju določenega zavarovanja ali pa predstavljajo varčevanje z namenom povečanja varnosti za stara leta.

Sedanja vrednost življenjske rente je slučajna spremenljivka, saj je odvisna od preostale življenjske dobe x let stare osebe. Označimo jo z Y, matematično upanje $\mathrm{E}(Y)$ pa predstavlja enkratno neto premijo.

Splošna renta, ki predvideva plačila v višini $r_0, r_1, \ldots$ v časovnih točkah $0, \ldots, K_x$ je definirana z

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ r_k\ \mathrm{I}_{(K_x \geq k)}, \tag{2.58}$$

pri čemer smo z $\mathrm{I}_{(K_x \geq k)}$ označili indikator dogodka $\{K_x \geq k\}$. Enkratna neto premija je podana z

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; r_k \; {}_k p_x. \tag{2.59}$$

Nadaljnja posplošitev rente gre v smeri zgostitve izplačevanja rent in v končni fazi dobimo zvezno plačljivo rento. Seveda so lahko tudi višine rente funkcije slučajne spremenljivke T_x. V nadaljevanju bomo predstavili elementarne življenjske rente.

Dosmrtna prenumerandna življenjska renta predstavlja izplačila v višini 1 v časovnih točkah (letih) $0, \ldots, K_x$. Sedanja vrednost omenjenih izplačil je

$$Y \;=\; 1 + v + v^2 + \cdots + v^{K_x}. \tag{2.60}$$

Enkratno neto premijo za dosmrtno prenumerandno življenjsko rento označimo z $\ddot{a}_x$

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x \;&=\; \mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - v^{k+1}}{1 - v} \; {}_k p_x \; q_{x+k} \\ &=\; \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; {}_k p_x \; q_{x+k},\end{aligned} \tag{2.61}$$

pri čemer smo z $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$ označili finančno prenumerandno rento v trajanju $k + 1$ let. Na omenjeno rento lahko gledamo tudi kot zaporedje zavarovanj za primer doživetja (če je oseba živa na začetku vsakega leta, prejme izplačilo). V tem primeru velja

$$Y \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; \mathrm{I}_{(K_x \geq k)} \tag{2.62}$$

in

$$\ddot{a}_x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_k p_x. \tag{2.63}$$

Varianco dosmrtne prenumerandne rente dobimo s pomočjo dosmrtnega zavarovanja za primer smrti, kjer bomo sedanjo vrednost izplačila pri tem zavarovanju označili z Z. Velja

$$Y = \frac{1 - v^{K_x+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z}{1 - v}. \tag{2.64}$$

Sledi

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v} \tag{2.65}$$

in

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{(1-v)^2} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} \ {}_k p_x \ q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_k p_x \ q_{x+k}\right)^2}{(1-v)^2}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Pri n let trajajoči začasni prenumerandni življenjski renti oseba prejema rentno izplačilo največ n let oziroma do smrti, če ta nastopi pred letom n. Sedanja vrednost rente je

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & K_x < n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.67}$$

Podobno kot pri dosmrtni prenumerandni življenjski renti lahko enkratno neto premijo ($\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$) izrazimo na dva načina:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \ {}_k p_x \ q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \ {}_n p_x \tag{2.68}$$

oziroma

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_k p_x. \tag{2.69}$$

Pri izpeljavi druge enakosti smo predpostavili, da je renta končno zaporedje zavarovanj za primer doživetja. Če s slučajno spremenljivko Z označimo sedanjo vrednost izplačila pri mešanem zavarovanju, velja

$$Y = \frac{1-Z}{1-v}. \tag{2.70}$$

Z uporabo matematičnega upanja dobimo povezavo med enkratno neto premijo za n let trajajočo začasno prenumerandno rento in enkratno neto premijo za n let trajajoče mešano zavarovanje

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{1-v}. \tag{2.71}$$

Sledi tudi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{(1-v)^2} \\ &= \frac{1}{(1-v)^2}\Bigg(v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\ {}_kp_x\ q_{x+k} - \\ &\quad -\left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\right]^2 - 2\ v^n\ {}_np_x \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\Bigg). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Tako kot pri kapitalskih zavarovanjih, se tudi pri življenjskih rentah v teoriji in praksi uporablja več variacij življenjskih rent:

- odložene rente,
- postnumerandne rente,
- rente z zajamčenim obdobjem izplačevanja,
- rente, pri katerih so plačila m-krat znotraj leta (v limitnem primeru pridemo do zvezno plačljive rente),
- naraščajoče, padajoče rente,
- začetek plačevanja pri ne celi starosti.

Zavarovanja z naložbenim tveganjem so življenjska zavarovanja, pri katerih je primarni cilj ustvariti donos na vložena sredstva. Zavarovalna komponenta je zgolj stranskega pomena, vendar je vseeno pomembna iz vidika klasifikacije zavarovalnih pogodb po računovodskih standardih. Zakon o zavarovalništvu tovrstna zavarovanja opredeli kot življenjska zavarovanja vezana na enote investicijskih skladov. V teoriji in praksi poznamo več vrst omenjenih zavarovanj:

- (klasično) naložbeno zavarovanje,
- naložbeno zavarovanje, kjer je izplačilo vezano na določen indeks,
- naložbeno zavarovanje z dodatkom klasičnega pripisa dobička,
- naložbeno zavarovanje z določenimi garancijami,
- hibridi naložbenih zavarovanj in kapitalskih zavarovanj.

V nadaljevanju bomo na primeru klasičnega naložbenega zavarovanja predstavili tok premije in pri tem izpostavili stroške, ki jih zavarovalnice praviloma obračunajo pri tovrstnem zavarovanju.

Zavarovalec premijo lahko naloži v enega ali več skladov. Naivno je pričakovati, da bi zavarovalnica celotno premijo namenila za nakup enot določenega sklada. Pri tako imenovanem vstopu (premije) v sklad zavarovalnica lahko obračuna dva stroška: delež alokacije in razliko v nakupni ter prodajni ceni enote premoženja. Z deležem alokacije definiramo, kolikšen del premije bo namenjen za nakup enot sklada. V praksi je delež v začetnem obdobju zavarovanja (prvo leto) manjši kot v kasnejših obdobjih zavarovanja (po preteku prvega leta). Poznamo tudi primere, ko je delež konstanten skozi celotno zavarovalno obdobje, vendar je takšen način bolj redek, saj je zavarovalnici v interesu čim prej obračunati stroške. Razlika med nakupno ter prodajno ceno enote sklada se pogosto izrazi kot odstotek α prodajne cene. Nakupno ceno dobimo preko povezave

$$\text{nakupna cena}_t = (1-\alpha)\ \text{prodajna cena}_t.$$

Dejstvo je, da se premija pretvori v enote s pomočjo prodajne cene. Strošek za zavarovalnico pa je manjši, saj zavarovalnica načeloma te enote kupi po nakupni ceni. Tako se ustvari razlika, ki pripada zavarovalnici.

Sledijo letni stroški, ki pokrivajo upravljavsko provizijo (strošek upravljanja sklada) ter tako imenovane stroške police in stroške rizika smrti (riziko premija je funkcija slučajne spremenljivke T_x) oziroma drugih rizikov, ki jih zavarovanje krije. Upravljavska provizija se odrazi skozi vrednost enote premoženja sklada, saj jo upravljavec obračuna sam od celotnega premoženja sklada. Stroški police so fiksni in se obračunajo tako, da se proda določeno število zavarovančevih enot sklada. Analogno se obračuna tudi riziko premija. Na kakšen način zavarovalnica porabi omenjene stroške (provizija agentom, ...) je odvisno od poslovne politike zavarovalnice. Dejstvo pa je, da je pri naložbenih zavarovanjih možno definirati kar nekaj virov za obračun stroškov.

V tujini trend naložbenih zavarovanj pada, medtem ko je bil v Sloveniji pred finančno krizo ravno obraten. Premija naložbenih zavarovanj je v letu 2011 predstavljala 62,6 % celotne življenjske premije v primerjavi z letom 2004, ko je bil ta delež 40 % (Statični zavarovalniški bilten, 2005 in 2012). Zadnje gre pripisati predvsem dogajanju na slovenskem kapitalskem trgu v zadnjem desetletju. Seveda bo zanimivo spremljati omenjeni trend tudi v prihodnosti, predvsem z mislijo, da zgodovinski donosi niso garancija za prihodnost.

Tako v tujini kot v Sloveniji postajajo vse bolj priljubljena naložbena zavarovanja z določenimi garancijami. Takšna zavarovanja imajo določena varovala, ki so zanimiva za zavarovance, vendar se je potrebno zavedati, da imajo garancije svojo ceno, ki se večinoma odrazi preko nižje donosnosti skladov. Poznamo več vrst garancij:

- garancija najvišje vrednosti enote premoženja, kjer se vse enote, kupljene do presečnega datuma, ko začne vrednost enote premoženja padati, ob doživetju izplačajo po najvišjem tečaju,
- garancija neto vrednosti, kjer se ob doživetju izplača natanko tolikšen znesek kot je bil vplačan v sklade (primerna garancija ob padanju vrednosti enote premoženja),
- garancija fiksnega donosa, ki je že marsikaterega upravljavca stala mnogo premoženja (Partnoy, 1999).

Omenjene garancije se dosegajo preko ustreznih naložbenih strategij upravljavcev skladov in se ovrednotijo ali preko same vrednosti enote sklada ali kot fiksen znesek.

Razdelek zaključimo z dejstvom, da je ponudba življenjskih zavarovanj pestra in da bodo v prihodnosti zavarovanja še bolj pisana na kožo zavarovancem, saj bo le na takšen način možno ohranjati pozicije na zavarovalnem trgu.

2.4 Ekonomski modeli za vrednotenje zavarovanj

Začetna točka za vrednotenje zavarovalnih obveznosti je njihova sedanja vrednost (Babbel 1998b, 1997 in Merrill, 1997). Izkaže se, da je sedanja vrednost zavarovalnih obveznosti ne samo dobra začetna točka, ampak tudi dobra končna točka kar se tiče samega vrednotenja zavarovalnih obveznosti. To lahko podkrepimo z obravnavo vseh virov negotovosti oziroma slučajnosti, ki pritičejo zavarovalnim obveznostim. V splošnem negotovosti razdelimo v tri kategorije: aktuarska, tržna in netržna sistemska tveganja.

Aktuarska tveganja ponazarjajo premoženjska in odgovornostna tveganja, ter tveganja smrtnosti in obolevnosti. Ta tveganja za zavarovalnice predstavljajo osnovni posel. Izpostavljenost tem tveganjem se upravlja preko razpršitve le teh oziroma s sklepanjem čim večjega števila podobnih zavarovanj. Pri vrednotenju zavarovalnih obveznosti zaradi predpostavke o učinkovitem upravljanju teh tveganj, se le ta upoštevajo v obliki njihove povprečne vrednosti oziroma povprečnega stroška. Omenjeni pristop se razlikuje od tradicionalnega vrednotenja, pri katerem se aktuarska tveganja dodatno prilagodijo skozi nižanje obrestne mere, ki se uporablja za diskontiranje. V tem primeru dobimo konzervativno oceno vrednosti zavarovalnih obveznosti, kar ni namen ekonomskega vrednotenja.

Tržna tveganja ponazarjajo tveganja obrestnih mer, inflacije in menjalnih tečajev. Izpostavljenost omenjenim tveganjem lahko merimo in ocenimo saj obstaja aktiven trg finančnih instrumentov, ki so podvrženi enakim virom negotovosti. Upravljanje teh tveganj tako poteka z uporabo finančnih instrumentov oziroma izvedenih finančnih instrumentov.

Netržna sistemska tveganja predstavljajo morebitne spremembe v zakonodaji, v davčnem okolju ali v zakonskih zahtevah. Pred temi tveganji se ni mogoče popolnoma zavarovati. Prav tako jih je težko vpeljati v modele za vrednotenje. Kljub vsemu, v primerjavi s tržnimi tveganji, imajo v splošnem manjši vpliv na sedanjo vrednost zavarovalnih obveznosti.

Ekonomski modeli za vrednotenje zavarovalnih obveznosti upoštevajo poleg sedanje vrednosti tudi tržne občutljivosti. Sedanja vrednost obveznosti nam pove, koliko sredstev zavarovatelj potrebuje danes, da bo poravnal svoje obveznosti iz zavarovalnih pogodb, pri upoštevanju verjetnosti vseh možnih ekonomskih scenarijev. Na tem mestu velja opozoriti, da se ekonomska vrednost obveznosti ne sme uporabljati kot ocena za zavarovalno-tehnične rezervacije, saj bi jih v tem primeru podcenili (Buhlmann, 1970).

2.4.1 Kriteriji za izvedljivost modela

Da bo model za vrednotenje uporaben in hkrati tudi izvedljiv, je potrebno upoštevati določene kriterije. V nadaljevanju so predstavljeni ključni kriteriji:

- *Relevantni podatki*

  Model mora vrniti rezultate, ki so konsistentni z definicijo ekonomske vrednosti, ki je bila uporabljena. Rezultati morajo biti relevantni in imeti morajo pomen.

- *Praktičnost implementacije*

  Splošnost, ki jo bomo vgradili v model, mora biti omejena z zmožnostjo same implementacije. Splošen model je sicer všečen, vendar v praksi neizvedljiv.

- *Konsistentne vrednosti*

  Model naj izračunava konsistentne vrednosti tako obveznosti kot sredstev. Večina modelov je namenjena zelo ozki uporabi samo ene vrste obveznosti ali sredstev, na primer model za vrednotenje opcij.

- *Kalibracija vrednosti*

  Vrednosti v modelu naj bodo blizu opazovanim. Ekonomska vrednost se ujema s tržno vednostjo, če se omejimo na finančne instrumente, s katerimi se trguje na aktivnem trgu. Za zavarovalne obveznosti ta kriterij ni obvezen.

- *Nekontraverzni principi*

  Model ne sme biti osnovan na kontraverznih principih ampak na dobri praksi in principih, ki so splošno sprejeti.

- *Dokumentiranost in revizorska sled*

  Dokumentiranost in omogočena revizorska sled sta ključni sestavini modela. Pod dokumentiranost sodi tudi možnost opredelitve vseh ekonomskih predpostavk, ki bodo uporabljene pri vrednotenju.

- *Aditivnost*

  Vsota ocenjenih vrednosti posameznih sredstev in obveznosti naj bo primerljiva vrednosti celega portfelja. V realnem svetu sicer to ni vedno res, ker se pri analizi celotnega portfelja upoštevajo tudi korelacije med posameznimi kategorijami.

2.4.2 Delitev modelov

V literaturi obstaja mnogo različnih modelov za ekonomsko vrednotenje, na primer ravnotežni modeli, delno ravnotežni modeli, modeli škod, Black in Scholes model za vrednotenje opcij, modeli teorije arbitraže in mnogo modelov za obrestne mere.

V vsakem modelu za vrednotenje nastopajo denarni tokovi s pripadajočimi verjetnostmi in obrestne mere. Ključno vprašanje je, kako se v modelu upošteva tveganja v denarnih tokovih. V splošnem obstajajo tri metode za ta namen: prilagoditev denarnih tokov, obrestne mere in verjetnosti.

Uporaba skoraj ekvivalentnih denarnih tokov. Skoraj ekvivalenten denarni tok je denarni tok, pri katerem je investitor indiferenten, torej ne spremeni svoje odločitve glede na dani rezultat.

Pristop rizične premije. Ta pristop temelji na dodatku rizične premije krivulji obrestnih mer. S tem investitor nadomesti dodatno izpostavljenost tveganjem.

Tveganju nevtralno vrednotenje opcij. Pri tem vrednotenju se verjetnostna porazdelitev prilagodi, tako da denarne tokove diskontiramo z netvegano obrestno mero, kot če bi predpostavili, da so investitorji nevtralni do tveganja. Ta pristop se večinoma uporablja pri vrednotenju izvedenih finančnih instrumentov.

Vsi omenjeni pristopi v modelih, ob pravilni implementaciji, vrnejo konsistentne, enake vrednosti. V Tabeli 1 je na enostaven način predstavljen možen okvir kompleksnosti modelov za vrednotenje. Premikanje v desno oziroma navzdol v Tabeli 1 pomeni povečanje kompleksnosti modela za vrednotenje. Celica D predstavlja najbolj splošen model, ki vsebuje slučajnost tako denarnih tokov kot obrestnih mer.

Tabela 1. Tabela kompleksnosti modelov za vrednotenje

	Deterministični denarni tok	Stohastični denarni tok
Deterministične obrestne mere	A	B
Stohastične obrestne mere	C	D

Vir: Babbel, 1998, str. 5

V nadaljevanju bomo za vsako celico Tabele 1 zapisali enačbo za vrednotenje. Pri tem se omejimo na en denarni tok, kar pomeni, da instrumente z več denarnimi tokovi, obravnavamo kot portfelj samostojnih denarnih tokov. Celica A predstavlja skupino najmanj kompleksnih modelov. Danes, v času 0, sta znani zaporedji prihodnjih obrestnih mer in denarnih tokov. Naj x_t predstavlja denarni tok v času t. Z $R(t,n)$ označimo trenutno obrestno mero v času t za dospelost v času n. Kratkoročna obrestna mera predstavlja trenutno obrestno mero v najmanjšem časovnem inkrementu. Na primer v diskretnem času je trenutna obrestna mera, ki velja eno časovno periodo ($R(t) = R(t,1)$), kar kratkoročna obrestna mera. V zveznem času je trenutna obrestna mera ($R(t) = R(t,\Delta t)$) enaka kratkoročni obrestni meri. V nadaljevanju bomo predpostavili, da je čas zvezen.

Enačba za vrednotenje, ki velja za celico A, je enaka

$$V_0 \;=\; x_t \, \exp\Big(-\int_0^t R(s)ds\Big). \tag{2.73}$$

V posebnem primeru, ko so obrestne mere enake konstanti, velja

$$V_0 \;=\; x_t \; \exp[-R(0,t)t].$$

V celici B predpostavimo, da je denarni tok stohastičen, torej pod vplivom določenih verjetnostnih faktorjev. Denarni tok označimo z $x_t(\mathbf{Y}_t)$, pri čemer je $\mathbf{Y}_t$ vektor virov slučajnosti. Na primer plačila imetniku avtomobilskega zavarovanja so določena s slučajnimi škodami, ki se zgodijo v obdobju kritja. Porazdelitev škod je v splošnem podana s porazdelitvijo frekvence škod in porazdelitvijo višine škod. V tem primeru je vektor $\mathbf{Y}_t$ sestavljen iz dveh komponent: slučajne spremenljivke za frekvenco škod in slučajne spremenljivke za višino škod. Plačilo $x_t(\mathbf{Y}_t)$ je tako odvisno od realiziranih škod kot tudi od specifik same zavarovalne police (franšiza, omejitev kritja).

Enačba za vrednotenje, ki velja za celico B, je enaka

$$V_0 \;=\; \mathrm{E}^\star[x_t(\mathbf{Y}_t)] \; \exp\Big(-\int_0^t R(s)ds\Big), \tag{2.74}$$

pri čemer zvezdica označuje, da je matematično upanje uporabljeno pod tveganju nevtralni verjetnostni meri in sicer stohastičnih faktorjev, ki določajo denarni tok. Zadnja enačba nam pove, da je vrednost stohastičnega denarnega toka sedanja vrednost tveganju nevtralnega pričakovanega denarnega toka, diskontiranega z netvegano obrestno mero. Alternativno lahko enačbo za vrednotenje zapišemo kot

$$V_0 \;=\; \mathrm{E}[x_t(\mathbf{Y}_t)] \; \exp\Big(-\int_0^t [R(s)+\lambda(s)]ds\Big), \tag{2.75}$$

kjer je matematično upanje uporabljeno pod realno verjetnostno porazdelitvijo in je $\lambda(s)$ časovno odvisna rizična premija. V primeru trgov, kjer se s komponentami vektorja $\mathbf{Y}_t$ aktivno trguje, dasta obe enačbi identični vrednotenji. V primeru, ko pa se s komponentami ne trguje aktivno, se praviloma uporablja zadnja enačba, na primer pri vrednotenju avtomobilskega zavarovanja.

V celici C predpostavimo, da je denarni tok znan in so obrestne mere stohastične. Enačba za vrednotenje, je enaka

$$V_0 \;=\; x_t \; \mathrm{E}^\star\Big[\exp\Big(-\int_0^t R(s)ds\Big)\Big], \tag{2.76}$$

pri čemer zvezdica označuje, da je matematično upanje uporabljeno pod tveganju nevtralni verjetnostni meri. V primeru, ko je matematično upanje uporabljeno pod realno verjetnostno porazdelitvijo in upoštevamo rizično premijo, enačba preide v

$$V_0 \;=\; x_t \;\mathrm{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^t [R(s)+\lambda(s)]ds\Big)\Big]. \tag{2.77}$$

Celica D predstavlja primere, ko so, tako denarni tokovi kot obrestne mere, stohastični. Enačba za vrednotenje je enaka

$$V_0 \;=\; \mathrm{E}_r^{\star}\Big[\exp\Big(-\int_0^t R(s)ds\Big)\mathrm{E}_y^{\star}[x_t(\mathbf{R}_t,\mathbf{Y}_t)]\Big], \tag{2.78}$$

pri čemer $\mathbf{R}_t$ označuje vektor kratkoročnih obrestnih mer, ki so veljale od točke 0 do točke t. Indeks pri matematičnih upanjih nakazuje na katero spremenljivko se le to veže. Prehod na princip rizične premije nam da

$$V_0 \;=\; \mathrm{E}_r\Big[\exp\Big(-\int_0^t [R(s)+\lambda_r(s)+\lambda_y(s)]ds\Big)\times \mathrm{E}_y[x_t(\mathbf{R}_t,\mathbf{Y}_t)]\Big], \tag{2.79}$$

kjer indeks pri λ določa rizično premijo relativno na obrestne mere ali na faktorje v $\mathbf{Y}_t$.

Celice A, B in C so samo posebni premeri celice D. Enačba za vrednotenje (2.78) za celico D je tako uporabna na splošno oziroma jo lahko razumemo kot model z različnimi opcijami, ki jih lahko vključimo, ali pa ne. Na primer, če vrednotimo deterministični denarni tok, ki ne zahteva kompleksnosti enačbe (2.78), kot v primeru vrednotenja enostavne obveznice, pač uporabimo enačbo (2.76).

Izpeljane enačbe za vrednotenje lahko posplošimo in jih uporabimo v večfaktorskih modelih. V Tabeli 2 so prikazani primeri modelov glede na obravnavano kompleksnost.

Tabela 2. Primeri modelov

	Deterministični denarni tok	Stohastični denarni tok
Deterministične obrestne mere	Gordonov model APV model WACC model	Blackov model Black-Scholesov model Mertonov model CAPM model
Stohastične obrestne mere	CIR model Vasičkov model Longstaff-Schwartzov model	Razširjeni CIR model Razširjeni Vasičkov model GAT model Tillinghastov model

Vir: Babbel, 1998, str. 7

3 MARKOVSKI PROCESI

3.1 Stohastični procesi

Stohastični proces zajema lastnosti slučajnih spremenljivk. Slučajna spremenljivka opisuje slučajni pojav v določenem času. Stohastični proces je množica slučajnih spremenljivk X_t, za vsak čas t v množici J . Množico vrednosti, ki jih slučajne spremenljivke lahko zavzamejo imenujemo prostor stanj procesa in označimo ga z S (Cox, 1965). Iz realnega življenja velja, da X_t niso neodvisne (primer: poljuben borzni indeks - če X_t predstavlja vrednost indeksa določenega dne, potem je dejstvo, da X_t niso neodvisne, lahko razumljivo, saj je vrednost indeksa pogojena s stanjem preteklih dni). To poglavje sloni predvsem na *Core Reading 103 - Stochastic Modelling.*

V teoriji in praksi poznamo več vrst stohastičnih procesov. Z naslednjimi primeri bomo prikazali razliko med njimi:

- *Proces z diskretnim prostorom stanj in z diskretnimi časovnimi spremembami*

  Zavarovalnica letno preverja status zavarovancev pri avtomobilskem zavarovanju. Obstajajo npr. trije nivoji popusta (0 %, 25 %, 40 %), ki so odvisni od voznikovih povzročenih škod. V tem primeru je prostor stanj enak $S =$ $0, 25, 40$ in časovna množica $J = \{0, 1, 2\ ...\}$, pri čemer vsak interval v množici J predstavlja eno leto.

- *Proces z diskretnim prostorom stanj in z zveznimi časovnimi spremembami*

  Življenjska zavarovalnica razvršča zavarovance na zdrave, bolne ter mrtve. Torej imamo prostor stanj $S = \{Z, B, M\}$. Za časovno množico je naravno, da predpostavimo $J = [0, \infty)$ saj lahko bolezen ali smrt nastopita v vsakem trenutku. Po drugi strani je zadovoljivo tudi, če bi čas šteli v dnevih, torej $J = \{0, 1, 2\ ...\}$.

- *Proces z zveznim prostorom stanj*

  Odškodninski zahtevki slučajnih zneskov prihajajo v zavarovalnico ob nepredvidenem času. Zavarovalnica želi minimizirati tveganje nepokrivanja obveznosti do zavarovancev, zato potrebuje napoved zahtevkov v časovnem intervalu $[0, t)$. V takšnih primerih je privzeta osnova, da za množici S in J uporabimo $[0, \infty)$.

- *Proces mešanega tipa*

  Primer takšnih procesov so pokojninske sheme, kjer imajo člani možnost, da se upokojijo na vsak rojstni dan od 60. do 65. leta. Števila ljudi, ki se bodo upokojili mladi, ne moremo natančno napovedati. Prav tako ne moremo napovedati števila smrti med živimi aktivnimi člani. Število aktivnih članov modeliramo s procesom mešanega tipa, kjer je $S = \{1, 2, 3\ ...\}$ in časovni interval $J = [0, \infty)$. Zmanjšanje slučajnih vrednosti se bo pojavljalo pri fiksnih datumih zaradi zgodnjih upokojitev in ob slučajnih datumih v primeru smrti.

Ko enkrat definiramo časovno množico in prostor stanj, nam ostane še definicija procesa $\{X_t,\ t \in J\}$ samega. Torej moramo podati skupno porazdelitev $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ za vse $t_1, \ldots, t_n \in J$ in vse N. V praksi pridemo do skupne porazdelitve indirektno, preko preprostih posrednih procesov.

Skupno realizacijo slučajnih spremenljivk X_t, za vse t iz J imenujemo vzorčna pot procesa, kar je v bistvu funkcija iz J v S. Lastnosti vzorčnih poti procesa naj bi se ujemale s tistimi v realnem življenju, vsaj v statističnem oziroma teoretičnem smislu. V takšnem primeru lahko uporabimo model za modeliranje realnega procesa.

3.1.1 Stacionarnost in prirastki

Stohastičen model je stacionaren, če sta skupni porazdelitvi za $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ in za $X_{t+t_1}, \ldots, X_{t+t_n}$ identični za vse $t, t_1, \ldots, t_n \in J$ in za vsa cela števila n. To z drugimi besedami pomeni, da se statistične lastnosti procesa ohranjajo ne glede na časovne intervale.

Ker je stacionarnost v realnem življenju težko dokazovati oziroma preveriti, vpeljemo pojem šibke stacionarnosti, ki jo povzemata trditvi:

- matematično upanje procesa $m(t) = \mathrm{E}(X_t)$ je konstantno,
- kovarianca procesa $C(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t] - \mathrm{E}[X_s]\mathrm{E}[X_t]$ je odvisna samo od časovne razlike $s - t$.

Prirastki procesa, ki je definiran kot $X_{t+u} - X_t, u > 0$, imajo pogosto enostavnejše lastnosti kot proces sam (stacionarnost). Pravimo, da ima proces X_t neodvisne prirastke, če je za vsak $u > 0$ prirastek $X_{t+u} - X_t$ neodvisen od zgodovine procesa $\{X_s,\ 0 \le s \le t\}$.

3.1.2 Lastnost Markova

Če predpostavimo, da je mogoče razvoj procesa napovedati na osnovi sedanjega stanja, ne da bi se sklicevali na zgodovino, pridemo do naslednje poenostavitve

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X_t \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \ldots X_{s_n} = x_n, X_s = x) \\ &= \mathrm{P}(X_t \in A | X_s = x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

za vse čase $s_1 < ... < S_n < s < t$ in stanja $x_1, \dots, x_n, x \in S$ in vse podmnožice $A \subset S$. To lastnost imenujemo lastnost Markova. Tako lastnost Markova proces relativno poenostavi, saj sam proces ni vezan na zgodovino le-tega ampak zgolj na zadnje stanje. Proces, ki ima omenjeno lastnost, je markovski proces.

Izrek 3.1 *Proces z neodvisnimi prirastki ima lastnost Markova.*

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_t \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ... X_{s_n} = x_n, X_s = x) \\
&= \mathrm{P}(X_t - X_s \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ... X_{s_n} = x_n, X_s = x) \\
&= \mathrm{P}(X_t - X_s + x \in A | X_s = x) \\
&= \mathrm{P}(X_t \in A | X_s = x)
\end{aligned}
$$

□

Markovski proces z diskretnim prostorom stanj in diskretno časovno množico imenujemo markovska veriga. Markovski proces z diskretnim prostorom stanj in zvezno časovno množico imenujemo odsekoma zvezen markovski proces oziroma odsekoma konstanten markovski proces (Grandell, 1997).

3.1.3 Primeri osnovnih stohastičnih procesov

Beli šum

Zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk imenujemo beli šum. To je časovno diskreten, stacionaren, stohastičen proces, ki ima lastnost Markova. Uporabljamo ga za konstrukcijo bolj kompleksnih procesov.

Splošen slučajni hod

Naj bo $Y_1, \dots, Y_j, \dots$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk (beli šum) in definirajmo proces $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ z začetnim pogojem $Y_0 = 0$. To je proces s stacionarnimi, neodvisnimi prirastki in zato časovno diskreten markovski proces. Proces ni niti stacionaren, niti šibko stacionaren. V primeru, ko Y_j lahko zavzame vrednost 1 ali -1, proces imenujemo slučajni hod.

Drseče povprečje

Naj bo $\{Y_j,\ j = -p, -p+1, ...\}$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, $\alpha_0, \alpha_1,\ \dots\ , \alpha_p$ pa realna števila. Drseče povprečje reda p je definirano z

$$X_n \;=\; \sum_{j=0}^{p} \alpha_j Y_{n-j}.$$

To je stacionaren proces in v splošnem ni markovski proces (tudi, če je $p = 1$).

Poissonov proces

Poissonov proces stopnje λ je časovno zvezen proces $N_t,\ t \geq 0$ z naslednjimi lastnostmi

- $N_0 = 0$,
- N_t ima neodvisne prirastke in
- N_t ima Poissonovo porazdeljene stacionarne prirastke oziroma

$$\mathrm{P}(N_t - N_s = n) \;=\; \frac{[\lambda(t-s)]^n\ e^{-\lambda(t-s)}}{n!},\ s < t.$$

To je odsekoma konstanten markovski proces s prostorom stanj $N = \{0, 1, 2\ ...\}$. Ni niti stacionaren, niti šibko stacionaren. Proces je osnova za analizo kumulative pojavov določenega dogodka v časovnem intervalu $[0, t]$, neodvisno od narave dogodkov (avtomobilska nesreča, prihod odškodninskega zahtevka v zavarovalnico, prihod stranke na servis).

Sestavljen Poissonov proces

Definiran je z

$$X_t \;=\; \sum_{j=1}^{N_t} Y_j,\ t \geq 0,$$

pri čemer je $N_t,\ t \geq 0$ Poissonov proces in $\{Y_j,\ j \geq 1\}$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Proces ima neodvisne prirastke in zato lastnost Markova drži. Uporabljamo ga za analizo kumulative zahtevkov v zavarovalnici v času $[0, t]$, kjer je N_t skupno število zahtevkov in Y_j znesek j-tega zahtevka. Osnovni problem klasične teorije tveganja je v ocenjevanju verjetnosti propada zavarovalnice

$$\psi(u) \;\; = \;\; \mathrm{P}(u + ct - X_t < 0,\ t > 0),$$

kjer je u začetni kapital zavarovalnice, c jakost priliva premije, pri neki fiksni porazdelitvi zahtevkov.

Brownowo gibanje

Brownovo gibanje, imenovano tudi Wienerjev proces, je časovno zvezen proces $B_t,\ t \geq 0$, z neodvisnimi, stacionarnimi prirastki, ki so normalno porazdeljeni.

3.2 Markovske verige

V razdelku 2.2 smo predstavili enostaven model preživetja, katerega uporabljamo pri vrednotenju zavarovalniških produktov, ki so definirani načeloma z dvemi stanji (živ ter mrtev). Bolj kompleksni zavarovalniški produkti imajo v splošnem več stanj. Kot primer lahko navedemo zavarovanje za (določene težke) bolezni, kjer imamo tri stanja: zdrav, mrtev ter bolan. V vsakem primeru, ne glede na kompleksnost zavarovalniškega produkta, bo izplačilo zavarovalnice zavarovalcu oziroma upravičencu slučajna spremenljivka. Porazdelitev te slučajne spremenljivke je osnova za izračun neto premij, neto rezervacij ter za uravnavanje zavarovalnih tveganj (Norberg: 1995, 2003).

Markovske verige so matematično orodje, s katerim lahko modeliramo tudi zahtevnejše zavarovalniške produkte. Če želimo določen model uporabljati, moramo poznati nekaj osnovnih podatkov: verjetnosti prehodov med posameznimi stanji, množico stanj, čase prehodov med posameznimi stanji ... Pomembno je tudi dejstvo, da je čas ključnega pomena, saj se lahko verjetnosti prehodov spreminjajo skozi čas. To dejstvo nam še poveča množico stanj za dimenzijo opazovanega časa.

3.2.1 Markovske verige v diskretnem času

Z markovsko verigo v diskretnem času označimo markovski proces v diskretnem času s končno ali števno množico stanj S. Predstavljamo si jo lahko kot delec, ki preskakuje iz stanja v stanje v trenutkih $t = 0, 1, 2$ ... Delec je pozabljiv v smislu, da se bo odločil, kam skočiti, samo na osnovi tega, kjer je.

Matematičen opis oziroma definicija markovske verige v diskretnem času je naslednja: zaporedje slučajnih spremenljivk X_0, X_1, X_2 ... z vrednostmi v (števni) množici stanj S, je markovska veriga, če velja

$$\mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0) = \mathrm{P}(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad (3.2)$$

za vsa stanja i_0, ... $, i_{n-2}, i, j \in S$, kar je matematičen zapis zgoraj omenjene pozabljivosti (Bühlmann, 1970, str. 32). Zgornji lastnosti pravimo tudi lastnost Markova. Pogojno verjetnost na desni strani zgornje enakosti v splošnem označimo s $p_{ij}^{(m,n)}$ in jo imenujemo verjetnost prehoda (iz stanja i v stanje j med časom m in n).

Verjetnosti prehodov $p_{ij}^{(m,n)}$ markovske verige v diskretnem času zadoščajo enačbam Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}, \quad (3.3)$$

za vsa stanja $i, j \in S$ in cele čase $m < l < n$. Enačbe Chapman-Kolmogorov dobimo s pomočjo markovske lastnosti in zakona polne verjetnosti

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m,n)} &= \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_n = j, X_l = k | X_m = i) \\ & \sum_{k \in S} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_l = k, X_m = i)}{\mathrm{P}(X_m = i)} \\ & \sum_{k \in S} \frac{\mathrm{P}(X_n = j | X_l = k, X_m = i)\ \mathrm{P}(X_l = k, X_m = i)}{\mathrm{P}(X_m = i)} \\ & \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_n = j | X_l = k)\ \mathrm{P}(X_l = k, X_m = i) \\ & \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Iz enačb Chapman-Kolmogorov lahko dobimo splošne verjetnosti prehodov v obliki verjetnosti prehodov enega koraka $p_{ij}^{(n,n+1)}$. Tako je porazdelitev markovske verige določena, ko poznamo verjetnosti prehoda enega koraka $p_{ij}^{(n,n+1)}$ ter začetno verjetnostno porazdelitev $q_j = \mathrm{P}(X_0 = j)$. Iz omenjenih podatkov lahko izračunamo verjetnost poljubne poti

$$\mathrm{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) \;=\; q_{i_0} p_{i_0 i_1}^{(0,1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1,n)}. \tag{3.5}$$

Pravimo, da je markovska veriga (časovno) homogena, če za vse $m, n \geq 0$ in $n \geq m$ velja naslednja enakost

$$p_{ij}^{(m,n)} \;=\; p_{ij}^{(0,n-m)}. \tag{3.6}$$

Verjetnosti prehoda enega koraka v primeru homogene markovske verige zapišemo kot $p_{ij}^{(n,n+1)}$, splošne verjetnosti prehoda pa so odvisne samo od časovne razlike $p_{ij}^{(m,l+m)} = p_{ij}^{(l)}$ (verjetnost prehoda l-korakov). Enačbe Chapman-Kolmogorov v primeru homogenih markovskih verig preidejo v

$$p_{ij}^{(n-m)} \;=\; \sum_{k \in S} p_{ik}^{(l-m)} p_{kj}^{(n-l)},\; m < l < n. \tag{3.7}$$

Če verjetnosti prehoda enega koraka zložimo v matriko prehodov $P = (p_{ij})_{i,j \leq N}$, potem verjetnost prehoda l-korakov dobimo s potenciranjem matrike P

$$p_{ij}^{(l)} \;=\; P_{ij}^{l}, \tag{3.8}$$

kar sledi direktno iz enačb Chapman-Kolmogorov. Če s $P(n)$ označimo matriko $P(n) = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \leq N}$, enačbe Chapman-Kolmogorov zapišemo kot $P(m+n) = P(m)P(n)$, od koder sledi $P(n) = P(1)^n = P^n$.

3.2.2 Slučajni hod

Slučajni hod je primer uporabe markovskih verig v diskretnem času. Definiran je kot $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$, kjer slučajne spremenljivke Y_j predstavljajo korake sprehoda. So neodvisne, z verjetnostno porazdelitvijo

$$\mathrm{P}(Y_j = 1) = p$$
$$\mathrm{P}(Y_j = -1) = 1 - p.$$

Lahko je preveriti, da velja markovska lastnost

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_n = j | X_1 = i_1, ..., X_m = i) \\
&= \mathrm{P}(X_m + Y_{m+1} + ... + Y_n = j | X_1 = i_1, ..., X_m = i) \\
&= \mathrm{P}(Y_{m+1} + ... + Y_n = j - i) \\
&= \mathrm{P}(X_n = j | X_m = i).
\end{aligned}$$

Matrika prehodov je neskončna

$$P = \begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & & & & & \\
\ddots & 0 & p & & & & \\
 & 1-p & 0 & p & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & 1-p & 0 & p & \\
 & & & & 1-p & 0 & \ddots \\
 & & & & & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Verjetnosti prehoda n-korakov izračunamo kot

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{(n+j-1)/2} p^{\frac{n+j-1}{2}} (1-p)^{\frac{n+j-i}{2}}, & \text{za } 0 \leq n+j-i \leq 2n \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

pri čemer je $n + j - 1$ sodo število.

