

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

VREDNOTENJE KATASTROFNIH IZVEDENIH FINANČNIH INSTRUMENTOV V ZAVAROVALNIŠTVU

Ljubljana, september 2009

ANDREJA ČIČ

IZJAVA

Študentka Andreja Čič izjavljam, da sem avtorica tega magistrskega dela, ki sem ga napisala pod mentorstvom prof. dr. Miheala Permanca, in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

Ljubljana, september 2009

Podpis:

KAZALO

UVOD	1
1 OBLIKE ZAŠČITE PRED KATASTROFNIM TVEGANJEM.....	4
1.1 Pregled največjih katastrof	4
1.2 Tradicionalni načini financiranja tveganja	9
1.2.1 Pozavarovanje	9
1.2.2 Dokapitalizacija.....	11
1.3 Alternativni prenosi tveganja.....	11
2 KATASTROFNI IZVEDENI FINANČNI INSTRUMENTI	12
2.1 Opis katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	13
2.2 Vzroki za nastanek katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov.....	14
2.3 Oblike katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	17
2.3.1 Katastrofne opcije	17
2.3.1.1 Opcije	17
2.3.1.2 Škodni kazalec kot osnova katastrofne opcije	18
2.3.2 Katastrofne obveznice	20
2.3.2.1 Enostaven primer vrednotenja katastrofne obveznice	21
2.3.2.2 Vpliv stroškov na odločitev o uporabi katastrofnih obveznic	22
2.3.2.3 Primeri izdaj katastrofnih obveznic	24
2.3.3 Drugi katastrofni izvedeni finančni instrumenti.....	26
2.4 Prednosti in pomanjkljivosti katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	27
3 UPRAVLJANJE S KATASTROFNIM TVEGANJEM.....	28
3.1 Portfelj zavarovanj.....	28
3.2 Modeli individualnih katastrofnih škod.....	30
3.2.1 Neodvisni škodni deleži	31
3.2.2 Deterministični škodni deleži.....	32
3.2.3 Slučajni škodni deleži.....	33
3.3 Določanje nevarnostne premije in verjetnost bankrota	34
3.4 Možnost razpršitve katastrofnega tveganja	36
3.4.1 Razpršitev običajnega tveganja.....	36
3.4.2 Razpršitev katastrofnega tveganja.....	38
4 VREDNOTENJE KATASTROFNIH IZVEDENIH FINANČNIH INSTRUMENTOV .	42
4.1 Proces tveganja	43
4.2 Black–Sholesov model ter osnovni izrek o vrednotenju	45
4.2.1 Model vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov	45
4.2.2 Black–Sholesov model	48
4.2.3 Osnovni izrek o vrednotenju	49
4.3 Načini vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov.....	55
4.3.1 Uporaba sestavljenega Poissonovega procesa za modeliranje procesa tveganja	55
4.3.2 Aktuarsko skladno vrednotenje katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	57
4.3.3 Vrednotenje katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov z uporabo funkcije koristnosti	62
4.3.4 Modeliranje osnove katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	64
4.3.5 Primer vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov z uporabo Esscherjeve transformacije.....	66
4.4 Numeričen primer vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov	71
SKLEP.....	72
LITERATURA	74
VIRA.....	78

PRILOGE

A	MATEMATIČNI POJMI IN IZREKI.....	1
A.1	Uvodni pojmi.....	1
A.2	Poissonov proces	3
A.3	Sestavljena porazdelitev	6
A.3.1	Konvolucija	8
A.4	Martingal	9
A.4.1	Algebra in σ -algebra.....	10
A.4.2	Martingal in primeri	11
A.5	Esscherjeva transformacija	14
B	NUMERIČEN PRIMER VREDNOTENJA KATASTROFNEGA RAZPONA.....	16
C	SLOVARČEK.....	20

UVOD

Naravne nesreče vedno znova pretresajo svet. Zahtevajo človeška življenja in povzročijo ogromno škodo. Leta 2004 je zaradi cunamija v Indijskem oceanu umrlo 220.000 ljudi. Leto pozneje je orkan Katrina v Združenih državah Amerike povzročil ekonomsko škodo v višini 140 milijard dolarjev. Statistični podatki kažejo, da število katastrof in škode naraščajo, najbolj izrazita je rast pri katastrofah, ki jih povzročijo neurja in poplave (Enz, Kurt, Mehlhorn, Schwarz, 2008, str. 3).

Zavarovanje¹ je učinkovito orodje, ki omili finančno breme katastrof in preprečuje, da katastrofe ohromijo celotna gospodarstva. Tako kot posamezniki in podjetja so tudi zavarovalnice izpostavljene tveganju nepredvidljivo velikih katastrofnih škod. Ker se zavarovalnice pri tem soočajo s problemom akumulacije katastrofnih škod, se morajo primerno zaščititi. Ena izmed možnosti je pozavarovanje; poenostavljeno povedano je to zavarovanje ene zavarovalnice pri drugih zavarovalnicah, to so običajno pozavarovalnice². Ker so katastrofne škode vse večje in pogostejše, je vprašljivo, ali imajo zavarovalnice in pozavarovalnice dovolj zmogljivosti za kritje katastrof. Obstajajo ocene, da zmogljivosti ne zadostujejo za ogromne katastrofne škode (ISO Properties, 1999).

Zanimalo nas bo, kakšne možnosti imajo zavarovalnice in pozavarovalnice za obvladovanje katastrofnega tveganja³. Učinkovit način obvladovanja tveganja⁴ je razpršitev, vendar katastrofnega tveganja ni mogoče zadovoljivo razpršiti. Zato zavarovalnice uporabljajo tradicionalne načine financiranja tveganja, najpogostejše pozavarovanje. Obseg katastrofnega pozavarovanja je omejen in pozavarovalne premije so visoke. Če tradicionalni načini ne nudijo rešitev ali pa rešitve niso ugodne, se pojavijo alternativni prenos tveganja (Krumberger, 2002, str. 19). Alternativne oblike povezujejo zavarovalni in kapitalski trg⁵. Kapitalski trg je dovolj

¹ Zavarovanje je možno le, ko je zavarovalni primer prihodnji, negotov in neodvisen od izključne volje zavarovalnice, zavarovalca, zavarovanca oziroma upravičenca (Obligacijski zakonik, 2001). Zavarovanje je posebna dejavnost zaščite pred nevarnostmi, ki ogrožajo premoženje in ljudi. Potreba po zavarovanju izhaja iz prepoznane nevarnosti, ki lahko ogrozi gospodarsko varnost (Krumberger, 2002, str. 6).

² Za družbe, ki se ukvarjajo s pozavarovanjem, bomo uporabljali izraz pozavarovalnice.

³ Katastrofno tveganje pomeni izključno tveganje naravnih nesreč. Nekateri viri h katastrofnemu tveganju štejejo tudi tveganje velikih nesreč, ki jih povzroči človek, bodisi nenamerno, kot delovne nesreče v industriji, bodisi namerno, kot terorizem.

⁴ Najširši pomen tveganja zajema vsak prihodnji negotov dogodek, ki je lahko ugoden ali pa ne. Vsako tveganje ni zavarovalno, zavarovalno tveganje mora zadostiti naslednjim pogojem: verjetnost in obseg škode sta določljiva in merljiva, tveganje se nanaša na bodoče in negotove dogodke, tveganje je množično in ga je mogoče razpršiti ter obseg tveganja ustreza finančni moči zavarovalnice. V slovenski zavarovalniški literaturi se pogosto pojavlja izraz riziko. Z zavarovalnega zornega kota besedi nista enakovredni (Krumberger, 2002, str. 7). Tveganje obstaja, če ni zavarovanja pred določeno nevarnostjo, s sklenitvijo zavarovanja se tveganje bistveno zmanjša, riziko pa še obstaja. Ne glede na to uporabljamo besedi riziko in tveganje kot sopomenki, prednost ima beseda tveganje.

⁵ Kapitalski trg je del finančnega trga, ki je namenjen dolgoročnim finančnim oblikam (Veselinovič, 1998, str. 40). Ročnost dolgoročnih oblik je daljša od enega leta, primeri dolgoročnih finančnih oblik so dolgoročni krediti in lastniški kapital. Kapitalski trg se deli na organiziran trg, ki ga predstavlja borzo trgovanje, in neorganiziran trg, ki ga predstavlja zunajborzno trgovanje (Čas & Rotar, 1994, str. 113).

velik, da krije del katastrofnih škod. Delež alternativnih načinov je majhen v primerjavi s pozavarovanjem, zato so alternativni načini dopolnilo pozavarovanju.

Razlogi za nastanek različnih oblik alternativnih prenosov tveganja so pomanjkljivosti tradicionalnih oblik in ciklična gibanja⁶ na zavarovalnem trgu kakor tudi globalizacija in deregulacija (Pavliha, 2000, str. 323). K nastanku je prispevala potreba po zaščiti pred tveganji, ki niso zavarovalna, kot na primer politična, teroristična, valutna in kreditna (Krumberger, 2002, str. 21). Med alternativnimi prenosi tveganj izpostavimo finančne instrumente z zavarovalnim ozadjem, tako imenovane zavarovalne izvedene finančne instrumente. To so izvedeni⁷ finančni instrumenti, ki so vezani na zavarovalnine, torej izplačila zavarovalnic zaradi škodnega dogodka. Ker nas zanima obvladovanje katastrofnih tveganj, bomo obravnavali katastrofne zavarovalne izvedene finančne instrumente, to so instrumenti z osnovo, odvisno od katastrof.

Glede na to, da govorimo o zavarovalnih izvedenih finančnih instrumentih, natančneje o katastrofnih zavarovalnih izvedenih finančnih instrumentih, bomo uporabljali krajša poimenovanja zavarovalni instrumenti ali zavarovalni izvedeni instrumenti ter katastrofni instrumenti ali katastrofni izvedeni instrumenti. Daljša poimenovanja bomo uporabljali le v naslovih. V literaturi ni enotne delitve katastrofnih instrumentov niti alternativnih prenosov tveganja. Pojem katastrofni instrument bo pomenil zavarovalne izvedene instrumente, ki se uporabljajo kot dopolnilo katastrofnega pozavarovanja. Pojem obsega tako katastrofne opcije kakor tudi katastrofne terminske pogodbe in katastrofne obveznice, če naštejemo nekaj oblik.

Zavarovalnice potrebujejo katastrofne instrumente, vendar to ni dovolj za razmah katastrofnih instrumentov. Obstajati mora zanimanje vlagateljev. Katastrofni instrumenti so privlačni za vlagatelje, ker imajo sorazmerno visoke donose in omogočajo učinkovito razpršitev naložbenega portfelja (ISO Properties, 1999). Donosi katastrofnih instrumentov niso odvisni od donosov drugih naložb. Orisali bomo zavarovalno in finančno ozadje, ki je prispevalo k nastanku katastrofnih izvedenih instrumentov.

Na kratko smo utemeljili, da obstaja potreba po katastrofnih instrumentih. Pri obvladovanju katastrofnega tveganja je treba upoštevati, da ni zadovoljivo razpršljivo. Katastrofe se dogajajo na geografsko omejenih območjih. Prav tako je problem akumulacija škod, saj med posameznimi zavarovanimi predmeti obstaja odvisnost. S pomočjo modela bomo pokazali, da katastrofnega

⁶ Za zavarovalništvo so značilni poslovni cikli, ki se odražajo na višini zavarovalnih premij. V obdobjih ekonomskega razcveta so zavarovanci pripravljeni plačevati višje premije in obratno. Na cikle v zavarovalništvu močno vplivajo škodni dogodki, kot sta orkan Andrew in teroristični napad na Svetovni trgovinski center. Po takšnih dogodkih se premije naglo dvignejo.

⁷ Izvedeni instrumenti se glasio na osnovni oziroma temeljni instrument, krajše osnova. Pri tem se praviloma takojšen nakup spremeni v terminskega, to pomeni, da je plačilo odloženo v prihodnost. Vrednost izvedenega instrumenta je določena z osnovo. Možne osnove so: blago, kot so žito, kovine, nafta, finančni instrumenti, torej dolžniški in lastniški, tuj denar, finančni kazalci, kot so obrestne mere, indeksi, izvedeni instrumenti, kombinirane osnove, kjer gre za kombinacijo dveh ali več navedenih osnov, in drugo, kot so opcije na ekološke pravice ali električno energijo (Draškovič, 1998, str. 250). Osnovne oblike izvedenih finančnih instrumentov so: opcije, zamenjave ter nestandardizirane in standardizirane finančne terminske pogodbe (Kocič & Nowak, 2000, str. 164).

tveganja ni mogoče razpršiti s povečevanjem števila zavarovanj. Trditev o nerazpršljivosti katastrofnega tveganja bomo teoretično podkrepili, pri tem bomo uporabili različne predpostavke o odvisnosti med zavarovanji.

Zadržimo se še pri izrazoslovju o zavarovalninah in škodah⁸. Vemo, da je premoženjsko zavarovanje, kamor spada tudi katastrofno zavarovanje, namenjeno povrnitvi škode, ki nastane na zavarovanem premoženju, če se zgodi zavarovalni primer (Pavliha, 2000, str. 180). Zavarovalnica se obveže, da plača morebitno zavarovalnino⁹. Za zavarovan del škode bomo uporabljali izraz zavarovalnina, čeprav pri tem ne bomo dosledni. V aktuarstvu izraz ni udomačen, pogosto zasledimo izraz škoda, ki pomensko ustreza izrazu zavarovalnina. Poznamo škodne rezervacije, modeliranje škodnega dogajanja, škodni količnik in še bi lahko naštevali. Pri teh pojmihi so mišljene škode, ki jih izplača zavarovalnica, torej zavarovalnine. Ker raba izrazov škoda in zavarovalnina ni dosledna in ker se izraz škoda pogosto uporablja namesto zavarovalnina, bomo izraza škoda in zavarovalnina enakovredno uporabljali, razen če iz sobesedila ne bo sledilo drugače.

Zavarovalnice in vlagatelje, ki uporabljajo katastrofne instrumente, zanima vrednost instrumentov. Za vrednotenje bomo postavili model in kot je običajno, bo model brez arbitraže. Vrednotenje katastrofnih instrumentov se razlikuje od vrednotenja finančnih instrumentov. V standardnih modelih vrednotenja izvedenih instrumentov, kot sta binomski in Black–Sholesov, je vrednost enolična. Enoličnost je povezana z zveznim spreminjanjem osnove in s trgovanjem z osnovo. Za osnovo katastrofnih instrumentov pa to ne velja in vrednosti katastrofnih instrumentov ni mogoče določiti enolično brez dodatnih zahtev. Obstajajo različni pristopi vrednotenja katastrofnih instrumentov. Pri tem ne bomo izpostavljali ekonomskega ozadja, ampak matematične postopke vrednotenja. Podatkov o vrednostih katastrofnih instrumentov je sorazmerno malo in so težko dostopni, zato dobljene ugotovitve nimajo ustreznih utemeljitev. Ne glede na to bomo ugotovitve kritično presodili in preučili vplive na vrednotenje katastrofnih instrumentov.

Magistrsko delo je zasnovano na predpostavki, da so znani osnovni pojmi zavarovanja in pozavarovanja ter verjetnostnega računa in statistike. Ključni matematični pojmi so podani v prilogi. V prvem poglavju bomo opisali tradicionalne in alternativne oblike zaščite pred katastrofnim tveganjem. Vključili bomo pregled katastrof. V drugem poglavju bomo opisali katastrofne instrumente in navedli vzroke za njihov nastanek. Podali bomo posamezne oblike katastrofnih instrumentov. Tretje poglavje bo v nasprotju s prvimi tremi matematično obarvano.

⁸ Pri natančni obravnavi pojma škoda in zavarovalnina nista enakovredna. Na splošno je zavarovalnina nižja od škode in je manjša ali enaka vrednosti zavarovanega predmeta (Pavliha, 2000, str. 158). To je zaradi uporabe odbitne franšize, kjer je zavarovanec soudeležen v škodi, in zaradi dogovorjene zavarovalne vsote, saj zavarovalnica ne želi prevzeti celotnega tveganja ali pa zavarovanec ni pripravljen plačevati visoke zavarovalne premije (Komelj, 2004, str. 2).

⁹ Za povračilo škode Obligacijski zakonik predvideva tudi izraz odškodnina. Zavarovalnina je širši pojem, odškodnine se nanašajo na odgovornostna zavarovanja z možnostjo neposrednega povračila oškodovancu in ne zavarovancu (Pavliha, 2000, str. 161). Katastrofno zavarovanje ni odgovornostno zavarovanje, zato izraz odškodnina ni ustrezen.

Z modelom bomo pokazali, da katastrofnega tveganja ni mogoče poljubno razpršiti z večanjem števila polic. Vzrok je odvisnost škod med posameznimi policami. Četrto poglavje je namenjeno vrednotenju katastrofnih instrumentov. Izhodišče bo vrednotenje izvedenih instrumentov, navedli bomo osnovni izrek o vrednotenju in matematično opredelili arbitražo in popoln model. Pokazali bomo, da vrednotenje katastrofnih instrumentov zahteva drugačne pristope kot vrednotenje običajnih instrumentov.

Delo bo sestavljeno iz treh tematskih sklopov. V prvem sklopu bomo opredelili alternativne prenose tveganj in možnosti financiranja tveganja. Pojasnili bomo zavarovalno in finančno ozadje za nastanek katastrofnih izvedenih instrumentov. V drugem sklopu bomo s pomočjo modela podkrepili potrebo po alternativnih prenosih katastrofnih tveganj, srečali bomo slučajne spremenljivke, njihove porazdelitve in stohastične procese. V tretjem sklopu bomo preučili določanje vrednosti katastrofnih instrumentov. Pokazali bomo, da pristop Black–Sholesovega modela ni smiseln. Namesto tega se bomo sklicali na osnovni izrek o vrednotenju sredstev. To nas bo vodilo do uporabe martingalov, ki so priljubljeno orodje za vrednotenje finančnih instrumentov, katerih vrednosti so podvržene stohastičnim procesom. Predstavili bomo različne načine vrednotenja katastrofnih instrumentov, ki vključujejo funkcijo koristnosti, pozavarovanje in Esscherjevo transformacijo. Sklenili bomo z numeričnim primerom vrednotenja katastrofnega instrumenta, ki bo temeljil na simulaciji.

1 OBLIKE ZAŠČITE PRED KATASTROFNIM TVEGANJEM

V uvodu smo napovedali, da bomo najprej podali pregled katastrof. Navedli bomo 30 najhujših katastrof glede na zavarovan del škod. Podali bomo tudi kratek pregled katastrofnega dogajanja v letih od 2004 do 2008. Ker so zneski vrtoglavi, nas bo zanimalo, kakšne možnosti imajo zavarovalnice in pozavarovalnice za obvladovanje katastrofnega tveganja. Predstavili bomo tradicionalne načine obvladovanja tveganja in novejša alternative. Med tradicionalnimi načini ima ključno vlogo pozavarovanje. Alternativni načini pa presegajo meje zavarovalništva in posegajo na kapitalski trg. Kot smo omenili v uvodu, so dopolnilo tradicionalnih načinov in tako jih bomo obravnavali.

1.1 Pregled največjih katastrof

Poimenovanje katastrofe in s tem povezano tveganje pomeni naravne nesreče, ki so posledica naravnih sil. Katastrofe so dogodki, ki prizadenejo večje število prebivalcev in njihovo premoženje, dogajajo se sorazmerno redko. Dogodek je katastrofa, pri katerem celotna škoda

Tabela 1: Najhujše katastrofe glede na višino zavarovalnin v obdobju od leta 1970 do leta 2008

Katastrofa	Leto	Prizadete države	Zavarovalnine (milijoni \$) ⁱ	Število žrtev ⁱⁱ
orkan Katrina	2005	ZDA, Mehikiški zaliv	71.300	1.836
orkan Andrew	1992	ZDA, Bahami	24.552	43
potres v Northridgeu	1994	ZDA	20.337	61
orkan Ike	2008	ZDA, Karibi	20.000	136
orkan Ivan	2004	ZDA, Karibi	14.680	124
orkan Wilma	2005	ZDA, Mehika, Jamajka	13.847	35
orkan Rita	2005	ZDA, Mehikiški zaliv, Kuba	11.122	34
orkan Charley	2004	ZDA, Kuba, Jamajka	9.176	24
tajfun Mireille / št. 19	1991	Japonska	8.926	51
orkan Hugo	1989	ZDA, Portoriko	7.940	71
snežni vihar Daria	1990	Francija, Velika Britanija	7.695	95
snežni vihar Lothar	1999	Francija, Švica	7.497	110
snežni vihar Kyrill	2007	Nemčija, Velika Britanija	6.328	54
neurje in poplave	1987	Francija, Velika Britanija	5.875	22
orkan Frances	2004	ZDA, Bahami	5.866	38
snežni vihar Vivian	1990	Evropa	5.258	64
tajfun Bart / št. 18	1999	Japonska	5.222	26
orkan Georges	1998	ZDA, Karibi	4.663	600
tropski vihar Allison	2001	ZDA	4.382	41
orkan Jeanne	2004	ZDA, Haiti	4.334	3.034
tajfun Songda / št. 18	2004	Japonska, Južna Koreja	4.087	45
orkan Gustav	2008	ZDA, Karibi	4.000	135
neurje s točo, tornado	2003	ZDA	3.752	45
orkan Floyd	1999	ZDA, Bahami	3.648	70
orkan Opal	1995	ZDA, Mehika	3.540	59
potres v Kobeju	1995	Japonska	3.493	6.425
snežni vihar Martin	1999	Španija, Francija, Švica	3.102	45
snežni metež, tornado	1993	ZDA, Mehika, Kanada	2.925	246
poplave	2002	Evropa	2.763	38
gozdni požari, suša	1991	ZDA	2.688	26

Legenda: ⁱ Zneski zavarovalnin so preračunani na osnovi cen leta 2008¹⁰. Odškodnine odgovornostnih zavarovanj in zavarovalnine življenjskih zavarovanj niso vključene.

ⁱⁱ Število žrtev vključuje tudi pogrešane.

Vir: Enz, Zimmerli, Schwarz, *Natural catastrophes and man-made disasters in 2008: North America and Asia suffer heavy losses*, 2009, str. 37.

¹⁰ Zneski zavarovalnin so najprej preračunani iz lokalne valute v dolarje po tečaju na koncu leta nastanka katastrofe.

presega 80 milijonov dolarjev ali zavarovan del presega 40 milijard dolarjev ali pa je število žrtev nad 20 (Enz, Zimmerli, Schwarz, 2009, str. 40). Katastrofe lahko delimo v naslednje skupine: poplave, neurja, potresi vključno s cunami, suša in gozdni požari vključno z vročinskimi valovi, mraz in hladni valovi ter drugo, kot so toča in plazovi (Zanetti, Schwarz, Enz, 2005, str. 36).

Velikost katastrofne škode ni odvisna le od naravnih sil, ampak tudi od drugih dejavnikov kot so način gradnje, opozorilni sistemi pred katastrofo in prva pomoč po katastrofi. Pri katastrofnih škodah razlikujemo med celotno škodo, ki jo povzroči katastrofa, in delom, ki je zavarovan. Za celotno škodo je pogosto poimenovanje ekonomska škoda. Ekonomska škoda zajema vse neposredne škode zaradi naravne nesreče, recimo poškodbe stavb, infrastrukture in vozil. V ekonomsko škodo pa niso vključene posredne škode kot so poslabšanje kvalitete življenja, izguba ugleda in zmanjšanje bruto domačega proizvoda. Zavarovane škode obsegajo škode premoženjskih zavarovanj. Opozorimo, da zavarovalnine ne vključujejo odškodnin odgovornostnih zavarovanj¹¹ in zavarovalnin življenjskih zavarovanj, saj slednje zavarovanje ni premoženjsko.

V tabeli 1 so našteje katastrofe z največjimi zavarovalninami skupaj s številom žrtev. Povprečna zavarovalnina 30 najhujših katastrof je skoraj 10 milijard dolarjev, povprečno število žrtev je 454. Iz tabele 1 razberemo, da se je po letu 2000 zgodilo 14 katastrof. Najpogosteje prizadeta država so Združene države Amerike, ki jo je prizadelo skupaj 19 katastrof. Večina katastrof je posledica vetra, bodisi kot orkan¹², tajfun, ciklon, snežni vihar ali neurje. Na sliki 1 so prikazane katastrofne zavarovalnine in število katastrof od leta 1970 do leta 2008. Vidimo, da zavarovalnine in število katastrof naraščajo. V osemdesetih so zavarovalnine na katastrofo presegle 7 milijard dolarjev, v devetdesetih so narasle čez 20 milijard dolarjev, v letu 2005 pa so presegle 60 milijard dolarjev (Enz et al., 2008, str. 40). Ocenjujejo, da se bo rast nadaljevala.

Na kratko pogledimo nekaj dejstev o katastrofah v preteklih letih. Leta 2004 je Združene države Amerike prizadelo več silovitih orkanov. V šestih tednih so se na Floridi zgodili štirje¹³: Charley, Frances, Ivan in Jeanne. Zavarovalnice so izplačale skupaj več kot 20 milijard dolarjev zavarovalnin¹⁴. Japonsko je prizadelo rekordno število tajfunov, in sicer deset¹⁵, pred tem jih je bilo največ šest v letu (Zanetti et al., 2005, str. 14).

¹¹ Odškodnine odgovornostnih zavarovanj niso vključene, ker je postopek določanja višine odškodnin dolgotrajen.

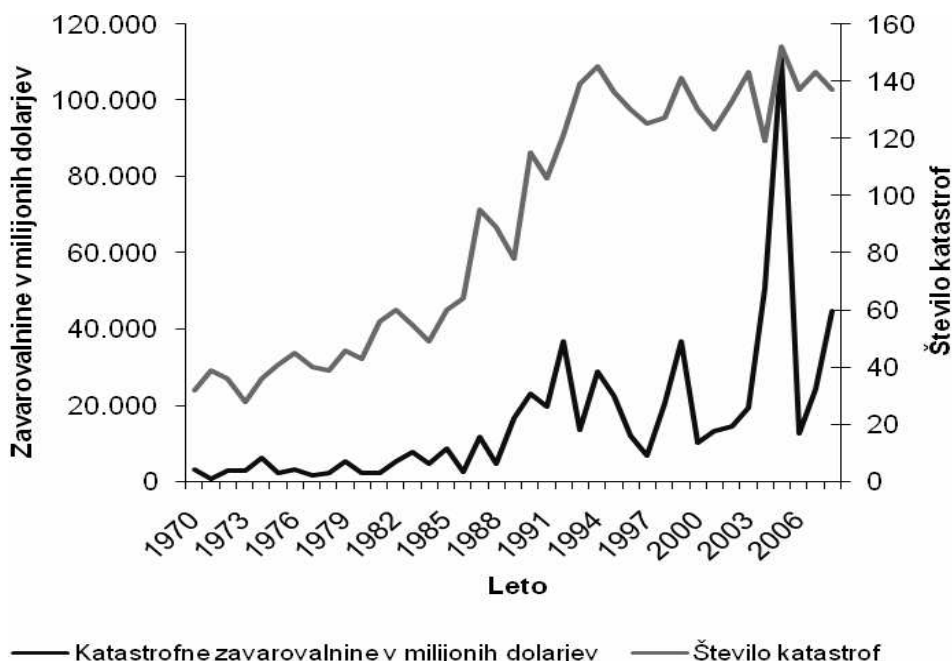
¹² Orkan je tropska nevihta, pri kateri hitrost vetra preseže 120,7 km/h ali pa je njegova jakost nad 12 po Beaufortovi lestvici (Benfield Industry Analysis and Research, 2004, str. 4).

¹³ Od leta 1990 so se štirje orkani zgodili v letih 1906, 1909, 1964 in 2004, pet orkanov leta 1933 in šest orkanov v letih 1916 in 1985 (Government Accountability Office, 2005, str. 19). Po dostopnih podatkih se do leta 2004 v Združenih državah Amerike v posameznem letu ni zgodilo toliko orkanov, pri katerih je hitrost vetra presegla 178 km/h, prav tako ni znan primer, da bi štirje orkani prizadeli eno državo.

¹⁴ Ocena skupnega zneska zavarovalnin je 27 milijard dolarjev (Government Accountability Office, 2005, str. 20).

¹⁵ V letu 2004 so bili na Japonskem najsilovitejši tajfuni: Songda / št. 18, hitrost vetra do 212 km/h, zavarovalnine v višini 3,6 milijarde dolarjev, 45 žrtev, Tokage / št. 23, hitrost vetra do 229 km/h, zavarovalnine v višini 1,1 milijarde dolarjev, 97 žrtev, in Chaba / št. 16, hitrost vetra do 210 km/h, zavarovalnine v višini 1 milijarde dolarjev, 17 žrtev (Zanetti et al., 2005, str. 17).

Slika 1: Katastrofne zavarovalnineⁱ in število katastrof od leta 1970 do leta 2008



Legenda: ⁱ Zneski zavarovalnin so preračunani na osnovi cen leta 2008. Odškodnine odgovornostnih zavarovanj in zavarovalnine življenjskih zavarovanj niso vključene.

Vir: Enz, Zimmerli, Schwarz, *Natural catastrophes and man-made disasters in 2008: North America and Asia suffer heavy losses*, 2009, str. 5, 7.

Leto 2005 izstopa zaradi rekordne škode, ki jo je povzročil orkan Katrina. Tega leta je bilo skupaj 15 orkanov med 27 poimenovanimi neurji¹⁶, kar je največ orkanov in poimenovanih neurij v posameznem letu v Združenih državah Amerike (Zanetti & Schwarz, 2006, str. 11). Zaradi potresa v Kašmirju je umrlo več kot 97.000 ljudi, ekonomska škoda je bila 5 milijard dolarjev, zavarovalnine pa zanemarljive zaradi nizke stopnje zavarovanosti (Zanetti & Schwarz, 2006, str. 3, 22).

Tajfuni in potresi so leta 2006 prizadeli manj razvita območja, kjer večina premoženja ni zavarovana, zato je bilo to leto sorazmerno ugodno za zavarovalnice. Leta 2007 so katastrofe povzročile 63,7 milijard dolarjev škod, zavarovalnice so krile 23,3 milijarde dolarjev škod, kar je 10,8 milijarde več kot leta 2006 (Enz et al., 2008, str. 3). Najpogostejše katastrofe so bile neurja in poplave. Zimsko neurje Kyrill je v Nemčiji, Veliki Britaniji, Belgiji in na Nizozemskem povzročil 10 milijard dolarjev škode in 6,3 milijard dolarjev zavarovalnin. Veliko Britanijo je poleti prizadelo več poplav, ki so povzročile 7,2 milijarde dolarjev škod, zavarovalnice so krile skoraj 70%. Leto kasneje so bile katastrofne škode 258 milijard dolarjev, najbolj prizadeti

¹⁶ Od leta 1995 se v Združenih državah Amerike zgodi v povprečju 12 poimenovanih neurij letno (Zanetti et al., 2005, str. 13). Neurja poimenujejo, če hitrost vetra preseže 63 km/h, izmenjujejo se ženska in moška imena, vsakih šest let ponovno uporabijo isto listo imen, pri tem pa najsilovitejše orkane za vedno izločijo (Tomažič, 2005, str. 12). Obstaja več list z imeni glede na različna območja, kjer nastajajo, in sicer nad Atlantikom, nad Pacifikom ali ob obali Avstralije. Odkar v Združenih državah Amerike obstajajo zapisi o poimenovanih neurjih jih je bilo največ leta 1933, in sicer 21 (Zanetti & Schwarz, 2006, str. 4).

območji sta bili severna Amerika in Azija, zavarovan del je bil 44,7 milijard dolarjev (Enz et al., 2009, str. 7).

Glede pogostosti škod v Združenih državah Amerike ocenjujejo, da je povprečen oziroma pričakovan čas med dvema katastrofama z zavarovalninami nad 1 milijardo dolarjev manj kot eno leto, medtem ko je za katastrofe, ki povzročijo nad 15 milijard dolarjev zavarovalnin, približno 25 let (Hayek & Ghanem, 2002, str. 2). Letna verjetnost katastrofe z zavarovalninami nad 8 milijard dolarjev je 9% (Froot, 2001, str. 5).

Zneski iz tabele 1 in s slike 1 se nanašajo na zavarovane škode. Velik del premoženja ostaja nezavarovan, v manj razvitih območjih zavarovanja pravzaprav ni. V letu 2008 je bil zavarovan del vseh katastrofnih škod 20% (Enz et al., 2009, str. 7). Pri potresu v Kobeju so zavarovalnice krile le 3% ekonomske škode, pri potresu v Northridgeu 42%, pri orkanu Andrew pa 52% (General Accounting Office, 2002, str. 12). Vidimo, da je pri katastrofah delež zavarovalnin v ekonomskih škodah sorazmerno nizek. Kljub temu so zneski katastrofnih zavarovalnin visoki in zato zavarovalnice iščejo možnosti za zmanjšanje katastrofne izpostavljenosti. To lahko dosežejo na naslednje načine (Enz et al., 2009, str. 15):

- omejitev kritja,
- razpršitev tveganja oziroma diverzifikacija,
- dodaten kapital za financiranje katastrofnega tveganja, torej dokapitalizacija,
- pozavarovanje in
- katastrofni instrumenti.

Z omejitvijo¹⁷ kritja se del tveganja prenese na zavarovanca. Slovenske zavarovalnice pri potresnem zavarovanju uporabljajo odbitno franšizo v višini 2% ali 5% zavarovalne vsote. V Kaliforniji je odbitna franšiza 15% (General Accounting Office, 2002, str. 37). Pred orkanom Andrew so zavarovanci krili škodo zaradi vetra v višini do 500 dolarjev. Po orkanu so vpeljali odbitno franšizo od 2% do 5% zavarovalne vsote, kar v absolutnem znesku načeloma presega 500 dolarjev (Government Accountability Office, 2005, str. 17). Posredno se kritje omeji tudi z višjimi zavarovalnimi premijami. Razpršitev katastrofnega tveganja je pogojno izvedljiva, ker je povpraševanje po katastrofnem zavarovanju geografsko omejeno. Orkani, tajfuni in potresi se dogajajo na potresnih območjih in ob obalah oceanov, povpraševanje pa obstaja le na tistih ogroženih območjih, ki so razvita¹⁸, torej v Združenih državah Amerike, na Japonskem in v Evropi. V tretjem poglavju bomo pokazali, da katastrofnega tveganja ni mogoče zadovoljivo

¹⁷ Če zavarovalnice niso pripravljene ponujati katastrofnega kritja v izpostavljenih območjih, lahko država zagotovi kritje s predpisi. Na Floridi mora stanovanjsko zavarovanje obvezno omogočati kritje nevarnosti zaradi orkanov za plačilo dodatne premije (General Accounting Office, 2002, str. 39). Podobno mora stanovanjsko zavarovanje v Kaliforniji vsebovati možnost dodatnega kritja potresa. Po francoski zakonodaji mora zavarovanje nepremičnin vključevati katastrofno kritje za doplačilo v višini 12% premije (Government Accountability Office, 2005, str. 35).

¹⁸ Nazoren primer je cunami, ki je 26. decembra 2004 prizadel 12 držav ob Indijskem oceanu. Število žrtev in pogrešanih ocenjujejo na 220.000, kar predstavlja 92% žrtev katastrof v letu 2004. Višina zavarovalnin je 2 milijardi dolarjev, kar predstavlja le 4% katastrofnih zavarovalnin v letu 2004 (Zanetti et al., 2005, str. 7). Vzrok za nesorazmerje je skromen delež zavarovanja in nerazvitost prizadetega območja.

razpršiti s povečevanjem števila zavarovanj. Vzrok so odvisnosti med posameznimi zavarovanji. Zadnje tri možnosti obvladovanja katastrofnega tveganja so opisane v naslednjih dveh razdelkih.

Opisani prijemi zmanjšajo katastrofno izpostavljenost zavarovalnic, ne rešijo pa problema vse večje izpostavljenosti prebivalcev in podjetij ter njihove lastnine katastrofam. Zavarovalnice lahko zavarovance vzpodbudijo, da uporabijo preventivne ukrepe za blažitev posledic katastrof, kot je gradnja varnih stavb. V takih primerih ponudijo ugodnejšo zavarovalno premijo. Leta 2002 so na Floridi vpeljali standarde za varno gradnjo s poudarkom na zaščiti pred orkani. Ocenjujejo, da bi bila škoda zaradi orkana Andrew približno 8 milijard dolarjev nižja, če bi bile vse zgradbe grajene v skladu s standardom (Government Accountability Office, 2005, str. 16).

V nadaljevanju bomo opisali tradicionalne in alternativne načine financiranja tveganja. Pojem financiranje tveganja zajema vse dejavnosti obvladovanja tveganja, zavarovanja in pozavarovanja (Krumberger, 2002, str. 21). Za obvladovanje tveganja je treba tveganje prepoznati, oceniti, omejiti in nadzirati ter izbrati primerno obliko financiranja (Pavliha, 2000, str. 41). Posebno pomembno je obvladovanje in financiranje katastrofnih tveganj, saj se katastrofe dogajajo redko, a ko se zgodijo, povzročijo ogromno škodo.

1.2 Tradicionalni načini financiranja tveganja

Za tradicionalne načine financiranja tveganja je značilno financiranje v okviru zavarovalnega trga. Najpogostejša tradicionalna načina sta pozavarovanje in dokapitalizacija. Oba načina bomo opisali in predstavili njun pomen pri obvladovanju katastrofnega tveganja. Zaradi nezadostnega obsega katastrofnega pozavarovanja predvsem za velike katastrofe, visokih pozavarovalnih premij in vse večjih katastrofnih zavarovalnin, tradicionalni načini ne zadostujejo in niso najustreznejši način za financiranje katastrofnega tveganja. Zato se lahko vprašamo, ali obstajajo dodatni viri in druge možnosti.

1.2.1 Pozavarovanje

Zakon o zavarovalništvu opredeljuje pozavarovanje kot zavarovanje presežkov iznad stopnje lastnega izravnavevanja nevarnosti ene zavarovalnice pri drugi zavarovalnici. Zavarovalnice s pozavarovanjem prenesejo tveganje. Tako omilijo nihanje lastnega deleža¹⁹ zavarovalnin in povečajo stabilnost poslovanja²⁰. Pozavarovanje krije škode zavarovalnice nad določeno mejo ali v sorazmernem deležu. V prvem primeru govorimo o neporacionalnem pozavarovanju, v

¹⁹ Lastni delež ali retencija je del kritja, ki ga zavarovalnica zadrži in ni pozavarovan.

²⁰ Pozavarovanje je tudi dodaten vir financiranja rasti, nadomestilo kapitala, možnost za ugodnejšo obdavčitev in večjo likvidnost (Antal, 2003, str. 2).

drugem pa o proporcionalnem (Pavliha, 2000, str. 324). Obseg pozavarovalnega kritja je običajno navzgor omejen in ne krije poljubno velikih škod. Če škode presežejo zgornjo mejo pozavarovanja, mora presežek kriti zavarovalnica.

