

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

**UPORABA MARKOVSKIH VERIG PRI DOLOČANJU
MATEMATIČNIH REZERVACIJ**

Ljubljana, februar 2020

ŠPELA DUGAR

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana Špela Dugar, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtorica predloženega dela z naslovom Uporaba markovskih verig pri določanju matematičnih rezervacij, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem izred. prof. dr. Mihaelom Permanom

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravila samostojno;
2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;
3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;
4. da se zavedam, da je plagiatstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;
5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;
6. da sem pridobila vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označila;
7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnala v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobila soglasje etične komisije;
8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;
9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;
10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

Ljubljana, februar, 2020.

Podpis študentke:

KAZALO

UVOD	1
1 ŽIVLJENJSKA ZAVAROVANJA	4
1.1 Pomen življenjskih zavarovanj	4
1.2 Vrste življenjskih zavarovanj	6
1.3 Princip ekvivalence	9
1.3.1 Izpeljava premij s pomočjo principa ekvivalence za različne vrste zavarovanj	10
1.3.2 Izpeljava prospektivnih (retrospektivnih) matematičnih rezervacij	10
1.3.3 Thielejeva diferencialna enačba	13
2 MARKOVSKES VERIGE V ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJIH	14
2.1 Zvezne markovske verige in markovska lastnost	14
2.1.1 Definicija jakosti prehodov	16
2.1.2 Diferencialni enačbi Kolmogorova	17
2.2 Diferencialna enačba Kolmogorova za različne vrste življenjskih zavarovanj	19
2.2.1 Življenjsko zavarovanje za primer smrti	19
2.2.2 Življenjsko zavarovanje za primer smrti s končnim številom tveganj	20
2.2.3 Življenjsko zavarovanje za primer invalidnosti in smrti	21
2.3 Standardna zavarovalna pogodba s končnim številom stanj	22
2.3.1 Zavarovalna polica modelirana s stohastičnim procesom	23
2.3.2 Modeliranje matematičnih prospektivnih rezervacij	25
2.3.3 Primer partnerskega zavarovanja za primer smrti	27
2.4 Diferencialne enačbe za višje momente sedanjih vrednosti in kriterij solventnosti	29
2.4.1 Metoda numeričnega izračuna višjih momentov	30
2.4.2 Primer numeričnega izračuna za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti	31
2.5 Uporaba markovskih verig za modeliranje stohastičnih obrestnih mer	35
2.5.1 Modeliranje obrestnih mer	35
2.5.2 Model za zavarovalna izplačila s stohastično obrestno mero	36

3 UPORABA MARKOVSKIH VERIG PRI MODELIRANJU VEDENJA ZAVAROVANCA 40

3.1	Model tveganja in vedenja	41
3.2	Denarni tokovi v modelu tveganja in vedenja	44
3.2.1	Oblikovanje rezervacij v primeru spremembe stanja zavarovanca v vedenjskem modelu - prekinitev plačevanja zavarovalnih premij	46
3.2.2	Oblikovanje rezervacij v primeru spremembe stanja zavarovanca v modelu tveganja - začasna ali trajna nezmožnost za delo . .	47
3.3	Dva posebna primera modela tveganja z enakim modelom vedenja . .	49
3.3.1	Življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti	49
3.3.2	Življenjsko zavarovanje za primer smrti	51
3.4	Izračun faktorja za zmanjšanje zavarovalne vsote v primeru prenehanja plačevanja premij	52
3.5	Numerični primeri s primerjavo in interpretacijo rezultatov	53
3.5.1	Določitev jakosti prehodov in predpostavke pogodbe	54

SKLEP 66

LITERATURA IN VIRI 68

KAZALO TABEL

1	Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti z zavarovalno vsoto 1	33
2	Centralni momenti za zvezno življenjsko rento v višini 1 letno, medtem, ko je zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo	34
3	Centralni momenti za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 za smrt in z zvezno invalidsko rento 0.5 letno, kjer zavarovanec plačuje zvezno neto premijo 0.01503 v aktivnem stanju	34
4	Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0$, e označuje stanje obrestne mere, j pa stanje police, premija pa je določena po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $\pi = 0.0131$	38
5	Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0.05, 0.5, 5, \infty$, e označuje stanje obrestne mere, j pa stanje police, premija pa je določena po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je označena s π	39
6	Jakosti prehodov za model tveganja	54

7	Jakosti prehodov za model vedenja	55
8	Vrednosti rezervacij ob različnih predpostavkah	64

KAZALO SLIK

1	Zavarovanje za primer smrti in invalidnosti	2
2	Model tveganja (levo) in model vedenja (desno)	3
3	Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer smrti	20
4	Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer smrti s končnim številom tveganj	21
5	Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti	22
6	Grafični prikaz modeliranja življenjskega partnerskega zavarovanja za primer smrti s končnim številom tveganj	28
7	Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti	32
8	Prikaz enostavnega modela markovske verige obrestnih mer s tremi stanji	36
9	Markovski proces za modeliranje obrestne mere	38
10	Model tveganja	41
11	Model vedenja	42
12	Kombiniran model	44
13	Variacije sprejetih predpostavk med modelom tveganja in modelom vedenja	54
14	Krivulja donosnosti	55
15	Verjetnosti prehodov v modelu tveganja brez reaktivacije	58
16	Verjetnosti prehodov v modelu vedenja	59
17	Verjetnosti prehodov brez reaktivacije ob predpostavki neodvisnosti .	59
18	Verjetnosti prehodov z reaktivacijo ob predpostavki neodvisnosti . . .	60
19	Kombiniran model	61
20	Verjetnosti prehodov v odvisnem modelu brez reaktivacije	62
21	Verjetnosti prehodov v odvisnem modelu z reaktivacijo	64
22	Prikaz rezervacij	66

UVOD

V zadnjih nekaj letih se na trgu življenjskih zavarovanj pojavljajo vse kompleksnejši produkti, z namenom, da zavarovalnice kar najbolj zadovoljijo potrebe svojih zavarovancev. Pri tem pa je zelo pomembno, da zavarovalnica oblikuje pravilen in varen nivo rezervacij ter poleg pogojev police upošteva tudi vedenje zavarovanca, ki se lahko tekom trajanja pogodbe spreminja. Dandanes zavarovalne pogodbe življenjskih zavarovanj dopuščajo zavarovancu možnost začasnega prenehanja plačevanja police, pri čemer se zavarovancu ponavadi proporcionalno zmanjša zavarovalna vsota glede na delež nevplačanih premij ali pa prekinitve police, kjer je zavarovanec upravičen do odkupne vrednosti police. Obe omenjeni možnosti pomembno vplivata na nivo matematičnih rezervacij in za zavarovalnico predstavljata obveznosti. Ker rezervacije kot take znižujejo nivo kapitala, zavarovalnice stremijo k njihovem zniževanju, vendar se morajo pri tem zavedati, da prenizek nivo rezervacij povečuje izpostavljenost zavarovalnice. Prav zaradi tega je za zavarovalnico zelo pomembno, da upošteva in vključi v svoje izračune vsa tveganja, tudi vedenje zavarovanca in tako oblikuje primerno višino rezervacij.

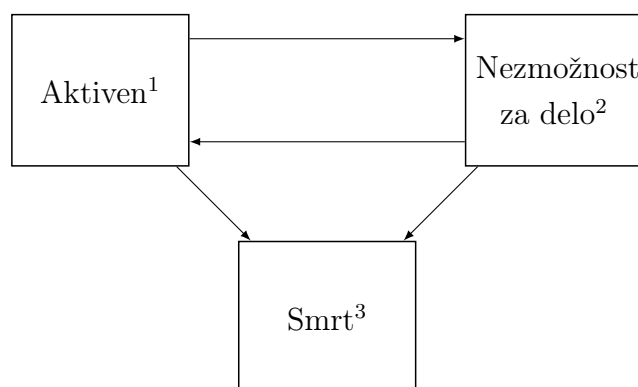
Splošen aktuarski pristop pri določanju matematičnih rezervacij za življenjska zavarovanja, kot na primer zavarovanje za primer smrti je, da se za določeno zavarovalno pogodbo najprej določi vsa možna izplačila in vplačila ter čas, v katerem se pojavijo, nato pa razliko med izplačili in vplačili diskontiramo na čas 0 in tako dobimo neto sedanjo vrednost. Težava nastopi, ko imamo opravka z življenjskimi zavarovanji, kjer je izplačilo zavarovalne vsote odvisno od stanja zavarovanca. Primeri takih zavarovanj so zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, pokojninsko zavarovanje, zavarovanje za različne kritične bolezni. Vzemimo zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, kot je prikazano na sliki (Jones, 1994).

Vidimo, da je možen prehod iz stanja invalidnosti (ali bolje rečeno stanja nezmožnosti za delo) v stanje smrti, kot tudi nazaj v aktivno stanje. Označimo obdobje, ko je zavarovanec v aktivnem stanju z 1 ter obdobje, ko je v stanju invalidnosti z 2 in predpostavimo, da je zavarovanec trenutno star x let in je v aktivnem stanju. Sedanja pričakovana neto vrednost izplačil, v primeru, ko zavarovanec v stanju invalidnosti prejema rento v višini 1, je tako enaka

$$\int_0^{\infty} v^t p_{12}(x, x+t) dt, \quad (1)$$

kjer je $p_{ij}(x, x+t)$ verjetnost, da bo zavarovanec star x let iz stanja i , v časovnem intervalu dolžine t prešel v stanje j , v^t pa predstavlja funkcijo diskontiranja. Te verjetnosti pa ni enostavno določiti, saj je potrebno upoštevati možnost večkratnega

Slika 1: Zavarovanje za primer smrti in invalidnosti

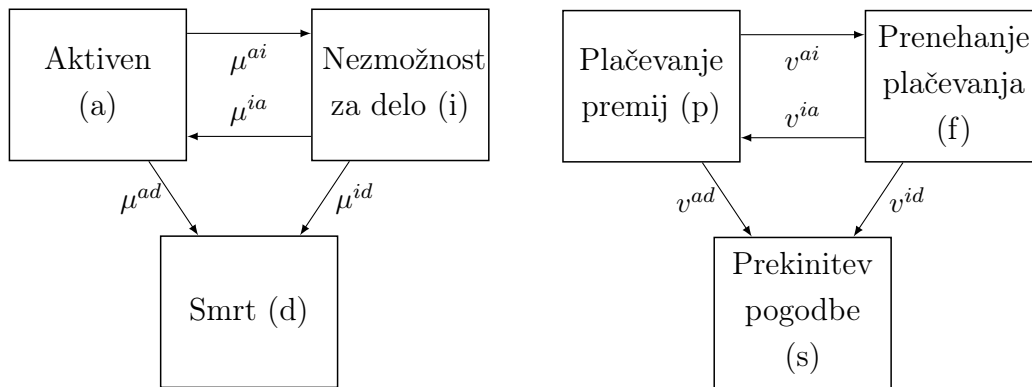


Prirejeno po Jones (1994).

prehoda zavarovanca iz stanja invalidnosti (nezmožnosti za delo) nazaj v aktivno stanje. Za izračun premij, matematičnih rezervacij ter ostalih aktuarskih vrednosti je torej ključnega pomena, da določimo verjetnosti prehodov med posameznimi stanji. Na tem mestu pa so nam lahko v veliko pomoč markovske verige. Ob predpostavki, da so jakosti prehodov za starostno obdobje enega leta med posameznimi stanji konstantne (kar se izkaže za dobro predpostavko), lahko verjetnosti prehodov dokaj enostavno določimo s pomočjo diferencialne enačbe Kolmogorova (Jones, 1994). V primeru, ko je višina izplačila zavarovalne vsote odvisna od časa, ki ga zavarovanec preživi v določenem stanju, si lahko pomagamo s semi-markovskimi verigami, ki sta jih podrobneje opisala (Cox & Miller, 1965), vendar je pri uporabi semi-markovskih verig verjetnosti prehodov težko določiti. Jones (1994) zato predlaga vključitev dodatnih stanj v prvotni model in določitev verjetnosti prehodov s pomočjo markovskih verig, ki se izkažejo za dobro aproksimacijo verjetnosti prehodov v prvotnem modelu s pomočjo semi-markovskih verig. V našem konkretnem primeru zavarovanja za primer smrti in invalidnosti, bi lahko razširili prvotni model in tako imeli stanje, ko zavarovanec prvič preide v stanje nezmožnosti za delo, ter stanje, ko je zavarovanec že večkrat prešel v stanje nezmožnosti za delo. Na ta način bi lahko ponovno z uporabo markovskih verig enostavno določili verjetnosti prehodov obenem pa upoštevali tudi zgodovino zavarovanca (Jones, 1994). V magistrskem delu bom predstavila metodo za izračun verjetnosti prehodov, matematičnih rezervacij in višjih momentov sedanjih neto vrednosti izplačil, kot jo je predstavil Norberg v knjigi Basic life insurance mathematics, ki je življenjska zavarovanja z več stanji modeliral s pomočjo markovskih verig. Metoda temelji na dejstvu, da za določitev rezervacij potrebujemo le jakosti prehodov med posameznimi stanji in ne verjetnosti prehodov. Model bomo razširili tudi z vpeljavo stohastične obrestne mere, ki bo prav tako modelirana s pomočjo markovskih verig. Markovske verige nam

bodo služile kot osnova tudi v nadaljevanju, ko se bomo osredotočili na izračun matematičnih rezervacij, glede na pričakovano vedenje zavarovanca. Dandanes se namreč zavarovalnice pogosto srečujejo s primeri, ko zavarovanec zaradi finančne nestabilnosti preneha s plačevanjem premij, vendar ne želi prekiniti police ali pa se zaradi nenadne finančne stiske odloči za prekinitev police in izplačilo delne zavarovalne vsote. Z namenom, da bi v izračunu matematičnih rezervacij upoštevali tudi različne odločitve zavarovanca tekom trajanja zavarovanja, bomo s pomočjo markovskih verig definirali kombiniran model (glej spodnjo sliko), ki bo sestavljen iz modela tveganja in modela vedenja, ki bo opisoval vedenje zavarovalca. Naš glavni cilj bo modelirati zavarovalno polico ob upoštevanju tveganja prenehanja plačevanja premij ali prekinitve police s strani zavarovanca. Izpeljali bomo sistem diferencialnih enačb za vrednotenje matematičnih rezervacij, kjer bomo enkrat predpostavili neodvisnost med modeloma in drugič odvisnost. Definirali bomo neko splošno življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti in s pomočjo numeričnega reševanja sistemov diferencialnih enačb izračunali vrednost matematičnih rezervacij, ob predpostavki neodvisnosti oz odvisnosti med modeloma, poleg tega pa obravnavali tudi razliko v vrednosti rezervacije, v primeru, ko dopuščamo v modelu tveganja prehod zavarovanca iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje.

Slika 2: Model tveganja (levo) in model vedenja (desno)



Prirejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Namen magistrskega dela se je torej soočiti s problematiko določanja matematičnih rezervacij pri življenjskih zavarovanjih z več stanji. V ta namen bomo definirali in predstavili markovske verige, ki nam bodo služile kot vodilno orodje pri modeliranju življenjskih zavarovanj z več stanji. Izpeljali bomo diferencialni enačbi Kolmogorova, ki predstavljata osnovo za izračun jakosti prehodov iz enega stanja v drugo ter vpeljali Thielejevo diferencialno enačbo, ki nam bom kasneje v pomoč

pri določanju matematičnih rezervacij za različna življenjska zavarovanja z več stanji.

Cilj magistrskega dela je torej prikazati metodo markovskih verig za izračun matematičnih rezervacij, kjer je potek zavarovanja modeliran z markovskimi verigami. Prednost te metode je, da za izračun premij in rezervacij potrebujemo le jakosti prehodov med stanji in ne posameznih verjetnosti. Metoda namreč omogoča, da s pomočjo jakosti prehodov določimo verjetnosti prehodov med posameznimi stanji. Cilj pa je teoretično izpeljavo predstaviti tudi z numeričnimi izračuni matematičnih rezervacij za konkretna zavarovanja, modelirana z markovskimi verigami, kjer se bomo posvetili določanju matematičnih rezervacij v odvisnosti od pričakovanega vedenja zavarovanca, ki ga bomo prav tako modelirali z markovskimi verigami.

Vsebina magistrskega dela je razdeljena na tri dele. V prvem delu najprej predstavimo pomen življenjskih zavarovanj in izpostavimo problematiko izračuna matematičnih rezervacij. Namen uvodnega dela je, da predstavimo osnovni princip ekvivalence za določanje neto premij in izpeljemo Thielejevo diferencialno enačbo, saj bomo v nadaljevanju z njeno pomočjo numerično določali matematične rezervacije. V drugem delu se posvetimo modeliranju življenjskih zavarovanj z več stanji, kjer se soočimo s problemom določitve verjetnosti prehodov iz enega stanja v drugo stanje. Problem razrešimo z vpeljavo markovskih verig. Predstavili bomo način za določanje premij, matematičnih rezervacij in višjih momentov sedanjih vrednosti ter s pomočjo markovskih verig vpeljali še stohastično obrestno mero. V zadnjem, tretjem, delu pa se posvetimo izračunu matematičnih rezervacij glede na pričakovano vedenje zavarovanca. S pomočjo markovskih verig definiramo model tveganja in model vedenja. Za model tveganja vzamemo življenjsko zavarovanje za primer invalidnosti in smrti, model vedenja pa opišemo s tremi možnimi stanji in sicer v prvem stanju zavarovanec plačuje premije, v drugem stanju preneha s plačevanjem premij, vendar pogodbe ne prekine, v tretjem stanju pa se zavarovanec odloči za prekinitev zavarovalne pogodbe. Poglavje zaključimo z numeričnimi izračuni rezervacij.

1 ŽIVLJENJSKA ZAVAROVANJA

1.1 Pomen življenjskih zavarovanj

S staranjem prebivalstva v razvitih državah in posledično manjšanjem socialnega varstva dobivajo življenjska zavarovanja dandanes vedno večji pomen. Življenjska zavarovanja namreč nudijo finančno podporo najbližjim v primeru smrti

zavarovanca, hkrati pa zagotavljajo ohranitev življenjskega standarda v primeru bolezni ali invalidnosti posameznika. Nenazadnje pa predstavljajo tudi obliko varčevanja za starost in nudijo posameznikom, v zameno za redno vplačilo premij v času delovne dobe, izplačilo (ali mesečna izplačila anuitet) ob upokojitvi (Booth in drugi, 2004). Pri življenjskih zavarovanjih zavarovalne pogodbe za zavarovalnico pomenijo dolgoročne naložbe. Z namenom, da zavarovalnice lahko zagotovijo svojim zavarovancem izplačila zavarovalnih vsot v primeru neljubega dogodka in tako ohranijo finančno stabilnost ter solventnost (podrobnejša pravila za solventnost določata Sklep o lastni oceni tveganj in solventnosti 2016 ter Direktiva 2009/138/ES Evropskega Parlamenta in Sveta z dne 25. novembra 2009 o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja), morajo nujno oblikovati matematične rezervacije. Pri določanju višine in izbire ustreznega modela za izračunavanje matematičnih rezervacij morajo zavarovalnice upoštevati Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehničnih rezervacij (2016) in Zakon o spremembah in dopolnitvah Zakona o zavarovalništvu (ZZavar-1A), uradni list RS, št. 9/2019, ki podrobneje opredeljujeta način in primernost oblikovanih rezervacij. V splošnem za izračun matematičnih rezervacij zavarovalnice razliko med pričakovanimi izplačili (zavarovalne vsote v primeru škodnega dogodka) in vplačili (premije), s pomočjo izbrane obrestne mere, diskontirajo na želeno časovno točko in na ta način določijo neto sedanjo vrednost bodočih izplačil. Vsi ti postopki so že znani in podrobno opisani med drugim tudi v (Bowers, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt, 1997). Tipično pri življenjskih zavarovanjih je, da ne vemo, kdaj bo prišlo do izplačila zavarovalne vsote, medtem ko je višina zavarovalne vsote znana vnaprej. To je glavni razlog, da zavarovalnice izračunavajo pričakovano sedanjo vrednost. Ko imamo opravka z zavarovanjem za primer smrti, je pričakovano sedanjo vrednost izplačila dokaj enostavno izračunati, saj imamo opravka z eno samo slučajno spremenljivko in to je tipično življenjska doba zavarovanca, ki jo bomo označili s T_x (Bowers, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt, 1997). V tem primeru je pričakovana neto sedanja vrednost izplačil za zavarovalno vsoto v vrednosti 1, za primer smrti zavarovanca starega x let, enaka

$$E[v^{T_x}] = \int_0^\infty v^t p_x \mu_{x+t} dt. \quad (2)$$

Problem pa nastopi, ko imamo opravka z življenjskimi zavarovanji z več možnimi stanji zavarovanca. Pri takih zavarovanjih je izplačilo zavarovalne vsote odvisno od trenutnega stanja zavarovanca in moramo tako oceniti verjetnosti vseh možnih prehodov med stanji. Izračun teh verjetnosti in matematičnih rezervacij v takih primerih pa ni tako enostaven (Jones, 1994). Za izračun matematičnih rezervacij v takih primerih, nam bo pomagala metoda markovskih verig, ki jo bomo predstavili v 2. poglavju.