3.2.3 Slučajna izplačila

Naj bo X_0, X_1, X_2 ... homogena markovska veriga. V vsakem trenutku n bo delec dobil plačilo r_i, če bo takrat v stanju i (izplačilo r_i je lahko tudi negativno). V korakih $0, 1, 2, \ldots, M$ bo delec dobil izplačila, ki so slučajne spremenljivke. Celotno izplačilo Y zapišemo kot

$$Y = \sum_{l=0}^{M} \sum_{k \in S} r_k \, \mathrm{I}(X_l = k).$$

Če začnemo v stanju i in označimo matematično upanje celotnega izplačila z E_i, velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_i(Y) &= \mathrm{E}_i\Big(\sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k\ \mathrm{I}(X_l = k)\Big) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k\ \mathrm{E}_i(\mathrm{I}(X_l = k)) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k\ \mathrm{P}_i(X_l = k) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k\ p_{ik}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Upoštevali smo lastnost indikatorja, ki lahko zavzame samo vrednosti 0 ali 1.

3.3 Odsekoma zvezni markovski procesi

Časovno zvezen markovski proces $X_t,\ t \geq 0$, z diskretno (končno ali števno) množico stanj S, imenujemo odsekoma zvezen markovski proces. Verjetnosti prehodov

$$P_{ij}(s,t) = \mathrm{P}(X_t = j | X_s = i)\ (s \leq t), \tag{3.9}$$

zadoščajo enačbam Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(s,u)\ P_{kj}(u,t), \tag{3.10}$$

za vsak $s < u < t$ in pri čemer je to posledica lastnosti Markova (Bühlmann, 1970, str. 40). Če s $P(s,t)$ označimo matriko z elementi $P_{ij}(s,t)$, enačbe Chapman-Kolmogorov preidejo v

$$P(s,t) = P(s,u)\ P(u,t), \tag{3.11}$$

za vsak $s < u < t$. Če poznamo matriko prehodov $P(s,t)$ in začetno verjetnostno porazdelitev $q_i = \mathrm{P}(X_0 = i)$, lahko z uporabo lastnosti Markova zapišemo splošne verjetnosti procesa X_t. Torej za $0 < t_1 < ... < t_n$ velja

$$\mathrm{P}(X_0 = i, X_{t_1} = j_1, ..., X_{t_n} = j_n) = q_i\ P_{ij_1}(0,t_1)...P_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1},t_n) \tag{3.12}$$

in

$$\mathrm{P}(X_{t_1} = j_1, ..., X_{t_n} = j_n) \;=\; \sum_{i \in S} q_i \; P_{ij_1}(0, t_1)...P_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1}, t_n). \quad (3.13)$$

Predpostavimo, da so funkcije $P_{ij}(s,t)$ zvezno diferenciabilne, kjer je

$$P_{ij}(s,s) = \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases},$$

kar implicira na obstoj funkcij

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t)|_{t=s} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(s, s+h) - \delta_{ij}}{h}. \quad (3.14)$$

V nadaljevanju bomo poskušali porazdelitev časa v posameznih stanjih opisati s funkcijami $\sigma_{ij}(s)$. Pri tem je bistvena interpretacija produkta $\sigma_{ij}(s)\; h$ pri majhnem h, kar predstavlja odstotek populacije, ki je na intervalu $[s, s+h]$ prešla iz stanja i v stanje j. Zaradi predpostavke o zvezni diferenciabilnosti funkcij $P_{ij}(s,t)$ sledi, da so funkcije $\sigma_{ij}(s)$ zvezne in je produkt $\sigma_{ij}(s)\; h$ dejansko približek verjetnosti preskoka na intervalu $[s, s+h]$.

Za $h > 0$ in $h \to 0$ veljajo enakosti

$$P_{ij}(s, s+h) \;=\; \begin{cases} h\sigma_{ij}(s) + o(h) & i \neq j \\ 1 + h\sigma_{ii}(s) + o(h) & i = j \end{cases}, \quad (3.15)$$

pri čemer pravimo, da je funkcija $f(h)$ razreda $o(h)$, če velja $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Razlaga prve zgornje vrstice je poenostavitev verjetnosti prehoda iz stanja i v stanje j v zelo kratkem časovnem intervalu $[s, s+h]$ - verjetnost je proporcionalna h in zato funkcijo $\sigma_{ij}(s)$ imenujemo jakost prehoda.

Izračunati želimo $P_{ij}(s, s+t)$ za vse $s, t \geq 0$ in $i, j \in S$. Ogledali si bomo razliko med $P_{ij}(s, s+t+h)$ in $P_{ij}(s, s+t)$, pri čemer bomo upoštevali zgornjo enačbo. Velja

$$\begin{aligned} P_{ij}(s, s+t+h) &= \mathrm{P}(X_{s+t+h} = j | X_s = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_{s+t+h} = j, X_{s+t} = k | X_s = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_{s+t+h} = j | X_{s+t} = k)\; \mathrm{P}(X_{s+t} = k | X_s = i), \end{aligned}$$

pri čemer smo uporabili formulo (Jacod, 2000, str. 11)

$$\mathrm{P}(A \cap B|C) \quad = \quad \mathrm{P}(A|B \cap C)\ \mathrm{P}(B|C)$$

in upoštevali lastnost Markova za prvi člen desne strani enačbe. Sledi

$$\begin{aligned} P_{ij}(s, s+t+h) &= \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} (\sigma_{kj}(s+t)\ h + o(h)) P_{ik}(s, s+t) \\ &\quad + P_{ij}(s, s+t)(1 - \sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)\ h). \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} \frac{P_{ij}(s, s+t+h) - P_{ij}(s, s+t)}{h} &= \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} \sigma_{kj}(s+t) P_{ik}(s, s+t) + \frac{o(h)}{h} \\ &\quad + P_{ij}(s, s+t)(-\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)). \end{aligned}$$

Če gre $h \to 0$, dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s, s+t) \quad = \quad \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} \sigma_{kj}(s+t) P_{ik}(s, s+t) + P_{ij}(s, s+t)(-\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)).$$

Če formalno označimo $\sigma_{jl}(s+t) = -\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)$, dobimo končni rezultat

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s, t) \quad = \quad \sum_{k \in S}^{n} P_{ik}(s, t) \sigma_{kj}(t). \tag{3.16}$$

Jakosti prehodov imajo pomembno vlogo, saj je z njimi določena porazdelitev odsekoma zveznega markovskega procesa. V bistvu smo dobili rezultat odvajanja enačbe (3.10) po času t, kjer upoštevamo, da je $u = t$. To so enačbe Kolmogorova, ki jih v matrični obliki zapišemo kot:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s, t) \quad = \quad P(s, t) A(t), \tag{3.17}$$

pri čemer je $A(t)$ matrika z elementi $\sigma_{kj}(t)$. Pri izpeljavi enačbe (3.16) smo implicitno predpostavili, da je množica stanj S končna. V tem primeru enačba (3.15) za vsak fiksen s ter i preide v končen sistem linearnih navadnih diferencialnih enačb (v bistvu spremenljivka s in indeks i nastopata samo v začetnem pogoju).

Podobno ima enačba (3.16) pri dani jakosti prehoda $\sigma_{ij}(t)$ eno samo rešitev, ki je kompatibilna z začetnim pogojem. Zaradi navedene lastnosti so markovski modeli običajno podani z jakostmi prehodov $\sigma_{ij}(t)$.

Če odvajamo enačbo (3.10) po s in upoštevamo $u = s$, dobimo enačbe Kolmogorova v obliki:

$$\frac{\partial}{\partial s} P(s,t) = A(s)P(s,t). \tag{3.18}$$

Pri normalnih pogojih sta oba zapisa enačb Kolmogorova ekvivalentna. Ekvivalentno velja v primeru, ko so jakosti prehodov omejene $\sup_{i,j} |\sigma_{ij}(t)| < \infty$, za vsak $t > 0$. V primeru, ko ta pogoj ne velja, ima drugi zapis večjo fundamentalno težo.

Kot rezultat enačbe (3.15) sledi $\sigma_{ij}(s) \geq 0$ za $i \neq j$ in $\sigma_{ii}(s) < 0$. Če odvajamo identiteto $\sum_{j \in S} P_{ij}(s,t) = 1$ po t v točki $t = s$, dobimo:

$$\sigma_{ii}(s) = -\sum_{j \neq i} \sigma_{ij}(s). \tag{3.19}$$

Od tod sledi, da je vsota elementov vsake vrstice matrike A enaka nič.

Za konec tega razdelka podajmo samo razmišljanje v primeru, ko so jakosti prehodov konstantne. V tem primeru dobimo homogeno markovsko verigo v zveznem času, kar aktuarsko pomeni, da se osebe ne starajo.

3.3.1 Ekvivalenca s Poissonovim procesom: homogeni primer

V naslednjih dveh razdelkih bomo prikazali uporabnost markovskih procesov v zavarovalništvu. Intuitivno lahko sklepamo, da so markovski procesi močnejše orodje, s katerim lahko ob privzetku določenih začetnih parametrov, ekvivalentno zapišemo modele, ki smo jih že predstavili v prejšnjih razdelkih. Za začetek si oglejmo Poissonov proces, ki smo ga opisali v razdelku (3.1.3). Gre za markovski proces z množico stanj $S = 0, 1, 2 \ldots$ in jakostmi prehodov

$$\sigma_{ij}(s) = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$

Matrika A je v tem primeru naslednje oblike:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & 0 \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & \lambda \\ 0 & & & & -\lambda \end{bmatrix}$$

Očitno je, da gre za Poissonov proces, ki ima neodvisne, stacionarne Poissonovo porazdeljene prirastke. Lahko je tudi dokazati, da gre za ekvivalentni definiciji.

Glavna uporabnost Poissonovega procesa je v bazičnem procesu štetja: naj X_t predstavlja število pojavov določenega dogodka v času $[0, t]$ (npr. število avtomobilskih nesreč). Iz matrike A sledi:

$$\begin{aligned} P'_{i0}(t) &= -\lambda P_{i0}(t) \\ P'_{ij}(t) &= \lambda P_{ij-1}(t) - \lambda P_{ij}(t), \ j > 0 \end{aligned}$$

z začetnim pogojem $P_{i0}(0) = \delta_{i0}$. Iz prve enačbe dobimo $P_{i0}(t) = \delta_{i0} e^{-\lambda t}$. Izračunamo še $P_{0j}(t)$ za vse t. Rešujemo enačbo $P'_{0j}(t) = \lambda P_{0j-1}(t) - \lambda P_{0j}(t)$, kjer uporabimo metodo variacije parametra. Splošna rešitev homogene enačbe $P'_{0j}(t) = -\lambda P_{0j}(t)$ je $\alpha e^{-\lambda t}$. Poiskati je potrebno še posebno (partikularno) rešitev oblike $\alpha_j(t) e^{-\lambda t}$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo $\alpha'_j(t) = \lambda \alpha_{j-1}(t)$, od koder dobimo rešitev $\alpha_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$. Splošno rešitev zapišemo kot:

$$P_{0j}(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} + \alpha e^{-\lambda t},$$

z začetnim pogojem $P_{0j}(0) = \delta_{0j}$, od koder sledi, da je $\alpha = 0$. Podobno dobimo splošne verjetnosti prehodov:

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}.$$

Zdaj lahko analiziramo lastnosti prirastkov procesa. Opazimo, da je proces časovno homogen in tudi homogen v množici stanj: $P_{ij}(t) = P_{i+l\ j+l}(t)$.

Z uporabo zadnje lastnosti in lastnosti Markova za $s_0 < s_1 < ... < s_n < s < t$ velja:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_t - X_s = j | X_{s_0} = i_0, X_{s_1} = i_1, ..., X_{s_n} = i_n, X_s = i) \\
&= \mathrm{P}(X_t = i + j | X_s = i) \\
&= P_{i\ i+j}(t-s) \\
&= P_{0j}(t-s) \\
&= \frac{(\lambda(t-s))^j}{j!} e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$

kar dokazuje, da je prirastek $X_t - X_s$ neodvisen od zgodovine procesa $(X_u,\ u \leq s)$ in ima stacionarno Poissonovo porazdelitev.

Ker se Poissonov proces X_t spremeni samo pri skokih, ga lahko opišemo tudi preko časov, v katerih so se zgodili skoki. S T_0, T_1, T_2 ... označimo čase, v katerih je bil proces v stanju $0, 1, 2$ ... Velja $X_{T_0} = 1, X_{T_0+T_1} = 2$ ..., kjer predpostavimo zveznost z desne.

Verjetnostna porazdelitev časa T_j preživetega v stanju j Poissonovega procesa je podana z:

$$
\mathrm{P}(T_0 > t | X_0 = 0) \quad = \quad \mathrm{P}(X_t = 0 | X_0 = 0) = P_{00}(t) = e^{-\lambda t},
$$

kar z drugimi besedami pomeni, da ima T_0 eksponentno porazdelitev s parametrom λ. Velja:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(T_1 > t | X_0 = 0, T_0 = s) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+s} = 1 | X_0 = 0, T_0 = s) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+s} - X_s = 0 | X_0 = 0, T_0 = s) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+s} - X_t = 0) \\
&= P_{00}(t) = e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Upoštevali smo, da so prirastki $X_{t+s} - X_t$ neodvisni od zgodovine procesa (do časa s). Zgornja izpeljava posledično pomeni, da je T_1 neodvisen od T_0 in da ima enako eksponentno porazdelitev. Podobno bi prišli do zaključka, da je T_0, T_1, T_2 ... zaporedje neodvisnih, eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljivk s parametrom λ.

Večina aktuarskih modelov vsebuje jakosti prehodov, ki so odvisne od starosti opazovane osebe. Kljub temu je glavne ideje lažje predstaviti na časovno homogenih procesih, kjer velja $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0,t-s) = P_{ij}(t-s)$ in kjer so jakosti prehodov σ_{ij} časovno neodvisne. Tako tudi eksponentna lastnost časov Poissonovega procesa ni naključje. Pozabljivost procesa zapišemo kot

$$\mathrm{P}(T > t+u | T > t) \quad = \quad \mathrm{P}(T > u),$$

kar določa eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke in je obvezni pogoj, ki velja za čase časovno homogenega Markovskega procesa.

Tako je prvi čas $T_0 = \inf\{t : \ X_t \neq X_0\}$ časovno homogenega odsekoma zveznega Markovskega procesa z jakostmi prehodov σ_{ij} eksponentno porazdeljen s parametrom $\lambda_i = -\sigma_{ii} = \sum_{j\neq i} \sigma_{ij}$, kar z drugimi besedami pomeni

$$\mathrm{P}(T_0 > t | X_0 = i) \quad = \quad e^{-\lambda_i t}.$$

Zgornjo enačbo dokažemo s pomočjo diskretizacije časa. Jasno je, da je dogodek $\{T > t\} = \{X_s = X_0, \ 0 \leq s \leq t\}$ težko obvladljiv, saj vsebuje kontinuum časov $0 \leq s \leq t$. Definirajmo dogodke

$$B_n \quad = \quad \{X_{\frac{lt}{2^n}} = X_0, \ l = 1, 2, ..., 2^n\}.$$

Tako je

$$\mathrm{P}(B_n | X_0 = i) \quad = \quad (P_{ii}(\frac{t}{2^n}))^{2^n} = (1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o(\frac{1}{2^n}))^{2^n}.$$

Ker velja $B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_n \supset ....$ in $\{T_0 > t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_0 > t | X_0 = i) \quad &= \quad \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m | X_0 = i) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\bigcap_{m=1}^{n} B_m | X_0 = i) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n | X_0 = i) \\
&= \quad \lim_{n\to\infty} (1 + \sigma_{ii}\frac{t}{2^n} + o(\frac{1}{2^n}))^{2^n} \\
&= \quad e^{\sigma_{ii} t} = e^{-\lambda_i t}.
\end{aligned}$$

Pri Poissonovem procesu ima čas skokov precejšnjo težo. V splošnem moramo definirati tudi stanje, v katerega bo proces prešel (skočil). Skok iz stanja $X_0 = i$ v stanje X_{T_0} se bo zgodil z verjetnostjo proporcionalno jakosti prehoda σ_{ij}. Velja tudi, da je X_{T_0} neodvisen od T_0. Očitno za $i \neq j$ velja

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X_{t+h} = j, t < T_0 < t+h | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+h} = j, T_0 > t | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+h} = j | X_0 = i, T_0 > t)\mathrm{P}(T_0 > t | X_0 = i) \\
&= \mathrm{P}(X_{t+h} = j | X_s = i,\ 0 \leq s \leq t) e^{-\lambda_i t} \\
&= P_{ij}(h) e^{-\lambda_i t}.
\end{aligned}$$

Če dobljeno delimo s h in limitiramo proti 0, je skupna verjetnostna porazdelitev oziroma gostota spremenljivk X_{T_0} in T_0 pogojno na $X_0 = i$ enaka

$$\sigma_{ij} e^{-\lambda_i t}.$$

Z drugimi besedami to pomeni enakost s produktom verjetnostne gostote časa $\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ in σ_{ij}/λ_i. To dokazuje, da je verjetnost skoka iz stanja i v stanje j, za $i \neq j$ enaka

$$\mathrm{P}(X_{T_0} = j | X_0 = i) \quad = \quad \sigma_{ij} e^{-\lambda_i t}$$

in posledično neodvisnost X_{T_0} in T_0.

Dobljeni rezultat velja tudi za kasnejše skoke, kar je posledica lastnosti Markova. Torej, ko proces pride v stanje j, ostane tam eksponentno porazdeljeno časa, kjer je čas porazdeljen s parametrom λ_j. V stanje k preide z verjetnostjo σ_{jk}/λ_j .

Kot končen rezultat tega razdelka navedimo še povprečno vrednost časa, ki ga proces prebije v stanju j. Ta je enaka $1/\lambda_j$. Navedeni podatek ima svojo težo, predvsem v primerih, ko jakostim prehoda določamo numerične vrednosti.

3.3.2 Ekvivalenca z modelom preživetja: nehomogeni primer

V razdelku 2.2 smo kot pomembno količino v razpravi o porazdelitvah preostale življenjske dobe definirali jakost smrtnosti μ_x. Intuitivno nam jakost smrtnosti predstavlja odstotek populacije stare x let, ki bo umrla v času $[x, x+1]$. Tako za funkcijo preživetja velja

$$S_x(t) \quad = \quad \exp(-\int_x^t \mu_u \; du).$$

Pri modelu preživetja imamo dve stanji: živ in mrtev. Jakost prehoda iz stanja živ v stanje mrtev je enaka $\mu(t)$, torej je kar jakost smrtnosti. Matrika jakosti prehodov je enaka

$$A(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} -\mu(t) & \mu(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer smo upoštevali dejstvi, da je vsota elementov vsake vrstice v matriki A enaka 0, ter da se oseba, ko pride v stanje mrtev ne vrne več v stanje živ. Iz enačb Kolmogorova sledi

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) \quad = \quad -\mu(t) P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t).$$

Ob upoštevanju začetnega pogoja $P_{\check{Z}\check{Z}}(s,s) = 1$ sledi

$$P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) \quad = \quad \exp(-\int_s^t \mu(x) \; dx).$$

To nam da ekvivalenco s funkcijo preživetja, saj je verjetnost, da bo oseba stara s let preživela še periodo časa w, enaka

$$\begin{aligned} {}_w p_s = S_s(w) = P_{\check{Z}\check{Z}}(s, s+w) \quad &= \quad \exp(-\int_s^{s+w} \mu_s(x) \; dx) \\ &= \quad \exp(-\int_0^w \mu_s(s+y) \; dy). \end{aligned}$$

Zadnja enačba dokazuje nujo po časovno odvisnih jakostih smrtnosti in po drugih aktuarskih modelih. Konstantna jakost smrtnosti μ bi pripeljala do časovno neodvisne verjetnosti ${}_w p_s$, kar je absurden rezultat.

Zgornji rezultat je ena izmed oblik splošne formule, ki smo jo podali v uvodu poglavja.

3.3.3 Integralska oblika enačb Kolmogorova

Naj bo X_t odsekoma zvezen Markovski proces. Z R_s bomo označili slučajni čas med časom s in naslednjim skokom

$$\{R_s > w,\ X_s = i\} \;=\; \{X_u = i,\ s \leq u \leq s+w\}. \tag{3.20}$$

Pri modelu preživetja bi po zadnji formuli prejšnjega razdelka izračunali verjetnost, da bo $R_s > w$, pri pogoju, da je proces v času S v stanju *živ*. V splošnem velja

$$\mathrm{P}(R_s > w,\ X_s = i) \;=\; \exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\ du). \tag{3.21}$$

Torej za stanje procesa $X_s^{(+)} = X_{s+R_i}$ (stanje v katerega bo proces skočil) sledi podoben zaključek, kot pri homogenem primeru:

$$\mathrm{P}(X_s^{(+)} = j | X_s = i, R_s > w) \;=\; \tfrac{\sigma_{ij}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}. \tag{3.22}$$

Dobljeno ni samo lepa lastnost odsekoma zveznih markovskih procesov, ampak je tudi zelo uporabna enačba za izpeljavo integralske oblike enačb Kolmogorova.

$$\begin{aligned}
P_{ij}(s,t) &= \mathrm{P}(X_t = j | X_s = i) \\
&= \sum_{l \neq i} \int_0^{t-s} \mathrm{P}(X_t = j | X_s = i, R_s = w, X_s^{(+)} = l) \sigma_{il}(s+w) \\
&= \exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u) du) dw \\
&= \sum_{l \neq i} \int_0^{t-s} P_{ij}(s+w,t) \sigma_{il}(s+w) \exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u) du) dw.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Zadnje predstavlja integralsko obliko enačb Kolmogorova. V to se lahko prepričamo z odvajanjem po t. Sama enačba sledi intuiciji, saj je stanje j različno od i in zato mora proces po nekem času skočiti iz stanja i. Po enačbi (3.21) se bo prvi skok po času s zgodil ob času $s+w$ z verjetnostno gostoto

$$\lambda_i(s+w) \exp(-\textstyle\int_s^{s+w} \lambda_i(u)\ du) \quad . \tag{3.24}$$

Po enačbi (3.22) bo proces skočil v stanje l po periodi $[s, s+w]$ z verjetnostjo $\sigma_{il}(s+w)/\lambda_i(s+w)$. Ostane še efekt prehoda iz stanja l v j v časovnem intervalu $[s+w, t]$.

Ko je $i = j$ se doda še dodatni člen $\exp(-\int_s^t \lambda_i(u)du)$, saj je proces lahko v stanju i celoten časovni interval $[s, t]$.

Če izhajamo iz zadnjega skoka pred časom t namesto iz prvega skoka po času s, dobimo še en tip integralske oblike enačb. Za $i \neq j$ velja

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k \neq j} \int_0^{t-s} P_{ik}(s, t-w)\sigma_{kj}(t-w) \exp(-\int_{t-w}^{t} \lambda_j(u)du)dw. \quad (3.25)$$

3.4 Zahtevnejši modeli

3.4.1 Multipli dekrementni model

Pri tem modelu so edini možni prehodi iz stanja 0 v stanje j, za $j = 1, \ldots, n$. Torej so jakosti prehodov $\sigma_{ij}(x)$ matematično gledano enake 0 za $i \neq 0$ in edina jakost prehoda različna od 0 je $\sigma_{0j}(x)$. Verjetnosti prehodov so podane s

$$P_{0j}(x, x+t) = \exp(-\int_x^{x+t} \sigma_{0j}(x+u)du),$$

pri čemer smo upoštevali, da je verjetnost skoka iz stanja 0 na časovnem intervalu $[x, x+t]$ enaka

$$\sum_{j=1}^{n} P_{0j}(x, x+t) = \exp(-\int_x^{x+t} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{0j}(x+u)du).$$

3.4.2 Model zakonskega stanu

Opazovana oseba se lahko nahaja v naslednjih stanjih: še ni bila poročena, je poročena, ovdovela, ločena, mrtva. V tem primeru definiramo odsekoma zvezen markovski proces na prostoru zgoraj omenjenih stanj.

3.4.3 Model števila škod pri voznikih

Naj bo X_t časovno homogen odsekoma zvezen markovski proces, ki opisuje kumulativno število škod, ki jih je povzročil voznik v časovnem intervalu $[0, t]$. Jakosti prehodov so podane z

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \alpha + i\beta & \text{če je } j = i+1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

kar z drugimi besedami pomeni, da se stopnje nesreč povečujejo linearno skozi voznikov nezgodni dosje. Matrika prehodov procesa je tako enaka

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & & 0 \\ & -\alpha-\beta & \alpha+\beta & \\ & & -\alpha-2\beta & \alpha+2\beta \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Enačbe Kolmogorova za začetno verjetnost $P_{0j}(t)$ so podane s

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= -\alpha P_{00}(t) \\ P'_{0j}(t) &= (\alpha + (j-1)\beta)P_{0j-1}(t) - (\alpha + j\beta)P_{0j}(t),\ j > 0. \end{aligned}$$

Enačbe rešimo podobno kot smo to storili pri Poissonovem procesu. Rešitev iščemo v obliki

$$P_{0j}(t) = \gamma_j(t)e^{-(\alpha+j\beta)t},$$

pri čemer funkcije $\gamma_j(t)$ zadoščajo

$$\gamma'_j(t) = \gamma_{j-1}(t)(\alpha + (j-1)\beta)e^{\beta t}.$$

To rešimo z uporabo rekurzije, pri čemer upoštevamo začetni pogoj $\gamma_j(0) = \delta_{0j}$. Dobimo

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= 1, \\ \gamma_1(t) &= \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1), \\ \gamma_2(t) &= \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2}(e^{\beta t} - 1)^2. \end{aligned}$$

Splošni člen je enak

$$\gamma_j(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)...(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}(e^{\beta t}-1)^j,$$

kar nas pripelje do rešitve

$$P_{0j}(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)...(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\beta^j}e^{-(\alpha+j\beta)t}(e^{\beta t}-1)^j.$$

3.4.4 Odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji

Predpostavimo, da želimo zavarovalniškemu trgu ponuditi produkt, ki bo vseboval kritje za primer smrti ali za primer bolezni (bolezen bi lahko definirali zelo splošno ali pa bi v definicijo zajeli samo določene težke bolezni, na primer kap ali infarkt). Tako je opazovana oseba lahko v naslednjih stanjih: zdrava, mrtva, bolna. Odsekoma zvezen markovski proces definiramo na prostoru $[Z, M, B]$, za dane časovno odvisne jakosti prehodov.

Matrika $A(t)$, ki nastopa v enačbah Kolmogorova, je enaka

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\sigma(t)-\mu(t) & \sigma(t) & \mu(t) \\ \rho(t) & -\rho(t)-\upsilon(t) & \upsilon(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru velja

$$\begin{aligned} \lambda_Z &= \sigma(t)+\mu(t) \\ \lambda_B &= \rho(t)+\upsilon(t) \\ \lambda_M &= 0 \end{aligned}$$

Najlažje je izračunati verjetnosti, da bo proces ostal (zvezno) v stanju zdrav ali bolan v časovnem intervalu $[s, t]$. Po enačbi (3.21) sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R_s > t-s|X_s = Z) &= \exp(-\int_s^t (\sigma(u)+\mu(u))du) \\ \mathrm{P}(R_s > t-s|X_s = B) &= \exp(-\int_s^t (\rho(u)+\upsilon(u))du) \end{aligned}$$

Preko integralske oblike enačb Kolmogorova dobimo direktno povezavo med verjetnostmi prehodov

$$P_{ZB}(s,t) \quad = \quad \int_0^{t-s} P_{BB}(s+w,t)\sigma(s+w)\exp(-\int_s^{s+w}(\sigma(u)+\mu(u))du)dw.$$

Za samo vrednotenje so predvsem zanimive verjetnosti prehodov iz stanja živ v obe ostali stanji, saj bi v tem primeru prišlo do izplačila dogovorjene zavarovalne vsote.

V splošnem za odsekoma zvezne markovske procese velja naslednji sistem linearnih diferencialnih enačb, kateremu morajo zadoščati verjetnosti prehodov

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{ij}(s,t) \quad = \quad \sum_{k\in S}^{n} P_{ik}(s,t)\delta_{kj}(t).$$

Sam proces smo definirali na prostoru stanj $[Z,M,B]$ in tako lahko za vsako stanje napišemo verjetnosti prehodov. Za stanje zdrav veljajo v splošnem naslednje linearne diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P_{ZZ}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\sigma_{ZZ}(t)+P_{ZB}(s,t)\sigma_{BZ}(t)+P_{ZM}(s,t)\sigma_{MZ}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{ZB}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\sigma_{ZB}(t)+P_{ZB}(s,t)\sigma_{BB}(t)+P_{ZM}(s,t)\sigma_{MB}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{ZM}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\sigma_{ZM}(t)+P_{ZB}(s,t)\sigma_{BM}(t)+P_{ZM}(s,t)\sigma_{MM}(t)
\end{aligned}$$

Za stanje bolan so linearne diferencialne enačbe v splošnem oblike

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P_{BZ}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\sigma_{ZZ}(t)+P_{BB}(s,t)\sigma_{BZ}(t)+P_{BM}(s,t)\sigma_{MZ}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{ZB}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\sigma_{ZB}(t)+P_{BB}(s,t)\sigma_{BB}(t)+P_{BM}(s,t)\sigma_{MB}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{ZM}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\sigma_{ZM}(t)+P_{BB}(s,t)\sigma_{BM}(t)+P_{BM}(s,t)\sigma_{MM}(t)
\end{aligned}$$

Za stanje mrtev velja v splošnem zapis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P_{MZ}(s,t) &= P_{MZ}(s,t)\sigma_{ZZ}(t)+P_{MB}(s,t)\sigma_{BZ}(t)+P_{MM}(s,t)\sigma_{MZ}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{MB}(s,t) &= P_{MZ}(s,t)\sigma_{ZB}(t)+P_{MB}(s,t)\sigma_{BB}(t)+P_{MM}(s,t)\sigma_{MB}(t)\\
\frac{\partial}{\partial t}P_{MM}(s,t) &= P_{MZ}(s,t)\sigma_{ZM}(t)+P_{MB}(s,t)\sigma_{BM}(t)+P_{MM}(s,t)\sigma_{MM}(t)
\end{aligned}$$

Opazovan markovski proces ima nekaj posebnosti. Ko oseba pride v stanje mrtev, ostane tam, kar posledično pomeni, da so jakosti prehodov $\sigma_{Mk}(t)$ enake 0 za $k \in \{Z, M, B\}$. Uporabimo notacijo za jakosti prehodov iz matrike $A(t)$ in zapišimo prejšnje linearne diferencialne enačbe v omenjeni obliki. Za stanje zdrav velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZZ}(s,t) &= -P_{ZZ}(s,t)(\sigma(t) + \mu(t)) + P_{ZB}(s,t)\rho(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZB}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\sigma(t) - P_{ZB}(s,t)(\rho(t)\upsilon(t)) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZM}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\mu(t) + P_{ZB}(s,t)\upsilon(t)
\end{aligned}$$

Za stanje bolan dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{BZ}(s,t) &= -P_{BZ}(s,t)(\sigma(t) + \mu(t)) + P_{BB}(s,t)\rho(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{BB}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\sigma(t) - P_{BB}(s,t)(\rho(t)\upsilon(t)) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{BM}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\mu(t) + P_{BB}(s,t)\upsilon(t)
\end{aligned}$$

Za stanje mrtev, z upoštevanjem zgornjih predpostavk, zaključimo

$$\begin{aligned}
P_{MZ}(s,t) &= 0 \\
P_{MB}(s,t) &= 0 \\
P_{MM}(s,t) &= 1
\end{aligned}$$

S tem smo definirali sistem linearnih diferencialnih enačb, ki ga v matrični obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)A(t),$$

pri čemer smo definirali matriko $A(t)$ za naš specifičen primer. V splošnem so sicer zgornje jakosti prehodov poljubne funkcije, ki zadoščajo navedenemu sistemu linearnih diferencialnih enačb in splošnim teoretičnim privzetkom (zveznost ...). Da pa bi prišli do konkretnih rešitev, moramo privzeti določene predpostavke, saj sistem linearnih diferencialnih enačb, kjer so koeficienti poljubne funkcije, ni analitično rešljiv, razen, če so jakosti prehodov konstante, kar pa ni smiselna predpostavka. Ena od možnosti je aproksimacija jakosti prehodov z analitično funkcijo. Samo vrednotenje omenjenega zavarovanja bomo izvedli po naslednjem poglavju, kjer bomo vpeljali stohastične modele obrestnih mer.

4 MODELI OBRESTNIH MER

Hans U. Gerber (Gerber, 1997, str. 67, 68) je v svojem delu Matematika življenjskih zavarovanj zapisal: *Obrestne mere v prihodnosti nam seveda niso poznane. Zato se zdi smiselno, da se vprašamo, zakaj prihodnjih obrestnih mer ne modeliramo s stohastičnim procesom. Dva razloga nas odvračata od takega modela:*

- *Pri življenjskem zavarovanju nas posebej zanima dolgoročen razvoj obrestne mere. Ravno za ta primer pa ne obstaja noben zanesljiv stohastičen model.*
- *Razumljivo je privzeti, da so prihodnja življenjska pričakovanja različnih oseb neodvisne slučajne spremenljivke. Pri predpostavki, da je obrestna mera fiksna, postanejo izgube zavarovatelja za različne police neodvisne slučajne spremenljivke. Porazdelitev za skupno izgubo lahko potem dobimo enostavno s konvolucijo. V posebnem primeru je varianca skupne izgube vsota individualnih varianc, kar nam omogoča aproksimacijo z normalno porazdelitvijo. Če bi predpostavili stohastične obresti, bi izgubili neodvisnost med policami, saj so zavezane isti letni obrestni meri.*

Prva trditev je vzeta kot izhodišče za preveritev osnovne hipoteze, kar je narejeno v naslednjih poglavjih. Druga trditev se nanaša na portfelj zavarovalnih pogodb, katerega v nadaljevanju ne obravnavamo, medtem ko neodvisnost med slučajnima spremenljivkama pričakovane življenjske dobe in stohastične obrestne mere velja. V praksi se kompleksen portfelj zavarovalnih pogodb pogosto vrednoti preko modelnih točk, kar pomeni vrednotenje posamezne zavarovalne pogodbe, ki nosi značilnosti določenega dela zavarovalnega portfelja.

V nadaljevanju so predstavljeni pomembnejši modeli obrestnih mer, s pomočjo katerih v šestem in sedmem simuliramo vrednotenje življenjskih zavarovanj. V poglavju 4.6 so predstavljeni generatorji ekonomskih scenarijev, ki jih uporabljamo pri izračunu časovne komponente vrednosti opcij in garancij, vgrajenih v zavarovalno pogodbo.

4.1 Delitev modelov

Modele obrestnih mer lahko razdelimo po več kriterijih. V splošnem jih po vsebini razdelimo na dve skupini, in sicer na ravnotežne modele ter na modele brez arbitraže (Cairns, 2004, str. 24). Glede na obravnavan čas v modelih jih delimo na diskretne, na primer binomske modele, kateri so predstavljeni v prvem razdelku in zvezne modele, kamor sodi zelo znan Vasičkov model (Vasiček, 1977). Lahko jih delimo tudi na težavnost, in sicer na preproste enofaktorske (na primer CIR model) in bolj kompleksne večfaktorske modele.

Ravnotežni modeli so zgrajeni na predpostavkah o delovanju ekonomskega okolja. Upoštevajo se investitorjeva nagnjenja k tveganju in težijo k ravnotežju med ponudbo obveznic in drugih vrednostnih papirjev ter povpraševanjem investitorjev. Tako se v tem kontekstu raziskuje vpliv ekonomskega okolja na krivuljo obrestnih mer. Pri enofaktorskih modelih to preprosto pomeni konstrukcijo preprostega stohastičnega modela, ki opisuje razvoj netvegane obrestne mere. To se naredi na način, da zajamemo bistvene karakteristike vpliva širšega ekonomskega okolja na obrestne mere. Potem s pomočjo osnovnega izreka dobimo teoretično ceno obveznic. S takšnim pristopom se teoretične cene razvijajo pod predpostavko o okolju brez arbitraže.

Pogosto se modeli za kratkoročne obrestne mere obravnavajo kot ravnotežni modeli. V praksi je težko dokazati, da ima model za kratkoročno obrestno mero izpeljavo iz ravnotežnega modela.

Modeli brez arbitraže kot začetno točko uporabljajo krivuljo terminskih obrestnih mer v trenutnem času. Tako je krivulja obrestnih mer, ki velja v trenutku izračuna, osnova za izračun parametrov modela. Prihodnje cene finančnih instrumentov (ki jih modeliramo) se tako razvijajo konsistentno z začetno krivuljo obrestnih mer, ki je brez arbitraže. Takšni modeli se uporabljajo za določanje cen predvsem kratkoročnih izvedenih finančnih instrumentov (Brigo, 2001).

Če bi z ravnotežnimi modeli določali ceno izvedenim finančnim instrumentom, bi se začetna 1 % napaka pri teoretični ceni obveznice na koncu poznala kot 10 % napaka v ceni izvedenega finančnega instrumenta, ki temelji na obveznici. Po drugi strani pa na dolgi rok noben model brez arbitraže ne more zajeti dinamike netvegane obrestne mere $r_f(t)$.

4.2 Binomski modeli v diskretnem času

4.2.1 Model brez arbitraže

Obravnavajmo preprost binomski model za dinamiko cen obveznic. Naj bo $P(t,T)$ cena brezkuponske obveznice v času t, ki dospe v plačilo v času T za $t = 1, 2, 3 \ldots$ in $T = t, t+1 \ldots$

Očitno velja $P(t,t) = 1$ za vse t. V času 0 definirajmo množico cen $P(0,T)$ za $T = 1, 2, \ldots, t_1$, pri čemer je lahko t_1 enak neskončno.