Pozavarovalne pogodbe so običajno letne. Cena pozavarovanja je pozavarovalna premija. Dogovorjena je s posamezno zavarovalnico in je odvisna od obsega in vrste kritja, izpostavljenosti ter preteklega škodnega dogajanja (Mürmann, 2001, str. 4). Pozavarovalnice morajo imeti za kritje katastrof bistveno več kapitala kot zavarovalnice, čeprav se katastrofe dogajajo redko. To je eden izmed vzrokov za visoke pozavarovalne premije in omejen obseg pozavarovalnega kritja.

Na premije katastrofnih pozavarovanj vplivajo pretekle katastrofe in zavarovalni cikli (Kollar & Meyers, 1998, str. 125). Na ameriškem pozavarovalnem trgu so se po orkanu Andrew cene vseh pozavarovanj povprečno povečale za 10% (General Accounting Office, 2002, str. 14). Za katastrofna pozavarovanja so poskočile za dobrih 60%, od leta 1991 do leta 1995 pa so se več kot podvojile (Krumberger, 2002, str. 27). V primeru velike škode se pozavarovalne premije močno dvignejo in postopoma spet padejo (Froot, 2001, str. 9). Po katastrofi se običajno povečajo lastni deleži. Povečan obseg katastrofnega kritja je na račun zmanjšane obsega drugih kritij (Froot, 2001, str. 6). Ocenjujejo, da je zaradi neugodnega škodnega dogajanja v letu 2001 sposobnost prevzemanja tveganja vseh premoženjskih zavarovalnic nižja za približno četrtino v primerjavi z začetkom leta 2000 (Holzheu, Karl & Raturi, 2003, str. 10).

Kapital pozavarovalnic v Združenih državah Amerike ne presega 10% kapitala zavarovalnic, delež je sorazmeren z izpostavljenostjo (Meyers & Kollar, 1999, str. 226, 241). Pozavarovanje krije sorazmerno skromne deleže v primerjavi z zavarovanjem, kar zadostuje za zaščito manjših zavarovalnic, nikakor pa ne večjih (Meyers & Kollar, 1998, str. 125). Poraja se vprašanje, ali je pozavarovanje dovolj učinkovit način kritja katastrofnih zavarovalnin nad 100 milijard dolarjev (Cummins & Weiss, 2002, str. 34). Pri tako visokih zavarovalninah so pozavarovalne premije visoke in niso bistveno manjše od vrednosti zavarovanega premoženja (Christensen, 1998, str. 2). Porajajo se dvomi, ali so zavarovalnice skupaj s pozavarovalnicami sposobne kriti takšne škode, ne da omejijo obseg in zvišajo premije.

Čeprav je pozavarovanje drago in vključuje kreditno tveganje, pa je pomemben način obvladovanja katastrofnega tveganja. Obseg pozavarovanja lahko ocenimo z deležem cedirane premije. Na vzorcu 84 zavarovalnic je ocena deleža 30% (Enz et al., 2009, str. 15). Leta 2005, ki izstopa zaradi orkana Katrina, je pozavarovalnica Swiss Re za 12% omenjenih zavarovalnic krila katastrofne škode, ki so presegale njihov kapital, leta 2004 je bil delež 11% (Enz et al., 2009, str. 17). Brez katastrofnega pozavarovanja bi bilo ogroženo poslovanje teh zavarovalnic.

1.2.2 Dokapitalizacija

Velike katastrofe v začetku devetdesetih let prejšnjega stoletja in omejene možnosti razpršitve tveganja so prisilile zavarovalnice, da so se kapitalsko okrepile in povečale sposobnost²¹ prevzemanja tveganja. Leta 1990 je znašal kapital vseh zavarovalnic v Združenih državah Amerike približno 200 milijard dolarjev, leta 2003 pa približno 350 milijard dolarjev²² (Government Accountability Office, 2005, str. 12). Čeprav se je kapital povečal, je težko oceniti, v kolikšni meri je povečanje prispevalo h kritju katastrofnih škod. Kapital se namreč nanaša na kritje vseh škod, ne le katastrofnih. Ne glede na okrepitev zavarovalnic, obstaja nevarnost, da niso sposobne nositi finančnih posledic katastrofe velikih razsežnosti.

Zavarovalnice morajo povečanje kapitala upravičiti. Kapital zavarovalnic v preteklosti ni dosegal visokih donosov v primerjavi z drugimi gospodarskimi dejavnostmi (Meyers & Kollar, 1999, str. 240). Potreben dodatni kapital za financiranje katastrofnega tveganja je relativno velik v primerjavi z obstoječim kapitalom, posebno če zavarovalnica zavaruje v zelo izpostavljenih območjih. V konkurenčnih razmerah zavarovalnica težko doseže in vzdržuje stanje, ki zadosti zahtevam vlagateljev. Zato dokapitalizacija običajno ni vir financiranja katastrofnih škod.

1.3 Alternativni prenosi tveganja

Alternativni prenosi tveganja so novejša usmeritve v zavarovalništvu, ki povezujejo zavarovalni in kapitalski trg (Krumberger, 2002, str. 4). Mednje spadajo tiste oblike prenosa tveganj, ki niso tradicionalne, pri tem pa alternativni prenosi ne nadomeščajo tradicionalnih oblik, ampak jih dopolnjujejo. V primerjavi s tradicionalnimi oblikami, so alternativne oblike bolj prilagojene potrebam strank, pogodbeno obdobje traja več let, kritje zajema več zavarovalnih vrst, nevarnosti so razpršene v času in portfelju zavarovalnice (Pavliha, 2000, str. 323). Najpogostejše oblike so (Kocič & Nowak, 2000, str. 158; Krumberger, 2002, str. 19, 30, 38, 53, 57, 62, 75):

- lastna zavarovalnica: zavarovanje pri zavarovalnici ali pozavarovalnici, ki jo ustanovi družba, katere osnovna dejavnost običajno ni zavarovalništvo,
- zavarovanje omejenega tveganja: omejeno tveganje je krito v daljšem časovnem obdobju,
- dolgoročno zavarovanje pred več tveganji: različna tveganja so združena v okviru ene zavarovalne pogodbe v daljšem časovnem obdobju,
- zavarovanje z več vzvodi: zavarovalnica krije škodo, ko se zgodita vsaj dva škodna dogodka, opredeljena v pogodbi,
- varnostni kapital: škoda se financira po nastanku nevarnostnega dogodka,

²¹ Sposobnost prevzemanja tveganja se meri z obsegom, torej razpoložljivim kapitalom, in s stopnjo razpršenosti, torej učinkovitostjo (Cummins & Weiss, 2002, str. 6).

²² Zneska kapitala leta 1990 in 2003 sta preračunana na osnovi cen leta 2003.

- listninjenje²³ zavarovalnih tveganj: pretvorba zavarovalnih tveganj v dolžniške vrednostne papirje, in
- zavarovalni izvedeni instrumenti: denarni tok je odvisen od zavarovalnin.

Ne glede na našete oblike, bomo v nadaljevanju s pojmom katastrofni izvedeni instrumenti zajeli katastrofne obveznice in druge zavarovalne izvedene instrumente, ki se nanašajo na katastrofno tveganje.

Alternativni prenosi so pomembni pri tveganjih, kjer obseg pozavarovanja ni zadosten. Mednje vsekakor spada katastrofno tveganje. Premija alternativnih prenosov tveganja znaša do 10% premije svetovnega pozavarovalnega trga, levji delež odpade na lastne pozavarovalnice, delež katastrofnih instrumentov je pod 1% (Krumberger, 2002, str. 20). Premija izvedenih instrumentov premoženjskih zavarovanj se je v preteklih petih letih podvojila. Ocenjujejo, da bo do leta 2016 premija zavarovalnih izvedenih instrumentov presegla 150 milijard dolarjev (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 3).

S tradicionalnimi in novejšimi, alternativnimi načini financiranja katastrofnega tveganja lahko zavarovalnice omejijo tveganje in zmanjšajo stroške. Z ustrezno kombinacijo kapitala, torej lastnih sredstev, pozavarovanja in alternativnih prenosov tveganja je mogoče zmanjšati stroške financiranja katastrofnega tveganja za 8% do 20% odvisno od velikosti zavarovalnice, izpostavljenosti in razpršenosti tveganja (ISO Properties, 1999).

Na slovenskem trgu so alternativne oblike prenosa tveganj slabo razvite. Obstajala je lastna zavarovalnica²⁴ in pozavarovanje omejenega tveganja (Krumberger, 2002, str. 93). Do sedaj se niso pojavili katastrofni izvedeni instrumenti. To je pričakovano, saj območje Slovenije ne spada med izrazito izpostavljena območja in kapitalski trg ni dovolj razvit.

2 KATASTROFNI IZVEDENI FINANČNI INSTRUMENTI

Katastrofni izvedeni instrumenti so se pojavili pred dvema desetletjema in spadajo med novejše oblike alternativnih prenosov tveganj (Krumberger, 2002, str. 73). Večina katastrofnih instrumentov je vezana na potrese, orkane in neurja na področju Združenih držav Amerike, Francije, Nemčije in Japonske (General Accounting Office, 2002, str. 18). V zadnjih letih se ob

²³ Listninjenje ali zamenjava v vrednostne papirje je proces spreminjanje različnih kreditnih razmerij v vrednostne papirje (Čas & Rotar, 1994, str. 67). Proces lahko označimo kot vsesplošno selitev dolžniških, lastniških, menjalnih in drugih razmerij v vrednostne papirje (Draškovič, 1998, str. 63).

²⁴ Leta 1991 je Poslovni sistem Mercator ustanovil lastno zavarovalnico Zavarovalnico Mercator, ki je poslovala pod to firmo do leta 1996, ko je Poslovni sistem Mercator na zahtevo takratnega Urada za zavarovalni nadzor prodal večinski delež v zavarovalnici (Krumberger 2002, str. 93).

katastrofnih instrumentih trguje z zavarovalnimi instrumenti, ki so vezani na življenjska²⁵, odgovornostna in kreditna zavarovanja ter zavarovanja motornih vozil (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 29).

Ker obseg katastrofnega pozavarovanja ni zadosten in ker so pozavarovalne premije sorazmerno visoke, so potrebne dodatne možnosti. Katastrofni instrumenti dopolnjujejo pozavarovanje pri kritju velikih katastrofnih škod. Predvidevajo, da so dopolnilo za kritje katastrof s povratno dobo od 100 do 250 let, torej z letno verjetnostjo med 1% in 0,4%²⁶ (General Accounting Office, 2002, str. 47).

V tem poglavju bomo opisali katastrofne instrumente, vzroke za nastanek in posamezne oblike katastrofnih instrumentov. Največ pozornosti bomo namenili katastrofnim opcijam in katastrofnim obveznicam. Predstavili bomo osnove katastrofnih instrumentov, ki so seveda odvisne od katastrof.

2.1 Opis katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Izvedeni finančni instrumenti so finančne pogodbe, njihova vrednost je odvisna od vrednosti osnove (Bodie, Kane, Marcus, 1996, str. 70). Namenjeni so zaščiti oziroma zavarovanju pred izgubo na finančnih in blagovnih trgih (Bodie et al., 1996, str. 21). Pojavili so se v drugi polovici prejšnjega stoletja. Obseg posla z izvedenimi instrumenti je bil leta 1998 približno 51 bilijonov dolarjev, kar je petkrat več kot leta 1993 (Grandi & Müller, 1999, str. 2). Zaradi finančne krize je trgovanje nekoliko zamrlo.

Osnove izvedenih instrumentov so raznolike. V začetku sedemdesetih so bile tuje valute, v osemdesetih še delniški indeksi, državne obveznice in obrestne mere kakor tudi na terminske pogodbe in zamenjave²⁷ (Cuthbertson, 2004, str. 498). V devetdesetih pa so trgovanje razširili na opcije, vezane na nefinančne osnove, kot so zavarovalnine, vremenske razmere, stopnja inflacije in ekonomska rast. Katastrofni instrumenti so se pojavili leta 1992 na Čikaški blagovni borzi v obliki nestandardiziranih finančnih terminskih pogodb²⁸ in opcij na njih (Dassios &

²⁵ Obseg izdaj življenjskih instrumentov presega obseg izdaj premoženjskih instrumentov (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 24).

²⁶ Za tako redke škode je težko oceniti zavarovalnine. Odstopanja med ocenami so tudi do dvakrat. Vzrok za odstopanja so omejeni pretekli podatki, v Združenih državah Amerike imajo podatke o katastrofah za zadnjih petdeset let. Ob kratki časovni vrsti je vprašljiva tudi primerljivost podatkov, saj so se spreminjali zavarovalni pogoji, načini gradnje in gostota poseljenosti. Pri ocenjevanju zavarovalnin je treba upoštevati inflacijo, vrednost nepremičnin, gostoto poseljenosti in stopnjo zavarovanosti.

²⁷ Zamenjava je skupni izraz za različne posle zamenjave, predvsem valute zamenjave, pri čemer gre za nakup valute po tržnem tečaju in hkratno prodajo po terminskem tečaju (Čas & Rotar, 1994, str. 120).

²⁸ Kot pove ime, nestandardizirane finančne terminske pogodbe niso standardizirane. To je pglavitna razlika v primerjavi s finančnimi terminskimi pogodbami. Na trgu katastrofnih instrumentov nestandardizirana oblika ni

Jang, 2003, str. 74). Ker je Čikaška borza zibelka sodobnega terminskega trgovanja, ne preseneča, da so se katastrofni instrumenti pojavili na tej borzi²⁹.

Osnove katastrofnih instrumentov so odvisne od katastrofe. Najpogostejše osnove so (Meyers & Kollar, 1999, str. 230):

- katastrofne škode zavarovalnice,
- katastrofne škode več zavarovalnic, lahko tudi celotnega trga,
- škodni kazalec, ki ga določa neodvisna organizacija³⁰, in
- objektivne lastnosti naravne nesreče, ki so vezane na meteorološke, seizmične ali druge lastnosti, na primer hitrost vetra pri orkanu ali magnituda³¹ potresa po Richterjevi lestvici.

V zadnjem času pa se pojavljajo osnove, ki so izračunane s pomočjo modela (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 6). V nadaljevanju bomo predstavili različne oblike katastrofnih instrumentov in okoliščine, ki so vplivale na njihov nastanek in razvoj.

2.2 Vzroki za nastanek katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Glavne vzroke za nastanek katastrofnih instrumentov smo že omenili: nezadostno katastrofno pozavarovanje, sorazmerno visoke pozavarovalne premije in vse večja katastrofna izpostavljenost (Holzheu et al., 2003, str. 34). Katastrofni instrumenti so nastali po velikih naravnih nesrečah konec prejšnjega stoletja. Po orkanu Andrew in po potresu v Northridgeu v Združenih državah Amerike ter po potresu v Kobeju na Japonskem se je izkazalo, da katastrofno pozavarovanje ne zadostuje. Na prelomu stoletja so se povečale pozavarovalne premije, na povečanje so vplivale tudi visoke pozavarovalnine zaradi katastrof (General Accounting Office, 2003, str. 66). Glede na neugodno škodno dogajanje, izpostavljenost in višino pozavarovalnih premij v prihodnje ni pričakovati padca pozavarovalnih premij. Zato predvidevajo, da bodo potrebni drugi načini financiranja katastrofnega tveganja (Benfield Industry Analysis and Research, 2004, str. 16).

razširjena. Finančne terminske pogodbe so standardizirane pogodbe o terminskem nakupu ali prodaji določenega zneska ali števila finančnih instrumentov v prihodnosti (Čas & Rotar, 1994, str. 48). Cena je določena ob sklenitvi, plačilo se izvrši ob dospelosti. Dobiček ali izguba nastaneta kot posledica spreminjanja cene osnove. Na splošno se terminske pogodbe glasijo na kmetijske izdelke, kovine oziroma minerale, tuje valute in finančne osnove, kot so obrestne mere in delniški indeksi (Cuthbertson, 2004, str. 496; Bodie et al., 1996, str. 690, 691).

²⁹ Čikaška blagovna borza je bila središče za trgovanje z žitom, že ob ustanovitvi leta 1848 so opravljali posle s terminskimi pogodbami na moko in seno (Krumberger, 2002, str. 73).

³⁰ Primer je PCS kazalec, ki je opisan v nadaljevanju.

³¹ Potrese ocenjujemo z magnitudo, ki je odvisna od sproščene energije in z jakostjo oziroma intenziteto, ki meri učinek potresa na zemeljski površini (Kornelj, 2005, str. 354).

Ekonomske škode zaradi naravnih nesreč so se v zadnjih letih bistveno povečale zaradi naraščanja velikosti in števila katastrof. Na velikost zavarovalnin neugodno vpliva tudi gostejša poseljenost, povečanje premoženja v izpostavljenih območjih in večanje vrednosti zavarovanih objektov (Krumberger, 2002, str. 24). V Združenih državah Amerike je vzhodni del izpostavljen orkanom, osrednji del tornadom in potresna območja kot Kalifornija potresom (Levi & Partrat, 1989, str. 253). Od leta 1970 do leta 1990 se je v obalnih državah Pacifika in južnega dela Atlantika število prebivalcev povečalo za 51% oziroma 45%, medtem ko se je število prebivalcev v istem obdobju na območju Združenih držav Amerike povečalo za 24% (Loubergé & Schlessinger, 2001, str. 7). Na Floridi se je od leta 1980 do leta 2001 povečalo prebivalstvo za 70%, bruto družbeni proizvod pa za 130% (Zanetti, Schwarz,ENZ, 2005, str. 13). Deleža presegata povprečje države. Več kot 68 milijonov Američanov živi v izpostavljenih obalnih območjih, približno 80% prebivalcev Kalifornije živi v bližini potresno aktivnih prelomnic (General Accounting Office, 2002, str. 8). Rast števila prebivalcev vpliva na večanje gostote nepremičnin in cen nepremičnin, posledično se povečuje izpostavljenost zavarovalnic.

V preteklosti se je ob velikih katastrofah izkazalo, da zavarovalnice niso bile sposobne kriti vseh škod. Zaradi orkana Andrew je postalo več kot 60 zavarovalnic nesolventnih, od tega jih je propadlo 11 (Mürmann, 2003, str. 2, Government Accountability Office, 2005, str. 19). Po drugi strani pa ni bila prizadeta solventnost nobene pozavarovalnice (General Accounting Office, 2002, str. 46). Porazno stanje so povzročile nepričakovano visoke zavarovalnine. Pred orkanom Andrew so ocenjevali, da lahko orkan povzroči največ 7 milijard dolarjev zavarovalnin in še ta ocena se je zdela previsoka (Porter & Virkud, 2002). Po drugi strani ocenjujejo, da bi lahko orkan Andrew povzročil zavarovalnine reda velikosti 50 milijard dolarjev, če bi prizadel Miami (Meyers & Kollar, 1998, str. 121). Šele po orkanu Andrew in po potresu v Northridgeu so se zavarovalnice soočile z negativnimi posledicami katastrof škod na solventnost. Pred tem je bila katastrofna izpostavljenost zavarovalnic drastično podcenjena.

Leta 2004 so bili štirje rušilni orkani na območju Združenih držav Amerike. Zaradi škod, ki so jih povzročili, je propadla ena zavarovalnica (Government Accountability Office, 2005, str. 19). Katastrofne zavarovalnine so v povprečju znašale 4% kapitala premoženjskih zavarovalnic³² (Benfield Industry Analysis and Research, 2004, str. 7). Delež morda na prvi pogled ni visok, vendar kapital ni namenjen le kritju katastrofnih škod, ampak kritju vseh škod in zagotavljanju nemotenega poslovanja. Stanje je manj zaskrbljujoče kot po orkanu Andrew, kljub temu ostaja vprašanje, kako bi se zavarovalnice soočile z izjemno uničujočo katastrofo.

Katastrofe, navedene v tabeli 1, se ne uvrščajo med katastrofe z letno verjetnostjo pod 1%³³. Prevladuje prepričanje, da lahko orkan ali potres povzroči tudi do 100 milijard dolarjev

³² V izračunu povprečja je upoštevano 20 svetovnih zavarovalnic in pozavarovalnic, ki so utrpeli največje škode v skupnem znesku 11 milijard dolarjev, in njihov kapital v skupnem znesku 276 milijard dolarjev (Benfield Industry Analysis and Research, 2004, str. 7).

³³ Orkan Andrew in potres v Northridgeu se uvrščata med katastrofe, za katere je letna verjetnost 2% oziroma za katere se predvideva, da se povprečno zgodijo enkrat v petdesetih letih (Government Accountability Office, 2005, str. 24).

zavarovalnin (Froot, 2001, str. 1). Zaradi hudega potresa v Kaliforniji ali hudega orkana na Floridi je lahko ekonomska škoda 225 milijard dolarjev, zavarovalnine pa približno polovico (General Accounting Office, 2003, str. 9). Pri tako uničujoči katastrofi bi več kot polovica škod bremenila zavarovalnice, saj je obseg pozavarovanja nizek (Kielholz & Durrer, 1997, str. 6). Podobno ocenjujejo, da lahko izjemno hud potres v Tokiu na Japonskem povzroči med 2,1 in 3,3 bilijonov dolarjev škode, kar predstavlja med 44% in 70% letnega bruto družbenega proizvoda Japonske (Cummins & Weiss, 2002, str. 6). Posledice take katastrofe so nepredstavljive.

Vse večja katastrofna izpostavljenost in velike škode v zadnjih desetletjih so povečale povpraševanje po katastrofnem pozavarovanju. Povpraševanje je preseglo ponudbo zato je potreben dodaten dovolj velik vir financiranja katastrofnega tveganja. Primeren vir je kapitalski trg. Leta 2002 je bil kapital vseh premoženjskih zavarovalnic v Združenih državah Amerike približno 350 milijard dolarjev, njihova izpostavljenost pa približno 30 bilijonov dolarjev (Hayek & Ghanem, 2002, str. 1). Za kritje katastrofnih škod je bilo namenjeno približno 12% kapitala, kar znaša 42 milijard dolarjev (Loubergé, Kellezi, Gilli, 1999, str. 144). Po drugi strani je vrednost kapitalskega trga³⁴ Združenih držav Amerike presegala 30 bilijonov dolarjev, dnevni standardni odklon vrednosti je bil približno 200 milijard dolarjev (General Accounting Office, 2002, str. 7). Torej je kapitalski trg dovolj velik, da absorbira velike katastrofne škode (Kielholz & Durrer, 1997, str. 4).

Katastrofni instrumenti so zanimivi zaradi donosnosti in razpršenosti naložb³⁵. Ocenjujejo, da je donosnost katastrofnih obveznic v povprečju za 3,5 odstotne točke višja od državnih obveznic (Kollar & Meyers, 1998, str. 133). Vrednost katastrofnih instrumentov je praviloma neodvisna od ostalih naložb. Dogajanje na kapitalskem trgu ne vpliva na nastanek katastrof. Večje katastrofe lahko vplivajo na dogajanje na kapitalskem trgu, vendar je vpliv na svetovnem trgu majhen, ker so katastrofe geografsko omejene (Krumberger, 2002, str. 60).

Obseg trgovanja s katastrofnimi instrumenti je skromen. Na to vpliva pomanjkanje zanimanja velikih zavarovalnic in vlagateljev ter sorazmerno kratko obdobje od nastanka katastrofnih instrumentov. Kljub temu, da trgovanje ni razširjeno, se je v obdobju od leta 1999 do leta 2002 število vlagateljev, ki redno trgujejo s katastrofnimi instrumenti povečalo z 80 na 150 (Holzheu et al., 2003, str. 36). Od leta 1996 do leta 2001 je bilo izdanih za približno 12 milijard dolarjev katastrofnih izvedenih instrumentov (General Accounting Office, 2002, str. 17). Ocenjujejo, da bo obseg trgovanja s katastrofnimi instrumenti dosegel med 0,5% in 1% ameriškega kapitalskega trga (Kielholz & Durrer, 1997, str. 14).

³⁴ Z vrednostjo kapitalskega trga je mišljena tržna kapitalizacija. To je seštevek kapitalizacij posameznih vrednostnih papirjev. Slednje je produkt števila kotirajočih vrednostnih papirjev in njihove vrednosti ob koncu opazovanega obdobja (Krumberger, 2002, str. 26).

³⁵ Osnovno načelo razpršitve je oblikovanje naložbenega portfelja s čim manjšimi korelacijskimi koeficienti med posameznimi naložbami (Bodie et al., 1996, str. 153).

2.3 Oblike katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Zavarovalne instrumente lahko v grobem delimo glede na vrsto zavarovanja, torej na premoženjska in življenjska. Po drugi strani, pa jih lahko delimo glede na vključenost katastrofnega tveganja na katastrofne in na druge, ki se ne nanašajo na katastrofe (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 4). V tem delu se ukvarjamo izključno s katastrofnimi instrumenti premoženjskih zavarovanj. Katastrofne instrumente lahko delimo po številnih ključih, kot so osnova, trajanje, vrsta katastrofe, na katero se nanaša, izdajatelj, standardiziranost in še bi lahko naštevali. V tem razdelku bomo predstavili katastrofno opcijo, katastrofno obveznico in druge katastrofne instrumente.

2.3.1 Katastrofne opcije

Prvi katastrofni izvedeni instrumenti so bile katastrofne opcije na nestandardizirane terminske pogodbe. Pozneje so jih nadomestile standardizirane katastrofne terminske pogodbe³⁶ in katastrofne opcije. Obseg trgovanja s katastrofnimi opcijami ni velik. Prvič so se pojavile leta 1992 na Čikaški blagovni borzi. Od leta 1996 trgujejo z njimi na Bermudski blagovni borzi (Hayek & Ghanem, 2002, str. 2). Posle opravljajo tudi na borzi katastrofnih tveganj CATEX (Christensen, 1999, str. 2). Ta borza je bila ustanovljena leta 1996 za neposredno trgovanje s katastrofnimi tveganji (Kielholz & Durrer, 1997, str. 7). Z opcijami se trguje na organiziranih in neorganiziranih trgih. V nadaljevanju bomo podali kratek opis opcij. Predstavili bomo škodni kazalec kot osnovo katastrofne opcije in dodali bomo primer.

2.3.1.1 Opcije

Opcija je pogodba, s katero se izdajatelj zaveže, da bo od imetnika opcije kupil oziroma mu prodal predmet opcijske pogodbe po vnaprej določeni tako imenovani izvršilni ceni, če bo imetnik to od njega zahteval, ne glede na to, kakšna bo takrat tržna cena predmeta opcijske pogodbe (Čas & Rotar, 1994, str. 80, 81). Nakupna opcija daje imetniku pravico do nakupa, prodajna do prodaje. Za to pravico, ne pa obveznost, mora imetnik opcije plačati izdajatelju določeno premijo, ki je cena oziroma vrednost opcije (Draškovič, 1998, str. 21). Pravica je časovno omejena in traja do vnaprej določenega dneva (Krumberger, 2002, str. 64). Vrednost opcije je odvisna od osnove, na katero je izdana.

Razen izrazov iz prejšnjega odstavka bomo uporabljali tudi druge izraze. Rekli bomo, da je opcija vezana na osnovo oziroma da temelji na osnovi. Na izvršljivost opcije vpliva meja oziroma prag, ki jo mora doseči osnova. Besede meja, prag in izvršilna vrednost bomo uporabljali kot sopomenke (Krumberger, 2002, str. 78).

³⁶ Katastrofne terminske pogodbe so opisane v razdelku o drugih katastrofnih izvedenih instrumentih.

Imetnik pravico iz opcije izkoristi le, če mu prinaša dobiček. Izdajatelj pa mora na njegovo željo opcijo izvršiti v vsakem primeru. Izdajateljev dobiček je omejen z višino premije, izguba pa je neomejena. Nasprotno je imetnikova izguba omejena z višino premije, dobiček pa je neomejen. Glede na odnos med izvršilno in tržno ceno osnove opcije razvrstimo na (Draškovič, 1998, str. 74):

- opcije, ki se splačajo, oziroma izvršljive opcije: izvršilna cena nakupne opcije je manjša od tržne cene osnove, za prodajne opcije velja nasprotno,
- opcije na meji: izvršilna cena je enaka tržni ceni osnove, in
- opcije, ki se ne splačajo, oziroma neizvršljive opcije: izvršilna cena nakupne opcije je večja od tržne cene osnove, za prodajne opcije velja nasprotno.

Podobno velja za nefinančne osnove. Glede na čas izvršitve opcije razlikujemo ameriško opcijo, za katero je izvršitev možna kadarkoli pred dnevom zapadlosti, in evropsko opcijo, ki je izvršljiva ob dnevu zapadlosti oziroma v točno določenem obdobju.

2.3.1.2 Škodni kazalec kot osnova katastrofne opcije

Osnova katastrofne opcije je lahko škodni kazalec, to je količnik škod in premij. Če škodni kazalec preseže prag, je opcija izvršljiva. Z nakupom opcije dobi kupec, običajno zavarovalnica, možnost, da od prodajalca, torej vlagatelja, zahteva izplačilo, če škodni kazalec preseže prag.

Prvotna oblika katastrofnih opcij je bila vezana na škodne kazalce statistične agencije Insurance Service Office, krajše ISO (Loubergé et al., 1999, str. 129). Vrednosti kazalcev so objavljene četrtletno za štiri predele Združenih držav Amerike, in sicer: zahod, srednji zahod, vzhod in celotna država (Mürmann, 2001, str. 5). Podatke so zbrali od približno 30 izbranih zavarovalnic. Premije so se nanašale na preteklo obdobje in so bile znane vnaprej (Aase, 1999, str. 71). Škode so bile izplačane zavarovalnine. Po začetku trgovalnega obdobja so na velikost kazalca vplivale le škode. Kazalec je odražal akumulacijo katastrofnih škod posameznega četrtletja. V praksi pa so se pojavili naslednji problemi (Mürmann, 2001, str. 5):

- moralni hazard, saj so zavarovalnice, ki so sporočale podatke za izračun kazalca, lahko vplivale na vrednost kazalca,
- asimetrične informacije zaradi načina določanja kazalca in
- prekratko obdobje za prijavo škod³⁷.

Pomanjkljivosti so odpravili s kazalci ameriškega urada za ocenjevanje premoženjskih katastrofnih škod Property Claim Service³⁸, krajše PCS. Vrednosti PCS kazalcev za škode zaradi

³⁷ Potres v Northridgeu je bil konec prvega četrtletja leta 1994. Vrednost škodnega kazalca ni odražala dejanskega stanja, saj ni bilo dovolj časa za prijavo škod, kaj šele za izplačila zavarovalnin (Mürmann, 2001, str. 5).

orkanov in potresov so za naslednja področja Združenih držav Amerike: celotna država, pet regionalnih področij: zahod, srednji zahod, vzhod, severovzhod in jugovzhod ter tri lokalna področja: Kalifornija, Florida in Teksas (Loubergé et al., 1999, str. 129). PCS kazalci se določajo četrtno (Hayek & Ghanem, 2002, str. 3).

Velikost kazalca mora biti znana čim prej. Pri izračunu PCS kazalca se ločeno obravnavata dve obdobji, škodno in razvojno. Škode, ki so nastale zaradi katastrof v škodnem obdobju in so znane v škodnem ali razvojnem obdobju, so zajete v škodnem kazalcu opazovanega obdobja. Škodno obdobje je običajno četrtno, razvojno obdobje je enako dolgo kot škodno. Pri izračunu ni pomembna premija ampak katastrofne škode. Označimo katastrofne škode, ki so nastale v škodnem obdobju in so prijavljene do konca razvojnega obdobja, z L . PCS kazalec se izračuna kot L deljeno s 100 milijoni dolarjev, količnik pa se zaokroži³⁹ (Christensen, 1998, str. 3).

PCS kazalci so izboljšava v primerjavi s prvotnimi kazalci. S PCS kazalci je pokrito med 70% in 85% ameriškega zavarovalnega trga in zato so boljša ocena dejanskega stanja. (Kielholz & Durrer, 1997, str. 6). Vrednosti kazalcev se objavljajo dnevno, kar prispeva k večji preglednosti. Manjša je možnost moralnega hazarda in antiselekcije.

Opcije, ki temeljijo na PCS kazalcih, se imenujejo PCS opcije. Glede na čas izvršitve so PCS opcije evropske. PCS opcije niso namenjene kritju poljubno velikih škod⁴⁰. Trguje se z nakupnimi in prodajnimi opcijami ter predvsem z nakupnimi razponi (Mürmann, 2004, str. 233). Razponi učinkujejo kot neproporcionalno pozavarovanje. S kombinacijo dveh nasprotnih pozicij z različnima pragoma, si zavarovalnica pridobi interval katastrofnega kritja med pragoma. Pri tem ima nakupna opcija nižji prag kot prodajna. Oglejmo si primer PCS opcije.

Primer 3.1: Zavarovalnica kupi PCS opcijo s pragom 200, kar ustreza katastrofnim škodam v višini 20 milijard dolarjev. Če je vrednost kazalca pod 200 za opazovano obdobje, se opcija ne izvrši. V tem primeru ima zavarovalnica strošek, ki je premija za nakup opcije. Na drugi strani pa ima vlagatelj, torej prodajalec opcije, zaslužek v višini te premije.

Če vrednost osnove preseže prag, zavarovalnica prejme izplačilo. Recimo, da so zavarovalnine za opazovano obdobje 28 milijard dolarjev. To ustreza PCS kazalcu 280. Pri poravnavi je vrednost vsake točke kazalca, ki presega prag, 200 dolarjev (Christensen, 1998, str. 3). Zavarovalnica prejme za vsako opcijo znesek v višini $(280 - 200) \cdot 200 = 16.000$ dolarjev. $\square$

³⁸ PCS deluje v okviru ISO od leta 1994 (Zanetti et al., 2005, str. 38). Njihova dejavnost je ocenjevanje, izračunavanje in poročanje o katastrofnih zavarovalninah in ekonomskih škodah (Government Accountability Office, 2005, str. 30).

³⁹ Če so katastrofne škode $L = 2.765.400.000$ dolarjev, je vrednost PCS kazalca 27,7.

⁴⁰ Glede na velikost katastrofnih zavarovalnin ločimo dve vrsti opcij: opcije z nižjim obsegom kritja za zavarovalnine do 20 milijard dolarjev in opcije z višjim obsegom za zavarovalnine od 20 do 50 milijard dolarjev (Krumberger, 2002, str. 78).

Obseg trgovanja s katastrofnimi opcijami na Čikaški blagovni borzi je bil nizek in ni dosegel pričakovanega. Razlogi za majhen obseg trgovanja so bili (American Academy of Actuaries, 1999, str. 5):

- tveganje osnove⁴¹,
- pomanjkanje znanja pri modeliranju škodnega kazalca,
- nezadostno poznavanje katastrofnih instrumentov in
- predpisi, ki različno obravnavajo pozavarovanje in katastrofne instrumente.

Zaradi tega so leta 1999 prenehali trgovati z opcijami na Čikaški blagovni borzi (General Accounting Office, 2002, str. 36). Med katastrofnimi instrumenti so postale pomembnejše katastrofne obveznice.

2.3.2 Katastrofne obveznice

Katastrofna obveznica z dano nominalno vrednostjo je instrument, s katerim je dogovorjeno obročno izplačevanje kuponov oziroma obresti v dani višini ob koncu vsakega obdobja in povračilo glavnice v višini nominalne vrednosti na koncu zadnjega obdobja pod pogojem, da se v času trajanja ne zgodi katastrofa, zaradi katere osnova preseže prag (Krumberger, 2002, str. 101). Obstajajo katastrofne obveznice z zajamčenim vračilom glavnice ali brez zajamčenega vračila glavnice, kuponi pa niso zajamčeni. Katastrofne obveznice so pravzaprav podjetniške obveznice, le da v primeru katastrofe, izdajatelj zadrži nadaljnje kupone in glavnico, če je tako dogovorjeno. V prospektu⁴² katastrofnih obveznic je natančno opisana katastrofa, ki vpliva na osnovo (General Accounting Office, 2003, str. 11). Najpogosteje je to neurje ali potres (World Economic Forum, 2008, str. 11).

Prva izdaja katastrofnih obveznic je bila leta 1997 (Loubergé & Schlessinger, 2001, str. 4). V tem letu je bilo 7 izdaj s skupno vrednostjo 1 milijardo dolarjev, leta 1998 pa 8 izdaj približno enake skupne vrednosti. Do leta 2002 je bilo 46 izdaj, v povprečju 8 letno (General Accounting Office, 2003, str. 4). Obseg trgovanja s katastrofnimi obveznicami se povečuje za 40% do 50% letno (Government Accountability Office, 2005, str. 26). Leta 2007 je bila povprečna velikost izdaje 270 milijonov dolarjev (World Economic Forum, 2008, str. 12).

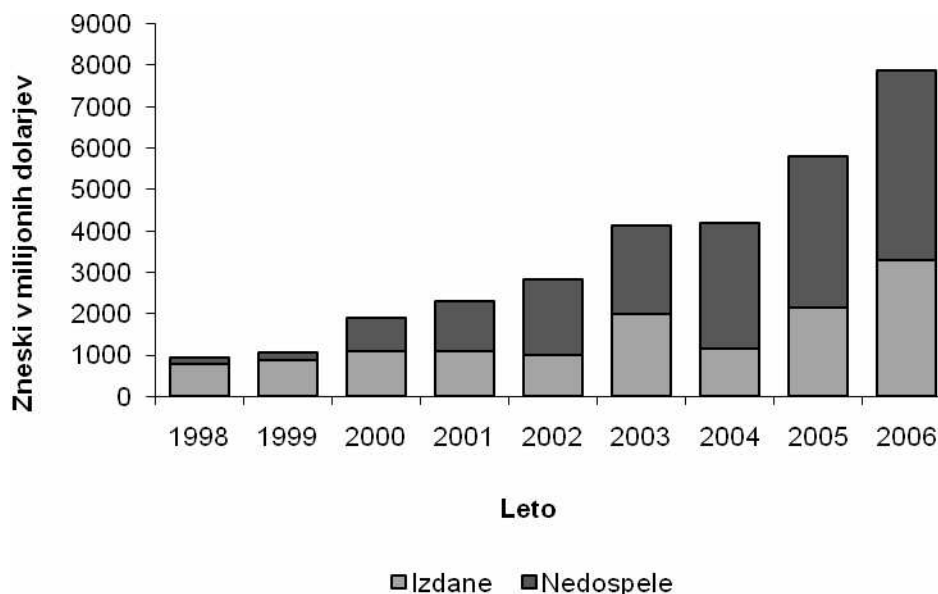
Vrednosti novih izdaj in nedospeli deli so prikazani na sliki 2. Nedospel del se nanaša na katastrofne obveznice izdane v prejšnjih letih, sestavljen je iz kuponov in glavnice, katerih izplačilo je odvisno od katastrof v prihodnosti, in predstavlja obseg katastrofne zaščite. V več kot 90% primerih so bili pobudniki za izdajo zavarovalnice (General Accounting Office, 2003, str.

⁴¹ Pojem tveganje osnove je pojasnjen v razdelku 2.4.

⁴² Prospekt je dokument, s katerim se javno objavijo določene informacije o izdajatelju, predvsem njegovo finančno stanje, dohodkovna razmerja, namen uporabe sredstev, zbranih z izdajo, in povabilo investitorjem k vpisu (Čas & Rotar, 1994, str. 94).

17). Med katastrofnimi izvedenimi instrumenti je delež katastrofnih obveznic približno 60% (Krumberger, 2002, str. 61). Delež v katastrofnem pozavarovanju je približno 3% (General Accounting Office, 2003, str. 4).