1.2 Vrste življenjskih zavarovanj

Pri življenjskih zavarovanjih je edina neznana komponenta čas izplačila zavarovalne vsote, ki pa postane znana takrat, ko zavarovanec dejansko umre. Ker je sedanja vrednost prihodnjih izplačil odvisna od časa izplačila v prihodnosti, je torej sedanja vrednost funkcija časa in zato modelirana kot slučajna spremenljivka. S pomočjo funkcije preživetja in obrestne mere pa lahko izpeljemo porazdelitev sedanje vrednosti izplačil in ji določimo pričakovano vrednost in varianco (Dickson, Hardy & Waters, 2009, str. 75).

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali denarne tokove in sedanje vrednosti elementarnih zavarovanj, to so zavarovanje za primer doživetja, zavarovanje za primer smrti, mešano zavarovanje in življenjske rente. Pomembne so zato, ker bomo v naslednjem poglavju z njihovo pomočjo (ali kombinacijo dveh) definirali denarne tokove pri zavarovanjih z več stanji. Predpostavili bomo, da je izplačilo zavarovalne vsote ob smrti zavarovanca enako 1. Ta način nam omogoča razvoj vrednotenja na enoto zavarovalne vsote in tako lahko kasneje pomnožimo z dejansko zavarovalno vsoto za različne zneske nadomestil. Poleg tega bomo predpostavili, da se izplačilo zavarovalne vsote zgodi neposredno po smrti (Dickson, Hardy & Waters, 2009, str 76).

Kljub temu, da ta predpostavka ne sovпада z zavarovalniško prakso, pa ima to prednost, da lahko neposredno iz tablic smrtnosti ovrednotimo vse formule in izračune (Gerber, 1996).

V praksi je običajno kratka zamuda med datumom smrti in časom, ko zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto (zaradi obvestila zavarovalnici in pravne formalnosti), vendar je ta učinek zanemarljiv, kar pomeni, da naša predpostavka ne vpliva bistveno na končni rezultat (Dickson, Hardy & Waters, 2009, str 76).

Zavarovanje za primer doživetja

Pri zavarovanju za primer doživetja (angl. pure endowment) za obdobje n let se zavarovancu izplača zavarovalno vsoto samo v primeru, če je zavarovanec ob koncu n -tega še živ. Sedaj pa poenostavimo in predpostavimo, da imamo fiksno obrestno mero r in da je zavarovalna vsota enaka 1. S T_x označimo slučajno spremenljivko, ki označuje življenjsko dobo zavarovanca danes starega x let. Naj bo I_t indikatorska funkcija, ki vrne 1, če zavarovanec danes star x preživi do časa t , oziroma $T_x > t$ (Van der Molen, 2017, str.11). Potem je sedanja vrednost (označimo jo z PV) zavarovanja za primer doživetja v času 0 enaka

$$PV^{e;i} = e^{-rn} I_n. \quad (3)$$

Pričakovana sedanja vrednost pogodbe je tako enaka

$${}_nE_x = E[e^{-rn}I_n] = e^{-rn}E[I_n] = e^{-rn}P(T_x > n) = e^{-rn}{}_np_x, \quad (4)$$

kjer smo upoštevali, da je pričakovana vrednost naše indikatorske funkcije I_n enaka ${}_np_x$, torej verjetnosti, da zavarovanec danes star x let preživi celotno obdobje trajanja police, torej n let. Za pridobitev merila tveganja za naša štiri osnovna zavarovanja je smiselno izračunati poleg pričakovane vrednosti tudi varianco sedanje vrednosti pogodbe, za kar potrebujemo drugi moment sedanje vrednosti PV . Za vsak $q > 0$ in upoštevanjem $I_n^q = I_n$ je q -ti moment enak

$$E[(PV^{e;n})^q] = E[(e^{-rn}I_n)^q] = e^{-qrn}{}_np_x = {}_nE_x^{qr}, \quad (5)$$

kjer zgoraj nadpisana oznaka (qr) označuje jakost obrestne mere. Varianca sedanje vrednosti zavarovanja za primer doživetja je tako enaka (Van der Molen, 2017, str.11)

$$V[(PV^{e;n})] = E[(PV^{e;n})^2] - {}_nE_x^2 = {}_nE_x^{2r} - {}_nE_x^2. \quad (6)$$

Zavarovanje za primer smrti

Pri zavarovanju za primer smrti v trajanju n let se izplača zavarovalno vsoto samo v primeru, če zavarovanec umre znotraj trajanja pogodbe, torej v prvih n letih. Sedanja vrednost v času 0 je enaka (Van der Molen, 2017, str.11)

$$PV^{ti;n} = e^{-rT_x}(1 - I_n) \quad (7)$$

in je enaka e^{-rT_x} če zavarovanec umre znotraj trajanja pogodbe in 0 če preživi. Pričakovana sedanja vrednost pri zavarovanju za primer smrti, ki je v splošnem k označena $A_{x:\overline{n}|}^{(qr)}$, je enaka (Van der Molen, 2017, str.11)

$$E[(PV^{ti;n})^q] = A_{x:\overline{n}|}^{(qr)}. \quad (8)$$

Omenimo, da zgoraj nadpisana oznaka (qr) označuje jakost obrestne mere. Varianca je tako enaka

$$V[PV^{(ti;n)}] = A_{x:\overline{n}|}^{(2r)} - A_{x:\overline{n}|}^2. \quad (9)$$

Mešano zavarovanje

Pri mešanem zavarovanju se zavarovalna vsota izplača v trenutku smrti, če ta nastopi, sicer pa se izplača ob koncu trajanja pogodbe. Sedanja vrednost v času 0 je (Van der Molen, 2017, str.12)

$$PV^{ei;n} = e^{-r(T_x \wedge n)}, \quad (10)$$

pričakovana sedanja vrednost pa je enaka

$$E[PV^{ei;n}] = {}_n\bar{A}_x = \int_0^n e^{-r\tau} {}_\tau p_x \mu_{x+t} d\tau + e^{-rn} {}_n p_x = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + {}_n E_x. \quad (11)$$

Kot lahko opazimo iz zgornje enačbe, gre pri mešanem zavarovanju pravzaprav za vsoto pričakovane sedanje vrednosti za primer doživetja ${}_n E_x$ in pričakovane sedanje vrednosti zavarovanja za primer smrti $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1$. Tukaj nadpisana oznaka 1 pomeni, da je zavarovanec upravičen do izplačila zavarovalne vsote, v primeru smrti v obdobju n let. Brez nadpisane oznake $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ pa pomeni, da gre za vseživljenjsko zavarovanje, kjer se zavarovalna vsota izplača ob smrti zavarovanca. Podobno kot zgoraj, je q -ti moment

$$E[(PV^{ei;n})^q] = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{(qr)} \quad (12)$$

in tako je varianca enaka

$$V[PV^{ei;n}] = \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{(2r)} - \bar{A}_{x:\overline{n}|}^2. \quad (13)$$

Življenjska renta

Življenjska renta je oblika zavarovanja, ki izplačuje kontinuirane obroke (mesečne, ali letne) v višini 1 dokler je oseba živa, vendar največ n let, kolikor traja pogodba. Tako je sedanja vrednost življenjske rente v času 0 enaka (Van der Molen, 2017, str.12)

$$PV^{a;n} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-r(T_x \wedge n)}}{r}, \quad (14)$$

pričakovana sedanja vrednost pa

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\tau|\tau} p_x \mu_{x+t} d\tau + \bar{a}_{\overline{n}|n} p_x, \quad (15)$$

ki jo lahko poenostavimo v

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-r\tau} {}_\tau p_x d\tau. \quad (16)$$

Zgornjo enačbo dokažemo z integriranjem $\bar{a}_{\overline{n}|n} p_x$ po delih (glej Norberg, 2002, str. 41). Lahko pa opazimo, da je pričakovana sedanja vrednost plačil v času 0 v vsakem časovnem intervalu $(\tau, \tau + d\tau)$ enaka $e^{-r\tau} d\tau {}_\tau p_x$. Ko seštejemo po vseh časovnih

intervalih dobimo zgornjo enačbo. Q -ti moment in varianca sta enaki (za podrobno izpeljavo glej Norberg, 2002, str 41-42)

$$E[(PV^{a;n})^q] = \frac{q}{r^{q-1}} \sum_{p=1}^q (-1)^{p-1} \binom{q-1}{p-1} \bar{a}_{x:\overline{n}|}^{(pr)} \quad (17)$$

$$V[PV^{a;n}] = \frac{2}{r} (\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}^{(2r)}) \bar{a}_{x:\overline{n}|}^2. \quad (18)$$

1.3 Princip ekvivalence

Ob sklenitvi zavarovalne pogodbe mora zavarovanec praviloma plačati premijo. Zavarovalnice oblikujejo višino premije tako, da bodo sposobne s pomočjo zbranih premij v prihodnosti zagotoviti izplačilo zavarovalne vsote oz. vseh obveznosti, ki so zapisane v pogodbi. Osnovna metoda za določitev premij je princip ekvivalence, ki predpostavi, da sta v določenem trenutku pričakovana sedanja vrednost bodočih premij in pričakovana sedanja vrednost bodočih izplačanih odškodnin enaki. Premijo se izračunava po principu ekvivalence individualno za vsako polico posebej. Brez upoštevanja stroškov izračunano premijo imenujemo neto premija. Zavarovanec se lahko odloči za enkratno premijo, ki jo poravna ob sklenitvi pogodbe za celotno trajanje pogodbe. Ker pa je ponavadi ta znesek previsok, se v praksi večina odloči za plačevanje mesečnih ali pa letnih premij tekom trajanja pogodbe. Tukaj pa je potrebno upoštevati dejstvo, da zavarovanec plača premijo le v primeru, če je na začetku meseca oz. leta še živ. Predpostavimo, da imamo m -letno življenjsko zavarovanje za primer smrti, kjer se premije vplačujejo zvezno s fiksno jakostjo π . Sedanja vrednost bodočih premij našega zavarovanja je tako enaka $\pi PV^{a;m}$, pričakovana sedanja vrednost bodočih premij pa je $\pi \bar{a}_{x:\overline{n}|}$. Tveganje, ki ga zavarovalnica prevzame ob sklenitvi pogodbe je negotovost glede časa izplačila odškodnine in koliko prihodkov bo z vplačanimi premiji pridobila preden pride do izplačila zavarovalne vsote, kar je odvisno od življenjske dobe zavarovanca. Za zavarovalnico je tako pomembna vrednost slučajne spremenljivke, ki predstavlja sedanjo vrednost bodočih odškodnin zmanjšani za vplačane premije. Zapisano s formulo

$$PV = PV^b - \pi PV^{a;m}, \quad (19)$$

kjer PV^b predstavlja sedanjo vrednost bodočih izplačanih škod in $PV^{a;m}$ sedanjo vrednost bodočih vplačanih premij. Predpostavimo, da se premije plačujejo zvezno, s fiksno jakostjo vplačil π . Vzemimo primer m -letnega življenjskega zavarovanja za primer smrti in označimo sedanjo vrednost bodočih premij s $\pi PV^{a;m}$ ter pričakovano sedanjo vrednost bodočih premij s $\pi \bar{a}_{x:\overline{n}|}$. Princip ekvivalence pravi, da je pričakovana sedanja vrednost premij enaka pričakovani sedanji vrednosti bodočih

izplačanih odškodnin. V povprečju, naj bi bila vsota plačanih premij enaka bodočim izplačilom odškodnin. Torej zapisano v matematični obliki, princip ekvivalence pravi

$$E(PV) = 0, \quad (20)$$

kar pomeni, da je neto (neto tukaj pomeni razliko med izplačili in vplačili) sedanja vrednost bodočih izplačanih neto odškodnin enaka 0 (Norberg, 2002, str 44-45).

Princip ekvivalence deluje na osnovi razpršitve tveganj na večjem portfelju, kjer se predpostavi, da je bodoče gibanje obrestnih mer in ostalih ekonomskih parametrov znano vnaprej (Slapar, 2006).

1.3.1 Izpeljava premij s pomočjo principa ekvivalence za različne vrste zavarovanj

S pomočjo principa ekvivalence bomo v tem poglavju izpeljali splošne formule za določitev premije življenjskih zavarovanj, ki smo jih obravnavali v razdelku 1.2.

Za **zavarovanje za primer doživetja** z upoštevanjem principa ekvivalence $E(PV) = 0$ imamo $PV = PV^b - PV^{e;n}$, tako dobimo, da je jakost premije enaka

$$\pi = \frac{{}_nE_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (21)$$

V primeru **zavarovanja za primer smrti** dobimo s pomočjo principa ekvivalence $PV^b = PV^{ti;n}$, kar pomeni, da je jakost premije enaka

$$\pi = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (22)$$

Pri **mešanem zavarovanju** je premija ob upoštevanju principa ekvivalence $PV^b = PV^{ei;n}$ enaka

$$\pi = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (23)$$

Izpeljimo še premijo za **m-letno odloženo življenjsko rento za obdobje n let**, kjer se letna neto premija plačuje med obdobjem odloga (torej m let) za kasnejšo prejemanje življenjske rente v višini 1 z začetkom izplačevanja čez m let za dobo n let. Z upoštevanjem principa ekvivalence $PV^b = PV^{ai,m}$ sledi, da je premija enaka

$$\pi = \frac{{}_m|{}_n\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} - 1. \quad (24)$$

1.3.2 Izpeljava prospektivnih (retrospektivnih) matematičnih rezervacij

Zakon o spremembah in dopolnitvah Zakona o zavarovalništvu ZZavar-1A podrobneje opredeljuje, da morajo zavarovalnice pri sklepanju življenjskih zavarovanj

oblikovati ustrezne matematične rezervacije.

Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehniških rezervacij določa, da zavarovalnice oblikuje rezervacije za bodoče obveznosti in to individualno za vsako polico. Matematične rezervacije so tako enake sedanji vrednosti vseh bodočih izplačil zmanjšane za pričakovano sedanjo vrednost bodočih vplačil in sicer za vsako polico posebej. Torej ob sklenitvi pogodbe princip ekvivalence velja, kasneje pa se sedanji vrednosti bodočih izplačil in vplačil premij spreminjata, saj sta odvisni od parametrov, kot so obrestna mera, življenjska doba zavarovanca, itd., ki pa se v času trajanja pogodbe spreminjata in realizirata drugače, kot smo sprva pričakovali (Slapar, 2006, str. 6).

Vzemimo primer mešanega zavarovanja za obdobje n let in predpostavimo, da je zavarovanec ob sklenitvi zavarovanja star x let. Označimo z b_t , izplačilo zavarovalne vsote v primeru, ko zavarovanec umre v časovnem intervalu $t \in (0, n)$ ter z b_n izplačilo zavarovalne vsote, ko zavarovanec preživi obdobje n let. Nadalje π_0 označuje začetno premijo, ki jo zavarovanec poravnava takoj ob sklenitvi zavarovanja, kasneje tekom trajanja pogodbe pa zavarovanec vplačuje premije zvezno z jakostjo π_t , kjer je $t \in (0, n)$. Nazadnje predpostavimo še, da je obrestna mera deterministična funkcija in jo označimo z r_t . Tako je pričakovana sedanja vrednost bodočih izplačil zmanjšanih za vplačane premije v času 0 za našo pogodbo enaka diskontirani vrednosti pričakovanih denarnih tokov v vsakem dovolj manjhnem časovnem intervalu

$$-\pi_0 + \int_0^n e^{-\int_0^\tau r_s ds} {}_\tau p_x \{\mu_{x+\tau} b_\tau - \pi_\tau\} d\tau + b_n e^{-\int_0^n r_s ds} {}_n p_x. \quad (25)$$

Po principu ekvivalence je zgornji izraz enak 0 in s tem lahko določimo višino premije (Norberg, 2002, str. 45-46).

Zgornji izraz (25) predstavlja povprečno oceno vrednosti prihodnjih denarnih tokov v času $t = 0$. Zavarovalnice pa morajo v vsakem trenutku $t > 0$ na novo oblikovati matematično rezervacije na podlagi razpoložljivih informacij do časa t . Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehniških rezervacij zahteva, da morajo biti matematične rezervacije oblikovane na prospektiven način, to pomeni, da zavarovalnica bodoča izplačila zmanjšana za vplačila premij diskontira nazaj v časovno točko t . Tako je matematična rezervacija za mešano zavarovanje v času t , pri pogoju, da je zavarovanec še živ enaka

$$V_t = \int_t^n e^{-\int_t^\tau r_s ds} {}_{\tau-t} p_{x+t} \{\mu_{x+\tau} b_\tau - \pi_\tau\} d\tau + b_n e^{-\int_t^n r_s ds} {}_{n-t} p_{x+t}, \quad (26)$$

kjer je $b_\tau \in [t, n)$ zavarovalna vsota za primer smrti in b_n zavarovalna vsota izplačana v primeru doživetja ter π premija. Vrednost V_t imenujemo prospektivna matematična rezervacija, saj "gleda v prihodnost", kar pomeni, da pričakovane

bodoče neto denarne tokove diskontira nazaj v neko časovno točko t . Po principu ekvivalence se jo imenuje tudi neto premijska rezervacija. Ko vstavimo za ${}_{\tau-t}p_{x+t} = e^{-\int_t^{\tau}(\mu_{x+s})ds}$ dobimo

$$V_t = \int_t^n e^{-\int_t^{\tau}(r_s+\mu_{x+s})ds} \{\mu_{x+\tau}b_{\tau} - \pi_{\tau}\}d\tau + e^{-\int_t^{\tau}(r_s+\mu_{x+s})ds}b_n. \quad (27)$$

V primerih, ko premije ob sklenitvi zavarovalne pogodbe ni mogoče določiti za celotno trajanje pogodbe, pa Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehniških rezervacij dovoljuje oblikovanje matematičnih rezervacij na retrospektiven način. Retrospektivno matematično rezervacijo za neko polico oblikujemo tako, da pretekla izplačila in vplačila obrestujemo naprej v časovno točko t tako dobimo, da je

$$V_t = e^{\int_0^t(r_s+\mu_{x+s})ds}\pi_0 + \int_0^t e^{\int_{\tau}^t(r_s+\mu_{x+s})ds} \{\pi_{\tau} - \mu_{x+\tau}b_{\tau}\}d\tau. \quad (28)$$

Zgornji izraz (28) izraža presežek transakcij v preteklosti akumuliranih na čas t . Oglejmo si izpeljave neto premijskih rezervacij za naše štiri splošne oblike življenjskih zavarovanj. Predpostavimo, da imamo fiksno obrestno mero in da so premije določene po principu ekvivalence, kar pomeni, da velja

$$V_0 = \pi_0. \quad (29)$$

V primeru **zavarovanja za primer doživetja**, kjer se premije vplačujejo zvezno s fiksno jakostjo vplačil π je neto rezervacija v času t enaka

$$\begin{aligned} V_t &= {}_{n-t}E_{x+t} - \pi \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= {}_{n-t}E_{x+t} - \frac{{}_nE_x}{\bar{a}_{t:\overline{n}|}} \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned} \quad (30)$$

Dalje, za **zavarovanje za primer smrti** za obdobje n let, kjer je letna neto premija enaka π je neto rezervacija v času t enaka

$$\begin{aligned} V_t &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}^1 - \pi \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1 - r\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{n-t}E_{x+t} - \frac{1 - r\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1 - {}_{n-t}E_{x+t} - (1 - {}_nE_x) \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Pri **mešanem zavarovanju** s trajanjem n let in jakost premije π pa je neto rezervacija enaka

$$\begin{aligned} V_t &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \pi \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1 - r\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{1 - r\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Kot lahko vidimo iz izraza (32), je rezervacija pri mešanem zavarovanju enaka vsoti rezervacij (30) in (31).

V vseh zgornjih primerih je V_t nenegativna funkcija, vendar to ni posledica definicije. Razlog je v tem, da ima zavarovanec v primeru, da je $V_t < 0$ na nek način dolg do zavarovalnice, kar bi ga spodbudilo do preklica pogodbe in s tem odplačila dolga. Zato je v praksi potrebno, da je (Norberg, 2002, str 47-50)

$$V_t \geq 0, t \geq 0. \quad (33)$$

1.3.3 Thielejeva diferencialna enačba

Ogljemo si mešano zavarovanje za obdobje n let oziroma $t \in (0, n)$. Za nek manjši časovni interval, lahko spreminjanje matematičnih rezervacij zapišemo kot

$$V_t = b_t \mu_{x+t} dt - \pi_t dt + (1 - \mu_{x+t} dt) e^{-r dt} V_{t+dt}. \quad (34)$$

Torej je vrednost matematičnih rezervacij enaka izplačani zavarovalni vsoti b_t pomnoženo z verjetnostjo, da zavarovanec v časovnem intervalu $(t, t + dt)$ umre, zmanjšani za vrednost vplačanih premij do časa t , kjer predpostavimo, da je zavarovanec v času t še živ in povečani za diskontirano vrednost matematičnih rezervacij potrebnih v času $t + dt$ pomnoženih z verjetnostjo, da je zavarovanec preživi obdobje $(t, t + dt)$. Če na obeh straneh enakosti odštejemo V_{t+dt} ter delimo z dt , dobimo z limo, ko gre dt proti 0 naslednjo enakost

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V_t - V_{t+dt}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left(b_t \mu_{x+t} - \pi_t + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{e^{-r dt} - 1}{dt} \mu_{x+t} V_{t+dt} \right). \quad (35)$$

Z upoštevanjem, da je $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{e^{-r dt} - 1}{dt} = -r$ dobimo

$$\frac{d}{dt} V_t = \pi_t - b_t \mu_{x+t} + (r + \mu_{x+t}) V_t. \quad (36)$$

Zgornjo enačbo (36) imenujemo *Thielejeva diferencialna enačba* (Slapar, 2006, str. 7).