Za poljuben celoštevilski t je netvegana obrestna mera med t in $t+1$ definirana kot

$$r_f(t+s) \quad = \quad -\ln P(t, t+1), \quad \text{za } 0 \leq s < 1,$$

kar z drugimi besedami pomeni, da je enoletna brezkuponska obveznica enaka netveganemu premoženju. Na tem mestu vpeljimo še denarni račun $B(t)$, za katerega velja naslednja dinamika

$$\begin{aligned} B(t+1) &= \frac{B(t)}{P(t,t+1)} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{s=0}^{t} r_f(s)}. \end{aligned}$$

Torej denarni račun raste v povezavi z donosom enoletne brezkuponske obveznice $P(t, t+1)$. Ker je $P(t, t+1)$ znana v času t, je tudi stanje na računu $B(t+1)$ znano v času t.

Na tem mestu si zastavimo vprašanje: *ali je možno razviti stohastičen model za dinamiko omenjenih obveznic, ki bo brez arbitraže?*.

V primeru determinističnih obresti je to trivialen primer. Za začetek definirajmo terminsko obrestno mero $F(0,T,T+1) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,T+1)}$ za $T = 0,1,2\ldots$ Nadalje definirajmo trenutno netvegano obrestno mero $r_f(t)$, ki je kar ekvivalentna $F(0,T,T+1)$ za $T \leq t < T+1$. Definirajmo še

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} F(0,s,s+1)} \\ &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}. \end{aligned}$$

Z izpeljano strukturo rastejo cene vseh obveznic po netvegani obrestni meri in model je brez arbitraže (Cairns, 2004, str. 29).

4.2.2 Ho in Leejev model brez arbitraže

Predpostavimo, da v času 1 vse cene naraščajo ali padajo v odvisnosti od netveganega donosa na denar, torej za $T \geq 1$ velja

$$P(1,T) = \begin{cases} u(0,T)\frac{P(0,T)}{P(0,1)} & \text{za dvig,} \\ d(0,T)\frac{P(0,T)}{P(0,1)} & \text{za padec,} \end{cases}$$

pri čemer se T v funkcijah $u(0,T)$ in $d(0,T)$ navezuje na preostali čas do dospetja brezkuponskih obveznic na začetku časovnega intervala. V primeru, ko velja $u(0,s) = d(0,s) = 1$ za vse s, so vse cene v času 1 deterministične.

Omenjena koraka lahko naredimo v poljubnem času v prihodnosti. Tako za dano $P(\tau,T)$, $\tau > 1$, velja

$$P(t+1,T) = \begin{cases} u(t,T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} & \text{za dvig,} \\ d(t,T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} & \text{za padec.} \end{cases}$$

Potreben pogoj je zveznost funkcij $u(t,s)$ in $d(t,s)$ v času t. Po konvenciji predpostavljamo, da velja $u(t,s) \geq d(t,s)$ za vse t in s. Teoretično je možno, da sta funkciji $u(t,s)$ in $d(t,s)$ odvisni od zgodovine procesa do časa t. Mi bomo v nadaljevanju predpostavljali, da ne obstaja odvisnost cen do časa t, zato bomo uporabljali oznake $u(s)$ in $d(s)$ za vse $s \geq 1$. Veljati mora $u(1) = d(1) = 1$, kar zagotavlja $P(t,t) = 1$ za vse t.

Izrek 4.1 (Cairns, 2004, str. 30) *Predpostavimo, da se vse cene spremenijo med časom 0 in 1.*

(i) *Predpostavimo, da je model brez arbitraže. Velja*

$$u(T) > 1 > d(T) > 0, \quad \textit{za vse } T \geq 2.$$

(ii) *Predpostavimo, da je model brez arbitraže. Definirajmo*

$$q(T) \quad = \quad \frac{1 - d(T)}{u(T) - d(T)}, \ \textit{za vse } T \geq 2.$$

Potem $q(T)$ za $T \geq 2$ definira ekvivalentno martingalsko mero Q, tako da velja P_Q("dvig")=q in P_Q("padec") =$1 - q$.

(iii) *Predpostavimo, da obstaja ekvivalentna martingalska mera, Q; torej tak q v smislu* (ii), *da velja $0 < q < 1$ in $\mathrm{E}_Q(P(1,T)/B(1)) = P(0,T)/B(0)$ za vse T. Potem v binomskem modelu ne obstaja možnost arbitraže v časovnem intervalu od 0 do 1.*

Dokaz. Glej Cairns, 2004, str. 31, 32.

□

4.2.3 Modeli za netvegano obrestno mero

V prejšnjih razdelkih smo definirali preprosto binomsko okolje, ki zadostuje za definicijo modelov z določenimi lastnostmi, ki so uporabne predvsem iz računskega vidika. Pri teh modeli cene v času 0 tvorijo vhodni podatek in s tem dobimo modele, ki so pogosto časovno nehomogeni (to pomeni, da je kljub temu, da je netvegana obrestna mera enaka v dveh časovnih točkah, struktura cen lahko različna).

V določenih okoliščinah je zaželeno imeti časovno homogene modele, kar najbolje dosežemo s časovno homogenim markovskim modelom za netvegano obrestno mero pod ekvivalentno martingalsko mero Q.

Ena od možnih poti do omenjenega modela je, da predpostavimo, da netvegana obrestna mera zavzame vrednosti v diskretnem prostoru stanj R v kombinaciji z množico verjetnosti prehodov, ki določajo, kako se $r_f(t)$ spreminja. Če želimo, da model tvori popoln trg, potem lahko $r_f(t)$ zavzame samo eno vrednost (od dveh) na enem časovnem koraku.

Predpostavimo naslednji binomski model za $r_f(t)$. Naj bo $r_f(t) \in A$, pri čemer je $A = \{\ldots, r_{-1}, r_0, r_1, \ldots\}$ in pod mero P velja

$$\mathrm{P}_P(r_f(t+1) = r_{i-1} \text{ ali } r_{i+1} \mid r_f(t) = r_i) = 1 \text{ za vse } t, i.$$

Predpostavimo, da za vse t velja

$$\begin{aligned} P(t, t+2, r_i) &:= P(t, t+2) \\ &= \mathrm{e}^{-r_i}(q_i\, \mathrm{e}^{-r_{i+1}} + (1-q_i)\, \mathrm{e}^{-r_{i-1}}), \end{aligned}$$

za določeno množico konstant q_i, $0 < q_i < 1$, $i \in \mathbb{Z}$.

Izrek 4.2 (Cairns, 2004, str. 38) *Za vse* $T = t+1, t+2, \ldots$ *velja*

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathrm{E}_Q(\mathrm{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} r_f(s)} | r_f(t)) \\ &= P(t, t+1)\, \mathrm{E}_Q(P(t+1, T) | (r_f(t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

pri čemer je

$$\mathrm{P}_Q(r_f(t+1) = r_{i+1} | r_f(t) = r_i) = q_i$$

in

$$\mathrm{P}_Q(r_f(t+1) = r_{i-1} | r_f(t) = r_i) \;=\; 1 - q_i.$$

Dokaz. Glej Cairns, 2004, str. 38, 39.

□

Najlažji primer zgoraj definirane konstrukcije je model slučajnega hoda za $r_f(t)$. Prostor stanj je $R = \{r_f(0) + \delta n : \; n \in \mathbb{Z}\}$, pri čemer je δ velikost koraka.

Pri časovni homogenosti pod mero Q predpostavljamo, da so netvegane verjetnosti, da bo $r_f(t)$ narasla ali padla $(q,\, 1-q)$, konstantne skozi čas.

V tem modelu so martingalske verjetnosti (verjetnosti pod mero Q) konstantne.

Po (4.1) je netvegana verjetnost q določena preprosto s ceno brezkuponske obveznice v času 0, ki dospe v času 2. Iz enačbe iz izreka tako dobimo

$$\begin{aligned}
P(0,2) &= P(0,1)\ \mathrm{E}_Q(P(1,2)|r_f(0)) \\
&= \mathrm{e}^{-r_f(0)}(q\ \mathrm{e}^{-(r_f(0)+\delta)} + (1-q)\ \mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)}) \\
&\Rightarrow\ q = \frac{\mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)} - P(0,2)\ \mathrm{e}^{r_f(0)}}{\mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)} - \mathrm{e}^{-(r_f(0)+\delta)}}.
\end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je q tudi netvegana verjetnost, da bodo cene relativno padle glede na netvegan denarni račun.

Tako lahko v splošnem izračunamo cene brezkuponskih obveznic rekurzivno od dneva dospetja obveznice. Oznako $P(t,T)$ razširimo na $P(t,T,x)$, pri čemer je x število korakov navzdol v ceni obveznice od časa 0 do časa t. Sledijo naslednji koraki:

1. Za vsako stanje (t,x) naj bo $r_f(t,x)$ netvegana obrestna mera za periodo od t do $t+1$ pri danih x korakih navzdol. Za vse $t \geq 0$ velja $P(t,t+1) = P(t,t+1,x) = \mathrm{e}^{-r_f(t,x)}$.

2. Za dano ceno $P(0,2,0)$ izračunamo

$$q = \frac{\mathrm{e}^{-(r_f(0,0)-\delta)} - P(0,2,0)\ \mathrm{e}^{r_f(0,0)}}{\mathrm{e}^{-(r_f(0,0)-\delta)} - \mathrm{e}^{-(r_f(0,0)+\delta)}}.$$

3. Za $T = 2, 3, \ldots$

   (a) Definiramo $P(T,T,x) = 1$ za vsak $x = 0, 1, \ldots, T$ in $P(T-1,T,x) = \mathrm{e}^{-r_f(t,x)}$ za vse $x = 0, 1, \ldots, T-1$.

   (b) Predpostavimo, da poznamo množico cen $P(s,T,x)$ za vse $0 \le x \le s$ in $s = t, t+1, \ldots, T$. Potem za cene v času $t-1$ velja

$$\begin{aligned} P(t-1,T,x) &= P(t-1,t,x)\ \mathrm{E}_Q(P(t,T)|r_f(t-1) = r_f(t-1,x)) \\ &= \mathrm{e}^{-r_f(t-1,x)}(q\ P(t,T,x+1) + (1-q)\ P(t,T,x)). \end{aligned}$$

   (c) Ponavljamo korak (b) do $t = 0$.

4.3 Modeli obrestnih mer v zveznem času

V tem razdelku bomo predstavili modele obrestnih mer v zveznem času v povezavi s ceno brezkuponske obveznice. Pri izpeljavi rezultatov bomo uporabili bivariatno Laplaceovo transformacijo, ki nam bo omogočila zapis cene brezkuponske obveznice oblike $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$ za določeni funkciji A in B.

4.3.1 Enofaktorski modeli za netvegano obrestno mero

V nadaljevanju bomo obravnavali enofaktorske modele za obrestne mere v zveznem času. Osredotočili se bomo na določitev cen obveznic pri danem enofaktorskem modelu za netvegano obrestno mero $r_f(t)$. Predpostavili bomo, da je $r_f(t)$ Itôv proces, dan s stohastično diferencialno enačbo

$$dr_f(t) \;=\; a \cdot dt + b \cdot dW(t),$$

pri čemer je $W(t)$ standardno Brownovo gibanje pod naravno mero P, a in b sta določena $\mathcal{F}$-merljiva procesa in $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s)\ :\ s \leq t)$ je σ-algebra, generirana z zgodovino procesa $W(s)$ do časa t.

Za enofaktorske modele bomo predpostavili, da je $a = a(r_f(t))$ in $b = b(r_f(t))$, tako da je $r_f(t)$ homogen markovski proces.

V spodnji tabeli je predstavljenih nekaj časovno homogenih modelov.

Tabela 3. Enofaktorski, časovno homogeni modeli za $r_f(t)$

Model	$a(r)$	$b(r)$
Merton(1973)	μ	σ
Dothan (1978)	μr	σr
Vasiček (1977)	$\alpha(\mu - r)$	σ
Cox-Ingersol-Ross (1985)	$\alpha(\mu - r)$	$\sigma\sqrt{r}$
Pearson-Sun (1994)	$\alpha(\mu - r)$	$\sigma\sqrt{r - \beta}$
Brennan-Schwartz (1979)	$\alpha(\mu - r)$	σr
Black-Karasinski (1991)	$\alpha\ r - \gamma\ r \ln r$	σr

Vir: Cairns, 2004, str. 54

Obstajajo tri osnovne značilnosti, ki so za razvoj modelov zaželene, a ne bistvene.

- Obrestne mere naj bi bile pozitivne. Če model ne dovoli, da obrestne mere postanejo negativne, potem se upošteva, da ne obstaja možnost *ležanja denarja pod žimnico*, torej se na denar pripisujejo obresti.

- $r_f(t)$ naj bi bil avtoregresiven proces, torej predpostavljamo, da $r_f(t)$ ne more zavzeti vrednosti plus ali minus neskončnost ali nič, ampak bo proces sledil dolgoročnemu cilju. Avtoregresivnost je lastnost iz katere naj bi gradili model, saj je po sami definiciji avtoregresivnosti prihodnost odvisna od določenih preteklih podatkov.

- Dobili naj bi preproste formule za cene obveznic in za cene nekaterih izvedenih finančnih instrumentov. V nasprotju s prvima karakteristikama, je zadnja bolj računskega kot ekonomskega pomena.

Seveda moramo imeti v mislih, da obstoj elegantne formule ne dokazuje pomembnosti modela. Zmeraj moramo biti zmožni dokazati, da model da dobro aproksimacijo opazovanih realnih podatkov in da je primeren za praktično uporabo. Vsi modeli so približki realnosti, vendar so nekateri boljši, nekateri pa slabši.

Ostale karakteristike, ki naj bi jih imeli modeli, so:

- Ali se cene obveznic in izvedenih finančnih instrumentov izračunavajo direktno in preprosto? To nekako odraža zahtevo, da naj bi bile cene podane z analitično formulo.
- Model mora biti fleksibilen v smislu razširitve oziroma dopolnitve, če se na trgu pojavi določen vrednostni papir, ki ga model ni zajel.
- Ali model vsebuje dinamiko, ki je realna? Ali popisuje lastnosti oziroma dogodke, ki so se zgodili v preteklosti? Ali definira dovolj krivulj obrestnih mer za sedanjost in prihodnost, ki so konsistentne s preteklostjo?
- Ali model statistično ustreza zgodovinskim podatkom?
- Če je v modelu obrestna mera pozitivna, ali lahko terminske obrestne mere in trenutna obrestna mera zavzamejo vrednosti poljubno blizu 0?
- Ali ima model ravnotežni razvoj? Ravnotežni model povzema karakteristike celotnega trga skupaj z investitorji in njihovimi različnimi nagnjenji k tveganju. Gibanje cen obveznic je odvisno od tipa investitorjev. Preprostost in eleganca ravnotežnih modelov zbledi ob dejstvu, da v vsaki časovni točki teoretične cene odstopajo od realnih cen. Modeli brez arbitraže se ognejo omenjenemu problemu tako, da privzamejo začetne opazovane cene kot del vhodnih podatkov, izgubijo pa lastnost časovne homogenosti.

Enofaktorski modeli v splošnem ne zadostijo večini omenjenih kriterijev zaradi odvisnosti od enega faktorja (netvegane obrestne mere), ki povzroča nefleksibilnost in nerealnost modela. Zaradi tega se uporabljajo modeli, ki vsebujejo več kot en faktor.

4.3.2 Vasičkov model

Vasiček je leta 1977 predlagal model za netvegano obrestno mero $r_f(t)$, ki sloni na stohastični diferencialni enačbi

$$dr_f(t) \;=\; \alpha(\mu - r_f(t))\, dt + \;\sigma d\tilde{W}(t), \tag{4.2}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod martingalsko mero Q in so α, μ ter σ strogo pozitivne konstante (Vasiček, 1997). Sam proces je zelo znan strokovnjakom s področja stohastičnih diferencialnih enačb, in sicer gre za afino transformacijo Ornstein-Uhlenbeckovega procesa. V modelu:

- μ predstavlja netvegano, dolgoročno, povprečno obrestno mero,
- α predstavlja sorazmernostni faktor, ki vleče člen $(\mu - r_f(t))$ proti dolgoročnemu povprečju,
- σ predstavlja lokalno nestanovitnost kratkoročnih obrestnih mer.

V nadaljevanju bomo predstavili izreke, s pomočjo katerih bomo zapisali cene brezkuponskih obveznic pri določenem modelu obrestne mere. Izpeljane formule bomo uporabili v šestem poglavju, ko bomo vrednotili življenjska zavarovanja, saj je (zelo poenostavljeno) cena življenjskega zavarovanja v bistvu kar cena brezkuponske obveznice, pomnožena z določeno verjetnostjo. Pri tem bomo uporabili tudi oznako B, ki bo v danih izrekih predstavljala funkcijo v zapisu bivariatne Laplaceove transformacije in ne denarnega računa.

Izrek 4.3 (Cairns, 2004, str. 65) *Cena brezkuponske obveznice je podana s*

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}, \tag{4.3}$$

pri čemer je

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \\ A(t,T) &= (B(t,T)-(T-t))(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}B^2(t,T). \end{aligned}$$

Dokaz. V dokazu bomo uporabili naslednji delni rezultat (Cairns, 2004, str. 249, 250). Bivariatna Laplaceova transformacija za $\int_t^T r_f(s)ds$ in $r_f(T)$ pri dani $r_f(t)$ je

$$
\begin{aligned}
P_L(t,T,r,\nu,\omega) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\nu\int_t^T r_f(s)ds-\omega r_f(T)}|r_f(t)=r] \\
&= \mathrm{e}^{A(t,T,\nu,\omega)-B(t,T,\nu,\omega)r},
\end{aligned}
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T,\nu,\omega) &= \nu B_1(t,T)+\omega B_2(t,T), \\
B_1(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\alpha}, \\
B_2(t,T) &= \mathrm{e}^{-\alpha\tau}, \\
\tau &= T-t, \\
A(t,T,\nu,\omega) &= -\nu A_1(t,T)-\omega A_2(t,T)+ \\
&\qquad +\frac{1}{2}\nu^2C_{11}(t,T)+\nu\omega C_{12}(t,T)+\frac{1}{2}\omega^2C_{22}(t,T), \\
A_1(t,T) &= \mu(\tau-\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\alpha}), \\
A_2(t,T) &= \mu(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}), \\
C_{11} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(2\alpha\tau-3+4\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}), \\
C_{12} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})^2, \\
C_{22} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}).
\end{aligned}
$$

Cena brezkuponske obveznice v času t, ki dospe v času T pri dani $r_f(t)=r$ je enaka

$$
\begin{aligned}
P(t,T,r) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{\int_t^T r_f(s)ds|r_f(t)=r}] = P_L(t,T,r,1,0) \\
&= \mathrm{e}^{A(t,T,1,0)-B(t,T,1,0)r},
\end{aligned}
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T,1,0) &= B_1(t,T) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \\
A(t,T,1,0) &= -A_1(t,T) + \frac{1}{2}C_{11}(t,T) \\
&= -\mu(T-t-\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}) \\
&\quad +\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(2\alpha(T-t)-3+4\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}-\mathrm{e}^{-2\alpha(T-t)}) \\
&= (B(t,T)-(T-t))(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\frac{\sigma^2}{4\alpha}B^2(t,T).
\end{aligned}
$$

□

4.3.3 Cox-Ingersoll-Ross model

Vasičkov model ima splošno pomanjkljivost: netvegana obrestna mera lahko zavzame negativne vrednosti. Iz prakse lahko zavzamemo stališče, da so verjetnosti, da $r_f(t)$ postane negativna, majhne (ali zaradi kratkega časovnega horizonta ali zaradi majhne nestanovitnost $r_f(t)$). Tako bi dodaten pogoj nenegativnosti imel zelo majhen učinek na sam model. Kljub temu so pri določenih pogojih in realnih vrednostih parametrov množice verjetnosti negativnih vrednosti za $r_f(t)$ (statistično) značilne. Dodaten empirični dokaz, ki nasprotuje predpostavki, da je nestanovitnost $r_f(t)$ konstantna (v resnici je naraščajoča funkcija $r_f(t)$), postavi Vasičkov model še bolj pod vprašaj.

Prvi model za netvegano obrestno mero $r_f(t)$, ki predpostavlja pozitivnost $r_f(t)$, so predlagali Cox, Ingersoll in Ross (CIR model)

$$
dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t)) \cdot dt + \sigma\sqrt{r_f(t)} \cdot d\tilde{W}(t), \tag{4.4}
$$

pri čemer so α, μ, $\sigma > 0$ in $\tilde{W}(t)$ je standardno Brownovo gibanje pod martingalsko mero Q.

Izrek 4.4 (Cairns, 2004, str. 67)

a.) *Bivariatna Laplaceova transformacija je oblike*

$$P_L(t,T,r,\nu,\omega) \;=\; \mathrm{e}^{A(t,T,\nu,\omega)-B(t,T,\nu,\omega)r},$$

pri čemer so koeficienti

$$\begin{aligned} A(t,T,\nu,\omega) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\biggl(\frac{2\gamma(\nu)\mathrm{e}^{(\gamma(\nu)+\alpha)(T-t)/2}}{(\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu)}\biggr), \\ \gamma(\nu) &= \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2\nu}, \\ B(t,T,\nu,\omega) &= \frac{\omega(2\gamma(\nu)+(\gamma(\nu)-\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1))+2\nu(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)}{(\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu)}. \end{aligned}$$

b.) *Za $\nu = 1$ in $\omega = 0$ dobimo*

$$P(t,T,r) \;=\; \mathrm{e}^{\bar{A}(T-t)-\bar{B}(T-t)r},$$

pri čemer so

$$\begin{aligned} \bar{A}(\tau) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\biggl(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{(\gamma+\alpha)\tau/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\biggr), \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}, \\ \bar{B}(\tau) &= \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}. \end{aligned}$$

Dokaz. Glej Cairns, 2004, str. 253–263.

□

Zadnja izreka povesta, da so cene brezkuponskih obveznic pri Vasičkovemu in CIR modelu oblike $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$ za določeni funkciji A in B. V nadaljevanju se lahko vprašamo, ali obstajajo še kakšni modeli, ki so definirani s podobno afino formo za $P(t,T)$.

Zapišimo splošno stohastično diferencialno enačbo za $r_f(t)$:

$$dr_f(t) \;=\; m(t, r_f(t)) \cdot dt + s(t, r_f(t)) \cdot d\tilde{W}(t), \tag{4.5}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod martingalsko mero Q. Predpostavimo, da je cena brezkuponske obveznice podana s $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$. Potem z aplikacijo Itôve formule sledi

$$\begin{aligned} dP(t,T) \;&=\; P(t,T)\biggl[\biggl(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t} r_f(t) - Bm + \frac{1}{2}(Bs)^2\biggr)\, dt \\ &\qquad -Bs\; d\tilde{W}(t)\biggr], \end{aligned} \tag{4.6}$$

pri čemer je $m \equiv m(t, r_f(t))$ ... Vemo tudi, da pod mero Q velja

$$dP(t,T) \;=\; P(t,T)\bigl(r_f(t)\; dt + S(t,T,r_f(t))\; d\tilde{W}(t)\bigr), \tag{4.7}$$

pri čemer je $S(t,T,r_f(t))$ nestanovitnost $P(t,T)$. Zadnja enakost sledi iz zahteve, da morajo vsa tržna sredstva imeti pričakovano rast pri netvegani obrestni meri pod Q. Če definiramo

$$g(t,r) \;=\; \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t} r - Bm(t,r) + \frac{1}{2}B^2 s^2(t,r) - r,$$

sledi $g(t,r) = 0$ za vse t in r. Če odvajamo dvakrat po r, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \;&=\; -B(t,T)\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{2}B^2(t,T)\frac{\partial^2 (s^2(t,r))}{\partial r^2} = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{2}B(t,T)\frac{\partial^2 (s^2(t,r))}{\partial r^2} = 0. \end{aligned}$$

Ker je $B(t,T)$ funkcija tako t kot T, zgornja identiteta velja, če sta oba člena

$$\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 (s(t,r)^2)}{\partial r^2} = 0.$$

Trditev 4.5 *Potreben pogoj, da so formule cen brezkuponskih obveznic oblike* $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$, *je, da sta lokalni trend in nestanovitnost oblike*

$$m(t, r_f(t)) = a(t) + b(t)r_f(t) \quad \text{in} \quad s(t, r_f(t)) = \sqrt{\gamma(t)r_f(t) + \delta(t)},$$

pri čemer so $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ *in* $\delta(t)$ *deterministične funkcije časa.*

Za splošne, časovno odvisne $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ in $\delta(t)$ analitične rešitve za $A(t,T)$ in $B(t,T)$ običajno niso na voljo. Ko pa so omenjene funkcije konstante, lahko izpeljemo formule za A in B. V posebnem ločimo naslednje primere:

Vasiček (1977). $\gamma = 0$, $\delta = \sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha\mu$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t))dt + \sigma\, d\tilde{W}(t)$. Pokazali smo že, da velja

$$\begin{aligned} B(t,T) &= (1 - \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)})/\alpha \\ A(t,T) &= (B(t,T) - (T-t))(\mu - \sigma^2/2\alpha^2) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}B^2(t,T). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Cox, Ingersoll in Ross (1985). $\delta = 0$, $\gamma = \sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha\mu$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t)) + \sigma\sqrt{r_f(t)}\, d\tilde{W}(t)$. Dobimo

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{(\gamma+\alpha)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right) \\ \delta &= \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2} \\ B(t,T) &= \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Merton (1973). $\gamma = 0$, $\delta = \sigma^2$ in $b = 0$, od koder sledi $dr_f(t) = adt + \sigma\, d\tilde{W}(t)$. Sledi

$$\begin{aligned} B(t,T) &= T - t \\ A(t,T) &= \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 - \frac{1}{2}a(T-t)^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pearson in Sun (1994). $\delta = \sigma^2$, $\gamma = -\beta/\sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha(\mu+\beta)$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t))dt + \sigma\sqrt{r_f(t) - \beta}\, d\tilde{W}(t)$. $B(t,T)$ ima enako obliko kot pri CIR modelu, $A(t,T)$ pa nadomestimo z $A_P(t,T) = A(t,T) - \beta(T-t) + \beta B(t,T)$ (pri obeh μ zamenjamo z $\mu - \beta$).

4.4 Modeli brez arbitraže

Na začetku poglavja smo predstavili dve glavni skupini modelov obrestnih mer: kratkoročne modele in modele brez arbitraže. Razlog za razvoj modelov brez arbitraže je preprost. Kadar uporabimo kratkoročne modele obrestnih mer, na primer Vasičkov ali CIR model, običajno ugotovimo, da se teoretične cene $\hat{P}(t,T)$, dobljene z modelom, ne ujemajo z opazovanimi, dejanskimi cenami obveznic $P_{obs}(t,T)$ na trgu. Razlog lahko tiči v parametrih modela, katerih vrednosti so določene na podlagi zgodovinskih podatkov, kar povzroči odstopanje $\hat{P}(t,T)$ od $P_{obs}(t,T)$. Omenjene razlike lahko zmanjšamo tako, da zanemarimo zgodovinske podatke in model uravnotežimo s parametri, ki dajo kar najboljše ujemanje med $\hat{P}(t,T)$ in $P_{obs}(t,T)$ - seveda na podatkih, ki so zbrani do danes. Kljub temu je v praksi na voljo več obveznic kot parametrov. Navedeni postopek je zato nezadovoljiv, saj bi model morali prilagajati dnevno (ali celo še pogosteje). Po drugi strani naj bi bili parametri modela fiksni in časovno neodvisni (in s tem stohastični), kar pomeni, da sam proces prilagajanja modela krši osnovne predpostavke modela.

Tudi pri cenah izvedenih finančnih instrumentov pridemo do podobnih razlik med teoretičnimi in opazovanimi cenami. Razlike lahko odpravimo na dva načina. Prvič, lahko razvijemo večfaktorske, časovno homogene modele, katerih parametri so prilagojeni zgodovinskim podatkom. Naj bo θ fiksna množica parametrov in $X(t)$ vektor stohastičnih spremenljivk stanja. Predpostavimo, da smo θ ocenili iz zgodovinskih podatkov. Model bo potemtakem zadovoljiv, če

- lahko vedno dobimo dober približek opazovanih cen obveznic in izvedenih finančnih instrumentov s pomočjo rednega (zveznega) prilagajanja $X(t)$,
- dobimo kvalitetne teoretične cene brez prilagajanja parametrov θ in
- je časovna vrsta prilagojenih vrednosti $X(t)$ konsistentna z dinamiko modela za $X(t)$.

Drugič, lahko razvijemo časovno nehomogene modele brez arbitraže, pri katerih so opazovane cene obveznic in izvedenih finančnih instrumentov določena oblika vhodnih podatkov in tako se $\hat{P}(t,T)$ natančno ujame s $P_{obs}(t,T)$ v času prilagoditve t.

V praksi se pogosteje uporablja drugi način. Razlogi so naslednji:

- na likvidnih trgih obveznic in opcij morajo biti vzdrževalci trga (*market makerji*) pripravljeni kupovati in prodajati po cenah, ki kotirajo. Če model vzdrževalca trga da različne cene od kotirajočih (in različne od ostalega trga), se ustvari priložnost za arbitražo, kar bo po vsej verjetnosti pomenilo določene negativne posledice za vzdrževalca trga,

- ko se na trgu (v javnosti) pojavi nova informacija (na primer sprememba kratkoročnih obrestnih mer), vzdrževalec trga želi oceniti kako bodo ostali udeleženci na trgu popravili cene,

- vzdrževalci trga se tipično ukvarjajo z določanjem cen in zaščito kratkoročnih izvedenih finančnih instrumentov. Pri tem se porajajo dvomi o potencialnih posledicah uporabe prilagojenega modela, ki je nekonsistenten s predpostavkami modela, kar z drugimi besedami pomeni, da bo kljub rednemu prilaganju parametrov modela prišlo do določene napake. Omenjena napaka je pri kratkoročnih modelih manjša kot pri dolgoročnih modelih,

- investicijske banke, ki ponujajo izvedene finančne instrumente izven trga, želijo določiti cene le teh konsistentno z najbližjimi izvedenimi finančnimi instrumenti, s katerimi se trguje.

4.4.1 Markovski modeli

Obravnavali bomo modele, pri katerih

- so cene vhodni podatek in

- je pogojna porazdelitev $P(s,T)|\mathcal{F}_t$, $t < s < T$, enaka $P(s,T)|X(t)$, pri čemer je $X(t)$ končno dimenzionalen Itôv proces. (Tako je dovolj poznati vrednost $X(t)$, da bi opisali prihodnjo dinamiko $P(s,T)$. Vsaka dodatna informacija o preteklosti ne vpliva na opis dinamike v prihodnosti.)

V nadaljevanju bomo definirali modela, kjer je $X(t) = r_f(t)$.

Ho in Leejev model

Ho in Lee sta leta 1986 predlagala naslednji model za netvegano obrestno mero

$$dr_f(t) \;=\; \theta(t)\cdot dt + \sigma \cdot d\tilde{W}(t), \qquad (4.11)$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod ekvivalentno martingalsko mero Q. V bistvu gre za bolj splošno obliko Mertonovega modela za slučajni sprehod, pri katerem je $\theta(t)$ konstanta.

Predpostavimo, da imamo kot vhodni podatek cene $P(0,T)$, za vse $T > 0$. Naj bo

$$f(0,T) \;=\; -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(0,T)$$

začetna krivulja terminskih obrestnih mer. Če je

$$\theta(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial T} f(0,T) + \sigma^2 T,$$

potem lahko pokažemo, da velja

$$\mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_0^T r_f(t)dt} | r(0)] \;=\; P(0,T)$$

in

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{A(t,T)-(T-t)r_f(t)},$$

pri čemer je

$$A(t,T) \;=\; \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + (T-t)f(0,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2.$$

Opazimo, da ima $P(t,T)$ afino obliko, kot pri Vasičkovem in CIR modelu.

Sledi

$$f(t,T) \;=\; -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T) = r_f(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t),$$

od koder dobimo rešitev za $r_f(t)$

$$\begin{aligned} r_f(t) &= r_f(0) + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma\,\tilde{W}(t) \\ &= r_f(0) + f(0,t) - f(0,0) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t) \\ &= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Torej

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t) \\ &= f(0,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 + \sigma\tilde{W}(t). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Hull in Whiteov model

Hull in White sta leta 1990 predlagala posplošitev Vasičkovega modela, in sicer

$$dr_f(t) \;=\; \alpha(\mu(t) - r_f(t))dt + \sigma\; d\tilde{W}(t), \tag{4.14}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod Q in $\mu(t)$ predstavlja deterministično funkcijo časa. Pogosto je zgoraj zapisan model predstavljen kot $dr_f(t) = (\theta(t) - \alpha r_f(t))dt + \sigma\; d\tilde{W}(t)$, vendar deterministična funkcija $\theta(t)$ nima tako direktne interpretacije, kot jo ima $\mu(t)$.

V Vasičkovemu modelu je $\mu(t) = \mu$ konstanta. Ho in Leejev model je poseben primer, pri čemer gre $\alpha \to 0$ in $\alpha\mu(t) \to \theta(t)$, ko gre $\alpha \to 0$.

Predpostavimo, da velja

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}) \\ P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T) - B(t,T) r_f(t)}, \end{aligned}$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \\
A(t,T) &= \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)})^2(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t}).
\end{aligned}
$$

Povzamemo lastnosti Ornstein-Uhlenbeckovega procesa

$$
r_f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} r_f(0) + \alpha \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mu(s)ds + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\, d\tilde{W}(s).
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
\alpha \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mu(s)ds &= f(0,t) - \mathrm{e}^{-\alpha t} r_f(0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2 \\
\Rightarrow \quad r_f(t) &= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2 + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\, d\tilde{W}(s).
\end{aligned}
$$

4.4.2 Heath-Jarrow-Mortonovo okolje

V nadaljevanju bomo podali splošno okolje, znotraj katerega lahko razvijemo določene specifične modele. Obravnavali bomo obnašanje modela obrestnih mer v brezarbitražnem okolju, pri čemer je začetna krivulja terminskih obrestnih mer del vhodnih podatkov.

Tako bomo obravnavali neskončno mnogo procesov $f(t,T)$ za $0 \leq t \leq T$, in sicer en proces za vsak $T \in \mathbb{R}$. Kljub temu ni nujno, da so modeli tako kompleksni. Če je model odvisen od treh virov slučajnosti, potem obravnavamo primer kot tridimenzionalen in ne kot neskončno dimenzionalen. Tako je za dano $f(t,T)$, za vse T, dovolj, da poznamo spremembe krivulje terminskih obrestnih mer na intervalu $(t, t+dt]$ samo za tri datume do dospetja, kar je dovolj, da določimo spremembe za vse ostale zapadlosti (Musiela, 2004).

V tem razdelku bomo predstavili enofaktorske modele, v naslednjem pa večfaktorske.

Vzemimo začetno krivuljo terminskih obrestnih mer $f(0,t)$ kot začetno točko. Za fiksen T je $f(t,T)$ Itôv proces, ki zadošča

$$df(t,T) \;=\; \alpha(t,T)\cdot dt + \sigma(t,T)\cdot dW(t)$$

ali

$$f(t,T) \;=\; f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)\; dW(s)$$

za vsak $T > t$, pri čemer sta $\alpha(t,T)$ in $\sigma(t,T)$ odvisni od $f(t,T)$ ali celotne krivulje terminskih obrestnih mer ali še bolj splošno, od $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s) : s \leq t)$.

Pri enofaktorskih modelih za vse zapadlosti T definiramo Itôve procese, ki so odvisni od istega enodimenzionalnega vira slučajnosti $W(t)$. Sledi, da so spremembe skozi celotno krivuljo terminskih obrestnih mer pozitivno, ampak nelinearno korelirane.

Tehnični pogoji:

(i) za vse T sta $\alpha(t,T)$ in $\sigma(t,T)$ odvisni od zgodovine $W(s)$ do časa t.

(ii) $\int_0^T \sigma^2(t,T)dt$ in $\int_0^T |\alpha(t,T)|dt$ sta skoraj gotovo končna.

(iii) $\int_0^T \int_0^u |\alpha(t,u)|dt\; du$ je končen.

(iv) $f(0,T)$ je deterministična in zadošča $\int_0^T |f(0,u)|du < \infty$.

(v) $\mathrm{E}[|\int_0^u \sigma(t,u)dW(u)|du] < \infty$.

Ker je $df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$, sledi

$$r_f(T) \;=\; \lim_{t\to T^-} f(t,T) = f(0,T) + \int_0^T \sigma(s,T)\; dW(s) + \int_0^T \alpha(s,T)ds.$$

Pri tem je $r_f(T)$ lahko markovski ali ne, odvisno od oblike $\sigma(s,T)$.

Denarni račun ima vrednost $B(t)$ in zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$
\begin{aligned}
dB(t) &= r_f(t)B(t)dt \\
\Rightarrow \quad B(t) &= B(0)\mathrm{e}^{\int_0^t r_f(u)du} \\
&= B(0)\mathrm{e}^{\int_0^t f(0,u)du+\int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)du\ \ ds+\int_0^t(\int_s^t \sigma(s,u)du)dW(s)}.
\end{aligned}
$$

Pri izpeljavi tretjega člena v eksponentu smo uporabili tehnični pogoj (v), po katerem je dovoljeno zamenjati vrstni red integriranja.

Na trgu so cene brezkuponskih obveznic določene kot

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)du} \\
&= \mathrm{e}^{-\int_0^t(\int_t^T \sigma(s,u)du)dW(s)-\int_t^T f(0,u)du-\int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)du\ \ ds}.
\end{aligned}
$$

Če definiramo diskontirane cene premoženja kot

$$
\begin{aligned}
Z(t,T) &= \frac{P(t,T)}{B(t)} \\
P(t,T) &= \mathrm{e}^{\int_0^t S(s,T)dW(s)-\int_t^T f(0,u)du-\int_0^t\int_s^T \alpha(s,u)du\ \ ds},
\end{aligned}
$$

pri čemer je $S(s,T) = -\int_s^T \sigma(s,u)du$, dobimo z uporabo Itôve formule

$$
dZ(t,T) \;=\; Z(t,T)[(\frac{1}{2}S^2(t,T) - \int_t^T \alpha(t,u)du)dt + S(t,T)dW(t)].
$$

Ker $B(t)$ nima nestanovitnosti, $S(t,T)$ interpretiramo kot nestanovitnost $P(t,T)$.