Slika 2: Vrednosti izdaj katastrofnih obveznic in nedospel del od leta 1998 do leta 2006



Vir: Helfenstein & Holzheu, *Securitization – new opportunities for insurers and investors*, 2006, str. 27.

Na višino donosa katastrofnih obveznic vplivata dve komponenti, in sicer donos na finančno naložbo in donos na katastrofno tveganje, ki ga prevzame vlagatelj (Kocič & Nowak, 2000, str. 163). Donosi temeljijo na medbančni obrestni meri LIBOR⁴³, na primer LIBOR + 5% (Government Accountability Office, 2005, str. 9). Leta 2002 so bili donosi od 4 do 8 odstotnih točk nad LIBOR, potem pa so se znižali na 2 do 4 odstotne točke nad LIBOR (World Economic Forum, 2008, str. 15).

2.3.2.1 Enostaven primer vrednotenja katastrofne obveznice

S poenostavljenim primerom predstavimo vrednotenje katastrofne obveznice. Upoštevamo, da je vrednost obveznice sedanja vrednost pričakovanih bodočih izplačil kuponov in glavnice. Če osnova obveznice preseže prag, niso izplačani vsi nadaljnji kuponi, glavnica je zajamčena.

Primer 3.2: Nominalna vrednost katastrofne obveznice je 100, doba je 2 leti. Izplačilo glavnice je zajamčeno, izplačilo kuponov je odvisno od katastrofe. Predpostavimo, da je verjetnost, da ni izplačila kuponov, 3% na letni ravni. To je verjetnost, da katastrofne škode presežejo prag obveznice. Kuponska obrestna mera je 10%, diskontna stopnja pa 7%. Ponovno izpostavimo, da je ta primer poenostavitev. Za določanje verjetnosti nastanka katastrofe je treba precej podatkov

⁴³ LIBOR je okrajšava za *London Interbank Offered Rate*, torej za londonsko medbančno obrestno mero. To je obrestna mera za trimesečna oziroma šestmesečna posojila, ki jo v medsebojnem posojanju in najemanju sredstev uporabljajo banke na londonskem trgu (Čas & Rotar, 1994, str. 66).

in znanja s področja statistike in verjetnostnega računa. Znana formula za izračun vrednosti obveznice, ki jo označimo z B , je

$$B = \sum_{i=1}^T \frac{c}{(1+r)^i} + \frac{g}{(1+r)^T},$$

kjer je c kupon, g glavnica, r diskontna stopnja in T trajanje obveznice. Pri privzetih verjetnostih je pričakovana sedanja vrednost kupona katastrofne obveznice $c = 10\% \cdot 100 \cdot (1 - 3\%) = 9,7$. Pričakovana sedanja vrednost katastrofne obveznice je

$$\frac{9,7}{1,07} + \frac{9,7 + 100}{1,07^2} = 104,88.$$

Izračunamo še vrednost državne obveznice z enakim trajanjem in enakimi kuponi, kot jih ima obravnavana katastrofna obveznica. Pričakovana sedanja vrednost je

$$\frac{10}{1,07} + \frac{10 + 100}{1,07^2} = 105,42.$$

Recimo, da zavarovalnica izda 1000 katastrofnih obveznic in hkrati kupi enako število državnih obveznic. Cena transakcije je $1000 \cdot (105,42 - 104,88) = 540$. Če v posameznem letu katastrofne škode ne presegajo praga obveznice, je neto denarni tok zavarovalnice konec leta nič, saj prejme kupone v višini 10.000 in hkrati plača enak znesek. Če katastrofne škode presežejo prag, zavarovalnica prejme kupone državnih obveznic v višini 10.000, kuponov katastrofnih obveznic pa ne izplača. Zavarovalnica si je tako zagotovila zaščito v višini 10.000 za ceno 540. Zaščita učinkuje kot katastrofno pozavarovanje⁴⁴. □

Vrednotenje katastrofnih obveznic ni preprosto, saj so izplačila odvisna od nastanka katastrofe in velikosti osnove. Nastanek katastrofe in velikost osnove sta slučajni, določanje verjetnosti in porazdelitev pa je zapleteno.

2.3.2.2 Vpliv stroškov na odločitev o uporabi katastrofnih obveznic

Zavarovalnice pri odločanju o uporabi katastrofnih obveznic preučijo premije katastrofnega pozavarovanja in stroške izdaje katastrofnih obveznic. Stroški zajemajo stroške investicijskih bank, pravne stroške, stroške modeliranja velikosti in pogostosti katastrof (General Accounting Office, 2003, str. 21). Proces izdajanja katastrofnih obveznic je vse bolj standardiziran, kar

⁴⁴ Primerjava s pozavarovalno premijo ni smiselna zaradi izbire parametrov in ker je pozavarovalna premija odvisna od številnih dejavnikov, kot so obseg kritja, vrsta pozavarovanja, preteklo škodno dogajanje in poslovno sodelovanje med zavarovalnico in pozavarovalnico.

zmanjša stroške (World Economic Forum, 2008, str. 11). Čeprav pozavarovanje nima takšnih dodatnih stroškov, pozavarovalne pogodbe vsebujejo franšize, izključitve in premije za ponovno vzpostavitev pozavarovanja. Ob upoštevanju tega, so stroški pozavarovanja primerljivi s stroški izdaje katastrofnih obveznic. Ocenjujejo, da je izdaja katastrofnih obveznic nad 100 milijonov dolarjev ekonomsko upravičena (Helfenstein & Holzheu, 2006, str. 7).

Mnenja o višini stroškov izdajanja katastrofnih obveznic so deljena. Nekatere zavarovalnice se odločijo za izdajo katastrofnih obveznic, ker je alternativno kritje ugodnejše kot pozavarovanje. Druge pa ne, ker so stroški višji kot pri pozavarovanju, ocenjujejo, da je razmerje 2:1 (General Accountig Office 2003, str. 20). Podobno velja za vlagatelje. Za nekatere so katastrofne obveznice privlačna naložba, drugi pa so mnenja, da so preveč tvegane. V naslednjem preprostem primeru bomo primerjali stroške izdajanja katastrofnih obveznic in pozavarovalno premijo.

Primer 3.3: Zavarovalnica sklene pozavarovanje za obdobje 1 leta. Pozavarovanje krije katastrofno škodo nad lastnim deležem zavarovalnice. Če katastrofna škoda preseže lastni delež, pozavarovalnica plača zavarovalnici znesek v višini L ob koncu leta. Naj bo p_{CAT} verjetnost, da se v času pozavarovanja zgodi katastrofa s pozavarovano škodo. Pozavarovalna premija P je sedanja vrednost pričakovanih izplačil⁴⁵ in je

$$P = \frac{1}{1+r} \cdot p_{CAT} \cdot L,$$

kjer je r diskontna stopnja. Za pozavarovalno kritje v višini L mora pozavarovalnica razpolagati s kapitalom vsaj v višini L . Recimo, da je pridobila potreben kapital z izdajo katastrofnih obveznic, kjer kuponi in glavnica niso zajamčeni. Velikost izdaje naj bo C in velja

$$(P + C) \cdot (1 + r) = L.$$

Če katastrofna škoda ne preseže lastnega deleža, prejme vlagatelj glavnico C in kupone v višini $R = L - C$. Za vlagatelja je pričakovana sedanja vrednost katastrofnih obveznic

$$\frac{1}{1+r} \cdot (C + R) \cdot (1 - \tilde{p}_{CAT}),$$

kjer je $\tilde{p}_{CAT}$ vlagateljeva ocena verjetnosti nastanka katastrofe. Verjetnosti p_{CAT} in $\tilde{p}_{CAT}$ se nanašata na isto katastrofo, vendar se lahko oceni razlikujeta, saj izhajata iz različnih podatkov pozavarovalnice in vlagatelja. Predpostavimo, da se katastrofne obveznice prodajajo po nominalni vrednosti. Torej velja

⁴⁵ P je pozavarovalna premija za katastrofno tveganje brez drugih stroškov, kot so režijski stroški, provizija in varnostni dodatek.

$$C = \frac{1}{1+r} \cdot (C + R) \cdot (1 - \tilde{p}_{CAT}).$$

Iz zgornje enačbe izrazimo $\tilde{p}_{CAT}$ in dobimo

$$\tilde{p}_{CAT} = \frac{R - r \cdot C}{C + R}.$$

Na osnovi vlagateljeve ocene verjetnosti nastanka katastrofe implicitno določimo pozavarovalno premijo. Označimo jo s $\tilde{P}$ in je

$$\tilde{P} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{R - r \cdot C}{C + R} \cdot L.$$

Za nemoteno poslovanje pozavarovalnice mora veljati $\tilde{P} \leq P$. Če to ne velja, je lahko ocena verjetnosti nastanka katastrofe p_{CAT} prenizka in obstaja nevarnost, da je pozavarovalna premija nezadostna. Torej velja

$$p_{CAT} \geq \frac{R - r \cdot C}{C + R}.$$

Navedli smo pogoj, da je izdaja katastrofnih obveznic ekonomsko upravičena za pozavarovalnico. Z višanjem pozavarovalne premije P se povečuje zanimanje zavarovalnic za izdajo katastrofnih obveznic. Z nižanjem diskontne stopnje r narašča zanimanje vlagateljev za katastrofne obveznice. Številčnih vrednosti ne bomo vstavili, ker je težko pridobiti zanesljive podatke. $\square$

2.3.2.3 Primeri izdaj katastrofnih obveznic

Zavarovalnice pogosto izdajajo katastrofne obveznice preko posrednika s posebnim namenom⁴⁶, vendar postopka izdajanja ne bomo opisali. Predstavili bomo dva primera izdaj in navedli bomo nekaj izdaj katastrofnih obveznic, ki se razlikujejo glede na osnovo, katastrofo in trajanje.

⁴⁶ Posrednik s posebnim namenom, oziroma pozavarovalnica s posebnim namenom, izdaja katastrofne instrumente in nudi pozavarovanje. Razmerje med posrednikom s posebnim namenom in zavarovalnico je podobno kot pri pozavarovanju (Krumberger, 2002, str. 70). Posrednik s posebnim namenom preoblikujejo pozavarovanje v naložbo v katastrofni instrument in obratno (American Academy of Actuaries, 1999, str. 2). Od zavarovalnic zberejo pozavarovalne premije, od vlagateljev pa vplačane glavnice.

USAA⁴⁷ je ameriška vzajemna zavarovalnica. Na Kajmanskih otokih je ustanovila lastno pozavarovalnico Residential Re. Leta 1997 je Residential Re izdala za 477 milijonov dolarjev katastrofnih obveznic, vezanih na orkane, s trajanjem enega leta (Cox, Fairchild, Pedersen, 2000, str. 164). USAA je kupila od Residential Re pozavarovanje za kritje škod, ki jih povzročijo orkani. Obveznice so bile izdane v dveh serijah. V prvi seriji z zajamčeno glavnico je bila obrestna mera LIBOR + 2,73%, v drugi seriji brez zajamčene glavnice pa LIBOR + 5,76% (Froot, 2001, str. 8). Osnova so bile zavarovalnine USAA, izplačane zaradi orkana, prag je bil 1 milijarda dolarjev. Če zavarovalnine presežejo prag, se kuponi oziroma glavnica sorazmerno zmanjšajo, če pa presežejo 1,5 milijarde dolarjev, vlagatelji niso upravičeni do kuponov oziroma glavnice. Vlagatelji so bile življenjske zavarovalnice, pokojninski skladi, vzajemni skladi in pozavarovalnice. Povpraševanje je presegalo ponudbo za približno dva in pol krat (Loubergé et al., 1999, str. 130). Z izdajo obveznic preko Residential Re je USAA pridobila približno 80% kritja za orkanske škode med 1 milijardo dolarjev in 1,5 milijarde dolarjev. Leta 2003 je Residential Re sedmič izdala katastrofne obveznice (General Accounting Office, 2003, str. 18).

Tabela 2: Izdane katastrofne obveznice v letih 2005 in 2006

Zavarovalnica	Začetek	Dospelost	Izdaja (milijoni \$)	Osnova	Kritje
FM Global	7.6.2005	13.6.2008	300	parameter	potres
Munich Re	18.11.2005	15.11.2010	200	parameter	neurje v Evropi
FONDEN	11.5.2006	19.5.2009	160	parameter	potres v Mehiki
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2008	48	parameter	potres v Kaliforniji
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2008	227	parameter	neurje v Evropi
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2008	200	modelirano	potres na Japonskem
Swiss Re	6.6.2006	12.6.2007	114	kazalec	neurje v Ameriki
Swiss Re	6.6.2006	12.6.2007	42	modelirano	neurje v Ameriki
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2007	6	kazalec	neurje v Evropi
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2007	45	kazalec	neurje v Ameriki
Swiss Re	6.6.2006	6.6.2007	3	modelirano	potres na Japonskem
Munich Re	19.6.2006	30.3.2007	85	kazalec	neurje v Ameriki
Balboa	21.6.2006	5.6.2009	50	zavarovalnine	neurje v Ameriki
Liberty Mutual	21.6.2006	31.6.2009	200	kazalec	neurje v Ameriki
Hannover Re	28.7.2008	8.4.2009	150	parameter	neurje v Evropi
Endurance	1.8.2006	1.8.2008	60	kazalec	neurje v Ameriki
Endurance	1.8.2006	7.2.2008	125	kazalec	potres v Kaliforniji
Tokio Marine	3.8.2006	3.8.2011	200	parameter	tajfun na Japonskem
Swiss Re	4.8.2006	5.1.2007	50	kazalec	neurje v Ameriki
FM Global	25.8.2006	31.8.2009	300	parameter	potres

Vir: Helfenstein & Holzheu, *Securitization – new opportunities for insurers and investors*, 2006, str. 38 – 40.

Švicarska zavarovalnica Winthertur je leta 1997 izdala katastrofne obveznice. Nominalna vrednost obveznice je bila 4.700 švicarskih frankov, izplačilo kuponov letno, trajanje pa dve leti (Schmock, 1999, str. 101). Glavnica je bila zajamčena, kuponska stopnja je znašala LIBOR +

⁴⁷ USAA je okrajšava za *United States Automobile Association*. Ponujajo avtomobilsko in stanovanjsko zavarovanje zaposlenim v ameriški vojski. Na področju avtomobilskih zavarovanj so peta največja zavarovalnica v Združenih državah Amerike, na področju stanovanjskih pa četrta (Froot, 2001, str. 9).

2,25% (Cox et al., 2000, str. 165). Izplačilo kuponov je bilo odvisno od škode, ki jo povzroči neurje, vključno s točo. Osnova je bila število poškodovanih avtomobilov. Če neurja letno poškodujejo več kot 6.000 avtomobilov, zavarovanih pri Wintherturju, ni izplačila kuponov (Schmock, 1999, str. 101).

V letih 2005 in 2006 je bilo 37 izdaj katastrofnih obveznic, podrobnosti so podane v tabeli 2. Osnove obsegajo parametre katastrofe kot je na primer hitrost vetra ali magnituda potresa, škodne kazalce, zavarovalnine in modelirane vrednosti.

2.3.3 Drugi katastrofni izvedeni finančni instrumenti

Na kratko se bomo seznanili z drugimi oblikami katastrofnih instrumentov, in sicer s katastrofnimi terminskimi pogodbami in varnostnim kapitalom. Ti dve obliki sta prispevali k razvoju katastrofnih obveznic in katastrofnih opcij, obseg trgovanja s tema oblikama je skromen.

Katastrofne terminske pogodbe in opcije na te pogodbe sta bili prvi obliki katastrofnih izvedenih instrumentov. Terminske pogodbe so podobne opcijam. Opredeljujejo nakup oziroma prodajo ob bodočem dogovorjenem datumu. Za razliko od opcij vsebujejo obveznost za izvršitev in ne le pravice. Obstajajo standardizirane in nestandardizirane oblike.

Pogodba o terminskem nakupu je obljuba, dana ob sklenitvi, za izvršitev dogovorjenega posla v prihodnosti. Gre za časovno odloženo prodajo oziroma nakup po dogovorjeni ceni (Bodie et al., 1996, str. 686). Pred sklenitvijo se stranki uskladiata glede osnove, količine, cene, datuma in kraja izvršitve. Obe stranki sta zaščiteni pred nihanjem cene blaga, ki je osnova pogodbe. Plačilo in izročitev blaga se izvrši ob dospelosti. Pri terminskih pogodbah, ki temeljijo na obrestnih merah, menjalnih tečajih ali delniških indeksih, ob dospelosti ni izročitve blaga, ampak je denarni tok. Enako velja za katastrofne terminske pogodbe.

Trg standardiziranih terminskih pogodb nadomešča neformalen trg nestandardiziranih terminskih pogodb (Bodie et al., 1996, str. 685). Standardiziran je obseg posla, osnova, dospelost in kraj izvršitve. Stranki se dogovorita le o ceni. Kot smo omenili, so bile katastrofne terminske pogodbe vezane na ISO kazalec (Christensen, 1998, str. 4). Zaradi pomanjkljivosti kazalca so instrumente, vezane na ta kazalec, nadomestili s standardiziranimi PCS opcijami.

Varnostni kapital je sorazmerno nova oblika alternativnega prenosa tveganja. Zagotovi se z dogovorom ali z opcijo (Krumberger, 2002, str. 61). Za financiranje katastrofnega tveganja potreben visok kapital. Večino časa je neizrabljen, saj so katastrofe sorazmerno redke. Varnostni kapital je namenjen zagotavljanju kapitalske ustreznosti, ko je zaradi katastrofe ogrožena (Krumberger, 2002, str. 63). Zavarovalnica, ki mora izplačati visoke katastrofne zavarovalnine, z varnostnim kapitalom zagotovi sredstva za nemoteno poslovanje, torej takrat, ko ga potrebuje.

2.4 Prednosti in pomanjkljivosti katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Med predstavitvijo posameznih katastrofnih instrumentov smo omenili nekatere prednostni in pomanjkljivosti. Ugotovitve bomo strnili v pregled in upoštevali bomo vlogo zavarovalnic in vlagateljev.

Prednost katastrofnih instrumentov je prilagojenost potrebam zavarovalnice za zaščito pred katastrofami, v tem pogledu so podobni pozavarovanju. S katastrofnimi instrumenti se pridobi ožje kritje, vezano je na katastrofo, opredeljeno z osnovo instrumenta.

Če osnova katastrofnega instrumenta niso škode zavarovalnice ali če ni dovolj visoke korelacije s škodami zavarovalnice, obstaja tveganje osnove. To je tveganje, da škode zavarovalnice odstopajo od škod, ki so upoštevane z osnovo. Lahko se zgodi, da mora zavarovalnica izplačati visoke škode, kljub temu da osnova ne doseže praga katastrofnega instrumenta, in obratno. Tveganje osnove se ublaži z vezavo na osnovo, ki je čim bolj odvisna od škod zavarovalnice.

Katastrofni instrumenti imajo bolj stalne cene kot pozavarovanje, nihanje cen zaradi katastrofnih škod je manjše kot pri pozavarovanju. Ta lastnost je posledica dejstva, da imajo velike škode manjši relativen vpliv na večjem kapitalskem trgu kot na pozavarovalnem trgu. Z izvedenimi finančnimi instrumenti so se omilila ciklična nihanja na blagovnih trgih, podoben učinek katastrofnih instrumentov je pričakovati na pozavarovalnem trgu.

Prednost katastrofnih instrumentov za vlagatelje je razpršenost naložb, saj je dogajanje na finančnem trgu nekorelirano z nastankom katastrof oziroma je korelacija zelo šibka⁴⁸. Donosi katastrofnih instrumentov so sorazmerno visoki (Government Accountability Office, 2005, str. 27). Vlagatelji se ne odločajo pogosto za katastrofne instrumente, ker domnevajo, da so zelo tvegani. Menijo, da imajo zavarovalnice boljšo oceno tveganja in ne zanimajo jih tveganja, ki jih zavarovalnice niso pripravljene zadržati. Zaradi majhnega obsega trgovanja s katastrofnimi instrumenti je likvidnost slaba.

Slabost katastrofnih instrumentov za vlagatelja je moralni hazard. Zavarovalnica lahko razrahlja pravila za ocenjevanje in prevzemanje tveganj, manj skrbno nadzira geografsko koncentracijo zavarovanih predmetov, sprejema bolj tvegana zavarovanja za standardno premijo ter rešuje škodne primere v prid zavarovanca. Za omiljenje moralnega hazarda se uporabljajo podobne rešitve kot pri pozavarovanju. Prag je običajno visok, kar sili zavarovalnico, da spoštuje pravila za ocenjevanje in prevzemanje tveganj, preudarno upravlja s tveganji ter škod ne rešuje liberalno. Podoben učinek ima osnova, ki temelji na plačanih škodah in ne na prijavljenih (American Academy of Actuaries, 1999, str. 15).

⁴⁸ Korelacijski koeficient za borzni kazalec S&P 500 in katastrofne zavarovalnine v obdobju med letoma 1949 in 1996 je bil – 0,05 (Cole & Chiarenza, 1999).

Katastrofni instrumenti so stroškovno primerljivi s pozavarovanjem za hude katastrofe in za velike izdaje (General Accounting Office, 2003, str. 22). Pri tem so stroški izdaje predvsem administrativni stroški in stroški zagotavljanja relativno visokih donosov. Visoki stroški so posledica dejstva, da so instrumenti narejeni po meri (ISO Properties, 1999). Vlagatelj potrebuje od zavarovalnice številne informacije, vključno s podatki o izpostavljenosti, da oceni tveganost in donosnost. Potrebne informacije zmanjšajo likvidnost. Stroški se zmanjšajo s standardizacijo in z večjimi izdajami. Ocenjujejo, da je velikost izdaje, ki je stroškovno upravičena, nad 100 milijoni dolarjev (General Accounting Office, 2003, str. 24).

Standardizacija in določanje velikosti osnove s strani neodvisne organizacije pozitivno vpliva na obseg trgovanja in likvidnost (Meyers & Kollar, 1998, str. 127). Če so instrumenti standardizirani, vlagatelji ne potrebujejo dodatnih informacij od zavarovalnice in transakcijski stroški so nižji. V primerjavi z nestandardiziranimi pogodbami so standardizirane pogodbe manj prilagojene zahtevam strank in so bolj likvidne.

3 UPRAVLJANJE S KATASTROFNIM TVEGANJEM

V prvem in predvsem v drugem poglavju smo govorili o ekonomskih in zavarovalnih dejavnikih, ki so vplivali na nastanek katastrofnih izvedenih instrumentov. V tem poglavju se bomo ukvarjali z razpršitvijo katastrofnega tveganja. Z razpršitvijo se tveganje porazdeli med posameznimi zavarovanji. Pri večjem številu zavarovanj se tveganje izravna, ocena tveganja je zanesljivejša in obvladovanje tveganja je učinkovitejše. S pomočjo modela bomo pokazali, da katastrofnega tveganja ni mogoče poljubno zmanjšati, če število zavarovanj narašča. Vzrok je odvisnost med posameznimi zavarovanji, saj katastrofe prizadenejo geografsko omejena območja.

3.1 Portfelj zavarovanj

Portfelj zavarovanj opazujemo glede na vrsto škode. Pri tem škode delimo na katastrofne in na ostale, tako imenovane običajne škode. Za katastrofne škode je značilno, da so velike in sorazmerno redke. Običajne škode pa so manjše in pogostejše v primerjavi s katastrofnimi škodami. V nadaljevanju bomo obravnavali le katastrofne škode, razen če ne bo drugače navedeno.

Pri obvladovanju katastrofnega tveganja mora zavarovalnica upoštevati verjetnost nastanka katastrofe in pričakovano višino škode (Mack, 1997, str. 25). Ker verjetnost ni znana, je ključno

poznavanje in preučevanje porazdelitve agregatne škode. Za določanje agregatne škode se običajno uporablja individualni ali kolektivni pristop. Individualni pristop temelji na opazovanju posameznih zavarovanj. Agregatna škoda je vsota škod vseh zavarovanj. Kolektivni pristop temelji na slučajnem procesu, ki modelira škodo portfelja vseh zavarovanj na osnovi porazdelitve števila škod in velikosti škode posameznega zavarovanja (Bowers, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt, 1986, str. 317). S procesom so zajete značilnosti celotnega portfelja in ne le posameznih zavarovanj.

Predpostavimo, da imamo v portfelju n katastrofnih zavarovanj. Omejimo se lahko na katastrofno škodo, ki jo povzroči določena skupina naravnih nesreč kot na primer potresi, poplave ali orkani. Posamezno katastrofo lahko obravnavamo kot en škodni dogodek, upoštevajoč akumulacijo v portfelju (Mack, 1997, str. 25). Naj bo X_i velikost katastrofne škode i -tega zavarovanja v danem obdobju. Za $i = 1, 2, \dots, n$ naj bo

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N'} C_{ik}; N' > 0, \\ 0; N' = 0 \end{cases},$$

kjer je N' naključno število katastrof v danem obdobju in C_{ik} slučajna spremenljivka, ki predstavlja velikost škode i -tega zavarovanja, ki jo povzroči k -ta katastrofa, pri pogoju, da se k -ta katastrofa zgodi. Dodatno predpostavimo, da so slučajne spremenljivke $C_{i1}, C_{i2}, \dots$ za $i = 1, 2, \dots, n$ enako porazdeljene, nenegativne in med seboj neodvisne ter da so neodvisne od N' . Iz zgornjega zapisa sledi, da je X_i sestavljena porazdelitev. Slučajne spremenljivke X_i za $i = 1, 2, \dots, n$ niso neodvisne, saj na njih vpliva število katastrof N' , so pa pogojno neodvisne na N' . Enak sklep o odvisnosti velja tudi za slučajne spremenljivke $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{nk}$, kjer je $k \in N$ in $k \leq N'$.

Agregatna katastrofna škoda S_n je $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Zapišemo jo na naslednja načina

$$S_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N'} (C_{1k} + C_{2k} + \dots + C_{nk}); N' > 0, \\ 0; N' = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$S_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N'} Y_{nk}; N' > 0, \\ 0; N' = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

kjer je $Y_{nk} = C_{1k} + C_{2k} + \dots + C_{nk}$ za $k \in N$ in $k \leq N'$. Slučajna spremenljivka Y_{nk} predstavlja škodo, ki jo k -ta katastrofa povzroči na portfelju n zavarovanj. Ker je velikost škode neodvisna od števila katastrof, so spremenljivke Y_{nk} neodvisne od N' . V nadaljevanju oznako Y_{nk} zamenjamo z Y_k .

Pri enačbi (1) nas zanima škoda posameznega zavarovanja. Enačba se nanaša na individualni pristop, ki se uporablja pri določanju zavarovalne premije in pri simuliranju vpliva katastrofe na portfelj (Cossette, Duchense & Marceau, 2004, str. 4). Za določanje porazdelitve škode posameznega zavarovanja je treba sorazmerno veliko podatkov. Individualni pristop se uporablja za homogene skupine, torej skupine zavarovanj z neodvisnimi in enako porazdeljenimi tveganji (Mack, 1997, str. 19, 36). Ker so katastrofe sorazmerno redke in ker so zavarovanja odvisna, se ta pristop ne uporablja za določanje agregatne katastrofne škode. Za agregatno katastrofno škodo uporabimo enačbo (2). Ta enačba se nanaša na kolektivni pristop, ki je primeren za modeliranje agregatne katastrofne škode.

Zanima nas porazdelitev agregatne katastrofne škode. Izračunamo prva dva centralna momenta sestavljene slučajne spremenljivke S_n , upoštevajoč individualni in kolektivni pristop. Dobimo

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(E(S_n|N')) = E(N') \cdot E(Y_n).$$

Povprečna katastrofna škoda je enaka vsoti povprečnih škod vseh zavarovanj, po drugi strani pa je enaka produktu povprečnega števila katastrof in povprečne škode. Varianco izračunamo na naslednja načina

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \text{Cov}(X_i, X_j),$$

$$\text{Var}(S_n) = E(N') \cdot \text{Var}(Y_n) - \text{Var}(N') \cdot E(Y_n^2) = E(N') \cdot \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n C_i\right) - \text{Var}(N') \cdot E\left(\left(\sum_{i=1}^n C_i\right)^2\right).$$

3.1 Modeli individualnih katastrofnih škod

V začetku poglavja smo napovedali, da nas zanima razpršitev katastrofnega tveganja. Razpršitev bomo preučili s pomočjo treh preprostih modelov. Modeli se razlikujejo glede na odvisnost med posameznimi zavarovanji.

Pri preučevanju uporabimo poenostavitve, da se v opazovanem obdobju enega leta zgodi največ ena katastrofa. Omejitev števila katastrof ne vpliva bistveno na razumevanje. Modele je preprosto prilagoditi splošnemu primeru brez omejitev števila katastrof, vendar ta posplošitev zahteva pisanje obsežnejših formul, čemur se želimo izogniti. Verjetnost, da se zgodita dve katastrofi iste vrste ali več, zanemarimo. Zaradi poenostavitve velja

$$X_i = \begin{cases} C_i; & N' = 1 \\ 0; & N' = 0 \end{cases},$$

kjer je C_i škoda i -tega zavarovanja. Ker smo predpostavili, da se zgodi največ ena katastrofa v opazovanem obdobju, lahko N' obravnavamo kot Bernoullijevo slučajno spremenljivko s parametrom p , kjer je $0 \leq p \leq 1$. Verjetnost, da se zgodi katastrofa v posameznem letu, je p . Škoda je odvisna od zavarovalne vsote in zapišemo $C_i = b_i \cdot U_i$, kjer je b_i zavarovalna vsota i -tega zavarovanja, U_i pa slučajna spremenljivka, ki predstavlja škodni delež. Pri izbranih oznakah velja $X_i = b_i \cdot U_i$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke X_i je

$$E(X_i) = E(N') \cdot E(C_i) = b_i \cdot E(N') \cdot E(U_i),$$

varianca pa

$$\text{Var}(X_i) = E(N') \cdot \text{Var}(C_i) + \text{Var}(N') E(C_i^2) = b_i^2 \cdot (E(N') \cdot \text{Var}(U_i) + \text{Var}(N') E(U_i^2)).$$

Vemo, da je kovarianca merilo za odvisnost slučajnih spremenljivk. Poiščemo kovarianco škod zavarovanj. Najprej izračunamo matematično upanje produkta

$$E(X_i X_j) = E(E(X_i X_j) | N') = E(N' \cdot E(C_i C_j)) = E(N') E(C_i C_j) = b_i b_j E(N') E(U_i U_j),$$

kjer je $i \neq j$. Upoštevamo definicijo kovariance $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j)$ in za $i \neq j$ dobimo

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = b_i b_j (E(N') E(U_i U_j) - E^2(N') E(U_i) E(U_j)). \quad (3)$$

V nadaljevanju bomo podrobneje predstavili različne modele katastrofnih škod. V prvem modelu bodo škodni deleži neodvisni, v naslednjih dveh pa odvisni.

3.1.1 Neodvisni škodni deleži

Kot nakazuje naslov, v tem modelu predpostavimo, da so škodni deleži zavarovanj med sabo neodvisni. Torej so slučajne spremenljivke U_i za $i = 1, 2, \dots, n$ neodvisne. Za $i \neq j$ velja $\text{Cov}(U_i, U_j) = 0$, $\text{Cov}(C_i, C_j) = 0$ in $E(X_i X_j) = b_i b_j E(N') E(U_i) E(U_j)$.

Izračunamo kovarianco škod zavarovanj. Za $i \neq j$ iz enačbe (3) sledi

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = b_i b_j E(U_i) E(U_j) (E(N') - E^2(N')).$$

Katastrofna škoda je izražena s spremenljivko $S_n = Y_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n$. Na desni strani enačbe je vsota neodvisnih spremenljivk.

Model je zaradi predpostavke o neodvisnosti preprost, vendar ne odseva dejanskega stanja. Na velikost škode posameznega zavarovanja vplivajo različni dejavniki, kot na primer jakost katastrofe in močna pozitivna koreliranost škod sosednjih zgradb (Mack, 1997, str. 24). To je v nasprotju s predpostavko o neodvisnosti. Zato slučajnih spremenljivk U_i oziroma C_i za $i = 1, 2, \dots, n$ ne moremo obravnavati kot neodvisnih. To pomanjkljivost bomo do neke mere odpravili z naslednjima modeloma.

3.1.2 Deterministični škodni deleži

Za razliko od prvega modela predpostavimo, da so škodni deleži odvisni. Upoštevamo, da je škodni delež odvisen od jakosti oziroma silovitosti katastrofe. Jakost katastrofe se določi glede na sproščeno energijo, posledice na objektih, v naravi in na živih bitjih (Vittori, 2005, str. 43, 44). Na jakost vplivajo številni dejavniki, kot so objektivne lastnosti katastrofe⁴⁹, gostota naseljenosti, kakovost gradnje in lokalne geološke značilnosti. Zaradi raznolikih dejavnikov je zahtevno določanje odvisnosti škodnih deležev od jakosti katastrofe.

Predpostavimo, da je škodni delež U_i deterministična funkcija ρ_i jakosti katastrofe. Slučajna spremenljivka I naj predstavlja jakost katastrofe in F_I naj bo njena porazdelitvena funkcija. Slučajni spremenljivki I in N' naj bosta neodvisni, torej jakost katastrofe ne vpliva na število katastrof in obratno. Ker je škoda odvisna od jakosti katastrofe, za $i = 1, 2, \dots, n$ zapišemo $U_i = \rho_i(I)$, kjer je $\rho_i : \Theta \rightarrow [0, 1]$ funkcija z definicijskim območjem Θ . Množica Θ vsebuje vse mogoče jakosti. Funkcija ρ_i je pozitivna in naraščajoča, saj katastrofa z večjo jakostjo povzroči večjo škodo. Predpostavimo, da imajo zavarovani predmeti z enakimi lastnostmi enake deterministične funkcije. Če ima predmet i -tega zavarovanja enake lastnosti kot predmet j -tega zavarovanja, je $\rho_i = \rho_j$ in $P(U_i(x) = U_j(x) | I = x) = 1$. Z določanjem funkcije ρ_i se ne ukvarjamo in jo privzamemo kot dano.

Poiščemo kovarianco $\text{Cov}(X_i, X_j)$ za $i \neq j$. Upoštevamo enačbo (3) in dobimo

⁴⁹ Objektivna lastnost katastrofe je na primer magnituda potresa po Richterjevi lestvici in hitrost vetra pri orkanu.

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = b_i b_j (E(N')E(\rho_i(I)\rho_j(I)) - E^2(N')E(\rho_i(I))E(\rho_j(I))).$$

Model z determinističnimi škodnimi deleži je realnejši od modela z neodvisnimi škodnimi deleži, saj so škodni deleži odvisni od jakosti katastrofe. Kljub temu model odstopa od dejanskega stanja. V splošnem ne moremo trditi, da na zavarovanih predmetih z enakimi lastnostmi nastanejo škode v enakih deležih.

3.1.3 Slučajni škodni deleži

Podobno kot v modelu z determinističnimi škodnimi deleži predpostavimo, da so škodni deleži odvisni od jakosti katastrofe. Velikost deležev je slučajna spremenljivka, ki je pogojno odvisna od jakosti katastrofe. Formalno zapišemo

$$P(U_i = u | I = x) = p_{iux},$$

kjer je u iz končne množice škodnih deležev, za jakost katastrofe x velja $x \in \Theta$, kjer je Θ množica vseh mogočih jakosti katastrofe, in $\sum_u p_{iux} = 1$. Pomen ostalih oznak je enak kot v prejšnjih modelih. Verjetnost p_{iux} je odvisna od i , to pomeni, da je odvisna od lastnosti predmeta i -tega zavarovanja. Če imata predmeta i -tega in j -tega zavarovanja enake lastnosti, verjetnosti $P(U_i(x) = U_j(x) | I = x)$ niso enake 1 za $i \neq j$. Pri modelu z determinističnimi škodnimi deleži so bile verjetnosti enake 1. Dodatno predpostavimo, da so slučajne spremenljivke $U_1, U_2, \dots, U_n$ pogojno neodvisne na I . Torej velja

$$E(U_i U_j) = E_I(E(U_i U_j) | I) = E_I(E(U_i | I)E(U_j | I))$$

za $i \neq j$. Tudi slučajne spremenljivke $C_1, C_2, \dots, C_n$ so pogojno neodvisne na I . Pogojna porazdelitev U_i glede na I je diskretna, saj smo predpostavili, da je končno škodnih deležev.

Kot pri prejšnjih dveh modelih izračunamo kovarianco $\text{Cov}(X_i, X_j)$ z uporabo enačbe (3), upoštevajoč predpostavko o pogojni neodvisnosti slučajnih spremenljivk. Za $i \neq j$ je

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = b_i b_j (E(N')E_I(E(U_i | I)E(U_j | I)) - E^2(N')E(U_i)E(U_j)).$$

Ta model je med obravnavanimi najboljši približek realnosti. Škodni deleži so naključno odvisni od jakosti katastrofe, kar ni veljalo za model z determinističnimi škodnimi deleži. Dodajmo, da

obstajajo modeli, ki eksplicitno upoštevajo vrsto zgradbe in oddaljenost zgradb, vendar takih modelov ne bomo obravnavali⁵⁰.

Za spremljanje katastrofnega tveganja smo predstavili modele z različno podano odvisnostjo med posameznimi zavarovanji. V nadaljevanju bomo s pomočjo modelov in ustreznega merila preučili, ali je mogoče katastrofno tveganje poljubno razpršiti in tako z večanjem števila polic zmanjšati katastrofno tveganje. Na to, žal, pričakujemo negativen odgovor.

3.2 Določanje nevarnostne premije in verjetnost bankrota

S pomočjo modelov iz prejšnjega razdelka bomo preučili razpršitev katastrofnega tveganja. Učinkovitost razpršitve se običajno ugotavlja z nevarnostno premijo in merili, ki izhajajo iz porazdelitve škod. Vemo, da je zavarovalna premija⁵¹ sestavljena iz več delov oziroma komponent. V aktuarski literaturi se pogosto uporablja poenostavljena delitev kosmate premije na nevarnostno premijo, del za stroške in del za varnostno rezervo (Komelj, 2004, str. 5, 6). V premijo je lahko vključen še dodatek za dobiček, vendar nas ta del ne zanima, osredotočimo se le na nevarnostno premijo.

Za določanje zavarovalne premije obstajajo številni načini. Najpogosteje temeljijo na nevarnostni premiji, na koristnosti v povezavi z nenaklonjenostjo tveganju in na merilih tveganja, ki vključujejo kvantile (Embrechts, 1997, str. 3, 4). Pristopi, ki temeljijo na nevarnostni premiji, opredeljujejo nevarnostno premijo π kot povprečno pričakovano škodo $E(X)$, povečano za varnostni dodatek, kjer slučajna spremenljivka X predstavlja porazdelitev škode. Če pričakovana škoda ni povečana za varnostni dodatek, agregatna škoda slej ko prej preseže zbrane premije in poslovanje zavarovalnice je ogroženo (Antal, 2003, str. 35). Varnostni dodatek označimo z δ , kjer je $\delta > 0$. Načela, ki temeljijo na nevarnostni premiji, so (Cossette et al., 2004, str. 8):

- načelo povprečja, kjer je $\pi = E(X) + \delta \cdot E(X)$,
- načelo variance, kjer je $\pi = E(X) + \delta \cdot Var(X)$ in
- načelo standardnega odklona, kjer je $\pi = E(X) + \delta \cdot \sqrt{Var(X)}$.