Desna stran enačbe prikazuje spremembo matematičnih rezervacij glede na čas t za preživelega zavarovanca, torej matematične rezervacije se povečajo za razliko med vplačano premijo in izplačano zavarovalno vsoto (razlika je lahko tudi negativna), za obresti rV_t ter za sredstva, ki so ostala od umrlih zavarovancev, torej $rV_t \mu_{x+t}$. Z upoštevanjem robnega pogoja

$$V_{n-} = b_n, \quad (37)$$

nam diferencialna enačba (36) natančno določi matematično rezervacijo V_t za fiksni vrednosti b in π , ki sta določeni tako, da ustrezata principu ekvivalence (29), tj. $V_t = \pi_0$ (Norberg, 2002, str. 52). Omenimo, da nam bo kasneje prav Thielejeva

diferencialna enačba v veliko pomoč pri numeričnem izračunavanju matematičnih rezervacij. Z malo preurejanja Thielejeve diferencialne enačbe (36) dobimo

$$\pi_t = \frac{d}{dt}V_t - rV_t + (b - V_t)\mu_{x+t}. \quad (38)$$

Zgornji enačba nam pokaže, da lahko premijo v vsakem trenutku t razbijemo na dve komponenti, kjer je

$$\pi_t^s = \frac{d}{dt}V_t - rV_t, \quad (39)$$

tako imenovana *varčevalna premija* namenjena za vzdrževanje neto rezervacije, in

$$\pi_t^r = (b - V_t)\mu_{x+t}, \quad (40)$$

tako imenovana *nevarnostna premija*, ki zagotavlja potreben znesek v višini nad doseženimi vrednostmi matematičnih rezervacij za kritje škod (Norberg, 2002, str. 53).

2 MARKOVSKES VERIGE V ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJIH

V tem poglavju se bomo posvetili modeliranju zavarovanj z več stanji. Z vpeljavo markovskih verig bomo lahko določili verjetnosti prehodov zavarovanca iz enega stanja v drugo stanje. Na ta način bomo oblikovali način za določanje premij, rezervacij ter višjih momentov sedanjih vrednosti zavarovanj, kot jih je opredelil Ragnar Norberg (2002) v knjigi Basic life insurance mathematics, ki bo glavno vodilo celotnega poglavja.

2.1 Zvezne markovske verige in markovska lastnost

Naj bo $\{Z(t); t \geq 0\}$ stohastični proces na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, kjer $Z(t)$ predstavlja zavarovančevo stanje v času $t \geq 0$. Označimo z $\mathcal{Z} = \{1, 2, \dots, k\}$ končno množico vseh možnih stanj. To pomeni, da je stohastični proces v celoti opredeljen z elementarnimi dogodki $\cap_{h=1}^p [Z(t_h) = j_h], t_1 < t_2 < \dots < t_p$ na intervalu $[0, n]$ in $j_1, \dots, j_p \in \mathcal{Z}$. Tako dobimo, da je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p] \\ = \prod_{h=1}^p \mathbb{P}[Z(t_h) = j_h | Z(t_g) = j_g, g = 0, \dots, h-1], \end{aligned} \quad (41)$$

kjer smo upoštevali $t_0 = 0$ in $j_0 = 0$, tako da je $[Z(t_0) = j_0]$ trivialen dogodek z verjetnostjo 1. Zgornjo enakost (41) lahko precej poenostavimo, če predpostavimo,

da za vse $t_1 < \dots < t_p$ na intervalu $[0, n]$ in za $j_1, \dots, j_p \in \mathcal{Z}$ velja:

$$\mathbb{P}[Z(t_p) = j_p | Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p-1] = \mathbb{P}[Z(t_p) = j_p | Z(t_{p-1}) = j_{p-1}], \quad (42)$$

kar pomeni, da je proces dobro definiran z vpeljavo prehodnih verjetnosti (glej Hoem, 1969, str. 91), to je

$$p_{jk}(t, u) = \mathbb{P}[Z(u) = k | Z(t) = j], \quad (43)$$

kjer je $t < u$ na intervalu $[0, n]$ in $j, k \in \mathcal{Z}$. Lastnosti (42) pravimo *lastnost Markova*. Slučajni proces $Z(t)$ je markovska veriga, če ima markovsko lastnost, to je, če za vsak $s, t \geq 0$ in $i, j, z(t) \in \mathcal{Z}$ velja

$$\mathbb{P}[Z(s+t) = j | Z(s) = i, Z(u) = z(u), 0 \leq u < s] = \mathbb{P}[Z(s+t) = j | Z(s) = i]. \quad (44)$$

To pomeni, da bo to kar se bo dogajalo v prihodnosti s procesom $Z(t)$, torej po času s , odvisno samo od tega, v katerem stanju je proces v času s in ne od tega, kakšno pot je proces opravil do časa s (Slapar, 2006, str. 11).

Z upoštevanjem markovske lastnosti (42) se nam zgornji izraz (41) poenostavi v

$$\mathbb{P}[Z(t_h) = j_h | h = 1, \dots, p] = \prod_{h=1}^p p_{j_{h-1}, h}(t_{h-1}, t_h), \quad (45)$$

procesu $Z(t)$ pa pravimo markovska veriga (za podrobnosti glej Koller, 2012, str. 7-21).

Ekvivalentno lahko pokažemo, da za vse $t_1 < \dots < t_p < t < t_{p+1} < \dots < t_{p+q}$ na intervalu $[0, n]$ in $j_1, \dots, j_p, j, j_{p+1}, \dots, j_{p+q} \in \mathcal{Z}$, velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z(t_h) = j_h | h = p+1, \dots, p+q | Z(t) = j, Z(t_h) = j_h, h = 1, \dots, p] \\ = \mathbb{P}[Z(t_h) = j_h, h = p+1, \dots, p+q | Z(t) = j]. \end{aligned} \quad (46)$$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da stohastični proces $Z(t)$ ima markovsko lastnost in ga temu primerno imenovali markovska veriga v zveznem času (za podrobnejšo predstavitev markovskih verig glej Grimmet & Stirzaker, 2001, str. 256-296).

Splošneje lahko prehodne verjetnosti definiramo kot verjetnost prehoda iz stanja j v neko podmožico $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$,

$$p_{j\mathcal{K}}(t, u) = \mathbb{P}[Z(u) \in \mathcal{K} | Z(t) = j] = \sum_{k \in \mathcal{K}} p_{j,k}(t, u). \quad (47)$$

Seveda tukaj velja

$$p_{j\mathcal{Z}}(t, u) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} p_{j,k}(t, u) = 1, \quad (48)$$

saj smo za splošni primer vzeli celotno množico stanj $\mathcal{Z}$ (Norberg, 2002, str. 68-69). Za fiksen $t \in [0, n]$ so dogodki $\{Z(t) = j\}, j \in \mathcal{Z}$ disjunktni, njihova unija pa je skoraj gotov dogodek. Iz tega sledi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z(u) = k | Z(s) = i] &= \\ &= \sum_{j \in \mathcal{Z}} \mathbb{P}[Z(t) = j, Z(u) = k | Z(s) = i] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{Z}} \mathbb{P}[Z(t) = j | Z(s) = i] \mathbb{P}[Z(u) = k | Z(s) = i, Z(t) = j]. \end{aligned} \quad (49)$$

Če je proces $Z(t)$ markovski proces in $0 \leq s \leq t \leq u$, se zgornja enačba (49) poenostavi v

$$p_{ik}(s, u) = \sum_{j \in \mathcal{Z}} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u). \quad (50)$$

Tej enačbi pravimo enačba *Chapman-Kolmogorova* (Norberg, 2002, str. 70).

2.1.1 Definicija jakosti prehodov

V splošnem definiranje markovskega modela zahteva določitev $p_{jk}(t, u)$ tako, da desna stran izraza (45) definira verjetnosti na dosleden način. To je precej enostavno, ko imamo opravka z markovskim modelom Z v diskretnem času, kjer je t znotraj končne množice časov $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_q = n$, lahko za $p_{jk}(t_{q-1}, t_q)$ vzamemo katerokoli nenegativno število, ki bi zadostovalo pogoju $\sum_{k=0}^r p_{jk}(t_{q-1}, t_q) = 1$ za vsak $j \in \mathcal{Z}$ in $p = 1, \dots, q$. V zveznem času določitev teh verjetnosti ni tako enostavna, lahko pa predpostavimo neskončno število kratkih časovnih intervalov in jih obravnavamo kot diskretne čase. Natančneje, predpostavimo, da jakosti prehodov obstajajo za vsak $j, k \in \mathcal{Z}, j \neq k, t \in [0, n]$ in so kosoma zvezne ter jih definirajmo kot

$$\mu_{jk}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{j,k}(t, t+h)}{h}. \quad (51)$$

Relacija med prehodnimi verjetnostmi in jakostmi prehodov je torej

$$p_{jk}(t, t+dt) = \mu_{jk}(t)dt + o(dt), \quad (52)$$

kjer za $o(t)$ velja, da je $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$. Torej, verjetnosti prehodov na nekem majhnem časovnem intervalu, so proporcionalne dolžini časovnega intervala in proporcionalnostni faktorji so natanko jakosti prehodov, ki so lahko odvisne od časa. Opredelitev majhnosti časovnega intervala je odvisno od velikosti jakosti prehodov. Na primer, če so $\mu_{j,k}(\tau)$ približno konstanti in strogo manjši od 1 ($\ll 1$) za vse $k \neq j$ in vse $\tau[t, t+1]$, potem μ_{jk} aproksimira verjetnost prehoda $p_{jk}(t, t+1)$. V splošnem lahko jakosti prehodov dosežejo poljubno vrednost in jih ne smemo enačiti z verjetnostmi.

Za $j \notin \mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}$ definiramo jakost prehoda iz stanja j v množico stanj $\mathcal{K}$ v času t kot

$$\mu_{j\mathcal{K}}(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{p_{j\mathcal{K}}(t, u)}{u - t} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \mu_{j,k}(t). \quad (53)$$

Posebej pa celotno jakost prehoda iz stanja j v času t označimo z $\mu_{j, \mathcal{Z} - \{j\}}(t)$, oziroma

$$\mu_{j\cdot}(t) = \sum_{k; k \neq j} \mu_{j,k}(t). \quad (54)$$

Iz enačb (48) in (52) dobimo

$$p_{jj}(t, t + dt) = 1 - \mu_{j\cdot}(t)dt + o(dt), \quad (55)$$

ki označuje verjetnost, da stohastični proces ostane v stanju j v časovnem intervalu $(t, t + dt)$ (Norberg, 2002. str. 70-71).

2.1.2 Diferencialni enačbi Kolmogorova

Predpostavimo, da je markovski proces Z v stanju j v času t . Da bi določili verjetnost, da bo proces v stanju k v nekem prihodnjem času u v bodočnosti, si najprej oglejmo, kaj se zgodi v majhnem časovnem intervalu $(t, t + dt]$. Prva možnost je, da proces Z ostane v stanju j z verjetnostjo $1 - \mu_{j\cdot}(t)dt$ in pogojno na ta dogodek je verjetnost, da proces konča v stanju k v času u je $p_{jk}(t + dt, u)$. Druga možnost je, da proces skoči v neko drugo stanje g z verjetnostjo $\mu_{jg}(t)dt$ in pogojno na ta dogodek, je verjetnost da proces konča v stanju k v času u je $p_{gk}(t + dt, u)$. Tako je skupna verjetnost, da bo proces Z v času u v stanju k enaka

$$p_{jk}(t, u) = (1 - \mu_{j\cdot}dt)p_{jk}(t + dt, u) + \sum_{g; g \neq j} \mu_{jg}(t)dt p_{gk}(t + dt, u) + o(dt). \quad (56)$$

Z oznako $\frac{\partial}{\partial t}p_{jk}(t, u) = p_{jk}(t + dt, u) - p_{jk}(t, u)$ v infinitezimalnem smislu dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{jk}(t, u) = \mu_{j\cdot}(t)dt p_{jk}(t, u) - \sum_{g; g \neq j} \mu_{jg}(t)dt p_{gk}(t, u). \quad (57)$$

Za dana k in u zgornje diferencialne enačbe enolično določajo funkcijo $p_{jk}(\cdot, u)$, $j = 0, \dots, r$ skupaj s pogojem

$$p_{jk}(u, u) = \delta_{jk}. \quad (58)$$

Tukaj δ_{jk} imenujemo Kroneckerjev delta, ki je definirana kot

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (59)$$

Relacijo (56) lahko izpeljemo tudi direktno z uporabo enačbe Chapman-Kolmogorova (50) (za podrobnosti glej Slapar, 2006, str. 13-14). Izraz (57) imenujemo *Obratna diferencialna enačba Kolmogorova* (angl. backward differential equation). Ime izhaja iz dejstva, da odvajamo po začetnem času, ki se v oznakah nahaja na levi strani (Slapar, 2006, str. 14).

Če enačbo (57) delimo na obeh straneh z dt in naredimo limito, ko gre $dt \rightarrow 0$, dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{jk}(t, u) = \mu_{j\cdot}(t) p_{jk}(t, u) - \sum_{g: g \neq j} p_{gk}(t, u). \quad (60)$$

Spomnimo se, da smo pri definiciji jakosti prehodov predpostavili, da so jakosti prehodov le kosoma zvezne, kar pa pomeni da zgornji odvodi v enačbi (60) obstajajo le kosoma. Zato bomo raje uporabljali splošno znano obliko (57), saj tudi numerični izračuni temeljijo na aproksimaciji z diferenčno obliko enačbe (Norberg, 2002, str. 71-72).

Seveda pa se lahko tudi na to, kaj se zgodi ob koncu časovnega intervala $(t, t + dt)$ in tako s podobnim razmislekom kot prej definiramo *premo diferencialno enačbo Kolmogorova* (angl. forward differential equation)

$$p_{ij}(s, t + dt) = \sum_{g: g \neq j} p_{ig}(s, t) \mu_{gj}(t) dt + p_{ij}(s, t) (1 - \mu_{j\cdot}(t) dt) + o(t), \quad (61)$$

in tako

$$d_t p_{ij}(s, t) = \sum_{g: g \neq j} p_{ig}(s, t) \mu_{gj}(t) dt - p_{ij}(s, t) \mu_{j\cdot}(t) dt. \quad (62)$$

Za dana i in s diferencialne enačbe enolično določajo funkcije $p_{ij}(s, \cdot)$, $j = 0, \dots, r$, skupaj s pogojem

$$p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}. \quad (63)$$

Ti dve diferencialni enačbi Kolmogorova predstavljata ključno orodje za izračun verjetnosti prehodov iz jakosti prehodov, ki predstavljajo osnovno sredstvo v sistemu, saj so funkcije z enim samim argumentom in predstavljajo začetno izhodišče za specifikacijo modela (Norberg, 1991, str. 10).

V nekaterih enostavnih primerih imajo diferencialne enačbe analitične rešitve, vendar pa jih v splošnem ponavadi rešujemo z numeričnimi metodami, kot na primer Runge-Kutta (Dormand & Prince, 1980). Ko enkrat določimo vse enostavne verjetnosti prehodov, lahko izračunamo verjetnosti kateregakoli dogodka v $\mathcal{F}_{(t_1, \dots, t_r)}$ iz končno dimenzionalnega verjetnostnega prostora s pomočjo enačbe (45). Posebej zanimiva je verjetnost, ko proces $Z(t)$ ostane neprekinjeno v trenutnem stanju j skozi celoten časovni interval (t, u)

$$p_{\overline{jj}} = \mathbb{P}[Z(\tau) = j, \tau \in (t, u) | Z(t) = j]. \quad (64)$$

Očitno je $p_{\bar{j}\bar{j}}(t, u) = p_{\bar{j}\bar{j}}(t, s)p_{\bar{j}\bar{j}}(s, u)$ za $t < s < u$. Vzemimo $s = t + dt$ in uporabimo enačbo (55)

$$p_{\bar{j}\bar{j}}(t, u) = (1 - \mu_j dt)p_{\bar{j}\bar{j}}(t + dt, u) + o(t). \quad (65)$$

Z upoštevanjem pogoja $p_{\bar{j}\bar{j}}(u, u) = 1$ in preoblikovanjem zgornje enačbe dobimo

$$p_{\bar{j}\bar{j}}(t + dt, u) - p_{\bar{j}\bar{j}}(t, u) = \mu_j(t)dt p_{\bar{j}\bar{j}}(t, u). \quad (66)$$

Ko obe strani delimo z dt in naredimo limito, ko gre $dt \rightarrow 0$ in rešimo enačbo, dobimo

$$p_{\bar{j}\bar{j}}(t, u) = e^{-\int_t^u \mu_j}. \quad (67)$$

Oznaka μ pod integralnim znakom tukaj predstavlja mero $\mu(s)ds$.

2.2 Diferencialna enačba Kolmogorova za različne vrste življenjskih zavarovanj

V nadaljevanju si bomo ogledali izpeljavo diferencialne enačbe Kolmogorova in sicer na treh primerih življenjskih zavarovanj. Začeli bomo z enostavnim modelom zavarovanja za primer smrti, ki ga bomo kasneje razširili na model življenjskega zavarovanja za primer smrti s končnim številom tveganj, na koncu pa si bomo ogledali še model življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti, kjer zavarovanec lahko prehaja med različnimi stanji.

2.2.1 Življenjsko zavarovanje za primer smrti

Življenjska doba zavarovanca je modelirana s pozitivno slučajno spremenljivko T in sicer s funkcijo preživetja $\bar{F}$. V primeru življenjskega zavarovanja za primer smrti imamo dve stanji: t.i. aktivno stanje in stanje smrti. Označimo aktivno stanje z 0 in stanje smrti z 1. Proces stanj Z lahko zapišemo kot

$$Z(t) = \mathbb{1}[T \leq t], t \in [0, n]. \quad (68)$$

Proces Z zavzame vrednost 1 v trenutku, ko oseba umre. To pomeni, da je proces Z v stanju 0 dokler je $T > t$ (tj. dokler je zavarovanec živ). V primeru, ko je $T < t$, pomeni, da je oseba umrla pred časom t in je trenutno stanje procesa enako 1. Proces Z je zvezen z desne in očitno markovski proces, saj je v stanju 0 preteklost znana, ko je proces enkrat v stanju 1 je prihodnost očitna. Verjetnost prehoda je tako enaka

$$p_{00}(s, t) = \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(s)}. \quad (69)$$

Enačba Chapman-Kolmogorova se poenostavi v trivialno obliko

$$p_{00}(s, u) = p_{00}(s, t)p_{00}(t, u) = \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(s)} \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)}. \quad (70)$$

Edina neničelna jakost prehoda je torej $\mu_{01}(t) = \mu(t)$ in kot vemo je

$$p_{00}(t, u) = e^{-\int_t^u \mu}. \quad (71)$$

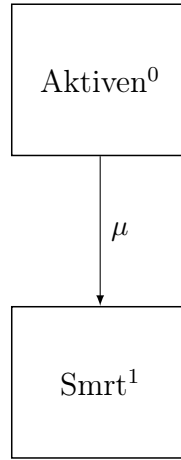
Tako je diferencialna enačba Kolmogorova enaka definiciji jakosti prehoda

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{00}(v, t) = p_{01}(v, t)\mu_{10}(t) - p_{00}(v, t)\mu_0(t) = -p_{00}(v, t)\mu(t) \quad (72)$$

in tako

$$p_{00}(v, t) = e^{-\int_v^t \mu}. \quad (73)$$

Slika 3: Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer smrti



Prirejeno po Norberg (2002).

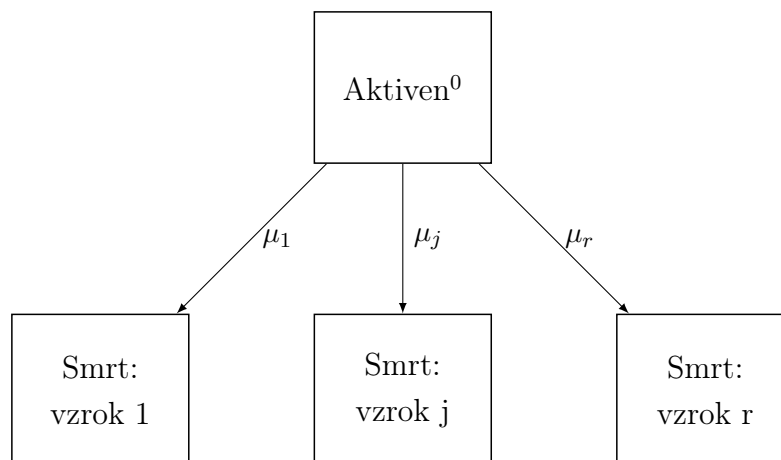
2.2.2 Življenjsko zavarovanje za primer smrti s končnim številom tveganj

To je posplošitev prejšnjega primera, kjer zamenjamo stanje smrti z več stanji in sicer r stanji za različna tveganja smrti. Lahko si predstavljamo, da v tem modelu ločimo vzrok smrti, na primer smrt zaradi avtomobilske nesreče, smrt zaradi raka, smrt zaradi bolezni srca in ožilja, itd. Indeks 0 bomo v jakosti prehodov izpuščali in pisali $\mu_{0j} = \mu_j$, saj je oznaka za začetno stanje nepotrebna. Zavarovanec je najprej v začetnem aktivnem stanju, ko pa enkrat zapusti začetno stanje in je v enem od r stanj (torej umre za določen vzrok), se ne more več vrniti v prvotno začetno stanje, kar nam prikazuje spodnja slika.