V nadaljevanju bomo diskontirano ceno premoženja spremenili v martingal, kar lahko storimo s spremembo mere. Definiramo

$$
\gamma(t) \;=\; \frac{1}{2}S(t,T) - \frac{1}{S(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)du.
$$

Po kriteriju Novikova (Jacod, 2000, str. 239) mora $\gamma(t)$ zadoščati pogoju $\mathrm{E}_P[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma(t)^2dt}] < \infty$. Potem obstaja nova mera Q, ki je ekvivalentna P in je

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s)ds$$

Brownovo gibanje pod mero Q. Pod mero Q velja

$$dZ(t,T) = Z(t,T)S(t,T)d\tilde{W}(t).$$

Zato je $Z(t,T)$ martingal pod Q pod tehničnim pogojem, da velja

$$\mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T S^2(t,T)dt}] < \infty.$$

Sledi

$$dP(t,T) = P(t,T)(r_f(t)dt + S(t,T)d\tilde{W}(t)). \qquad (4.15)$$

S tem smo podali postopek spremembe mere pri dani brezkuponski obveznici, ki dospe v času T. V nadaljevanju bomo definirali povezavo med $\alpha(t,T)$, $\sigma(t,T)$ in $\gamma(t)$ za vse t in T na osnovi argumenta o brezarbitražnem okolju.

Predpostavimo, da imamo izvedeni finančni instrument, ki nam da X v času S, $S < T$. Za varovanje X bomo uporabili strategijo, ki vključuje denarni račun in brezkuponsko obveznico.

Varovanje se v splošnem določi z naslednjimi petimi koraki (Baxter, 1996):

- Poiščemo ekvivalentno mero Q, pod katero je $Z(t,T)$ martingal.
- Definiramo Q-martingal $D(t) = \mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t]$.
- Poiščemo proces $\phi(t)$, tako da je $D(t) = D(0) + \int_0^t \phi(s)dZ(s,T)$.
- Definiramo $\psi(t) = D(t) - \phi(t)Z(t,T)$.
- Trgovalna strategija $(\psi(t), \phi(t))$, ki predstavlja število enot $B(t)$ in $P(t,T)$, je samofinancirajoča in je varovanje za plačilo derivativa X v času S.

V nadaljevanju bomo omenjene korake natančneje pregledali. Mero Q smo že določili. Naj bo

$$D(t) = \mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t] \quad \text{za } t < s.$$

To je martingal pod Q. Tudi $Z(t,T)$ je Q-martingal. Tako s pomočjo izreka o reprezentativnosti martingalov vemo, da obstaja proces $\phi(t)$ in, da velja

$$dD(t) = \phi(t)dZ(t,T) \qquad \text{ali} \qquad D(t) = D(0) + \int_0^t \phi(s)dZ(s,T).$$

Recimo, da imamo trgovalno strategijo, pri kateri imamo $\phi(t)$ enot brezkuponske obveznice $P(t,T)$ v času t in $\psi(t) = D(t) - \phi(t)Z(t,T)$ enot denarja $(B(t))$ v času t.

Vrednost takšnega portfelja v času t je enaka

$$V(t) \;\; = \;\; B(t)D(t) = B(t)\mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t].$$

Sledi, da je trenutna sprememba vrednosti portfelja enaka

$$\begin{aligned} dV(t) &= d(B(t)D(t)) \\ &= D(t)dB(t) + B(t)dD(t) + dB(t)dD(t) \\ &= r_f(t)B(t)D(t) + B(t)\phi(t)dZ(t,T) + 0dt. \end{aligned}$$

Zdaj je $dP(t,T) = d(B(t)Z(t,T)) = r_f(t)B(t)Z(t,T)dt + B(t)dZ(t,T)$, torej je trenutni dobiček enak

$$\begin{aligned} &\psi(t)dB(t) + \phi(t)dP(t,T) \\ &\quad = (D(t) - \phi(t)Z(t,T))B(t)r_f(t)dt + \phi(t)[r_f(t)B(t)Z(t,T)dt \\ &\quad +B(t)dZ(t,T)] \\ &\quad = r_f(t)B(t)D(t)dt + \phi(t)B(t)dZ(t,T) \\ &\quad = dV(t). \end{aligned}$$

Sledi, da je takšna investicijska politika samofinancirajoča in je $V(t)$ vrednost izvedenega finančnega instrumenta v času t, ki izplača X v času S.

Recimo, da je v zgornjem primeru $X = 1$. Torej je izvedeni finančni instrument kar brezkuponska obveznica, ki zapade v času S. Izpeljali smo pošteno ceno za takšno obveznico na trgu brez arbitraže, kjer jo lahko sestavimo z denarjem in brezkuponsko obveznico, ki zapade v času T. Cena je enaka

$$P(t, S) = B(t)\mathrm{E}_Q[B(s)^{-1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^S r_f(u)du}|\mathcal{F}_t].$$

Diskontirana cena obveznice je

$$Z(t, S) = \frac{P(t, S)}{B(t)} = \mathrm{E}_Q[B(s)^{-1}|\mathcal{F}_t],$$

torej je $Z(t, S)$ Q-martingal. To seveda velja za vse obveznice. Sledi, da lahko vse obveznice spremenimo v martingale z uporabo navedene spremembe mere (vse vsebujejo enako ceno za tveganje na trgu $\gamma(t)$). Tako za vse zapadlosti T velja

$$\frac{1}{2}S(t, T) - \frac{1}{S(t, T)}\int_t^T \alpha(t, u)du = \gamma(t)$$

ali

$$\int_t^T \alpha(t, u)du = \frac{1}{2}S^2(t, T) - \gamma(t)S(t, T).$$

Z odvajanjem po T dobimo

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)(\gamma(t) - S(t, T)),$$

pri čemer smo upoštevali

$$\frac{\partial}{\partial T}S(t, T) = -\sigma(t, T).$$

Zdaj se vrnimo k osnovnemu modelu

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \\ &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)(d\tilde{W}(t) - \gamma(t)dt) \\ &= -\sigma(t,T)S(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

in posledično

$$r_f(t) = f(0,t) - \int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\tilde{W}(s),$$

kar v splošnem pomeni, da $r_f(t)$ ni markovski proces.

Povezava med HJM in markovskimi modeli

Predpostavimo, da je pri HJM $\sigma(s,t) = \sigma$ za vse s in t, tako da je $S(s,t) = -(t-s)\sigma$. Dobimo

$$r_f(t) = f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t),$$

kar je forma za $r_f(t)$ pri Ho in Leejevem modelu.

Če predpostavimo, da je $\sigma(s,t) = \sigma \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}$, velja $S(t,s) = -\frac{\sigma}{\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)})$ in sledi

$$\begin{aligned} -\int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds &= \frac{\sigma^2}{\alpha}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)})ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^2. \end{aligned}$$

Dobimo

$$r_f(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^2 + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}d\tilde{W}(s),$$

kar je forma Hull in White-ovega modela.

4.5 Večfaktorski modeli

Večfaktorske modele uporabimo, ko imamo več kot en vir slučajnosti. Po drugi strani so takšni modeli uporabni tudi v primerih, ko želimo modelirati bolj kompleksne opcije na obrestne mere (ki se nanašajo na dva ali več slučajnih virov), na primer opcija je lahko definirana v osnovi kot razlika med enoletno in petletno trenutno obrestno mero.

4.5.1 Afini modeli

Difuzijski model s spremenljivkami stanj $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ (ali z vektorskim zapisom $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))'$) je afin, če lahko cene brezkuponskih obveznic zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T)+\sum_{j=1}^{n} B_j(t,T)X_j(t)} \\ &= \mathrm{e}^{A(t,T)+B(t,T)'X(t)}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

pri čemer je

$$B(t,T) = (B_1(t,T), \ldots, B_n(t,T))'.$$

Model je časovno homogen, če so spremenljivke stanj $X(t)$ časovno homogene in sta funkciji $A(t,T)$ in $B(t,T)$ odvisne samo od $T-t$. V nadaljevanju se bomo omejili na časovno homogene modele.

Pri enofaktorskih modelih smo za časovno homogene modele zahtevali, da v kolikor model ustreza afini formi, mora $r_f(t)$ zadoščati stohastični diferencialni enačbi

$$dr_f(t) = (a + br_f(t)) \cdot dt + \sqrt{\gamma r_f(t) + \delta} \cdot d\tilde{W}(t).$$

Za večfakorske modele velja:

Izrek 4.6 (Duffie in Kan 1996) *Predpostavimo, da ima $P(t, t+\tau)$ formo oblike $\mathrm{e}^{A(\tau)+B(\tau)'X(t)}$. Potem mora $X(t)$ zadoščati stohastični diferencialni enačbi*

$$dX(t) \;=\; (\alpha + \beta X(t))dt + SD(X(t))d\tilde{W}(t), \tag{4.17}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ n-dimenzionalno Brownovo gibanje pod Q in $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)'$ je konstantni vektor, $\beta = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$ je konstantna matrika, $S = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ je konstantna matrika in $D(t)$ je diagonalna matrika oblike

$$D(X(t)) \;=\; \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1' X(t) + \delta_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2' X(t) + \delta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\gamma_n' X(t) + \delta_n} \end{pmatrix},$$

pri čemer so $\delta_1, \ldots, \delta_n$ konstante in je vsak $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in})'$ konstanten vektor.

Dokaz. Glej Duffie in Kan, 1996.

□

Gaussovi večfaktorski modeli

Gaussovi modeli so v preteklosti vzbudili malo zanimanja, ker dopuščajo možnost, da obrestne mere postanejo negativne. Prvo večfaktorsko razširitev Vasičkovega modela je naredil Langetieg (1980). Kasneje sta Beaglehole in Tenney (1991) postavila splošno teorijo. Vsi Gaussovi modeli so osnovani na naslednjem splošnem modelu.

Naj bo $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))'$ difuzijski proces s stohastično diferencialno enačbo

$$dX(t) \;=\; BX(t)dt + Kd\tilde{W}(t),$$

pri čemer sta B in K realni, konstantni, $n \times n$ matriki in $\tilde{W}(t)$ standardno n-dimenzionalno gibanje pod Q.

Netvegana obrestna mera je

$$r_f(t) \;=\; \mu + \theta' X(t),$$

pri čemer je $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)'$ vektor konstant. Če so vse θ_i različne od 0, potem lahko prilagodimo $X_i(t)$ in predpostavimo, da so vse $\theta_i = 1$ brez škode za splošnost. To ni mogoče v primeru, ko so nekatere θ_i enake 0.

S tem ima matrika B spektralno dekompozicijo oblike $B = B_R \Lambda B_L$, pri čemer je

- $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti matrike B. Nekatere lastne vrednosti so lahko kompleksne. Da bo $X(t)$ stacionaren, torej $X(t) \stackrel{d}{=} X(t+h), h > 0$, zahtevamo, da so realni deli vseh lastnih vrednosti negativni.
- B_L in B_R sta matriki levih in desnih lastnih vektorjev matrike B.
- Stolpci B_R so poravnani tako, da velja $B_R B_L = I$. Sledi $B^k = B_R \Lambda^k B_L$.

Omenjena dekompozicija ni enolično določena, vendar bomo z njeno uporabo zapisali ceno brezkuponske obveznice.

Definiramo

$$Y(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\Lambda t} B_L X(t),$$

pri čemer za vsako realno matriko A velja $\mathrm{e}^A = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k$. Aplikacija Itôve formule da

$$dY(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\Lambda t} B_L K d\tilde{W}(t).$$

Zato

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\Lambda u} B_L K d\tilde{W}(u) \\ \Rightarrow \quad X(t) &= B_R \mathrm{e}^{\Lambda t} B_L X(0) + B_R \mathrm{e}^{\Lambda t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\Lambda u} B_L K d\tilde{W}(u) \\ &= \mathrm{e}^{Bt} X(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{B(t-u)} K d\tilde{W}(u). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Prejšnji pogoj, da morajo biti realni deli lastnih vrednosti matrike B negativni, nam zagotavlja, da gresta $\mathrm{e}^{\Lambda t}$ in e^{Bt} proti 0, ko gre T proti neskončno. Zdaj naj bo $R(t) = \int_0^T r_f(t)dt = \mu T + \int_0^T \theta' X(t)dt$. Ta je normalno porazdeljen z

$$\mathrm{E}_Q[R(T)] = \mu T + \theta' B_R \Lambda^{-1}(\mathrm{e}^{\Lambda T} - I)B_L X(0)$$

in

$$\mathrm{Var}_Q[R(T)] = \int_0^T \theta' B_R \Lambda^{-1}(\mathrm{e}^{\Lambda T} - I)B_L K K' B_L'(\mathrm{e}^{\Lambda T} - I)\Lambda^{-1} B_R' \theta dt.$$

Sledi

$$\begin{aligned} P(0,T) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-R(T)}|X(0)] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{E}_Q[-R(T)|X(0)] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_Q[R(T)|X(0)]}. \end{aligned}$$

Primer (Beaglehole in Tenney 1991). Pišimo $r_f(t) = (X_1(t) + \mu_1) + (X_2(t) + \mu_2)$, pri čemer je $(X_1(t) + \mu_1)$ trenutna inflacija cen in $(X_2(t) + \mu_2)$ trenutna realna obrestna mera z

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= -\alpha_1 X_2(t)dt + \sigma_{11} d\tilde{W}_1(t), \\ dX_2(t) &= -\alpha_2 X_1(1)dt + \sigma_{21} d\tilde{W}_1(t) + \sigma_{22} d\tilde{W}_2(t). \end{aligned}$$

Posplošeni CIR modeli

Če privzamemo obliko iz izreka 4.6, velja $\delta_i = 0$ za vse i. Duffie (1996) je opisal primer, ko so $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ neodvisni, enofaktorski CIR procesi. Tako je za $i = 1, \ldots, n$

$$dX_i(t) = \alpha_i(\mu_i - X_i(t))dt + \sigma_i \sqrt{X_i(t)} d\tilde{W}_1(t),$$

pri čemer so $\tilde{W}_1(t), \ldots, \tilde{W}_n(t)$ neodvisna, enako porazdeljena, standardna Brownova gibanja pod mero Q. Netvegana obrestna mera je definirana kot

$$r_f(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t).$$

Zdaj so $X_i(t)$ neodvisni, torej velja

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_f(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T \sum_{i=1}^n X_i(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T X_i(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n A_i(T-t) - \sum_{i=1}^n B_i(T-t)X_i(t)}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

pri čemer je

$$A_i(\tau) = \tfrac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2}\ln\left(\tfrac{2\gamma_i \mathrm{e}^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right),$$
$$B_i(\tau) = \tfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}, \qquad \gamma_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 2\sigma_i^2}.$$

Če za vsak $i = 1, \ldots, n$ zagotovimo, da $2\alpha_i\mu_i/\sigma_i^2 > 1$, potem je verjetnost, da poljuben $X_i(t)$ doseže vrednost 0, enaka 0.

Variacijo dvofaktorskega CIR modela sta predlagala Longstaff in Schwartz (1992). Vzamemo

$$dY_i(t) = \alpha_i(t)(\mu_i - Y_i(t))dt + \sqrt{Y_i(t)}d\tilde{W}_i(t) \quad \text{za } i = 1, 2,$$

pri čemer sta $\tilde{W}_1(t)$ in $\tilde{W}_2(t)$ neodvisna. Za pozitivni konstanti c_1 in c_2 definiramo $r_f(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t)$ in drug proces $V(t) = c_1^2Y_1(t) + c_2^2Y_2(t)$. Sledi

$$\begin{aligned} dr_f(t) &= c_1dY_1(t) + c_2dY_2(t) \\ &= \alpha_1c_1(\mu_1 - Y_1(t))dt + c_1\sqrt{Y_1(t)}d\tilde{W}_1(t) + \\ &\qquad +\alpha_2c_2(\mu_2 - Y_2(t))dt + c_2\sqrt{Y_2(t)}d\tilde{W}_2(t) \\ &= \left[\alpha_1c_1\mu_1 + \alpha_2c_2\mu_2 - \frac{(\alpha_1c_2 - \alpha_2c_1)r(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)V(t)}{c_2 - c_1}\right]dt + \\ &\qquad +\sqrt{\frac{c_1(c_2r(t) - V(t))}{c_2 - c_1}}d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{\frac{c_2(V(t) - c_1r(t))}{c_2 - c_1}}d\tilde{W}_2(t). \end{aligned}$$

V bistvu je model nastavljen tako, da je $V(t)dt$ trenutna varianca od $r_f(t)$. Če je $c_1 < c_2$ velja, da je $V(t)$ omejena v vsakem času znotraj $(c_1 r_f(t), c_2 r_f(t))$.

V splošnem obstajajo še drugi večfaktorski modeli (konzolni modeli, večfaktorski HJM, QTSM modeli ...), ki niso predmet obravnave (glej Cairns, 2004, str. 111–118).

4.6 Generatorji ekonomskih scenarijev

V zavarovalni industriji obstajata dve vrsti generatorjev ekonomskih scenarijev (v nadaljevanju ESG), ki se ločita po namenu uporabe. *Tržno konsistenten* ESG se uporablja pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij zavarovalnih pogodb z vgrajenimi opcijami in garancijami. Za podporo izračuna solventnostnega kapitala pa se uporablja *realen* ESG, s katerim pridemo do realnih verjetnostnih porazdelitev glavnih riziko faktorjev (Baldvinsdottir, 2011).

Realni scenariji odražajo pričakovan prihodnji razvoj ekonomije s strani posamezne zavarovalnice. Vključujejo dodatek za tveganje, medtem ko je kalibracija nestanovitnosti in korelacij narejena na podlagi analize zgodovinskih podatkov.

Tržno konsistentni scenariji se uporabljajo pri tržno konsistentnem vrednotenju znotraj izračuna solventnostnega kapitala, pri čemer je glavni cilj modelirati tržne cene. Večinoma so ti scenariji nevtralni do tveganj, torej ne vsebujejo dodatka za tveganje in ne dopuščajo možnosti arbitraže. Pomembno je poudariti, da tržno konsistentni scenariji ne odražajo realnih pričakovanj (na primer: desetletni tržno konsistentni scenariji ne odražajo pričakovanj zavarovalnice kako bo svet izgledal deset let v prihodnosti. Lahko pa jih uporabimo za vrednotenje finančnega instrumenta z zapadlostjo desetih let.).

4.6.1 Kalibracija tržno konsistentnega ESG

Direktiva Solventnost II postavlja vsaj dve zahtevi glede uporabe tržno konsistentnega ESG. Prva je, da mora ESG generirati cene sredstev, ki so konsistentne z globokim, likvidnim in transparentnim finančnim trgom. Druga zahteva pa ne dovoljuje možnosti za arbitražo. Pri kalibraciji tržno konsistentnega modela je potrebno upoštevati naslednje zahteve:

- kalibracija mora biti izvedena s finančnimi instrumenti, ki v določeni meri odražajo naravo in ročnost zavarovalnih obveznosti (predvsem tistih, ki imajo visoke stroške garancij),
- kalibracija mora biti izvedena s trenutno krivuljo netveganih obrestnih mer, ki se uporabljajo pri diskontiranju denarnih tokov,
- kalibracija mora upoštevati ustrezno mero nestanovitnosti.

Glede mere za nestanovitnost znotraj okolja Solventnost II se odpirata naslednji možnosti: kalibracija na tržne cene različnih izvedenih finančnih instrumentov ali pa kalibracija na osnovi analize zgodovinskih podatkov o nestanovitnosti same naložbe.

4.6.2 Modeli

V splošnem ESG vsebuje mnogo modelov za različne vrste sredstev (predvsem naložb) in za različne vrste ekonomskih parametrov. V praksi se modeliranje skoncentrira na bolj ali manj obveznice, delnice in nepremičnine.

Vse omenjene vrste naložb se modelirajo kot stohastični procesi, ki zadoščajo spodnji stohastični diferencialni enačbi

$$dX(t) \;=\; \mu(t,(X(t)))dt + \sigma(t,X(t))dW(t),$$

pri čemer je $X(0) = x_0$ in W je Wienerjev proces.

Nestanovitnost vsakega modela je dobljena iz cen opcij, ko so le-te na voljo. Če tržnih podatkov ni, se nestanovitnost oceni na podlagi zgodovinskih podatkov.

Za modeliranje obveznic (obrestnih mer) se uporabljajo modeli, ki smo jih predstavili v prejšnjih poglavjih, medtem ko se za delnice in nepremičnine uporablja

Black-Scholesov model, pri čemer se pri modeliranju nepremičnin večinoma predpostavlja ničelna nestanovitnost. Black-Scholesov model predpostavlja, da se cena posamezne delnice giblje kot Brownovo gibanje

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

pri čemer je $S(0) = S_0$ in $W(t)$ je Wienerjev proces.

5 FINANČNO POROČANJE

Obrestne mere imajo pri finančnem poročanju pomembno vlogo, saj so od njih odvisni marsikateri rezultati. Prav okoli tega se pojavlja veliko vprašanj, čeprav se na prvi pogled zdi omenjeno področje zelo ozko, vendar ima velik vpliv na zavarovalništvo in pokojninske sklade.

5.1 Cilji finančnega poročanja pri diskontiranju

Finančno poročanje je lahko kompleksen, dolgotrajen proces, ki vsebuje pazljivo izbiro aktuarskih metod in predpostavk in projekcij denarnih tokov ter ostalih kategorij bilance stanja ter uspeha. Ko je potrebno denarne tokove zbrati v eni vrednosti na točno določen čas (datum vrednotenja), se uporabljajo obrestne mere. Ker le-te prevedejo finančno projekcijo v eno samo vrednost, ki jo poročamo, moramo pri procesu izbire obrestne mere pazljivo obravnavati tudi sam namen poročane vrednosti (Baker, 2000).

Proces izbire ustrezne obrestne mere v širšem kontekstu vsebuje definicijo namena, predvidene uporabnosti, pogleda deležnikov in pogleda poročanja navzven.

Tako se moramo pri sami izbiri obrestne mere najprej vprašati po namenu vrednotenja ali planiranja. Namen predstavlja vnaprej definiran cilj vrednotenja in ne namere, ki je pogosto subjektivne narave ali celo nedorečeno definirana. Tako cilji lahko predstavljajo finančno poročanje, izračun poštene vrednosti obveznosti, razvoj solventnostne obveznosti ali zadostitev določene statutarne zahteve. Seveda sam namen ni nujno opredeljen zakonsko ali statutarno.

Po drugi strani je kvaliteta in uporabnost rezultatov določenega modela odvisna od primernosti modela in predpostavk. Pomembno je, da aktuar pri svojem delu razmisli o namenu uporabnosti rezultatov modela, ko je v samem procesu izbire obrestne mere. Na primer, če je z modelom mišljeno, da bomo pridobili konzervativno oceno prihodnje obveznosti z uporabo prilagoditve obrestne mere, tako da bodo prihodnji denarni tokovi pričakovano manjši kot izračunana obveznost s 95 % verjetnostjo, potem se pričakuje uporaba relativno nizke obrestne mere. Pomembno je, da se zavedamo, da se včasih raje naredijo prilagoditve samih denarnih tokov, namesto da se omenjeni efekt pripozna skozi prilagoditev obrestnih mer za diskontiranje.

V nekaterih primerih pa se bo visoka obrestna mera lahko obravnavala kot konzervativna. Na primer, če bi se življenjska zavarovalnica odločila za nakup določenega dela portfelja druge zavarovalnice. S stališča kupca bo primerna obrestna mera enaka ali večja od pričakovane donosnosti dela portfelja, pri čemer bo profil tveganosti konsistenten portfelju, ki ga kupuje. Izbira manjše ciljne donosnosti bi rezultirala k delno optimalni prihodnji donosnosti. S plačilom večje nakupne cene, ki temelji na agresivni, v tem primeru, nizki obrestni meri, kupec implicitno projicira prihodnje donosnosti pod pričakovanimi ciljnimi donosnostmi, pri čemer predpostavlja, da so prihodnja pričakovanja razumno konsistentna z aktuarskimi predpostavkami.

Pogled na obrestne mere se spreminja skozi različne deležnike. Ti imajo lahko čisto različne poglede na vrednost denarja v času. Če so obrestne mere povezane z oportunitetnimi stroški, bodo imele različne stranke različne stroške in posledično različne obrestne mere. Po drugi strani imajo lahko različne stranke različne obrestne mere izključno zaradi različnih interesov v določeni entiteti oziroma planu. Primer je pokojninsko zavarovanje z vnaprej določenimi obveznostmi (izplačili), ki ga izvaja podjetje, ki kotira na borzi. Deležniki takšnega pokojninskega načrta (sklada) so lahko člani oziroma upravičenci, sami sponzorji, delničarji, nadzorniki in tudi lokalne oblasti. Interesi vseh omenjenih so seveda različni in pogosto kontradiktorni. Člani sklada se bodo zavzemali, da bodo njihove obveze poplačane, torej da bodo na voljo sredstva za poplačilo pokojnin. Sponzorji imajo fokus na samem sponzoriranju, ki mora biti v skladu s strategijo podjetja. Delničarji se zavzemajo za pošteno vrednotenje sredstev in obveznosti. Vse te interese naj bi uravnotežil pogled regulatorja in to ne samo v smislu statutarnih ter zakonskih pravil ampak tudi z vidika profesionalizma v obliki aktuarskih ter računovodskih smernic.

5.1.1 Namen

Najbolj pogosto navedeni primeri namena projekcij oziroma vrednotenj vsebujejo:

- zadovoljitev finančnih standardov poročanja,
- določitev poštene vrednosti sredstva ali obveznosti,
- izračun solventnostne vrednosti,
- izpolnitev statutarnih oziroma zakonskih določil.

Čeprav je namen v zgoraj omenjenih primerih jasno izražen, to ne zmanjšuje kompleksnosti problema oziroma profesionalne izbire aktuarja.

Dober primer je določitev poštene vrednosti sredstva ali obveznosti, kar običajno vsebuje največ profesionalnega znanja, saj se vrednotenje navezuje na zunanje pogoje kapitalskih trgov, predvsem zunanje donosnosti ali razmike.

Izračun solventnostnih vrednosti v zavarovalniškem smislu napeljuje k uporabi konzervativnih pristopov k diskontiranju, kar se navezuje na obrestne mere, ki so povezane z relativno referenčno vrednostjo, kot so netvegane obveznice, visoko kvalitetne podjetniške obveznice, obrestne mere finančnih zamenjav in druge. V primeru Direktive Solventnost II bo referenčna vrednost kar predpisana.

Statutarna in računovodska vrednotenja včasih zahtevajo najmanj profesionalnega znanja in pristopa, saj ima aktuar zelo malo manevrskega pristopa pri izbiri obrestne mere. Sicer je zelo pogosto, da statutarne ali računovodske smernice ne predpisujejo obrestne mere. V tem primeru mora aktuar skrbno analizirati še namen, pogled deležnikov ter poročanja navzven pri samem procesu izbire obrestne mere.

5.1.2 Predvidena uporabnost

Obrestne mere pri finančnem poročanju uporabljamo pri:

- izračunu vrednosti obveznosti,
- izračunu vrednosti sredstev,
- izračunu sedanje vrednosti denarnih tokov, na primer pri določanju bruto premije.

Ustrezna obrestna mera, in v posebnem relativni razpon obrestne mere, je odvisna od predvidene uporabnosti. Če bo obrestna mera uporabljena za določanje vrednosti obveznosti, potem je bolj primerna uporaba nižje obrestne mere z namenom vključitve možnosti negativnega odklona od pričakovane vrednosti ali pa zgolj za zagotovitev eksplicitnega konzervativnega dodatka. Če bo obrestna mera uporabljena pri vrednotenju sredstev skozi diskontiranje prihodnjih denarnih tokov, potem je primerna relativno visoka obrestna mera, ki vključuje možnost negativnega odklona, ali zagotovitev konzervativnega dodatka ali pa odraža razmik obrestnih mer v kontekstu kreditnega ali likvidnostnega tveganja.

Zgoraj smo predpostavili, da se sredstva in obveznosti vrednotijo neodvisno. V določenih primerih pa temu ni tako in je zaželeno, da se sredstva in obveznosti vrednotijo s konsistentno obrestno mero. Takšen pristop je primeren, ko sredstva krijejo določeno obveznost. V tem primeru je smiselno, da se obveznost vrednoti kot sedanjo vrednost prihodnjih obligacij in diskontira z obrestno mero, ki jo pričakujemo iz naslova sredstev, ki krijejo obveznost. Konsistentne obrestne mere so lahko predpisane v statutu ali poklicnem standardu, odvisno od pravne ureditve okolja, kjer deluje aktuar.

Pri izračunu sedanje vrednosti prihodnjih denarnih tokov je potrebna velika mera strokovne oziroma profesionalne presoje. Če računamo sedanjo vrednost kot del procesa izračuna bruto premije na podlagi prihodnjih denarnih tokov, je primerno, da obrestno mero vežemo na zasluženo obrestno mero sredstev, ki so v ozadju analiziranega ali pričakovanega portfelja. Če je sedanja vrednost del poslovnih odločitev, potem je primerna obrestna mera vezana na ciljno donosnost projekta ali določenega dela posla.

Konsistentnost izbire obrestne mere z namenom uporabe lahko preverimo, seveda razen z aktuarsko presojo, s stres testi ali testi občutljivosti. Nekaj zagotovila dobimo tudi s spreminjanjem obrestne mere ter posledičnim opazovanjem konsistentnosti spremembe rezultatov v skladu s predvideno uporabnostjo.

V primeru, ko se obrestne mere uporabljajo pri vrednotenju prihodnjega posla, na primer pri združitvah ali prevzemih, je potrebna posebna pozornost. Kot smo omenili, uporaba visokih obrestnih mer poda konzervativno okolje v očeh kupca. Seveda nerazumno visoke (oziroma preveč konzervativne) obrestne mere pripeljejo do nakupne cene, ki je prenizka v primerjavi z ostalimi ponudniki in tako postavi kupca izven trga. Tako je v takšnih primerih pozornost potrebno nameniti tudi:

- upoštevanju ekonomskih in tržnih razmer,
- profilu tveganja ciljnega dela posla,
- sredstvom in obveznostim ciljnega dela posla in
- upoštevanju konkurence kot na primer kupčeve strategije da preceni ali podceni ali pa vstopi oziroma izstopi iz določenega trga.

Obrestna mera, ki se uporablja pri diskontiranju obveznosti iz pokojninskih zavarovanj, ima vpliv na vrednotenje podjetja pri procesu združevanja ali prevzema. V tem primeru je izbira obrestne mere povezana z obrestno mero v okviru računovodske politike, ali pa je odvisna od neke druge obrestne mere, določene s strani tretje osebe ali aktuarjev.

5.1.3 Pogled deležnikov

Pogled deležnikov materialno vpliva na izbiro ustrezne obrestne mere. Nekateri so tako bolj usmerjeni k varnosti in solventnosti in posledično naklonjeni uporabi konzervativne ali nizke obrestne mere. Ostale bolj zanima poštena vrednost v poslovnih izkazih, kar v kontekstu obrestnih mer pomeni, da so odvisne od zunanjih, opazovanih karakteristik, to je od vrednosti delnic ali donosnosti indeksa. V tem primeru so obrestne mere določene na podlagi tržnih transakcij.

Ostanejo deležniki, ki so naklonjeni bolj agresivnemu pristopu in uporabi večje obrestne mere. Takšen je lahko primer, če imajo vodilni managerji podjetja vezane nagrade na kratkoročne poslovne rezultate, ki se lahko signifikantno korigirajo z uporabo večje obrestne mere.

Regulatorji so v tem procesu udeleženi z nalogo uravnovešanja vseh interesov ostalih deležnikov. Na eni strani jih zanima solventnostna pozicija zavarovalnice, po drugi strani jih skrbijo sekundarni efekti, ki jih povzroča prevelik konzervatizem.

Različni pogledi, ki so včasih tudi v konfliktu, povzročajo potrebo in nujo, da aktuarji na začetku procesa vložijo dobršen del časa v analizo deležnikov, katere se bo aktuarski izračun dotaknil, in tako skušajo oceniti vpliv posameznega deležnika, in kako se bo to poznalo na sami izbiri obrestne mere.

Obrestne mere morajo biti izbrane z uravnoteženim upoštevanjem vseh pogledov deležnikov, profesionalnih obveznosti, veljavnih standardov dobre prakse (tako aktuarskih kot računovodskih) in ostalih, že omenjenih kriterijev. Ne glede na možnost, ali bo deležnik lahko ali ne vplival na izbiro obrestnih mer, mora biti aktuar zadovoljen z izbiro. V splošnem je predlagana dodatna previdnost, ko obrestna mera odraža interes le glavnega deležnika.

5.1.4 Pogled regulatorja

Sam pogled regulatorja je pogosto najbolj direktna usmeritev pri izbiri obrestnih mer. V nekaterih primerih, na primer v ZDA je regulator eksplicitno predpisoval višino obrestnih mer za različne namene (to je bilo v obdobju, preden se je uveljavila računovodska praksa, ki temelji na principih in ne na pravilih). Drug primer je stanje v Evropi, kjer po vpeljavi Direktive Solventnost II ne bo eksplicitno predpisanih obrestnih mer, bodo pa podana dovolj natančna navodila. Kljub temu, da takšen pristop dopušča aktuarjem nekaj svobode pri izbiri obrestnih mer, je sam proces dobro definiran in opredeljen, tako da ne bo prostora za različne interpretacije.

Pogled regulatorja se v praksi izkaže kot prva opora, kamor se aktuarji naslonijo v procesu izbire obrestne mere in tako nič manj pomemben dejavnik kot tisti, ki smo jih omenili v prejšnjih razdelkih.

5.2 Dekompozicija obrestnih mer

Osnovna komponenta posameznih obrestnih mer danega gospodarskega okolja oziroma ekonomije je netvegana obrestna mera v danem času. Seveda v praksi nobena naložba ni netvegana, zato je potrebno imeti v mislih pogled v smeri najmanj tvegane naložbe.

Netvegana obrestna mera naj bi tako vsebovala le minimalno tveganje, gotovost same cene in hitrosti prodaje, kar naj bi zagotavljala prisotnost globokega in likvidnega trga naložb. V splošnem se debata okoli netvegane obrestne mere konča ali pri državnih obveznicah z največjim ratingom ali pri obrestnih merah finančnih zamenjav. Kot primer lahko navedemo, da se je pri QIS 5 študiji za netvegano obrestno mero privzela obrestna mera finančnih zamenjav, ki se je zmanjšala za 10 baznih točk zaradi kreditnega tveganja.

Čeprav je nekako dosežen dogovor okoli netvegane obrestne mere, se stroka nikakor ne more zediniti okrog dodatkov oziroma pribitkov, ki se aplicirajo na netvegano obrestno mero. Kot primer je največji konsenz pri podjetniških obveznicah, kjer se vključi premija za nelikvidnost in kreditno tveganje za pričakovano in nepričakovano možnost neplačila. Nekatere druge komponente so elementi krivulj obrestnih mer, premija za takoimenovano udobnost, oportunitetni stroški lastništva vrednostnega papirja v primerjavi z investicijo v denar, residualno tveganje ter tveganje modela.

V teoriji in praksi je bilo razvitih mnogo modelov in pristopov za analizo komponent obrestnih mer (Creedon, 2008). Glede na kompleksnost problema se predpostavlja, da vsak model teži k poenostavitvam z namenom izvedbe posamezne analize. V praski se pokaže, da so relacije med komponentami zelo kompleksne in subtilne, kar presega meje kvantitativnih modelov. Kljub navedenim omejitvam to ne more biti razlog, da bi opustili modeliranje, vendar je potrebno povečati razumevanje omejitev modelov, podatkov, ki vplivajo na model in seveda rezultatov modela.

5.2.1 Premija za nelikvidnost

Likvidnost za lastnika sredstva predstavlja zmožnost hitre prodaje samega sredstva po predvideni ceni. Če ta pogoja nista izpolnjena, je sredstvo obravnavano kot nelikvidno in lastnik lahko zahteva dodatno donosnost, ki kompenzira tveganje dodatnih stroškov transakcije. Ta dodatna donosnost, poznana kot pribitek nad likvidno netvegano obrestno mero, obsega premijo za nelikvidnost in ostala tveganja, kot na primer kreditno tveganje.

Likvidnost se nanaša tudi na ceno in obseg poslov na sekundarnem trgu, ki ga v določenih okoliščinah vzpostavijo prav zavarovalnice. Na primer pozavarovalni trgi zagotavljajo pomemben vir likvidnosti za zavarovalne trge. Ker se deli oziroma bloki pozavarovanj ne morejo hitro prenesti po predvidenih cenah in so torej nelikvidni, pozavarovanje predstavlja do določene mere sekundarni trg za udeležence na zavarovalnem trgu. Podobno tudi rentna zavarovanja življenjskih zavarovanj služijo kot kvazi sekundarni trg za pokojninske obveznosti, in sicer v smislu, da sponzorji ali lastniki pokojninskih načrtov trgujejo s svojimi obveznostmi z zavarovalnicami v zameno za tržno ceno (v splošnem se s plačilom enkratne premije zavarovalnici prenese pokojninske obveznosti na zavarovalnico).

V preteklosti je bila premija za nelikvidnost za določene razvite trge sorazmerno nizka. Opažamo pa, da več časa kot mine od zadnje periode zmanjšane likvidnosti, manj so tržni udeleženci zaskrbljeni glede likvidnosti. S tem, ko skrbi glede likvidnosti padajo, se na drugi strani na trgih povečuje apetit po tveganju. Pomembnost premije za nelikvidnost se je povečala s signifikantnimi povečanji pribitkov na podjetniške obveznice med svetovno finančno krizo, ki se je začela leta 2008.

Na zavarovalno polico lahko gledamo kot na sredstvo, ki ga ima zavarovalec v odnosu do škode, ki se veže na zavarovalnico. Če obstajajo omejene možnosti odkupa police in hkrati ne obstaja trg, kjer bi lahko zavarovalec prodal polico, potem lahko na obveznosti iz police gledamo kot na nelikvidno sredstvo iz zavarovalčevega zornega kota in kot nelikvidno obveznost s stališča zavarovalnice. Večina zavarovalnih in pokojninskih obveznosti je nelikvidnih. Zavarovalec in zavarovatelj imata lahko različne apetite po tveganju in hkrati predpostavljata različne predpostavke okoli tveganj v denarnih tokovih. Posledično imata lahko tudi različna pogleda glede količine likvidnostnega tveganja v denarnih tokovih.

V nasprotju s sredstvi nelikvidnost obveznosti ni direktno merljiva, ampak jo je mogoče oceniti s pomočjo tehnike repliciranega portfelja. Kjer lahko denarne tokove iz obveznosti repliciramo do ustrezne mere natančnosti z denarnimi tokovi nelikvidnih sredstev, potem je nelikvidnost, ki je pripoznana kot pribitek, lahko uporabljena kot ocena za nelikvidnostno premijo za omenjene obveznosti. Omenjen koncept ni splošno priznan in sproža polemike.

S splošnim premikom k tržnemu finančnemu poročanju in nadzoru je bila uporaba premije za nelikvidnost tekom razvoja neenakomerna. Tako se v nekaterih poročilih ni smelo uporabljati premije za nelikvidnost, vendar je razvoj tekom let poskrbel, da jo je danes možno uporabljati. S tem razlogom je premijo za likvidnost najboljše obrazložiti v kontekstu same uporabe.