⁵⁰ Za modele, ki upoštevajo korelacije škod zaradi geografske bližine zavarovanih predmetov, svetujemo literaturo (Cossette, Duchesne, Marceau, 2002).

⁵¹ V slovenski literaturi o zavarovalništvu najdemo delitev kosmate zavarovalne premije na (Komelj, 2004, str. 4):

- obratovalni dodatek,
- funkcionalno premijo, ki je sestavljena iz:
 - o tehnične premije, ki se deli na nevarnostno premijo in hranilno premijo, in
 - o dodatka za preprečitev in represijo.

V modelih, predstavljenih v prejšnjem razdelku, določimo premijo po načelu, ki temelji na nevarnostni premiji. Za vse modele uporabimo enako načelo. Ne glede na to katero načelo izberemo, dobimo enake rezultate za vse tri modele. Vzrok je v dejstvu, da so škode posameznega zavarovanja enako porazdeljene. Modeli se razlikujejo v sestavljeni porazdelitvi, ki na nevarnostno premijo ne vpliva. Na osnovi nevarnostne premije ne moremo ugotoviti razpršenosti katastrofnega tveganja in treba je izbrati drugo merilo.

Primeri meril, ki temeljijo na porazdelitvi agregatne škode, so standardni odklon, tvegana vrednost⁵² in tvegana vrednost repa⁵³ (Zeng, 2003, str. 252). Pogosto se preučuje verjetnost, da škode presežejo premije. Tudi tu uporabimo ta pristop, izračunamo tako imenovano verjetnost bankrota⁵⁴. Pojem najprej definiramo.

Definicija 3.1: Naj bo $u \geq 0$ začetni kapital, π zbrana nevarnostna premija v časovni enoti, $S(t)$ slučajna spremenljivka, ki predstavlja agregatno škodo do časa t , in $U(t)$ slučajna spremenljivka, ki predstavlja vrednost kapitala v času t . Velja $U(t) = u + \pi t - S(t)$. Verjetnost bankrota v času T pri začetnem kapitalu u je

$$\psi(u, T) = P(U(t) < 0, \text{ za nek } t \leq T).$$

Izraz kapital naj tukaj pomeni presežek premij nad škodami. Škodne rezervacije in sprostitev kapitala zaradi izjemnih katastrofnih škod niso upoštevane. Definicijo verjetnosti bankrota uporabimo za obdobje enega leta, torej $t = 1$, in brez začetnega kapitala, torej $u = 0$. Zanima nas verjetnost, da v enem letu agregatna katastrofna škoda preseže zbrane nevarnostne premije. Naj bo

$$\psi(T) := \psi(0, T) = P\left(\sum_{i=1}^n \pi_i < S_n\right), \quad (4)$$

kjer je $\pi_i = (1 + \delta) \cdot E(X_i)$, δ varnostni dodatek in S_n letna agregatna škoda, kot v enačbi (1) oziroma (2). Zavedati se moramo, da izbor ustreznega merila ni preprosta naloga, enako velja za določanje mejne verjetnosti, ki zagotavlja varno poslovanje zavarovalnic.

Nevarnostno premijo izračunamo z načelom povprečja, ker je najpreprostejše. Pri vseh zavarovanjih smo uporabili enak varnostni dodatek, ker jih obravnavamo kot enako tvegana. Izbran način določanja premije podpremo z ekonomsko razlago. Predpostavimo, da na zavarovalnem trgu ni arbitraže. To pomeni, da ni dobičkov brez tveganja. V tem primeru mora

⁵² Tvegana vrednost VaR se uporablja za določanje verjetnosti, da škode presežejo določeno mejo. Če je VaR pri verjetnosti 5%, torej 95. percentil, enaka 30 milijonov dolarjev, to pomeni, da škode z verjetnostjo 95% ne presežejo 30 milijonov dolarjev, z verjetnostjo 5% pa je pričakovati škode nad 30 milijonov dolarjev.

⁵³ Tvegana vrednost repa je povprečna pričakovana škoda, pri pogoju, da škoda presega določeno mejo.

⁵⁴ Nekateri avtorji govorijo tudi o oceni tveganja izgube kapitala (Komelj, 2005, str. 367). V tem delu uporabimo izraz verjetnost bankrota.

biti nevarnostna premija aditivna ne glede na to, ali so tveganja odvisna ali ne (Venter, 1991, str. 224). Pri zavarovanju skupine neodvisnih zavarovanj mora biti premija vseh zavarovanj enaka vsoti premij posameznih zavarovanj⁵⁵. Če to ne velja, obstaja možnost arbitraže pri pozavarovanju⁵⁶. S tem izključimo načelo standardnega odklona, saj je standardni odklon škodnega dogajanja skupine relativno manjši kot pri posameznih zavarovanjih. Podoben razmislek velja tudi v primeru odvisnosti⁵⁷. Tako izključimo načelo variance, saj na varianco vpliva stopnja odvisnosti med zavarovanji. Na koncu preostane načelo povprečja za izračun nevarnostne premije, saj smo pri predpostavki, da ni arbitraže, drugi dve načeli izključiti.

3.3 Možnost razpršitve katastrofnega tveganja

Preučili bomo vpliv povečanja portfelja na razpršenost katastrofnega tveganja. Vpliv bomo preučili s pomočjo verjetnosti bankrota. Z modeli bomo pokazali, da je običajno tveganje mogoče učinkovito razpršiti s povečanjem števila zavarovanj, medtem ko katastrofnega tveganja ni mogoče.

3.3.1 Razpršitev običajnega tveganja

Omenili smo, da je običajno tveganje tisto tveganje, ki ni katastrofno. Zanima nas, ali se tveganje razprši s povečanjem števila zavarovanj. Osredotočimo se na zmanjšanje tveganja in sposobnost zavarovalnice, da izplača škode. Sposobnost zavarovalnice ocenimo z verjetnostjo bankrota na koncu opazovanega obdobja, torej po enem letu.

Velikosti običajnih škod v portfelju n zavarovanj predstavimo s slučajnimi spremenljivkami $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$. Predpostavimo, da so spremenljivke $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ paroma neodvisne in enako porazdeljene. Opazujemo agregatno škodo $W_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Za določanje nevarnostne premije uporabimo načelo povprečja. Za $i = 1, 2, \dots, n$ naj bo nevarnostna premija

⁵⁵ Ta zahteva mora veljati zaradi predpostavke o neobstoju arbitraže. V praksi sicer zavarovalnice ponujajo skupinske popuste, vendar ni nujno, da se popusti nanašajo na nevarnostni del premije.

⁵⁶ Recimo, da zavarovalnica sprejme tveganja posamezno in jih pozavaruje kot skupino ter da so premije za skupinsko zavarovanje nižje. Zavarovalnica je lahko mnenja, da je škodno dogajanje skupine bolj predvidljivo in so odstopanja od pričakovane škode manjša. Pozavarovalnica lahko pozavaruje po nižji nevarnostni premiji kot zavarovalnica. Tako pozavarovalnica jamči zavarovalnici gotov dobiček brez tveganja. Zaradi predpostavke, da ni arbitraže, dobičkov brez tveganja ni. Tako smo prišli do protislovja. To pomeni, da mora biti premija za dano tveganje enaka, ne glede na to, ali je premija določena za celotno skupino ali za posamezno zavarovanje.

⁵⁷ Recimo, da zakonski par poseduje dve sosednji stanovanji na izpostavljenem območju. Zavarovalnica lahko smatra, da je tako bolj izpostavljena tveganju in želi zaračunati dodatek pri stanovanjskem zavarovanju. V tem primeru se zakonca lahko odločita za ločeni zavarovanji brez dodatka.

$$\varsigma_i = (1 + \delta)E(Z_i), \quad (5)$$

kjer je δ varnostni dodatek, enak za vsa zavarovanja. Dodatno naj velja, da sta matematično upanje in varianca običajne škode pozitivna in končna.

Trditev 3.2: Naj bodo slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ enako porazdeljene in paroma neodvisne⁵⁸, njihovo vsoto označimo z W_n . Obstajajo naj končna pozitivna realna števila a, b, c in d , tako da je $0 < a \leq E(Z_i) \leq b < \infty$ in $0 < c \leq \text{Var}(Z_i) \leq d < \infty$ za vsak i . Nevarnostna premija naj bo podana z enačbo (5). Verjetnost bankrota naj bo $\psi_n = P\left(W_n > \sum_{i=1}^n \varsigma_i\right)$.

(a) Za $\delta > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 0$.

(b) Za $\delta < 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 1$.

Pri dokazu trditve se bomo sklicali na neenakost Čebiševa, ki je podana v naslednji lemi.

Lema 3.3: Naj bo X slučajna spremenljivka s končno varianco. Za poljuben $\varepsilon > 0$ velja

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}. \quad (6)$$

Dokaz neenakosti je v literaturi (Sarapa, 1992, str. 145). Lotimo se dokaza trditve 3.2.

Dokaz: Najprej preoblikujemo verjetnost bankrota in upoštevamo, kako je podana nevarnostna premija ter dejstvo, da je matematično upanje vsote enako vsoti matematičnih upanj. Dobimo

$$\psi_n = P\left(W_n > \sum_{i=1}^n \varsigma_i\right) = P\left(W_n > (1 + \delta) \sum_{i=1}^n E(Z_i)\right) = P(W_n - E(W_n) > \delta E(W_n)).$$

V nadaljevanju ločeno obravnavamo primera (a) in (b).

V primeru (a) je $\delta > 0$ in $E(Z_i) > 0$. Verjetnost bankrota ocenimo s pomočjo neenakosti Čebiševa (6) in dobimo

$$\psi_n = P(W_n - E(W_n) > \delta E(W_n)) \leq P(|W_n - E(W_n)| > \delta E(W_n)) \leq \frac{\text{Var}(W_n)}{\delta^2 E^2(W_n)} \leq \frac{nd}{\delta^2 n^2 a^2}.$$

⁵⁸ Trditev velja tudi, če so spremenljivke paroma nekorelirane.

Pri zadnjem delu ocene smo upoštevali, da sta matematično upanje in varianca slučajnih spremenljivk $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ omejena in da so spremenljivke neodvisne. Ocena verjetnosti bankrota, ko gre število zavarovanj čez vse meje, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nd}{\delta^2 n^2 a^2} = 0.$$

Ker iščemo limito nenegativnega zaporedja, mora veljati $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 0$. Dokazali smo prvi del trditve.

Lotimo se še dokazovanja (b) primera, kjer je varnostni dodatek negativen. Podobno kot v (a) primeru ocenimo verjetnost bankrota, vendar za razliko od prvega dela iščemo spodnjo mejo in ne zgornjo. Vemo, da velja

$$\begin{aligned} \psi_n &= P(W_n - E(W_n) > \delta E(W_n)) = 1 - P(W_n - E(W_n) \leq \delta E(W_n)) = \\ &= 1 - P(E(W_n) - W_n \leq -\delta E(W_n)) \geq 1 - P(|W_n - E(W_n)| \leq -\delta E(W_n)). \end{aligned}$$

Uporabimo neenakost Čebiševa (6), saj je $-\delta E(W_n)$ pozitivno število za $\delta < 0$. Dalje postopamo kot pri (a) primeru. Spodnja meja za verjetnost bankrota je

$$\psi_n \geq 1 - \frac{\text{Var}(W_n)}{\delta^2 E^2(W_n)} \geq 1 - \frac{nc}{\delta^2 n^2 b^2}.$$

V limitnem primeru, ko gre $n \rightarrow \infty$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \geq 1$. Ker je verjetnost bankrota ψ_n navzgor omejena z 1, je $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 1$. Trditev je v celoti dokazana. $\square$

S trditvijo 3.2 smo pokazali, da je običajno tveganje neodvisnih zavarovanj mogoče učinkovito omejiti z večanjem števila zavarovanj, vendar le, če je v nevarnostni premiji uporabljen pozitiven varnostni dodatek. Še več, verjetnost bankrota teži proti 0, če število zavarovanj narašča čez vse meje. Zanima nas, ali enak sklep velja za katastrofno tveganje.

3.3.2 Razpršitev katastrofnega tveganja

Pokazali bomo, da katastrofnega tveganja za razliko od običajnega tveganja ni mogoče učinkovito razpršiti z večanjem števila zavarovanj. Verjetnost bankrota poljubno velikega portfelja katastrofnih zavarovanj teži k pozitivnem številu. Trditev dokažemo z izračunom verjetnosti bankrota za modele z neodvisnimi, determinističnimi in slučajnimi škodnimi deleži. Uporabimo enake oznake kot v naštetih modelih.

Nevarnostna premija je navzgor omejena s pričakovano škodo, pri pogoju, da se zgodi škodni dogodek. Premija, ki presega pričakovano škodo, ni ekonomsko upravičena (Christensen, 1998, str. 1). To upoštevamo pri določanju premije katastrofnih zavarovanj. Za nevarnostno premijo velja $\pi_i < E(C_i)$, pri pogoju, da se zgodi katastrofa. Izrazimo varnostni dodatek δ iz načela povprečja za določanje nevarnostne premije $\pi_i = (1 + \delta) \cdot E(X_i)$, kjer slučajna spremenljivka X_i za $i = 1, 2, \dots, n$ predstavlja velikost katastrofne škode i -tega zavarovanja. Upoštevajoč omejitev za premijo, enačbo (A7) in predpostavko, da je N' Bernoullijeva slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo p , je zgornja meja za varnostni dodatek

$$\delta = \frac{\pi_i}{E(X_i)} - 1 = \frac{\pi_i}{E(N')E(C_i)} - 1 < \frac{E(C_i)}{E(N')E(C_i)} - 1 = \frac{1}{p} - 1.$$

Kot v prejšnjem razdelku predpostavimo, da ima slučajna spremenljivka X_i prva dva momenta pozitivna in končna. Za modele z neodvisnimi škodnimi deleži velja naslednja trditev.

Trditev 3.4: Slučajna spremenljivka X_i naj predstavlja velikost katastrofne škode i -tega zavarovanja za $i = 1, 2, \dots, n$ v opazovanem obdobju. X_i naj zadošča zahtevam modela z neodvisnimi škodnimi deleži. Obstajajo naj končna pozitivna realna števila a, b, c in d , da je $0 < a \leq E(X_i) \leq b < \infty$ in $0 < c \leq \text{Var}(X_i) \leq d < \infty$. Za varnostni dodatek δ naj velja $\delta < \frac{1}{p} - 1$, kjer je p verjetnost, da se zgodi katastrofa v opazovanem obdobju. Ko število zavarovanj narašča čez vse meje, je verjetnost bankrota enaka $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = p$.

Dokaz: Pri računanju verjetnosti bankrota upoštevamo, da se v danem obdobju lahko zgodi največ ena katastrofa. Uporabimo formulo popolne verjetnosti in upoštevamo, da je v skladu z enačbo (2) $S_n = Y_n$ pri pogoju, da se zgodi katastrofa,

$$\psi_n = P\left(S_n > \sum_{i=1}^n \pi_i\right) = \sum_{k=0}^1 P(N' = k) P\left(S_n > \sum_{i=1}^n \pi_i \mid N' = k\right) = p P\left(Y_n > \sum_{i=1}^n \pi_i\right).$$

Vsoto preoblikujemo na naslednji način, pri čemer upoštevamo omejitev za varnostni dodatek δ

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = (1 + \delta) \sum_{i=1}^n E(X_i) < \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n E(C_i) E(N') = \sum_{i=1}^n E(C_i) = E(Y_n).$$

Ker velja zgornja neenačba, je $P\left(\sum_{i=1}^n \pi_i < E(Y_n)\right) = 1$ in sklepamo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n \pi_i < Y_n\right) = 1$. Iz navedenih dejstev sledi, da je limita verjetnosti bankrota $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = p \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n \pi_i < Y_n\right) = p$. Trditev je dokazana. $\square$

Vidimo, da v modelu z neodvisnimi škodnimi deleži katastrofnega tveganja ni mogoče poljubno razpršiti. Za model z determinističnimi škodnimi deleži velja enak sklep, ki je podan v naslednji trditvi.

Trditev 3.5: Slučajna spremenljivka X_i naj predstavlja velikost katastrofne škode i -tega zavarovanja za $i = 1, 2, \dots, n$ v opazovanem obdobju. X_i naj zadošča zahtevam modela z determinističnimi škodnimi deleži. Obstajajo naj končna pozitivna realna števila a, b, c in d , da je $0 < a \leq E(X_i) \leq b < \infty$ in $0 < c \leq \text{Var}(X_i) \leq d < \infty$. Za varnostni dodatek δ naj velja $\delta < \frac{1}{p} - 1$, kjer je p verjetnost, da se zgodi katastrofa v opazovanem obdobju. Ko število zavarovanj narašča čez vse meje, je verjetnost bankrota pozitivna in velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \geq ph > 0$, kjer je $h \in (0, 1]$.

Dokaz: V dokazu trditve 3.4 smo pokazali, da je $\psi_n = pP\left(Y_n > \sum_{i=1}^n \pi_i\right)$. V modelu z determinističnimi škodnimi deleži je škoda i -tega zavarovanja $X_i = b_i \rho_i(I)$, pri pogoju, da je $N' = 1$. Za izračun nevarnostne premije uporabimo načelo povprečja. Verjetnost bankrota je

$$\psi_n = pP\left(\sum_{i=1}^n b_i \rho_i(I) > (1 + \delta)p \sum_{i=1}^n b_i E(\rho_i(I))\right).$$

Ker smo za varnostni dodatek δ predpostavili, da je $\delta < \frac{1}{p} - 1$, je $(1 + \delta)p < 1$. Dogodek v zgornji enačbi je možen in verjetnost je strogo pozitivna za vsak n . Hkrati smo upoštevali, da je matematično upanje omejeno. Torej obstaja takšno pozitivno število h , kjer je $h \leq 1$, da je $P\left(\sum_{i=1}^n b_i \rho_i(I) > (1 + \delta)p \sum_{i=1}^n b_i E(\rho_i(I))\right) > h > 0$ za vsak n . Ko število zavarovanj naraste čez vse meje, za verjetnost bankrota velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \geq ph$. $\square$

Podobna trditev velja za model s slučajnimi škodnimi deleži.

Trditev 3.6: Slučajna spremenljivka X_i naj predstavlja velikost katastrofne škode i -tega zavarovanja za $i=1, 2, \dots, n$ v opazovanem obdobju. X_i naj zadošča zahtevam modela s slučajnimi škodnimi deleži. Obstajajo naj končna pozitivna realna števila a, b, c in d , da je $0 < a \leq E(X_i) \leq b < \infty$ in $0 < c \leq \text{Var}(X_i) \leq d < \infty$. Za varnostni dodatek δ naj velja $\delta < \frac{1}{p} - 1$, kjer je p verjetnost, da se zgodi katastrofa v opazovanem obdobju. Ko število zavarovanj narašča čez vse meje, je verjetnost bankrota enaka $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = ph > 0$, kjer je $h \in (0, 1]$.

Dokaz: Iz dokaza trditve 3.4 vemo, da je $\psi_n = pP\left(Y_n > \sum_{i=1}^n \pi_i\right)$. V modelu s slučajnimi škodnimi deleži je verjetnost $P(Y_n > y) = \int_{\Theta} P(Y_n > y | I = \vartheta) dF(\vartheta)$. Za Y_n uporabimo zapis z vsoto, za nevarnostno premijo načelo povprečja. Verjetnost bankrota je

$$\psi_n = p \int_{\Theta} P\left(\sum_{i=1}^n b_i U_i > \sum_{i=1}^n \pi_i | I = \vartheta\right) dF(\vartheta) = p \int_{\Theta} P\left(\sum_{i=1}^n b_i U_i > (1 + \delta)q \sum_{i=1}^n b_i E(U_i) | I = \vartheta\right) dF(\vartheta).$$

Za računanje verjetnosti bankrota v limitnem primeru zamenjamo vrstni red integriranja in limitiranja po izreku o dominirani konvergenci (Sarapa, 1992, str. 297). Ker je $(1 + \delta)p < 1$, lahko najdemo tak $\vartheta_0 \in \Theta$, da za vsak $\vartheta \geq \vartheta_0$ velja

$$P\left(\sum_{i=1}^n b_i E(U_i) > (1 + \delta)p \sum_{i=1}^n b_i E(U_i) | I = \vartheta\right).$$

Za $\vartheta \geq \vartheta_0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n b_i E(U_i) > (1 + \delta)p \sum_{i=1}^n b_i E(U_i) | I = \vartheta\right) = 0$. Za $\vartheta < \vartheta_0$ je prejšnja limita 1.

Torej iščemo limito omejenega zaporedja verjetnosti in po izreku o dominirani konvergenci lahko zamenjamo vrstni red integriranja in limitiranja. Velja

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} p \int_{\Theta} P\left(\sum_{i=1}^n b_i U_i > (1 + \delta)q \sum_{i=1}^n b_i E(U_i) | I = \vartheta\right) dF(\vartheta) = \\ &= p \int_{\Theta} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n b_i U_i > (1 + \delta)q \sum_{i=1}^n b_i E(U_i) | I = \vartheta\right) dF(\vartheta) = p(1 - F(\vartheta_0)) \end{aligned}$$

Za $h = 1 - F(\vartheta_0)$ dobimo iskano verjetnost bankrota. □

S sorazmerno preprostim modeli smo preučili, ali je katastrofno tveganje mogoče učinkovito razpršiti. Teoretično smo utemeljili, da katastrofnega tveganja ni mogoče poljubno razpršiti. Ker katastrofno tveganje ni zadovoljivo razpršljivo, so potrebne dodatne možnosti za obvladovanje tveganja. Tradicionalen način je pozavarovanje, novejši pristopi pa vključujejo financiranje

tveganja preko kapitalskega trga. Obseg pozavarovanja je omejen, kar je dodaten razlog za nastanek in razvoj novejših alternativ. Na začetku smo predstavili katastrofne instrumente, v nadaljevanju bomo preučili vrednotenje katastrofnih izvedenih instrumentov.

4 VREDNOTENJE KATASTROFNIH IZVEDENIH FINANČNIH INSTRUMENTOV

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da katastrofnega tveganja, vsaj če verjamemo modelom, ni mogoče poljubno razpršiti z večanjem števila zavarovanj. Za zmanjšanje tveganja so potrebni drugi pristopi kot je pozavarovanje ali financiranje katastrofnega tveganja preko kapitalskega trga. V prvem delu smo predstavili razloge za nastanek katastrofnih instrumentov. V tem poglavju se bomo posvetili vrednotenju katastrofnih instrumentov, ki mora biti ustrezno in zanesljivo.

Pri izvedenih instrumentih je vprašanje, kaj je prava oziroma poštena vrednost in kako jo določiti. Teoretično je diskontirana vrednost prihodnjih naključnih izplačil. Pri tem mora biti vrednost instrumenta v skladu z vrednostjo osnove, sicer obstaja arbitraža, to je možnost netveganih dobičkov. Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov je problem določanje vrednosti osnove. S katastrofnimi škodami, ki vplivajo na osnovo katastrofnega instrumenta, se ne trguje. Zato pri katastrofnih instrumentih praviloma govorimo o velikosti osnove in ne o vrednosti. Pri izvedenih instrumentih s finančno osnovo, torej z osnovo, s katero se trguje, uporabimo izraz vrednost osnove. Smatramo, da se z ovrednotenim sredstvom⁵⁹ trguje, če ni drugače navedeno.

Ekonomsko gledano se vrednost oblikuje na trgu na podlagi ponudbe in povpraševanja. Na ponudbo in povpraševanje vplivajo številni dejavniki, med drugim nenaklonjenost tveganju in likvidnost. Vse dejavnike je težko izmeriti in na podlagi tržnega dogajanja je ugotavljanje vrednosti zapleteno in zahtevno. V tem delu se s tržnimi mehanizmi ponudbe in povpraševanja ne ukvarjamo.

Za vrednotenje katastrofnih instrumentov uporabimo model. Model je seveda brez arbitraže, kar pomeni, da ni mogoče ustvariti dobička brez tveganja. Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov se opiramo na ugotovitve o vrednotenju izvedenih instrumentov s finančno osnovo. Ugotovitve smiselno prenesemo na vrednotenje katastrofnih instrumentov. Pri tem pa upoštevamo, da za osnovo katastrofnih instrumentov veljajo drugačne zakonitosti kot za finančno osnovo, omenili smo, da se z osnovo katastrofnih instrumentov ne trguje.

⁵⁹ S pojmom sredstvo razumemo finančni instrument z dano nakupno ceno in prihodnjim izplačilom oziroma nizom prihodnjih izplačil, ki so v različni meri odvisna od prihodnjega dogajanja. Primer je državna obveznica, kjer je izplačilo kuponov praviloma neodvisno od prihodnjih dogodkov. Za razliko od kuponov državnih obveznic so dividende delnic odvisne od prihodnjih dogodkov.

Vrednost katastrofnega instrumenta je odvisna od tehničnih lastnosti katastrofnega tveganja, kot sta pogostost škod in velikost posamezne škode (Holtan, 2004). V ta namen opredelimo porazdelitev agregatne katastrofne škode in tako posežemo na področje verjetnostnega računa in statistike. S porazdelitvijo opredelimo slučajne količine, kot so število katastrof, verjetnost nastanka katastrofe in pričakovana velikost škode. V matematične vode nas zanese tudi predpostavka, da ni arbitraže, saj ta predpostavka vodi do uporabe martingalov.

4.1 Proces tveganja

Zavarovalnice in pozavarovalnice so izpostavljene akumulaciji škod. To vsekakor velja za katastrofno zavarovanje, saj naravna nesreča povzroči množično škodo, velikost škode in čas nastanka pa sta nepredvidljiva. Pri modeliranju agregatne katastrofne škode v danem obdobju spremljamo pričakovano število katastrof in pričakovano velikost škode, ki jo povzroči posamezna katastrofa. V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da z individualnim pristopom ne moremo zadovoljivo opredeliti katastrofnega tveganja in zato za modeliranje katastrofnega tveganja uporabimo kolektivni pristop.

Vrednost izvedenega instrumenta se običajno izrazi z vrednostjo osnove, ki je naključna in ni vnaprej znana. Pri modeliranju vrednosti izvedenega instrumenta se upošteva naključno spreminjanje osnove. Izpostavimo, da se pri izvedenih instrumentih s finančno osnovo spremlja spreminjanje vrednosti osnove, saj se z osnovo trguje. Pri katastrofnih instrumentih to ni mogoče, ker se s katastrofnimi škodami in škodnimi količniki ne trguje. Ne glede na to pa se spreminjanje osnove katastrofnega instrumenta opiše s slučajnim procesom kot pri izvedenih instrumentih s finančno osnovo.

Vemo, da na vrednost delnice vplivajo različne informacije, kot so rezultati poslovanja družbe, načrti in ekonomski položaj (Vesennmayer, 2005). Informacije posledično vplivajo na vrednost izvedenega instrumenta, ki ima za osnovo delnico. Tok informacij vključimo v model vrednotenja in ga predstavimo s filtracijo v danem verjetnostnem prostoru. Podobno ravnamo pri katastrofnih instrumentih. Dan je verjetnostni prostor (Ω, Σ, P) , kjer je Ω množica vseh stanj, Σ σ -algebra vseh dogodkov in P verjetnost. Prostor je opremljen s filtracijo. V prostoru definiramo slučajne spremenljivke in slučajne procese, s katerimi modeliramo škodno dogajanje in vrednost izvedenih instrumentov. Najprej opredelimo proces tveganja za spremljanje agregatne katastrofne škode. V aktuarstvu je s procesom tveganja opisano škodno dogajanje.

Agregatna katastrofna škoda ob koncu opazovanega obdobja je slučajna spremenljivka S , kjer je

$$S = \sum_{k=1}^{N'} X_k$$
, N' je proces štetja slučajnega števila katastrof, X_k pa je slučajna velikost škode, ki jo povzroči k -ta katastrofa, pri tem je $S = 0$, če je $N' = 0$. Predpostavimo, da so slučajne

spremenljivke $X_1, X_2, \dots, X_{N'}$ neodvisne in enako porazdeljene s porazdelitveno funkcijo F_X ter neodvisne od procesa štetja. Porazdelitvena funkcija agregatne škode je

$$F_S(x) = P(S \leq x) = P\left(\sum_{k=1}^{N'} X_k \leq x\right) = \sum_{k=1}^{N'} P(N' = k) P\left(\sum_{j=1}^k X_j \leq x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N' = k) F_X^{*k}(x),$$

kjer je F_X^{*k} k -ta konvolucija. Zapis s konvolucijo je preprost, vendar je računanje konvolucije v splošnem zahtevno, zato uberemo drug pristop (Bowers et al., 1986, str. 33).

Vrednost katastrofnega instrumenta nas zanima ob poljubnem času do dospelosti. Ker agregatna katastrofna škoda vpliva na vrednost katastrofnega instrumenta, jo moramo poznati ob poljubnem času do dospelosti. Agregatno škodo ponazorimo s slučajnim procesom $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$, kjer je $T < \infty$ dospelost katastrofnega instrumenta. Slučajna spremenljivka $S(t)$ predstavlja vsoto vseh katastrofnih škod do vključno časa t . Zapišemo jo kot

$$S(t) = \sum_{k: T_k \leq t} X_k = \sum_{k=1}^{N'(t)} X_k, \quad (7)$$

kjer slučajna spremenljivka T_k predstavlja čas nastanka k -te katastrofe, slučajna spremenljivka X_k velikost škode k -te katastrofe in $N'(t)$ število katastrof, ki so se zgodile do vključno časa t . Dodatno predpostavimo, da so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \dots$ nenegativne, enako porazdeljene, neodvisne in da so neodvisne od procesa štetja N' . Pri teh predpostavkah je proces tveganja S homogen⁶⁰, torej so prirastki, v našem primeru škode, neodvisni in stacionarni (Mürmann, 2003, str. 6). Z enačbo (7) smo zapisali osnovno idejo za ugotavljanje agregatne katastrofne škode. Dogovorimo se, da sklicevanje na to enačbo vključuje predpostavke o neodvisnosti števila in velikosti škod ter da so velikosti škod med sabo neodvisne in enako porazdeljene. Dogovor velja tudi, če vse predpostavke niso izrecno navedene.

Predpostavili smo, da je proces tveganja $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ homogen. Zadržimo se pri ustreznosti predpostavk. Homogenost v času je na prvi pogled vprašljiva za orkane, ker se pojavljajo sezonsko od začetka junija do konca novembra. S četrletnim oziroma s polletnim zbiranjem podatkov se izognemo sezonskemu vplivu. Predpostavka o neodvisnosti katastrof je približek realnosti. Za potrese je ta predpostavka sprejemljiva, saj lahko potres s popotresnimi sunki obravnavamo kot en dogodek⁶¹. Ne glede na to obstajajo modeli za napovedovanje potresov, ki predpostavljajo, da je čas med dvema zaporednima potresoma pozitivno koreliran z jakostjo (Schmidli, 2003, str. 4). Zanesljivost teh modelov je vprašljiva in malo je verjetno, da se zgodi več kot en potres, ki sproži izplačilo iz naslova katastrofnih instrumentov. Za orkane je

⁶⁰ Proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki se imenuje Lévyjev proces (Embrechts, Klüppelberg & Mikosch, 1992, str. 92).

⁶¹ Škode, ki nastanejo zaradi potresov v obdobju 168 ur, torej tedna, se v pozavarovanju običajno obravnavajo kot en škodni dogodek. Za orkane je obdobje običajno 72 ur, torej tri dni.

znano, da so odvisni od podnebnih razmer. Za področje Združenih držav Amerike je dokazano, da so sprejemljive predpostavke o neodvisnosti procesa štetja in velikosti škod ter neodvisni in enaki porazdelitvi velikosti škod za orkane med leti 1956 in 1986 (Levi & Partrat, 1989, str. 255 – 257). Ne glede na pomisleke katastrofe obravnavamo kot neodvisne. Upoštevanje odvisnosti je pretrd oreh.

4.2 Black–Sholesov model ter osnovni izrek o vrednotenju

Na začetku poglavja smo napovedali, da pri vrednotenju katastrofnih instrumentov izhajamo iz vrednotenja izvedenih instrumentov s finančno osnovo. Za določanje vrednosti uporabimo model. Model je približek mogočega dejanskega stanja in želimo, da je odstopanje med dejanskim in modeliranim dogajanjem sprejemljivo. Vrednost izvedenega instrumenta je odvisna od osnove, spreminjanje osnove pa je naključno. Za spremljanje vrednosti osnove se uporabi slučajni proces, porazdelitev izhaja iz preteklih podatkov o spreminjanju vrednosti. Če govorimo o finančni osnovi, je vrednost osnove znana. Pri katastrofnih instrumentih pa vrednost osnove ni znana, saj se z osnovo ne trguje.

Prvi in najbolj razširjen model za vrednotenje opcij s finančno osnovo je Black–Sholesov model⁶². Model upošteva slučajno spreminjanje vrednosti osnove. Preučimo, ali lahko uporabimo pristop Black–Sholesovega modela za vrednotenje katastrofnih izvedenih instrumentov, natančneje ali lahko uporabimo Black–Sholesovo formulo.

4.2.1 Model vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov

Model vrednotenja izvedenih instrumentov upošteva naključno spreminjanje vrednosti osnove, na primer delnice, in dopušča spreminjanje vrednosti denarja v času, torej obrestno mero (Baxter & Rennie, 1996, str. 10). V Black–Sholesovem modelu opazujemo delnico in državno obveznico. Išče vrednost izvedenega instrumenta, ki ima za osnovo delnico. Vrednost instrumenta mora biti usklajena z vrednostjo osnove, sicer obstaja arbitraž, torej možnost za netvegane dobičke. Modeli vrednotenja pa arbitraže ne dopuščajo.

Modele vrednotenja delimo na diskretne in zvezne. Za diskretne modele je značilno, da trgovanje poteka le ob diskretnih časih. Pri zveznih modelih pa se trguje kadarkoli, iz trenutka v trenutek in vrednost osnove se spreminja zvezno, kar pomeni, da ni skokov (Baxter & Rennie, 1996, str. 45). Primer diskretnega modela je binomski, primer zveznega pa je Black–Sholesov model.

⁶² Leta 1997 sta Black in Sholes prejela Nobelovo nagrado za ekonomijo (Henderson, 2004, str. 175). K priljubljenosti modela prispeva dejstvo, da je potrebno oceniti le en vstopni parameter in sicer varianco (Gerber & Shiu, 1994, str. 114).

Vrednotenje poteka s pomočjo modela, ki je predstavljen z verjetnostnim prostorom (Ω, Σ, P) , kjer je Ω množica vseh stanj, Σ σ -algebra vseh dogodkov in P verjetnost. Za vrednotenje izvedenih instrumentov potrebujemo ogrodje informacij, ki predstavljajo pretekle in sedanje informacije o spreminjanju osnove instrumenta in o dogajanju na trgu (Embrechts, 1997, str. 19). Z matematičnega vidika je tok informacij predstavljen s filtracijo, to je z nepadajočo družino σ -algeber $\{F_t \in \Sigma; 0 \leq t \leq T\}$, kjer je T dospelost izvedenega instrumenta, F_t pa množica dogodkov, ki so znani ob času t . S filtracijo so opredeljene informacije, ki so dostopne vsakemu vlagatelju ob danem času (Mürmann, 2003, str. 5). Poljuben dogodek A pripada F_t , če vlagatelj na podlagi informacij ob času t ugotovi, ali se je dogodek A zgodil ali ne (Frey, 2000). Verjetnostni prostor in filtracija se ne spreminjata, to pomeni, da se ne ukvarjamo s problemom notranjih informacij in s hitrejšim dostopom do pomembnih informacij (Delbaen & Schachermayer, 1997, str. 50). Brez omejitve za splošnost predpostavimo, da je $F_T = \Sigma$, saj nas zanima dogajanje le do časa T . Predpostavimo še, da F_0 vsebuje vse množice z mero nič in njihove komplemente.

Spreminjanje vrednosti osnove izvedenega instrumenta opišemo s slučajnim procesom $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$. Z informacijami o preteklem razvoju in trenutnem stanju procesa Y razpolagajo vsi vlagatelji. To pomeni, da je proces Y prilagojen⁶³ filtraciji $\{F_t \in \Sigma; 0 \leq t \leq T\}$. S tem izključimo morebitne nesimetrične informacije, ki izhajajo iz moralnega hazarda in antiselekcije (Mürmann, 2003, str. 6). Zaradi enostavnosti privzamemo, da je filtracija na naraven način generirana s procesom Y . Torej je $F_t = \mathcal{G}(\mathcal{G}(Y(u); u \leq t), Z)$, kjer je Z množica dogodkov z mero 0.

Pri vrednotenju je ključna predpostavka, da je model brez arbitraže. Pogosto se za arbitražo uporablja izraz zastonj kosilo (Cairns, 2004, str. 90). Nedopustnost arbitraže, ohlapno povedano, onemogoča dobičke iz nič. Dobički so mogoči le ob prevzemanju tveganja, nikakor pa brez prevzema tveganja (Vesennmayer, 2005). V primeru arbitraže lahko vlagatelj ustvari dobiček, ne da uporabi lasten kapital in brez začetnih stroškov, skratka brez tveganja (Cuthbertson, 2004, str. 502).

Arbitraža obstaja, če so relativne vrednosti sredstev neusklajene. Primer arbitraže je nakup sredstva po nižji ceni in hkratna prodaja po višji ceni brez drugih stroškov. V praksi čistih priložnosti za arbitražo skorajda ni, saj je med prodajo in nakupom časovni zamik. Kadar na likvidnem trgu obstaja arbitraža, jo vlagatelji izkoristijo. Izkoriščajo jo tako dolgo, dokler se trg ne vrne v ravnovesje. S tem je arbitraža izločena oziroma odstranjena. Običajno so špekulacije kratkotrajne. Četudi v dejanskem svetu kratkoročno obstaja arbitraža, je modeli vrednotenja ne dopuščajo, ker vrednosti sredstev v primeru arbitraže niso usklajene (Frey, 2000). Če ni arbitraže, lahko določimo relativne vrednosti med posameznimi sredstvi in vrednost poljubnega sredstva izrazimo z izbrano enoto (Embrechts & Meister, 1995, str. 20). Dodamo formalen primer arbitraže.

⁶³ Pojem je pojasnjen v prilogi.

Primer 4.1: Model, predstavljen z verjetnostnim prostorom, je brez arbitraže, če ne obstaja naložbena strategija brez začetnih stroškov, ki ima nenegativne donose in pozitivne donose na množici s pozitivno mero (Battig & Jarrow, 1999, str. 1229). Naložbena strategija, kratko strategija, je predstavljena s slučajnim procesom, ki v vsakem trenutku poda sestavo naložbenega portfelja (Frey, 2000).