Relacija (54) nam poda, da je skupna jakost smrtnosti (natančneje jakost prehoda iz aktivnega stanja v stanje smrti ne glede na vzrok) enaka vsoti posameznih jakosti smrtnosti glede na vzrok $1, \dots, r$, kar zapišemo kot

$$\mu(t) = \sum_{j=1}^r \mu_j(t). \quad (74)$$

Slika 4: Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer smrti s končnim številom tveganj



Prirejeno po Norberg (2002).

Za zavarovanca starega t let je verjetnosti preživetja do časa u enaka nam dobro poznani verjetnosti preživetja $p_{00}(t, u)$ dani z enačbo (71). Ta razširjen primer nam omogoča, da razlikujemo vzroke smrtnosti in na ta način ločimo pomembnosti različnih vzrokov in s tem izplačila različnih zavarovalnih vsot glede na vzrok smrti. Torej verjetnost prehoda, da zavarovanec star t let umre za vzrokom smrti j preden doseže starost u je enaka

$$p_{0j}(t, u) = \int_t^u e^{-\int_t^\tau \mu} \mu_j(\tau) d\tau. \quad (75)$$

Iz enačb (74) in (75) vidimo, da povečanje ene jakosti smrtnosti μ_k povzroči zmanjšanje verjetnosti preživetja in hkrati tudi zmanjšanje verjetnosti smrti za drugimi vzroki $j = 1, \dots, r, j \neq k$. Ker je vsota verjetnosti smrti po vseh rizikih $1, \dots, r$ enaka 1, to pomeni, da se povečanje jakosti prehoda μ_k poveča verjetnost smrti za vzrokom j . Na ta način lahko pojasnimo, da imamo dandanes povečano smrtnost zaradi raka ter srčno-žilnimi boleznimi, saj smo z napredkom v medicini, smrtnost zaradi pljučnice, otroške vročice in številnih drugih boleznimi precej izničili (Norberg, 2002, str. 75).

2.2.3 Življenjsko zavarovanje za primer invalidnosti in smrti

Model življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti je primeren za analiziranje izplačil zavarovalnice, ki so odvisna od zdravja zavarovanca. Kot primera navedimo zdravstveno zavarovanje, kjer je zavarovanec v času nezmožnosti za delo upravičen do prejemanja anuitet, ali pa življenjsko zavarovanje, kjer je

zavarovanec oproščen plačila premij v času nezmožnosti za delo. V ta model lahko vključimo tudi pokojninska zavarovanja z dodatnim izplačili za zavarovanca, kjer stanji 0 in 1 ustrezata stanjema zaposlen in brezposeln.

Tako imamo za zavarovanca, ki je v času s v aktivnem stanju, z upoštevanjem (62) naslednji diferencialni enačbi Kolmogorova

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{00}(s, t) = p_{01}(s, t)\rho(t) - p_{00}(s, t)(\mu(t) + \sigma(t)) \quad (76)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{01}(s, t) = p_{00}(s, t)\sigma(t) - p_{01}(s, t)(v(t) + \rho(t)). \quad (77)$$

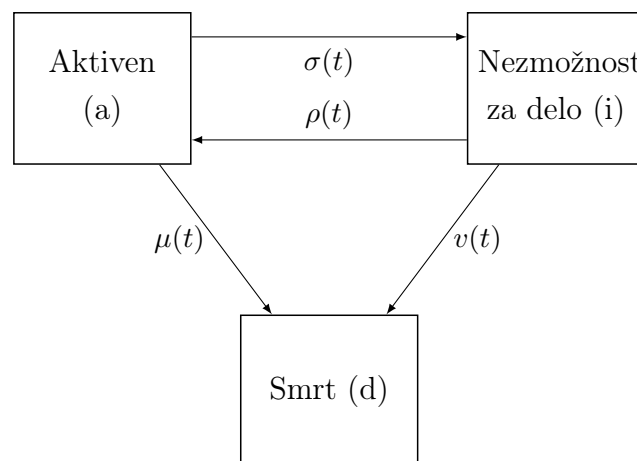
Verjetnost $p_{02}(s, t)$ je določena z zgornjima enačbama (76) in (77). Začetna pogoja pa sta

$$p_{00}(s, s) = 1, \quad (78)$$

$$p_{01}(s, s) = 0. \quad (79)$$

Omenimo še, da sta za zavarovanca, ki je v času s v stanju invalidnosti, zgornji diferencialni enačbi enaki, le prvi indeks 0 v zgornjih enačbah zamenjamo z 1 in to pri vseh verjetnostih. Začetna pogoja pa sta potem $p_{00}(s, s) = 0$ in $p_{11}(s, s) = 1$ (Norberg, 2002, str. 76).

Slika 5: Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti



Prirejeno po Norberg (2002).

2.3 Standardna zavarovalna pogodba s končnim številom stanj

Vzemimo zavarovalno polico izdano v času 0 sklenjeno za obdobje n let. Lahko si zamislimo poljubno obliko življenjskega zavarovanja, ali pa katerokoli drugo, na

primer pokojninsko ali pa zdravstveno zavarovanje. Glavno pri vseh teh zavarovanjih je, da so izplačila zavarovalnih vsot in vplačil premij odvisna od prehoda zavarovanca med različnimi stanji zapisanih v pogodbi. Predpostavimo, da ima polica končno število stanj, torej $\mathcal{Z} = \{0, 1, \dots, r\}$ in da je v času 0 polica v začetnem stanju 0, kasneje pa je polica v vsakem trenutku $t > 0$ lahko le v enem samem stanju. Označimo stanje police v času t z $Z(t)$. Tako smo dobili funkcijo $Z(t)$, ki slika iz intervala $[0, n]$ v $\mathcal{Z}$

$$Z(t) : [0, n] \rightarrow \mathcal{Z}, \quad (80)$$

ki je zvezna z desne in ima končno število skokov in $Z(0) = 0$, saj je polica v času 0 v začetnem stanju 0. Zavarovalno polico tako modeliramo kot stohastični proces Z na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in tako opišemo naključno pot, ki jo naredi polica tekom trajanja zavarovanja (Norberg, 2002, str. 67).

2.3.1 Zavarovalna polica modelirana s stohastičnim procesom

Definirajmo še naslednja dva procesa. Proces

$$I_j(t) = \mathbb{1}[Z(t) = j], \quad (81)$$

ki ima vrednost 1, če je proces Z v stanju j v času t in vrednost 0 sicer ter proces

$$N_{jk}(t) = \#\{\tau; Z(\tau-) = j, Z(\tau) = k, \tau \in (0, t]\}, \quad (82)$$

ki šteje prehode iz stanja j v stanje k ($k \neq j$) v časovnem intervalu $(0, n]$. Kot lahko opazimo sta oba procesa povezana s stohastičnim procesom $Z(t)$, z desne zvezna in s končnim številom skokov. Indikatorski proces $\{I_j(t)\}_{t \geq 0}$ in proces štetja $\{N_{jk}(t)\}_{t \geq 0}$ sta povezana z dejstvom, da proces I_j naraste (pade) za vrednost 1 po prehodu police v stanje j (iz stanja j), kar lahko opišemo z naslednjo relacijo

$$dI_j(t) = dN_{\cdot j}(t) - dN_{j \cdot}(t), \quad (83)$$

kjer pika v indeksu označuje vsoto po vseh stanjih, ki so različna od stanja poleg pike, to je

$$N_{j \cdot} = \sum_{k; k \neq j} N_{jk}. \quad (84)$$

Kot vemo je denarni tok zavarovalne pogodbe sestavljen iz izplačanih škod in vplačanih premij. To pomeni, da pogodba nalaga zavarovancu plačilo premij, zavarovalnici pa plačilo za že nastala in vnaprej po pogodbi določena izplačila škode. Označimo denarne tokove vseh preteklih in prihodnjih obveznosti zavarovalnice zmanjšane za vplačane premije z $B(t)$. Torej $B(t)$ označuje neto denarne tokove izplačil zavarovalnice (Kraft & Steffensen, 2008).

Naj čas $t = 0$ označuje pričetek zavarovanja. Tako lahko denarne tokove standardne zavarovalne pogodbe opišemo z enačbo

$$dB(t) = \sum_k I_k(t)dB_k(t) + \sum_{k \neq l} b_{kl}(t)dN_{kl}(t), \quad (85)$$

kjer je

$$dB_k(t) = b_k(t)dt + B_k(t) - B_k(t-) \quad (86)$$

deterministična funkcija plačil v stanju k , b_{kl} pa prav tako deterministična funkcija in predstavlja plačila po zavarovalni polici ob prehodu iz stanja k v stanje l . Kadar je razlika $B_k(t) - B_k(t-)$ različna od nič, slednje predstavlja plačilo zavarovalne vsote v času t , v kolikor zavarovanec ostanje v stanju k (Kraft & Steffensen, 2008).

Za funkciji b_k in b_{kl} se predpostavlja, da sta končni in kosoma zvezni. Množica točk nezveznosti za poljubno življenjsko rento B_k pa je končna in jo označimo z $\mathcal{D}\{t_0, t_1, \dots, t_q\}$. Pozitivne vrednosti dB_k in b_{kl} predstavljajo škode, negativne vrednosti pa premije. V času $t \notin [0, n]$ so vsa plačila enaka 0 (Norberg, 2002, str. 80).

Za lažjo predstavo, si oglejmo nekaj enostavnih primerov življenjskih zavarovanj, ki so modelirana s procesom, kot je prikazan na sliki 4. V tem konkretnem primeru imamo le dve stanji: aktivno in stanje smrti. V vseh primerih predpostavimo, da je zavarovalna vsota enaka vrednosti 1.

- Za **zavarovanje za primer smrti za obdobje n let** je $b_{01} = 1$ in tako $dB(t) = dN_{01}(t)$.
- Za **mešano zavarovanje za primer smrti za obdobje n let** je $b_{01} = 1$, $\Delta B_0(t) = 0$ za $t \neq n$ in $\Delta B_0(t) = 1$ za $t = n$ in tako $dB(t) = dN_{01}(t) + I_0 \Delta B_0(t)$.
- Za **življenjsko rento za obdobje n let plačljivo enkrat letno** je $\Delta B_0(t) = 1$ za $t = 1, \dots, n$ in tako $dB(t) = I_0 \Delta B_0(t)$.

Ogljemo si še nekaj zveznih primerov:

- Za **življenjsko rento za obdobje n let plačljivo zvezno in sicer 1 letno** je $b_0(t) = 1, t \in (0, n)$ in tako $dB(t) = I_1(t)dt$ na $(0, n)$.
- Za **$(n-m)$ odloženo življenjsko rento za obdobje m let plačljivo zvezno in sicer 1 letno** je $b_0(t) = 1, t \in (m, n)$ in tako $dB(t) = I_1(t)dt$ na intervalu (m, n) (Slapar, 2006).

2.3.2 Modeliranje matematičnih prospektivnih rezervacij

Preden se posvetimo modeliranju matematičnih rezervacij, definirajmo funkcijo diskontiranja, ki nam bo omogočala bodoče denarne tokove diskontirati na želeno časovno točko t . Zavarovalnica praviloma vlaga sredstva za kasnejše kritje obveznosti. Predpostavimo, da v času t doseže zvezni donos $r(t)$ ter da je donos r kosoma zvezen, integral $\int_0^T r(s)ds$ pa končen. To pomeni, da je v času t vrednost ene enote vložene v času τ enaka $e^{\int_\tau^t r(s)ds}$, ko je $t > \tau$, ko pa je $t < \tau$ pa je enaka $e^{-\int_t^\tau r(s)ds}$. Na ta način smo definirali funkcijo diskontiranja

$$v(t) = e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}. \quad (87)$$

Kot smo že omenili morajo zavarovalnice z namenom, da svojim zavarovancem zagotovijo izplačila zavarovalnih vsot v prihodnosti oblikovati matematične rezervacije. V splošnem zavarovalnice diskontirajo razliko med pričakovanimi izplačili škod in vplačanih premij na želeno časovno točko in tako določijo neto sedanjo vrednost izplačil. Tukaj se je potebno zavedati, da zavarovalnice težko natančno določijo prihodnje obveznosti, saj v določenem trenutku nimajo podatkov o vrednostih vseh parametrov, zato je izračunana neto sedanja vrednost izplačil zgolj približek določen na podlagi informacij, ki jih imajo v trenutku izračuna. To je tudi eden izmed razlogov, zakaj zavarovalnice znova in znova izračunavajo rezervacije in neto sedanje vrednosti (Slapar, 2006, str. 23).

Vrednost matematične rezervacije v trenutku t je torej definirana kot pogojno matematično upanje bodočih neto denarnih tokov (razlika med pričakovanimi izplačili škod in vplačanimi premijami) pri dani filtraciji $\mathcal{F}_t$, ki vsebuje vse informacije do časa t . Slednje matematično zapišemo kot

$$V_t = \mathbb{E}\left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} dB(\tau) | \mathcal{F}_t\right]. \quad (88)$$

Zvezne formule se da aproksimirati z markovskimi verigami kot

$$V(t) = V_{Zt}(t) = \sum_j I_j^Z(t) V_j(t), \quad (89)$$

kjer je

$$\begin{aligned} V_j(t) &= \mathbb{E}\left[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} dB(\tau) | Z(t) = j\right] \\ &= \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \sum_k p_{jk}(t, \tau) \left(dB_k(\tau) + \sum_{l; l \neq k} b_{kl}(\tau) \mu_{kl}(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (90)$$

Zgornjo enakost dobimo, če zamenjamo integral in matematično upanje ter vstavimo $dB(\tau)$, ki je definiran z enačbo (85), poleg tega pa uporabimo naslednji enakosti

$$\mathbb{E}[I_k(\tau) | Z(t) = j] = p_{jk}(t, \tau) \quad (91)$$

$$\mathbb{E}[dN_{kl}(\tau)|Z(t) = j] = p_{jk}(t, \tau)\mu_{kl}(\tau). \quad (92)$$

Zgornjo enačbo (90) lahko razložimo na naslednji način. Zavarovalna polica je v stanju k v času τ z verjetnostjo $p_{jk}(t, \tau)$. Če v nekem dovolj majhnem intervalu dolžine $d\tau$ okoli časa τ ostane v stanju k , je $dB_k(\tau)$ enak življenjski renti na tem časovnem intervalu. Pričakovana sedanja vrednost tega v času t je tako enaka $p_{jk}(t, \tau)e^{-\int_t^\tau r(s)ds}dB_k(\tau)$. Z verjetnostjo $p_{jk}(t, \tau)\mu_{kl}(\tau)$ pa polica skoči iz stanja k v stanje l v nekem krajšem časovnem intervalu $d\tau$ okoli časa τ . Če se to zgodi zavarovalnica izplača znesek $b_{kl}(\tau)$. Tako je v tem primeru pričakovana sedanja vrednost v času t enaka $p_{jk}(t, \tau)\mu_{kl}(\tau)d\tau e^{-\int_t^\tau r(s)ds}b_{kl}(\tau)$. Ko seštejemo po vseh prihodnjih časih t in vseh vrstah izplačil, dobimo natanko enačbo (90). Naj bo $0 \leq t < u < n$. Z ločitvijo plačil na dva časovna intervala $(t, u]$ in $(u, n]$ v enačbi (90) uporabe enačbe Chapman-Kolmogorova na drugem intervalu dobimo

$$\begin{aligned} V_j(t) = & \int_t^u e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \sum_k p_{jk}(t, \tau) \left(dB_k(\tau) + \sum_{l:l \neq k} b_{kl}(\tau)\mu_{kl}(\tau)d\tau \right) \\ & + e^{-\int_t^u r(s)ds} \sum_k p_{jk}(t, u)V_k(u). \end{aligned} \quad (93)$$

Zgornjo izpeljavo bi dobili tudi direktno z matematičnem upanjem pogojno na stanje police v času u (Norberg, 2002, str 81).

V času trajanja police mora zavarovalnica ves čas vzdrževati ustrezno vrednost rezervacij za kritje prihodnjih neto obveznosti zapisanih v pogodbi. Torej, če je polica v stanju j v času t , potem mora zavarovalnica oblikovati rezervacijo v vrednosti natanko $V_j(t)$. Funkcijo V_j imenujemo *prospektivna matematična rezervacija*. Opazimo lahko, da smo pri sami izpeljavi rezervacije V_j princip ekvivalence prenesli na čas t , ki sedaj določa ravnotežje med trenutno vrednostjo rezervacij in diskontiranimi bodočimi obveznostmi, glede na trenutne razpoložljive informacije v času t (Norberg, 2002, str.80-81).

Ko gre u proti t ($u \rightarrow t$) v enačbi (93), dobimo *obratno Thielejevo diferencilano enačbo* (angl. backward Thiele's differential equations), ki prikazuje dinamiko matematičnih rezervacij. Predpostavimo, da je polica v stanju j v času $t \notin \mathcal{D}$. Spomnimo se, da je $\mathcal{D}$ množica točk nezveznosti za poljubno življenjsko rento dB_k . Pogojno na to, kaj se zgodi v majhnem časovnem intervalu $(t, t + dt]$, ki ne preseka množice $\mathcal{D}$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned} V_j(t) = & b_j(t)dt + \sum_{k:k \neq j} \mu_{jk}(t)dtb_{jk}(t) \\ & + (1 - \mu_{jj}(t)dt)e^{-r(t)dt}V_j(t + dt) + \sum_{k:k \neq j} \mu_{jk}(t)dte^{-r(t)dt}V_j(t + dt). \end{aligned} \quad (94)$$

Na enak način, ko v razdelku (1.3.3) nastavimo diferenčno enačbo tako, da vzamemo limito $\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V_{t+dt} - V_t}{dt}$. Na ta način dobimo obratno Thielejevo diferencialno enačbo

(s kosoma zveznimi koeficienti) za prospektivno matematično rezervacijo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_j(t) = (r(t) + \mu_j(t))V_j(t) - \sum_{k; k \neq j} \mu_{jk}(t)V_k(t) \\ - b_j(t) - \sum_{k; k \neq j} b_{jk}(t)\mu_{jk}(t). \end{aligned} \quad (95)$$

Diferencialne enačbe so dobro definirane na odprtih intervalih $(t_{p-1}, t_p), p = 1, \dots, q$ in skupaj z robnim pogojem

$$V_j(t_p-) = (B_j(t_p) - B_j(t_{p-1})) + V_j(t_{p-1}), p = 1, \dots, q, j \in \mathcal{Z} \quad (96)$$

določajo funkcije V_j enolično. V točkah zveznosti funkcij b_j, b_{jk}, μ_{jk}, r nimamo problemov z diferenciacijami funkcij V_j , saj je integral na desni strani enačbe (90) zvezen. V točkah nezveznosti, pa $\frac{d}{dt}V_j$ ne obstaja. Ker pa je teh točk nezveznosti končno in imajo mero 0, to ne vpliva na numerično reševanje diferencialne enačbe (95). V praksi za določitev prospektivnih matematičnih rezervacij pogosto uporabljamo Runge-Kutta metodo 4. reda. Diferencialne enačbe rešujemo po sistemu “od zgoraj navzdol”, kar pomeni, da najprej rešimo (95) za zgornji interval (t_{q-1}, n) ob upoštevanju robnega pogoja (96), ki je v tem primeru enak $V_j(n-) = B_j(n) - B_j(n-)$, saj je $V_j(n) = 0$ za vse j po definiciji. Nato rešimo (95) še za spodnji interval z upoštevanjem robnega pogoja, ki je v tem primeru enak $V_j(t_{q-1}-) = (B_j(t_{q-1}) - B_j(t_{q-1}-)) + V_j(t_{q-1})$, kjer smo $V_j(t_{q-1})$ določili v prvem koraku. Na ta način nadaljujemo postopek navzdol. Kot lahko opazimo, je obratna enačba Kolmogorova (57) poseben primer Thielejeve enačbe (95). Verjetnost prehoda $p_{jk}(t, u)$ je prospektivna rezervacija za stanje j v času t za standardno polico, ki izplača zavarovalno vsoto v vrednosti 1, če je polica v stanju k v času u in sicer brez dodanih obresti. Tako je lahko numerični izračun prospektivnih rezervacij drug način za izračun verjetnosti prehodov (Norberg, 2002, str. 83).

2.3.3 Primer partnerskega zavarovanja za primer smrti

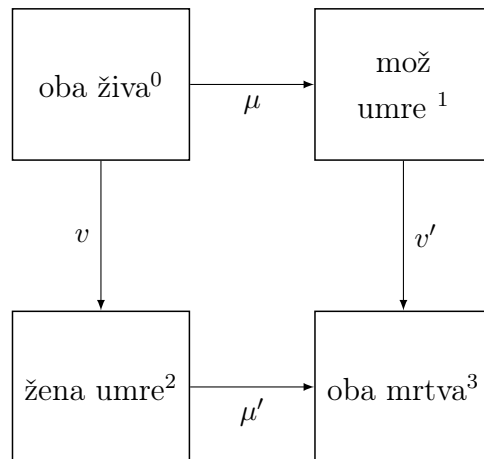
V primeru, ko pogodbene obveznosti niso odvisne od rezervacij, povedano drugače, to je, ko izplačilo zavarovalne vsote ni odvisno od vrednosti rezervacij (ni izraženo s funkcijo V_j) dobimo z določitvijo relacije (90) eksplicitno obliko za prospektivne rezervacije in teoretično Thielejeva diferencialna enačba (95) ni potrebna. Kljub temu nam Thielejeva enačba (95) pomaga pri numeričnem izračunu rezervacij in z njeno pomočjo dobimo vpogled v dinamiko police (Norberg, 2002, str. 85).