- **Mednarodni standardi finančnega poročanja (MSRP/IFRS):** trenutno veljavni standard (tako imenovana faza 1) implicitno dopušča uporabo premije za nelikvidnost. Končna oblika prihajajočega standarda (faza II) še ni dorečena, vendar se pričakuje, da bo za obrestne mere zahtevano, da so konsistentne s trenutnimi tržnimi cenami finančnih instrumentov, katerih karakteristike denarnih tokov so ekvivalentne karakteristikam denarnih tokov iz obveznosti zavarovalne pogodbe v smislu zapadlosti, valute in likvidnosti (IFRS Insurance Contract Exposure Draft (ED/2010/8)).

- **Solventnost II:** okrog uporabe premije za nelikvidnost se širom Evrope odvija strokovna ter politična debata. Tako se v začetnih testih vpeljave Direktive Solventnost II premija za nelikvidnost ni uporabljala, kar je imelo za posledico visoke kapitalske zahteve predvsem za zavarovalnice, ki prodajajo rentna zavarovanja. V QIS 5 študiji se je implementirala rešitev na osnovi poročila *CEIOPS Task Force Report on Liquidity Premiums*. Tako je bila premija za nelikvidnost uporabljena kot pribitek k netvegani obrestni meri in je v samem izračunu najboljše ocene obveznosti vrednost le-te zmanjšala. To zmanjšanje je sicer ublaženo z obveznim stresom premije za nelikvidnost, ki je obvezen korak pri izračunu solventnostnega zahtevanega kapitala. Kljub vsemu v končnem predlogu Direktive Solventnost II premija za nelikvidnost ni navedena kot možna prilagoditev netvegane obrestne mere. Obveljali sta prilagoditev za nestanovitnost in uskladitvena prilagoditev, pri čemer je za obe prilagoditvi potrebno pridobiti dovoljenje Agencije za zavarovalni nadzor. Prilagoditev za nestanovitnost za vsako valuto posebej temelji na razponu med obrestno mero, ki bi jo bilo mogoče dobiti iz sredstev, vključenih v referenčni portfelj sredstev zadevne valute, in vrednostmi iz krivulje netvegane obrestne mere za to valuto. Uskladitvena prilagoditev se veže na točno določen portfelj obveznosti in portfelj sredstev, ki imajo podobne značilnosti denarnih tokov, kot najboljša ocena portfelja obveznosti, ki jih bo kril ta portfelj sredstev. Uskladitvena prilagoditev je enaka razliki med letno efektivno obrestno mero, ki se uporabja za diskontiranje denarnih tokov portfelja obveznosti in enkrat privede do vrednosti, ki je enaka portfelju sredstev in drugič do vrednosti, ki je enaka najboljši oceni portfelja obveznosti.

- **Tržno konsistentna notranja vrednost (MCEV):** originalni dokument iz junija 2008 *European Insurance CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles* eksplicitno prepoveduje uporabo premije za nelikvidnost kot pribitek k obrestni meri. V bistvu gre še dalje in prepoveduje kakršno koli prilagoditev krivulje obrestnih mer finančnih zamenjav v smislu prilagoditev za premijo za nelikvidnost ali za kreditno tveganje. Zelo verjetno zaradi finančne krize oziroma zaradi povečanj kreditnih pribitkov za zavarovalnice, ki prodajajo rentna zavarovanja, se je dokument prilagodil in dovoljuje za nelikvidne obveznosti uporabo referenčne obrestne mere s pribitkom za nelikvidnost. In to je tudi trenutno stanje pri izračunu MCEV (CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles, oktober 2009).

Splošno je priznano, da premije za nelikvidnost obstajajo, vendar jih na trgu ne vidimo direktno. Zgoraj smo sicer pokazali, da lahko s privzetimi omejitvami premijo za nelikvidnost obveznosti ocenimo z uporabo repliciranega portfelja primernih sredstev. Razvili so se različni pristopi za oceno likvidnostnega pribitka, v splošnem pa jih razdelimo v dve kategoriji (IAA, 2011, str. 19):

- metode, ki premijo za nelikvidnost ocenijo na podlagi tržnih mer (na primer hkratno imetje obveznice in povezane zamenjave kreditnega tveganja (CDS negative basis) ali obveznica, ki jo krije portfelj sredstev (Covered Bonds)) in

- metode, ki povečano donosnost razstavijo na komponente (na primer strukturni modeli in približek modela za Solventnost II).

5.2.2 Kreditno tveganje

Obrestne mere so pogosto dobljene iz tržnih vrednosti različnih tipov naložb, kot so državne obveznice, podjetniške obveznice in finančne zamenjave. Del donosnosti teh sredstev predstavlja kompenzacijo za kreditno tveganje, ki je povezano s samim sredstvom. Tako je pri pridobivanju obrestnih mer iz tržnih obrestnih mer pomembno, da razumemo koliko donosnosti je povezano s kreditnim tveganjem sredstva (Zhang, 2011).

Obrestne mere, ki jih uporabimo, so lahko ali pa niso prilagojene za kreditno tveganje. Vsaka prilagoditev bo odvisna od namena vrednotenja in zakonskih ter strokovnih usmeritev glede pridobivanja obrestnih mer. V primeru, da kreditno tveganje vključimo v končne obrestne mere, se moramo vprašati, ali je bolje, da se vključi efekt pričakovanega neplačila, premija za kreditno tveganje ali kar oboje. Naslednji faktor, ki ga je potrebno upoštevati, je prilagoditev za kreditno tveganje, in sicer ali naj sloni na kreditni sposobnosti pravne osebe, katere obveznosti se vrednotijo, ali je bolj smiselno, da sloni na širšem tržnem pogledu na kreditno tveganje.

Z omenjeno dilemo se je soočil tudi Odbor za mednarodne računovodske standarde (IASB). Razpravljali so o tem, ali naj obrestna mera, ki se uporablja pri vrednotenju obveznosti, vsebuje tudi kreditno tveganje podjetja. Usmeritev znotraj Mednarodnega standarda računovodskega poročanja 9 (IFRS 9) predlaga, naj se začetno vrednotenje finančne obveznosti za dolg podjetja izvede po tržni vrednosti. Torej, da vrednost vsebuje možnost, da se prilagodi za kreditno tveganje podjetja.

Za večino aktuarskih izračunov je pribitek za kreditno tveganje bolj odvisen od splošnega tržnega dojemanja kot pa od vidika posamezne pravne osebe, kar na primer pomeni, da se vrednost obveznosti zmanjša, če pride do padca bonitete dolga pravne osebe.

V primerih, ko so obrestne mere izpeljane iz sredstev, ki vsebujejo kreditno tveganje, se kreditno tveganje v obrestnih merah lahko razdeli na dva dela, in sicer na pričakovano možnost neplačila in premijo za kreditno tveganje. Premija za kreditno tveganje se pojavi, ker so investitorji tipično nenaklonjeni k tveganju in zahtevajo kompenzacijo nad pričakovanim nivojem neplačila za prevzeto kreditno tveganje.

Za izračun oziroma oceno pričakovanih možnosti neplačil na strani sredstev obstaja več metod, vsaka s prednostmi in slabostmi. Eden izmed možnih pristopov je uporaba zgodovinskega povprečja vrednosti. Je sicer najpreprostejši, vendar ima mnogo praktičnih težav pri implementaciji. Največja ovira je dostopnost in zanesljivost podatkov, ki jih potrebujemo za kalibracijo modela. Vpliv podatkov na vrednost pričakovanega neplačila je odvisen predvsem od izbrane dobe opazovanja podatkov. Z izbiro daljše dobe je potrebno zagotoviti več podatkov, vendar so starejši podatki manj relevantni od trenutnih podatkov.

Naslednji pristop je uporaba strukturnih modelov, na primer Mertonov model (Merton, 1974) ali model Lelanda in Tofta (Leland, Toft, 1996), ki ga uporablja angleška centralna banka. Model predpostavlja, da investitorji, ki vlagajo v podjetniške obveznice, diskontirajo denarne tokove s tvegano obrestno mero, da dobijo ceno, ki so jo pripravljeni plačati. Rezultat istega izračuna pri netvegani obrestni meri je potem lahko primerjan s ceno, dobljeno s tvegano obrestno mero, kot način kvantificiranja pričakovanih izgub. Torej razlika med netvegano ceno in tveganju prilagojeno ceno tako predstavlja vrednost pričakovanih izgub.

Prav tako za izračun premije za kreditno tveganje obstaja več možnih tehnik. V splošnem se pri teh tehnikah obrestne mere oziroma donosnosti razdelijo na:

- netvegano komponento,
- del za kreditno tveganje,
- del za likvidnostno tveganje in
- residualni del, za katerega se običajno pričakuje, da je majhen.

Če primerjamo skupen del, ki je namenjen za kreditno tveganje, z oceno pričakovane možnosti neplačila, dobimo premijo za kreditno tveganje.

Mertonov model lahko služi kot pristop k izračunu dela za kreditno tveganje. Po Mertonovem modelu se obveznica modelira kot:

- netvegana obveznica;

- put opcija, ki se glasi na sredstva izdajatelja obveznice;

- notranje vrednosti cene put opcije pred samim dospetjem. Ta komponenta predstavlja morebiten presežek vrednosti obveznosti nad vrednostjo sredstev. Če je podjetje solventno, je notranja vrednost enaka nič;

- časovna vrednost cene put opcije pred dospetjem. Ta komponenta dodaja vrednost opciji, četudi je notranja vrednost opcije trenutno enaka nič in predstavlja možnost, da bo opcija imela vrednost ob dospetju, čeprav so obveznosti trenutno manjše od sredstev.

Tako je časovna vrednost opcije skupni del za kreditno tveganje v ceni obveznice. Torej vsebuje tako pričakovani strošek prihodnjih neplačil in premijo za kreditno tveganje. Model predpostavlja še lognormalno porazdelitev kapitala podjetja ob dospetju, ki je lahko direktno uporabljen za izračun nivoja pričakovanega neplačila.

5.2.3 Politično tveganje

Tveganje, da posamezna država ne poplača obveznosti iz izdanih državnih obveznic, je samo eno izmed političnih tveganj, ki vplivajo na obliko krivulje obrestnih mer. Ostala tveganja so na primer pritisk na centralno banko glede posojilnih obrestnih mer, ohlapna oziroma šibka fiskalna ter davčna politika. Država se lahko prav tako vmeša na trg menjalnih tečajev s tem, da fiksira menjalni tečaj svoje valute, ali pa uporabi tehniko, ki fiksiran menjalni tečaj periodično prilagodi tako, da ujame tržni menjalni tečaj.

V praksi je prilagoditev krivulje obrestnih mer za politično tveganje stvar debate, pri čemer je eden izmed možnih pristopov, da se prilagodi donosnost državnih obveznic za donosnost zamenjav kreditnega tveganja (CDS), ki ščitijo pred tveganjem državnega neplačila. Seveda je vsaka prilagoditev odvisna od namena in oblike vrednotenja (Pahud, 1996).

5.3 Vrednotenje zavarovalnih obveznosti

Za različne namene finančnega poročanja se uporabljajo različni pristopi k obrestnim meram, na primer:

- Predlagana obrestna mera v okolju Solventnost II vsebuje eksplicitne prilagoditve za odpravo kreditnega tveganja iz obrestnih mer, ki so izpeljane iz finančnih zamenjav.
- Predlagani MSRP 4 faza 2 nakazuje na uporabo obrestnih mer, ki jih dobimo iz tržnih vrednosti, pri čemer je vpliv kreditnega tveganja minimalen. V primeru, da uporabljena sredstva imajo kreditno tveganje, se mora vpliv le-tega na samo donosnost izničiti.
- MCEV principi govorijo o uporabi obrestnih mer, izpeljanih iz finančnih zamenjav, pri čemer se prilagodijo za nelikvidnost. V kontekstu kreditnega tveganja se ne zahteva prilagoditev obrestnih mer.

V nadaljevanju bomo podrobno predstavili ozadje vrednotenja zavarovalnih obveznosti po trenutnih zakonskih zahtevah in po zahtevah, ki jih prinaša Solventnost II. V prvem primeru govorimo o tradicionalnem vrednotenju, v drugem o tržno konsistentnem vrednotenju. Oba načina vrednotenja predstavljata izhodišča, na osnovi katerih se v zadnjih poglavjih primerja modele in rezultate.

5.3.1 Tradicionalno vrednotenje

Tradicionalno vrednotenje obveznosti življenjskih zavarovanj povzema trenutno veljavna zakonska določila in računovodske standarde. Zakonske osnove so podane v Zakonu o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 13/2000 s spremembami, v nadaljevanju Zakon) in Sklepu o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij (Ur. l. RS, št. 3/2001 s spremembami, v nadaljevanju Sklep).

V 10. členu Sklepa je opredeljeno vrednotenje matematičnih rezervacij oziroma dolgoročnih obveznosti, razen tistih, ki so zapadle pred dnevom vrednotenja.

Vrednotenje se izvaja po aktuarskih načelih, ki temeljijo na razumnih pričakovanjih zavarovalcev in obveznostih zavarovatelja. Obveznosti zavarovatelja so izračunane na previdnih predpostavkah, ki vključujejo primerne presežke (varnostne dodatke) za morebitna neugodna odstopanja upoštevanih faktorjev. Vrednotenje dolgoročnih obveznosti upošteva vse prihodnje obveznosti zavarovatelja, določene s splošnimi in posebnimi pogoji za vsako posamezno zavarovalno pogodbo, pri kateri je po Zakonu potrebno oblikovati matematične rezervacije, upoštevajoč premije, ki bodo še plačane. Pri vrednotenju dolgoročnih obveznosti se med drugim upošteva:

- vsa zajamčena izplačila, do katerih je zavarovanec upravičen, vključno z zajamčeno odkupno vrednostjo;
- vse bonuse oziroma dobičke, do katerih je zavarovanec upravičen bodisi samostojno bodisi skupaj z drugimi zavarovanci, ne glede na to, v kakšni obliki so izraženi;
- vsa upravičenja, med katerimi lahko zavarovanec izbira na podlagi zavarovalne pogodbe;
- stroške, vključno s provizijo za sklepanje pogodb.

Vrednotenje dolgoročnih obveznosti je potrebno izvesti v skladu z določili, ki so navedena v nadaljevanju.

- *Načela izračuna dolgoročnih obveznosti*

  Višina dolgoročnih obveznosti se določi za vsako pogodbo posebej na osnovi prospektivne računske metode, kar pomeni, da je potrebno obravnavati vse prihodnje denarne tokove, ki izvirajo iz posamezne zavarovalne pogodbe. Zavarovalnica lahko uporabi retrospektivno računsko metodo (uporaba preteklih denarnih tokov) za izračun obveznosti, kadar zaradi narave zavarovalne pogodbe prospektivne računske metode ni mogoče uporabiti, ali kjer se da dokazati, da vrednost izračunane obveznosti ni manjša od obveznosti, izračunane z uporabo prospektivne računske metode.

  Uporaba ustreznih približkov je dovoljena samo, kadar je gotovo, da bo izračunana višina obveznosti, dobljena z njihovo uporabo, vsaj tako visoka, kot bi bila višina obveznosti, če bi uporabljali izračun po posameznih zavarovalnih pogodbah.

Načelo posamičnega izračuna ne sme preprečiti oblikovanja dodatnih rezervacij za splošne nevarnosti, ki se jih ne da opredeliti na nivoju zavarovanca.

Kadar ima zavarovanec z zavarovalno pogodbo določeno pravico do izplačila odkupne vrednosti, morajo biti matematične rezervacije v vsakem trenutku oblikovane vsaj v višini odkupne vrednosti zavarovanja. To pomeni, da opcija odkupa za zavarovalnico ne sme predstavljati likvidnostnega tveganja.

Pri ugotavljanju višine dolgoročne obveznosti se ne sme samovoljno spreminjati načina izračuna, hkrati pa mora biti na primeren način omogočeno nedvoumno ugotavljanje višine dobička, ki je nastal s trajanjem pogodbe.

Obveznosti za pogodbe, po katerih je zavarovalec upravičen do udeležbe na dobičku, se ugotavljajo glede na višino premije in višino naložb, ki krijejo te obveznosti, upoštevajoč dosedanjo prakso zavarovalnice glede časa in načina delitve dobička ali drugih ugodnosti, ki jih zavarovalnica po pogodbi nudi zavarovancem.

- *Vrednotenje prihodnjih premij*

V izračunu dolgoročne obveznosti ne sme biti v nobenem letu upoštevana vrednost prihodnje premije večja, kot je dejanska višina obračunane premije. Če se premija v obdobju trajanja pogodbe spreminja po enotni stopnji, v izračunu upoštevana vrednost prihodnje premije ne sme biti večja, kot je premija (v nadaljevanju enotna premija), ki bi bila ob sklenitvi pogodbe zadostna za pokritje obveznosti iz te pogodbe, ne upotevajoč stroškov in morebitnih dodatkov iz naslova dobička. Pri izračunu enotne premije upoštevamo isti čas plačevanja premij, isto obrestno mero in iste tablice smrtnosti ali iste ostale tablice, ki so uporabljene v izračunu obveznosti zavarovatelja po tej pogodbi. Če se premija v obdobju trajanja pogodbe spreminja, vendar ne po enotni stopnji, v izračunu upoštevana vrednost premije ne sme biti večja od premije, ki jo določimo po postopku, opisanem prejšnjem primeru, ustrezno modificiranem tako, da upošteva nihanja v višini premije, ki jo zavarovalec plača v posameznem letu.

V primeru, če med trajanjem pogodbe z aneksom k zavarovalni pogodbi zavarovalec/zavarovanec izkoristi možnost izbire, ki je opredeljena v splošnih pogojih, se v skladu s predhodnim odstavkom predpostavi, da so bile te spremembe pravilno ovrednotene že v trenutku izdaje police.

Za pogodbe, kjer koristi zavarovalca rastejo s plačilom posamezne premije ali vrednost premije ni znana do trenutka plačila premije, prihodnje premije in ustrezne obveznosti zavarovatelja ni nujno upoštevati toliko časa, dokler je rezervacija, ki krije nevarnost povečanja obveznosti zavarovalnice zaradi plačila bodočih premij, večja od zneska vplačanih premij.

Alternativne metode vrednotenja, različne od metod, ki so omenjene v zgornjih odstavkih, so dopustne, če je z uporabo alternativne metode zagotovljeno, da bo rezervacija večja, kot bi bila z uporabo metod, opisanih v prejšnjih odstavkih.

- *Stroški pridobivanja zavarovanj*

Stroški pridobivanja zavarovanj se pri vrednotenju dolgoročnih obveznosti upoštevajo z dodatkom k neto premiji. Višina dodatka k neto premiji iz naslova stroškov pridobivanja zavarovanja je omejena navzgor, tako da ne presega manjše od naslednjih dveh vrednosti:

  - 3,5 % pogodbene zavarovalne vsote življenjskega zavarovanja, enakomerno razdeljene na vse prihodnje premije, ki bodo plačane v pogodbenem obdobju trajanja zavarovanja, ter
  - dejanskih, v premijo vračunanih stroškov pridobivanja zavarovanj (brez davka), enakomerno razdeljenih na vse prihodnje premije, ki bodo plačane v pogodbenem obdobju trajanja zavarovanja.

Omenjeno povečanje ne sme nikoli preseči dejansko obračunane premije zavarovanja.

V zgornji definiciji smo uporabili izraz "neto premija", ki predstavlja premijo, ki zadošča za kritje obveznosti zavarovalnice iz naslova zavarovalne pogodbe. Izraz "pogodbena zavarovalna vsota življenjskega zavarovanja" je odvisen od oblike življenjskega zavarovanja:

- za doživljenjsko zavarovanje nevarnosti smrti - zavarovalna vsota;
- za police, kjer se zavarovalna vsota izplača ob doživetju, vključno mešana življenjska zavarovanja - zavarovalna vsota ob doživetju;
- za časovno omejeno zavarovanje nevarnosti smrti je ustrezna zavarovalna vsota definirana kot zavarovalna vsota na dan vrednotenja;
- za odložena rentna zavarovanja - kapitalizirana vrednost anuitet ob zaetku izplačil (ali v primeru denarne opcije - izplačilo v denarju, če je večje);
- za zavarovanja z določenim rokom izplačila - vsota, izplačana na koncu pogodbenega roka;
- za zavarovanja, kjer zavarovanci/zavarovalci prevzemajo naložbeno tveganje, manjša od zneska, ki ga bo zavarovalnica izplačala v primeru smrti in skupne vrednosti točk, ki pripadajo posamezni pogodbi, in skupnega zneska preostalih premij.

- *Obrestna mera*

Obrestna mera, ki se upošteva v izračunu sedanje vrednosti prihodnjih denarnih tokov za potrebe vrednotenja dolgoročnih obveznosti, ne sme presegati vrednosti, določene s previdno ugotovitvijo donosnosti naložb, ki krijejo te obveznosti, in v primernem obsegu tudi donosnosti, ki jo pričakujemo od prihodnjih naložb.

Maksimalna obrestna mera za novo sklenjene pogodbe, ki jo lahko zavarovalnica uporabi pri vrednotenju dolgoročnih obveznosti iz zavarovalnih pogodb, ki v izračunu premije in obveznosti upoštevajo garantirano obrestno mero, ne sme presegati 60 % povprečne obrestne mere na državne vrednostne papirje države, na katere valuto glasijo obveznosti zavarovalnice iz teh pogodb.

Za pogodbe, ki glasijo na domačo valuto, se pri ugotavljanju povprečne obrestne mere državnih vrednostnih papirjev upošteva ponderirano povprečje vseh dolgoročnih državnih vrednostnih papirjev, s katerimi se trguje na organiziranem trgu vrednostnih papirjev. Kot utež se upošteva velikost emisije posameznega papirja.

Agencija za zavarovalni nadzor ugotavlja povprečno obrestno mero dolgoročnih državnih vrednostnih papirjev in zavarovalnice obvešča o višini maksimalne obrestne mere.

- *Tablice smrtnosti in ostale tablice*

  Vsota obveznosti za posamezne vrste pogodb mora biti, kjer je to ustrezno, določena na osnovi previdno izbranih tablic smrtnosti in ostalih tablic.

  Zavarovalnica mora pri ugotavljanju obveznosti za rentna oziroma pokojninska zavarovanja upoštevati verjetnost preživetja najmanj v višini, kot to določajo nemške rentne tablice smrtnosti iz leta 1994.

- *Stroški*

  Rezervacije za stroške, povezane z izplačevanjem obveznosti iz naslova dolgoročnih zavarovalnih pogodb, prikazane eksplicitno ali upoštevane implicitno v matematičnih rezervacijah, ne smejo biti manjše od previdno določene vrednosti, ki je potrebna za kritje stroškov izpolnjevanja obveznosti, če bi zavarovalnica prenehala s sklepanjem novih pogodb eno leto po datumu vrednotenja.

  Pri določanju vrednosti rezervacije se upoštevajo dejanski stroški zavarovalnice, povezani s poravnavanjem obveznosti iz naslova dolgoročnih zavarovalnih pogodb v preteklem letu, kot tudi vpliv inflacije na prihodnje stroške, porast cen in zaslužkov.

- *Upravičenja, med katerimi lahko zavarovanec izbira na podlagi zavarovalne pogodbe*

  Matematične rezervacije morajo vključevati tudi možen porast obveznosti zavarovalnice zaradi odločitve zavarovalcev/zavarovancev, da izkoristijo dopustne spremembe v okviru zavarovalne pogodbe.

- *Negativne obveznosti*

  Izračunane negativne obveznosti iz dolgoročnih pogodb mora zavarovalnica postaviti na vrednost nič.

- *Samovoljne spremembe načina vrednotenja obveznosti*

  Samovoljno spreminjanje načina vrednotenja obveznosti ni dovoljeno, če bi se s tem zmanjšala izkazana obveznost zavarovalnice.

Upoštevanje vsega navedenega pri izračunu dolgoročnih obveznosti posamezne zavarovalne pogodbe nas pripelje do vrednosti, ki jo zavarovalnice uporabijo v uradnih poslovnih poročilih, na primer v letnem poročilu, finančnem planu, poslovni strategiji... Poslovna poročila so pripravljena v skladu z računovodskimi standardi, kar v dotičnem primeru pomeni, da je vrednotenje obveznosti potrebno presojati v skladu z Mednarodnim standardom računovodskega poročanja 4 (v nadaljevanju MSRP 4). V nadaljevanju so podane ključne točke MSRP 4, ki jih je potrebno upoštevati v kontekstu vrednotenja obveznosti.

- *Definicija zavarovalne pogodbe*

  Zavarovalna pogodba je pogodba, skladno s katero ena stranka (zavarovatelj) prevzame precejšnje zavarovalno tveganje od druge stranke (imetnika police) tako, da se strinja, da bo imetniku police povrnila škodo, ki bi jo le-ta utrpel ob določenem negotovem prihodnjem dogodku (zavarovani dogodek). Negotovost (oziroma tveganje) je bistvo zavarovalne pogodbe. Po MSRP 4 se šteje, da je dogodek negotov, če ob sklenitvi pogodbe ni jasno:

  - ali se bo zavarovalni dogodek pojavil,
  - kdaj se bo pojavil oziroma
  - kolikšna bo zavarovalnina.

  Nekatere zavarovalne pogodbe krijejo dogodke, ki so se že zgodili, vendar je njihov finančni vpliv še negotov. Po drugi strani nekatere zavarovalne pogodbe zahtevajo ali dovoljujejo plačila v naravi ali pa temeljijo na storitvah po fiksni ceni, pri katerih je raven storitve odvisna od negotovega dogodka.

  Zavarovalno tveganje je pomembno, če in samo če bi zavarovalni dogodek povzročil, da bi moral zavarovatelj po kakršnem koli scenariju plačati pomembne dodatne zneske, razen tistih, ki ne vključujejo trgovalne sestavine.

Med dodatne zneske zavarovatelj ne sme vključevati izgube sposobnosti zaračunavanja prihodnjih storitev imetniku police, kot so denimo stroški upravljanja, ki jih zaračunavajo zavarovalnice imetnikom življenjskih zavarovanj z naložbenim tveganjem. Prav tako med dodatna izplačila ni mogoče šteti odpovedi stroškom odkupa. Dodatni znesek je opredeljen kot razlika med izplačilom v primeru zavarovalnega dogodka in izplačilom, če takega dogodka ne bi bilo. Izplačilo lahko interpretiramo kot neto finančni tok, ki izhaja iz zavarovalne pogodbe brez upoštevanja bodočih prihodkov, ki bodo izostali zaradi nastanka zavarovalnega dogodka. Pomembnost dodatnih zneskov presojamo tako, da jih primerjamo z največjo razliko med ekonomsko vrednostjo izplačila v primeru zavarovalnega dogodka in izplačilom v drugih primerih. Tveganje je pomembno tudi v primerih, ko je verjetnost, da se bo posamezni dogodek zgodil, zelo majhna (npr. potres, izbruh vulkana...), a je ob pojavu takega dogodka treba izplačati pomembne dodatne zneske. V tem primeru bo pričakovana sedanja vrednost pogojnih finančnih tokov v primerjavi s pričakovano sedanjo vrednostjo preostalih finančnih tokov majhna, iz česar izhaja, da se pomembnost dodatnega zneska ne meri s tehtano verjetnostjo scenarijev. Pomembnost dodatnih zneskov po MSRP 4 presojamo na ravni posamezne pogodbe. MSRP 4 v primeru homogenega portfelja olajša zavarovatelju opredelitev pogodb kot zavarovalnih pogodb, in sicer tako, da mu ni treba preverjati vsake pogodbe in iskati tistih pogodb, ki prenašajo nepomembno zavarovalno tveganje. Tako je smiselno, da zavarovalnice za namene računovodenja razvrstijo pogodbe v homogene portfelje. Če je zavarovalna pogodba sestavljena iz varčevalne in zavarovalne komponente, se pomembnost prenosa tveganja presoja z vidika zavarovalne komponente. Dodatni zneski, ki jih bo izplačala zavarovalnica, so seveda odvisni tudi od tega, kdaj bo zavarovalni dogodek nastal. Pogodba, ki se je enkrat klasificirala kot zavarovalna pogodba, ostaja zavarovalna pogodba, dokler niso ukinjene ali se ne iztečejo vse pravice oziroma obveznosti iz te pogodbe, medtem ko se pogodba, ki je bila ob sklenitvi razvrščena v skupino finančnih intrumentov, lahko pozneje klasificira kot zavarovalna pogodba.

- *Test ustreznosti oblikovanih obveznosti*

Zahteva za izvedbo testa za zavarovalne pogodbe je podana v MSRP 4.15-

19. V MSRP 4.35 je zahtevana tudi izvedba testa za finančne pogodbe z možnostjo diskrecijske udeležbe, vendar je izvedba odvisna od obravnave diskrecijske udelebe (kot obveznost ali kot kapital). Zavarovatelj ob vsakem poročanju ugotovi, ali so njegove pripoznane zavarovalne obveznosti ustrezne. Pri tem uporablja trenutne ocene prihodnjih finančnih tokov iz zavarovalnih pogodb.

Vrsta testa je odvisna od lastnosti testa, ki ga uporabi zavarovatelj. Če uporabi test, ki ustreza minimalnim zahtevam, navedenim v MSRP 4.16, potem MSRP 4 ne nalaga dodatnih zahtev. Minimalne zahteve so:

- preizkus upošteva trenutne ocene vseh pogodbenih finančnih tokov in s temi povezanih finančnih tokov (na primer stroški obravnave škodnih zahtevkov) ter tudi finančne tokove iz vgrajenih opcij in garancij;
- če preizkus pokaže, da obveznost ni ustrezna, se celoten primanjkljaj pripozna v poslovnem izidu.

Če obstoječe zavarovateljeve računovodske usmeritve za test ustreznosti ne zadoščajo minimalnim zahtevam, mora zavarovatelj meriti ocenjene denarne tokove po Mednarodnem računovodskem standardu 37 (v nadaljevanju MRS 37), kar izhaja tudi iz MSRP 4.17(b). MRS 37.36 navaja, da je rezervacija najboljša ocena (v primeru negotovosti in velike populacije je to kar pričakovana vrednost oziroma z verjetnostjo tehtana vrednost) odhodka, potrebnega za poravnavo sedanje obveznosti na dan bilance. Davek pri ocenah ni upoštevan. Pri diskontiranju se mora uporabiti dodatek za tveganje in negotovost, ki mora biti enak vsaj dodatku tržne vrednosti (MVM - market value margin).

Pri izvedbi testa ustreznosti oblikovanih obveznosti zavarovatelj upošteva obveznosti, ki izhajajo iz zavarovalnih pogodb po MSRP 4 in finančnih pogodb z DPF, ki se pripozna kot obveznost. Treba je upoštevati vse pogodbene denarne tokove, tudi tiste iz vgrajenih opcij in garancij, čeprav MSRP 4 ne določa, kako je treba obravnavati denarne tokove iz opcij in garancij (MSRP 4, BC99). Trenutnih predpostavk ne smemo preceniti ali podceniti. Za spremembo predpostavk potrebujemo trdno podlago. MSRP 4 ne določa, da morajo biti predpostavke ali denarni tokovi prilagojeni za tveganje in negotovost. Za test, ki ustreza minimalnim zahtevam, so sprejemljive tako prilagojene predpostavke kot neprilagojene. Rezervacije so sedanje vrednosti prihodnjih denarnih tokov. MRS 37 navaja, naj se pri diskontiranju uporabi obrestna mera, ki odraža trenutne tržne razmere in ustreza obrestni meri pred obdavčitvijo. MSRP 4.12 navaja, da naj bi rezervacije po MRS 37 vsebovale dodatek pri obrestni meri, če in samo če čiste obveznosti odražajo tudi dodatke pri obrestni meri. Če je, denimo, rezervacija kar škodna rezervacija, ki ni diskontirana, potem je mera po MRS 37 sedanja vrednost izplačila škode, diskontirana z netvegano obrestno mero. Če pa je bila obveznost določena na podlagi sedanje vrednosti prihodnjih izplačil, diskontirana z obrestno mero, ki je povezana z donosnostjo portfelja naložb, ki naj bi imel pribitek nad netvegano obrestno mero, potem naj bi imele rezervacije po MRS 37 podoben pribitek. V tem primeru naj bi bil pribitek določen na trenutnih tržnih razmerah, ki se lahko razlikujejo od pribitka, ki je bil uporabljen v začetnem izračunu obveznosti.

Test je treba izvesti na vsak obračunski datum. Test se izvaja v takem obsegu, da lahko utemeljimo ustreznost obveznosti. Razen v primeru primanjkljaja, zneskov ni treba razkriti. Primanjkljaj se pripozna kot povečanje obveznosti (matematične rezervacije) za znesek primanjkljaja ali pa se odpišejo povezana neopredmetena sredstva in odloženi stroški pridobivanja. Primanjkljaj se pripozna v poslovnem izidu za trenutno računovodsko obdobje. Pripozna se celoten primanjkljaj.

- *Razkritja*

Zavarovalnica mora v skladu z MSRP 4.36 razkriti tako računovodsko politiko posameznih postavk kot tudi podatke, ki pojasnjujejo vrednosti v finančnih izkazih, ki so posledica zavarovalnih pogodb. Prav tako pa mora podati informacije, ki uporabniku omogočajo razumeti negotovost prihodnjih denarnih tokov iz naslova zavarovalnih pogodb. Zavarovalnica se odloči, kako podrobno bo razkrila posamezne vsebine, koliko pozornosti bo namenila posamezni vsebini in kako bo združevala podatke MSRP 4.IG12. Razkriti je treba:

- računovodske politike (MSRP 4.36),
- premoženje, obveznosti, prihodke in odhodke, ki nastajajo kot posledica zavarovalnih pogodb (MSRP 4.36),
- vrednost, časovni okvir ter negotovost prihodnjega denarnega toka (MSRP 4.38).

Zavarovalnica mora opisati potek ugotavljanja, katere postavke imajo največji vpliv na izkazovanje premoženja, obveznosti, prihodkov in odhodkov in v kolikor je smiselno, se podajo tudi kvantificirana razkritja teh predpostavk. Pri drugih (kot so denimo tablice smrtnosti) je tovrstni podatek nesmiseln in je bolj pomemben način, po katerem je zavarovalnica prišla do doloenih predpostavk. Razkriti je potrebno tudi učinek sprememb predpostavk. Zavarovalnica mora razkriti gibanje kosmatih ZTR in pozavarovalnega dela ZTR (MSRP 4.IG37). Prav tako je treba razkriti gibanje odloženih stroškov pridobivanja zavarovanj.

Dodatno je potrebno razkriti še:

- zavarovalno tveganje,
- analizo občutljivosti,
- koncentracijo zavarovalnega tveganja,
- razvoj škodnega dogajanja ter
- tveganje obrestne mere in kreditnega tveganja.

5.3.2 Tržno konsistentno vrednotenje

Tržno konsistentno oziroma ekonomsko vrednotenje obveznosti in sredstev je ključna predpostavka, na kateri temeljijo principi Direktive 2009/138/ES o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II) (Ur. l. EU, št. L 335/1, 2009, v nadaljevanju Direktiva Solventnost II).

Medtem ko zavarovalnice sredstva vrednotijo bolj ali manj po enakih načelih, velja na strani obveznosti popolna neprimerljivost med posameznimi zavarovalnicami.

V tem kontekstu poslovna poročila med zavarovalnicami niso oziroma so težko primerljiva, saj trenutna ureditev dopušča preveč svobode okoli vrednotenja obveznosti, še posebno zavarovalno-tehničnih obveznosti.

Poleg poenotenja vrednotenja obveznosti, je sprejetje Direktive Solventnost II pomembno še iz naslednjih vidikov:

- odpravlja se zakonske razlike med članicami,
- odpravlja trenutni sistem - okolje Solvetnost I, vključno s trenutno veljavno zakonodajo, ni več konsistentno,
- vpeljava tržno konsistentnega pristopa, omogoča "nagrajevanje" zavarovalnic, v kolikor bodo ustrezno obvladovala tveganja in
- vzpostavitev zadovoljive varnosti imetnikov polic in upravičencev

Direktiva Solventnost II je, vsebinsko gledano, razdeljena na tri dele oziroma stebre. Prvi steber zajema minimalne standarde kvantitativnih zahtev in sicer:

- opredeljena je minimalna kapitalska zahteva,
- opredeljena je solventnostna kapitalska zahteva,
- na novo so definirane zavarovalno-tehnične rezervacije,
- opredeljuje delitev lastnih sredstev in
- rahlja pravila naložbenja.

Drugi steber je kvalitativne narave in se nanaša predvsem na interne procese in funkcije, ki jih mora zavarovalnica vzpostavili. Zahteva se vzpostavitev učinkovitega sistema upravljanja, ki:

- zagotavlja dobro in preudarno opravljanje dejavnosti,
- vključuje ustrezno pregledno organizacijsko strukturo z jasno dodelitvijo in ustrezno ločitvijo odgovornosti,

- vključuje učinkovit sistem za zagotovitev prenosa informacij, predvsem da določi redno in izredno poročanje s strani imenovanih teles, komisij in odborov, nosilcev ključnih funkcij in drugih oseb, da določi pristojnost organov vodenja in nadzora, da zahteva dodatne informacije, in da določi način in roke za obravnavanje prejetih poročil in drugih informacij,
- je predmet rednega notranjega pregleda,
- je sorazmeren glede na naravo, obseg in zahtevnost poslov zavarovalnice.

Zavarovalnica mora izdelati politike upravljanja tveganj, spremljanja skladnosti, notranjih kontrol, notranje revizije in izločenih poslov ter sistem, s katerim zagotavlja, da se politike izvajajo. Politike se sprejemajo s predhodnim soglasjem nadzornega sveta zavarovalnice in se pregledajo vsaj enkrat letno. V primeru kakršne koli pomembne spremembe v sistemu upravljanja zavarovalnice ali na zadevnemu področju je potrebno politike ustrezno spremeniti.

Del sistema upravljanja so tudi ključne funkcije, in sicer:

- funkcija upravljanja tveganj,
- funkcija notranje revizije,
- aktuarska funkcija in
- funkcija spremljanja skladnosti.

Vse napeljuje na to, da mora zavarovalnica vzpostaviti učinkovit sistem upravljanja tveganj in spremljanja skladnosti. Sistem na področju tveganj mora vsebovati strategije, procese in postopke poročanja, ki so potrebni za redno odkrivanje, merjenje, spremljanje, upravljanje in poročanje na posamezni in skupnih ravni tveganj, ki so jim ali bi jim lahko bila izpostavljena, in o njihovih medsebojnih odvisnostih.