Vlagatelj izbira med n sredstvi, ki imajo vrednost 1 na začetku obdobja. Ob koncu obdobja je vrednost i -tega sredstva S_i . V naložbenem portfelju je x_i enot i -tega sredstva. Z $V(t)$ označimo vrednost portfelja ob času t . Torej je $V(0) = \sum_{i=1}^n x_i$ in $V(1) = \sum_{i=1}^n x_i S_i$. Arbitraža obstaja, če najdemo strategijo, ki izpolnjuje naslednje pogoje: $V(0) = 0$, $P(V(1) \geq 0) = 1$ in $P(V(1) > 0) > 0$, kjer P verjetnost. Prvi pogoj pomeni, da je vrednost začetnega portfelja 0, torej je za izkoriščanje arbitraže treba kupiti nekaj sredstev na kratko in preostala na dolgo. Drugi pogoj zagotavlja, da ne izgubimo začetnega vložka. S tretjim pogojem pa je zagotovljen dejanski dobiček. $\square$

Predpostavka, da ni arbitraže, omogoča vrednotenje in vpliva na vrednost izvedenega instrumenta. Opazujemo izveden instrument, katerega osnova je delnica. Vrednost delnice predstavimo s slučajnim procesom $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$. Iščemo vrednost evropske nakupne opcije z izvršilno vrednostjo K in dospelostjo T . Vrednost opcije $V(t)$ ob času t je odvisna od vrednosti osnove $Y(t)$ ob času t . Vrednost ob dospelosti T je $V(T) = \max(Y(T) - K, 0)$. Ob poljubnem času t mora veljati $V(t) \leq Y(t)$, sicer je ceneje kupiti delnico kot opcijo na delnico. Če je $V(t) > Y(t)$ ob nekem času t , lahko opcijo prodamo in kupimo delnico, preostanek $V(t) - Y(t)$ pa vložimo v banko. Ob dospelosti ponovno kupimo opcijo za $\max(Y(T) - K, 0)$, nakup financiramo s prodajo delnice za $Y(T)$. Ustvarimo dobiček v višini $Y(T) - \max(Y(T) - K, 0)$ in obresti iz banke. Dobiček je brez tveganja, torej obstaja arbitraža. Ker to ni dopustno, mora veljati $V(t) \leq Y(t)$. Vidimo, da izključitev arbitraže vpliva na vrednost instrumenta $V(t)$. V opazovanem primeru obstaja vrednost osnove, saj se z delnico trguje. Če se z osnovo ne trguje, potem vrednost osnove ni znana in vrednosti instrumenta ne moremo določiti glede na vrednost osnove. Tu slutimo ovire pri vrednotenju katastrofnih instrumentov.

Preden predstavimo Black–Sholesov model, definiramo izveden instrument v matematičnem jeziku. Vrednost izvedenega instrumenta je odvisna od končnega stanja ob dospelosti, saj se ukvarjamo le s takšnimi instrumenti.

Definicija 4.2: Proces $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ naj predstavlja vrednost oziroma spreminjanje osnove izvedenega instrumenta. Izveden instrument z osnovo Y in dospelostjo T je slučajna spremenljivka $H \in F_T$ oblike $H = h(Y(T))$, kjer je F_T element naravne filtracije, ki jo generira proces Y , in h realna funkcija. Funkcijo h imenujemo izplačilna funkcija.

Ob dospelosti imetnik instrumenta prejme naključno vrednost H (Björk, 1998, str. 78). Pogoj $H \in F_T$ pomeni, da je vrednost ob dospelosti znana oziroma jo je mogoče določiti. Za evropsko

nakupno opcijo z izvršilno vrednostjo K je izplačilna funkcija $h(x) = \max(x - K, 0)$. Obravnavamo tiste instrumente, katerih vrednost ob času t je odvisna od časa t in od vrednosti osnove ob času t ⁶⁴. Zahtevamo, da je $V(t) = f(Y(t), t)$, kjer je f funkcija. Če uspemo določiti funkcijo f , smo ovrednotili izveden instrument. Vrednost označimo z V ali s f .

4.2.2 Black–Sholesov model

Znameniti Black–Sholesov model je zvezni model za vrednotenje izvedenih instrumentov. Najprej predstavimo Black–Sholesovo formulo za določanje vrednosti evropske opcije. Nato preverimo, ali je formula uporabna za vrednotenje katastrofnih instrumentov.

Vzamemo preprost model, ki je sestavljen iz dveh sredstev: netveganega sredstva na primer državne obveznice in tveganega sredstva na primer delnice. Osnova izvedenega instrumenta je delnica in z osnovo se trguje. Proces $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ predstavlja vrednost delnice, kjer je T dospelost instrumenta. Izveden instrument je slučajna spremenljivka oblike $H = h(Y(T))$. Privzamemo, da je vrednost instrumenta odvisna od opazovanega časa in vrednosti osnove ob tem času.

Iščemo vrednost evropske nakupne⁶⁵ opcije $V(t) = f(Y(t), t)$ z dospelostjo T in izvršilno vrednostjo K . Naj bodo izpolnjene naslednje predpostavke (Henderson, 2004, str. 177,178):

- (a) model je brez arbitraže,
- (b) trgovanje z osnovo je zvezno in brez trenj, to pomeni, da ni transakcijskih stroškov, ni davkov, sredstva so poljubno deljiva, posojanje in prodaja na kratko ni omejeno, obrestne mere so enake za izposojena in posojena sredstva,
- (c) vrednost osnove je porazdeljena logaritemsko normalno⁶⁶ in prirastki logaritma so neodvisni,
- (d) netvegana obrestna mera je konstantna, ne spreminja se s časom in dospelostjo in
- (e) vlagatelji imajo raje več kot manj, vsi imajo enako oceno standardnega odklona σ ⁶⁷.

Pri danih predpostavkah je po Black–Sholesovi formuli vrednost ob času t , kjer je $0 \leq t \leq T$, pri netvegani obrestni meri r , vrednosti osnove p in standardnem odklonu vrednosti osnove σ , enaka

$$f(p, t) = pN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

⁶⁴ Ta zahteva ni vedno izpolnjena, na primer pri azijskih opcijah je vrednost osnove odvisna od povprečne pretekle vrednosti osnove.

⁶⁵ Podobna formula velja tudi za prodajno opcijo, navedena je v literaturi (Henderson, 2004, str. 178).

⁶⁶ Ker so vrednosti osnove logaritemsko normalno porazdeljene, so relativne spremembe vrednosti normalno porazdeljene (Finn & Lane, 1995, str. 29). Vrednost osnove je Brownovo gibanje, ki je definirano v prilogi.

⁶⁷ Vlagatelji nimajo vpliva na vrednost osnove in vsi vlagatelji razpolagajo z enakimi informacijami.

kjer je N standardna normalna porazdelitvena funkcija, d_1 in d_2 pa sta odvisna od navedenih parametrov, natančneje $d_1 = \frac{\ln \frac{P}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ (Henderson, 2004, str. 178).

Izpeljava formule je v literaturi (Björk, 1998, str. 88 - 90, Frey, 2000 in Gerber & Shiu, 1994, str. 107 - 108). Vidimo, da je vrednost nakupne opcije pozitivno korelirana z vrednostjo osnove, čeprav odvisnost ni linearna (Cuthbertson, 2004, str. 499). Vrednost opcije je odvisna od standardnega odklona vrednosti osnove in ne od povprečja (Holtan, 2004). To je posledica vrednotenja izvedenega instrumenta glede na vrednost osnove (Björk, 1998, str. 87).

Če hočemo uporabiti Black–Sholesovo formulo za vrednotenje katastrofnih instrumentov, preverimo ali so izpolnjene vse predpostavke. Vrednotenje katastrofnih instrumentov je podobno kot v Black–Sholesovem modelu, vendar obstajajo tudi razlike. Kot vsi modeli vrednotenja je tudi model vrednotenja katastrofnih instrumentov brez arbitraže. V obeh primerih je dano netvegano sredstvo oziroma netvegana oberstna mera in podan je proces, ki opisuje spreminjanje osnove instrumenta. V Black–Sholesovem modelu je s procesom $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ podano spreminjanje vrednosti osnove, s procesom $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ pa je podano spreminjanje velikosti osnove katastrofnega instrumenta. Z osnovo katastrofnega instrumenta, torej s katastrofno škodo oziroma s škodnim količnikom, se ne trguje, torej s procesom S ni podana vrednost osnove. V obeh primerih iščemo vrednost oblike $V(t) = f(Y(t), t)$ oziroma $V(t) = f(S(t), t)$.

Kljub podobnostim ne moremo uporabiti Black–Sholesove formule za vrednotenje katastrofnih instrumentov. Z osnovo katastrofnega instrumenta se ne trguje in vrednosti katastrofnega instrumenta ne moremo izraziti z vrednostjo osnove. Velikost osnove katastrofnega instrumenta se povečuje, medtem ko vrednost finančne osnove niha (Holtan, 2004). Pretekle izkušnje kažejo, da ima proces tveganja S skoke, ko se zgodi katastrofa. Skoki so veliki, saj katastrofne škode niso majhne. Velikost osnove se ne spreminja zvezno, torej ni porazdeljena logaritemsko normalno. Predpostavki (b) in (c) Black–Sholesove formule nista izpolnjeni, zato za vrednotenje katastrofnih instrumentov ne moremo uporabiti formule. Za vrednotenje bomo poiskali druge načine.

4.2.3 Osnovni izrek o vrednotenju

Vrednost katastrofnega instrumenta ni mogoče določiti z Black–Sholesovo formulo. Ključna prepreka je dejstvo, da se z osnovo katastrofnega instrumenta ne trguje in da se velikost osnove ne spreminja zvezno. Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov uberemo drugo pot, naslonimo se na osnovni izrek o vrednotenju. Obstaja več različic izreka, sem spadajo vsi izreki, ki govorijo o ekvivalenci med pogojem, da je model brez arbitraže, in obstoju ekvivalentne verjetnostne

mere v povezavi z martingali (Klein, 2005). Zamenjava mere s primerno ekvivalentno mero poenostavi vrednotenje. Predpostavka, da ni arbitraže, torej da ni mogoče kovati dobičkov iz nič, vodi do martingalov (Delbaen & Schachermayer, 1997, str. 49).

Model vrednotenja izvedenih instrumentov je brez arbitraže. Predstavljen je z verjetnostnim prostorom (Ω, Σ, P) , kjer je Ω množica vseh stanj, Σ σ -algebra vseh možnih dogodkov in P verjetnost. Verjetnostni prostor je opremljen s filtracijo $\{F_t \in \Sigma; 0 \leq t \leq T\}$. Po osnovnem izreku o vrednotenju lahko verjetnost P nadomestimo z ekvivalentno verjetnostjo Q , tako da je proces martingal glede na novo mero (Delbaen & Schachermayer, 1997, str. 49). Verjetnost Q se imenuje ekvivalentna martingalska mera. Pri ekvivalentni meri Q imajo enaki dogodki verjetnost nič kot pri prvotni meri in proces vrednosti je martingal, torej je ocena pričakovane prihodnje vrednosti enaka trenutni oziroma sedanji vrednosti (Gerber & Shiu, 1994, str. 101). Preden navedemo osnovni izrek o vrednotenju, definiramo ekvivalentno martingalsko mero.

Definicija 4.3: Naj bo (Ω, Σ, P) verjetnostni prostor. Mera $Q : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ je ekvivalentna martingalska mera glede na mero P , če velja:

- (a) meri P in Q sta ekvivalentni, torej je $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$ za $A \in \Sigma$,
- (b) proces diskontiranih vrednosti osnove je martingal.

Pogoj (a) zagotavlja, da je verjetnost dogodka pozitivna glede na meri P in Q . Pogoj (b) pa v diskretnem primeru zapišemo kot $E\left(\frac{1}{1+r}Y(t) \middle| F_{t-1}\right) = Y(t-1)$ za $t = 0, 1, 2, \dots$, kjer je $Y(t)$ vrednost sredstva ob času t , r netvegana obrestna mera in F_t element naravne filtracije (Frey, 2000).

Ekvivalentna martingalska mera je verjetnostna mera, vendar pri poimenovanju verjetnostna izpuščamo. Poimenovanje ni enotno, uporabljata se tudi izraza nevtralna mera in netvegana mera. V tem delu uporabimo poimenovanje iz definicije 4.3. Ekvivalentna martingalska mera je pomembna, ker njen obstoj zagotavlja, da je model vrednotenja brez arbitraže. Na ekvivalentni martingalski meri temelji pristop nevtralnega vrednotenja. Veljata naslednji trditvi.

Trditev 4.4: V modelu vrednotenja naj obstaja ekvivalentna martingalska mera. Potem je model brez arbitraže.

Dokaz: Pri dokazu se omejimo na končne diskretne modele. Trgovanje poteka ob časih $t = 0, 1, \dots, T$, kjer je T dospelost. Naj bo Φ naložbena strategija, $V_t(\Phi)$ vrednost portfelja pri izbrani strategiji ob času t in $\tilde{V}_t(\Phi)$ pripadajoča diskontirana vrednost. Za strategijo Φ naj velja, da po $t = 0$ ni več vložkov niti dvigov. To pomeni, da je vrednost strategije enaka vsoti začetnega vložka $V_0(\Phi)$ in dobička oziroma izgube (Frey, 2000). Naj bo $V_T(\Phi) > 0$, torej je tudi $\tilde{V}_T(\Phi) > 0$. Iz tega sledi $P(\tilde{V}_T(\Phi) > 0) > 0$. Naj bo Q ekvivalentna martingalska mera. Zaradi

ekvivalentnosti mer je $Q(\tilde{V}_T(\Phi) > 0) > 0$. Pričakovana diskontirana vrednost je $E_Q(\tilde{V}_T(\Phi)) > 0$ ⁶⁸. Ker je Q ekvivalentna martingalska mera, je proces diskontiranih vrednosti $\{\tilde{V}_t(\Phi); t = 0, 1, \dots, T\}$ martingal in $\tilde{V}_0(\Phi) = E_Q(V_T(\Phi)) > 0$. Ker je $\tilde{V}_0(\Phi) > 0$, je tudi $V_0(\Phi) > 0$. Pokazali smo, da je $V_0(\Phi) > 0$, če je $V_T(\Phi) > 0$. Na podoben način utemeljimo, da je $V_0(\Phi) < 0$, če je $V_T(\Phi) < 0$. Dobički so mogoči le pri začetnih vložkih, netveganih dobičkov ni in zato je model brez arbitraže. $\square$

Trditev 4.5: Naj bo model vrednotenja brez arbitraže. Potem obstaja vsaj ena ekvivalentna martingalska mera.

Dokaz trditve je obsežen in ni podan⁶⁹. Če združimo trditvi 4.4 in 4.5, dobimo del osnovnega izreka o vrednotenju. Prvi del izreka povezuje izključitev arbitraže in obstoj ekvivalentne martingalske mere. Drugi del govori o enoličnosti ekvivalente martingalske mere (Battig & Jarrow, 1999, str. 1219). Predpostavka, da ni arbitraže, ne zadošča za enolično vrednotenje, ker ekvivalentna mera ni ena sama, potrebna in zadostna lastnost modela je popolnost (Björk, 1998, str. 137).

V popolnih modelih je zagotovljen obstoj kombinacije sredstev, ki enakovredno nadomesti oziroma replicira opazovano sredstvo. Enakovrednost se nanaša na enakost donosov. Za dano sredstvo obstaja naložbena strategija, ki ima enake donose. Vrednost sredstva ob času t je $V(t) = V(\Phi(t)) = V_t(\Phi)$, kjer je Φ strategija, s pomočjo katere nadomestimo dano sredstvo (Frey, 2000, str. 5). Strategija Φ se imenuje replicirajoča strategija. Če je model popoln in brez arbitraže, lahko enolično določimo vrednost instrumenta kot vrednost portfelja, ki enakovredno nadomesti instrument (Cairns, 2004a, str. 314). Če pa model ni popoln, instrumenta ni mogoče enakovredno in enolično nadomestiti s portfeljem ostalih sredstev. V nepopolnem modelu obstaja več vrednosti instrumenta, ki ustrezajo pogoju o neobstoju arbitraže, zato vrednosti ni mogoče enolično določiti (Cairns, 2004a, str. 314). Nepopolnost povzročijo na primer transakcijski stroški, omejitve pri repliciranju denarnih tokov, omejitve obsega naložb, obdavčitev in premija za tveganje. Predstavitev popolnosti zaokrožimo s primerom.

Primer 4.6: Recimo, da imamo model z n različnimi sredstvi, kot so delnice, obveznice, opcije in katastrofne obveznice. Predpostavimo, da je v začetku opazovanega obdobja vrednost vsakega sredstva 1. V naložbenem portfelju imamo x_i enot i -tega sredstva. Ob koncu obdobja naj bo mogočih m vrednosti portfelja, ki jih označimo z $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Predpostavimo, da ima i -to sredstvo ob koncu obdobja vrednost S_i . Zaloga vrednosti slučajne spremenljivke S_i je $\{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}\}$ in $S_i = s_{ij}$ pri pogoju, da ima portfelj vrednost ω_j . Vrednost portfelja na začetku obdobja je $V(0) = \sum_{i=1}^n x_i$, na koncu pa $V(1) = \sum_{i=1}^n x_i s_{ij}$ pri pogoju ω_j .

⁶⁸ Z indeksom Q smo označili pričakovano vrednost glede na ekvivalentno martingalsko mero Q .

⁶⁹ Dokaz je v literaturi (Frey, 2000).

Recimo, da imamo dodatno sredstvo, njegova vrednost na koncu obdobja je S_{n+1} , kjer je $S_{n+1} = s_{n+1j}$ pri pogoju ω_j . Zanima nas, ali lahko oblikujemo portfelj začetnih sredstev, da je vrednost portfelja $V(1) = S_{n+1}$ pri poljubnem ω_j . Iščemo $x_1, x_2, \dots, x_m$, da velja

$$\begin{aligned} x_1 S_{11} + x_2 S_{21} + \dots + x_n S_{n1} &= S_{n+11} \\ x_1 S_{12} + x_2 S_{22} + \dots + x_n S_{n2} &= S_{n+12} \\ \vdots & \\ x_1 S_{1m} + x_2 S_{2m} + \dots + x_n S_{nm} &= S_{n+1m}. \end{aligned}$$

Če obstaja rešitev sistema linearnih enačb za vse vrednosti S_{n+1} , je model popoln. To pomeni, da je dodatno sredstvo odveč, njegovo vrednost na koncu opazovanega obdobja lahko izrazimo s portfeljem začetnih sredstev, natančneje z linearno kombinacijo. Če ni arbitraže, je začetna vrednost dodatnega sredstva $V(0) = \sum_{i=1}^n x_i$. Če pa sistem linearnih enačb nima rešitve, model ni popoln. Model ni popoln, če je $n < m$ ali če je $n \geq m$ in je hkrati rang matrike koeficientov sistema manjši od m . Model ni popoln, če je število sredstev manjše od števila mogočih vrednosti portfelja ob koncu obdobja. $\square$

Primer popolnega modela je Black–Sholesov model. Popolnost sledi iz predpostavke, da se z osnovo trguje in da se vrednost osnove spreminja zvezno. Torej za izveden instrument obstaja replicirajoča strategija (Mürmann, 2004, str. 234). Nekateri avtorji ne izpostavljajo popolnosti modela. Predpostavka, da je model popoln, je posredno zajeta v dejstvu, da se z osnovo ali z izvedenim instrumentom trguje ali da se izveden instrument lahko enakovredno nadomesti z obstoječimi sredstvi (Björk, 1998, str. 82, 102).

Obstoj ekvivalentne martingalske mere je zagotovljen, če ni arbitraže, enoličnost pa je povezana s popolnostjo modela (Frey, 2000). O tem govori naslednji izrek.

Izrek 4.7: Osnovni izrek o vrednotenju

- (a) Model vrednotenja je brez arbitraže, če in samo če obstaja ekvivalentna martingalska mera.
- (b) Model vrednotenja brez arbitraže je popoln, če in samo če obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska mera⁷⁰.

Pri tem mora biti slučajni proces vrednosti opazovanega sredstva prilagojen filtraciji⁷¹.

⁷⁰ Nekateri avtorji definirajo, da je model popoln, če in samo če obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska mera (Holtan, 2005).

⁷¹ Če je filtracija naravna glede na opazovani slučajni proces, je zahtevi o prilagojenosti zadoščeno (Mürmann, 2003, str. 8).

Oris dokaza je v literaturi (Vesenmayer, 2005). Po prvem delu osnovnega izreka o vrednotenju v modelu brez arbitraže obstaja ekvivalentna martingalska mera, če pa je model tudi popoln, obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska mera (Battig & Jarrow, 1999, str. 1220). Modeli brez arbitraže, ki se pogosto uporabljajo, so običajno popolni. Preverimo, ali je model vrednotenja katastrofnih instrumentov popoln. Denarnega toka katastrofnega instrumenta ni mogoče doseči s kombinacijo drugih sredstev, saj je izplačilo odvisno od nastanka katastrofe, ki je slučajen dogodek in neodvisen od dogajanja na kapitalskem trgu. To nakazuje, da model katastrofnih instrumentov ni popoln. Če je popoln, lahko katastrofno škodo repliciramo z ostalimi sredstvi (Delbaen, Schachermayer, Schweizer, 1994, str. 149). To dosežemo kvečjemu s pozavarovanjem. Če je na voljo dovolj pozavarovalnih pogodb, lahko katastrofni instrument repliciramo s pozavarovalnimi pogodbami. To vključuje pozavarovanje celotnega katastrofnega portfelja, kar v dejanskem svetu ni običajno (Schmidli, 2003, str. 6, 7). Predpostavka o popolnosti trga katastrofnih instrumentov je pogojno izpolnjena, saj je pozavarovanje omejeno.

Vrednost izvedenega instrumenta določimo s pomočjo ekvivalentne martingalske mere. Pristop se imenuje nevtrarno vrednotenje oziroma pravilo nevtralnega vrednotenja. Vrednotenje poteka glede na izbrano mero in običajno se dejanska mera zamenja z netvegano ekvivalentno torej martingalsko mero. Pri netvegani meri so pričakovani donosi enaki netvegane donosu. V dejanskem svetu je treba upoštevati vpliv tveganja na pričakovane donose. Za vrednotenje uporabimo verjetnostni prostor (Ω, Σ, P) s filtracijo $\{F_t \in \Sigma; 0 \leq t \leq T\}$, kjer je T dospelost. Osnova instrumenta je $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$. Izveden instrument je predstavljen s F_T -merljivo slučajno spremenljivko H , ki predstavlja naključna izplačila, odvisna od osnove. Spreminjanje vrednosti instrumenta opišemo s procesom $H = \{H(t); 0 \leq t \leq T\} = \{h(Y(t)); 0 \leq t \leq T\}$, kjer je h izplačilna funkcija (Embrechts, Frey, Furrer, 1999, str. 26). Pri nevtralnem vrednotenju iščemo vrednost s pomočjo ekvivalentne mere Q , pri kateri je proces $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ martingal, torej je Q ekvivalentna martingalska mera (Embrecht & Meister, 1995, str. 18). Pri ekvivalentni meri je proces $h(Y) = \{h(Y(t)); 0 \leq t \leq T\}$ martingal, saj je izplačilna funkcija h omejena.

Trditev 4.8: Naj bo dan model brez arbitraže in naj bo dan izveden instrument H , za katerega obstaja napovedljiva⁷² replicirajoča strategija Φ . Naj bo Q ekvivalentna martingalska mera. Vrednost instrumenta ob času $0 \leq t \leq T$ je enaka

$$V(t) = V_t(\Phi) = E_Q \left((1+r)^{-(T-t)} H | F_t \right), \quad (8)$$

kjer je r netvegana obrestna mera in F_t element filtracije. Posebej je $V(0) = V_0(\Phi) = E_Q \left((1+r)^{-T} H \right)$.

⁷² Definicija napovedljive strategije je v prilogi.

Dokaz: Ker strategija Φ replicira izveden instrument H , je $V_T(\Phi) = H$. Za diskontirane vrednosti velja $\tilde{V}_T(\Phi) = (1+r)^{-T} H$. Ker je strategija napovedljiva, je F_t -merljiva za poljuben t in zato je proces $\tilde{V}(\Phi) = \{\tilde{V}_t(\Phi); 0 \leq t \leq T\}$ martingal. Iz enakosti

$$E_Q((1+r)^{-T} H | F_t) = E_Q(\tilde{V}_T(\Phi) | F_t) = \tilde{V}_t(\Phi) = (1+r)^{-t} V_t(\Phi),$$

sledi $V_t(\Phi) = E_Q((1+r)^{-(T-t)} H | F_t)$ in trditev je dokazana. $\square$

V naslednjem primeru izračunamo vrednost evropske nakupne opcije glede na dejansko in ekvivalentno martingalsko mero. Izbor mere vpliva na vrednost.

Primer 4.9: Uporabimo oznake iz začetka podpoglavja. Osnova evropske nakupne opcije je delnica, vrednost delnice opišemo s slučajnim procesom $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$. Dospelost opcije T je $T = 1$, prag K je $K = 150$. Začetna vrednost osnove je enaka pragu. Vrednost osnove ob dospelosti je 180 z verjetnostjo p in 90 z verjetnostjo $1-p$. Naj bo $p = \frac{1}{2}$. Predpostavimo, da je diskontni faktor 1. Vrednost opcije glede na dejansko mero P je $V(T) = E(\max(Y(T) - K, 0))$ in je $V(1) = E(\max(Y(1) - 150, 0)) = 30p + 0(1-p) = 15$ pri $p = \frac{1}{2}$. Pri nevtralnem vrednotenju iščemo ekvivalentno martingalsko mero Q , da je $E_Q(Y(T)) = 150$. Torej je $180p_Q + 90(1-p_Q) = 150$ in dobimo $p_Q = \frac{2}{3}$. Pri tem je p_Q verjetnost, da se vrednost osnove poveča pri ekvivalentni martingalski meri Q , torej v netveganem prostoru. Vrednost opcije glede na novo mero je $V(1) = E_Q(\max(Y(1) - 150, 0)) = 30p_Q + 0(1-p_Q) = 20$. $\square$

Zamenjava mere P z ekvivalentno martingalsko mero Q je v zveznih modelih običajno podana s procesom gostote $Z = \{Z(t); t \geq 0\}$ (Raible, 2000, str. 2). Za vsak $t \geq 0$ je znana gostota $Z(t) = \frac{dQ_t}{dP_t}$, kjer sta P_t in Q_t zožitvi mer P in Q na F_t . Spremenljivka $Z(t)$ je Radón-Nikodým⁷³ odvod mere Q_t glede na mero P_t .

Predstavili smo vrednotenje izvedenih instrumentov z znano vrednostjo osnove. Navedli smo osnovni izrek o vrednotenju in pravilo nevtralnega vrednotenja. Govorili smo o zamenjavi mere z ekvivalentno martingalsko mero. Če je model brez arbitraže, obstaja ekvivalentna martingalska mera, enoličnost pa je pogojena s popolnostjo modela. V nadaljevanju pregledamo različne načine vrednotenja katastrofnih instrumentov.

⁷³ Naj bo (Ω, S, P) verjetnostni prostor in naj bosta verjetnostni meri P in Q ekvivalentni. Po Radón-Nikodýmovem izreku obstaja merljiva funkcija $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, da velja $Q(A) = \int_A g dP$ (Sarapa, 1992, str. 207). Funkcijo g označimo z

$\frac{dQ}{dP}$ in je Radón-Nikodým⁷³ odvod mere Q glede na P .

4.3 Načini vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Pri vrednotenju izvedenih instrumentov s finančno osnovo se preselimo v teoretično netvegano okolje z vpeljavo ekvivalentne martingalske mere. Če je model brez arbitraže in popoln, po osnovnem izreku o vrednotenju obstaja natanko ena ekvivalentna martingalska mera. Vrednost lahko določimo po pravilu nevtralnega vrednotenja, uporabimo lahko Black–Sholesovo formulo. Model katastrofnih instrumentov ni popoln oziroma je pogojno popoln. Predpostavka, da je model brez arbitraže, ne zadostuje, da enolično določimo vrednost katastrofnega instrumenta oziroma ekvivalentno martingalsko mero. V prejšnjem razdelku smo ovrgli možnost uporabe Black–Sholesove formule za vrednotenje katastrofnih instrumentov. Z osnovo katastrofnega instrumenta se ne trguje, sprememba velikosti osnove ni logaritemsko normalno porazdeljena in spreminjanje velikosti osnove ni zvezno, ampak ima skoke (Finn & Lane, 1995, str. 29). Za enoličnost vrednotenja katastrofnih instrumentov so potrebni drugi pristopi in dodatni pogoji (Embrechts, 1997, str. 13).

V tem podpoglavju orišemo teoretične načine vrednotenja katastrofnih izvedenih instrumentov. Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov se opremo na Poissonov proces, koristnost in Esscherjevo transformacijo. Pri tem je treba poznati spreminjanje osnove. Torej je treba modelirati katastrofno tveganje, agregatno katastrofno škodo in upoštevati odvisnosti. Zaenkrat ne obstaja ustrezen proces, ki dovolj dobro posnema proces katastrofnega tveganja, predstavljeni načini vrednotenja so zgolj približek dejanskega stanja.

4.3.1 Uporaba sestavljenega Poissonovega procesa za modeliranje procesa tveganja

Na začetku poglavja smo predstavili proces katastrofnega tveganja S z enačbo (7). Pri preučevanju je treba poznati porazdelitev števila katastrof in velikost katastrofne škode. Za modeliranje števila katastrof se uporablja Poissonova porazdelitev, brez Poissonovega procesa⁷⁴ pri modeliranju škodnega dogajanja pravzaprav ne gre (Embrechts & Meister, 1995, str. 16). Ta porazdelitev odraža naraščajoč proces tveganja in ustreza agregatni škodi, ki s časom ne pada (Holtan, 2004). Če ima proces konstantno jakost, govorimo o sestavljenem Poissonovem procesu⁷⁵. K razširjeni uporabi sestavljene Poissonove porazdelitve prispeva sorazmerno preprosto določanje porazdelitve agregatne škode neodvisnih tveganj.

Na verjetnostnem prostoru (Ω, Σ, P) opazujemo proces tveganja $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$, ki predstavlja agregatno katastrofno škodo. Slučajna spremenljivka $S(t)$ je podana z enačbo (7).

⁷⁴ Poissonov proces je opisan v prilogi.

⁷⁵ Lahko opazujemo proces, kjer je jakost pozitivna slučajna spremenljivka ali naraščajoč slučajni proces. Preučevanje takšnih procesov vključuje zapletena matematična orodja. Če jakost Poissonovega procesa ni konstantna, je potrebno oceniti dodatne parametre (Schmidli, 2003, str. 14). Ker je podatkov o katastrofah sorazmerno malo, je vprašljiva zanesljivost ocene dodatnih parametrov. V tem delu obravnavamo le sestavljen Poissonov proces s konstantno jakostjo.

Proces štetja $N' = \{N'(t); 0 \leq t \leq T\}$ je Poissonovo porazdeljen s parametrom λ . Torej je proces S sestavljen Poissonov proces z jakostjo λ , kar pomeni, da so časi med dvema zaporednima katastrofama neodvisni in eksponentno porazdeljeni s parametrom λ .

Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov se opremo na osnovni izrek o vrednotenju in dejansko mero P zamenjamo z ekvivalentno mero Q . Treba je poiskati Radón-Nikodýmov odvod $\frac{dP}{dQ}$.

Dodatno zahtevamo, da je proces tveganja S sestavljen Poissonov proces glede na ekvivalentno mero Q . Veljata naslednji ugotovitvi, ki ju navajamo brez dokaza.

Izrek 4.10: Naj bo (Ω, Σ, P) verjetnostni prostor. Proces tveganja $S = \left\{ S(t) = \sum_{k=0}^{N'(t)} X_k; 0 \leq t \leq T \right\}$ naj bo sestavljen Poissonov proces⁷⁶ glede na meri P in Q . Jakost procesa S glede na mero P naj bo λ_1 , glede na mero Q pa λ_2 . Potem sta ekvivalentni naslednji trditvi.

(a) Meri P in Q sta ekvivalentni.

(b) Obstaja merljiva funkcija $\gamma: R \rightarrow R$, da je $E(e^{\gamma(X_k)}) = 1$, $E(X_k^2 e^{\gamma(X_k)}) < \infty$ in

$$\frac{dP}{dQ}|_{F_t} = e^{\sum_{k=1}^{N'(t)} \gamma(X_k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{N'(t)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \text{ kjer je } 0 \leq t \leq T.$$

V literaturi zasledimo nekoliko spremenjeno obliko izreka 4.10, ki opredeljuje družino ekvivalentnih mer, ki ohranjajo Poissonov proces (Mürmann, 2003, str. 7).

Trditev 4.11: Naj bo (Ω, Σ, P) verjetnostni prostor. Proces tveganja $S = \left\{ S(t) = \sum_{k=0}^{N'(t)} X_k; 0 \leq t \leq T \right\}$ naj bo sestavljen Poissonov proces⁷⁷ z jakostjo λ . Proces S je sestavljen Poissonov proces glede na ekvivalentno mero Q , če obstaja nenegativna konstanta κ in nenegativna merljiva funkcija $v: R^+ \rightarrow R$, da je $E(v(X_k)) = 1$, Radón-Nikodýmov odvod je za poljuben $t \in [0, T]$ podan z

$$\xi_t = \frac{dP}{dQ} = E(\xi_T | F_t) = e^{\sum_{k=1}^{N'(t)} \ln(\kappa v(X_k)) + \lambda(1-\kappa)t}, \quad (9)$$

kjer je F_t element naravne filtracije.

⁷⁶ Za proces tveganja S veljajo zahteve enačbe (7), katastrofne škode so enako porazdeljene in neodvisne ter neodvisne od procesa štetja.

⁷⁷ Za proces tveganja S veljajo zahteve enačbe (7).

Z izrekom 4.10 in trditvijo 4.11 je podan pogoj, da pri zamenjavi mere proces tveganja S ostane Poissonov proces. Za spremenljivke izreka 4.10 in trditve 4.11 veljajo zveze $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \kappa\lambda$ in $\ln(v(x)) = \gamma(x)$. Izpolnjen je tudi pogoj $E(e^{\gamma(X_k)}) = E(e^{\ln v(X_k)}) = E(v(X_k)) = 1$. Torej izrek 4.10 in trditve 4.11 opredeljujeta enak pogoj za ohranjanje sestavljenega Poissonovega procesa pri zamenjavi mere.

Ekonomsko gledano je κ premija za škodno pogostost, $v(x)$ pa je premija, ki je odvisna od velikosti in porazdelitve posamezne škode (Mürmann, 2001, str. 10). Vsakemu paru $(\kappa, v(x))$ iz trditve 4.11 pripada natanko ena ekvivalentna mera Q . Pričakujemo, da različnim parom $(\kappa, v(x))$ pripadajo različne mere. Preslikava, ki paru $(\kappa, v(x))$ priredi mero Q , je injektivna. Injektivnost utemeljimo z naslednjim razmislekom.

Poissonov proces, podan z enačbo (7), ima glede na mero P jakost λ , gostota verjetnosti X_i je enaka dG . Pri ekvivalentni meri Q , podani z enačbo (9), je jakost procesa $\kappa\lambda$, gostota verjetnosti X_k je vdG . Naj paroma $(\kappa_1, v_1(x))$ in $(\kappa_2, v_2(x))$ pripadata meri Q_1 in Q_2 . Predpostavimo, da je $Q_1 = Q_2$. Jakost procesa glede na mero Q_1 je $E_{Q_1}(N'(1)) = \kappa_1\lambda$, glede na mero Q_2 je $E_{Q_2}(N'(1)) = \kappa_2\lambda$. Ker sta meri enaki, sta enaki pričakovani vrednosti in je $\kappa_1 = \kappa_2$. Za vsak dogodek A velja $Q_1(A) = Q_2(A)$. Upoštevamo, da se verjetnost izraža z integralom in dobimo $\int_A v_1(x)dG(x) = \int_A v_2(x)dG(x)$. Ker enakost velja za poljuben dogodek A , mora biti $v_1 = v_2$. Pokazali smo, da iz enakosti $Q_1 = Q_2$ sledi enakost parov $(\kappa_1, v_1(x)) = (\kappa_2, v_2(x))$ in zato je preslikava injektivna.

Proces katastrofnega tveganja modeliramo s Poissonovim procesom. Pričakujemo, da se pri zamenjavi mere z ekvivalentno ohrani Poissonov proces. Z izrekom 4.10 oziroma s trditvijo 4.11 je podan pogoj, da proces ostane Poissonov. Zamenjava mere ni nujno enolična in posledično je vprašljiva enoličnost vrednotenja katastrofnih instrumentov. Ne glede na to preučimo različne možnosti vrednotenja katastrofnih instrumentov.

4.3.2 Aktuarsko skladno vrednotenje katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Vzporedno s trgom katastrofnih instrumentov opazujemo pozavarovalni trg. Pri določenih pogojih lahko s pozavarovalnimi pogodbami repliciramo katastrofni instrument. Smatramo, da je s pozavarovalno pogodbo podana vrednost, glede na katero lahko ovrednotimo katastrofni instrument in pričakujemo enoličnost vrednotenja.

Proces tveganja $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ predstavlja agregatno katastrofno škodo in je podan z enačbo (7). Pozavarovalna premija je podana s procesom $p = \{p(t); 0 \leq t \leq T\}$, vrednost

katastrofnega instrumenta pa s procesom $V = \{V(t); 0 \leq t \leq T\}$. Predpostavimo, da procesa p in V temeljita na istem procesu tveganja S in da ni drugih slučajnih vplivov na p in V , kot so tveganje osnove ali moralni hazard (Mürmann, 2003, str. 7). Predpostavimo tudi, da je model vrednotenja brez arbitraže.

Pozavarovanje omogoča, da zavarovalnica ob času t del prihodnjih škod $S(T) - S(t)$ v obdobju $(t, T]$ odstopi pozavarovalnici za premijo $p(t)$. Proces p naj bo prilagojen naravni filtraciji $F = \{F_t; 0 \leq t \leq T\}$, ki jo generira proces S . Predpostavko o prilagojenosti potrebujemo zaradi osnovnega izreka o vrednotenju.

Poenostavljeno gledano je obveznost zavarovalnice ob času t vsota agregatne katastrofne škode $S(t)$ do časa t in pozavarovalne premije $p(t)$ za agregatno katastrofno škodo v obdobju od t do T . Obveznost je opisana s procesom $S + p = \{S(t) + p(t); 0 \leq t \leq T\}$. Ker je model brez arbitraže, po osnovnem izreku o vrednotenju obstaja ekvivalentna martingalska mera Q , pri kateri je proces $S + p$ martingal. Predpostavimo, da je pozavarovalni trg dovolj velik⁷⁸, da je mogoče pridobiti poljubno pozavarovalno kritje. Pri tej predpostavki je proces S glede na mero Q še vedno sestavljen Poissonov proces⁷⁹ (Mürmann, 2003, str. 8). Z zamenjavo mere proces S ostane Poissonov, spremenijo se parametri. Po trditvi 4.11 je mera Q podana z enačbo (9). Model je sicer brez arbitraže, vendar ni popoln in z zavarovalnega zornega kota ne moremo enolično določiti mere Q . Obstaja neskončno parov $(\kappa, v(x))$ iz enačbe (9), torej poljubno mnogo ekvivalentnih mer Q . Čeprav proces S pri zamenjavi mere ostane Poissonov, ne moremo govoriti o enoličnosti ekvivalentne martingalske mere. V nadaljevanju povežemo pozavarovalno premijo, katastrofno škodo in vrednost katastrofnega instrumenta.