Povsem drugačna pa je situacija, ko je izplačilo zavarovalne vsote izraženo kot funkcija rezervacije V_j . Najbolj tipičen primer je prekinitev police s strani zavarovanca v času trajanja zavarovanja, kjer je zavarovalnica dolžna izplačati zavarovancu

del zavarovalne vsote, ki je enaka rezervaciji v tistem trenutku zmanjšane za stroške izplačila. V takem primeru so diferencialne enačbe nepogrešljivo orodje pri oblikovanju rezervacij in določitev premij po principu ekvivalence. Oglejmo si tak primer življenjskega partnerskega zavarovanja za primer smrti (Norberg, 2002, str. 85).

Predpostavimo, da poročen par kupi življenjsko partnersko zavarovanje in se tako zavaruje pred zmanjšanjem dohodka zaradi smrti enega od zakoncev. Za to zavarovanje zvezno plačujeta letno neto premijo v višini c , dokler sta oba še živa. Nadalje predpostavimo, da zavarovalnica prične, v primeru moževe smrti, ženi zvezno izplačevati pokojnino in sicer letno v vrednosti b . V kolikor je ob moževi smrti žena že pokojna, pa se zavarovalna vsota v vrednosti s izplača otroku ali drugemu upravičencu. Zavarovanje je sklenjeno za obdobje n let in predpostavimo še, da imamo konstantno obrestno mero. Markovski model za to zavarovanje je prikazan na spodnji sliki.

Slika 6: Grafični prikaz modeliranja življenjskega partnerskega zavarovanja za primer smrti s končnim številom tveganj



Prirejeno po Norberg (2002).

Thielejeve diferencialne enačbe za prospektivno matematično rezervacijo (95) so v tem konkretnem primeru enake (poleg trivialne enačbe $V_3(t) = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_0(t) &= (r + \mu(t) + v(t))V_0(t) - \mu(t)V_1(t) - v(t)V_2(t) + c, \\ \frac{d}{dt}V_1(t) &= (r + v'(t))V_1(t) - b, \\ \frac{d}{dt}V_2(t) &= (r + \mu'(t))V_2(t) - \mu'(t)s. \end{aligned} \tag{97}$$

Nekoliko spremenimo začetno zavarovalno pogodbo in predpostavimo, da v primeru, da žena umre pred možem v času trajanja zavarovanja, zavarovalnica izplača 50 % takratne vrednosti matematičnih rezervacij možu. Zdi se smiselno, da ob ženini smrti mož dobi povrnjeno privarčevanih sredstev, saj ni upravičen do izplačevanja anuitet. Z dodatnim pogojem dobimo nov sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_0(t) &= (r + \mu(t) + 0.5v(t))V_0(t) - \mu(t)V_1(t) - v(t)V_2(t) + c, \\ \frac{d}{dt}V_1(t) &= (r + v'(t))V_1(t) - b, \\ \frac{d}{dt}V_2(t) &= (r + \mu'(t))V_2(t) - \mu'(t)s.\end{aligned}\tag{98}$$

Z upoštevanjem robnih pogojev $V_j(n) = 0, j = 0, 1, 2$, je zgornji sistem precej enostavno rešiti (Norberg, 2002, str. 85).

2.4 Diferencialne enačbe za višje momente sedanjih vrednosti in kriterij solventnosti

Višji momenti sedanjih vrednosti neto izplačil so uporabni pri merjenju nihanja vrednosti matematičnih rezervacij in premij. Za zavarovalnico je ključnega pomena, da zazna večja nihanja in tako del nihanj vključi v premijo oziroma oblikuje varnostne rezervacije. Poleg omenjenega višji momenti pomagajo oceniti solventnost zavarovalnice na podlagi določitve tveganosti nekega zavarovalnega portfelja. Predpostavimo, da imamo markovski model in vzemimo standardno zavarovalno polico. Označimo množico časovnih točk, v katerih so možna izplačila zavarovalne vsote v obliki rent z $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, kjer je $t_0 = 0$ in $t_m = n$ (množica $\mathcal{D}$ je množica točk nezveznosti za funkcijo $V(t, u)$). Naj $V(t, u)$ označuje sedanjo vrednost izplačil glede na zavarovalno pogodbo v časovnem intervalu $(t, u]$ v času t . Naj bo $V(t) = V(t, n)$ sedanja vrednost vseh prihodnjih neto izplačil. Želimo določiti višje momente $V(t)$. Z upoštevanjem markovske lastnosti lahko višje momente zapišemo v obliki

$$V_j^{(q)}(t) = \mathbb{E}[V(t)^q | Z(t) = j], q = 1, 2, \dots\tag{99}$$

Predpostavimo, da so višji momenti dobro definirani, to je $\mathbb{E}[\int_0^n vd|B]^q < \infty$ ter da so funkcije r, b_j, b_{jk} in μ_{jk} kosoma zvezne (Norberg, 1995b, str. 173).

Izrek 2.1 *Funkcije $V_j(t)^{(q)}$ so določene z diferencialnimi enačbami*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_j^{(q)}(t) &= (qr(t) + \mu_{j\cdot}(t))V_j^{(q)}(t) - qb_j(t)V_j^{(q-1)}(t) \\ &\quad - \sum_{k; k \neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} (b_{jk}(t))^p V_k^{(p-q)}(t),\end{aligned}\tag{100}$$

ki so dobro definirane na intervalu $(0, n) \setminus \mathcal{D}$ z robnimi pogoji,

$$V_j^{(q)}(t-) = \sum_{p=0}^q \binom{q}{p} (B_j(t) - B_j(t-))^p V_j^{q-p}(t), \quad (101)$$

$t \in \mathcal{D}$.

Dokaz 2.1 Za podroben dokaz glej Norberg (1995b), str. 173-176.

Centralni momenti so lažji za interpretacijo in bolj uporabni od običajnih momentov, saj opisujejo nihanja okoli povprečja. Označimo z $m_j^{(q)}(t)$ q -ti centralni moment. Tako imamo

$$m_j^{(1)}(t) = V_j(t) \quad (102)$$

$$m_j^{(q)}(t) = \sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} \binom{q}{p} V_j^{(p)}(t) \left(V_j^{(1)}(t) \right)^{q-p}. \quad (103)$$

Za konec si iglejmo še **solventnosti kriterij**, ki nam daje oceno tveganja portfelja življenjskih zavarovanj. Naj bo Y slučajna spremenljivka vseh neto prihodnjih obveznosti v zavarovalnem portfelju. Označimo z $m^{(q)}$ q -ti centralni moment slučajne spremenljivke Y . Vrednost slučajne spremenljivke Y , pri kateri je verjetnost, da je Y manjša od $y_{1-\epsilon}$ enaka $1 - \epsilon$ (t.j. kvantil) označimo z $y_{1-\epsilon}$ in jo lahko aprksimirajmo

$$y_{1-\epsilon} \approx m^{(1)} + c_{1-\epsilon} \sqrt{m^{(2)}} + \frac{c_{1-\epsilon}^2 - 1}{6} \frac{m^{(3)}}{m^{(2)}}, \quad (104)$$

kjer je $c_{1-\epsilon}$ zgornji ϵ -kvantil za standardno normalno porazdelitev. Vrednost kvantila $y_{1-\epsilon}$ lahko razumemo kot minimalni kapital potreben za kritje obveznosti v določenem trenutku z dano verjetnostjo. Za matematično rezervacijo si lahko predstavljamo, da sestoji iz dveh delov *premijskega dela* $m^{(1)}$ in *flukcijskega dela* $y_{1-\epsilon} - m^{(1)}$. Eden od možnih kazalnikov za merjenje tveganosti portfelja je

$$R = \frac{y_{1-\epsilon} - m^{(1)}}{P}, \quad (105)$$

kjer je P ustrezno izbrana mera velikosti portfelja, na primer skupni letni premijski prihodek.

2.4.1 Metoda numeričnega izračuna višjih momentov

Rešitev želimo poiskati na intervalu $[0, n]$. Interval tako razdelimo na manjše podintervale $[t_s, t_{s+1}]$, kjer je $s = 0, \dots, m$ in $t_0 = 0$ ter $t_m = n$. Najprej rešimo sistem diferencialnih enačb na zadnjem intervalu (t_{m-2}, t_{m-1}) , kjer je robni pogoj enak

$$V_j^{(q)}(n-) = (B_j(n) - B_j(n-))^q \quad (106)$$

saj velja, da je v enačbi (101) $V_j^{(q)}(n) = \delta_{q0}$ (Kroneckerjeva delta). Potem pa, če je $m > 1$, rešimo sistem diferencialnih enačb v naslednjem intervalu (t_{m-2}, t_{m-1}) z robnim pogojem enakemu (101), kjer je $t = t_{m-1}$. Postopek nadaljujemo po vseh intervalih navzdol, dokler ne pridemo do začetne točke $t = 0$ (Norberg, 2002, str. 91).

Za reševanje sistemov diferencialnih enačb si lahko pomagamo z dobro poznano numerično metodo Runge-Kutta, ki je vgrajena v večini matematičnih programov, kot naprimer MATLAB. V nadaljevanju si bomo ogledali postopek in rezultate numeričnega izračuna za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, ki bo temeljil na reševanju sistema diferencialnih enačb po numerični metodi Runge-Kutta stopnje 4, ki ga je Norberg, R. (1995b) predstavil v članku *Differential equations for moments of present values in life insurance*. Za podrobnejši eksplicitni algoritem za izvajanje metode Runge-Kutta 4. in 5. stopnje v MATLABU glej članek Christodoulou, N.S. (2009), *An algorithm using Runge-Kutta methods of orders 4 and 5 for systems of OEDs*.

2.4.2 Primer numeričnega izračuna za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti

Življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti bomo obravnavali kot zavarovanje, kjer so vplačila in izplačila na izbrani zavarovalni polici modelirana kot markovska veriga na treh stanjih, in sicer aktivno stanje (0), stanje nezmožnosti za delo (1) in stanje smrti (2). Ogledali si bomo izračune prvih treh momentov za standardne oblike zavarovanja, torej bomo predpostavili različna vplačila in izplačila (Norberg, 1995b, str. 176).

Predpostavimo najprej, da je obrestna mera konstantna, na primer 4.5% letno, torej

$$r = \ln(1.045) = 0.044017, \quad (107)$$

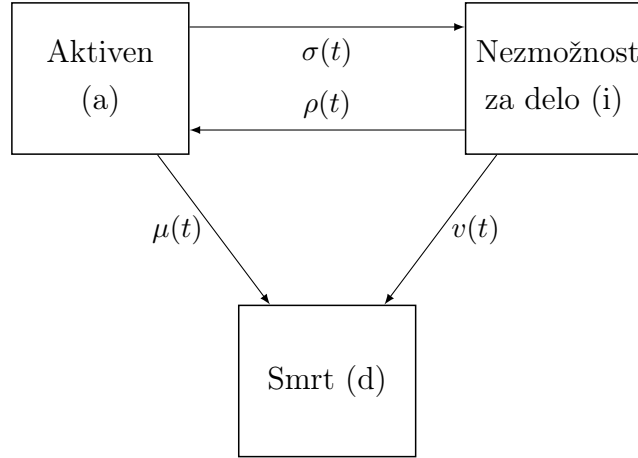
in da so jakosti prehodov med stanji odvisne le od starosti zavarovanca x , in so enake

$$\begin{aligned} \mu_x &= v_x = 0.0005 + 0.000075858 \cdot 10^{0.038x}, \\ \sigma_x &= 0.0004 + 0.0000034674 \cdot 10^{0.06x}, \\ \rho_x &= 0.005. \end{aligned} \quad (108)$$

Omenimo, da so jakosti prehodov μ , v in ρ določene z aproksimiranjem mortalitetnih tablic za moške na Danskem z Gompertz-Makeham mortalitetnim modelom $G82M$, v katerem ima jakost smrtnosti obliko

$$\mu_{(t)} = \alpha + \beta\gamma^t. \quad (109)$$

Slika 7: Grafični prikaz modeliranja življenjskega zavarovanja za primer invalidnosti in smrti



Prirejeno po Norberg, 2002.

Predpostavimo, da imamo zavarovanca moškega spola, ki je ob sklenitvi zavarovanja star 30 let. Jakosti prehodov lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned}
 \mu_{02}(t) &= \mu_{12}(t) = \mu_{30+t}, \\
 \mu_{01}(t) &= \sigma_{30+t}, \\
 \mu_{10}(t) &= \rho_{30+t},
 \end{aligned} \tag{110}$$

za $0 < t < 30(= n)$. V nadaljevanju si bomo ogledali numerične vrednosti matematičnih rezervacij in višjih centralnih momentov za začetni stanji 0 in 1 (stanje 2 bomo izpustili, saj iz njega ni mogoče prehajati nikamor) za čas $t = 0, 6, 12, 18, 24$ in 30. Za začetek pogledajmo življensjko zavarovanje, ki v primeru smrti izplača zavarovalno vsoto enako 1. Torej je $b_{02} = b_{12} = 1$ in zato

$$dB(t) = \begin{cases} dN_{02}(t) + dN_{12}(t), & \text{za } 0 \leq t < n \\ 0, & \text{za } t \geq n. \end{cases} \tag{111}$$

Da dobimo numerične izračune premij in prvih treh momentov sedanjih vrednosti neto izplačil moramo rešiti naslednji sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_0^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \sigma_x(t) + \mu_x(t))V_0^{(1)}(t) - \sigma_x(t)V_1^{(1)}(t) - \mu_x(t)(V_2^{(1)}(t) + b_{02}) \\
\frac{dV_1^{(1)}}{dt}(t) &= (r + v_x(t) + \rho_x(t))V_1^{(1)}(t) - \rho_x(t)V_0^{(1)}(t) - v_x(t)(V_2^{(1)}(t) + b_{12}) \\
\frac{dV_2^{(1)}}{dt}(t) &= rV_2^{(1)}(t) \\
\frac{dV_0^{(2)}}{dt}(t) &= (2r + \sigma_x(t) + \mu_x(t))V_0^{(2)}(t) - \sigma_x(t)V_1^{(2)}(t) - \mu_x(t)(V_2^{(2)} + 2b_{02}V_2^{(1)}(t) + b_{02}^2) \\
\frac{dV_1^{(2)}}{dt}(t) &= (2r + v_x(t) + \rho_x(t))V_1^{(2)}(t) - \rho_x(t)V_0^{(2)}(t) - v_x(t)(V_2^{(2)}(t) - 2b_{12}V_2^{(1)}(t) + b_{12}^2) \\
\frac{dV_2^{(2)}}{dt}(t) &= 2rV_2^{(2)}(t) \\
\frac{dV_0^{(3)}}{dt}(t) &= (3r + \sigma_x(t) + \mu_x(t))V_0^{(3)}(t) - \sigma_x(t)V_1^{(3)}(t) \\
&\quad - \mu_x(t)(V_2^{(3)}(t) + 3b_{02}V_2^{(2)}(t) + 3b_{02}^2V_2^{(1)}(t) + b_{02}^3) \\
\frac{dV_1^{(3)}}{dt}(t) &= (3r + v_x(t) + \rho_x(t))V_1^{(3)}(t) - \rho_x(t)V_0^{(3)}(t) \\
&\quad - v_x(t)(V_2^{(3)}(t) + 3b_{12}V_2^{(2)}(t) + 3b_{12}^2V_2^{(1)}(t) + b_{12}^3) \\
\frac{dV_2^{(3)}}{dt}(t) &= 3rV_2^{(3)}(t)
\end{aligned} \tag{112}$$

z robnim pogojem

$$V_j^{(q)}(n) = 0, \quad j = 0, 1, 2 \text{ in } q = 1, 2, 3. \tag{113}$$

Iz sistema diferencialnih enačb opazimo, da so diferencialne enačbe za stanje 2 rešljive neodvisno od drugih enačb in zaradi robnega pogoja enake 0, kar pomeni, dajih lahko izpustimo. Sistem diferencialnih enačb rešimo z numerično metodo Runge-Kutta in s pomočjo enačb (102) in (103) izračunamo centralne momente $m_j^{(q)}(t)$ za $j = 0, 1, 2$ in $q = 1, 2, 3$, ki so prikazani v tabeli (Norberg, 1995b, str. 176).

Tabela 1: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti z zavarovalno vsoto 1

momenti \ čas	0	6	12	18	24	30
$m_0^1(t) = m_1^1(t)$	0.0683	0.0771	0.0828	0.0801	0.0592	0
$m_0^2(t) = m_1^2(t)$	0.0300	0.0389	0.0484	0.0549	0.0484	0
$m_0^3(t) = m_1^3(t)$	0.0139	0.0191	0.0262	0.0343	0.0369	0

Prirejeno po Norberg (1995b).

Iz tabele 1 lahko opazimo, da sta prva centralna momenta $m_j^1(t)$ za začetno stanje $j = 0$ in začetno stanje $j = 1$ enaka in predstavljata vrednosti matematičnih rezervacij ob času t . To, da sta prva momenta enaka za stanja $j = 0, 1$ sledi iz dejstva, da sta jakosti prehodov iz obeh stanj v stanje $j = 2$ enaki.

Druga centralna momenta $m_j^2(t)$ za začetno stanje $j = 0$ in začetno stanje $j = 1$ predstavljata varianco matematičnih rezervacij, torej, koliko lahko dejansko vrednost matematičnih rezervacij odstopa od pričakovane vrednosti. Opazimo tudi, da se matematične rezervacije sprva večajo, nato pa postopoma padajo, dokler ne dosežejo vrednosti 0 ob izteku pogodbe.

Oglejmo si primer zveznega življenjskega zavarovanja z zveznim izplačilom rente v višini 1 v času nezmožnosti za delo (tj. stanju invalidnosti). Tukaj je $b_1 = 1$. V spodnji tabeli so prikazani rezultati, iz katerih lahko opazimo, da so vrednosti matematičnih rezervacij višje v stanju nezmožnosti za delo in nižje v aktivnem stanju. Opazimo tudi, da je razlika v vrednostih matematičnih rezervacij v stanjih 0 in 1 večja v primeru rente za invalidnost, kot pa rente v aktivnem stanju. Slednje sledi iz dejstva, da je verjetnost prehoda iz stanja invalidnosti v aktivno stanje manjša kot pa verjetnost prehoda iz aktivnega stanja v stanje invalidnosti.

Tabela 2: Centralni momenti za zvezno življenjsko rento v višini 1 letno, medtem, ko je zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo

momenti \ čas	0	6	12	18	24	30
$m_0^1(t)$	0.227	0.293	0.289	0.239	0.119	0
$m_1^1(t)$	15.176	13.566	11.464	8.708	5.044	0
$m_0^2(t)$	1.750	1.791	1.646	1.147	0.364	0
$m_1^2(t)$	11.502	8.987	6.111	3.107	0.716	0
$m_0^3(t)$	15.960	14.835	11.929	6.601	1.277	0
$m_1^3(t)$	-101.500	-71.990	-42.500	-17.160	-2.452	0

Prirejeno po Norberg (1995b).

Nazadnje si oglejmo še življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 v primeru smrti (t.j. $b_{02} = b_{12} = 1$) in z zvezno invalidsko rento 0.5 letno, v primeru, da je zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo. Tako je premija v primeru, da je zavarovanec v aktivnem stanju ob sklenitvi police enaka $P = (0.0683 + 0.5 \cdot 0.277) : 15.763 = 0.013108$. V primeru, da je zavarovanec ob sklenitvi police v stanju invalidnosti pa je premija enaka $P = (0.0683 + 0.5 \cdot 15.176) : 0.863 = 8.87173$. Spodnja tabela 4 prikazuje vrednosti matematičnih rezervacij in višjih momentov za omenjeno zavarovanje.

Tabela 3: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 za smrt in z zvezno invalidsko rento 0.5 letno, kjer zavarovanec plačuje zvezno neto premijo 0.01503 v aktivnem stanju

momenti \ čas	0	6	12	18	24	30
$m_0^1(t)$	0.0000	0.0410	0.0751	0.0858	0.0533	0
$m_1^1(t)$	7.6451	6.8519	5.8091	4.4312	2.5803	0
$m_0^2(t)$	0.4869	0.5046	0.4746	0.3514	0.1430	0
$m_1^2(t)$	2.7010	2.0164	1.2764	0.5704	0.0974	0
$m_0^3(t)$	2.1047	1.9440	1.5563	0.8686	0.1956	0
$m_1^3(t)$	-12.1200	-8.1340	-4.3960	-1.5100	-0.1430	0

Prerejeno po Norberg (1995b).

2.5 Uporaba markovskih verig za modeliranje stohastičnih obrestnih mer

V tem podpoglavju bomo v naš model iz prejšnjega poglavja, kjer smo predpostavili fiksno obrestno mero, vključili stohastično obrestno mero. Obrestno mero bomo modelirali s stopničasto funkcijo in predpostavili, da se obrestna mera vedno z enako verjetnostjo premakne v sosednje stanje. Na ta način bomo pridobili nabor možnih stanj za obrestno mero. V tem poglavju bomo tako imeli eno markovsko verigo za modeliranje zavarovalne police in drugo markovsko verigo za modeliranje obrestne mere. Predpostavili bomo neodvisnost omenjenih markovskih verig in tako prišli do posplošenega sistema diferencialnih enačb za momente sedanjih vrednosti bodočih zavarovalnih izplačil za dano polico. V zaključku poglavja si bomo ogledali tudi numerični izračun na primeru življenjskega zavarovanja za primer smrti in invalidnosti.