Sistem upravljanja tveganj zajema najmanj naslednja področja:

- sklepanje zavarovanj in oblikovanje rezervacij za obveznosti iz zavarovalnih pogodb;
- usklajevanje sredstev z obveznostmi;

- upravljanje naložb, zlasti izvedenih finančnih instrumentov in podobnih zavez;
- obvladovanje likvidnosti in upravljanje tveganja koncentracije;
- upravljanje operativnega tveganja;
- druge tehnike za zmanjševanje tveganj, vključno s pozavarovanjem.

Tretji steber je namenjen vzpostavitvi tržne discipline. Povdarek je predvsem na izdatnem poročanju, tako nadzornim institucijam kot tudi javnosti.

Trenutno za vrednotenje sredstev in obveznosti dokončno veljajo določila v Direktivi Solventnost II, medtem ko se drugi in tretji nivo zakonodajnih predpisov še pripravlja in usklajuje, ter bo sprejet do konca leta 2015.

Zavarovalnice in pozavarovalnice vrednotijo sredstva in obveznosti na naslednji način:

- sredstva se vrednotijo na znesek, za katerega bi se izmenjala med dobro obveščenima strankama s pravico razpolaganja v strogo poslovnem poslu;
- obveznosti se vrednotijo na znesek, za katerega bi se lahko prenesle ali poravnale med dobro obveščenima strankama s pravico razpolaganja v strogo poslovnem poslu. Vrednotenje obveznosti se ne sme prilagajati glede na lastno kreditno sposobnost zavarovalnice ali pozavarovalnice.

Za vrednotenje obveznosti iz zavarovalnih pogodb veljajo posebna, dodatna določila. Zavarovalnice in pozavarovalnice morajo vzpostaviti zavarovalno-tehnične rezervacije v zvezi z vsemi svojimi zavarovalnimi in pozavarovalnimi obveznostmi do imetnikov polic in upravičencev zavarovalnih in pozavarovalnih pogodb. Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij je enaka trenutni vsoti, ki bi jo morale plačati zavarovalnice in pozavarovalnice, če bi nemudoma prenesle svoje zavarovalne in pozavarovalne obveznosti drugi zavarovalnici ali pozavarovalnici. Izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij uporablja in upošteva informacije, ki jih zagotavljajo finančni trgi, in splošno dostopne podatke o zavarovalnih tveganjih (skladnost s trgom).

- *Izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij*

  Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij je enaka vsoti najboljše ocene zavarovalno-tehničnih rezervacij in dodatka za tveganje, pri čemer se omenjeni dodatek ne nanaša na dekompozijo obrestnih mer in je podrobneje opredeljen v nadaljevanju.

  Najboljša ocena je enaka tehtanemu povprečju, ovrednotenem glede na verjetnost, prihodnjih denarnih tokov ob upoštevanju časovne vrednosti denarja (pričakovana trenutna vrednost prihodnjih denarnih tokov) in ob uporabi ustrezne časovne strukture netvegane obrestne mere. Izračun najboljše ocene temelji na posodobljenih in verodostojnih podatkih ter realnih predpostavkah in se izvede z uporabo ustreznih, veljavnih in relevantnih aktuarskih in statističnih metod. Projekcija denarnega toka, uporabljena pri izračunu najboljše ocene, upošteva vse denarne prilive in odlive, ki so potrebni za poravnavo zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti v času njihove veljavnosti. Najboljša ocena se izračuna kot bruto znesek, brez odštevanja izterljivih zneskov iz pozavarovalnih pogodb in namenskih družb.

  Dodatek za tveganje je takšen, da zagotavlja, da je vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enakovredna znesku, ki bi ga zavarovalnice in pozavarovalnice zahtevale za prevzem in izpolnitev zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti. Ekonomsko to pomeni strošek kapitala, ki bi zavarovalnice in pozavarovalnice potrebovale vsa leta v prihodnosti, do izpolnitve vseh zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti.

  Zavarovalnice in pozavarovalnice morajo ločeno vrednotiti najboljšo oceno in dodatek za tveganje. Vendar, če je mogoče prihodnje denarne tokove, povezane z zavarovalnimi in pozavarovalnimi obveznostmi, zanesljivo nadomestiti z uporabo finančnih instrumentov, katerih zanesljiva tržna vrednost je vidna, se vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij, povezanih s temi prihodnjimi denarnimi tokovi, določi na podlagi tržne vrednosti teh finančnih instrumentov. V tem primeru niso potrebni ločeni izračuni najboljše ocene in dodatka za tveganje.

  Če zavarovalnice in pozavarovalnice ločeno vrednotijo najboljšo oceno in dodatek za tveganje, se dodatek za tveganje izračuna z določitvijo stroškov zagotavljanja zneska primernih lastnih sredstev, enakovrednega zahtevanemu solventnostnemu kapitalu, ki je potreben za podporo zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti v času njihove veljavnosti. Mera, uporabljena pri določitvi stroškov zagotavljanja tega zneska primernih lastnih sredstev (mera stroškov kapitala), je enaka za vse zavarovalnice in pozavarovalnice ter se redno pregleduje. Uporabljena mera stroškov kapitala je enaka dodatni meri nad ustrezno netvegano obrestno mero, ki bi jo prevzela zavarovalnica ali pozavarovalnica, ki ima znesek primernih lastnih sredstev, ki je enakovreden zahtevanemu solventnostnemu kapitalu za podporo zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti v času teh obveznosti.

- *Drugi elementi, ki jih je treba upoštevati pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij*

  Zavarovalnice in pozavarovalnice pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij upoštevajo še:

  - vse izdatke, ki bodo nastali pri servisiranju zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti;
  - inflacijo, vključno z inflacijo stroškov in zahtevkov;
  - vsa plačila imetnikom polic in upravičencem, vključno s prihodnjimi diskrecijskimi bonusi, ki jih bodo predvidoma odobrile zavarovalnice in pozavarovalnice, tudi če ta plačila niso pogodbeno zajamčena.

- *Vrednotenje finančnih garancij in opcij*

  Pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij morajo zavarovalnice in pozavarovalnice upoštevati vrednost finančnih garancij in opcij oziroma pogodbenih možnosti, vključenih v zavarovalne in pozavarovalne police. Vsakršne predpostavke glede verjetnosti, da bodo imetniki polic izvajali pogodbene možnosti, vključno s prenehanjem in predajami, so realne in temeljijo na tekočih in verodostojnih podatkih. Predpostavke upoštevajo, implicitno ali eksplicitno, vpliv, ki ga lahko imajo prihodnje spremembe finančnih in nefinančnih razmer na izvajanje teh možnosti.

- *Segmentacija obveznosti*

  Zavarovalnice in pozavarovalnice morajo pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij segmentirati svoje zavarovalne in pozavarovalne obveznosti v homogene skupine tveganj najmanj po vrstah poslovanja.

- *Izterljivi zneski iz pozavarovalnih pogodb in namenskih družb*

  Zavarovalnice in pozavarovalnice izračunajo izterljive zneske iz pozavarovalnih pogodb in namenskih družb v skladu z določili, ki veljajo za zavarovalno-tehnične rezervacije. Pri izračunu izterljivih zneskov iz pozavarovalnih pogodb in namenskih drub zavarovalnice in pozavarovalnice upoštevajo časovno razliko med izterjavami in neposrednimi plačili. Rezultat tega izračuna se prilagodi, da se upoštevajo pričakovane izgube zaradi neplačila nasprotne stranke. Prilagoditev temelji na oceni verjetnosti neplačila nasprotne stranke in povprečne izgube, ki je nastala zaradi tega (izguba ob neplačilu).

- *Kakovost podatkov in uporaba približkov*

  Zavarovalnice morajo vpeljati notranje procese in postopke za zagotovitev ustreznosti, popolnosti in natančnosti podatkov, uporabljenih pri izračunu svojih zavarovalno-tehničnih rezervacij. Če v posebnih okoliščinah zavarovalnice nimajo dovolj ustreznih podatkov za uporabo zanesljive aktuarske metode za skupino ali podskupino svojih zavarovalnih in pozavarovalnih obveznosti ali izterljivih zneskov iz pozavarovalnih pogodb in namenskih družb, se lahko za izračun najboljše ocene uporabijo primerni približki, vključno s pristopi, ki upoštevajo vsak primer posebej.

- *Primerjava z izkušnjami*

  Zavarovalnice in pozavarovalnice imajo na voljo procese in postopke, s katerimi zagotovijo, da se najboljše ocene in predpostavke, ki so podlaga za izračun najboljših ocen, redno primerjajo z izkušnjami. Če se pri primerjavi odkrije sistematično odstopanje med izkušnjami in izračunom najboljših ocen zavarovalnic ali pozavarovalnic, zadevno podjetje ustrezno prilagodi aktuarsko metodo, ki je v uporabi, in/ali predpostavke, ki nastajajo.

6 UPORABA STOHASTIČNIH MODELOV OBRESTNIH MER

V nadaljevanju bomo izpeljali enačbe za neto enkratne premije določenih zavarovanj, pri čemer bomo za obrestno mero uporabili nekatere stohastične modele obrestnih mer.

6.1 Zavarovanje za doživetje

6.1.1 Vasičkov model

Enofaktorski Vasičkov model bomo uporabili v naslednjih primerih:

- prvič bomo predpostavili, da je jakost obrestne mere konstantna znotraj posameznega leta, kar pomeni, da se bo obrestna mera za vrednotenje zavarovanja spreminjala letno
- v drugem primeru bomo predpostavili, da obrestna mera zvezno sledi modelu.

V prvem primeru predpostavka konstantne jakosti obrestne mere znotraj posameznega leta poenostavi Vasičkov model, ki je podan s (4.2). Le-ta preide v diskretno obliko, in sicer

$$\delta_{k+1} - \delta_k \quad = \quad -\alpha(\delta_k - \delta) + \xi_k, \tag{6.1}$$

pri čemer je $\alpha > 0$ in so ξ_k neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametroma $\mu = 0$ in $\sigma > 0$, kjer varianca predstavlja lokalno nestanovitnost kratkoročnih obrestnih mer. Intuitivna razlaga dogajanja v Vasičkovem modelu je, da se jakost obrestne mere δ_k približuje δ, vendar jo pri tem motijo slučajni odmiki. Definirajmo še $\delta_0 = 0$, kar sicer v splošnem ne drži, saj je jakost obrestne mere lahko tudi negativna, kar je sicer ena izmed slabosti Vasičkovega modela (Norberg, 2004), vendar v zadnjem času tudi realno dogajanje na trgu. Kljub temu je model pri ustrezni izbiri parametrov vseeno uporaben. Po drugi strani je vseeno, s kakšno vrednostjo δ_0 začnemo, saj se le ta hitro izgubi v razvoju.

V primeru zavarovanja za doživetje v trajanju n let, pri čemer je izplačilo ob doživetju enako 1, je pričakovana sedanja vrednost izplačila oziroma neto enkratna premija enaka

$$A_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} = \mathrm{E}(Z),$$

pri čemer je Z slučajna spremenljivka, ki je enaka sedanji vrednosti izplačila

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x < n, \\ v_n, & K_x \geq n. \end{cases}$$

Diskontni faktor v_n zapišemo v splošnem z $v_n = \mathrm{e}^{-\int_0^n \delta_\tau d\tau}$, medtem ko ga v časovno diskretnem primeru zapišemo kot

$$\begin{aligned} v_n &= \mathrm{e}^{-\delta_1}\,\mathrm{e}^{-\delta_2}\ldots\mathrm{e}^{-\delta_n} \\ &= \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \delta_i}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

pri čemer smo upoštevali začetno predpostavko o konstantnosti jakosti obrestne mere znotraj posameznega leta.

Po Vasičkovem modelu (6.1) sledi, da so začetne jakosti obrestne mere, ob upoštevanju pogoja $\delta_0 = 0$, enake

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_0 + \alpha(\delta - \delta_0) + \xi_0 \\
&= \alpha\delta + \xi_0, \\
\delta_2 &= \delta_1 + \alpha(\delta - \delta_1) + \xi_1 \\
&= \alpha\delta + \xi_0 + \alpha(\delta - (\alpha\delta + \xi_0)) + \xi_1 \\
&= 2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1, \\
\delta_3 &= \delta_2 + \alpha(\delta - \delta_2) + \xi_2 \\
&= 2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1 + \alpha(\delta - (2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1)) + \xi_2 \\
&= 3\alpha\delta - 3\alpha^2\delta + \alpha^3\delta + \xi_0 - 2\alpha\xi_0 + \alpha^2\xi_0 + \xi_1 - \alpha\xi_1 + \xi_2 \\
&= \alpha\delta((1-\alpha)^2 + (1-\alpha) + 1) + \xi_0(1-\alpha)^2 + \xi_1(1-\alpha) + \xi_2.
\end{aligned}
$$

Splošni člen za jakost obrestne mere zapišemo kot

$$
\delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (1-\alpha)^{n-1-k}\ (\alpha\delta + \xi_k). \tag{6.3}
$$

Slučajno spremenljivko Z ob upoštevanju (6.3) zapišemo kot

$$
Z = \begin{cases} 1 \times \exp(-\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta + \xi_k)), & K_x \geq n, \\ 0, & K_x < n. \end{cases} \tag{6.4}
$$

Neto enkratna premija za zavarovanje za doživetje je enaka matematičnemu upanju slučajne spremenljivke Z. Pri izračunu bomo predpostavili neodvisnost slučajne spremenljivke cele preostale življenjske dobe in jakosti obrestne mere, ki sledi stohastičnemu modelu, in je tako tudi slučajna spremenljivka. To je bistvena predpostavka za vse kasnejše izračune, ki odraža tudi stanje na zavarovalnem trgu.

Ker so ξ_k neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, je tudi eksponent diskontnega faktorja v (6.4) normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, saj je linearna kombinacija ξ_k.

Neto enkratno premijo tako zapišemo kot

$$
A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_np_x \times \mathrm{E}\big(\exp(-\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta + \xi_k))\big). \tag{6.5}
$$

Za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko X s parametroma μ in σ^2 velja

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^X) \;=\; \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}. \tag{6.6}$$

Za končni izračun neto enkratne premije tako potrebujemo matematično upanje in varianco eksponenta. Upoštevamo lastnosti slučajnih spremenljivk ξ_k, in sicer $\mathrm{E}(\xi_k) = 0$ in $\mathrm{Var}(\xi_k) = \sigma^2$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big(-\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta+\xi_k)\Big) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta+\mathrm{E}(\xi_k)) \\
&= -\alpha\delta\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k} \\
&= -\alpha\delta\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1-(1-\alpha)^i}{\alpha} \\
&= -\delta\ \left(n-(1-\alpha)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\Big(-\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta+\xi_k)\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{2(i-1-k)}\ \mathrm{Var}(\xi_k) \\
&= \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\ \frac{1-(1-\alpha)^{2i}}{1-(1-\alpha)^2} \\
&= \frac{\sigma^2\Big(n-(1-\alpha)^2\frac{1-(1-\alpha)^{2n}}{1-(1-\alpha)^2}\Big)}{1-(1-\alpha)^2}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Neto enkratna premija za zavarovanje za doživetje je v primeru konstantne jakosti obrestne mere znotraj leta enaka

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|}^{\;1} &= {}_np_x \times \mathrm{E}\Big(\exp(-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\,(\alpha\delta+\xi_k))\Big)\\
&= {}_np_x \times \exp\Big(-\delta\,\Big(n-(1-\alpha)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\Big)+\\
&\qquad +\frac{\sigma^2}{2(1-(1-\alpha)^2)}\Big(n-(1-\alpha)^2\frac{1-(1-\alpha)^{2n}}{1-(1-\alpha)^2}\Big)\Big). \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

V drugem primeru, ko predpostavimo, da se obrestna mera spreminja zvezno v času in sledi Vasičkovemu modelu, bomo uporabili že izpeljane rezultate za Vasičkov model iz četrtega poglavja (Izrek 4.3). Cena brezkuponske obveznice je v tem primeru podana z

$$
P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}, \qquad (6.10)
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha},\\
A(t,T) &= (B(t,T)-(T-t))(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2.
\end{aligned}
$$

Enkratna neto premija zavarovanja za doživetje za obdobje n let je ob predpostavki neodvisnosti obrestne mere in pričakovane življenjske dobe enaka produktu verjetnosti preživetja x let stare osebe za obdobje n let in ceni brezkuponske obveznice v času 0 z zapadlostjo po n letih, torej

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|}^{\;1} &= {}_np_x \times P(0,n)\\
&= {}_np_x \times \exp\big(A(0,n)-B(0,n)r_f(0)\big)\\
&= {}_np_x \times \exp\big((\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha}-n)(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\\
&\qquad -\frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha n})^2}{4\alpha^3}-\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha}\;r_f(0)\big). \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

S tem smo definirali neto enkratno premijo za zavarovanje za doživetje za oba obravnavana modela, pri čemer v izpeljanih formulah nastopajo parametri Vasičkovega modela gibanja obrestne mere.

6.1.2 Markovski modeli

V tem primeru predpostavimo, da obrestna mera, ki stoji v ozadju diskontnega faktorja v, sledi enemu od markovskih modelov, na primer Ho in Lee-jevemu. Pri markovskih modelih obrestnih mer smo predpostavili, da so cene brezkuponskih obveznic vhodni podatek modela in da je pogojna porazdelitev $P(s,T)|\mathcal{F}_t$, $t < s < T$, enaka $P(s,T)|X(t)$, pri čemer je $X(t)$ končno dimenzionalen Itôv proces, oziroma za naš primer $X(t) = r_f(t)$.

V prejšnjem razdelku smo v zveznem primeru uporabili cene brezkuponskih obveznic. Podobno bomo postopali tudi v tem primeru, vendar ne bomo uporabili cen v času 0, temveč v času t. Takšen pristop smo izbrali, ker smo v skladu s teorijo markovskih modelov predpostavili, da so cene $P(0,T)$ znane in so tako po eni strani vhodni podatek za markovski model, po drugi strani pa bi lahko s pomočjo teh cen že določili enkratno neto premijo. Tako bomo definirali ceno zavarovanja v času t za $x+t$ let staro osebo. S tem bomo določili ceno zavarovanja, ki bi bila na primer aktualna ob prenosu portfelja zavarovalnice v portfelj druge zavarovalnice, saj bi v takšnem primeru morali oceniti vrednost obstoječega portfelja zavarovanj.

S pomočjo (4.12) in (4.13) zapišemo ceno brezkuponske obveznice v času t

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T)-(T-t)r_f(t)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-\frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)-(T-t)\sigma\tilde{W}(t)}. \end{aligned}$$

Neto enkratno premijo za zavarovanje, ki je v veljavi že t let, zapišemo kot

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}}^{\;1}(t) &= v^{n-t}\ {}_{n-t}p_{x+t} \\ &= P(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Izraz definira ceno zavarovanja v času t. Zaključimo z ugotovitvijo, da so markovski modeli uporabni pri vrednotenju zavarovanj z omejitvijo, ker po definiciji markovskih modelov cene brezkuponskih obveznic v času 0 nastopajo kot vhodni parameter in tako ni smiselno ugotavljati vrednosti zavarovanj v začetni točki.

6.1.3 Posplošeni CIR modeli

Večfaktorski modeli so v zadnjem času pridobili na veljavnosti, saj so zelo popularno orodje za modeliranje bolj kompleksnih izvedenih finančnih instrumentov. Po sami definiciji jih uporabljamo, če imamo več kot en vir slučajnosti in tako lahko vsak vir modeliramo ločeno.

V množico večfaktorskih modelov sodijo tudi posplošeni CIR modeli, ki so del množice afinih modelov (glej razdelek 4.5.1).

Po izreku 4.6 je cena brezkuponske obveznice $P(t,T)$ v primeru posplošenih CIR modelov enaka

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} A_i(T-t) - \sum_{i=1}^{n} B_i(T-t) X_i(t)},$$

pri čemer je

$$A_i(\tau) = \tfrac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2}\ln\left(\tfrac{2\gamma_i \mathrm{e}^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right),$$
$$B_i(\tau) = \tfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}, \qquad \gamma_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 2\sigma_i^2}.$$

Netvegana obrestna mera je v tem primeru definirana kot

$$r_f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{m} X_i(t),$$

pri čemer so $X_i(t)$ neodvisni, enofaktorski CIR procesi. V primeru zavarovanja za doživetje v trajanju n let je neto enkratna premija enaka

$$\begin{aligned} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} &= {}_np_x \times P(0,n) \\ &= {}_np_x \times \exp\Big(\sum_{i=1}^{m} A_i(n) - \sum_{i=1}^{m} B_i(n) X_i(0)\Big). \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2 Mešano zavarovanje

6.2.1 Vasičkov model

Mešano zavarovanje za obdobje n let je po definiciji vsota zavarovanja za primer doživetja in časovno omejenega oziroma začasnega zavarovanja za primer smrti v trajanju n let. Do izplačila pride v primeru smrti (ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl) ali v primeru doživetja (torej po n letih). Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases}$$

Neto enkratno premijo izračunamo s pomočjo matematičnega upanja slučajne spremenljivke Z, pri čemer za obrestno mero uporabimo zgoraj izpeljane lastnosti Vasičkovega modela za zvezno spreminjanje le-te (6.10) in pod predpostavko neodvisnosti obrestne mere in pričakovane življenjske dobe.

Neto enkratna premija za mešano zavarovanje je v tem primeru enaka

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= {}_np_x\ v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \\ &= {}_np_x \times \exp\Big(\big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha} - n\big)\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\big) - \frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha n})^2}{4\alpha^3} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha}\ r_f(0)\Big) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x\ q_{x+k} \times \exp\Big(\big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}}{\alpha} - (k+1)\big)\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\big) \\ &\quad - \frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)})^2}{4\alpha^3} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}}{\alpha}\ r_f(0)\Big). \end{aligned} \tag{6.14}$$

6.2.2 Markovski modeli

Neto enkratno premijo izračunamo s pomočjo matematičnega upanja slučajne spremenljivke Z, kar smo izpeljali v (2.55). Kot pri zavarovanju za doživetje moramo dodatno upoštevati, da obrestna mera sledi Ho in Lee-jevemu modelu. Pri markovskih modelih obrestnih mer smo predpostavili, da so cene brezkuponskih obveznic vhodni podatek modela in da je pogojna porazdelitev $P(s,T)|\mathcal{F}_t$, $t < s < T$, enaka $P(s,T)|X(t)$, pri čemer je $X(t)$ končno dimenzionalen Itôv proces, oziroma za naš primer $X(t) = r_f(t)$.

S pomočjo (4.12) in (4.13) zapišemo ceno brezkuponske obveznice v času t

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T)-(T-t)r_f(t)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t) - (T-t)\sigma\tilde{W}(t)}. \end{aligned}$$

Neto enkratno premijo za mešano zavarovanje, ki je v veljavi že t let, zapišemo kot

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}(t) &= v^{n-t}\ {}_{n-t}p_{x+t} + \sum_{k=0}^{n-t-1} v^{k+1}\ {}_kp_{x+t}\ q_{x+t+k} \\ &= P(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t} + \sum_{k=0}^{n-t-1} P(t,t+k+1)\ {}_kp_{x+t}\ q_{x+t+k}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

6.2.3 Posplošeni CIR modeli

Po izreku 4.6 je cena brezkuponske obveznice $P(t,T)$ v primeru posplošenih CIR modelov enaka

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n A_i(T-t) - \sum_{i=1}^n B_i(T-t)X_i(t)},$$

pri čemer je

$$A_i(\tau) = \frac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2}\ln\left(\frac{2\gamma_i \mathrm{e}^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right),$$
$$B_i(\tau) = \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}, \qquad \gamma_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 2\sigma_i^2}.$$

Netvegana obrestna mera je v tem primeru definirana kot

$$r_f(t) = \sum_{i=1}^{m} X_i(t),$$

pri čemer so $X_i(t)$ neodvisni, enofaktorski CIR procesi. V primeru mešanega zavarovanja v trajanju n je neto enkratna premija tako enaka

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= v^n \ {}_n p_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_k p_x \ q_{x+k} \\ &= P(0,n) \ {}_n p_x + \sum_{k=0}^{n-1} P(0,k+1) \ {}_k p_x \ q_{x+k} \\ &= {}_n p_x \times \exp\big(\sum_{i=1}^{m} A_i(n) - \sum_{i=1}^{m} B_i(n) X_i(0)\big) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp\big(\sum_{i=1}^{m} A_i(k+1) - \sum_{i=1}^{m} B_i(k+1) X_i(0)\big) \ {}_k p_x \ q_{x+k}. \quad (6.16) \end{aligned}$$

6.3 Odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji

6.3.1 Vasičkov model

Z odsekoma zveznim markovskim procesom s tremi stanji smo definirali zavarovanje na prostoru $[Z, M, B]$. Govorimo lahko o razširjenem mešanem zavarovanju, kjer se izplačilo dogovorjene zavarovalne vsote izvede v primeru doživetja, v primeru smrti ali v primeru, ko zavarovanec zboli (po navadi za eno izmed težjih bolezni).

Lahko se tudi omejimo in definiramo izključno riziko zavarovanje, kjer do izplačila pride samo v primeru, ko zavarovanec umre ali zboli. V tem primeru zavarovanje nima tako imenovane varčevalne komponente.

V razdelku 3.4.4 smo za odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji pokazali, da moramo za pridobitev verjetnosti prehodov rešiti ustrezen sistem linearnih diferencialnih enačb. Verjetnosti prehodov potrebujemo za izračun neto enkratne premije zavarovanja. Ker so v splošnem jakosti prehodov, ki nastopajo v sistemu diferencialnih enačb, poljubne funkcije, sistem ni analitično rešljiv. Da bi prišli do konkretne rešitve, se v praksi uporabi ena izmed možnosti: za jakosti prehodov se izbere aproksimacija z analitičnimi funkcijami in se sistem diferencialnih enačb reši s pomočjo ustreznih numeričnih metod, ali pa se združuje stanja, kar poenostavi sam model (Norberg, 1995, Oksendal, 2003, Zakrajšek, 2000).

V praksi se večinoma uporablja druga možnost, torej se sam izračun poenostavi s predpostavko, da se stanji mrtev in bolan združita v eno stanje, kar nas prestavi v že znano sfero modelov za vrednotenje življenjskih zavarovanj. Omenjen korak najlažje izvedemo z združevanjem tablic umrljivosti in tablic obolevnosti. Verjetnost smrti ali obolenja tako zapišemo kot

$$\hat{q}_x = i_x + (1 - a_x)q_x,$$

pri čemer je i_x enoletna verjetnost obolevnosti za določeno bolezen za x let staro osebo, a_x delež smrti x let starih oseb zaradi bolezni in q_x enoletna verjetnost smrti x let stare osebe. Podobno kot pri mešanem zavarovanju je po (2.53) sedanja vrednost izplačila enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases}$$

Neto enkratno premijo izračunamo s pomočjo matematičnega upanja slučajne spremenljivke Z, pri čemer za obrestno mero uporabimo zgoraj izpeljane lastnosti Vasičkovega modela za zvezno spreminjanje le-te (6.10) in pod predpostavko neodvisnosti obrestne mere in pričakovane življenjske dobe.

Neto enkratna premija za odsekoma zvezen markovski model s tremi stanji je v tem primeru enaka

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= {}_np_x\ v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \\ &= {}_np_x \times \exp\Big(\big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha} - n\big)\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\big) - \frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha n})^2}{4\alpha^3} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha}\ r_f(0)\Big) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x\ q_{x+k} \times \exp\Big(\big(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}}{\alpha} - (k+1)\big)\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\big) \\ &\quad - \frac{\sigma^2(1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)})^2}{4\alpha^3} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(k+1)}}{\alpha}\ r_f(0)\Big). \end{aligned} \tag{6.17}$$

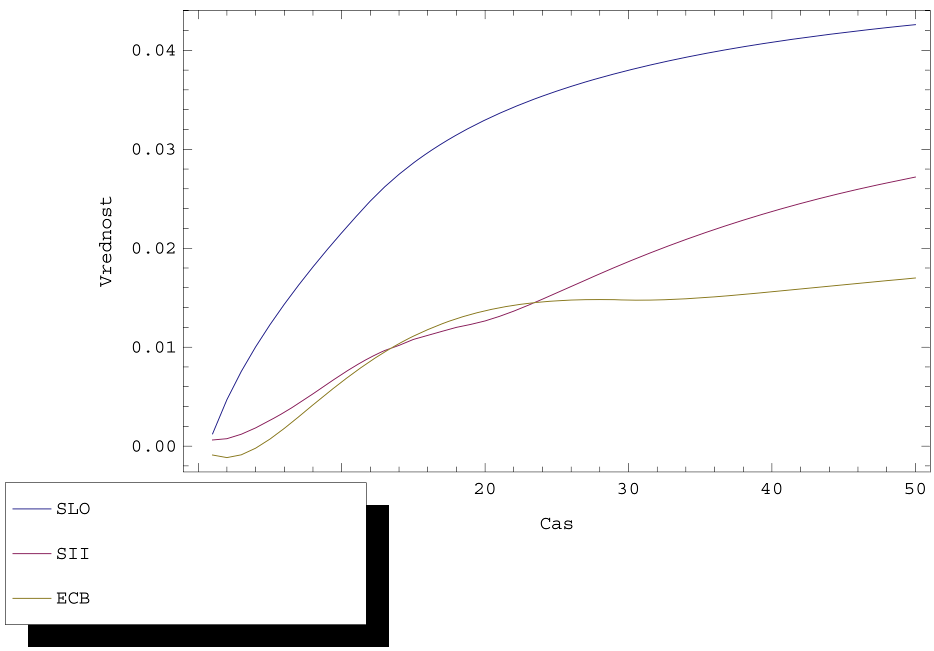
Ker smo predpostavili združevanje stanj in tako v osnovi prešli na zavarovanje z dvemi stanji, na primer mešano zavarovanje, lahko vse zakonitosti, ki smo jih izpeljali za to zavarovanje, apliciramo tudi v tem primeru. Torej neposredno veljajo enačbe tako za Markovske modele, kot za Posplošene CIR modele, ki smo jih izpeljali za mešano zavarovanje.

7 REZULTATI SKOZI RAZLIČNE NAČINE FINANČNEGA POROČANJA

Diskontiranje predstavlja osnoven koncept določanja časovne vrednosti denarja. Ima ključno vlogo pri določanju vrednosti opcij in garancij, ki so vgrajene v zavarovalne produkte in je povezano s tveganji denarnih tokov, kamor sodijo kreditna, likvidnostna in ostala tveganja. Kot primer lahko omenimo osnovo za določanje denarnih tokov rentnega zavarovanja in osnovo za določanje denarnih tokov zavarovanja za primer smrti, ki sta seveda različni, ob upoštevanju vseh tveganj obrestne mere in smrtnosti, vendar ko pride do diskontiranja, se pojavi enako fundamentalno vprašanje, kaj je ustrezna obrestna mera?

V poglavju 5.2 smo predstavili dekompozicijo obrestnih mer, kjer smo podali določene poglede o vključevanju pribitkov na netvegano obrestno mero. Na Sliki 1 so prikazane krivulje obrestnih mer, ki jih lahko uporabimo glede na različne namene vrednotenja. Prikazane so krivulja obrestnih mer, dobljena iz slovenskih državnih obveznic, krivulja obrestnih mer, katera se uporablja v okolju Solventnost II in je dobljena iz prilagojenih finančnih zamenjav (v nadaljevanju SII krivulja obrestnih mer) ter krivulja obrestnih mer, ki jo objavlja Evropska centralna banka in je dobljena iz evrskih državnih obveznic z največjo bonitetno oceno (v nadaljevanju ECB krivulja obrestnih mer). Vidimo, da so med krivuljami konkretne razlike. Če predpostavimo, da je ECB krivulja obrestnih mer netvegana krivulja obrestnih mer, lahko izračunamo vsoto pribitkov, ki veljajo za slovensko krivuljo obrestnih mer. Opaziti je tudi odmik SII krivulje obrestnih mer od ECB krivulje obrestnih mer od dvajsetega leta dalje, kar je posledica dveh dejstev in sicer, da pri dvajsetih letih postane trg finančnih zamenjav nelikviden, kar pomeni, da se od te časovne točke dalje uporablja ekstrapolacija proti dolgoročni prihodnji obrestni meri in politične odločitve, da v okolju Solventnost II velja dolgoročna prihodnja obrestna mera v višini 4,2 % (pri 150 letih), kar je vsota dolgoročne pričakovane inflacije (2 %) in pričakovane dolgoročne realne obrestne mere (2,2 %).

Slika 1. Krivulje obrestnih mer na 31.12.2014



Vir: ECB, EIOPA ter lastni izračun

V nadaljevanju bomo združili principe, ki smo jih predstavili ali izpeljali v prejšnjih poglavjih, ter preverili osnovno hipotezo. Pri modeliranju obrestne mere se bomo naslonili na netvegano obrestno mero, saj je ta osnova za modeliranje zavarovalnih obveznosti. Kasneje bomo v povezavi s 5. poglavjem opredelili dodatke oziroma premije za tveganje.

7.1 Tradicionalno vrednotenje

Tradicionalno vrednotenje obveznosti se danes uporablja praktično pri vseh finančnih poročilih. Pri vrednotenju klasičnih življenjskih zavarovanj se večinoma uporablja model preživetja in fiksna obrestna mera. Govorimo o determinističnih modelih, ki se jih kombinira z veliko mere aktuarske presoje. Po drugi strani se vedno več govori in hkrati za razne primerjave uporablja novejše pristope, ki preferirajo uporabo denarnih tokov in stohastičnih simulacij.

Analizo začnimo z zavarovanjem za primer doživetja. Neto enkratno premijo smo v razdelku 2.3 zapisali kot $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_np_xv^n$, torej je odvisna od starosti zavarovanca in posledično od njegove verjetnosti umrljivosti, zavarovalne dobe ter obrestne mere. Naslednje slike prikazujejo gibanje neto enkratne premije za zavarovanje za primer doživetja v odvisnosti od omenjenih parametrov.

Slika 1 prikazuje gibanje neto enkratne premije (NEP) za zavarovanje za doživetje za trideset let starega moškega (čeprav se od konca leta 2012 spol ne uporablja več kot parameter pri določanju premije[1]) za obdobje desetih let v odvisnosti od izbrane obrestne mere. Izračun je narejen po formuli (2.51), pri čemer so uporabljene Popolne tablice umrljivosti prebivalstva Slovenije za leto 2007.

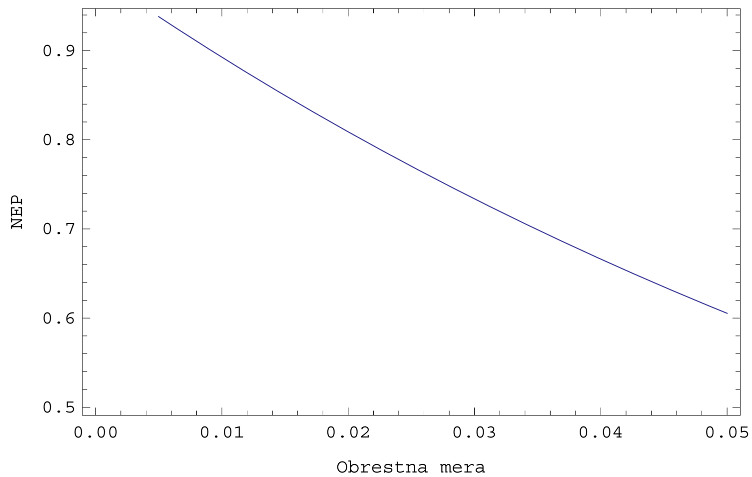
Tabela 4. Predpostavke za izračun neto enkratne premije (NEP) za zavarovanje za doživetje

Parameter	
Zavarovalna doba (n)	10
Spol	M
Verjetnost doživetja (${}_{10}p_{30}$)	$0,986095$
Zavarovalna vsota (ZV)	1

Vir: Lastni izračun

[1]Posledica tega je, da ženske zdaj pri rentnih produktih plačujejo manj, medtem ko pri riziko produktih plačujejo več. Za moške pa velja ravno obratno.

Slika 2. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model

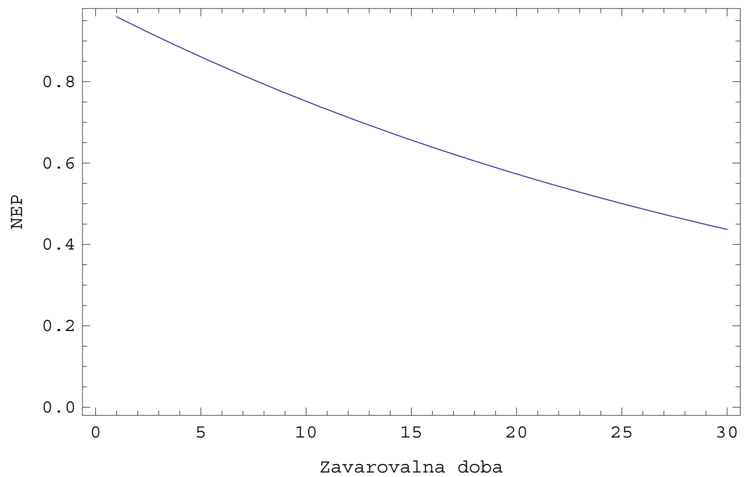


Vir: Lastni izračun

Iz Slike 2 se nazorno vidi, da neto enkratna premija za omenjeno zavarovanje pada v odvisnosti od obrestne mere, saj je le-ta uporabljena kot diskontni faktor v samem izračunu (neto enkratna premija je obratno sorazmerna obrestni meri, kar je izključno posledica definicije diskontnega faktorja). Nižja cena pomeni na drugi strani, da mora zavarovalnica zagotoviti ustrezno obrestno mero na strani sredstev oziroma naložb, da bo lahko izpolnila obveznosti iz zavarovalne pogodbe. V praksi se v slovenskem prostoru pri izračunu premije večinoma uporablja obrestna mera v višini $2,75$ %.

Na Sliki 3 je prikazana neto enkratna premija v odvisnosti od zavarovalne dobe, pri že zgoraj omenjenih parametrih (Tabela 4) in obrestni meri, ki je fiksirana na $i = 2,75$ %.