Predpostavimo, da je proces p linearen in da je oblike $p(t) = p(Q)(T - t)$, kjer je $p(Q)$ pozavarovalna premija na časovno enoto. Za agregatno katastrofno škodo uporabimo enačbo (7). Proces tveganja S je stacionaren, prirastki, torej posamezne škode X_k so neodvisni. Tako dobimo $p(t) = E_Q(S(1))(T - t) = E_Q(N'(1))E_Q(X_1)(T - t) = \kappa \lambda E(v(X_1)X_1)(T - t)$.

Pomislimo še na katastrofne instrumente. Naj bo $h: R^+ \rightarrow R$ izplačilna funkcija katastrofnega instrumenta, torej je h merljiva. Proces V predstavlja vrednost katastrofnega instrumenta in je prilagojen naravni filtraciji, ki jo generira proces S . Ker je model brez arbitraže, je proces V po osnovnem izreku o vrednotenju martingal glede na ekvivalentno mero Q . Vrednost V je odvisna od velikosti osnove, torej katastrofne škode, in od opazovanega časa, odvisnost izrazimo s funkcijo f_Q . Za vsak $t \in [0, T]$ velja $V(t) = E_Q(h(S(T))|F_t) = E_Q(h(S(T))|S_t) = f_Q(S(t), t)$, kjer je f_Q merljiva funkcija. Iščemo proces $f_Q = \{f_Q(S(t), t); 0 \leq t \leq T\}$, ki je v skladu s pozavarovalno premijo, torej s procesom $p = \{p(t); 0 \leq t \leq T\}$. Zahteva je smiselna, saj procesa f_Q in p

⁷⁸ Z velikostjo pozavarovalnega trga je mišljen obseg pozavarovalnih pogodb glede na višino pozavarovalnega kritja. Na razpolago je dovolj pozavarovalnih pogodb glede na vrsto katastrofe in obseg kritja.

⁷⁹ Utemeljitev je v literaturi (Mürmann, 2003, str. 8).

temeljita na istem procesu tveganja S . Vrednost katastrofnega instrumenta mora biti usklajena s pozavarovalno premijo, sicer obstaja arbitraž. Kot sledi iz naslednjega izreka, proces f_Q določimo s Fourierjevo transformacijo.

Izrek 4.12: Naj bo verjetnostni prostor (Ω, Σ, P) model za vrednotenje brez arbitraže. Naj bo proces tveganja $S = \left\{ S(t) = \sum_{k=0}^{N'(t)} X_k; 0 \leq t \leq T \right\}$ sestavljen Poissonov proces z jakostjo λ .

Slučajna spremenljivka $S(t)$ je podana z enačbo (7), gostota verjetnosti posamezne škode X_k je dG . Pozavarovalna premija naj bo opisana s procesom $p = \{p(t); 0 \leq t \leq T\}$, kjer je $p(t) = E_Q(S(1))(T-t)$. Funkcija $h: R^+ \rightarrow R$ naj bo izplačilna funkcija katastrofnega instrumenta in funkcija $(h(x) - k)^2$ naj bo integrabilna, kjer je k realno število. Funkcija $v: R^+ \rightarrow R$ naj bo podana z enačbo (9), kjer je $E(v(X_k)) = 1$. Vrednost katastrofnega instrumenta $f_Q = \{f_Q(S(t), t); 0 \leq t \leq T\}$, ki je v skladu s pozavarovalno premijo p , je enaka

$$f_Q(S(t), t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(iuS(t) + \frac{E\left(\left(e^{iuX_1} \right) v(X_1) \right)}{E(X_1 v(X_1))} p_t \right)} \tilde{\varphi}(u) du + k, \quad (10)$$

kjer je $\tilde{\varphi}(x)$ inverzna Fourierjeva transformacija $h(x) - k$.

Pri dokazu upoštevamo, da je Fourierjeva transformacija dane integrabilne funkcije f (Sarapa, 1992, str. 660)

$$F(f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuz} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(uz) f(z) dz + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(uz) f(z) dz.$$

Fourierjeva transformacija je bijektivna preslikava. Če je funkcija f Fourierjeva transformacija funkcije g , torej je $F(f) = g$, potem je $f(u) = F^{-1}(g)(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuz} g(z) dz$ in pravimo, da je funkcija g inverzna Fourierjeva transformacija funkcije f in obratno (Mürmann, 2003, str. 11).

Dokaz: V dokazu zaradi preglednosti slučajne spremenljivke oblike $Y(t)$ označimo z Y_t . Najprej uporabimo Fourierjevo transformacijo. Ker je $h(x) - k = F(F^{-1}(h(x) - k))$, velja $h(x) - k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du$. Upoštevamo, da je vrednost katastrofnega instrumenta pogojno matematično upanje. Dobimo

$$\begin{aligned}
f_Q(S_t, t) &= E_Q(h(S_T)|S_t) = E_Q(h(S_T) - k|S_t) + k = \\
&= E_Q\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuS_T} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du | S_t\right) + k = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_Q(e^{iuS_T} | S_t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du + k = \int_{-\infty}^{\infty} E_Q(e^{iuS_T} | S_t) \check{\varphi}(u) du + k,
\end{aligned}$$

kjer je $\check{\varphi}(x)$ inverzna Fourierjeva transformacija $h(x) - k$. Pri računanju smo z uporabo Fubinijevega izreka dvojni integral zamenjali z dvakratnim (Sarapa, 1992, str. 330 – 332). Sestavljen Poissonov proces S je stacionaren in prirastki so neodvisni. Velja

$$E_Q(e^{iuS_T} | S_t) = e^{iuS_t} E_Q(e^{iu(S_T - S_t)} | S_t) = e^{iuS_t} E_Q(e^{iuS_{T-t}} | S_t) = e^{iuS_t} E_Q(e^{iuS_{T-t}}).$$

Drugi faktor dobljenega izraza je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke S_{T-t} glede na mero Q . Karakteristična funkcija glede na mero Q je (Mürmann, 2003, str. 12)

$$\chi_{S_{T-t} Q}(u) = E_Q(e^{iuS_{T-t}}) = e^{\lambda \kappa E((e^{iuX_1}) \nu(X_1))(T-t)}.$$

Pokazali smo, da pozavarovalno premijo zapišemo kot

$$p_t = \lambda \kappa E(\nu(X_1) X_1)(T-t). \quad (11)$$

Iz enačbe (11) izrazimo $\lambda \kappa(T-t)$, vstavimo v karakteristično funkcijo $\chi_{S_{T-t} Q}$ in dobimo

$$\chi_{S_{T-t} Q}(u) = e^{\frac{E((e^{iuX_1}) \nu(X_1))}{E(X_1 \nu(X_1))} p_t}. \text{ Iskano enakost (10) dobimo, če v } f_Q(S_t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_Q(e^{iuS_T} | S_t) \check{\varphi}(u) du + k$$

vstavimo $E_Q(e^{iuS_T} | S_t) = e^{iuS_t} \chi_{S_{T-t} Q}(u)$. □

V dokazu izreka 4.12 smo pokazali, da je $f_Q(S(t), t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuS(t)} \chi_{T-t}(u) \check{\varphi}(u) du + k$. Fourierjeva transformacija $\chi_{T-t}(u) \check{\varphi}(u)$ je $f_Q(S(t), t) - k$ in zapišemo lahko inverzno Fourierjevo transformacijo. Pri dani velikosti procesa tveganja $S(t) = s$ je

$$\chi_{T-t}(u) \check{\varphi}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} (f_Q(s, t) - k) ds. \text{ Zavedamo se, da velikost agregatne škode } s \text{ ni vnaprej}$$

znana. Vidimo, da je inverzna Fourierjeva transformacija produkt dveh faktorjev. En faktor je karakteristična funkcija, ki vsebuje slučajnost procesa tveganja in posledično pozavarovalne premije, drugi faktor pa je odvisen od izplačil katastrofnega instrumenta (Mürmann, 2003, str. 13).

Z uporabo izreka 4.12 vrednotimo katastrofne izvedene instrumente. Na primeru določimo vrednost nakupnega razpona.

Primer 4.13: Prag nakupnega razpona naj bo K_1 , zgornja meja pa K_2 , kjer je $K_2 > K_1 \geq 0$. Izplačilna funkcija nakupnega razpona $h(x)$ je

$$h(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq K_1 \\ x - K_1; & K_1 < x \leq K_2 = \min(\max(x - K_1, 0), K_2 - K_1), \\ K_2 - K_1; & x > K_2 \end{cases}$$

kjer je x velikost osnove. Pogoju o integrabilnosti iz izreka 4.12 zadostimo, če izberemo $k = K_2 - K_1$, saj je funkcija $h(x) - (K_2 - K_1)$ integrabilna. Inverzna Fourierjeva transformacija $h(x) - (K_2 - K_1)$ je

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (h(x) - (K_2 - K_1)) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{K_1} e^{-iux} (K_1 - K_2) dx + \int_{K_1}^{K_2} e^{-iux} (x - K_2) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi u^2} (e^{-iuK_2} - e^{-iuK_1} + iu(K_2 - K_1)). \end{aligned}$$

Če poznamo porazdelitev škod, torej karakteristično funkcijo χ_{T-t} , lahko ovrednotimo katastrofni instrument z uporabo izreka 4.12. Pri znani porazdelitvi glede na dejansko mero P določimo porazdelitev glede na ekvivalentno mero Q s pomočjo funkcije v .

Čeprav je vrednost katastrofnega instrumenta skladna s pozavarovalno premijo, vrednotenje ni enolično. Proces tveganja ima skoke in model ni popoln. Pri dodatni predpostavki, da so vse katastrofne škode enake, lahko določimo vrednost enolično. Zavedamo se, da ta predpostavka ni realna. Naj bo $X_k = \gamma$ za vsak k , kjer je $\gamma > 0$. Ker velja $E(v(X_k)) = 1$, je $v(x) = 1$. Po izreku 4.12 je

$$f_Q(S(t), t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(iuS(t) + \frac{e^{iu\gamma}}{\gamma} p(t)\right)} \tilde{\varphi}(u) du + (K_2 - K_1).$$

Iz enačbe (11) izrazimo κ in dobimo $\kappa = \frac{p(t)}{\lambda E(v(X_1)X_1)(T-t)} = \frac{p(t)}{\lambda \gamma (T-t)}$. Parameter κ je odvisen od pogostosti škod. Lahko ga obravnavamo kot premijo za pogostost katastrof, ki prispeva k vrednosti katastrofnega instrumenta. $\square$

Aktuarsko skladno vrednotenje katastrofnih instrumentov povezuje proces katastrofnega tveganja in pozavarovalno premijo. S Fourierjevo transformacijo smo zapisali formulo za vrednotenje katastrofnih instrumentov. V splošnem primeru nismo določili vrednosti katastrofnega instrumenta enolično, ker model ni popoln. Z vključitvijo pozavarovalne premije

smo premostili prepreko, da se z osnovo instrumenta ne trguje. Problem ostaja nezvezno spreminjanje velikosti osnove. Pri dodatni predpostavki o enakosti katastrofnih škod smo ovrednotili nakupni razpon. Zavedamo se, da je predpostavka o enakosti škod grob približek dejanskega stanja.

4.3.3 Vrednotenje katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov z uporabo funkcije koristnosti

Model vrednotenja katastrofnih instrumentov ni popoln in po osnovnem izreku o vrednotenju ni mogoče enolično določiti vrednosti s pomočjo ekvivalentne martingalske mere. V okviru teorije koristnosti je pri dodatnih predpostavkah zagotovljena enoličnost vrednotenja katastrofnih instrumentov (Embrechts & Meister, 1995, str. 20). Teorija koristnosti pojasnjuje odločanje oziroma izbiranje v tveganem okolju in podaja odnos vlagatelja do tveganja.

Vemo, da je zavarovalna premija višja od pričakovane škode. S koristnostjo utemeljimo, zakaj je premija višja. Pri odločanju ni pomembno samo premoženje ampak tudi koristnost. Označimo premoženje z g in pripadajočo koristnost z $u(g)$, kjer je u funkcija koristnosti. S funkcijo koristnosti primerjamo različna tveganja oziroma naložbe. Izberemo tisto z večjo pričakovano koristnostjo. Če primerjamo škodi X in Y , dejansko primerjamo pričakovani koristnosti $E(u(g - X))$ in $E(u(g - Y))$. Če je funkcija koristnosti u konkavna⁸⁰, upoštevajoč Jensenovo neenakost⁸¹, velja $E(u(g - X)) \leq u(E(g - X)) = u(g - E(X))$. Tveganju nenaklonjeni raje izberejo znano konstantno škodo $E(X)$ kot naključno škodo X . Zavarovalna premija p ustreza pogoju $E(u(g - X)) \leq u(g - p)$. Če nismo naklonjeni tveganju, sprejmemo premijo, ki je večja od pričakovane škode. Največja premija p' , ki smo jo pripravljeni sprejeti, zadošča enačbi $E(u(g - X)) = u(g - p')$. Po drugi strani se zavarovalnice obnašajo nevtrarno glede na tveganje, škoda in pričakovana škoda imata enako koristnost, torej je $E(u(g + E(X) - X)) = u(g)$.

Določanje funkcije koristnosti je zapleteno. V teoriji se uporabljajo naslednje poenostavljene funkcije koristnosti: linearna $u(g) = g$, kvadratna $u(g) = -(a - g)^2$, kjer je $g < a$, eksponentna $u(g) = -e^{-ag}$, kjer je $a > 0$, in logaritemska $u(g) = \log(a + g)$, kjer je $g > -a$. Linearna koristnost nas pripelje do nevarnostne premije. Pri eksponentni funkciji je nenaklonjenost tveganju konstantna, premoženje ne vpliva na višino zavarovalne premije.

Koristnost se uporablja tudi pri izbiri prenosa tveganja. Zavarovalnica izbere tisti način prenosa, ki prinaša največjo koristnost. Prenos naj obsega pozavarovanje in katastrofne instrumente, ostale načine zanemarimo. Kombinacijo pozavarovanja in katastrofnih instrumentov imenujemo

⁸⁰ Funkcija f je konkavna, če je $f(ax + by) \geq af(x) + bf(y)$, kjer je $a, b \in [0, 1]$ in $a + b = 1$ (Sarapa, 1992, str. 348).

⁸¹ Za konkavno funkcijo f in slučajno spremenljivko X s končnim matematičnim upanjem po Jensenovi neenakosti velja $E(f(X)) \leq f(E(X))$ (Sarapa, 1992, str. 348).

pozavarovalna strategija. S pozavarovalno strategijo je za poljuben čas t podan delež pozavarovanja $\beta(t)$ in delež katastrofnih instrumentov $1-\beta(t)$. Proces označimo z $\beta = \{\beta(t); 0 \leq t \leq T\}$, kjer je $[0, T]$ opazovano obdobje in $0 \leq \beta(t) \leq 1$. Pozavarovalno premijo predstavimo s procesom $p = \{p(t); 0 \leq t \leq T\}$, škodo pa s procesom $S = \{S(t); 0 \leq t \leq T\}$. Presežek premije nad škodo označimo z $Z(t) = p(t) - S(t)$, kjer je $0 \leq t \leq T$.

Predpostavimo, da obstaja likviden pozavarovalni trg, to pomeni, da lahko zavarovalnica ob času t pozavaruje poljuben del portfelja. Ker zavarovalnica izbere pozavarovalno strategijo z največjo koristnostjo, lahko določimo pozavarovalno strategijo in posredno vrednost katastrofnega instrumenta. Označimo vrednost katastrofnega instrumenta ob času t z $V(t)$. Izbrana pozavarovalna strategija ima največjo koristnost, to pomeni, da sprememba strategije, torej deleža katastrofnih instrumentov, zmanjša koristnost (Christensen, 2000a, str. 8). Matematično formulirano ima funkcija

$$U(\delta) = E(u(g_T(\beta)) + \delta(h(T) - V(t)) / F_t)$$

ekstrem pri $\delta = 0$. Pri tem je u funkcija koristnosti zavarovalnice, $g_T(\beta)$ premoženje zavarovalnice ob času T pri pozavarovalni strategiji β in h izplačilna funkcija katastrofnega instrumenta. Brez škode za splošnost predpostavimo⁸², da je diskontni faktor enak 1. Ker je $U'(0) = 0$, velja $E(u'(g_T(\beta))(h(T) - V(t)) / F_t) = 0$. Iskana vrednost je

$$V(t) = \frac{E(u'(g_T(\beta))h(T) | F_t)}{E(u'(g_T(\beta)) | F_t)}. \quad (12)$$

Oglejmo si primer vrednotenja katastrofnega instrumenta, če je znana funkcija koristnosti. Predpostavimo, da je nenaklonjenost tveganju konstantna. V tem primeru je ustrezna izbira eksponentna funkcija koristnosti (Embrechts, 1997, str. 3).

Primer 4.14: Opazujemo zavarovalnico, ki ne uporablja pozavarovanja. Ob poljubnem času t se odloči, da do dospetja katastrofnega instrumenta T ni pozavarovanja. Funkcija koristnosti naj bo $u(z) = 1 - e^{-az}$, kjer je $a > 0$ nenaklonjenost tveganju, če ni pozavarovanja, in z razlika premij in škod. Kot v dokazu izreka 4.12 uporabimo za slučajne spremenljivke oblike $Y(t)$ oznako Y_t . V skladu z enačbo (12) je vrednost katastrofnega instrumenta

$$V_t = \frac{E(e^{-a(Z_T - Z_t)} h(T) | F_t)}{E(e^{-a(Z_T - Z_t)} | F_t)} = \frac{E(e^{-a(p_T - p_t - (S_T - S_t))} h(T) | F_t)}{E(e^{-a(p_T - p_t - (S_T - S_t))} | F_t)}.$$

Premija ni odvisna od škodnega dogajanja, torej je proces p determinističen. Upoštevamo, da je slučajna spremenljivka S_t F_t -merljiva. Po krajšanju dobimo

⁸² Ostale predpostavke so natančneje opisane v literaturi (Embrechts & Meister, 1995, str. 23).

$$V_t = \frac{E(e^{aS_T} h(T) | F_t)}{E(e^{aS_T} | F_t)}. \quad (13)$$

Naj bodo škode S_T osnova katastrofnega instrumenta. Če je znana izplačilna funkcija in škodna porazdelitev, lahko določimo vrednost katastrofnega instrumenta V_t ob poljubnem času t . $\square$

Pokazali smo, kako vrednotimo katastrofni instrument z uporabo funkcije koristnosti. Izhajali smo iz spremembe pozavarovalne strategije. Uporabili smo predpostavko, da obstaja likviden pozavarovalni trg, čeprav pozavarovalni trg spada med omejeno likvidne. Zavedamo se, da je to le teoretično ogrožje, ki temelji na poznavanju funkcije koristnosti in procesa tveganja. Določanja funkcije koristnosti in porazdelitve katastrofne škode je zahtevno, vseeno pa bomo v nadaljevanju z numeričnim primerom ovrednotili katastrofni instrument z uporabo enačbe (13).

4.3.4 Modeliranje osnove katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

V prejšnjih razdelkih je bila osnova katastrofnega instrumenta agregatna katastrofna škoda. Osnova je lahko tudi škodni količnik kot na primer PCS kazalec. Do sedaj smo privzeli, da je število škod Poissonovo porazdeljeno, s porazdelitvijo posamezne škode se nismo ukvarjali. Za spremljanje škod potrebujemo porazdelitev, ki se asimptotično dovolj počasi približuje 0, saj so katastrofe sorazmerno redke, a ko se pripetijo, je škoda zelo velika. Torej iščemo porazdelitev z izrazitim⁸³ repom. Porazdelitve z izrazitim repom so naraven način za modeliranje ekstremnih dogodkov, ki so povezani z velikimi vrednostmi in niso stalni (Mikosch, 2004, str. 7). Z njimi se spremljajo redki, a nevarni dogodki, kot so zlomi na finančnih trgih, ekstremni vremenski in katastrofni dogodki (Mikosch, 2004, str. 1).

Definicija 4.15: Naj bo F porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X . Za porazdelitev z izrazitim repom s parametrom α , kjer je $0 < \alpha < 2$, velja $P(X > x) = 1 - F(X \leq x) \rightarrow x^{-\alpha}$, ko gre $x \rightarrow \infty$. Pravimo tudi, da ima slučajna spremenljivka X izrazit rep.

Parameter α vpliva na izrazitost repa, čim manjši je, tem bolj je rep izrazit. Bolj izrazit rep pomeni, da se porazdelitev asimptotično počasneje približuje 0. Če ima slučajna spremenljivka X izrazit rep, verjetnosti $P(X > x) = 1 - F(X \leq x)$ padajo počasneje kot pri eksponentni porazdelitvi z osnovo manjšo od 1 (Mikosch, 2004, str. 2). Iz definicije 4.15 sledi, da porazdelitev za končne vrednosti x ne vpliva na izrazitost repa. Primeri porazdelitev z izrazitim repom skupaj z gostoto verjetnosti so (Embrechts, Klüppelberg, Mikosch, 1999, str. 35 in Komelj, 2004, str. 35, 36, 38):

⁸³ Uporabimo poimenovanje izrazit rep, druge možnosti so težek ali debel rep, morda tudi širok rep. V literaturi zasledimo tudi porazdelitve z dolgim repom. Pojma pa nista enakovredna, saj za porazdelitve z dolgimi repi velja, da preteče kar nekaj časa med nastankom škodnega dogodka in izplačilom zavarovalnine.

- lognormalna: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$, kjer je $\mu \in R$ in $\sigma > 0$,
- Paretova: $f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$, kjer sta $\alpha, \lambda > 0$,
- Burrova: $f(x) = \frac{\alpha \tau \lambda^\alpha x^{\tau-1}}{(\lambda + x^\tau)^{\alpha+1}}$, kjer so $\alpha, \lambda, \tau > 0$,
- Weibullova: $f(x) = c \tau x^{\tau-1} e^{-cx^\tau}$, kjer je $c > 0$ in $0 < \tau < 1$,
- loggama: $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-1} \ln^{\beta-1} x$, kjer sta $\alpha, \beta > 0$.

Za našete porazdelitve je značilno, da se podatkom o ekstremnih dogodkih prilagajo asimptotično, torej za velike vrednosti in ne v okolici povprečja (Mikosch, 2004, str. 3). Neupoštevanje izrazitega repa vodi v podcenjevanje posledic ekstremnih dogodkov in zato imajo našete porazdelitve pomembno vlogo pri modeliranju. Poznamo tudi porazdelitve z neizrazitim repom, kot so na primer eksponentna, normalna in gama porazdelitev.

Porazdelitev z izrazitim repom običajno ni mogoče opisati z momenti. Obstoj momentov je odvisen od parametrov porazdelitve. Tako na primer za Burrovo porazdelitev obstaja j -ti začetni moment le za $j < \alpha\tau$, pogoj za obstoj j -tega začetnega momenta Paretove porazdelitve je $j < \alpha$ (Komelj, 2004, str. 36, 38).

Lotimo se modeliranja osnove katastrofnega instrumenta. Za osnovo iščemo primerno porazdelitev z izrazitim repom. Ozrimo se na finančno področje. Naj bo delnica osnova opcije. Vemo, da je vrednost delnice $V(t)$ ob času t enaka $V(t) = V(0)e^{Y(t)}$, kjer je $V(0)$ začetna vrednost delnice in $Y = \{Y(t); 0 \leq t \leq T\}$ slučajni proces, ki vpliva na vrednost delnice (Gerber & Shiu, 1994, str. 102). Podobno ravnamo pri osnovi katastrofnega instrumenta. Na velikost osnove katastrofnega instrumenta vpliva katastrofna škoda, namesto procesa Y uporabimo proces S . Naj bo osnova katastrofnega instrumenta oblike $L(t) = L(0)e^{S(t)}$, kjer je $S(t) = \sum_{k=1}^{N'(t)} X_k$ agregatna škoda, podana z enačbo (7).

Izbrana oblika osnove $L(t) = L(0)e^{S(t)}$ ustreza zahtevi o izrazitem repu. Slučajna spremenljivka $L(t) - L(0)$ je namreč Paretovo porazdeljena s parametroma α in $L(0)$, če je $S(t)$ eksponentno porazdeljena s parametrom α . Iščemo porazdelitev $L(t) - L(0) = L(0)(e^{S(t)} - 1) = g(S(t))$, kjer je $g(x) = L(0)(e^x - 1)$. Upoštevamo, da je gostota eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke $S(t)$ s parametrom α enaka

$$f_{S(t)}(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}; & x > 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$

Gostota transformirane slučajne spremenljivke $Y = g(X)$ je $f_Y(x) = f_X(g^{-1}(x)) \cdot \left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right|$, kjer je f_X gostota slučajne spremenljivke X (Sarapa, 1992, str. 363). V našem primeru je $f_{L(0)(e^{S(t)}-1)}(x) = \frac{\alpha L^\alpha(0)}{(x + L(0))^{\alpha+1}}$. Dobljen izraz je gostota Paretove porazdelitve s parametroma α in $L(0)$. Paretova porazdelitev ima izrazit rep. Če ima porazdelitev škod $S(t)$ bolj izrazit rep kot eksponentna porazdelitev, ima tudi porazdelitev $L(t) - L(0)$ bolj izrazit rep kot v navedenem primeru.

Postavili smo model za spremljanje velikosti škodnega kazalca, ki je osnova katastrofnega instrumenta. Izhajali smo iz finančnega modela. Porazdelitev katastrofne škode smo izbrali tako, da ima osnova porazdelitev z izrazitim repom. Slabost tega pristopa je, da je $L(0) > 0$, zato je model uporaben le kot groba ocena (Christensen, 2000, str. 4). Naslednji korak pri vrednotenju je določanje ekvivalentne martingalske mere. Mero želimo določiti enolično, saj lahko le tako enolično ovrednotimo katastrofni instrument. Pri iskanju ekvivalentne martingalske mere uporabimo Esscherjevo transformacijo, definirano v prilogi.

4.3.5 Primer vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov z uporabo Esscherjeve transformacije

Pri vrednotenju ima ključno vlogo določanje ekvivalentne martingalske mere (Yang, 2004, str. 619). Pokazali smo, kako določimo mero, da je opazovani proces tveganja S pri ekvivalentni meri sestavljen Poissonov in kako, če poznamo funkcijo koristnosti. Vrednost instrumenta lahko izračunamo kot pričakovano vrednost glede na ekvivalentno martingalsko mero, dobljeno z Esscherjevo transformacijo. Če proces preoblikujemo z Esscherjevo transformacijo, opazujemo proces glede na novo transformirano verjetnost in ne glede na dejansko verjetnost. Esscherjeva transformacija opazovanega procesa z danim parametrom določa ekvivalentno mero (Gerber & Shiu, 1994, str. 135). To je posledica dejstva, da v transformaciji nastopa eksponentna funkcija, ki je pozitivna.

Če je P dejanska verjetnost, q parameter Esscherjeve transformacije in Q pripadajoča ekvivalentna mera, je Radon - Nikodymov odvod $\frac{dQ}{dP}|_{F_t} = \frac{e^{qS(t)}}{M(q, t)}$ (Christensen, 2000a, str. 7).

Parameter izberemo tako, da je mera ekvivalentna martingalska mera, torej je proces diskontiranih vrednosti martingal glede na mero, ki ustreza Esscherjevi transformaciji. Pri določanju parametra q predpostavimo, da se trguje s kazalcem $\frac{L(t)}{P(t)}$, kjer je $L(t)$ velikost osnove

katastrofnega instrumenta ob času t in $P(t)$ premija za obdobje do t (Christensen, 2000a, str. 4). Že v prvem delu smo opozorili, da je obseg trgovanja s katastrofnimi instrumenti omejen. Pričakujemo, da bo povečanje ponudbe katastrofnih instrumentov približalo predpostavko o

trgovanju in dejansko stanje (Aase, 1999, str. 71). Dodajmo, da predpostavka o trgovanju s kazalcem $\frac{L(t)}{P(t)}$ ni nujna. Mero Q lahko določimo iz enačbe $e^{-rt} E_Q(e^{S(t)}) = e^{qt}$.

Za razliko od osnove katastrofnega instrumenta premije niso odvisne od slučajnih vplivov, ampak so deterministične. Po načelu povprečja osnove je premija $P(t) = E(L(t)) = L(0)E(e^{S(t)}) = L(0)e^{\frac{1}{\alpha}\lambda t}$. Pri tem je agregatna škoda $S(t)$, podana z enačbo (7), sestavljeno Poissonovo porazdeljena in X_k eksponentno porazdeljena s parametrom α . To nas napelje, da premijo zapišemo kot $P(t) = L(0)e^{\beta t}$, kjer je β pozitivno realno število.

Vrednost količnika $\frac{L(t)}{P(t)}$ ob času $t = 0$ je enaka $\frac{L(0)}{P(0)} = 1$. Proces $\frac{L}{P} = \left\{ \frac{L(t)}{P(t)}; 0 \leq t \leq T \right\}$ je pri ustrezni izbiri parametra Esscherjeve transformacije martingal in zato velja $E_Q\left(e^{-rt} \frac{L(t)}{P(t)}\right) = 1$, kjer je r netvegana obrestna mera. Z upoštevanjem zapisa za $L(t)$ in $P(t)$ dobimo $E_Q(e^{S(t)}) = e^{(r+\beta)t}$. Levo stran enačbe preoblikujemo v $E_Q(e^{S(t)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x, t; q) dx = M(1, t; q)$. Za vsak t velja enačba $M(1, t; q) = e^{(r+\beta)t}$. Ker je $M(1, t; q) = M^t(1, 1; q)$, je iskan parameter q rešitev enačbe

$$M(1, 1, q) = e^{r+\beta}. \quad (14)$$

Iščemo Esscherjevo transformacijo sestavljenega Poissonovega procesa $S(t)$. Proces je podan z enačbo (7), število škod $N'(t)$ je Poissonovo porazdeljeno s parametrom λt , velikost škode X_k pa eksponentno s parametrom α . Parameter Esscherjeve transformacije q določimo tako, da ustreza enačbi (14).

Vemo, da je momentno rodovna funkcija sestavljene Poissonove porazdelitve enaka

$$M_{S(t)}(x) = M(x, t) = e^{\lambda t(M_{X_i}(x)-1)} = e^{\lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}-1\right)}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je momentna rodovna funkcija eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke $M_{X_i}(x) = \frac{\alpha}{\alpha-x}$ in obstaja za $x < \alpha$. Poiščemo še momentno rodovno funkcijo Esscherjeve transformacije s parametrom q spremenljivke $S(t)$. V skladu z enačbo (A11) dobimo

$$M(x, t; q) = \frac{M(x+q, t)}{M(x, t)} = \frac{e^{\lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha-x-q}-1\right)}}{e^{\lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha-x}-1\right)}} = e^{\lambda \frac{\alpha}{\alpha-x} t \left(\frac{\alpha-x}{\alpha-x-q}-1\right)}, \quad (15)$$

kjer enakost velja za $q < \alpha$. Vidimo, da smo dobili momentno rodovno funkcijo sestavljene Poissonove porazdelitve. Označimo z indeksom q porazdelitev, ki jo dobimo z Esscherjevo transformacijo s parametrom q dane porazdelitve. Število škod transformirane porazdelitve $N'_q(t)$ je Poissonovo porazdeljeno s parametrom $\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q}$, velikost škode transformirane porazdelitve X_{kq} pa eksponentno s parametrom $\alpha - q$.

Naslednji korak je izračun parametra Esscherjeve transformacije q , ki določa ekvivalentno martingalsko mero. V skladu z enačbo (14), upoštevajoč enačbo (15), velja

$$e^{\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q} t \left(\frac{\alpha-q}{\alpha-q-1} - 1 \right)} = e^{r+\beta}.$$

Enačbo preoblikujemo v kvadratno enačbo $q^2 - (2\alpha - 1)q + \alpha \left(\alpha - 1 - \frac{\lambda}{r+\beta} \right) = 0$. Diskriminanta enačbe je $1 + 4 \frac{\lambda \alpha}{r+\beta}$ in je pozitivna, saj so vsi parametri pozitivni. Ker je diskriminanta pozitivna, ima kvadratna enačba dve rešitvi $q_{1,2} = \alpha - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda \alpha}{r+\beta}}$. Zaradi omejitve $q < \alpha$, je iskana rešitev $q = \alpha - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda \alpha}{r+\beta}}$. Določili smo parameter Esscherjeve transformacije, ki določa ekvivalentno martingalsko mero.

Iščemo verjetnost, da je agregatna katastrofna škoda pod določeno mejo glede na ekvivalentno mero Q , torej $P_Q(S(t) \leq s)$. Velja

$$P_Q(S(t) \leq s) = P(S_q(t) \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N'_q(t) = n) P\left(\sum_{i=0}^n X_{iq} \leq s\right).$$

Upoštevamo, da je vsota n neodvisnih eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljivk s parametrom $\alpha - q$ gama porazdeljena s parametroma n in $\frac{1}{\alpha-q}$ (Sarapa, 1992, str. 265). Vemo, da je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke gama s parametroma a in b enaka $\frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}$ za $x > 0$, sicer je 0 (Sarapa, 1992, str. 265). Iskana verjetnost je

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(N'_q(t) = n) \int_0^s (\alpha - q)^{\frac{1}{\Gamma(n)}} e^{-(\alpha-q)x} x^{n-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q} t\right)^n}{n!} e^{-\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q} t} \int_0^s (\alpha - q)^{\frac{1}{\Gamma(n)}} e^{-(\alpha-q)x} x^{n-1} dx.$$

Sedaj se lotimo določanja vrednosti katastrofnega instrumenta. Obravnavamo evropsko katastrofno opcijo, natančneje nakupni razpon z dospelostjo T . Osnova naj bo oblike $L(t) = L(0)e^{S(t)}$, kjer je $t \in [0, T]$, T dospelost in $S(t)$ agregatna katastrofna škoda ob času t . Vemo, da so razponi izvršljivi nad določenim pragom a le do zgornje meje. Označimo prag s K_1 in zgornjo mejo s K_2 , kjer je $K_2 > K_1 \geq 0$. Če velikost osnove doseže ali preseže K_1 in hkrati ni večja od K_2 , se opcija izvrši, sicer se izteče brez vrednosti. Izplačilna funkcija nakupnega

razpona ob dospelosti je $h(L(T), T) = \min(\max(L(T) - K_1, 0), K_2 - K_1)$. Skladno z osnovnim izrekom o vrednotenju katastrofnih instrumentov je vrednost opcije enaka sedanji vrednosti glede na ekvivalentno martingalsko mero. Vrednost razpona ob času t pri velikosti osnove $L(t)$ je $V(t) = f(t, L(t))$. Po pravilu nevtralnega vrednotenja iz trditve 4.8 je vrednost nakupnega razpona enaka

$$V(t) = E_Q(e^{-r(T-t)} h(L(T))) = E_Q(e^{-r(T-t)} \min(\max(L(T) - K_1, 0), K_2 - K_1)),$$

kjer je r netvegana obrestna mera in h izplačilna funkcija nakupnega razpona. Označimo s $f(L(t))$ gostoto verjetnosti osnove instrumenta $L(t)$. Zgornji izraz zapišemo kot

$$e^{-r(T-t)} \left(\int_{K_1}^{K_2} (L(T) - K_1) f(L(t)) dx + (K_2 - K_1)(1 - F(L(T))) \right).$$

Upoštevamo, da je $L(T) = L(0)e^{S(T)} = L(0)e^{S(t)}e^{S(T)-S(t)} = L(t)e^{S(T)-S(t)}$ in dobimo

$$e^{-r(T-t)} \left(\int_{K_1}^{K_2} (L(t)e^{S(T)-S(t)} - K_1) f(L(t)) dx + (K_2 - K_1)(1 - F(L(T))) \right).$$

V integral uvedemo substitucijo $x = S(T) - S(t)$, novi meji integrala označimo z $v_1(t) = \ln \frac{K_1}{L(t)}$

in $v_2(t) = \ln \frac{K_2}{L(t)}$. Vrednost $V(t)$ je

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{-r(T-t)} \left(\int_{v_1(t)}^{v_2(t)} (L(t)e^x - K_1) f(x, T-t; q) dx + (K_2 - K_1)(1 - F(v_2(x), T; q)) \right) = \\ &= e^{-r(T-t)} \left(L(t) \int_{v_1(t)}^{v_2(t)} e^x f(x, T-t; q) dx + K_2(1 - F(v_2(x), T; q)) - K_1(1 - F(v_1(x), T; q)) \right), \end{aligned}$$

kjer je $f(x, t; q)$ gostota verjetnosti agregatne katastrofne škode $S(t)$ pri Esscherjevi transformaciji s parametrom q in $F(x, t; q)$ pripadajoča porazdelitvena funkcija. Integrand preoblikujemo z uporabo definicije A.15, enačb (A11) in (14) ter dobimo

$$\begin{aligned} e^x f(x, T-t; q) &= e^x \frac{e^{qx} f(x, T-t)}{M(q, T-t)} = \frac{e^{(q+1)x} f(x, T-t)}{M(q+1, T-t)} \frac{M(q+1, T-t)}{M(q, T-t)} = \\ &= f(x, T-t; q+1) M(1, T-t; q) = f(x, T-t; q+1) e^{(\beta+r)(T-t)}. \end{aligned}$$

Pri določanju vrednosti upoštevamo, da je integral $\int_{v_1(t)}^{v_2(t)} L(t)f(x, T-t; q+1)e^{(\beta+r)(T-t)}dx$ enak $L(t)e^{(\beta+r)(T-t)}(F(v_2(x), T-t; q+1) - F(v_1(x), T-t; q+1))$. Iskana vrednost nakupnega razpona je

$$V(t) = e^{-r(T-t)}(L(t)e^{(\beta+r)(T-t)}(F(v_2(x), T-t; q+1) - F(v_1(x), T-t; q+1)) + K_2(1 - F(v_2(x), T; q)) - K_1(1 - F(v_1(x), T; q))), \quad (16)$$

pri čemer je vrednost porazdelitvene funkcije

$$F(v_i(x), T-t; q+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q-1}(T-t)\right)^n}{n!} e^{-\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q-1}(T-t)} \int_0^{v_i(x)} (\alpha-q-1) \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-(\alpha-q-1)z} z^{n-1} dz$$

in

$$F(v_i(x), T-t; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q}(T-t)\right)^n}{n!} e^{-\lambda \frac{\alpha}{\alpha-q}(T-t)} \int_0^{v_i(x)} (\alpha-q) \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-(\alpha-q)z} z^{n-1} dz$$

za $i = 1, 2$. Dobljene ugotovitve strnemo v trditev.

Trditev 4.15: Naj bo $L(t)$ velikost osnove katastrofnega instrumenta ob času t in naj bo $L(t) = L(0)e^{S(t)}$ za $t \in [0, T]$, kjer je T dospelost katastrofnega instrumenta. Predpostavimo, da je agregatna katastrofna škoda $S(t) = \sum_{i=1}^{N'(t)} X_i$, podana z enačbo (7), kjer je število škod $N'(t)$

Poissonovo porazdeljeno s parametrom λt , velikost škode X_i pa eksponentno s parametrom α . Vrednost nakupnega razpona s pragom K_1 in zgornjo mejo K_2 je podana z enačbo (16).