2.5.1 Modeliranje obrestnih mer

Predpostavimo, da je mogoče del ekonomije, ki opisuje gibanje obrestne mere modelirati s homogeno zvezno markovsko verigo Y na končnem prostoru stanj $\mathcal{J}^Y = \{1, \dots, J^Y\}$, z jakostmi prehodov $\lambda_{ef} \in \mathcal{J}^Y, e \neq f$. Obrestna mera je tako enaka r_e , ko smo v stanju e , torej lahko obrestno mero zapišemo kot

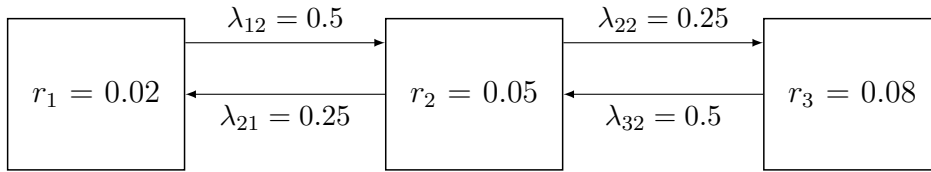
$$r(t) = \sum_e I_e^Y(t) r_e, \quad (114)$$

kjer je $I_e^Y(t) = \mathbb{1}[Y(t) = e]$ indikatorska funkcija dogodka, da je Y v stanju e v trenutku t . Kot lahko opazimo, smo tukaj predpostavili homogenost, ki pa v tem primeru ni nujno potrebna, saj rezultati ostajajo enaki, tudi če se λ_{ef} spreminjajo

v času. Razlog za predpostavko o homogenosti sprejmemo zato, kar nam omogoča doseči dolgoročno stabilnost slučajnega procesa obrestnih mer (Norberg, 1995a, str. 247).

Na spodnjem grafu je prikazana shema enostavnega modela markovske verige obrestnih mer s tremi stanji in sicer 0.02, 0.05 ter 0.08. Neposredni prehod je možen samo v sosednjo stanje in skupna intenzivnost prehoda iz katerega koli stanja je enaka 0.5, kar pomeni, da se obrestna mera povprečno spremeni vsaki dve leti. Z upoštevanjem simetrije, pa je dolgoročna povprečna obrestna mera enaka 0.05.

Slika 8: Prikaz enostavnega modela markovske verige obrestnih mer s tremi stanji



Prirejeno po Norberg (1995a).

2.5.2 Model za zavarovalna izplačila s stohastično obrestno mero

Za modeliranje zavarovalnih izplačil za neko zavarovalno polico bomo uporabili standardni model markovskih verig, ki smo ga predstavili v predhodnjem poglavju ter mu dodali oznako za indikator in proces štetja Z , s katerimi bomo ločili standardni proces od našega slučajnega procesa za obrestno mero. Predpostavimo, da sta procesa Y in Z neodvisna. Potem sledi po lemi (2.1), da je (Y, Z) markovska veriga na verjetnostnem prostoru $\mathcal{J}^Y \times \mathcal{J}^Z$ z jakostjo prehodov

$$\kappa_{ej, fk}(t) = \begin{cases} \lambda_{ef}(t), e \neq f, j = k, \\ \mu_{jk}(t), e = f, j \neq k, \\ 0, e \neq f, j \neq k. \end{cases} \quad (115)$$

Za vsak $g = 1, \dots, G$ naj bo $X^g = \{X^g(t)\}$ markovski proces na končnem prostoru stanj $\mathcal{J}^g = \{1, \dots, J^g\}$ in njegove prehodne verjetnosti označimo s $p_{j^g, k^g}^g, j^g, k^g \in \mathcal{J}^g$. Definirajmo G -dimenzionalni $X = \{X(t)_{t \geq 0}\}$ na prostoru $\mathcal{J} = \mathcal{J}^1 \times \dots \times \mathcal{J}^G$ kot $X(t) = (X^1(t), \dots, X^G(t))$.

Lema 2.1 *Če so markovski procesi $X^g, g = 1, \dots, G$, med seboj neodvisni, potem je tudi proces $X = (X^1, \dots, X^G)$ markovski proces in njegove prehodne verjetnosti so enake*

$$p_{j^1 \dots j^G, k^1 \dots k^G}(t, u) = \prod_{g=1}^G p_{j^g k^g}^g(t, u). \quad (116)$$

Še več, če ima vsak proces X^g jakosti prehodov podane z $\mu_{j^g k^g}^g(t)$ potem so jakosti prehodov za X podane kot

$$\mu_{j^1 \dots j^G, k^1 \dots k^G}(t) = \begin{cases} \mu_{j^g k^g}^g(t), & \text{če } j^g \neq k^g \text{ in } j^h = k^h \text{ za poljubne } h \neq g, \\ 0, & \text{za vse ostale } (j^1 \dots j^G) \neq (k^1 \dots k^G). \end{cases} \quad (117)$$

Dokaz 2.2 Za podroben dokaz glej Norberg (1995a), str. 256.

Moment pogodbene obveznosti, ki ga zavarovalnica ima za podan splošni model zavarovalne police definiramo kot pogojno matematično upanje sedanje vrednosti bodočih denarnih izplačil za dano polico in jo zapišemo kot

$$V_{ej}^{(g)}(t) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{v(t)} \int_t^n v dB \right)^q | Y(t) = e, Z(t) = j \right], \quad (118)$$

kjer je $v(t)$ funkcija diskontiranja, torej enaka $v(t) = e^{\int_0^t r(\tau) d\tau}$.

Izrek 2.2 Funkcije $V_{ej}^{(q)}(t)$ so določene z diferencialnimi enačbami

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{ej}^{(q)}(t) = & (qr_e(t) + \mu_j(t) + \lambda_e) V_{ej}^{(g)}(t) - qb_j(t) V_{ej}^{(q-1)}(t) \\ & - \sum_{k; k \neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{l=0}^q \binom{q}{l} (b_{jk}(t))^l V_{ek}^{q-1}(t) - \sum_{f; f \neq e} \lambda_{ef} V_{fj}^{(q)}(t), \end{aligned} \quad (119)$$

ki so dobro definirane na $(0, n) \setminus \mathcal{D}$. Robni pogoj pa je enak

$$V_{ej}^{(q)}(t) = \sum_{l=0}^q \binom{q}{l} (B_j(t) - B_j(t-))^l V_{ej}^{(q-l)}(t), t \in \mathcal{D}. \quad (120)$$

Dokaz 2.3 Za podroben dokaz glej Norberg (1995a), str. 248.

Za $q = 2, 3, \dots$, označimo z $m_{ej}^{(q)}(t)$ q -ti centralni moment $V_{ej}^{(q)}(t)$ in definirajmo $m_{ej}^{(1)}(t) = V_{ej}^{(1)}(t)$. Tako se centralni momenti $m_{ej}^{(q)}(t)$ določijo na podlagi necentralnih momentov $V_{ej}^{(q)}(t)$ za red $q > 1$ in sicer

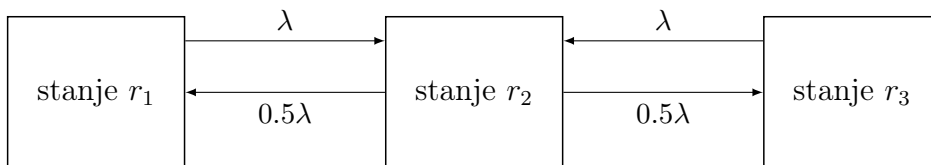
$$m_{ej}^{(q)}(t) = \sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} \binom{q}{p} V_{ej}^{(p)}(t) (V_{ej}^{(1)}(t))^{q-p}. \quad (121)$$

Oglejmo si primer življenjskega zavarovanja s stohastično obrestno mero, ki združuje zavarovanje za primer smrti in invalidsko rento. Predpostavimo, da je polica izdana v času $t = 0$ zavarovancu staremu x let. Polica ima torej tri možna stanja, tokrat označimo aktivno stanje z 1, stanje nezmožnosti za delo z 2 in stanje smrti s 3. V času t , ko je zavarovanec star $x + t$ let, so jakosti prehodov med stanji enake

$$\begin{aligned} \mu_{13}(t) &= \mu_{23}(t) = 0.0005 + 0.000075858 \cdot 10^{0.038(x+t)}, \\ \mu_{12}(t) &= 0.0004 + 0.0000034674 \cdot 10^{0.06(x+t)}, \\ \mu_{21}(t) &= 0.005. \end{aligned} \quad (122)$$

Razširimo model s predpostavko, da lahko obrestna mera zavzame tri možna stanja in sicer $r_1 = \ln(1.00) = 0$ (nizka obrestna mera oz stanje brez obrestne mere), $r_2 = \ln(1.045) = 0.04402$ (srednja vrednost obrestne mere) in $r_3 = \ln(1.09) = 0.08618$ (visoka vrednost obrestne mere). Z upoštevanjem enačbe (119) iz izreka (2.2) dobimo sistem devetih diferencialnih enačb, torej tri enačbe za stanja police, ter za vsako stanje še tri enačbe, ki predstavljajo stanje obrestnih mer. Nazadnje rabimo še jakosti prehodov med posamezni stanji obrestne mere. Predpostavimo in vzemimo markovski proces za modeliranje obrestne mere, kot je prikazan na spodnji sliki.

Slika 9: Markovski proces za modeliranje obrestne mere



Prirejeno po Norberg (2002).

Zgornja slika določi naslednjo matriko prehodov

$$\Lambda = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Tukaj lahko skalar λ interpretiramo kot povprečno število prehodov na časovno enoto, ki tako meri volatilitnost obrestne mere.

Kot primer vzemimo moškega starega 30 let, ki sklene 30-letno življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, ki izplača zavarovalno vsoto v vrednosti 1 ($b_{13} = b_{23} = 1$) in zvezno invalidsko rento v vrednosti 0.5 ($b_2 = 0.5$), zavarovanec pa zvezno vplačuje premije v vrednosti $-b_1$, ki je določena po principu ekvivalence v začetnem stanju $(2, 1)$, kar pomeni stanje 2 za obrestno mero in začetno stanje 1 za polico. V spodnji tabeli so prikazani prvi trije centralni momenti $m_{ej}^{(q)}(0)$ sedanjih vrednosti bodočih izplačil zmanjšanih za vplačane premije za opisano življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti v času $t = 0$ in $\lambda = 0$, kar pomeni, da je obrestna mera fiksna in enaka 4.5%, torej gre za podoben primer, ki smo ga že obravnavali v prejšnjem poglavju.

Tabela 4: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0$, e označuje stanje obrestne mere, j pa stanje police, premija pa je določena po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $\pi = 0.0131$

λ	e,j:		1,1	1,2	2,1	2,2	3,1	3,2
	π	q						
0	0.0131	1	0.15	13.39	0.00	7.65	-0.39	5.03
		2	2.55	12.50	0.49	2.70	0.13	0.80
		3	20.45	-99.02	2.11	-12.12	0.37	-2.38

Prirejeno po Norberg (1995a).

Kot lahko vidimo, so vrednosti drugih in tretjih centralnih momentov sedanjih vrednosti bodočih izplačil zelo odvisni od višine predpostavljene obrestne mere, v resnici, njihove absolutne vrednosti padajo pri naraščajočih začetnih stanjih obrestne mere. To izhaja iz dejstva, da povečanje obrestne mere pomeni zmanjšanje diskontnega faktorja in s tem zmanjšanje sedanjih vrednosti bodočih izplačil, torej enako velja tudi za momente sedanjih vrednosti.

V naslednji tabeli pa lahko opazimo, da z naraščanjem λ , postajajo razlike med temi pari vedno manjše in se na koncu skoraj izničijo. Razlog za to je v tem, da v primeru nenehnega spreminjaja obrestne mere, začetna obrestna mera nima več velikega vpliva na izračun.

Tabela 5: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0.05, 0.5, 5, \infty$, e označuje stanje obrestne mere, j pa stanje police, premija pa je določena po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je označena s π

λ	e,j:		1,1	1,2	2,1	2,2	3,1	3,2
	π	q						
0.05	0.0137	1	0.06	11.31	0.00	7.90	-0.03	5.78
		2	1.61	12.26	0.62	5.41	0.25	2.43
		3	11.94	-42.87	3.20	-4.33	0.94	-0.08
0.05	0.0134	1	0.02	8.43	0.00	7.81	-0.02	7.24
		2	0.65	4.90	0.55	4.15	0.46	3.52
		3	3.34	-13.35	2.59	-10.13	2.02	-7.74
0.5	0.0132	1	0.00	7.77	0.00	7.70	0.00	7.64
		2	0.51	2.86	0.50	2.91	0.49	2.86
		3	2.26	-12.51	2.20	-12.19	2.14	-11.88
∞	0.0132	1	0.00	7.69	0.00	7.69	0.00	7.69
		2	0.50	2.74	0.50	2.74	0.50	2.74
		3	2.15	-12.37	2.15	-12.37	2.15	-12.37

Prirejeno po Norberg (1995a).

3 UPORABA MARKOVSKIH VERIG PRI MODELIRANJU VEDENJA ZAVAROVANCA

V tem poglavju se bomo osredotočili na izračun matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje glede na pričakovano vedenje zavarovanca. Tako bomo definirani kombinirani model, ki bo sestavljen iz modela tveganja in vključili model vedenja, ki bo opisoval zavarovančevo vedenje. Model vedenja bo imel naslednja tri stanja: stanje plačevanja premij, stanje prenehanja plačevanja premij in stanje prekinitve police. Naš glavni cilj bo modelirati zavarovalno polico ob upoštevanju tveganj prenehanja plačevanja premij ali prekinitve police s strani zavarovanca. Izpeljali bomo tehnike vrednotenja matematičnih rezervacij, kjer bomo enkrat predpostavili neodvisnost med modeloma in drugič odvisnost (Brandt Henriksen, 2014).

V splošnem je znano, da sta modela bolj ali manj med seboj odvisna, saj je zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo bolj nagnjen k prenehanju plačevanja premij ali pa prekinitvi police, kot pa zavarovanec, ki je v modelu tveganja v aktivnem stanju. Zanimalo nas bo, do kakšnih razlik v vrednostih matematičnih rezervacij prihaja, ko enkrat predpostavimo neodvisnost in spet drugič odvisnost med modeloma. Omenimo, da bo odvisnost v našem primeru pomenila, da zavarovancu dopuščamo prehajanje med stanji v modelu vedenja, le v času, ko je v modelu tveganja v aktivnem stanju. Nekoliko osnovnejši in enostavnejši kombiniran model, ki model vedenja modelira na enak način, vendar pa za model tveganja vzame osnovno življenjsko zavarovanje za smrt, so podrobneje obravnavali Buchard, Møller in Schmidt (2014). Buchardt (2013) pa se je tudi posvetil obravnavi odvisnosti obrestnih mer in jakosti prehodov v omenjenem osnovnem modelu. Leto kasneje sta Buchardt in Møller (2015) razširila kombiniran model in za model tveganja vzela življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, hkrati pa upoštevala še časovno komponento v modelu vedenja in predpostavila, da ima zavarovanec večjo verjetnost prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje, če je v stanju nezmožnosti krajši čas, kot pa zavarovanec, ki je v stanju nezmožnosti za delo več let. Valdez (2001) pa se je ukvarjal tudi s predpostavko odvisnosti med smrtnostjo in njeno večjo jakostjo po prekinitvi police. Poleg tega pa tudi za modeliranje zavarovančevega vedenja obstaja veliko pristopov. Ena skrajna predpostavka je lahko ta, da zavarovalec poskuša maksimizirati vrednost denarnih tokov police. Ta pristop je podrobneje obravnaval Steffensen (2002), ki je model vedenja oblikoval po principu ameriške opcije in dopuščal možnost, da lahko zavarovalec kadarkoli in v vseh stanjih preneha s plačevanjem premije ali pa se odloči za prekinitvev police. Poleg tega je predpostavil, da se v primeru prenehanja plačevanja premije spremeni

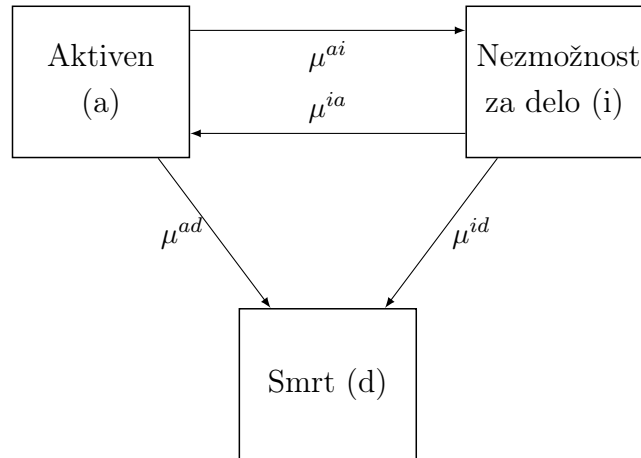
pogoji police, zavarovanec pa ima še vedno možnost prekiniti polico.

Pravkar omenjeni pristopi analiziranja zavarovančevega vedenja na življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti so zanimivi in nam podajajo zanimive rezultate. Naš glavni namen v tem poglavju pa bo izračunati vrednost matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje in hkrati analizirati učinke na njihove vrednosti ob različnih predpostavkah zavarovančevega vedenja. Zanimale nas bodo posledice privzetka o neodvisnosti med izbranimi modeloma tveganja in vedenja.

3.1 Model tveganja in vedenja

V tem podpoglavju se bomo osredotočili na izračun matematičnih rezervacij glede na pričakovano vedenje zavarovanca. Imeli bomo opravka s t.i. kombiniranim modelom, ki vsebuje model tveganja ter model vedenja. V ta namen bomo najprej ločili model tveganja in model vedenja, ki sta lahko ali pa tudi ne med seboj odvisna. Označimo model tveganja z Z^{risk} , model vedenja pa z $Z_{behaviour}$ in kombinirani model kot $(Z^{risk}, Z_{behavior})$. S podano celotno zgodovino procesa $Z_{behavior}$, predpostavimo, da je Z^{risk} markovska veriga s končnim številom stanj. Torej, pogojno na $Z_{behavior}$, obstajajo jakosti prehodov $\mu^{jk}(t)$ za $j, k \in Z^{risk}$ in $t \geq 0$ tako, da je za vse $k \in Z^{risk}$, $\int_0^t \mu^{Z^{risk}(s)k}(s)ds$ (pogojno na $Z_{behavior}$) integral, ki šteje število skokov v stanje k v modelu tveganja. Jakosti prehodov so lahko neodvisne od $Z_{behavior}$ in v tem primeru je Z^{risk} brez pogojevanja na $Z_{behavior}$ markovska veriga s končnim številom stanj. Za model tveganja vzemimo življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, ki smo ga že obravnavali v prejšnjem poglavju. Na spodnjem grafu smo aktivno stanje označili z a , stanje nezmožnosti za delo z i (stanje invalidnosti) in stanje smrti z d (Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson, 2014).

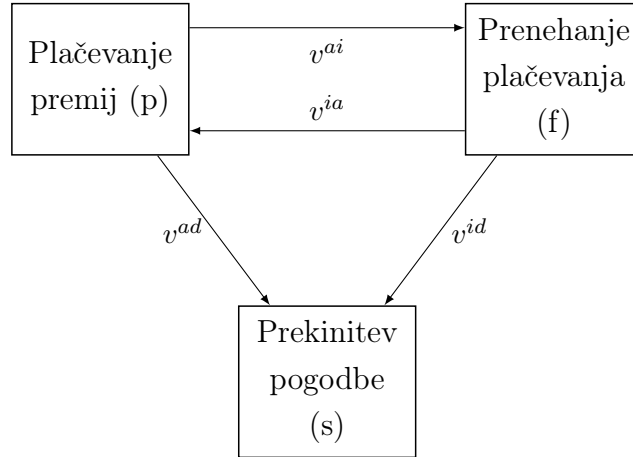
Slika 10: Model tveganja



Prirejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Podobno kot zgoraj, lahko s celotno podano zgodovino procesa Z^{risk} , predpostavimo, da je proces $Z_{behavior}$ markovska veriga s končnim številom stanj. Označimo z $v_{jk}(t)$ jakosti prehodov za $j, k \in Z_{behavior}$ in $t \geq 0$. Na spodnjem grafu je predstavljen model vedenja, kjer smo s p označili stanje plačevanja premije, s f stanje prenehanja plačevanja in s s stanje prekinitve police.