Slika 3. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od zavarovalne dobe
- Tradicionalni model

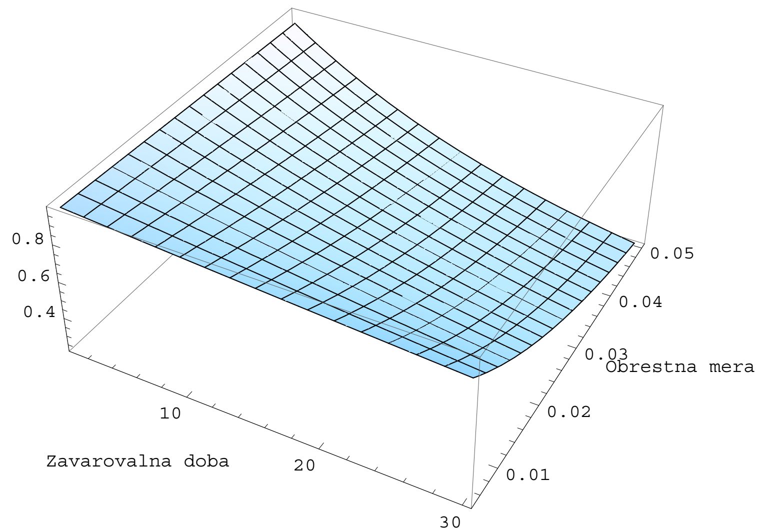


Vir: Lastni izračun

Iz Slike 3 sledi, da neto enkratna premija za zavarovanje za doživetje pada v odvisnosti od zavarovalne dobe, kar je posledica same definicije neto enkratne premije (na daljši rok se verjetnost doživetja manjša in diskontni faktor je vedno manjši).

Slika 4 prikazuje odvisnost neto enkratne premije za zavarovanje za doživetje od obrestne mere in zavarovalne dobe. Pri izračunu so uporabljene predpostavke, navedene v Tabeli 4.

Slika 4. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere in zavarovalne dobe - Tradicionalni model

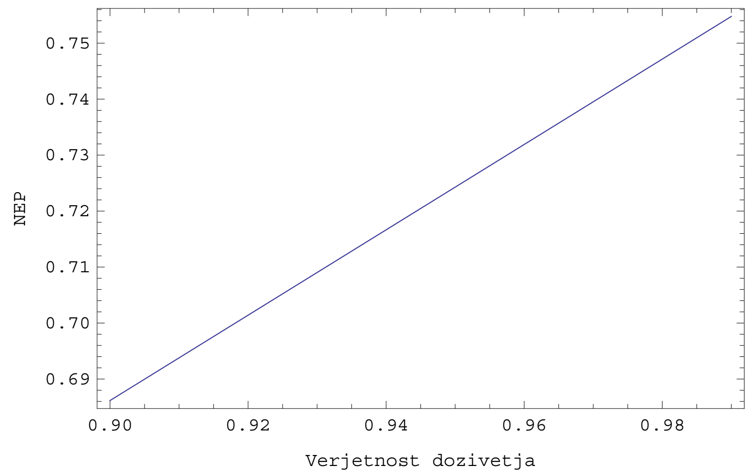


Vir: Lastni izračun

Ker neto enkratna premija za zavarovanje za doživetje pada tako v odvisnosti od obrestne mere kot od zavarovalne dobe, je najnižja vrednost le-te dosežena pri največjih vrednostih obeh opazovanih parametrov.

Na Sliki 5 je prikazana neto enkratna premija v odvisnosti od verjetnosti doživetja, pri čemer so smiselno privzete predpostavke iz Tabele 4 in obrestna mera $i = 2,75$ %.

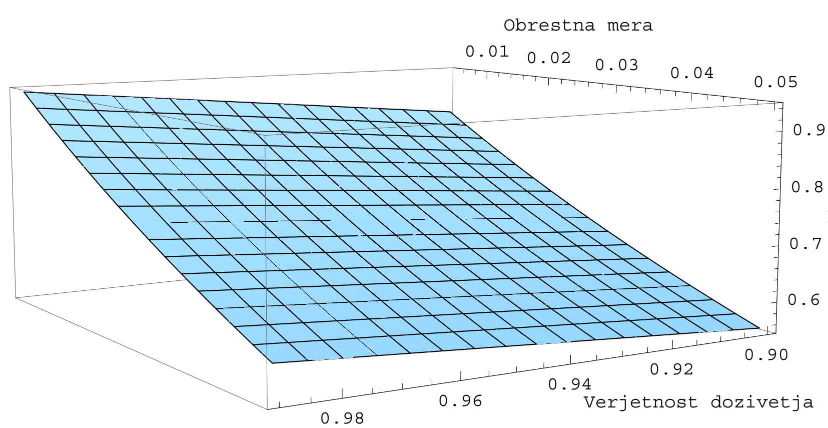
Slika 5. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od verjetnosti doživetja - Tradicionalni model



Vir: Lastni izračun

V tem primeru neto enkratna premija raste, saj se z večanjem verjetnosti doživetja veča sama verjetnost izplačila zavarovalne vsote. Slika 6 prikazuje odvisnost neto enkratne premije za zavarovanje za doživetje od obrestne mere in verjetnosti doživetja. Pri izračunu so smiselno uporabljene predpostavke, navedene v Tabeli 4.

Slika 6. Neto enkratna premija (NEP) v odvisnosti od obrestne mere in verjetnosti doživetja - Tradicionalni model

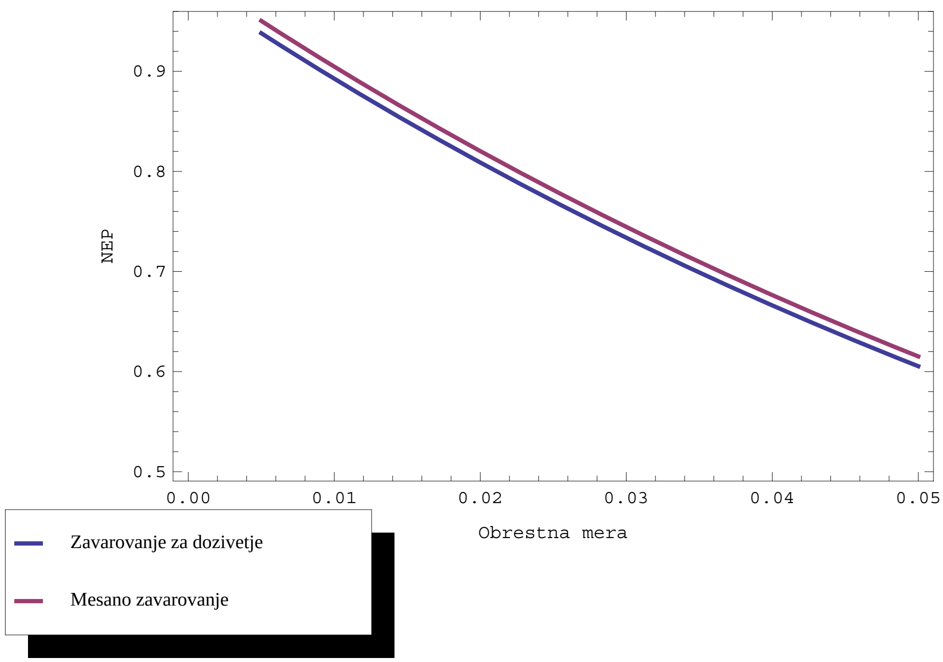


Vir: Lastni izračun

V tej opazovani kombinaciji je najnižja neto enkratna premija dosežena pri največji obrestni meri in najnižji verjetnosti doživetja (oziroma posplošeno pri mlajših zavarovancih).

V naslednjih korakih bomo razširili kritje zavarovanja. Če dodamo kritje za primer smrti, dobimo mešano zavarovanje. Izračun neto enkratne premije za mešano zavarovanje je podan v (2.55), oziroma z $A_{x:\overline{n}|} = {}_np_x\ v^n + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}$. Tudi v tem primeru je neto enkratna premija odvisna od starosti (verjetnost smrti oziroma doživetja), zavarovalne dobe ter obrestne mere. Na Sliki 7 sta prikazani neto enkratni premiji za mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere.

Slika 7. Neto enkratna premija (NEP) za mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model

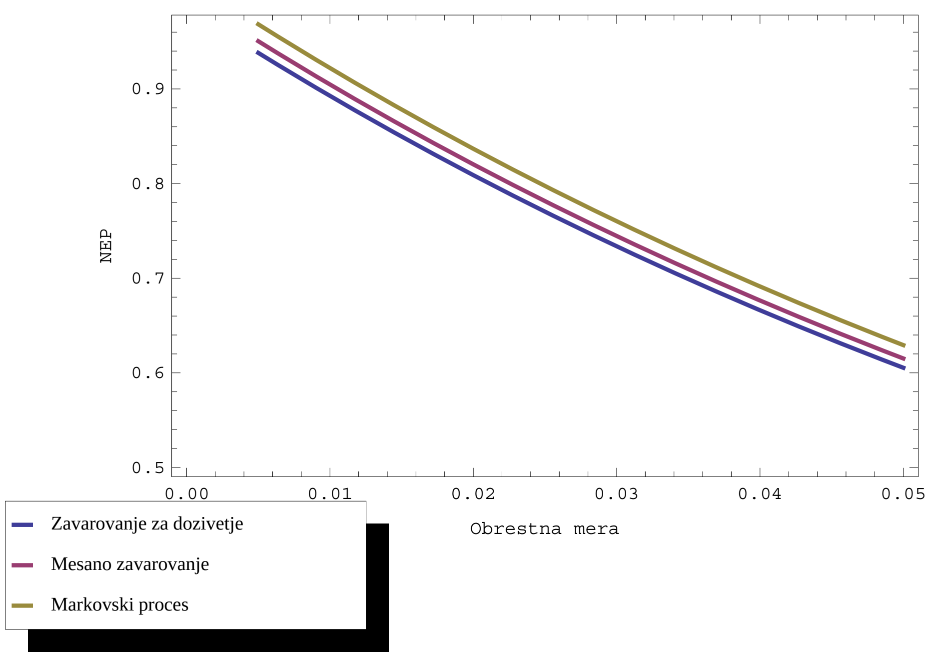


Vir: Lastni izračun

Slika 7 prikazuje, da je neto enkratna premija za mešano zavarovanje večja od enkratne neto premije za zavarovanje za doživetje ne glede na izbiro obrestne mere. To sledi iz same definicije zavarovanj in hkrati tudi intuicije, saj kot smo omenili, mešano zavarovanje vključuje dodatno tveganje za zavarovalnico, in sicer kritje rizika smrti, kar se posledično pozna pri ceni.

Analizo tradicionalnih modelov zaključimo z izračunom neto enkratne premije za zavarovanje, ki temelji na odsekoma zveznem markovskem procesu s tremi stanji, in sicer na predpostavkah razdelka 3.4.4. Kritje dodatnega tveganja (obolevnosti) se odrazi v večji neto enkratni premiji, kar je razvidno iz Slike 8, kjer je prikazana primerjava med neto enkratno premijo za omenjeno zavarovanje, mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere. Pri izračunu neto enkratne premije za zavarovanje, ki temelji na odsekoma zveznem markovskem procesu s tremi stanji, so bile uporabljene nemške tablice obolevnosti za devetnajst hujših bolezni za leto 2008, pri čemer izpeljava verjetnosti smrti sledi razdelku 6.2. Podobne rezultate bi dobili tudi z reševanjem sistema linearnih diferencialnih enačb.

Slika 8. Neto enkratna premija (NEP) za zavarovanje s tremi stanji, mešano zavarovanje in zavarovanje za doživetje v odvisnosti od obrestne mere - Tradicionalni model



Vir: Lastni izračun

Tako kot v primeru mešanega zavarovanja, tudi tukaj neto enkratna premija zraste glede na zavarovanje za doživetje, podobno kot mešano zavarovanje, kar je posledica kritja dodatnega tveganja (obolevnosti). Povečanje ni odvisno od obrestne mere, saj vsa tri opazovana zavarovanja ohranjajo trend gibanja neto enkratne premije.

Razdelek zaključimo z ugotovitvijo, da pri tradicionalnem vrednotenju velja togost modelov, kar je v skladu z zakonodajo in previdnimi aktuarskimi ter računovodskimi usmeritvami. Vrednost obveznosti oziroma neto enkratna premija v točki 0, je odvisna od parametrov modela, ki so v veliki meri v naprej določeni. Prikazana vrednotenja tudi ne odpirajo možnosti arbitraže. Malce več svobode sicer prinaša preverjanje obveznosti v smislu MSRP 4 (test ustreznosti obveznosti), vendar samo na strani uporabljenih predpostavk in ne na strani samih modelov.

7.2 Tržno konsistentno vrednotenje

Tržno konsistentno vrednotenje v današnjih časih pridobiva na pomenu, saj se vsi deležniki določenega procesa sprašujejo o tržni vrednosti opazovane kategorije. V zavarovalništvu Direktiva Solventnost II odpira pot tovrstnemu pristopu, saj zahteva od zavarovalnic in pozavarovalnic, da prikažejo tržno konsistentno bilanco. Tako je to vrednotenje potrebno izvesti na strani sredstev in tudi na strani obveznosti.

V prejšnjih razdelkih (6.1 − 6.3) smo zapisali matematične modele, na podlagi katerih je možno izvesti tržno konsistentno vrednotenje določenega zavarovanja. Prav tako je potrebno izmeriti tveganje, ki ga v ceno zavarovanja dodajo modeli za stohastične obresti (tveganost samih modelov). Intuitivno gre pričakovati, da vpeljava dodatne nestanovitnosti v model za vrednotenje, poveča vrednost opazovane spremenljivke, v našem primeru neto enkratne premije.

7.2.1 Vasičkov model in zavarovanje za doživetje

Po vpeljavi Vasičkovega modela, kjer obrestna mera zvezno sledi modelu, v izračun neto enkratne premije za zavarovanje za doživetje, je le-ta odvisna od verjetnosti preživetja, ciljne jakosti obrestne mere, zavarovalne dobe, α ter variance σ^2. Odvisnost od zadnjih dveh parametrov je direktna posledica uporabe Vasičkovega modela za jakost obrestne mere. Privzeli smo, da je $\alpha > 0$, vendar je smiselni interval opazovanja za α med 0 in 2, pri čemer v $\alpha = 1$ in $\sigma = 0$ dobimo neto enkratno premijo, ki ustreza konstantni jakosti obrestne mere skozi celotno zavarovalno obdobje. Odvisnost cene zavarovanja od parametra α je prikazana na Sliki 9, pri čemer so vrednosti za ostale parametre podane v Tabeli 5.

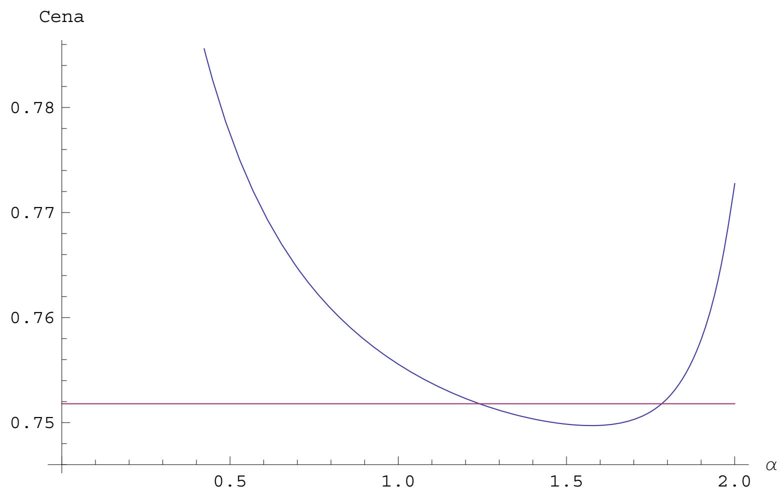
Tabela 5. Predpostavke za izračun neto enkratne premije (NEP) za zavarovanje za doživetje

Parameter	
Zavarovalna doba (n)	10
Spol	M
Verjetnost doživetja (${}_{10}p_{30}$)	$0,986095$
Zavarovalna vsota (ZV)	1
Jakost obrestne mere (δ)	0,027129
Lokalna nestanovitnost (σ)	0,001

Vir: Lastni izračun

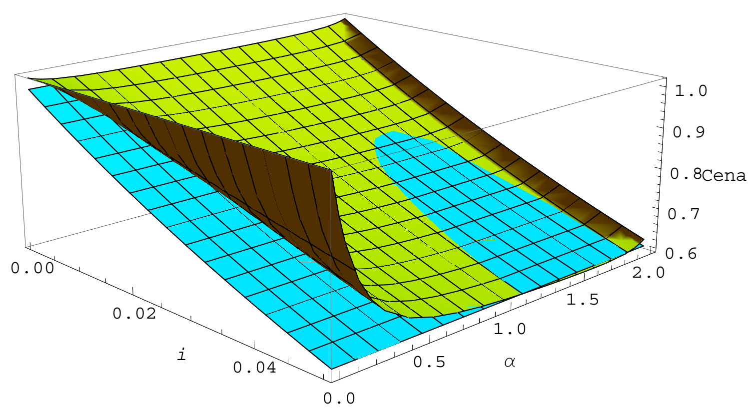
Za primerjavo je poleg prikazana še neto enkratna premija zavarovanja pri konstantni jakosti obrestne mere ($\delta = 0,027129$, kar ustreza obrestni meri 2,75 %, preko enačbe $\delta = \ln(1+i)$). Iz Slike 9 opazimo, da je na določenem intervalu neto enkratna premija (oziroma cena) zavarovanja manjša kot pri klasičnem načinu vrednotenja. Podoben efekt opazimo tudi na Sliki 10, kjer je prikazana neto enkratna premija še dodatno v odvisnosti od obrestne mere. Večinoma je neto enkratna premija sicer večja, kar smo tudi intuitivno pričakovali, vendar pri določeni izbiri parametra α (Slika 9) oziroma α in obrestne mere (Slika 10) dobimo nižjo ceno. Zadnje gre razlagati kot množico scenarijev, ki nihajo okoli pričakovane vrednosti (konstantne jakosti obrestne mere), in skozi model vrednotenja rezultirajo v bolj ugodni vrednosti neto enkratne premije kot pri centralnem scenariju. Za zavarovalnico to lahko pomeni, da bi ob skrbni izbiri parametrov, ponudili trgu konkurečno zavarovanje.

Slika 9. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in pri konstantni jakosti obrestne mere - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

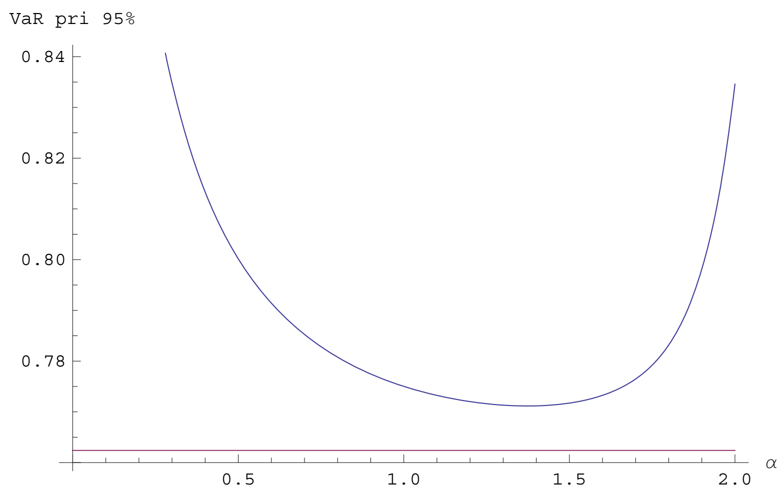
Slika 10. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in od obrestne mere - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

Stohastične obresti očitno v izračun vnašajo neto enkratne premije nestanovitnost, zato je to potrebno na ustrezen način izmeriti. Iz lastnosti, ki smo jih izpeljali v razdelku 6.1, velja, da je eksponent diskontnega faktorja normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, torej je diskontni faktor log-normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Tveganje bomo izmerili z mero VaR. Na Sliki 11 je prikazana odvisnost VaR pri 95 % od parametra α, pri čemer smo pri izračunu za ostale parametre privzeli vrednosti iz Tabele 5. Za primerjavo je prikazan tudi diskontni faktor, ki se uporablja pri klasičnem načinu vrednotenja. Iz slike je možno razbrati, da slučajnost diskontnega faktorja faktor prestavi više od vrednosti pri klasičnem vrednotenju, kar posledično lahko tudi zmanjša ceno zavarovanja, kot je razvidno iz Slike 9.

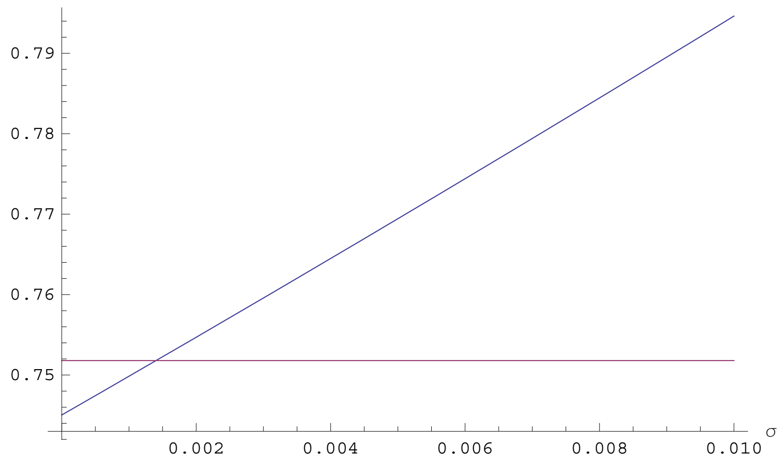
Slika 11. VaR diskontnega faktorja v odvisnosti od α in konstanten diskontni faktor - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

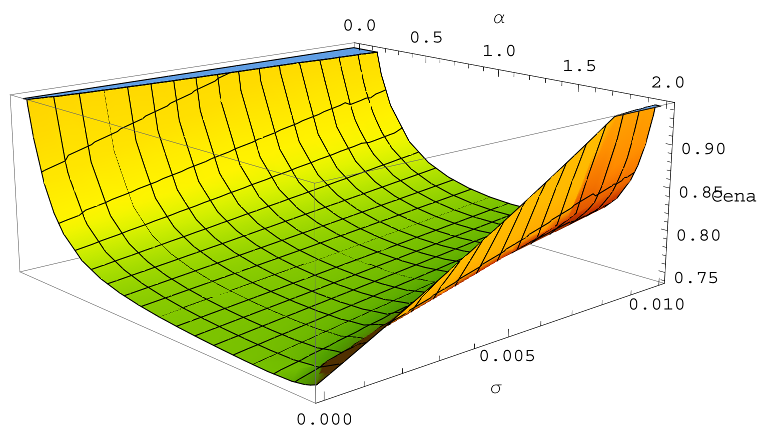
Podobno prikažemo odvisnost neto enkratne premije za zavarovanje za doživetje od parametra σ (Slika 12) in od obeh parametrov Vasičkovega modela (Slika 13). Na obeh slikah obstajajo intervali vrednosti parametrov, kjer je cena zavarovanja nižja od cene pri klasičnem vrednotenju. Za zavarovalnico to lahko pomeni, da bi ob skrbni izbiri parametrov, ponudili trgu konkurečno zavarovanje, torej po nižji ceni kot konkurenca. Obratno bi ob nekontrolirani izbiri parametrov dobili večjo ceno in s tem bi se zavarovalnica postavila v nekonkurenčen položaj glede na zavarovalnice, ki uporabljajo klasično vrednotenje.

Slika 12. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od σ in pri konstantni jakosti obrestne mere - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

Slika 13. Cena zavarovanja za doživetje v odvisnosti od α in σ - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

7.2.2 CIR model in zavarovanje za doživetje

V četrtem poglavju smo pokazali, da se Vasičkov model in CIR model v določenih vsebinah ujemata, v določenih pa razlikujeta. Pri modeliranju netvegane obrestne mere $r(t)$ se ujemata v členu $\alpha(\mu - r(t))$, medtem ko se razlikujeta v členu za nestanovitnost, in sicer σ proti $\sigma\sqrt{r(t)}$. Seveda je tudi vrednost nekaterih, ali pa vseh parametrov, različna.

Predpostavimo, da obrestna mera zvezno sledi modelu. Vemo, da je neto enkratna premija zavarovanja za doživetje zmnožek verjetnosti doživetja x let stare osebe za dobo n let in cene brezkuponske obveznice z zapadlostjo n let. Tako se za ugotavljanje razlike med Vasičkovim in CIR modelom, ob predpostavki neodvisnosti slučajne spremenljivke pričakovane prihodnje življenjske dobe in stohastične obrestne mere, lahko skoncentriramo na ceno brezkuponske obveznice, katero smo podali v Izreku 4.3 za Vasičkov model in Izreku 4.4 za CIR model. Na podlagi vzorčnih parametrov, prikazanih v Tabeli 6, bomo za posamezen model izračunali vrednost brezkuponske obveznice z različnimi zapadlostmi.

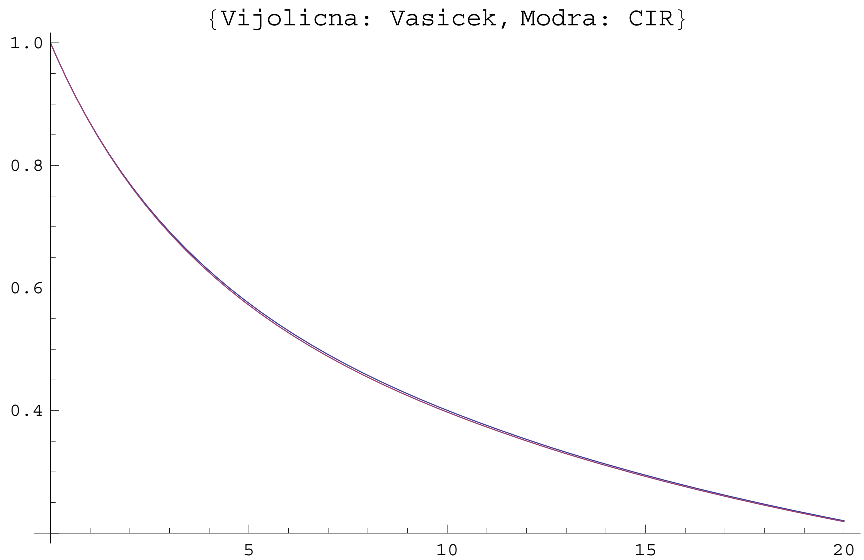
Tabela 6. Predpostavke za izračun cene brezkuponske obveznice

Model	μ	α	σ
Vasiček	0,06	0,25	0,02
CIR	0,06015	0,232	0,082

Vir: Cairns, 2004, str. 71

Izbira parametrov zadošča pogoju ekvivalence nestanovitnosti $r(t)$ ob pogoju $r(t) = \mu_{CIR}$, torej $\sigma_{CIR}\sqrt{\mu_{CIR}} = \sigma_{Vas}$. Nadalje izbira parametrov zadošča enakosti limitnih trenutnih obrestnih mer, kar pri Vasičkovem modelu predstavlja $\mu - \sigma^2/2\alpha^2$ ter pri CIR modelu $\mu\alpha(\gamma - \alpha)/\sigma^2$, pri čemer je $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}$. Oboje skupaj ima za posledico ujemanje krivulje obrestnih mer do 0,1 % natančno, kar implicira na skorajšnje ujemanje vrednosti brezkuponske obveznice in posledično tudi neto enkratnih premij za zavarovanje za doživetje. Gibanje cen brezkuponskih obveznic za oba modela je prikazano na Sliki 14, pri čemer smo predpostavili, da je $r(0) = 0,15$.

Slika 14. Vrednost brezkuponske obveznice - Vasičkov in CIR model



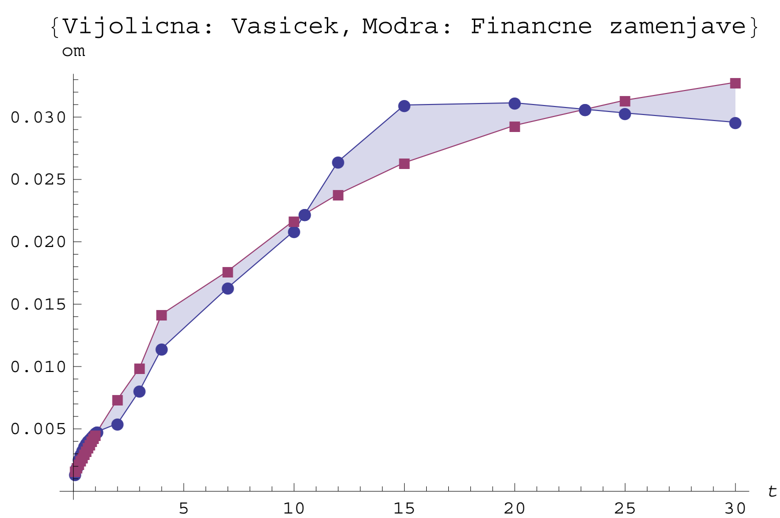
Vir: Lastni izračun

Odprto ostaja še vprašanje ekonomske vrednosti različnih stohastičnih modelov obrestnih mer. Vasičkov model, kateri je bil v preteklosti deležen kritik zaradi možnosti napovedovanja negativnih obrestnih mer, je v luči trenutnih razmer aktualen, saj so, kot smo pokazali na začetku sedmega poglavja, negativne obrestne mere realnost. CIR model je omejen na pozitivne obrestne mere, kar je v danih razmerah lahko omejitev.

7.2.3 Kalibracija modela

V prejšnjih razdelkih smo vpeljali model stohastične obrestne mere v model za vrednotenje. Do tržno konsistentne vrednosti zavarovanja nas loči še en korak. Da bi postavili pravo ceno zavarovanja, moramo model kalibrirati na obrestne mere, ki so podlaga za vrednotenje zavarovanja in ustrezajo namenu vrednotenja. Za namen računovodskega poročanja (izračun testa ustreznosti oblikovanih obveznosti) ali poročanja po Solventnosti II (izračun najboljše ocene) lahko kalibracijo naredimo glede na finančne zamenjave ali pa na visoko kvalitetne državne obveznice. Ravno ta korak je ključen za celotno vrednotenje in okoli tega poteka burna politična debata, saj ima na končen rezultat signifikanten učinek in z drugimi besedami, v kontekstu Direktive Solventnost II, pomeni, ali bo zavarovalnica preživela ali ne. Slika 15 prikazuje izvedeno kalibracijo Vasičkovega modela obrestnih mer na finančne zamenjave. Kot optimizacijska funkcija je bila uporabljena metoda najmanjših kvadratov. Zadnje pomeni, da se je metoda najmanjših kvadratov uporabila kot merilo za napako pri kalibraciji. Rezultat kalibracije so ustrezni parametri, ki nastopajo v Vasičkovem modelu obrestnih mer, s katerim posledično pridemo do bolj gladke krivulje obrestnih mer. Dobljeno predstavlja konkretno rešitev uporabnosti stohastičnih modelov obrestnih mer v kontekstu vrednotenja zavarovalnih pogodb tudi na dolgi rok, kar je bila ena izmed vprašljivih trditev profesorja Gerberja.

Slika 15. Kalibracija obrestnih mer - Vasičkov model



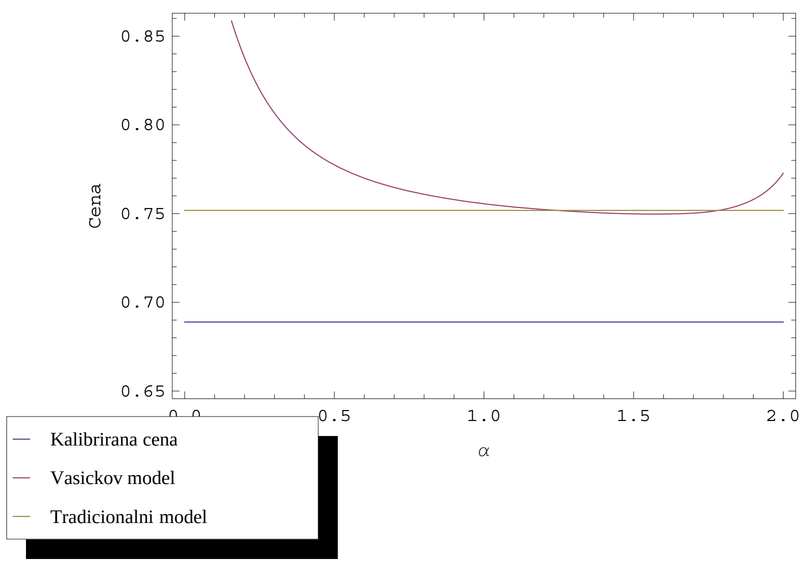
Vir: Lastni izračun

S pomočjo dobljenih obrestnih mer lahko izračunamo tržno konsistentno ceno zavarovanja. To lahko naredimo direktno z izračunanimi obrestnimi merami, s katerimi diskontiramo ustrezno zapadle denarne tokove, ali pa uporabimo kalibriran Vasičkov model, pri čemer smo pri zgornji kalibraciji dobili $\alpha = 0,172002$, $\mu = 0,120832$ in $\sigma = 0,000044$.

Na Sliki 16 je prikazana cena zavarovanja za doživetje, ki smo jo izračunali ob zgornji kalibraciji, in hkrati dodali elemente iz Slike 9 (str. 152). Cena zavarovanja je nižja od tradicionalnega vrednotenja, kar je posledica višjih obrestnih mer kalibriranega modela, oziroma višjih obrestnih mer na trgu. Torej bi imeli v primeru, da bi se zavarovanja prodajala po takšni tržni ceni, od tega korist potencialni zavarovalci, medtem ko bi morale zavarovalnice na drugi strani zagotavljati relativno visoke donosnosti. Ker se obrestne mere spreminjajo ves čas, seveda lahko pride do primerov, ko bo tržno konsistentna cena večja od cene pri tradicionalnem vrednotenju. V tem primeru, če bi prišlo do prodaje takšnih zavarovanj, bi korist od tega imela zavarovalnica tudi v smislu zagotavljanja nižje donosnosti.

V poglavju 5.2 smo omenili dekompozicijo obrestnih mer, torej da obrestno mero lahko razstavimo na netvegano obrestno mero, dodatek za kreditno tveganje, dodatek za nelikvidnost in residualni del. V preteklih poglavjih smo modelirali netvegano obrestno mero, medtem ko ostalih dodatkov nismo vključili zaradi samega namena finančnega poročanja. Govorili smo o tradicionalnem vrednotenju oziroma o tržno konsistentnem vrednotenju. V kolikor bi spremenili to izhodišče in obveznosti iz zavarovalnih pogodb vrednotili za drugačen namen, na primer izračun notranje vrednosti zavarovalnice, bi na dobljeno krivulju obrestnih mer dodali ustrezne dodatke oziroma premije.

Slika 16. Tržno konsistentna cena - Vasičkov model



Vir: Lastni izračun

Podobno, kot za zavarovanje za doživetje, lahko kalibriran Vasičkov model uporabimo pri zavarovanju, ki temelji na odsekoma zveznem markovskem procesu s tremi stanji oziroma katerem koli zavarovanju, torej z uporabo izpeljane enačbe (6.17).

7.2.4 Vrednotenje opcij in garancij

V poglavju 5.3.2 smo podali pravno ozadje za vrednotenje opcij in garancij, ki so vgrajene v zavarovalne pogodbe. Pod opcije štejemo vse pogodbene možnosti, ki jih ima zavarovalec v povezavi z možnostjo spremembe zavarovalne pogodbe, na primer sprememba zavarovalne dobe, sprememba zavarovalne vsote oziroma premije, odkup zavarovanja, odstop od zavarovanja in drugo. Pri garancijah je bolj ali manj govora o finančnih garancijah (garantirana obrestna mera pri klasičnih življenjskih zavarovanjih, garancija vplačanega kapitala pri naložbenih življenjskih zavarovanjih in drugo), medtem ko biometrične garancije počasi pridobivajo na veljavi.

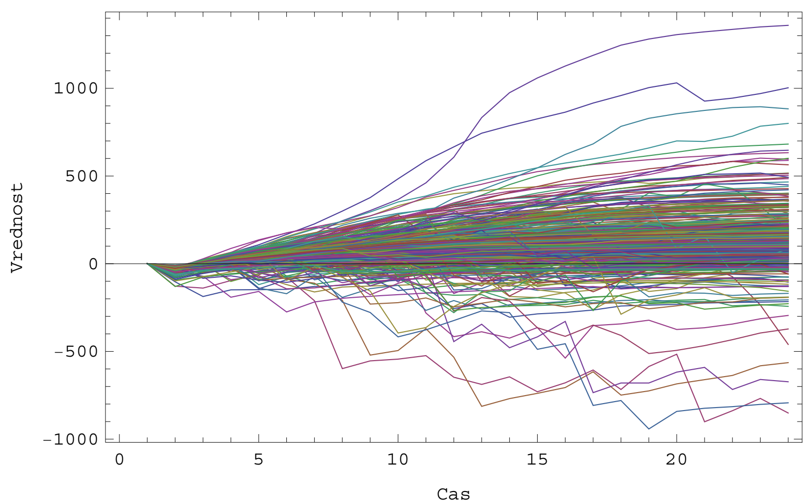
Časovna komponenta vrednosti opcij in garancij (TVOG) je tako dodatni del vrednosti zavarovalno-tehničnih rezervacij zavarovalnih pogodb, ki vsebujejo opcije in/ali garancije, medtem ko se notranja vrednost opcij in garancij udejanji skozi determinističen denarni tok.

V Smernicah o vrednotenju zavarovalno-tehničnih rezervacij (Ur. l. EU, št. L 12, 2015) so podane dodatne razlage o vrednotenju opcij in garancij. Po smernici 35 morajo zavarovalnice in pozavarovalnice izrecno upoštevati zneske, ki se imetnikom polic zaračunajo v zvezi z vgrajenimi opcijami. Smernica 36 opredeljuje ustreznost predpostavk pri vrednotenju in sicer morajo biti predpostavke, ki se uporabljajo za vrednotenje pogodbenih možnosti (opcij) in finančnih jamstev (garancij), skladne s trenutnimi tržnimi podatki, trenutno tržno prakso ter vedenjem imetnikov polic in uprave glede na značilnosti posla in podjetja. Podjetja bi prav tako morala upoštevati vpliv neugodnih razmer in trendov na trgu, vzpostaviti redni postopek za posodabljanje in zagotoviti, da so navedene predpostavke še vedno uresničljive ob upoštevanju vseh dodatnih informacij od zadnjega izračuna zavarovalno-tehničnih rezervacij. Kot primer lahko navedemo opcijo odkupa, ki bi jo imetniki zavarovalnih pogodb pogosteje izkoristili, če bi bile garantirane obrestne mere pod tržnimi obrestnimi merami in obratno, torej potencialni zavarovalci bi sklenili več zavarovanj, v kolikor bi bile garantirane obrestne mere nad tržnimi obrestnimi merami.