Izpeljali smo formulo za določanje vrednosti katastrofnega instrumenta, natančneje nakupnega razpona. Iz enačbe (16) vidimo, da z večanjem osnove narašča vrednost nakupnega razpona. Višanje zgornje meje in nižanje praga razpona ima enak učinek, kar je pričakovano, saj je obseg kritja večji in zato dražji.

Vidimo, da je izpeljava eksplicitne formule za vrednotenje katastrofnih instrumentov zahtevala kar nekaj priprav. Pri izpeljavi smo uporabili številne predpostavke in poenostavitve. Temeljna predpostavka je, da je število katastrof neodvisno od velikosti škod in da so katastrofe enako porazdeljene in med sabo neodvisne. Privzeli smo tudi, da je agregatna katastrofna škoda sestavljena Poissonovo porazdeljena. Z odvisnostjo se v tem delu nismo ukvarjali. Nadgradnja bi bila uporaba drugih porazdelitev in upoštevanje odvisnosti. V nadaljevanju bomo predstavili numeričen primer vrednotenja katastrofnega instrumenta.

4.4 Numeričen primer vrednotenja katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov

Predstavili smo nekaj načinov vrednotenja katastrofnih instrumentov. Za vrednost instrumenta smo iskali primerno formulo, vendar so bile formule precej zapletene in v splošnem nismo mogli izračunati vrednosti. Problem je modeliranje katastrofne škode. Pri vrednotenju katastrofnih instrumentov z uporabo funkcije koristnosti bomo poskušali poiskati vrednost danega katastrofnega instrumenta. Najprej bomo izbrali primerne predpostavke, nato se bomo lotili vrednotenja.

Opazujemo katastrofni razpon iz primera 4.13. Osnova instrumenta so agregatne katastrofne škode. Vemo, da se PCS kazalec izračuna kot škode deljeno s 100 milijoni dolarjev. Pri razponu z višjim obsegom kritja, ki ima za osnovo PCS kazalec, je prag 200 in zgornja meja 500 (Krumberger, 2002, str. 78). Iz tega izračunamo agregatno škodo. V primeru obravnavamo razpon s pragom $K_1 = 20$ in zgornjo mejo $K_2 = 50$, kjer sta K_1 in K_2 izražena v milijardah dolarjev. V nadaljevanju bomo tudi škode izrazili v milijardah dolarjev. Pri izbranih vrednostih je izplačilna funkcija $h(x) = \min(\max(x - K_1, 0), K_2 - K_1) = \min(\max(x - 20, 0), 30)$, kjer je x velikost osnove v milijardah dolarjev.

V primeru 4.14 smo s formulo (13) izrazili vrednost katastrofnega instrumenta s koristnostjo pri danih predpostavkah. Funkcija koristnosti zavarovalnice je eksponenta $u(z) = 1 - e^{-az}$, kjer je $a > 0$. Ta funkcija koristnosti se uporablja za zavarovalnice s konstantno nenaklonjenostjo tveganja, ki ni odvisna od premoženja. Izkušveni podatki kažejo, da je za večino podjetij $\alpha = 6$ (Michon, 2009). Za zato za parameter a uporabimo to vrednost.

Modelirati je treba še škodni proces, uporabimo Poissonov proces in izhajamo iz enačbe (7). Jakost Poissonovega procesa določimo na osnovi preteklih podatkov o številu katastrof. Iz slike 1 razberemo, da se je število katastrof po letu 1990 povečalo, pred tem letom je bilo število katastrof pod 100, po tem letu pa je preseglo 100. Povprečno število katastrof po letu 1990 je 131,7 (Enz, Zimmerli, Schwarz, 2009, str. 7). Pri modeliranju agregatne katastrofne škode naj bo pričakovano število katastrof 130, torej je jakost Poissonovega procesa $\lambda = 130$. Iz podatkov o letnih katastrofnih škodah in o številu katastrof izračunamo povprečno škodo. Povprečna katastrofna škoda je 148,6 milijonov dolarjev (Enz, Zimmerli, Schwarz, 2009, str. 7). Pri modeliranju naj bo povprečna katastrofna škoda 150 milijonov dolarjev, kar je 0,15 milijard dolarjev. Predpostavimo, da je posamezna katastrofna škoda eksponentno porazdeljena.

Pri modeliranju uporabimo R, to je programsko orodje in okolje za statistične analize (R Development Core Team, 2008). Škodno dogajanje simuliramo na 100 ponovitvah. Za vsako ponovitev izračunamo agregatno škodo, vrednost izplačilne funkcije katastrofnega instrumenta, ter vrednost števca in imenovalca iz enačbe (13). Zanima nas vrednost katastrofnega instrumenta na začetku obdobja. V prilogi B so v tabeli B1 predstavljeni rezultati izračunov za vseh 100 ponovitev. Iz povprečne vrednosti zadnjih dveh stolpcev tabele izračunamo vrednost

katastrofnega instrumenta. Dobljena vrednost je 4,11 milijarde dolarjev. Vrednost je na prvi pogled zelo visoka, vendar se moramo zavedati, da je za kritje agregatne katastrofne škode med 20 milijardami dolarjev in 50 milijardami dolarjev. Poudariti moramo, da je ta vrednost dobljena na podlagi predpostavk in se nanaša le na tehnične lastnosti tveganja, torej upoštevajoč pogostost in velikost katastrofnih škod.

Prednost tega pristopa je, da smo na podlagi predpostavk uspeli ovrednotiti katastrofni instrument, v našem primeru razpon. Vrednost smo izračunali v skladu z enačbo (13). Pri ugotavljanju vrednosti se je pojavilo nekaj problemov. V tabeli B1 so vrednosti v zadnjih dveh stolpcih velike. Za izračun vrednosti je treba deliti povprečno vrednost teh dveh stolpcev. Pri drugačnih predpostavkah izbran način ni nujno primeren, ker bi lahko bile vrednosti prevelike. V primeru, da bi izbrali višji in večji interval kritja, večjo povprečno škodo ali večjo pogostost, drugačno porazdelitev se lahko zgodi, da ni mogoče izračunati vrednost katastrofnega tveganja. V takšnih primerih bi bilo treba podatke preoblikovati na primer z logaritmiranjem. Opozorimo še, da smo pri povprečni katastrofni škodi izhajali iz podatkov o vseh katastrofah in ne le o katastrofah določene vrste.

Na primeru s teoretično izbranimi predpostavkami smo na osnovi enačbe (13) določili vrednost katastrofnega razpona s kritjem med 20 milijardami dolarjev in 50 milijardami dolarjev. Vrednost razpona, pri danih predpostavkah je 4,11 milijarde dolarjev. Kritje se nanaša na agregatno katastrofno škodo, upoštevane so vse vrste katastrof. V primeru, da bi bil obseg kritja ožji, torej da bi bile krite le katastrofe določene vrste ali na določenem področju, bi bila povprečna katastrofa nižja in s tem bi bila tudi vrednost nižja. Kljub temu, da smo izračunali vrednost katastrofnega instrumenta, pa je težko presoditi, ali je vrednost sprejemljiva za zavarovalnice in vlagatelje. Vrednost temelji le na tehničnih lastnostih katastrofnega tveganja, ostalih vidikov, ki so povezani s trgovanjem s katastrofnimi instrumenti, nismo obravnavali.

SKLEP

V prvem poglavju smo s podatki o preteklih katastrofnih škodah predstavili razsežnosti katastrof in njihove posledice. Iz tabele 1 in s slike 1 razberemo, da so katastrofe vse pogostejše in katastrofne škode vse večje. Vzroki so predvsem gostejša poseljenost, koncentracija premoženja in večja stopnja zavarovanja v razvitih predelih, torej v Evropi, severni Ameriki in na Japonskem. Katastrofno škodo delno povrne država. Če pa je imetje zavarovano, krijejo škodo zavarovalnice. Z zavarovanjem se katastrofno tveganje prenese na zavarovalni trg.

Zavarovalnice se zavedajo obsega katastrofnih škod in zavedajo se, da je katastrofno tveganje treba omejiti. Ob tem katastrofnega tveganja ni mogoče zadovoljivo razpršiti s povečevanjem števila zavarovanj. Večino katastrofnega tveganja zavarovalnice zadržijo za svoj račun, ker je

obseg pozavarovanja omejen. Obstaja prepričanje, da zavarovalni trg ni sposoben absorbirati velike katastrofne škode. Na zavarovalnem trgu obstaja potreba po primernem katastrofnem kritju. Rešitev ponuja kapitalski trg. Za prenos tveganja z zavarovalnega trga na kapitalski trg se uporabijo katastrofni instrumenti.

Potrebo po prenosu katastrofnega tveganja smo podrobno predstavili in osvetlili. Podatki kažejo, da katastrofni instrumenti niso razširjeni. Razlogov je več, bistveni so povezani s previsoko in težko določljivo ceno oziroma vrednostjo in dejstvom, da gre za neuveljavljeno obliko prenosa.

Seznanjeni z ozadjem o nastanku katastrofnih instrumentov smo se lotili vrednotenja. Pri tem smo se oprli na vrednotenje izvedenih instrumentov s finančno osnovo. Navedli smo Black–Sholesovo formulo in pokazali smo, da ni primerna za vrednotenje katastrofnih instrumentov. V primerjavi s finančno osnovo se z osnovo katastrofnih instrumentov ne trguje in velikost osnove se ne spreminja zvezno, ampak ima skoke. Iz tega sklepamo, da določanje vrednosti ne bo preprosto, enolično in da je treba ubrati drug način. Z dodatnimi predpostavkami in zahtevami omilimo pomanjkljivosti in ovrednotimo katastrofne instrumente.

Ker je vrednost izvedenega instrumenta odvisna od osnove, smo modelirali osnovo katastrofnega instrumenta, torej agregatno katastrofno škodo oziroma škodni kazalec. Predpostavili smo, da je škodni proces Poissonov proces, torej je število škod Poissonovo porazdeljeno, posamezne škode pa so enako porazdeljene, med seboj neodvisne in hkrati neodvisne od procesa štetja. Z določanjem parametrov procesa se nismo ukvarjali, ker so ocene parametrov zaradi sorazmerno majhnega števila katastrof nezanesljive in ker smo predvsem želeli pokazati, kako katastrofno tveganje povezati z vrednostjo katastrofnega instrumenta.

Za vrednotenje smo uporabili model brez arbitraže. Po osnovnem izreku o vrednotenju dejansko mero zamenjamo z ekvivalentno martinalsko mero. Pri novi meri je diskontiran proces vrednosti martingal, kar pomeni, da je pričakovana prihodnja vrednost enaka matematičnemu upanju preteklih vrednosti.

Predstavili smo različne načine vrednotenja katastrofnih instrumentov, pri tem smo se naslonili na osnovni izrek o vrednotenju in pravilo nevtralnega vrednotenja. Pri vrednotenju smo izhajali iz zahteve, da pri zamenjavi mere agregatna katastrofna škoda ostane sestavljeno Poissonovo porazdeljena, dopustili smo, da se jakost procesa spremeni. Sprememba mere vpliva tudi na porazdelitev posamezne škode. Podali smo potreben pogoj, da se ohrani Poissonova porazdelitev procesa tveganja. Zamenjava mere ni nujno enolična, zato zahteva, da je proces Poissonov pri novi meri, ne zagotavlja enoličnosti vrednotenja.

Pri vrednotenju smo izhajali tudi iz koristnosti. Pri tem ni bil problem nepoznavanje vrednosti osnove, ampak dejstvo, da spreminjanje osnove ni zvezno. Predpostavili smo, da je nenaklonjenost tveganju konstantna. Vrednost smo določili pri dodatni predpostavki, da so vse katastrofe enake.

Na koncu smo za vrednotenje uporabili Esscherjevo transformacijo. Osnova katastrofnega instrumenta je škodni kazalec. V preteklosti so trgovali s katastrofnimi opcijami, ki so temeljile na PCS kazalcu. Glede na to, da so katastrofe sorazmerno redke in katastrofne škode velike, smo porazdelitev osnove izbrali tako, da ima izrazit rep. Za določanje ekvivalentne mere smo uporabili Esscherjevo transformacijo. Zamenjava mere je določena s parametrom transformacije. Ker katastrofno tveganje vpliva na pozavarovalno premijo in vrednost katastrofnega instrumenta, smo zvezo uporabili pri določanju parametra. Izpeljali smo formulo za eksplicitno vrednost nakupnega razpona. Za izpeljavo smo uporabili številne predpostavke. Nekatere predpostavke so bližje dejanskemu stanju kot druge.

Delo smo sklenili z numeričnim primerom vrednotenja katastrofnih instrumentov. Predstavili smo vrednotenje z uporabo funkcije koristnosti. Za modeliranje škodnega dogajanja smo uporabili Poissonov proces. Predpostavke smo izbrali tako, da so v skladu z dostopnimi podatki čim bližje dejanskemu stanju. To je zaradi omejenih podatkov le delno uspelo. Izračunana vrednost se nanaša le na tehnične lastnosti tveganja, z numeričnim primerom smo predvsem želeli pokazati, da je vrednost instrumenta mogoče izračunati, čeprav je izračun odvisen od ustreznosti predpostavk. Cilj je seveda, da predpostavke ustrezajo dejanskemu stanju, vendar se v tem delu s tem nismo ukvarjali, ta tema pa vsekakor pušča mnogo prostora za nadaljnje raziskovanje.

LITERATURA

1. Aase, K. (1999). An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*. (24), str. 69 - 96.
2. American Academy of Actuaries. (1999). *Evaluating the Effectiveness of Index-Based Insurance Derivatives in Hedging Property/Casualty Insurance Transactions*. Washington: American Academy of Actuaries.
3. Antal, P. (2003). *Quantitative Methods in Reinsurance*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
4. Battig, R. & Jarrow, R. (1999). The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing: A New Approach. *The Review of Financial Studies*, 12 (5), str. 1219 – 1235.
5. Baxter, M. & Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivate Pricing*. New York: Cambridge: University Press.
6. Benfield Industry Analysis and Research, (2004). *2004 Catastrophe Losses, Hurricanes Hardly Ever Happen*. London: Benfield Group Limited.
7. Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford: Oxford University Press.
8. Bodie Z., Kane A. & Marcus A. J. (1996). *Investments* (3rd ed.). Chicago: Times Mirror.
9. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. & Nesbitt, C.J. (1986). *Actuarial Mathematics*. Itasca: The Society of Actuaries.

10. Cai, J. (2004). Convolutions of Distributions. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 592). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
11. Cairns, A. J. G. (2004). Arbitrage. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 90 - 91). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
12. Cairns A. J. G. (2004a). Complete Markets. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 313 -314). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
13. Christensen, C. (1998). *The PCS-Option, an Improvement of the CAT-Futures*. Aarhus: University of Aarhus.
14. Christensen, C. (2000). *Implied Loss Distributions for Catastrophe Insurance Derivatives*. Aarhus: University of Aarhus.
15. Christensen, C. (2000a). *A New Model for Pricing Catastrophe Insurance Derivatives*. Aarhus: University of Aarhus.
16. Cole J. & Chiarenza A. (1999). *Insurance – Risk Securitisation: the best of both worlds*. Najdeno 8. junija 2005 na spletnem naslovu <http://www.financewise.com/public/edit/riskm/insure/ins-secp.htm>.
17. Cossette, H., Duchesne T. & Marceau É. (2002). *Micro/Macro-Economnic and Spatial Individual Models for Catastrophe Insurance Applications*. Najdeno 10. julija 2002 na spletnem naslovu <http://archimede.mat.ulaval.ca/pages/duchesne/coduma2002.pdf>.
18. Cossette, H., Duchesne, T. & Marceau É. (2004). Modelling Catastrophes and their Impact on Insurance Portfolios. *North American Journal*, 7 (4), str. 1 – 22.
19. Cox, S. H., Fairchild, J. R. & Pedersen H. W. (2000). Actuarial and Economic Aspects of Securitization of Risk. *Astin Bulletin*, 1 (3), str. 157 – 193.
20. Cummins, J. D. & Weiss M. A. (2002). *The Global Market for Reinsurance: Consolidation, Capacity and Efficiency*. Philadelphia: Wharton Financial Institutions Center.
21. Cuthbertson, K. (2004). Derivative Securities. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 495 - 504). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
22. Čas, M. & Rotar, T. (1994). *Borzni izrazi s trojezičnim slovarjem*. Maribor: Kapital.
23. Delbaen, F., Schachermayer W. & Schweizer M. (1994). Option Pricing by Esscher Transform, Discussions. *Transactions of Society of Actuaries*, 46 (36), str. 148 – 151.
24. Delbaen, F. & Schachermayer, W. (1997). Non-Arbitrage and the Fundamental Theorem of Asset Pricing: Summary of Main Results. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (str. 49 – 58). Schaumburg: American Mathematical Society.
25. Embrechts, P. (1997). *Actuarial versus Financial Pricing of Insurance*. Philadelphia: Wharton Financial Institutions Center.
26. Embrechts, P., Frey, R. & Furrer H. (1999). *Stochastic Processes in Insurance and Finance*. Zurich: ETH Zurich.
27. Embrechts, P., Klüppelberg C. & Mikosch T. (1999). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer Verlag.
28. Embrechts, P. & Meister, S. (1995). Pricing Insurance Derivatives: The Case of CAT Futures. *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Risk* (str. 15 – 26). Atlanta: Society of Actuaries.
29. Enz, R., Zimmerli P. & Schwarz S. (2009). Natural catastrophes and man-made disasters in 2008: North America and Asia suffer heavy losses. Zurich: Swiss Reinsurance Company.

30. Enz, R., Kurt, K., Mehlhorn, J. & Schwarz, S. (2008). *Natural catastrophes and man-made disasters in 2007: high losses in Europe*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
31. Finn, J. & Lane M. (1995). The Perfume of the Premium... or Pricing Insurance Derivatives. *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Risk* (str. 27 – 35). Atlanta: Society of Actuaries.
32. Frey, R. (2000). Pricing and Hedging of Derivatives: an Introduction with a Focus on Continuous-Time Models. Najdeno 12. decembra 2005 na spletnem naslovu http://www.mathematik.uni-leipzig.de/MI/frey/continuous_timev3.pdf.
33. Froot, K. A. (2001). *The Market for Catastrophe Risk: a Clinical Examination*. Cambridge: National Bureau of Economic Research.
34. Grandi, M. & Müller, A. (1999). *Insurance derivatives: Convergence of capital markets and insurance markets*. Munich: Munich Reinsurance Company.
35. General Accounting Office (2002). *Catastrophe Insurance Risks: The Role of Risk-Linked Securities and Factors Affecting Their Use*. Washington: United States General Accounting Office.
36. General Accounting Office (2003). *Catastrophe Insurance Risks: Status of Efforts to Securitise Natural Catastrophe and Terrorism Risk*. Washington: United States General Accounting Office.
37. Gerber, H. U., Shiu E. S. W. (1994). Option Pricing by Esscher Transform, Discussions. *Transactions of Society of Actuaries*, 46 (312), 312, str. 99 – 140.
38. Government Accountability Office (2005). *Catastrophe Risks: U. S. and European Approaches to Insure Natural Catastrophe and Terrorism Risk*. Washington: United States General Accounting Office.
39. Hayek, C. & Ghanem R. (2002). Impact of uncertainty in catastrophe losses on insurance derivatives. *15th ASCE Engineering Mechanics Conference* (str. 1 – 7). New York: Columbia University.
40. Helfenstein, R. & Holzheu, T. (2006). *Securitization – new opportunities for insurers and investors*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
41. Henderson, V. (2004). Black–Sholes Model. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 175 – 184). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
42. Holtan, J. (2004). *Pragmatic Insurance Option Pricing*. Najdeno 27. novembra 2005 na spletnem naslovu <http://www.astin2004.no/papers/holtan.pdf>.
43. Holzheu, T., Karl, K. & Raturi M. (2003). *The picture of ART*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
44. ISO Properties (1999). *Financing Catastrophe Risk: Capital Market Solutions, Executive Summary*. Najdeno 16. junija 2005 na spletnem naslovu http://www.iso.com/studies_analyses/docs/study013.html.
45. Kielholz, W. & Durrer, A. (1997). Insurance Derivatives and Securitization, New Hedging Perspectives for the US Cat Insurance Market. *Geneva Papers on Risk and Insurance*, (82), str. 3 – 16.
46. Klein, I. (2005). *A Comment on Market Free Lunch and Free Lunch*. Najdeno 25. avgusta 2005 na spletnem naslovu <http://homepage.univie.ac.at/irene.klein/nmfl0605.pdf>.

47. Kocič, A. & Nowak, P. (2000). Alternativni prenos tveganj v zavarovanju in pozavarovanju. *Zbornik referatov 7. dnevih slovenskega zavarovalništva*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
48. Komelj, J. (2004). *Aktuarsko računanje agregatnih odškodnin in optimalnih parametrov pozavarovanja*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
49. Komelj, J. (2005). Aktuarski pogled na obvladovanje tveganj pri potresnem zavarovanju. *Zbornik referatov 12. dnevov slovenskega zavarovalništva*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
50. Krumberger, M. (2002). *Problemi in prihodnost alternativnih prenosov rizikov*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
51. Levi C. & Partrat C. (1989). Statistical Analysis of Natural Events in the United States. *Astin Bulletin*, 21 (2), str. 253 – 276.
52. Lin, S. X. (2004). Compound Distributions. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 314 – 317). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
53. Loubergé, H., Kellezi, E. & Gilli M. (1999). Using Catastrophe-linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds. *Journal of Insurance Issues*, 22 (2), str. 125 – 146.
54. Loubergé, H. & Schlesinger H. (2001). *Optimal catastrophe insurance with multiple catastrophes*. Geneva: International Centre for financial asset management and engineering.
55. Mack, T. (1997). *Schadenversicherungsmathematik*. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.
56. Meyers, G. G. & Kollar J. J. (1998). *On the Cost of Financing Catastrophe Insurance*. Arlington: Casualty Actuarial Society.
57. Meyers, G. G. & Kollar J. J. (1999). *Catastrophe Risk Securitization: Insurer and Investor Perspective*. Arlington: Casualty Actuarial Society.
58. Michon, G. P. (2001, 4. april). *Utility Functions and Decision Analysis*. Najdeno 28. maja 2009 na spletnem naslovu <http://home.att.net/~numericana/answer/utility.htm>.
59. Mikosch, T. (2004). *How to model multivariate extremes if one must?* Kobenhavn: The Danish National Research Foundation.
60. Mürmann, A. (2001) *Pricing Catastrophe Insurance Derivates*. Philadelphia: Wharton Financial Institutions Center.
61. Mürmann, A. (2003). *Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivates*. Philadelphia: Wharton Financial Institutions Center.
62. Mürmann, A. (2004). Catastrophe Derivatives. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 231 – 236). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
63. Pavliha, M. (2000). *Zavarovalno pravo*. Ljubljana: Gospodarski vestnik.
64. R Development Core Team (2008). *R: A language and environment for statistical computing*. Najdeno 24. aprila 2009 na spletnem naslovu <http://www.R-project.org>.
65. Porter, B. & Virkud, U. (2002, 27. februar). *Catastrophe Models: Where They Came From and Where They're Going*. Najdeno 9. Junija 2009 na spletnem naslovu http://www.air-worldwide.com/NewsData/000225/JR_CAT_Modeling.pdf.
66. Sarapa, N. (1992). *Teorija vjerojatnosti*. (drugo izdanje) Zagreb: Školska knjiga.

67. Schmidli, H. (2003). *Modelling PCS Options via Individual Indices*. Centre for Analytical Finance. Aarhus: University of Aarhus.
68. Schmock, U. (1999). Estimating the Value of the Wincat Coupons of the Wintherthur Insurance Convertible Bond: a Study of the Model Risk. *Astin Bulletin*, 29 (1), str. 101 – 163.
69. Tomažič, A. (2005, 20. September). Sprva po svetnikih, nato z ženskimi imeni. *Delo*, str. 12.
70. Venter, G. G. (1991). Premium Calculation Implications of Reinsurance without Arbitrage. *Astin Bulletin*, Leuven, 21 (2), str. 223 – 230.
71. Veselinovič, D. (1998). *Opcije in drugi terminski (izvedeni) finančni instrumenti*. Ljubljana: Gospodarski vestnik.
72. Vesenmayer, B (2005, 6. januar). *Erster Fundamentalsatz der Finanzmathematik: Dalang-Morton-Wilinger Theorem*. Najdeno 30. julija 2005 na spletnem naslovu <http://www.ma.tum.de/foswiki/pub/TopMath/Workshop12005VortraegeTM/vesenmayer.pdf>.
73. Virtamo, J. (2005). Poisson Process. Najdeno 19. novembra 2005 na spletnem naslovu http://www.netlab.hut.fi/opetus/s38143/luennot/E_poisson.pdf.
74. Vittori, M. (2005). Potresi. *Zavarovalniški horizonti*, 1 (3), str. 39 – 49.
75. Williams, D. (1995). *Probability with Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press.
76. World Economic Forum (2008). Convergence of Insurance and Capital Markets. Geneva: World Economic Forum.
77. Yang, H. (2004). Esscher Transform. V J. L. Teugels & B. Sundt (ur.), *Encyclopaedia of Actuarial Science* (str. 617 – 621). Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
78. Zanetti, A., Schwarz S. & Enz R. (2005). *Natural catastrophes and man-made disasters in 2004: more than 300 000 fatalities, record insured losses*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
79. Zanetti, A. & Schwarz, S. (2006). *Natural catastrophes and man-made disasters in 2005: high earthquake casualties, new dimension in windstorm losses*. Zurich: Swiss Reinsurance Company.
80. Zeng, L. (2003). Hedging Catastrophe Risk Using Index – Based Reinsurance Instruments. *Casualty Actuarial Society Call Paper Program*, 2003, (str. 246 – 268).

VIRA

1. Obligacijski zakonik. *Uradni list Republike Slovenije*. (Št. 83/2001, 25. oktober 2001).
2. Zakon o zavarovalništvu (uradno prečiščeno besedilo). *Uradni list Republike Slovenije*. (Št. 109/2006, 23. oktober 2006).

PRILOGE

A MATEMATIČNI POJMI IN IZREKI

V prilogi so zbrane matematične definicije, trditve in izreki, ki jih potrebujemo. Zbirka ni popolna, saj smo predpostavili, da so znani osnovni pojmi verjetnostnega računa in matematične statistike. Prav tako smo privzeli, da so znane gostote verjetnosti oziroma porazdelitveni zakoni slučajnih spremenljivk, ki se uporabljajo pri modeliranju škodnega dogajanja in vrednotenju izvedenih instrumentov.

A.1 Uvodni pojmi

Pri določanju matematičnega upanja in variance ter višjih momentov dane slučajne spremenljivke se uporablja momentno rodovna funkcija ali karakteristična funkcija. V aktuarski teoriji se pogosteje pojavlja momentno rodovna funkcija kot karakteristična funkcija.

Definicija A.1: Naj bo X slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo F . Momentno rodovna funkcija M_X slučajne spremenljivke X je

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) = E(e^{tx}),$$

kjer je $t \in R$. Če je X diskretna slučajna spremenljivka s porazdelitvenim zakonom $P(X = x_k) = p_k$, kjer je $k \in N$, je momentno rodovna funkcija

$$M_X(t) = \sum_k e^{tx_k} p_k,$$

kjer je $t \in R$. Če je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti f , se momentno rodovna funkcija izračuna kot

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx,$$

kjer je $t \in R$.

Karakteristična funkcija φ_X slučajne spremenljivke X je podana s predpisom

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = E(e^{itx}), \text{ kjer je } t \in R \text{ in } i \text{ imaginarna enota, za katero velja } i^2 = -1.$$

Definicija momentno rodovne funkcije se razlikuje od definicije karakteristične funkcije le v eksponentu, ki pri momentno rodovni funkciji ne vsebuje imaginarne enote i . V nadaljevanju so podane lastnosti momentno rodovnih funkcij, za karakteristične funkcije veljajo smiselno prilagojene lastnosti momentno rodovnih funkcij.

Momentno rodovna funkcija enolično določa porazdelitveno funkcijo in obratno, vsaki porazdelitveni funkciji ustreza natanko ena momentno rodovna funkcija, pri pogoju, da je momentno rodovna funkcija podana na odprtem intervalu, ki vsebuje 0. To pomeni, da je porazdelitev slučajne spremenljivke enolično določena z momentno rodovno funkcijo. Velja tudi, da je slučajna spremenljivka enolično določena s karakteristično funkcijo in obratno. Dokaz trditve je v literaturi (Sarapa, 1992, str. 445 – 447).

Če poznamo momentno rodovno funkcijo dane spremenljivke, lahko določimo momentno rodovno funkcijo linearne kombinacije. Kot v definiciji A.1 označimo z M_X momentno rodovno funkcijo. Za dano slučajno spremenljivko X in za poljubni realni števili a in b velja $M_{aX+b}(t) = e^{tb} M_X(at)$, kjer je $t \in R$.

Trditev A.2: Momentno rodovna funkcija vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \dots, X_n$ je produkt momentno rodovnih funkcij posameznih slučajnih spremenljivk. Za $t \in R$ je

$$M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t). \quad (\text{A1})$$

S pomočjo momentno rodovne funkcije lahko izračunamo začetne momente. Velja izrek.

Izrek A.3: Naj bo X slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo F in momentno rodovno funkcijo M_X . Če je $E(|X|^n) < \infty$ za nek $n \in N$, potem za poljuben $k \leq n$ obstaja k -ti odvod momentno rodovne funkcije. Velja:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad M_X^{(k)}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF(x), \text{ kjer je } t \in R, \\ \text{(b)} \quad E(X^k) &= M_X^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Kadar poznamo momentno rodovno funkcijo M_X slučajne spremenljivke X , z uporabo izreka A.2 ter zveze med začetnimi in centralnimi momenti določimo matematično upanje in varianco.

Tako je $E(X) = M_X'(0)$ in $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$.

Podobne zveze lahko izpeljemo za višje momente (Komelj, 2004, str. 18).

Za diskretne slučajne spremenljivke definiramo rodovno funkcijo.

Definicija A.4: Rodovna funkcija G_Y diskretne slučajne spremenljivke Y , ki ima porazdelitveni zakon $P(Y = k) = p_k$ za $k = 0, 1, 2, \dots$, je

$$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k = E(t^Y).$$

A.2 Poissonov proces

Opazujemo zaporedje dogodkov, ki se pojavljajo ob diskretnih časih. Njihovo število opišemo s tako imenovanim Poissonovim procesom. Čas med dvema zaporednima dogodkoma je eksponentno porazdeljen, časi med dogodki pa so neodvisni. V tem delu s Poissonovim procesom modeliramo število katastrof. Poissonov proces lahko definiramo na tri različne, a ekvivalentne načine¹ (Virtamo, 2005).

Definicija A.5: Proces je Poissonov proces, če je izpolnjena ena izmed naslednjih trditev. Pri tem naj bo λ poljubno pozitivno realno število.

- (a) Časi med dvema zaporednima dogodkoma so neodvisni in eksponentno porazdeljeni s parametrom λ .
- (b) Število dogodkov na časovnem intervalu dolžine τ je Poissonovo porazdeljeno s parametrom $\lambda\tau$. Število dogodkov, ki se zgodijo v dveh ali več disjunktnih časovnih intervalih, je neodvisno.
- (c) V infinitezimalnem časovnem intervalu dt se lahko zgodi največ en dogodek. Verjetnost, da se zgodi dogodek, je enaka λdt in je neodvisna od dogodkov zunaj opazovanega časovnega intervala.

Parameter λ se imenuje jakost Poissonovega procesa.

Izhajamo iz prvega dela definicije A.5. Naj bo $\{Z_n; n \in N\}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk z eksponentno porazdelitvijo. Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke Z_n je

¹ Dokaz ekvivalentnosti je v literaturi (Virtamo, 2005).

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases},$$

kjer je $\lambda > 0$ parameter eksponentne porazdelitve (Sarapa, 1992, str. 264). Z_n je čas med dvema zaporednima dogodkoma, in sicer $n-1$ in n -tim, torej je nenegativna slučajna spremenljivka. Verjetnost, da je čas manjši od x , je

$$P(Z_n \leq x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Ker je $E(Z_n) = \frac{1}{\lambda}$, je povprečni čas med dvema dogodkoma $\frac{1}{\lambda}$. Za slučajni vektor z neodvisnimi komponentami $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, kjer je $n \in N$, poiščemo verjetnost

$$P(Z_1 > x_1, Z_2 > x_2, \dots, Z_n > x_n) = \prod_{i=1}^n P(Z_i > x_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(Z_i \leq x_i)) = e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Naj bo $T_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$, kjer je $n \in N$. T_n je čas n -tega dogodka. Lahko predstavlja čas prihoda n -te stranke ali čas n -tega telefonskega klica v centrali. V aktuarstvu pa je čas, ko se zgodi n -ta škoda. Dogodek $\{T_n \leq t\}$ se zgodi, če se pripeti natančno n škod do vključno časa t .

S spremenljivko T_n opišemo čas n -tega škodnega dogodka. Zanima nas, koliko škod je nastalo do vključno časa t . Za $t \geq 0$ naj bo N_t slučajna spremenljivka, ki predstavlja število škod do vključno časa t . Slučajni proces² $\{N_t; t \geq 0\}$ imenujemo proces štetja. Slučajni spremenljivki N_t in T_n povezuje enakost $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$. Verjetnost, da se v času t zgodi natančno n škod za $n = 0, 1, 2, \dots$, je

$$P(N_t = n) = P(T_n \leq t < T_{n+1}) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t),$$

pri tem velja dogovor, da je $N_0 = 0$. V nadaljevanju upoštevamo, da je vsota n neodvisnih eksponentnih slučajnih spremenljivk s parametrom λ gama porazdeljena $\Gamma(n, \lambda)$, gostota verjetnosti gama porazdelitve je $f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}$ (Grimmett & Stirzaker, 1998, str. 96, 122). Dobimo

$$P(N_t = n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \int_0^t z^{n-1} e^{-\lambda z} dz - \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^t z^n e^{-\lambda z} dz = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t},$$

² Slučajni proces je definiran v razdelku A.4.1.

pri izračunu smo uporabili integracijo po delih. Dobljen izraz je porazdelitvena funkcija Poissonove porazdelitve, torej je N_t Poissonovo porazdeljena s parametrom λt . Ker je $E(N_t) = \lambda t$, je λ povprečno oziroma pričakovano število škod na časovno enoto.

Poissonov proces ima še eno zanimivo lastnost. Predpostavimo, da proces opazujemo od časa t in da je bila zadnja škoda v času $t - h$. Porazdelitvena funkcija čakalnega časa, to je časa med dvema zaporednima dogodkoma, v našem primeru škodama, je neodvisna od h in sovпада s porazdelitveno funkcijo Z_1 . Proces se obnaša, kot da je začetek v trenutku t in ne pomni, da je bila prejšnja škoda pred h časa. Celo več, proces ima neodvisne prirastke. Začetek opazovanja Poissonovega procesa ni pomemben. Število škod na časovnem intervalu $[t, t + \tau)$ je odvisno le od τ in je Poissonovo porazdeljeno s parametrom $\lambda \tau$. Torej je razlika $N_{t+\tau} - N_t$ Poissonovo porazdeljena s parametrom $\lambda \tau$ za poljuben pozitiven τ .

Iz definicije A.5 sledi, da ima Poissonov proces markovsko lastnost. Za nenegativna realna števila $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ in nenegativna cela števila $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ velja³

$$P(N(t_{n+1}) = a_{n+1} | N(t_1) = a_1, \dots, N(t_n) = a_n) = P(N(t_{n+1}) = a_{n+1} | N(t_n) = a_n). \quad (A2)$$

To pomeni, da je spremenljivka $N(t_{n+1})$ odvisna le od predhodne spremenljivke $N(t_n)$.

Za Poissonov proces velja, da so časovni prirastki med zaporednimi dogodki $\{Z_n; n \in N\}$ neodvisni in stacionarni. Pojasnimo pojem stacionarni. Zaporedje slučajnih spremenljivk $\{V_n; n \in N'\}$ je stacionarno, če so končno dimenzionalne porazdelitve neodvisne od časovnih premikov, torej je $(V_{t_1}, V_{t_2}, \dots, V_{t_m})$ enako porazdeljena kot $(V_{t_1+h}, V_{t_2+h}, \dots, V_{t_m+h})$ za poljuben izbor indeksov $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ iz množice N' in poljubno celo število h ⁴. Če opazujemo podzaporedje s h zaporednimi členi, so vsa podzaporedja enako porazdeljena (Embrechts et al., 1999, str. 210).

Če je jakost Poissonovega procesa neodvisna od časa, govorimo o homogenem Poissonovem procesu, sicer pa o nehomogenem Poissonovem procesu⁵. Do sedaj predstavljen proces je homogen in nehomogenih procesov ne obravnavamo. Pri poimenovanju procesov homogen opustimo.

³ Zaradi preglednosti namesto zapisa z dvojnimi indeksom uporabimo zapis z oklepajem.

⁴ Pri tem moramo paziti, da h izberemo tako, da ne pademo iz množice indeksov, drugih omejitev ni.

⁵ Če za čase med zaporednima dogodkoma zahtevamo le da so neodvisni in enako porazdeljeni, potem imenujemo proces štetja obnovljiv.

A.3 Sestavljena porazdelitev

V aktuarstvu se za modeliranje števila škod in velikosti škod uporabljajo slučajne spremenljivke. Agregatna škoda je vsota naključnega števila naključno velikih škod. Števila in velikosti škod ni mogoče vnaprej določiti. Škodno dogajanje spremljamo s Poissonovim procesom.

Število škod predstavimo z diskretno slučajno spremenljivko N' , ki ima za zalogo vrednosti naravna števila. Velikost posameznih škod označimo s slučajnimi spremenljivkami $X_1, X_2, \dots, X_{N'}$. Predpostavimo, da so enako porazdeljene, nenegativne in med sabo neodvisne ter da so neodvisne od N' . Pri danih oznakah je agregatna škoda $S_{N'}$ enaka

$$S_{N'} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N'} X_i & ; N' > 0 \\ 0 & ; N' = 0 \end{cases}.$$

Velikost škod lahko modeliramo z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami, ki imajo za zalogo vrednosti naravna števila, če zneske navajamo kot mnogokratnike denarne enote (Komelj, 2004, str. 2). Običajno pa se za velikost škod uporabljajo zvezne slučajne spremenljivke.

Na splošno ne moremo trditi, da je $S_{N'}$ zvezna slučajna spremenljivka, tudi če so spremenljivke $X_1, X_2, \dots, X_{N'}$ zvezne. N' je diskretna slučajna spremenljivka in če je $P(N' = 0) > 0$, potem je $S_{N'}$ zvezna povsod razen pri 0.

Za modeliranje števila škod se običajno uporabljajo Poissonova, binomska ali negativna binomska porazdelitev⁶ (Antal, 2003, str. 8). Pripadajoči zakoni porazdelitev so zaporedno:

- $P(N' = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, kjer je $\lambda > 0$,
- $P(N' = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$, kjer je $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq k \leq m$, in
- $P(N' = k) = \binom{a+k-1}{k} p^a (1-p)^k$, kjer je $0 \leq p \leq 1$, $a > 0$.