Slika 11: Model vedenja



Prirejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Ko je $Z_{behavior}$ pogojno na podano celotno zgodovino procesa Z^{risk} markovska veriga in je Z^{risk} pogojno na podano celotno zgodovino procesa $Z_{behavior}$ markovska veriga, potem je tudi kombiniran model $(Z^{risk}, Z_{behavior})$ markovska veriga. Tako obstajajo jakosti prehodov za $\mu_l^{jk}(t)$ za $j, k \in Z^{risk}, l \in Z_{behavior}$ in $t \geq 0$ tako, da je za vse $k \in Z^{risk}$, $\int_0^t \mu_{Z_{behavior}(s)k}^{Z^{risk}(s)k}(s)ds$ proces štetja, ki šteje število skokov v stanje k v modelu tveganja. In podobno, obstajajo jakosti prehodov $v_{jk}^l(t)$ za $j, k \in Z_{behavior}, l \in Z^{risk}$ in $t \geq 0$ tako, da za vse $k \in Z_{behavior}$, je $\int_0^t v_{Z_{behavior}(s)k}^{Z^{risk}(s)k}(s)ds$ proces štetja, ki šteje število skokov v stanje k v modelu vedenja. Označimo s $p_{lm}^{jk}(t, s)$ verjetnost prehoda iz stanja j v stanje k v modelu tveganja in hkrati prehod iz stanja l v stanje m v modelu vedenja v časovnem intervalu (t, s) . V primeru, ko sta model tveganja Z^{risk} in model vedenja $Z_{behavior}$ neodvisna, to pomeni, da jakosti prehodov μ niso odvisne od $Z_{behavior}$ in jakosti prehodov v niso odvisne od Z^{risk} , lahko verjetnost prehodov poenostavimo in zapišemo kot produkt verjetnosti prehodov za posamezni model, tj.

$$p_{lm}^{jk}(t, s) = p^{jk}(t, s)p_{lm}(t, s). \quad (124)$$

Če sta jakosti prehodov μ^{ai} in μ^{ia} v modelu tveganja strogo pozitivni, potem ne moremo dobiti sklenjenega zapisa (angl. closed form expression) za verjetnosti prehodov $(p^{aa}, p^{ii}, p^{ai}, p^{ia}, p^{ad}, p^{id})$. V primeru, ko je jakost prehoda iz stanja

nezmožnosti za delo v aktivno stanje enaka 0, tj. $\mu^{ia} = 0$, lahko ob predpostavki neodvisnosti obeh modelov, eksplicitno navedemo verjetnosti prehodov kot

$$p^{aa}(t, s) = e^{-\int_t^s (\mu^{ai}(\tau) + \mu^{ad}(\tau)) d\tau}, \quad p^{ii}(t, s) = e^{-\int_t^s \mu^{id}(\tau) d\tau}, \quad (125)$$

$$p^{ai}(t, s) = \int_t^s p^{aa}(t, \tau) \mu^{ai}(\tau) p^{ii}(\tau, s) d\tau, \quad p^{ia}(t, s) = 0. \quad (126)$$

Verjetnosti p^{ad} in p^{id} določimo z upoštevanjem pravila, da je vsota verjetnosti enaka 1. Podobno, kot prej, če sta jakosti prehodov v_{pf} in v_{fp} v modelu vedenja strogo pozitivni, ne moremo dobiti sklenjenega zapisa za verjetnosti prehodov $(p_{pp}, p_{ff}, p_{pf}, p_{fp}, p_{ps}, p_{fs})$. V primeru, ko je jakost prehoda iz stanja prenehanja plačevanja premije nazaj v stanje plačevanja premije enaka 0, tj. $v_{fp} = 0$, lahko ob predpostavki neodvisnosti obeh modelov, eksplicitno navedemo verjetnosti prehodov kot

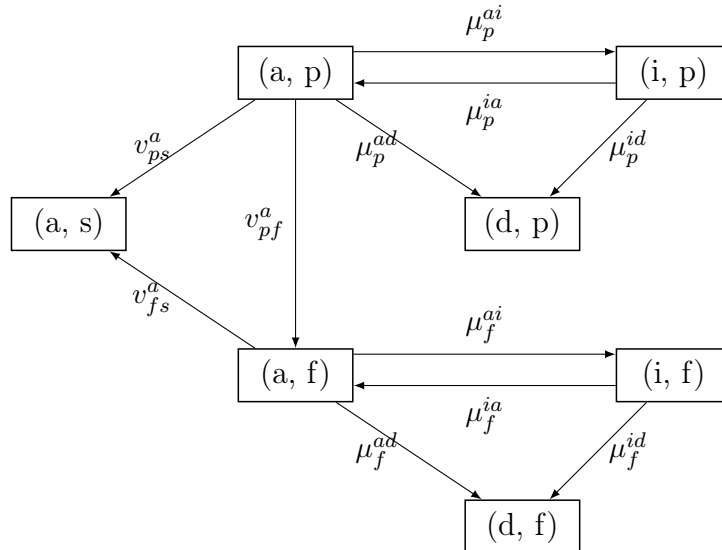
$$p_{pp}(t, s) = e^{-\int_t^s (v_{pf}(\tau) + v_{ps}(\tau)) d\tau}, \quad p_{ff}(t, s) = e^{-\int_t^s v_{fs}(\tau) d\tau}, \quad (127)$$

$$p_{pf}(t, s) = \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) d\tau, \quad p_{fp}(t, s) = 0. \quad (128)$$

Verjetnosti p_{ps} in p_{fs} ponovno določimo z upoštevanjem pravila, da je vsota verjetnosti enaka 1. Res je, da nam predpostavka o neodvisnosti med modeloma podaja poenostavljene oblike verjetnosti prehodov, kljub temu pa obstaja kar nekaj razlogov, zakaj je dobro predpostaviti odvisnost med omenjenima modeloma. Zavarovanec s tveganji bo povpraševal po določenih vrstah zavarovanj, ki mu dajejo varnost. To lahko v naš model vključimo tako, da dopuščamo, da so jakosti prehodov v modelu vedenja bolj ali manj eksplicitno odvisne od modela tveganja. Na drugi strani pa zavarovanec s svojim vedenjem povzroča določeno tveganje. Slednje lahko v naš model vključimo tako, da dopuščamo, da so jakosti prehodov v modelu tveganja bolj ali manj odvisne od modela vedenja. Vzročni učinki med obema modeloma imajo tako lahko različne ekonomske razlage. Razlog, da predpostavimo odvisnost med modeloma je tudi dejstvo, da je na primer zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo bolj nagnjen k prenehanju plačevanja premij ali pa prekinitvi police, kot pa zavarovanec, ki je v modelu tveganja v aktivnem stanju. V zavarovalnicah je običajna praksa, da lahko le zavarovanci v aktivnem stanju prenehajo s plačevanjem premij ali polico prekinejo. Standardna formulacija zavarovalne pogodbe je tudi ta, da zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto v dveh primerih in sicer, ob poteku police ali pa zaradi prekinitve police s strani zavarovalca. S tem namenom bomo predpostavili, da je jakost prehoda iz stanja prenehanja plačevanja premij nazaj v stanje plačevanja premij enaka 0, tj. $v_{fp} = 0$. Ta predpostavka je smiselna, saj se v primeru ponovnega pričetka plačevanja premij s strani zavarovanca po določenem obdobju neplačevanja to obravnava kot začetek nove pogodbe. Spodnja slika prikazuje kombiniran model, ki združuje življenjsko zavarovanje za primer smrti

in invalidnosti združeno z modelom vedenja (Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson, 2014).

Slika 12: Kombiniran model



Prerejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

3.2 Denarni tokovi v modelu tveganja in vedenja

V tem poglavju bomo definirali pogodbeni izplačila in predstavili formulo za izračun pogojnega matematičnega upanja sedanjih vrednosti neto izplačil. Vzeli bomo kombiniran model, kot smo ga predstavili na sliki 12 v prejšnjem poglavju ter vključili model vedenja, kjer bomo predpostavili, da je jakost prehoda iz stanja prenehanja plačevanja premije nazaj v stanje rednega plačevanja enaka 0, tj. $v_{fp} = 0$. Kot začetno pozicijo bomo vzeli aktivno stanje z rednim plačevanjem premij, tj. (a, p) . Predpostavili bomo, da zavarovalna pogodba izplača neto zavarovalno vsoto b^j dokler je zavarovanec v stanju j in neto vrednost b^{jk} , ko zavarovanec preide iz stanja j v stanje k . Neto tukaj pomeni izplačilo zavarovalne vsote zmanjšano za vplačane premije s strani zavarovanca. Predpostavimo še, da se pogodba izteče v času n . S tem lahko formuliramo pričakovano plačilo v času s pogojno na dogodek, da je zavarovanec v stanju k v modelu tveganja v času s kot

$$c^k(s) = b^k(s) + \sum_{l:l \neq k} \mu_p^{kl}(s) b^{kl}(s), \quad (129)$$

kjer vsota teče po vseh stanjih iz modela Z^{risk} razen predhodnega stanja k . Predpostavimo, da pogodba določa, da se po prehodu zavarovanca v stanje

prekinitve police v modelu vedenja, za neko stanje k v modelu tveganja v času t , vsa nadaljnja izplačila prekličejo in zavarovalnica izplača odkupno vrednost $G^k(t)$. Naredimo še zadnjo predpostavko, da se v primeru, ko zavarovalec preneha s plačevanjem premij, medtem ko je v stanju h v modelu tveganja v času t , nadaljnja izplačila s strani zavarovalnice spremenijo na naslednji način: negativni del izplačil b^j in b^{jk} , (primanjkljaja premij, ki ga zavarovalnica ne dobi zaradi prenehanja plačevanja premij s strani zavarovanca) je postavljen na nič, medtem ko so pozitivni elementi izplačil (obdobje, ko je zavarovanec plačeval premije), označimo jih z b^{j+} in b^{jk+} , pomnoženi s t.i. faktorjem police $f^h(t)$, ki je odvisen od časa t in stanja h . Zapišimo pričakovano stopnjo izplačila pozitivnih denarnih tokov (pred množenjem s faktorjem $f^h(t)$) kot

$$c^{k+}(s) = b^{k+}(s) + \sum_{l:l \neq k} \mu_f^{kl}(s) b^{kl+}(s). \quad (130)$$

S tem lahko zapišemo pričakovano izplačilo v času s pogojno, da je zavarovanec v stanju k v času s in skoči v stanje prenehanje plačevanja premij v modelu vedenja v času t medtem ko je v modelu tveganja v stanju h , kot

$$f^h(t) c^{k+}(s) = f^h(t) \left(\sum_{l:l \neq k} \mu_f^{kl}(s) b^{kl+}(s) \right). \quad (131)$$

Prekinitev police in možnost prenehanja plačevanja premije sta splošni opciji vsake zavarovalne pogodbe. V splošnem velja, da se v primeru prenehanja plačevanja premij s strani zavarovalca, proporcionalno glede na vrednost vplačanih premij zmanjša zavarovalna vsota zavarovanja. Sorazmerno zmanjšanje vrednosti izplačil se vzpostavi zato, ker je zavarovalna vsota vezana na plačila premij, ki jih zavarovanec vplača v času trajanja pogodbe in se na ta način zagotovi enakopravnost med zavarovanci, ki vplačajo vse predvidene premije in zavarovanci, ki vplačajo le del premij. S tem namenom bomo razvili vrednotenje izplačil ob predpostavki, da se vsa prihodnja izplačila vrednotijo proporcionalno. Torej v primeru, da se zavarovanec premakne v stanje prenehanja plačevanja premij, in je takrat v stanju h v modelu tveganja v času t ter je polica prekinjena v času $u > t$, medtem ko je zavarovanec v stanju j v modelu tveganja, pogodba izplača odkupno vrednost $f^h(t) G^{j+}(u)$, kjer so vsa izplačila, vključno z $f^h(t)$ in $G^{j+}(u)$ zvezna in omejena z robnimi pogoji. Ker je proces Z markovska veriga, se moramo zavedati, da je jakost skoka v času t odvisna samo od položaja procesa Z . To ne pomeni, da so izplačila v času t odvisna le od procesa Z , saj smo pričakovana izplačila v času s definirali kot produkt $f^h(t) \cdot c^{k+}(s)$, ki je odvisen od t in h , kar pomeni, da smo s faktorjem police vzpostavili tudi časovno odvisnost v procesu izplačil, ki pa ni prisotna v prvotnem modelu tveganja. V nadaljnjih izračunih bomo predpostavili deterministično obrestno mero

r in izpustili časovno odvisnost v izpeljanih formulah izplačil (Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson, 2014).

3.2.1 Oblikovanje rezervacij v primeru spremembe stanja zavarovanja v vedenjskem modelu - prekinitve plačevanja zavarovalnih premij

V tem razdelku bomo definirali diferencialno enačbo za rezervacijo, ki bo odražala pričakovano sedanjo vrednost prihodnjih izplačil v času $t > \tau$ pogojno, da je zavarovanec prenehal s plačevanjem premij in ostal v stanju h v modelu tveganja v času τ . Tu in v celotnem razdelku dalje se sklicujemo na Steffensen (2000) za vse izpeljave diferencialnih enačb in njihovih rešitev. Označimo z $V_f^j(t)_{\tau h}$ rezervacijo, v primeru, ko je zavarovanec v stanju j v modelu tveganja v času t in preneha s plačevanjem premij, medtem ko je v stanju h v modelu tveganja v času τ . Potem lahko diferencialno enačbo za rezervacijo $V_f^j(t)_{\tau h}$ zapišemo, kot (tukaj in tudi v nadaljevanju bomo izpustili specifikacijo trivialnega robnega pogoja)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_f^j(t)_{\tau h} &= r V_f^j(t)_{\tau h} - f^h(\tau) b^{j+}(t) - \sum_{k:k \neq j} \mu_f^{jk}(t) \left(f^h(\tau) b^{jk+}(t) + V_f^k(t)_{\tau h} - V_f^j(t)_{\tau h} \right) \\ &\quad - v_{fs}^j(t) \left(f^h(\tau) G^{j+}(t) - V_f^j(t)_{\tau h} \right). \end{aligned} \quad (132)$$

Rešitev pa ima obliko

$$V_f^j(t)_{\tau h} = f^h(\tau) \int_t^{\tau} e^{-\int_t^s r} \sum_k p_{ff}^{jk}(t, s) (c^{k+}(s) + v_{fs}^k(s) G^{k+}(s)) ds, \quad (133)$$

kjer je $e^{-\int_t^s r}$ krajša oznaka za integral $e^{-\int_t^s r(u) du}$ in $p_{ff}^{jk}(t, s)$ verjetnost, da se zavarovanec premakne iz stanja j v stanje k v modelu tveganja, medtem ko ostaja v stanju f , v modelu vedenja, t.j. v stanju prenehanja plačevanja premije. Ta interpretacija $p_{ff}^{jk}(t, s)$ temelji na predpostavki, da je $v_{fp} = 0$ tako, da je $p_{ff}^{jk}(t, s) = p_{\bar{f}\bar{f}}^{jk}(t, s)$, kjer notacija $\bar{f}\bar{f}$ označuje, da zavarovanec ostaja v stanju neplačevanja premije skozi celoten časovni interval. Za rešitev te diferencialne enačbe ne moremo dobiti sklenjene oblike (angl. closed form solution). Iz enačbe (133) lahko opazimo, da je rezervacija sestavljena iz pričakovanih izplačil pozitivnih denarnih tokov ob prenehanju plačevanja premij ($c^{k+}(s)$) in odkupne vrednosti v primeru prekinitve police $G^{k+}(s)$. V posebnem primeru, ko predpostavimo neodvisnost med obema modeloma, dobimo poenostavljeno obliko verjetnosti prehoda in sicer

$$p_{ff}^{jk}(t, s) = p_{ff}(t, s) p^{jk}(t, s), \quad (134)$$

s tem pa se rešitev diferencialne enačbe rezervacije $V_f^j(t)_{\tau h}$ poenostavi v

$$V_f^j(t)_{\tau h} = f^h(\tau) \int_t^{\tau} e^{-\int_t^s r} p_{ff}(t, s) \sum_k p^{jk}(t, s) (c^{k+}(s) + v_{fs}^k(s) G^{k+}(s)) ds. \quad (135)$$

Zgornja formula se zdi povsem primerna, saj nanjo lahko gledamo kot na matematično upanje dveh denarnih tokov in sicer $\sum_k p^{jk}(t, s)c^{k+}(s)$ in $\sum_k p^{jk}(t, s)v_{fs}^k(s)(G^{k+}(s))$. Lahko pa bi v zgornji enačbi predpostavili neodvisnost med modeloma. Kolikšna napaka nastane ob tej predpostavki, bomo videli kasneje pri konkretnih numeričnih primerih in izračunih. Omenimo pa, da izračun rešitve ne predstavlja večjih težavnosti, ko uporabimo pravi model (brez predpostavke o neodvisnosti), zato je smiselno uporabiti pravi model.

3.2.2 Oblikovanje rezervacij v primeru spremembe stanja zavarovanca v modelu tveganja - začasna ali trajna nezmožnost za delo

Označimo z $V^j(t)$ potrebno rezervacijo, ko je polica v stanju j v modelu tveganja v času t in hkrati zavarovanec redno plačuje premije za zavarovalno pogodbo in definirajmo diferencialno enačbo za omenjeno rezervacijo kot (tukaj bomo indikator p , ki pomeni plačevanje premij s strani zavarovanca v modelu vedenja izpustili)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^j(t) = & rV^j(t) - b^j(t) - \sum_{k:k \neq j} \mu_p^{jk}(t)(b^{jk}(t) + V^k(t) - V^j(t)) \\ & - v_{pf}^j(t)(V_f^j(t)_{tj} - V^j(t)) - v_{ps}^j(t)(G^j(t) - V^j(t)). \end{aligned} \quad (136)$$

Omenimo, da rezervacijo $V_f^j(t)_{tj}$ dobimo z reševanjem diferencialne enačbe za $V_f^j(t)_{\tau j}$ za fiksen τ in poznejšo zamenjavo τ s t . Rešitev lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} V^j(t) = & \int_t^n e^{-\int_t^s r} \sum_k p_{pp}^{jk}(t, s)(c^k(s) + G^k(s)v_{ps}^k(s))ds \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^s r} \sum_k W^{jk}(t, s)(c^{k+}(s) + v_{fs}^k(s)G^{k+}(s))ds, \end{aligned} \quad (137)$$

kjer je $p_{pp}^{jk}(t, s)$ verjetnost, da se zavarovanec premakne iz stanja j v stanje k v modelu tveganja hkrati pa ostaja v stanju p v modelu vedenja, kar pomeni, da plačuje premije. Ta interpretacija $p_{pp}^{jk}(t, s)$ temelji na predpostavki, da je $v_{ps} = 0$, tako da je $p_{pp}^{jk}(t, s) = p_{\overline{pp}}^{jk}(t, s)$. Nadalje definirajmo

$$W^{jk}(t, s) = \int_t^s \sum_h p_{pp}^{jh}(t, \tau)v_{pf}^h(\tau)p_{ff}^{hk}(\tau, s)f^h(\tau)d\tau. \quad (138)$$

Iz enačbe (137) lahko opazimo, da je rezervacija sestavljena iz pričakovanih izplačil pozitivnih denarnih tokov v stanju plačevanja premij ($c^k(s)$) in odkupne vrednosti v primeru prehoda iz stanja plačevanja premije v stanje prekinitve police $G^k(s)$ ter pričakovanih izplačil pozitivnih denarnih tokov do prenehanja plačevanja premij ($c^{k+}(s)$) in odkupne vrednosti v primeru prehoda iz stanja neplačevanja premij v prekinitve police $G^{k+}(s)$. Poimenujmo razmerje $W^{jk}(t, s)/p_{pf}^{jk}(t, s)$ kot pričakovan

faktor police pogojno, da zavarovanec skoči iz stanja j v stanje k v modelu tveganja in hkrati preide iz stanja plačevanja premije p v stanje prenehanja plačevanja premije f v časovnem intervalu (t, s) . V posebnem primeru, ko predpostavimo neodvisnost med modeloma dobimo poenostavljene oblike verjetnosti prehodov

$$p_{pp}^{jk}(t, s) = p_{pp}(t, s)p^{jk}(t, s), \quad (139)$$

$$p_{ff}^{jk}(t, s) = p_{ff}(t, s)p^{jk}(t, s), \quad (140)$$

$$p_{pf}^{jk}(t, s) = p_{pf}(t, s)p^{jk}(t, s), \quad (141)$$

tako, da je

$$\begin{aligned} V^j(t) = & \int_t^n e^{-\int_t^s r} p_{pp}(t, s) \sum_k p^{jk}(t, s) (c^k(s) + v_{ps}(s)G^k(s)) ds \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^s r} \sum_k W^{jk}(t, s) (c^{k+}(s) + v_{fs}(s)G^{k+}(s)) ds, \end{aligned} \quad (142)$$

$$W^{jk}(t, s) = \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) \sum_h p^{jh}(t, \tau) p^{hk}(\tau, s) f^h(\tau) d\tau. \quad (143)$$

Zgornja izpeljava se zdi primerna, saj na prvo vrstico v zgornji enačbi lahko pogledamo kot na matematično upanje dveh denarnih tokov $\sum_k p^{jk}(t, s)c^k(s)$ in $\sum_k p^{jk}(t, s)v_{ps}(s)G^k(s)$. Ko želimo uporabiti prvotno z integrali izraženo rešitev, bi bilo za poenostavitev izračuna smiselno predpostaviti verjetnostno neodvisnost. To pa ni edina predpostavka, ki jo je za poenostavitev izračuna potrebno sprejeti. Namreč, kot lahko vidimo, je izraz $W^{jk}(t, s)$ odvisen od faktorja police $f^h(\tau)$, zato na tem mestu predpostavimo še to, da $f^h(\tau)$ ni odvisen od h . Tako lahko namesto $f^h(\tau)$ pišemo $f(\tau)$ in se enačba

$$W^{jk}(t, s) = p^{jk}(t, s)W(t, s), \quad (144)$$

z

$$W(t, s) = \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) f(\tau) d\tau, \quad (145)$$

poenostavi v

$$\int_t^n e^{-\int_t^s r} W(t, s) \sum_k p^{jk}(t, s) (c^{k+}(s) + v_{fs}(s)G^{k+}(s)) ds. \quad (146)$$

Zgornja izpeljava je sicer zelo dobra v smislu enostavnosti izračuna, saj nanjo lahko pogledamo kot matematično upanje denarnih tokov $\sum_k p^{jk}(t, s)c^k(s)$, $\sum_k p^{jk}(t, s)c^{k+}(s)$ in $\sum_k p^{jk}(t, s)v_{ps}(s)G^k(s)$ ter $\sum_k p^{jk}(t, s)v_{fs}(s)G^{k+}(s)$, vendar pa se moramo zavedati njenih pomankljivosti zaradi sprejetja določenih predpostavk.