V nadaljevanju je nakazan postopek izračuna časovne vrednosti opcij in garancij mešanega zavarovanja. Pri vrednotenju se uporablja tržno konsistenten ESG, pri čemer se opazuje vrednost prihodnjih dobičkov skozi čas za posamezen ekonomski scenarij. Povprečno vrednost prihodnjih dobičkov, simuliranih iz več sto ekonomskih scenarijev, je potrebno odšteti od vrednosti prihodnjega dobička, dobljenega po centralnem scenariju. Dobljena vrednost predstavlja časovno komponento vrednosti opcij in garancij za dotično zavarovanje, ki jo potrebno prišteti k vrednosti zavarovalno-tehničnih rzervacij.

Na Sliki 17 je prikazan razvoj prihodnjih dobičkov vzorčnega mešanega zavarovanja glede na posamezen ekonomski scenarij.

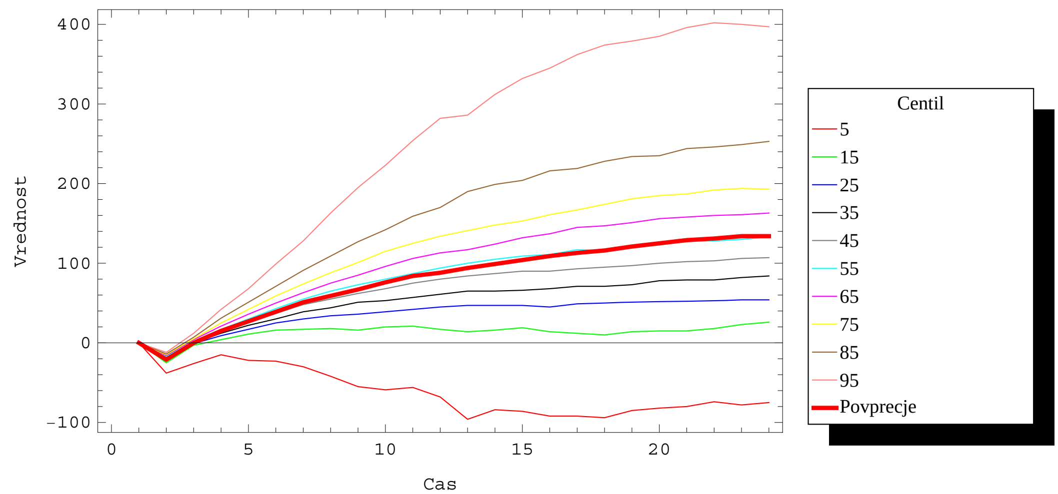
Slika 17. Vrednost prihodnjih dobičkov



Vir: Lastni izračun

Iz slike 17 je zaznati nesimetrično gibanje prihodnjih dobičkov vzorčnega mešanega zavarovanja pri različnih ekonomskih scenarijih. Slika 18 prikazuje posamezne centile razvoja prihodnjih dobičkov. Kot vrednost, ki jo v nadaljevanju primerjamo s centralno vrednostjo, privzamemo krivuljo, sestavljeno iz povprečja vseh scenarijev.

Slika 18. Centili prihodnjih dobičkov

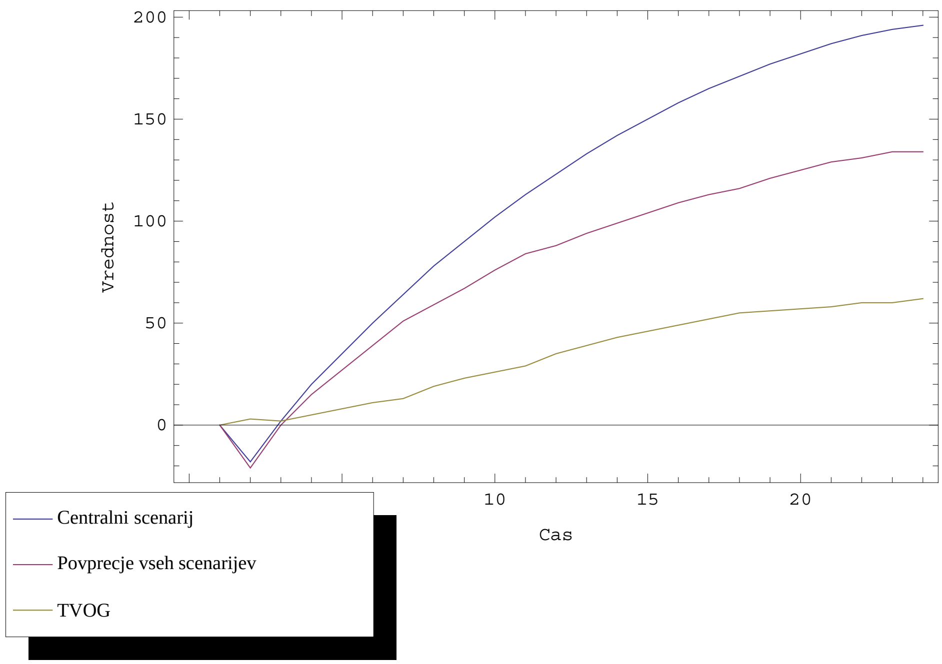


Vir: Lastni izračun

Slika 19 prikazuje gibanje vrednosti prihodnjih dobičkov po centralnem scenariju, povprečne vrednosti prihodnjih dobičkov in razliko obojega, kar predstavlja časovno komponento vrednosti opcij in garancij.

S tem smo zaokrožili celoten proces vrednotenja zavarovalnih obveznosti, od določitve neto enkratne premije, preko stohastičnih modelov obrestnih mer, kar v točki 0 ustreza ravno pričakovani sedanji vrednosti obveznosti iz dotičnega zavarovanja, do vrednotenja časovne komponente vrednosti opcij in garancij, ki so vgrajene v zavarovalno pogodbo. Seštevek obojega nam da tržno konsistentno vrednost zavarovanja.

Slika 19. Izračun vrednosti opcij in garancij



Vir: Lastni izračun

7.3 Ugotovitve analize z vidika postavljene hipoteze

Zgornja izpeljana vrednotenja nakazujejo, da je v modelu za vrednotenje zavarovalnih obveznosti mogoče vpeljati modele stohastičnih obrestnih mer. Sicer dodatna nestanovitnost prinaša dodatno tveganje, ki ima lahko tudi pozitiven predznak. Smiselnost takšne vpeljave za današnji koncept prodaje ne pride v poštev, saj se zavarovalna pogodbe sklene in velja do izteka, pri čemer se v tem obdobju ne sprašujemo o vrednosti pogodbe glede na tržne razmere. V primeru zagotovitve dnevnega vrednotenja obveznosti, so izpeljana vrednotenja lahko osnova za radikalno potezo, in sicer za vzpostavitev borze zavarovalnih pogodb. Obrestne mere so preko različnih sistemov vedno dostopne in v tem kontekstu jih lahko ali preko kalibracije različnih stohastičnih modelov obrestnih mer ali tabelarno direktno vgradimo v vrednotenje zavarovanj. Seveda je pravni okvir omenjenega razmišljanja kompleksen, vendar bi s pogledom na različne izvedene finančne instrumente, za katere že danes obstaja trg, pravni okvir za trgovanje z zavarovalnimi pogodbami lahko vzpostavili brez večjih ovir.

Z razvitimi modeli za vrednotenje zavarovanj smo neposredno preverili trditev Hansa Gerberja (Gerber, 1996, str. 67), ki trdi, da modeliranje obrestnih mer s stohastičnimi procesi pri vrednotenju življenjskih zavarovanj ni smiselno. V preteklih letih so to trditev posredno ali neposredno postavili pod vprašaj na primer Siegl, 1997, Persson, 1998, Bühlmann, 2000, Mao, 2000, Bacinello, 2003, Poncet, 2003, Gaillardetz, 2008, Zaglauer, 2008 Wuethrich, 2010, Paetzmann, 2011, Koller, 2012, Devolder, 2015. Dodatno k temu se je tudi razvoj samega zakonodajnega okvirja vrednotenja zavarovalnih obveznosti usmeril k uporabi stohastičnih modelov (na primer: Solventnost II in prihajajoči MSRP 4, faza 2). Analitično smo združili več stohastičnih procesov znotraj enega modela, pri čemer je predpostavljena neodvisnost slučajnih spremenljivk. Izpeljali smo enačbe za Vasičkov in druge modele obrestne mere pod predpostavkami konstantnosti ali slučajnosti obrestne mere znotraj posameznega leta, s čimer se pri modelu vrednotenja obveznosti posameznih oblik življenjskih zavarovanj izračuna konkretne vrednosti obveznosti. Izpeljani modeli za vrednotenje nakazujejo, da so opazovane cene zavarovanj v intervalu okrog cene, dobljene s tradicionalnim vrednotenjem, kar nakazuje na smiselnost uporabe oziroma analize te rešitve. Dodatno nas bo v uporabo stohastičnih modelov obrestnih mer prisila, tako zakonodaja kot tudi razvoj finančne matematike, medtem ko smo z zgornjimi vrednotenji postavili smer, ki lahko služi za nadaljnjo raziskovanje. Dokazali smo tudi osnovno hipoteza doktorske disertacije in sicer, da ima uporaba stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, ki so modelirana preko markovskih procesov, direkten vpliv na ceno zavarovanja, kar pomeni, da lahko uporaba stohastičnih modelov pri vrednotenju zavarovanj pripelje do nižje ali višje cene zavarovanja v primerjavi s tradicionalnim pristopom vrednotenja zavarovanj.

Edini argument, ki odvrača od omenjenega razmisleka, je sama nenaklonjenost novostim, vendar tudi le-ta z razvojem moderne finančne matematike počasi popušča. Tako ostaja dejstvo, da bodo dobro obveščeni potrošniki kupovali oziroma prodajali zavarovanja, ki na dan same transakcije vključujejo trenutne vrednosti obrestnih mer, kar se bo odražalo v sami ceni.

8 SKLEP

Osrednji problem, obravnavan v doktorski disertaciji, je, kako vpeljava stohastičnih modelov obrestnih mer vpliva na vrednotenje zavarovalnih produktov, ki temeljijo na odsekoma zveznih markovskih procesih. Rešitev tega problema je v izračunu matematičnega upanja in variance slučajne spremenljivke, ki opisuje opazovano zavarovanje. Matematično upanje nam da vpogled v ceno zavarovanja v odvisnosti od vseh parametrov modela in neposredno primerjavo s tradicionalnim modelom, kjer se pri vrednotenju uporablja fiksna obrestna mera. Varianca in druge mere tveganja povedo, koliko dodatne nestanovitnosti prinesejo stohastični modeli obrestnih mer. V kontekstu dobljenih kazalcev se presoja sama uporabnost takšnega pristopa.

Iz rezultatov izračunov, ki so predstavljeni v sedmem poglavju, lahko sklepamo, da pri tradicionalnem vrednotenju, torej pri uporabi fiksne obrestne mere, dodatni riziko, ki ga krije zavarovalnica, poveča samo ceno zavarovanja, kar je pričakovan rezultat, saj zavarovalnica za več prejetega tveganja zahteva večje plačilo. Omenjeno je prikazano na primerjavi cene zavarovanja za doživetje, mešanega življenjskega zavarovanja in zavarovanja, ki temelji na odsekoma zveznem markovskem procesu s tremi stanji. Na primeru zavarovanja za doživetje so prikazane osnovne zakonitosti tradicionalnega vrednotenja, in sicer tako, da cena zavarovanja pada z večanjem obrestne mere, ki jo zagotavlja zavarovalnica. Z vidika tveganja to pomeni, da zavarovalnica sicer ponuja zavarovalne produkte po morebitni nižji ceni, vendar mora poleg nižje premije zagotavljati še večjo donosnost na naložbeni strani, torej prevzema večje tržno tveganje. Cena zavarovanja pada tudi z večanjem zavarovalne dobe, kar ne preseneča, saj je na voljo več časa za izpolnitev obveznosti iz zavarovalnih pogodb ob fiksni obrestni meri. Cena raste z naraščanjem verjetnosti doživetja. V tem konkretnem primeru se zavarovalna vsota izplača samo ob doživetju in ravno verjetnost doživetja implicira verjetnost samega izplačila. V nadaljevanju so predstavljeni izračuni vrednotenj ob uporabi stohastičnih modelov obrestnih mer, pri čemer smo uporabili Vasičkov model in CIR model kot alternativno primerjalno možnost. Iz le teh izhajajo zaključki, da je ob uporabi stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju življenjskih zavarovanj mogoče dobiti manjšo ali večjo ceno v primerjavi s tradicionalnim vrednotenjem, vendar je s tem povezano tudi samo tveganje, ki je tudi izmerjeno. Na primeru Vasičkovega modela obrestnih mer je prikazana kalibracija modela obrestnih mer in uporaba pridobljenih parametrov na konkretnem izračunu vrednotenja zavarovanja, ki po privzeti teoriji tako odraža tržno konsistentno vrednost. Zadnji korak do tržno konsistentne vrednosti obveznosti je predstavljen preko vrednotenja časovne komponente vrednosti opcij in garancij, kjer pridejo v poštev generatorji ekonomskih scenarijev. S tem je tudi zagotovljena sama uporabnost dobljenih rezultatov.

V disertaciji predstavljene metode za izračun neto enkratnih premij oziroma metode za vrednotenje zavarovanj sicer niso preproste, vendar so direktno uporabne in izvedljive ob uporabi podatkov, ki so dosegljivi v zavarovalnicah. Iz zgoraj navedenih ugotovitev izračunov namreč izhaja, da bi konkretne rešitve lahko implementirale vse zavarovalnice ne glede na njihovo velikost, kar v nasprotju z Direktivo Solventnost II ne bi predstavljalo prednosti velikih skupin pred manjšimi zavarovalnicami v kontekstu izračunavanja neto enkratnih premij.

V disertaciji je analitično potrjena tudi osnovna teza, da ima uporaba stohastičnih modelov obrestnih mer pri vrednotenju zavarovanj, ki so modelirana preko markovskih procesov, direkten vpliv na ceno zavarovanja, pri čemer smo združili več stohastičnih procesov znotraj enega modela. Z izračuni smo pokazali, da se cena zavarovanja lahko giblje v vseh možnih intervalih, glede na pogodbeno razmerje med zavarovalnico in zavarovalcem. Cena lahko implicitno naraste za oba, ko se zaradi povečane nestanovitnosti kot posledice uporabe stohastičnih modelov, poveča potreba po dodatnem kapitalu.

V disertaciji je za zavarovanje za doživetje in Vasičkov model za obrestno mero eksplicitno izpeljano tako matematično upanje in varianca diskontnega faktorja pri predpostavki konstantne jakosti obrestne mere znotraj posameznega leta. S pomočjo teh izpeljav je možno Vasičkov model za obrestno mero aplicirati na poljubno zavarovanje in izvesti vrednotenje z uporabo stohastičnega modela obrestnih mer. Korak dlje je predpostavka o zveznem spreminjanju obrestne mere po določenem modelu. V disertaciji so pod to predpostavko izpeljane formule za vrednotenje zavarovanja za doživetje, ter zavarovanja, ki temeljijo na odsekoma zveznem markovskem procesu ob uporabi Vasičkovega modela obrestne mere. Markovski modeli se lahko uporabljajo tudi za modeliranje obrestnih mer, kar je prikazano in izpeljano na primeru mešanega življenjskega zavarovanja. Kot primer uporabe večfaktorskega modela so izpeljane formule na primeru zavarovanja za doživetje in CIR modela obrestne mer.

Disertacija tako pritrdilno odgovori na vprašanje, ki izhaja iz glavne teze: če so stohastični modeli obrestnih mer dovolj zanesljivi, da lahko na dolgi rok ustrezno nadomestijo klasično metodo vrednotenja zavarovalnih produktov, pri katerih se uporablja fiksna obrestna mera. Iz samih rezultatov sledi, da s pomočjo kalibracije uporabljenega stohastičnega modela obrestnih mer dovolj zanesljivo vrednotimo zavarovanje. To je tudi glavni znanstveni prispevek doktorske disertacije, s čimer se trditev profesorja Gerberja (Gerber, 1997) ovrže.

V doktorski disertaciji pripravljeni modeli lahko služijo za določanje cene oziroma vrednosti zavarovanj, glede na namen vrednotenja. V kontekstu Direktive Solventnost II jih lahko uporabimo za izračun najboljše ocene zavarovalno–tehničnih rezervacij vključno s časovno komponento vrednosti opcij in garancij, v kontekstu MSRP jih lahko uporabimo za izračun statutarne vrednosti zavarovanj, lahko pa jih uporabimo za izračun tržno konsistentne vrednosti v kontekstu prenosa ali prodaje, oziroma nakupa portfelja zavarovalnih pogodb. Seveda so predstavljeni modeli začetne točke tovrstnega raziskovanja, ki jih je mogoče še poglobiti, pri čemer velja opozoriti na potrebno dobro razumevanje problema, saj napačna uporaba le-teh lahko pripelje do zavajajočih rezultatov.

LITERATURA IN VIRI

1. Agencija za zavarovalni nadzor. (2014). *Letno poročilo za leto 2013.* Ljubljana: Agencija za zavarovalni nadzor.

2. Agencija za zavarovalni nadzor. (2015). *Letno poročilo za leto 2014.* Ljubljana: Agencija za zavarovalni nadzor.

3. Atkinson, M. E., & Dickson D. C. E. (2000). *An Introduction to Actuarial Studies.* Edward Elgar Publishing.

4. Atkinson, D. B., & Dallas, J. W. (2000). *Life Insurance Products and Finance.* Schaumburg: Society of Actuaries.

5. Babbel, David R. (1997). Discussion of "Two Paradigms for the Market Value of Liabilities" by Robert R. Reitano. *North American Actuarial Journal, 1*(4), 122–125.

6. Babbel, David R., & Merrill, Craig (1998). Economic valuation models for insurers. *North American Actuarial Journal, 2*(3), 1–15.

7. Babbel, David R. (1998). Comments on Fair Valuation of Insurance Liabilities. *Kluwer Academic Press*, 115–126.

8. Bacinello, A. R., & Persson, S. (2002). Design and Pricing of Equity-Linked Life Insurance under Stochastic Interest Rates. *The Journal of Risk Finance, 2*(3), 6–21.

9. Baker, C. R., & Wallage, P. (2000). The future of financial reporting in Europe: Its role in corporate governance. *The International Journal of Accounting, 35*(2), 173–187.

10. Baldvinsdottir, E. K., & Lina, P. (2011). On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator.

11. Baxter, Martin, & Rennie, Andrew. (1996). *Financial Calculus An introduction to derivative pricing.* Cambridge: Cambridge University Press.

12. Belič, Urban. (1997). *Stohastično modeliranje sedanje vrednosti.* Diplomska naloga poslovne šole. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

13. Bernstein, Peter L. (1998). *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk.* Wiley.

14. Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A.J. (1999). *Investments.* New York: McGraw-Hill.

15. Booth, Philip & et al. (1999). *Modern Actuarial Theory and Practice.* Chapman&Hall.

16. Boncelj, J. (1983). *Zavarovalna ekonomika.* Maribor: Založba Obzorja.

17. Bowers, N.L. (1986). *Actuarial Mathematics.* Itasca: The Society of Actuaries.

18. Brigo, Damiano, & Mercurio, Fabio. (2001). *Interest Rate Models Theory and Practice.* Berlin: Springer-Verlag.

19. Briys, Eric. (2001). *Insurance: From Underwriting to Derivatives: Asset Liability Management in Insurance companies.* John Wiley & Sons.

20. Bühlmann, Hans. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Berlin: Springer-Verlag.

21. Bühlmann, Hans. (2000). *Financial Risk in Insurance: Life Insurance with Stochastic Interest Rates.* Berlin: Springer-Verlag.

22. Cairns, Andrew J.G. (2004). *Interest Rate Models – An Introduction.* Princeton: Princeton University Press.

23. CEA. (2005). *Annual report 2004-2005.* Najdeno 02.11.2011 na http://www.cea.assur.org

24. CEIOPS. (2010). *CEIOPS Task Force Report on Liquidity Premiums.*

25. CFO. *CFO/CRO Forum QIS 5 Technical Specification Risk-free interest rates.*

26. CFO. (2008). *CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles.*

27. CFO. (2009). *CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles.*

28. Cox, D.R., & Miller, H.D. (1965). *The theory of Stochastic Processes.* London: Chapman and Hall.

29. Creedon & et al. (2008). *Interim Report of the Market Consistent Valuation Working Party.*

30. Daykin, C.D., Pentikäinen, T., & Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* London: Chapman and Hall.

31. Decomposing corporate bond spreads. (2007). *Bank of England Quarterly Bulletin, Q4.*

32. De Moivre, A. (1725). *A Treatise of Annuities on Lives.* London.

33. Denuit, M. & et al. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks.* Wiley.

34. Devolder, P. & et al. (2015). *Basic Stochastic Processes.* Wiley.

35. De Vylder, Etienne F. (1997) *Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives.* Kluwer Academic Publishers.

36. Dhaene, Jan & et al. (2005). Razlika med aktuarskim in finančnim pogledom. *Finance*, št. 65.

37. Direktiva 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta z dne 25. novembra 2009 o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II). *Uradni list ES*, št. L 335/1, 2009.

38. Duffie, D., & Kan, R. (1996). A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance, 6*, 379–406.

39. Embrechts, Peter & et al. (1995). Nationaler Bericht Schweiz. Zusammenspiel von Versicherungsgesellschafen, Universitäten, Schweizerischer Vereinigung der Versicherungsmathematiker (SVVM) und Aufsichtsbehörden. *Insurance: Mathematics and Economics, 17*(1), 86

40. Evropska komisija. (2010). *QIS5 Technical specifications.* Bruselj.

41. Fisher, H. F. (1965). *Actuarial Practice of Life Assurance.* Cambridge: Cambridege University Press.

42. Franke, Jürgen. (2004). *Statistics of Financial Markets.* Berlin: Springer.

43. Gaillardetz, Patrice. (2008). Valuation of life insurance products under stochastic interest rates. *Insurance: Mathematics & Economics, 42*(1), 212–226.

44. Gerber, Hans U. (1997). *Life Insurance Mathematics*. Springer Verlag.

45. Gerber, Hans U. (1996) *Matematika življenjskih zavarovanj*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavarovalnica triglav d.d.

46. Goovearts, M.J., De Vijlder, F.E., & Haezendonck, J. *Insurance Premiums: Theory and Applications*. North-Holland, Amsterdam.

47. Grandell, Jan. (1997). *Mixed Poisson Processes*. London: Chapman & Hall.

48. Gubta, A.K. (2002). *An Introduction to Actuarial Mathematics (Mathematical Modelling)*. Kluwer Academic Publishers.

49. Gujarati, Damodar N. (1995). *Basic Econometrics*. New York: McGraw-Hill.

50. Homer, Sidney. (2005). *History of Interest Rates*. Wiley.

51. Hoowaarts, Günter. *Technik der Lebensversicherung*. Munich: Munich Re.

52. IAA. (2011). *IAA Educational Monograph on the Topic of Issues Associated with the Determination of Discount Rates for Financial Reporting Purposes*.

53. IASB. (2010). *IFRS Insurance Contract Exposure Draft (ED/2010/8)*.

54. IASB. *Mednarodni standard računovodskega poročanja 9 (IFRS 9)*.

55. Institute of Actuaries. (2000). *Core Reading 103 Stochastic Modelling*. London: Faculty of Actuaries, Institute of Actuaries.

56. Jacod, Jean, & Protter, Philip. (2000). *Probability Essentials*. Berlin: Springer-Verlag.

57. James, Jessica, & Webber, Nick. (1999). *Interest Rate Modelling*. Wiley.

58. Jamnik, Rajko. (1979). *Matematična statistika*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov.

59. Kalashnikov, Vladimir, & Norberg, Ragnar. (2003). On the sensitivity of premiums and reserves to changes in valuation elements. *Scand. Actuar. J., 3*, 238–256.

60. Karatzas, Ioannis, & Shreve, Steven E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer-Verlag.

61. Koller, Michael. (2000). *Stochastische Modelle in der Lebenversicherung.* Berlin: Springer-Verlag.

62. Koller, Michael (2012). *Stochastic Models in Life Insurance.* Berlin: EAA Series, Springer-Verlag.

63. Košmelj, Blaženka, & Rovan, Jože. (1997). *Statistično sklepanje.* Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

64. Lajos, Takács. (1967). *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes.* New York: Wiley.

65. Laster, David. (2000). *Asset liability management for insurers.* Zurich: Swiss Reinsurance Company.

66. Leland, H., & Toft, K. (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance, 51*, 987–1019.

67. Lipovec, Rudi. (2006). Stohastični modeli obrestne mere. *Zavarovalniki horizonti, 1.*

68. Lund, Diderik. (1991). *Stochastic models and option values :applications to resources, environment and investment problems.* Amsterdam.

69. Malačič, Janez. (2000). *Demografija: teorija, analiza, metode in modeli.* Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

70. Makeham, W. M. (1860). On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables. *J. Inst. Actuaries and Assur. Mag., 8*, 301-310.

71. Mao, Hong. (2000). Valuation of life insurance products with stochastic interest rates. *Mathematical Theory and Applications, 20*(3) 19–25.

72. Meerschaert, Mark M. (1999). *Mathematical Modeling.* Academic Press.

73. Merrill, R.C. (1997). Discussion of "Two Paradigms for the Market Value of Liabilities" by Robert R. Reitano. *North American Actuarial Journal, 1*(4), 131–135.

74. Merton, R. (1974). On the Pricing of the Corporate Debt: The Risk Structure of the Interest Rates. *Journal of Finance, 29*(2).

75. MunichRe. (2008). *Tablice obolevnosti za nemško populacijo za devetnajst hujših bolezni*. Munich.

76. Musiela, Marek & et al. (2004). *Martingale Methods in Financial Modelling (Stochastic Modeling and Applied Probability S.)*. Berlin: Springer-Verlag.

77. Nieder, Dirk, & Pasdika, Ulrich. (2003). *The need for private long-term care protection supplementing state provision*. Cologne: GenRe.

78. Norberg, Ragnar. (1991). Reserves in life and pension insurance. *Scand. Actuar. J., 1*, 3–24.

79. Norberg, Ragnar. (1993). A Solvency Study in Life Insurance. *Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium*, 821–830.

80. Norberg, Ragnar. (1995). Differential equations for moments of present values in life insurance. *Insurance Math. Econom., 17*(2), 171–180.

81. Norberg, Ragnar. (1995). A time–continuous Markov chain interest model with applications to insurance. *J. Appl. Stoch. Models and Data Anal.*, 245–256.

82. Norberg, Ragnar. (1999). A theory of bonus in life insurance. *Finance Stoch., 3*(4), 373–390.

83. Norberg, Ragnar. (2001). *Financial Mathematics in Life and Pension Insurance*. Summer School in Mathematical Finance, Dubrovnik.

84. Norberg, Ragnar. (2001). On bonus and bonus prognoses in life insurance. *Scand. Actuar. J., 2*, 126–147.

85. Norberg, Ragnar. (2003). The Markov chain market. *Astin Bulletin, 33*(2), 265–287.

86. Norberg, Ragnar. (2004). *Life Insurance Mathematics*. Encyclopedia of Actuarial Science 2004 Edition, Willey.

87. Norberg, Ragnar. (2004). Vasiček beyond the normal. *Mathematical Finance, 14*(4), 585–604.

88. Office for Official Publications of the European Communities. (2004). *Population statistics 2004*. Luxembourg.

89. Oksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations.* Berlin: Springer.

90. Paetzmann, K. (2011). Discontinued German life insurance portfolios: rules-in-use, interest rate risk, and Solvency II. *Journal of Financial Regulation and Compliance, 19*(2), 117–138.

91. Pahud de Mortanges, Charles, & Allers, Vivian. (1996). Political risk assesment. *International Business Review, 5*(3), 303–318.

92. Parker, Gary. (1994). Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarrial Functions. *Astin Bulletin, 24*(2).

93. Partnoy, Frank. (1999). *F.I.A.S.C.O.: The Inside Story of a Wall Street Trader.* Penguin Books.

94. Persson, Svein-Arne. (1998). Stochastic interest rate in life insurance: the principle of equivalence revisited. *Scandinavian Actuarial Journal, 2*, 97–112.

95. Povh, Janez. (1998). *Teorija zavarovalniških procesov.* Diplomsko delo. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko.

96. Poncet, P., & Vaugirard, V. (2002). The Pricing of Insurance-Linked Securities Under Interest Rate Uncertainty. *The Journal of Risk Finance, 3*(3), 48–59.

97. Promislow, S. David. (2006). *Fundamentals of actuarial mathematics.* Chicheste: Wiley.

98. Riley, Kevin. (2001). Looking Beyond the Calculations for Better Disability Risk Selection. *Cologne: GenRe Risk Insights, 5*(2), 12–14.

99. Ross, Sheldon M. (2003). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance : Options and Other Topics.* Cambridge: Cambridge University Press.

100. Sandmann, Klaus & et al. (2000). *Advances in Finance and Stochastics.* Berlin: Spriger.

101. Shreve, Steven E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance.* New York: Springer.

102. Siegl, Thomas. (1997). Stochastic interest rate models in life insurance. *Grazer Mathematische Berichte, 330*, 31–34.

103. Sklep o načinu in obsegu upoštevanja posameznih postavk, podrobnejših lastnostih in vrstah postavk ter lastnostih podrejenih dolžnikih instrumentov, ki se upoštevajo pri izračunu kapitala in kapitalske ustreznosti in izkaz kapitalske ustreznosti zavarovalnice. *Uradni list RS*, št. 3/01, 68/01, 22/02, 69/02 in 117/02

104. Sklep o podrobnejši vsebini poročila pooblaščenega aktuarja. *Uradni list RS*, št. 3/01

105. Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno tehničnih rezervacij. *Uradni list RS*, št. 3/01 in 69/01)

106. Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnice. *Uradni list RS*, št. 3/01, 68/01 in 69/02

107. Slapar, Mateja. (2006). *Markovske verige v življenjskih zavarovanjih.* Magistrsko delo. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

108. Slovensko zavarovalno združenje. (2004). *Statistični zavarovalniški bilten 2004.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

109. Slovensko zavarovalno združenje. (2005). *Statistični zavarovalniški bilten 2005.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

110. Slovensko zavarovalno združenje. (2006). *Statistični zavarovalniški bilten 2006.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

111. Slovensko zavarovalno združenje. (2007). *Statistični zavarovalniški bilten 2007.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

112. Slovensko zavarovalno združenje. (2008). *Statistični zavarovalniški bilten 2008.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

113. Slovensko zavarovalno združenje. (2009). *Statistični zavarovalniški bilten 2009.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

114. Slovensko zavarovalno združenje. (2010). *Statistični zavarovalniški bilten 2010.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

115. Slovensko zavarovalno združenje. (2011). *Statistični zavarovalniški bilten 2011.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

116. Slovensko zavarovalno združenje. (2012). *Statistični zavarovalniški bilten 2012.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

117. Slovensko zavarovalno združenje. (2013). *Statistični zavarovalniški bilten 2013.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

118. Slovensko zavarovalno združenje. (2014). *Statistični zavarovalniški bilten 2014.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

119. Slovensko zavarovalno združenje. (2015). *Statistični zavarovalniški bilten 2015.* Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.

120. Smernice o vrednotenju zavarovalno-tehničnih rezervacij. *Uradni list ES*, št. L 12, 2015.

121. Stirzaker, David. (2003). *Elementary Probability.* Cambridge: Cambridge University Press.

122. Stanovnik, Tine. (2002). *Javne finance.* Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

123. Statistični urad RS. (2002). *Tablice umrljivosti za slovensko populacijo 2000-2002.* Ljubljana: Statistični urad RS.

124. Statistični urad RS. (2007). *Popolne tablice umrljivosti prebivalstva Slovenije, 2007.*

125. Tajnikar, Maks. (1996) *Mikroekonomija s poglavji iz teorije cen.* Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

126. Tomažin, Aleš. (1998). *Metode ponovnega vzorčenja.* Diplomsko delo. Ljubljana, Fakulteta za matematiko in fiziko.

127. Tomažin, Aleš. (2000). *Raziskovalni projekt Teorija rizika in iger pri modelih upravljanja zalog premoženja.* Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

128. Tomažin, Aleš. (2004). Garantirane obrestne mere. *Zbornik prispevkov 11. dnevov slovenskega zavarovalništva*, 269–278.

129. Tomažin, Aleš. (2005). *Analiza uporabnosti odsekoma zveznega markovskega procesa s tremi stanji v prostoru in času pri vrednotenju zavarovalniških produktov.* Magistrsko delo. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

130. Trieschmann, Jame S. & et al. (2001). *Risk Management And Insurance.* USA: South-Western College Publishing.

131. Trunk, Susanne. (1994). *Dread Disease Internationale Produktgestaltung und Erfahrung.* Cologne: GenRe.

132. Vasiček, Oldrich. (1977). An equilibrium characterisation of term structure. *Journal of Financial Economics, 5*, 177–188.

133. Wang, Peijie. (2003). *Financial Econometrics : Methods and Models.* London: Routledge.

134. Wang, Nan & et al. (2004). The premium and the risk of a life policy in the presence of interest rate fluctations. *Insurance: Mathematics and Economics, 35*(3), 537–551.

135. Wolter, Kirk M. (2003). *Introduction to Variance Estimation.* New York: Springer-Verlag.

136. Wuethrich, Mario, Bühlmann, Hans, Furrer, Hansjrg (2010). *Market-Consistent Actuarial Valuation.* Berlin: EAA Series, Springer-Verlag.

137. Zaglauer, Katharina; Bauer, Daniel. (2008). Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts in a stochastic interest rate environment. *Insurance: Mathematics & Economics, 43*(1), 29–40.

138. Zakrajšek, Egon. (2000). *Uvod v numerične metode.* Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

139. Zakon o gospodarskih družbah *Uradni list RS*, št. 42/06 (60/06 popr.), 26/07-ZSDU-B, 33/07-ZSReg-B, 67/07-ZTFI (100/07 popr.), 10/08, 68/08, 23/09 Odl.US: U-I-268/06-35, 42/09, 65/09-UPB3, 83/09 Odl.US: U-I-165/08-10, Up-1772/08-14, Up-379/09-8, 33/11, 91/11, 100/11 Skl.US: U-I-311/11-5, 32/12, 57/12, 44/13 Odl.US: U-I-311/11-16, 82/13.

140. Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS*, št. 13/00, 31/00 - ZP-L, 91/00 - popr., 12/01 - Skl. US, 21/02, 52/02 - ZJA, 91/02 - Skl. US, 29/03 - Odl. US, 40/04 - ZDDPO-1, 50/04, 65/04 - Skl. US, 76/05 - ZZVZZ-H, 8/06 - ORZZavar62, 79/06, 114/06 - ZUE, 9/07, 102/07, 69/08, 19/09, 49/09, 83/09, 79/10, 90/12, 102/12.

141. Zhang, Qiang, & Wu, Min. (2011). Credit risk mitigation based on Jarrow-Turnbull model. *Systems Engineering Procedia, 2*, 49–59.

PRILOGE

Kazalo prilog

Priloga 1: Slovar slovenskih prevodov tujih izrazov 1
Priloga 2: Seznam uporabljenih kratic 2

Priloga 1: Slovar slovenskih prevodov tujih izrazov

Annuity contract - rentno zavarovanje

Arbitrage-free pricing theory - teorija o brez-arbitražnem določanju cen

Best estimate - najboljša ocena

Binomial models - binomski modeli

Chapman-Kolmogorov equations - enačbe Chapman-Kolmogorov

Comonotonicity - komonotonost

Continuous-time interest rate models - modeli obrestnih mer v zveznem času

Credit risk - kreditno tveganje

Death rates - stopnje umrljivosti

Deterministic model - deterministični model

Discount factor - diskontni faktor

Economic scenario generator - generator ekonomskih scenarijev

Endowment assurance contract - mešano življenjsko zavarovanje

Equilibrium and short-rate models - ravnotežni in kratkoročni modeli

Expectations theory - teorija pričakovanj

Force of interest rate - jakost obrestne mere

Force of mortality - jakost umrljivosti

Forward rate - terminska obrestna mera

Forward-rate curve - krivulja terminskih obrestnih mer

Illiquidity premium - premija za nelikvidnost

Interest rate - obrestna mera

Life expectancy - pričakovano trajanje življenja

Life insurance contract - življenjsko zavarovanje

Life table - tablice umrljivosti

Liquidity preference theory - teorija likvidnih preferenc

Market consistent valuation - tržno konsistentno vrednotenje

Market segmentation theory - teorija segmentacije trga

Markov chain - markovska veriga

Markov jump process - odsekoma zvezen markovski proces

Markov property - lastnost Markova

Multifactor models - večfaktorski modeli

No-arbitrage models - modeli brez arbitraže

Poisson process - Poissonov proces

Probability of death - verjetnost smrti

Pure endowment assurance contract - življenjsko zavarovanje za primer doživetja

Risk measure - mera tveganja

Risk-free rate of interest - netvegana obrestna mera

Short rate - kratkoročna obrestna mera

Spot rate - trenutna obrestna mera

State space - prostor stanj

Stationarity - stacionarnost

Stochastic model - stohastični model

Stochastic process - stohastični proces

Survival function - funkcija preživetja

Term assurance contract - življenjsko zavarovanje za primer smrti

Time value of options and garanties - časovna komponenta vrednosti opcij in garancij

Transition matrix - matrika prehodov

Transition probability - verjetnost prehoda

Transition rate - jakost prehoda

Weak stationarity - šibka stacionarnost

Zero-coupon bond - brezkuponska obveznica

Priloga 2: Seznam uporabljenih kratic

AZN - Agencija RS za zavarovalni nadzor

BDP - Bruto domači proizvod

CDS - Zamenjava kreditnega tveganja

CEIOPS - Odbor evropskih nadzornikov za zavarovalništvo in poklicne pokojnine

CFO forum - Evropski zavarovalniški forum izvršilnih finančnih direktorjev

CIR model - Cox-Ingersoll-Ross model

ECB - Evropska centralna banka

EIOPA - Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine

EU - Evropska unija

ESG - Generator ekonomskih scenarijev

IASB - Odbor za mednarodne računovodske standarde

IFRS - Mednarodni standardi računovodskega poročanja

MCEV - Tržno konsistentna notranja vrednost

MCR - Minimalni kapital

MSRP - Mednarodni standardi računovodskega poročanja

QIS - Kvantitativna študija učinkov

SCR - Solventnostni kapital

TVOG - Časovna komponenta vrednosti opcij in garancij

VaR - Tvegana vrednost