Če je število škod Poissonovo porazdeljeno, govorimo o sestavljeni Poissonovi porazdelitvi, če je binomsko, o sestavljeni binomski porazdelitvi in če je negativno binomsko, o sestavljeni negativni binomski porazdelitvi. Pri modeliranju števila katastrof se običajno uporabljata sestavljena Poissonova in sestavljena negativna binomska porazdelitev (Antal, 2003, str. 54).

⁶ Omenjene porazdelitve imajo zanimivo lastnost v povezavi s pozavarovanjem. Recimo, da so pozavarovane škode nad določeno višino. Če je število škod na primer Poissonovo porazdeljeno, je tako porazdeljeno tudi število pozavarovanih škod, pri čemer se parametri porazdelitve spremenijo (Antal, 2003, str. 9). Enako velja za binomsko in negativno binomsko porazdelitev.

Slednja se uporablja, če so katastrofe med seboj odvisne. Kot zanimivost navedimo, da je vsota neodvisnih sestavljenih Poissonovih porazdelitev spet sestavljena Poissonova (Antal, 2003, str. 20).

V skladu z definicijo A.1 določimo momentno rodovno funkcijo $M_{S_{N'}}$ slučajne spremenljivke $S_{N'}$. Naj bo $G_{N'}$ rodovna funkcija števila škod N' , $M_{N'}$ momentno rodovna funkcija N' in $M_X(t) := M_{X_i}(t)$ momentno rodovna funkcija X_i . Pri danih oznakah iz enakosti $E(e^{tS_{N'}} | N' = n) = E^n(e^{tX}) = M_X^n(t)$ sledi $E(e^{tS_{N'}} | N') = E^{N'}(e^{tX}) = M_X^{N'}(t)$. Momentno rodovno funkcijo $S_{N'}$ lahko izračunamo na naslednja načina

$$M_{S_{N'}}(t) = E(e^{tS_{N'}}) = E(E(e^{tS_{N'}} | N')) = E(M_X^{N'}(t)) = G_{N'}(M_X(t)), \quad (A3)$$

$$M_{S_{N'}}(t) = E(M_X^{N'}(t)) = E(e^{N' \ln M_X(t)}) = M_{N'}(\ln M_X(t)). \quad (A4)$$

S pomočjo momentno rodovne funkcije poiščemo zvezo med prvima dvema momentoma slučajnih spremenljivk $X := X_i$, N' in $S_{N'}$. Za dano slučajno spremenljivko je k -ti začetni moment enak vrednosti k -tega odvoda momentno rodovne funkcije v 0. Ker iščemo matematično upanje in varianco, izračunamo prva dva odvoda $M_{S_{N'}}$,

$$M'_{S_{N'}}(t) = G'_{N'}(M_X(t))M'_X(t), \quad (A5)$$

$$M''_{S_{N'}}(t) = G''_{N'}(M_X(t))M_X'^2(t) + G'_{N'}(M_X(t))M''_X(t). \quad (A6)$$

V enačbi (A5) in (A6) vstavimo 0 in upoštevamo, da je $M_X(0) = E(e^0) = 1$ in da za diskretno slučajno spremenljivko N' velja $G'_{N'}(1) = E(N')$ in $G''_{N'}(1) = E^2(N') - E(N')$ (Sarapa, 1992, str. 151). Iz enačbe (A5) sledi

$$E(S_{N'}) = E(N')E(X). \quad (A7)$$

Pričakovana agregatna škoda je enaka produktu pričakovanega števila škod in pričakovane velikosti škode. Iz enačbe (A6) pa dobimo

$$E(S_{N'}^2) = (E(N'^2) - E(N'))E^2(X) + E(N')E(X^2).$$

Upoštevamo, da za poljubno slučajno spremenljivko Y velja enakost $E(Y^2) = \text{Var}(Y) + E^2(Y)$, in zgornji izraz preoblikujemo v

$$\text{Var}(S_{N'}) = \text{Var}(N')E^2(X) + E(N')\text{Var}(X). \quad (A8)$$

Varianca agregatne škode je sestavljena iz dveh komponent, prva je prispevek variance števila škod, druga pa variance velikosti škod (Bowers et al., 1986, str. 319). Enačbi (A7) in (A8) se imenujeta tudi Waldovi identiteti (Antal, 2003, str. 21).

A.3.1 Konvolucija

Agregatno škodo $S_{N'}$ ob koncu opazovanega obdobja zapišemo kot $S_{N'} = \sum_{k=1}^{N'} X_k$, kjer je N' proces štetja slučajnega števila katastrofnih škod, X_k pa slučajna velikost škode, ki jo povzroči k -ta katastrofa. Velja dogovor, da je $S_{N'} = 0$, če je $N' = 0$. Pri tem predpostavimo, da so velikosti škod neodvisne in enako porazdeljene s porazdelitveno funkcijo F_X ter neodvisne od procesa štetja. Porazdelitvena funkcija agregatne škode je

$$F_{S_{N'}}(x) = P(S_{N'} \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{N'} X_i \leq x\right) = \sum_{i=1}^{N'} P(N' = i) P\left(\sum_{j=1}^i X_j \leq x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N' = i) F_X^{*i}(x),$$

kjer je F_X^{*i} i -ta konvolucija. Za $i \geq 1$ je $F_X^{*i}(x) = P\left(\sum_{j=1}^i X_j \leq x\right)$ in $F_X^{*0}(x) = 1$ (Lin, 2004, str. 315). Za neodvisni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F_1 in F_2 ter gostotama

verjetnosti f_1 in f_2 je konvolucija $F_1 * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y) f_1(y) dy$.

Konvolucija n neodvisnih slučajnih spremenljivk je $F_1 * F_2 * \dots * F_n(x) := F_1 * (F_2 * \dots * F_n)(x)$ (Cai, 2004, str. 365). Konvolucijo n enakih slučajnih spremenljivk imenujemo n -ta konvolucija in jo označimo s F^{*n} . Konvolucija neodvisnih slučajnih spremenljivk je porazdelitvena funkcija njihove vsote. Konvolucija ima preprost in jasen koncept, vendar pa računanje kaj lahko postane dolgotrajno in neprijetno (Bowers et al., 1986, str. 33). Navedimo primer izračuna.

Primer A.6: Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y , ki sta enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0, 1]$ oziroma $[0, 2]$. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ x; & 0 \leq x < 1, \\ 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

gostota verjetnosti slučajne spremenljivke Y je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & 0 < y < 2 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$

Konvolucija slučajnih spremenljivk X in Y je $F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y)f_Y(y)dy$. Pri računanju upoštevamo vrednosti vsote in dobimo

$$F_X * F_Y(s) = \begin{cases} 0; & s < 0 \\ \int_0^s \frac{1}{2}(s-y)dy = \frac{1}{4}s^2; & 0 \leq s < 1 \\ \int_0^{s-1} \frac{1}{2}dy + \int_{s-1}^s \frac{1}{2}(s-y)dy = \frac{1}{4}(2s-1); & 1 < s \leq 2 \\ \int_0^{s-1} \frac{1}{2}dy + \int_{s-1}^{s-2} \frac{1}{2}(s-y)dy = \frac{1}{4}(6s-s^2-5); & 2 < s \leq 3 \\ 1; & s > 3 \end{cases}.$$

Določili smo konvolucijo $F_X * F_Y$ neodvisnih slučajnih spremenljivk X in Y . Konvolucija $F_X * F_Y$ je porazdelitvena funkcija vsote $X + Y$. $\square$

Vidimo, da konvolucija dveh neodvisnih enakomerno porazdeljenih slučajnih spremenljivk ni preprosta. Kaj lahko si predstavljamo, da je določanje konvolucije zapleteno. Obstaja nekaj enostavnih primerov⁷, vendar so prej izjema kot pravilo. Za večino porazdelitev konvolucije ni enostavno izraziti, zato se pogosto uporabljajo numerične metode (Antal, 2003, str. 24, 25). Zaradi težav pri določanju konvolucije za ugotavljanje agregatne katastrofne škode ubremo drug pristop, ki upošteva povprečno število škod in povprečno velikost škode.

A.4 Martingal

Ko se preselimo v svet vrednotenja izvedenih instrumentov, uporabimo martingale. S pomočjo martingalov se oceni bodoča vrednost pri znanih preteklih vrednostih. Izkaže se, da je najboljša ocena trenutna vrednost.

Vemo, da na vrednost sredstev vključno z izvedenimi instrumenti vplivajo informacije o preteklih, sedanjih in morebitnih prihodnjih dogodkih. Informacije so ogrodje pri vrednotenju instrumentov, vendar se vsebini in vrsti informacij ne posvečamo. Informacije so predstavljene kot množica, ki ima določene matematične lastnosti in ustrezno algebrsko strukturo. Najpogosteje tok informacij predstavimo z zaporedjem σ -algeber. Ker se informacije s časom kopičijo, to ponazorimo z naraščajočim zaporedjem. Čeprav smo že omenili slučajne procese, jih

⁷ Konvolucija neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je normalno porazdeljena. Vsota neodvisnih normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je namreč normalno porazdeljena, natančneje če imajo slučajne spremenljivke povprečje μ in varianco δ^2 , ima n -ta konvolucija povprečje $n\mu$ in varianco $n\delta^2$ (Bowers et al., 1986, str. 325). Podobno velja tudi za gama in Poissonovo porazdelitev.

definiramo šele v tem razdelku. Slučajni procesi so neobhodni pri aktuarskem obravnavanju tveganja in škodnega dogajanja.

A.4.1 Algebra in σ -algebra

Definicija A.7: Naj bo S poljubna množica in naj bo Σ množica podmnožic množice S . Σ je algebra na S , če so izpolnjene naslednje lastnosti:

- (a) $S \in \Sigma$,
- (b) če $F \in \Sigma$, potem $F^c \in \Sigma$,
- (c) če $F, G \in \Sigma$, potem $F \cup G \in \Sigma$.

Iz definicije A.7 sledi, da za $F, G \in \Sigma$ velja $(F^c \cup G^c)^c = F \cap G \in \Sigma$. Algebra je torej množica podmnožic, ki je zaprta za končno mnogo operacij med množicami. Kot sledi iz naslednje definicije, pa σ -algebre dopuščajo števno mnogo operacij. Omenimo, da so σ -algebre naraven način za opisovanje zbirk podatkov (Williams, 1995, str. 38).

Definicija A.8: Naj bo Ω poljubna množica in naj bo Σ algebra na Ω . Σ je σ -algebra na Ω , če je izpolnjena lastnost: če $F_n \in \Sigma$, kjer je $n \in N$, potem $\bigcup_n F_n \in \Sigma$.

Vpeljimo še pojma merljivega in verjetnostnega prostora. Najprej definiramo mero. Spet naj bo Ω dana množica in Σ σ -algebra na Ω . Funkcija $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ naj bo števno aditivna in $\mu(\emptyset) = 0$. Števna aditivnost pomeni, da je $\mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_n \mu(F_n)$, kjer je $F_n \in \Sigma$ za $n \in N$ zaporedje disjunktnih množic. Funkcija μ s tema lastnostima je mera na Σ . Trojček (Ω, Σ, μ) imenujemo merljiv prostor. Če za mero μ velja, da je $\mu(\Omega) = 1$, je μ verjetnostna mera oziroma verjetnost na Σ . To lastnost verjetnostne mere imenujemo normiranost. Verjetnost označimo s P . Za merljiv prostor, opremljen z verjetnostno mero, se uporablja izraz verjetnostni prostor. Torej je verjetnost normirana mera in verjetnostni prostor merljiv prostor z normirano mero (Sarapa, 1992, str. 13).

Za opis toka informacij potrebujemo naslednji pojem. Naj bo (Ω, Σ, P) verjetnostni prostor in naj bo $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$ nepadajoča družina pod- σ -algeber v Σ , za katero velja $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq \Sigma$. Družino $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$ imenujemo filtracija, prostor (Ω, Σ, P) pa filtriran prostor⁸. S tem je definirana filtracija za diskreten primer. Če nas zanima dogajanje v zveznem času, definiramo filtracijo kot družino pod- σ -algeber $\{F_t \in \Sigma; t \geq 0\}$, za katero velja

⁸ Nekateri avtorji uporabljajo za filtriran prostor urejeno četvorko, ki je sestavljena iz množice S , σ -algebre na S , verjetnosti P na σ -algebri in filtracije.

$F_t \subseteq F_s$ za poljubna $s > t > 0$. Filtracija se običajno vpelje za časovno spremljanje toka informacij pri opazovanju slučajnih dogodkov in slučajnih procesov.

Slučajni oziroma stohastični proces X na verjetnostnem prostoru (Ω, Σ, P) je družina oziroma zbirka slučajnih spremenljivk $\{X_t; t \in I\}$, kjer je I interval, ki vsebuje nenegativna realna števila. Za dan $s \in S$ je množica $\{X_t(s); t \in I\}$ realizacija procesa X . Informacija o s po času n je sestavljena iz vrednosti $X_0(s), X_1(s), \dots, X_n(s)$, torej je realizacija slučajnega procesa X . Če bo treba, bomo namesto oznake X_t uporabili $X(t)$. Slučajni proces opisuje razvoj oziroma spreminjanje slučajnih spremenljivk v času. Vrednost procesa je odvisna od dveh spremenljivk: časa t in naključne vrednosti slučajne spremenljivke (Embrechts et al., 1999, str. 556). Procese opazujemo v diskretnem času, torej za $t = 0, 1, 2, \dots$, ali v zveznem času.

Definiramo še proces, ki je prilagojen filtraciji. Naj bo (Ω, Σ, P) filtriran prostor s filtracijo $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$. Proces $X = \{X_n; n \in N_0\}$ je prilagojen filtraciji $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$, če je X_n F_n -merljiva za vsak $n \in N_0$. Spomnimo se, da je funkcija $h: S \rightarrow R$ Σ -merljiva, če je $h^{-1}(A) = \{s \in S; h(s) \in A\}$ element σ -algebre Σ za vsak $A \in B$. Pri tem je B Borelova σ -algebra na množici realnih števil, torej je generirana z družino odprtih podmnožic v R . Za zvezni primer filtracije je definicija procesa, prilagojenega dani filtraciji, podobna kot v diskretnem primeru (Frey, 2005).

Opazujemo slučajni proces $X = \{X_n; n \in N_0\}$. Naravna filtracija, ki je prilagojena danemu procesu, je $F_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$. Naravna filtracija je najmanjša filtracija, kateri je proces X prilagojen (Embrechts et al., 1999, str. 6).

Za napovedovanje vrednosti ob času n lahko uporabimo pretekle vrednosti do časa n . Proces, kjer lahko uporabimo pretekle oziroma zgodovinske podatke za napovedovanje prihodnjih vrednosti, imenujemo napovedljiv oziroma predvidljiv. Strožja matematična definicija je naslednja. Pri oznakah kot v prejšnji definiciji je proces $X = \{X_n; n \in N_0\}$ na filtriranem prostoru napovedljiv, če je X_n F_{n-1} -merljiva.

A.4.2 Martingal in primeri

Za začetek spodbuda za vpeljavo martingalov. Naj bodo $X_1, X_2, X_3, \dots$ neodvisne slučajne spremenljivke z matematičnim upanjem 0. Naj bo delna vsota $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Iščemo oceno za S_{n+k} , če poznamo vsote $S_1, S_2, \dots, S_n$. Izračunamo pričakovano vrednost

$$\begin{aligned} E(S_{n+k} | S_1, S_2, \dots, S_n) &= E(S_n | S_1, S_2, \dots, S_n) + E(X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} | S_1, S_2, \dots, S_n) = \\ &= S_n + E(X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k}) = S_n. \end{aligned}$$

Najboljša ocena za prihodnjo vrednost S_{n+k} , pri znanih vrednostih delnih vsot do n členov, je S_n . Če X_i predstavlja izid i -te poštene igre na srečo, je S_n celoten dobiček v prvih n igrah. Iz zgornjega računa sledi, da je pričakovana vrednost skupnega dobitka po katerikoli prihodnji igri enaka sedanjemu skupnemu dobitku. To je ključna lastnost poštenih iger na srečo. Dobljene ideje vgradimo v formalno definicijo martingala.

Definicija A.9: Proces $X = \{X_n; n \in N_0\}$ je martingal na filtriranem prostoru (Ω, Σ, P) s filtracijo $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$, če veljajo naslednje lastnosti:

- (a) X je prilagojen filtraciji $\{F_n \in \Sigma; n \in N_0\}$,
- (b) $E(|X_n|) < \infty$ za vsak $n \in N_0$,
- (c) $E(X_n | F_{n-1}) = X_{n-1}$ skoraj gotovo⁹ za vsak $n \in N$.

Definicija se nanaša na diskreten primer, v zveznem primeru je smiselno prilagojena.

Definicija A.10: Proces $X = \{X_t; t \geq 0\}$ je martingal na filtriranem prostoru (Ω, Σ, P) s filtracijo $\{F_t \in \Sigma; t \geq 0\}$, če veljajo naslednje lastnosti:

- (a) X je prilagojen filtraciji $\{F_t \in \Sigma; t \geq 0\}$,
- (b) $E(|X_t|) < \infty$ za vsak $t \geq 0$,
- (c) $E(X_t | F_s) = X_s$ skoraj gotovo za vsak $t > s \geq 0$.

Navedimo tri primere martingalov, dva diskretna in enega zveznega.

Primer A.11: Naj bo $X_1, X_2, X_3, \dots$ zaporedje neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem 0 in $E(|X_n|) < \infty$ za vsak $n \in N$. Naj bo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ in $F_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ter $F_0 = \{\emptyset, \Sigma\}$. Pokažemo, da je zaporedje končnih vsot S_n martingal. Prvi dve lastnosti iz definicije martingala očitno veljata. Potrdimo, da je izpolnjena tretja lastnost. Velja

$$E(S_n | F_{n-1}) = E(S_{n-1} | F_{n-1}) + E(X_n | F_{n-1}).$$

⁹ Trditev velja skoraj gotovo, če je verjetnost, da je trditev pravilna, enaka 1 oziroma je verjetnost, da trditev ni pravilna, enaka 0.

Ker je S_{n-1} merljiva glede na F_{n-1} , je $E(S_{n-1}|F_{n-1}) = S_{n-1}$ (Williams, 1995, str. 88). Ker je X_n neodvisna od F_{n-1} , je $E(X_n|F_{n-1}) = X_n$. Zato je $E(S_n|F_{n-1}) = S_{n-1} + X_n = S_n$ in tretja lastnost iz definicije martingala je izpolnjena. Pokazali smo, da je zaporedje končnih vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk z matematičnim upanjem 0 martingal. $\square$

Primer A.12: Naj bo proces $X = \{X_n; n \in N_0\}$ markovska veriga na verjetnostnem prostoru (Ω, Σ, P) . To pomeni, da izpolnjuje markovsko lastnost (A2). V splošnem markovske verige niso martingali, ker ne zadoščajo drugi lastnosti iz definicije A.9. Naj bo $f: \Omega \rightarrow R$ omejena funkcija, za katero velja $\sum_j p_{ij} f(j) = f(i)$ za vsak i . Z i in j smo označili vsa možna stanja, p_{ij} je verjetnost prehoda iz i -tega v j -to stanje. Pokažemo, da je $f(X)$ martingal. Filtracija naj bo definirana na naraven način, kot v primeru A.11. Prvi dve lastnosti iz definicije martingala sta očitno izpolnjeni. Z upoštevanjem markovske lastnosti dobimo

$$E(f(X_n)|F_{n-1}) = E(f(X_n)|X_{n-1}) = \sum_j p_{X_{n-1}j} f(j) = f(X_{n-1}).$$

Tako smo pokazali, da je proces $f(X) = \{f(X_n); n \in N_0\}$ martingal. $\square$

Primer A.13: Pokažemo, da je Brownovo gibanje zvezni primer martingala. Brownovo gibanje $W = \{W_t; t \geq 0\}$ je zvezen proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, še več, prirastki so normalno porazdeljeni in $W_0 = 0$ (Embrechts et al., 1999, str. 1). Natančneje $W_{t+s} - W_s$ je normalno porazdeljena s povprečjem 0 in varianco t (Frey, 2005).

Filtracija naj bo naravna filtracija, ki jo generira Brownovo gibanje. Prva lastnost definicije A.10 je izpolnjena. Ker imajo slučajne spremenljivke povprečje 0, velja tudi druga lastnost. Naj bo $t > s \geq 0$. Zapišemo $E(W_t|F_s) = E(W_t - W_s + W_s|F_s) = E(W_t - W_s|F_s) + E(W_s|F_s)$. Ker so prirastki neodvisni je $E(W_t - W_s|F_s) = E(W_t - W_s) = 0$. Upoštevamo, da je $E(W_s|F_s) = W_s$, in dobimo $E(W_t|F_s) = W_s$. Pokazali smo, da je Brownovo gibanje martingal. $\square$

Pojmi, povezani z martingali, so uporabljeni v četrtem poglavju pri določanju ustrezne mere v modelu vrednotenja katastrofnih instrumentov

A.5 Esscherjeva transformacija

Esscherjeva transformacija je pomembno orodje v aktuarstvu in finančni matematiki (Yang, 2004, str. 617). Uporablja se za ocenjevanje agregatne škode, določanje zavarovalne premije in vrednotenje izvedenih instrumentov. Najprej definiramo Esscherjevo transformacijo.

Definicija A.14: Naj bo F porazdelitvena funkcija nenegativne slučajne spremenljivke X . Za dano slučajno spremenljivko je Esscherjeva transformacija s parametrom a

$$F(x; a) = \frac{\int_0^x e^{ay} dF(y)}{E(e^{ax})}, \quad (\text{A9})$$

kjer je a realno število, pri katerem obstaja momentna rodovna funkcija $M(a) = E(e^{ax})$. Če ima slučajna spremenljivka X gostoto verjetnosti f , je Esscherjeva transformacija s parametrom a

$$f(x; a) = \frac{e^{ax} f(x)}{E(e^{ax})}.$$

Kadar je iz besedila jasno, na katero spremenljivko se nanaša transformacija, navedbo spremenljivke izpustimo. Pri danem parametru a je $F(x; a)$ res porazdelitvena funkcija, saj je nenegativna, naraščajoča ter $F(0; a) = 0$ in $F(\infty; a) = 1$. Funkcija $f(x; a)$ je nenegativna in

velja $\int_0^\infty f(x; a) dx = \frac{1}{E(e^{ax})} \int_0^\infty e^{ax} f(x) dx = 1$, torej je $f(x; a)$ gostota verjetnosti. Esscherjeva

transformacija porazdelitvene funkcije je porazdelitvena funkcija, enako velja za gostoto verjetnosti in slučajno spremenljivko. Pri $a = 0$ dobimo porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti dane spremenljivke.

Esscherjeva transformacija je bila razvita za ocenjevanje agregatne škode (Yang, 2004, str. 617). Za ugotavljanje porazdelitve agregatne škode v okolici točke x je parameter Esscherjeve transformacije izbran tako, da ima transformirana porazdelitev škode povprečje x (Gerber & Shiu, 1994, str. 100). Transformacija se uporabi tudi za določanje pozavarovalne premije pozavarovanja letnega presežka škod¹⁰. Parameter Esscherjeve transformacije je določen tako, da je povprečje transformirane porazdelitve enako lastnemu deležu zavarovalnice (Gerber & Shiu, 1994, str. 100). S pomočjo Esscherjeve transformacije lahko definiramo tudi načelo za določanje

¹⁰ Pozavarovanje letnega presežka škod je neproporcionalno pozavarovanje, kjer je pozavarovalno kritje določeno s škodnim kazalcem in ne v absolutnem znesku kot pri škodno - presežkovnem pozavarovanju (Krumberger, 2002, str. 11).

zavarovalne premije¹¹. Porazdelitev škode oziroma tveganje je opisano s slučajno spremenljivko X . Premija p je

$$p = E(x; a) = \int_0^{\infty} x dF(x; a),$$

kjer je $F(x; a)$ podana z (A9) (Yang, 2004, str. 618).

V tem delu Esscherjevo transformacijo uporabimo za vrednotenje izvedenih instrumentov. Pri vrednotenju spremljamo slučajni proces, zato definiramo Esscherjevo transformacijo procesa. Za porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti ne uporabimo le argumenta x ampak tudi t . Posledično pri Esscherjevi transformaciji procesa z danim parametrom podamo tri argumente.

Definicija A.15: Naj bo $X = \{X(t); t \geq 0\}$ slučajni proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki ter $X(0) = 0$. Naj bo $F(x, t) = P(X(t) \leq x)$ porazdelitvena funkcija spremenljivke $X(t)$. Za dan a naj obstaja momentno rodovna funkcija $M(a, t) = E(e^{aX(t)})$, ki je zvezna pri $t = 0$. Esscherjeva transformacija slučajnega procesa X je slučajni proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, Esscherjeva transformacija procesa s parametrom a je

$$F(x, t; a) = \frac{\int_0^x e^{ay} dF(y)}{E(e^{aX(t)})}.$$

Če ima slučajna spremenljivka $X(t)$ za $t \geq 0$ gostoto verjetnosti $f(x, t)$, je Esscherjeva transformacija $X(t)$ s parametrom a enaka

$$f(x, t; a) = \frac{e^{ax} f(x, t)}{E(e^{aX(t)})}.$$

Poiščimo Esscherjevo transformacijo procesa tveganja $S = \{S(t); t \geq 0\}$, ki je podan z enačbo (7). Momentno rodovno funkcijo iz definicije A.1 označimo z $M(a, t) = M_{X(t)}(a) = E(e^{aX(t)})$. Ker so prirastki procesa S stacionarni in neodvisni, za zvezno momentno rodovno funkcijo velja¹²

$$M(a, t) = E(e^{aS(t)}) = E(e^{aX(1)})^t = (E(e^{aX(1)}))^t = (E(e^{aS(1)}))^t = M^t(a, 1). \quad (\text{A10})$$

Če obstaja momentno rodovna funkcija $M(a, t)$ za kakšno realno število t , potem iz enačbe (A10) sledi, da obstaja za vsako realno število (Gerber & Shiu, 1994, str. 102). Za spremenljivko

¹¹ S tem načelom lahko primerjamo in razvrščamo tveganja, kar ni mogoče z načelom povprečja, variance ali standardnega odklona (Yang, 2004, str. 618).

¹² Dosleden oris dokaza je v literaturi (Christensen, 2000a, str. 5).

$S(t)$ iščemo momentno rodovno funkcijo Esscherjeve transformacije s parametrom a . Naj bo f gostota verjetnosti slučajne spremenljivke $S(t)$ kot v definiciji A.15. Momentno rodovno funkcijo označimo z $M(x, t; a)$ in je enaka

$$M(x, t; a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xz} f(z, t; a) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xz} \frac{e^{az} f(z, t)}{E(e^{aX(t)})} dz = \frac{M(x+a, t)}{M(a, t)}. \quad (A11)$$

Ker velja enačba (A10), lahko zapišemo $M(x, t; a) = \frac{M(x+a, t)}{M(a, t)} = \frac{M^t(x+a, 1)}{M^t(a, 1)} = M^t(x, 1; a)$.

Momentno rodovna funkcija Esscherjeve transformacije slučajne spremenljivke $S(t)$ je potenca momentno rodovne funkcije Esscherjeve transformacije slučajne spremenljivke $S(1)$, torej je dovolj če poznamo slednjo. Definirali smo Esscherjevo transformacijo slučajne spremenljivke in slučajnega procesa. Izračunali smo momentno rodovno funkcijo Esscherjeve transformacije procesa tveganja S .

B NUMERIČEN PRIMER VREDNOTENJA KATASTROFNEGA RAZPONA

Uporabljene vrednosti za izračun vrednosti katastrofnega razpona so podane v razdelku 4.4. Za izračun vrednosti smo uporabili naslednji algoritem v programskem orodju in okolju R (R Development Core Team, 2008).

```
StN=array(rpois(100,130),dim=c(100,1)) #naključno število katastrof
S=array(dim=c(100,4)) #matrika z agregatnimi škodami, vrednosti katastrofnega razpona
for(i in 1:100) {S[i,1]=sum(rexp(StN[i,1],rate=1/0.150)) #agregatna škoda
                S[i,2]=min(max(Sn[i,1]-20,0),30) #vrednost katastrofnega instrumenta
                S[i,3]=Sn[i,2]*exp(6*Sn[i,1]) #števec enačbe (13)
                S[i,4]=exp(6*Sn[i,1]) #imenovalac enačbe (13)}
```

Izračunane vrednosti vseh ponovitev so navedene v tabeli B1. Povprečna agregatna katastrofna škoda je 19,92 milijard dolarjev. Vidimo, da med agregatnimi katastrofnimi škodami ni nobene škode, ki bi presegla zgornjo mejo katastrofnega razpona. Povprečna vrednost izplačilne funkcije katastrofnega razpona pa je 0,66 milijard dolarjev. V zadnjih dveh stolpcih so vrednosti števca in imenovalca enačbe (13) za posamezno ponovitev. Podrobnosti glede izbranih parametrov so pojasnjene v razdelku o numeričnem primeru, enako velja za komentarje. Tukaj so navedeni le rezultati izračunov in algoritem.

Tabela B1: Izračunane vrednosti za 100 naključno generiranih agregatnih katastrofnih škod

Ponovitev	Agregatna škoda	Vrednost katastrofnega razpona	Vrednost števca enačbe (13)	Vrednost imenovalca enačbe (13)
1	19,3917	0	0	3,39E+50
2	20,12759	0,127592026	3,58E+51	2,80E+52
3	15,33616	0	0	9,17E+39
4	16,65923	0	0	2,57E+43
5	14,82053	0	0	4,16E+38
6	12,69022	0	0	1,17E+33
7	11,84518	0	0	7,34E+30
8	22,86153	2,861534773	1,07E+60	3,73E+59
9	15,6257	0	0	5,21E+40
10	16,48583	0	0	9,08E+42
11	20,60421	0,604213053	2,96E+53	4,90E+53
12	18,69702	0	0	5,25E+48
13	18,78906	0	0	9,12E+48
14	16,91223	0	0	1,17E+44
15	13,93294	0	0	2,02E+36
16	21,53553	1,535526628	2,01E+56	1,31E+56
17	23,16524	3,165240381	7,31E+60	2,31E+60
18	16,8851	0	0	9,97E+43
19	16,72088	0	0	3,72E+43
20	19,72515	0	0	2,51E+51
21	16,21168	0	0	1,75E+42
22	21,21008	1,210076938	2,25E+55	1,86E+55
23	17,38224	0	0	1,97E+45
24	19,76859	0	0	3,25E+51
25	19,11441	0	0	6,42E+49
26	23,53962	3,539620045	7,72E+61	2,18E+61
27	21,27959	1,279588507	3,60E+55	2,82E+55
28	19,23906	0	0	1,36E+50
29	18,96566	0	0	2,63E+49
30	17,35442	0	0	1,67E+45
31	17,77549	0	0	2,08E+46
32	19,4289	0	0	4,24E+50
33	14,33161	0	0	2,21E+37
34	20,51674	0,516742002	1,50E+53	2,90E+53
35	18,80148	0	0	9,82E+48
36	24,17892	4,178920194	4,22E+63	1,01E+63
37	20,57755	0,577551845	2,41E+53	4,17E+53
38	17,5708	0	0	6,10E+45
39	18,94517	0	0	2,33E+49
40	16,83958	0	0	7,59E+43
41	17,25686	0	0	9,28E+44
42	19,02071	0	0	3,66E+49

se nadaljuje

nadaljevanje

Ponovitev	Agregatna škoda	Vrednost katastrofnega razpona	Vrednost števca enačbe (13)	Vrednost imenovalca enačbe (13)
43	15,3207	0	0	8,36E+39
44	19,73794	0	0	2,71E+51
45	19,71893	0	0	2,42E+51
46	19,16318	0	0	8,61E+49
47	18,6679	0	0	4,41E+48
48	19,30735	0	0	2,04E+50
49	17,31154	0	0	1,29E+45
50	19,3381	0	0	2,46E+50
51	16,33864	0	0	3,76E+42
52	23,31285	3,312848055	1,85E+61	5,60E+60
53	21,31707	1,317069475	4,64E+55	3,53E+55
54	20,93899	0,938986366	3,43E+54	3,65E+54
55	18,11793	0	0	1,63E+47
56	20,32338	0,323380566	2,94E+52	9,08E+52
57	22,64115	2,641151005	2,63E+59	9,94E+58
58	20,71262	0,712623751	6,69E+53	9,38E+53
59	21,40409	1,404088206	8,35E+55	5,94E+55
60	21,71954	1,719543054	6,78E+56	3,95E+56
61	20,00283	0,002834284	3,76E+49	1,33E+52
62	19,942	0	0	9,21E+51
63	16,36815	0	0	4,48E+42
64	21,9077	1,907703351	2,33E+57	1,22E+57
65	16,22497	0	0	1,90E+42
66	18,83728	0	0	1,22E+49
67	19,32285	0	0	2,24E+50
68	19,3234	0	0	2,25E+50
69	21,9443	1,944297408	2,95E+57	1,52E+57
70	23,55548	3,555481702	8,53E+61	2,40E+61
71	20,96822	0,968215304	4,21E+54	4,35E+54
72	21,63246	1,632463786	3,82E+56	2,34E+56
73	22,39799	2,397990073	5,54E+58	2,31E+58
74	20,30324	0,303238422	2,44E+52	8,04E+52
75	18,35641	0	0	6,80E+47
76	17,68766	0	0	1,23E+46
77	20,88594	0,8859417	2,35E+54	2,65E+54
78	18,53781	0	0	2,02E+48
79	19,12052	0	0	6,66E+49
80	19,51728	0	0	7,20E+50
81	17,14552	0	0	4,76E+44
82	21,9326	1,932601091	2,74E+57	1,42E+57
83	18,72714	0	0	6,29E+48
84	18,41817	0	0	9,85E+47
85	22,88728	2,887283473	1,26E+60	4,35E+59

se nadaljuje

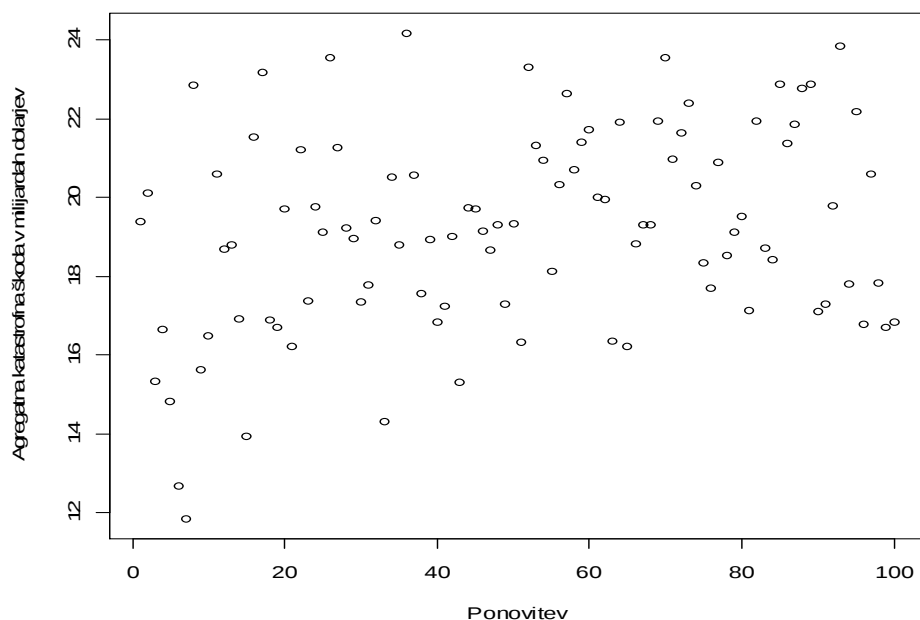
nadaljevanje

Ponovitev	Agregatna škoda	Vrednost katastrofnega razpona	Vrednost števca enačbe (13)	Vrednost imenovalca enačbe (13)
86	21,37791	1,377909734	7,00E+55	5,08E+55
87	21,85521	1,855211825	1,65E+57	8,90E+56
88	22,77527	2,775267835	6,17E+59	2,22E+59
89	22,89086	2,890856061	1,29E+60	4,45E+59
90	17,11876	0	0	4,05E+44
91	17,31126	0	0	1,29E+45
92	19,78869	0	0	3,67E+51
93	23,84466	3,844658765	5,23E+62	1,36E+62
94	17,81691	0	0	2,67E+46
95	22,1893	2,189301647	1,45E+58	6,61E+57
96	16,78065	0	0	5,33E+43
97	20,60259	0,602594035	2,92E+53	4,85E+53
98	17,84018	0	0	3,07E+46
99	16,71066	0	0	3,50E+43
100	16,83894	0	0	7,56E+43

Vir: lastni izračuni.

Na sliki B1 pa so predstavljene agregatne katastrofne škode, ki so navedene v drugem stolpcu tabele B1.

Slika B1: Agregatne katastrofne škode



Vir: lastni izračuni.

C SLOVARČEK

Adapted	prilagojen
Alternative risk transfer	alternativni prenos tveganja
Aggregate catastrophe claim	agregatna katastrofna škoda
Base	osnova
Basis risk	tveganje osnove
Binomial model	binomski model
Black–Sholes formula	Black–Sholesova formula
Black–Sholes model	Black–Sholesov model
Capacity	zmogljivost, sposobnost
Catastrophe bond	katastrofna obveznica
Catastrophe derivative	katastrofni izvedeni finančni instrument, katastrofni instrument
Catastrophic loss	katastrofna škoda
Catastrophe option	katastrofna opcija
Complete market	popoln trg
Complete model	popoln model
Compound Poisson process	sestavljen Poissonov proces
Derivative	izvedeni finančni instrument
Diversification	razpršitev
Equivalent martingale measure	ekvivalentna martingalska mera
Equivalent probability measure	ekvivalentna verjetnostna mera
Esscher transformation	Esscherjeva transformacija
Exercise price	izvršilna cena
Exposure	izpostavljenost
Forward contract	terminska pogodba
Government bond	državna obveznica
Incomplete market	nepopoln trg
Incomplete model	nepopoln model
Investment strategy	naložbena strategija
Loss event	škodni dogodek
Loss frequency	škodna pogostost
Loss index	škodni kazalec
Loss severity	velikost škode
Martingale	martingal
No-arbitrage model	model brez arbitraže
Payout function	izplačilna funkcija
PCS index	PCS kazalec
Portfolio	premoženje
Premium calculation principle	načelo določanja premije
Price	cena
Price process	proces vrednosti

Probability of loss	verjetnost bankrota
Property insurance	premoženjsko zavarovanje
Random variable	slučajna spremenljivka
Reinsurance	pozavarovanje
Risk	tveganje, riziko
Risk averse	nenaklonjenost tveganju
Risk free interest rate	netvegana obrestna mera
Risk transfer	prenos tveganja
Safety loading	varnostni dodatek
Spread	razpon
Stochastic process	slučajni proces, stohastični proces
Utility function	funkcija koristnosti
Value	vrednost
Valuation	vrednotenje