3.3 Dva posebna primera modela tveganja z enakim modelom vedenja

V tem poglavju bomo izpeljali enačbe za rezervacije in njihove rešitve, ki smo jih definirali v prejšnjem poglavju in sicer za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti (glej sliko 5) in klasično življenjsko zavarovanje za primer smrti (glej sliko 3). Poseben poudarek bomo v tem poglavju namenili vplivu različnih predpostavk o neodvisnosti, ki nam poenostavijo izračun, na končni rezultat. Osredotočili se bomo na vrednost police, ko je zavarovanec v aktivnem stanju v modelu tveganja in v stanju plačevanja premij v modelu vedenja, saj ta predstavlja največ izzivov za izračun rezervacij glede na to, da lahko zavarovanec v času pogodbe prehaja iz začetnega stanja v druga stanja v modelu vedenja.

3.3.1 Življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti

Torej vzemimo najprej življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti in predpostavimo, da so vsa izplačila v stanju smrti enaka 0. Potem lahko rezervacijo, ko je zavarovanec v aktivnem stanju in plačuje premije v času t zapišemo kot poseben primer enačbe (133) in sicer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^a(t) &= rV^a(t) - b^a(t) \\ &\quad - \mu^{ai}(t)(b^{ai}(t) + V^i(t) - V^a(t)) - \mu_{ad}(t)(b^{ad}(t) - V^a(t)) \\ &\quad - v_{pf}^a(V_f^a(t)_{ta} - V^a(t)) - v_{ps}^a(t)(G^a(t) - V^a(t)). \end{aligned} \quad (147)$$

Opazimo, da druga vrstica v zgornji enačbi vsebuje nevarnostno premijo povezano z jakostjo prehoda v modelu tveganja, tretja vrstica pa vsebuje nevarnostno premijo povezano z jakostjo prehoda v modelu vedenja. Tako lahko splošno rešitev iz prejšnjega poglavja (136) zapišemo kot

$$\begin{aligned} V^a(t) &= \int_t^n e^{-\int_t^s r} \left(p_{pp}^{aa}(t, s) [c^a(s) + v_{ps}^a(s)G^a(s)] + p_{pp}^{ai}(t, s) [c^i(s) + v_{ps}^i(s)G^i(s)] \right) ds \\ &\quad + \int_t^n e^{-\int_t^s r} \left(W^{aa}(t, s) [c^{a+}(s) + v_{fs}^a(s)G^{a+}(s)] \right. \\ &\quad \left. + W^{ai}(t, s) [c^{i+}(s) + v_{fs}^i(s)G^{i+}(s)] \right) ds, \end{aligned} \quad (148)$$

kjer je

$$\begin{aligned} W^{aa}(t, s) &= \int_t^s \left(p_{pp}^{aa}(t, \tau) v_{pf}^a(\tau) p_{ff}^{aa}(\tau, s) f^a(\tau) \right. \\ &\quad \left. + p_{pp}^{ai}(t, \tau) v_{pf}^i(\tau) p_{ff}^{ia}(\tau, s) f^i(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (149)$$

$$W^{ai}(t, s) = \int_t^s \left(p_{pp}^{aa}(t, \tau) v_{pf}^a(\tau) p_{ff}^{ai}(\tau, s) f^a(\tau) + p_{pp}^{ai}(t, \tau) v_{pf}^i(\tau) p_{ff}^{ii}(\tau, s) f^i(\tau) \right) d\tau. \quad (150)$$

Na tem mestu uvedemo realno predpostavko, da zavarovanec lahko prehaja med različnimi stanji v modelu vedenja le takrat, ko je v modelu tveganja v aktivnem stanju. To pomeni, da sta jakosti prehodov $v_{pf}^i(t) = v_{ps}^i(t) = 0$ in se W^{aa} in W^{ai} poenostavita v

$$W^{aa}(t, s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t, \tau) v_{pf}^a(\tau) p_{ff}^{aa}(\tau, s) f^a(\tau) d\tau, \quad (151)$$

$$W^{ai}(t, s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t, \tau) v_{pf}^a(\tau) p_{ff}^{ai}(\tau, s) f^a(\tau) d\tau. \quad (152)$$

Zgornji formuli seveda nista eksplicitni, saj v modelu tveganja dopuščamo pozitivno verjetnost prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje, kar pa povzroči, da ne moremo analitično izračunati danih verjetnosti. V primeru, da ne dopuščamo omenjenih možnosti, se verjetnosti poenostavijo v

$$p_{pp}^{aa}(t, s) = p_{pp}^{\bar{aa}}(t, s) = e^{-\int_t^s \mu_p^{ai} + \mu_p^{ad} + v_{pf}^a + v_{ps}^a}, \quad (153)$$

$$p_{ff}^{aa}(t, s) = p_{ff}^{\bar{aa}}(t, s) = e^{-\int_t^s \mu_f^{ai} + \mu_f^{ad} + v_{fs}^a}, \quad (154)$$

kar nam posledično poenostavi izračun $p_{ff}^{ai}(t, s)$, $W^{aa}(t, s)$ in $W^{ai}(t, s)$. Oglejmo si, kako se poenostavi izračun rezervacije, če predpostavimo neodvisnost modelov tveganja in vedenja. V tem primeru je rezervacija enaka

$$\begin{aligned} V^a(t) = & \int_t^n e^{-\int_t^s r} p_{pp}(t, s) \left(p^{aa}(t, s) [c^a(s) + v_{ps}(s) G^a(s)] \right. \\ & \left. + p^{ai}(t, s) [c^i(s) + v_{ps}(s) G^i(s)] \right) ds \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^s r} \left(W^{aa}(t, s) [c^{a+}(s) + v_{fs}(s) G^{a+}(s)] \right. \\ & \left. + W^{ai}(t, s) [c^{i+}(s) + v_{fs}(s) G^{i+}(s)] \right) ds, \end{aligned} \quad (155)$$

kjer

$$\begin{aligned} W^{aa}(t, s) = & \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) \\ & \cdot \left(p^{aa}(t, \tau) + p^{aa}(\tau, s) f^a(\tau) + p^{ai}(t, \tau) + p^{ia}(\tau, s) f^i(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} W^{ai}(t, s) = & \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) \\ & \cdot \left(p^{aa}(t, \tau) + p^{ai}(\tau, s) f^a(\tau) + p^{ai}(t, \tau) + p^{ii}(\tau, s) f^i(\tau) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (157)$$

Kljub temu, da se formule ob predpostavki neodvisnosti precej poenostavijo, imamo še vedno težave izraziti verjetnosti prehodov, če dopuščamo možnost prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje. Poleg tega je težavno določiti predvsem denarne tokove, ko je zavarovanec v stanju neplačevanja premije, zato sprejmemo, podobno kot v prejšnjem poglavju še predpostavko, da je $f^i = f^a$. Potem je

$$W^{aa}(t, s) = p^{aa}(t, s)W(t, s), \quad (158)$$

$$W^{ai}(t, s) = p^{ai}(t, s)W(t, s), \quad (159)$$

kjer je

$$W(t, s) = \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) f(\tau) d\tau. \quad (160)$$

Tako dobimo za rezervacijo izraz

$$\begin{aligned} V^a(t) = & \int_t^n e^{-\int_t^s} p_{pp}(t, s) \\ & \cdot \left(p^{aa}(t, s) [c^a(s) + v_{ps}(s)G^a(s) + p^{ai}(t, s) [c^i(s) + v_{ps}(s)G^i(s)]] \right) ds \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^s} W(t, s) \\ & \cdot \left(p^{aa}(t, s) [c^{a+}(s) + v_{fs}(s)G^{a+}(s) + p^{ai}(t, s) [c^{i+}(s) + v_{fs}(s)G^{i+}(s)]] \right) ds. \end{aligned} \quad (161)$$

Če v zgornji enačbi ne dopuščamo možnosti reaktivacije, tj. prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje, dobimo verjetnosti prehodov izražene v sklenjeni obliki in s tem dosežemo najbolj poenostavljeno obliko naše rezervacije za tovrstno življenjsko zavarovanje.

3.3.2 Življenjsko zavarovanje za primer smrti

Za model tveganja vzemimo življenjsko zavarovanje za primer smrti, torej bomo izpustili stanje nezmožnosti za delo. Iz tega razloga bomo tudi izpuščali nadpisano oznako a , saj imamo le dve stanji, aktivno stanje in stanje smrti. To je poseben primer, ki si zasluži posebno pozornost. Namreč v stanju smrti ni izplačil, kar pomeni, da vse splošne predpostavke, ki smo jih sprejeli v prejšnjem primeru, tukaj ne vplivajo na končni rezultat. Razlog je v tem, da vse vedenjske možnosti in plačila odpadejo v stanju smrti. Splošno rešitev lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} V(t) = & \int_t^n e^{-\int_t^s} {}^r p_{pp}^{aa}(t, s) (c^a(s) + v_{ps}(s)G^a(s)) ds \\ & + \int_t^n e^{-\int_t^s} {}^r W^{aa}(t, s) (c^{a+}(s) + v_{fs}(s)G^a(s)) ds, \end{aligned} \quad (162)$$

kjer je

$$W^{aa}(t, s) = \int_t^s p_{pp}^{aa}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}^{aa}(\tau, s) f^a(\tau) d\tau. \quad (163)$$

Če predpostavimo neodvisnost med modeloma to pomeni, da predpostavimo, da stanja v modelu vedenja ne vplivajo na jakost smrtnosti in hkrati, da stanje v modelu tveganja ne vpliva na jakosti prehodov v modelu vedenja. Druga predpostavka je povsem neškodljiva, saj smo predpostavili, da v stanju smrti nimamo izplačil. To pomeni, da se vrednost police v stanju smrti ne spremeni ob prehajanju med različnimi stanji v modelu vedenja. Tako se nam rezervacija ob predpostavki neodvisnosti poenostavi v naslednjo obliko

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_t^n e^{-\int_t^s r} p_{pp}(t, s) (c^a(s) + v_{ps}(s) G^a(s)) ds \\ &\quad + \int_t^n e^{-\int_t^s r} W^{aa}(t, s) (c^{a+}(s) + v_{fs}(s) G^{a+}(s)), \end{aligned} \quad (164)$$

kjer

$$\begin{aligned} W^{aa}(t, s) &= \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) p^{aa}(t, \tau) p^{aa}(\tau, s) f^a(\tau) d\tau \\ &= p^{aa}(t, s) \int_t^s p_{pp}(t, \tau) v_{pf}(\tau) p_{ff}(\tau, s) f^a(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (165)$$

Tako smo prišli do najbolj poenostavljene oblike rezervacije za ta model, kjer nam ni potrebno dodatno predpostaviti, da je $f^h = f$ dokler predpostavljamo, da nimamo izplačil v stanju smrti v modelu tveganja.

3.4 Izračun faktorja za zmanjšanje zavarovalne vsote v primeru prenehanja plačevanja premij

V zgornji primerih smo predpostavili, da se vsa prihodnja izplačila zavarovalnih vsot pomnožijo z enakim faktorjem $f^j(t)$, ko se zavarovanec premakne v modelu vedenja iz stanja plačevanja premij v stanje prenehanja plačevanja, medtem ko ostaja v stanju j v modelu tveganja v času t . Vse do sedaj pa nismo še definirali samega faktorja in tudi nismo določili, kako se faktorji v različnih omenjenih situacijah spreminjajo. Če se faktor f^j nanaša na vsa prihodnja izplačila zavarovalnih vsot, bi ga lahko definirali kot

$$f^j(t) = \frac{V^{j*}(t)}{V^{j+*}(t)}, \quad (166)$$

kjer zvezdica označuje vrednotenje izplačil police, ki ustrezajo tehnični osnovi (r^*, μ^*) in se lahko razlikujejo od našega osnovnega vrednotenja (r, μ) . Znak " + " pomeni, da upoštevamo le pozitivni del denarnih tokov, ki smo jih definirali v (130). Da bi videli, zakaj je takšna ideja naravna, podrobneje obravnavajmo odkupno

vrednost police v primeru prenehanja plačevanja premij (angl.: free policy sum at risk) oz. zapisano v matematični obliki $V_f^j(t)_{tj} - V^j(t)$. Ker je $V_f^j(t)_{tj} = f^j(t)V^{j+}(t)$ imamo

$$V_f^j(t)_{tj} - V^j(t) = f^j(t)V^{j+}(t) - V^j(t). \quad (167)$$

V posebnem primeru, ko vzamemo tehnično vrednotenje police in je $f^j(t) = \frac{V^{j*}(t)}{V^{j+*}(t)}$ dobimo

$$V_f^{j*}(t)_{tj} - V^{j*}(t) = f^j(t)V^{j+*}(t) - V^{j*}(t) = 0. \quad (168)$$

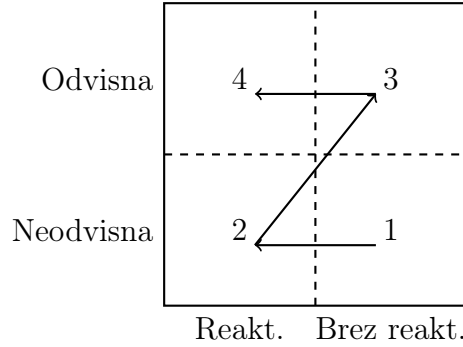
Torej opazimo, da zavarovanec prejme izplačilo zavarovalne vsote, ki je enaka vrednosti tehnične rezervacije v določenem trenutku. Zavarovalnica lahko določi faktor tako, da je razlika med izplačano zavarovalno vsoto ob prenehanju plačevanja premije in trenutno rezervacijo enaka 0 in s tem ne prevzema nobenega tveganja. Z upoštevanjem te omejitve, lahko obravnavamo situacije, kjer določimo različne faktorje za izplačila zavarovalnih vsot.

3.5 Numerični primeri s primerjavo in interpretacijo rezultatov

V tem poglavju se bomo posvetili numeričnim izračunom rezervacij za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, ki smo ga obravnavali v razdelku 3.3.1. Sisteme diferencialnih enačb smo numerično izračunali v programu MATLAB¹, pri čemer smo za zapis pravilne kode sledili napotkom iz knjige MathWorks, Inc. (1984-2005), 5. poglavje, str. 2-33. V MATLAB-u je na voljo več metod za reševanje začetnih problem. Vse so podrobneje predstavljene v knjigi Matlab for Engineers (Moore 2012, str. 512-520). Naši izračuni temeljijo na vgrajeni funkciji *ode45*. Funkcija *ode45* temelji na eksplicitnem Runge-Kutta pravilu reda 4 in 5. Omenimo, da se različice našega modela pojavljajo v dveh dimenzijah in sicer glede na to, ali v modelu tveganja vključimo predpostavko glede reaktivacije ali ne, ter glede na to, ali prevzamemo, da sta modela tveganja in vedenja med seboj neodvisna ali odvisna. Tako bomo obravnavali rezultate izračunov matematičnih rezervacij, kjer bomo postopoma prevzemali in vključevali omenjene predpostavke. Spodnji graf prikazuje vse možnosti, ki jih bomo obravnavali. Numerični rezultati nam bodo tako pokazali, kakšen vpliv ima vključitev določene predpostavke na višino rezervacije, pri čemer bomo začeli z najenostavnejšima predpostavka, tj. neodvisnost med modeloma in brez možnosti reaktivacije v modelu tveganja. Potem pa bomo postopoma vključili reaktivacijo in odvisnost ter zaključili s pravilnim modelom, ki prevzema odvisnost modelov tveganja in vedenja in dopušča možnost reaktivacije, torej prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje.

¹celotna koda je na voljo pri avtorju

Slika 13: Variacije sprejetih predpostavk med modelom tveganja in modelom vedenja



Prirjeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Cilj je prikazati, koliko se rezervacije ob določenih predpostavkah razlikujejo od rezervacije v pravilnem modelu. Na tem mestu omenimo, da so bili vsi numerični izračuni za določitev prehodnih verjetnosti in rezervacij narejeni v programu MATLAB.

3.5.1 Določitev jakosti prehodov in predpostavke pogodbe

V spodnji tabeli so prikazane prevzete jakosti prehodov za model tveganja, kjer smo vzeli standardne jakosti po danski tablici umrljivosti Danish G82 za ženski spol, saj se ne razlikujejo bistveno od slovenskih. Kot lahko opazimo, smo za izračun tehnične rezervacije (v tabeli tehnična osnova) predpostavili enake jakosti prehodov, kot za izračun ostalih tržnih rezervacij (v tabeli tržna osnova).

Tabela 6: Jakosti prehodov za model tveganja

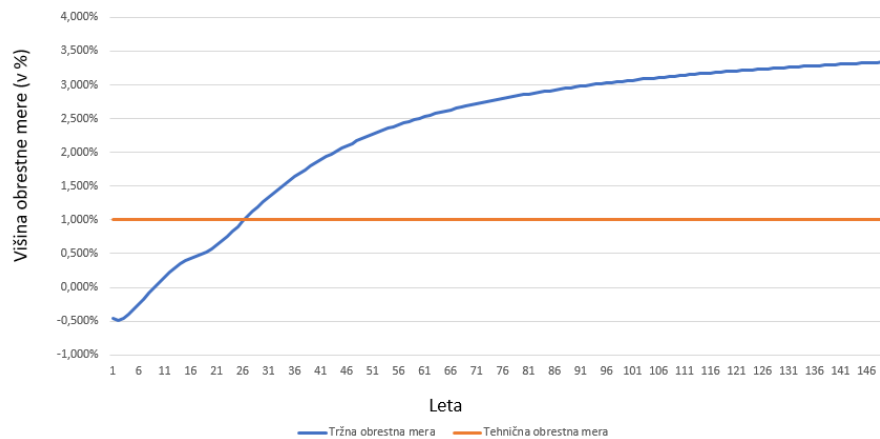
iz stanja	v stanje	tehnična osnova	tržna osnova
aktiven	smrt	$\mu^{*ad}(age) = 0.0005 + 10^{5.728-10+0.038(age)}$	$\mu^{ad} = \mu^{*ad}$
aktiven	nezmožen za delo	$\mu^{*ai}(age) = 0.0006 + 10^{4.71609-10+0.06(age)}$	$\mu^{ai} = \mu^{*ai}$
nezmožen za delo	smrt	$\mu^{*id}(age) = \mu^{*ad}(age)$	$\mu^{id} = \mu^{*id}$
nezmožen za delo	aktiven	$\mu^{*ia}(age) = 0$	$\mu^{ia}(age) = e^{-0.06(age)}$ ali 0

Prirjeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Za tehnično obrestno mero smo predpostavili, da je $r = 1\%$, za izračun ostalih tržnih rezervacij pa smo vzeli krivuljo donosnosti za Slovenijo pridobljeno s spletne strani EIOPA prikazano na grafu.

Opazimo, da je tehnična obrestna mera relativno nizka glede na dolgoročno krivuljo donosnosti, kar pomeni, da lahko pričakujemo, da bo tehnična rezervacija višja od tržnih rezervacij. Oglejmo si še jakosti prehodov za model vedenja. Določitev jakosti

Slika 14: Krivulja donosnosti



EIOPA (2019).

prehodov za model vedenja temelji na dejstvu, da se nagnjenje k prekinitvi police oz. prenehanju plačevanja premij s starostjo zavarovalca zmanjšuje.

Tabela 7: Jakosti prehodov za model vedenja

iz stanja	v stanje	tehnična osnova	tržna osnova
plačevanje premij	prenehanje plačevanja	$v_{pf}(age) = e^{-0.07(age)}$	$\tilde{v}_{pf} = 1_{\{\text{plačevanje premij}\}} \cdot v_{pf}$
plačevanje premij	prekinitev pogodbe	$v_{ps}(age) = v_{pf}(age)$	$\tilde{v}_{ps} = 1_{\{\text{plačevanje premij}\}} \cdot v_{ps}$
prenehanje plačevanja	prekinitev pogodbe	$v_{fs}(age) = v_{pf}(age)$	$\tilde{v}_{fs} = 1_{\{\text{plačevanje premij}\}} \cdot v_{fs}$

Prerejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Za konkretne numerične izračune rezervacij smo definirali konkretno zavarovalno pogodbo za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti. Vzeli smo zavarovanca, ki je danes star 30 let in sklene zavarovalno pogodbo z naslednjimi pogoji:

- pogodba se začne pri starosti 30 let ($t = 0$)
- pogodba se izteče pri starosti 65 let
- letna tehnična obrestna mera $r^* = 1\%$ (zvezno obrestovanje)
- plačevanje premij z intenziteto 20.000 € letno
- izplačevanje anuitet v stanju nezmožnosti za delo 100.000 € letno
- zavarovalna vsota v primeru smrti za obdobje 35 let je 400.000 €.

Oglejmo si rezultate numeričnih izračunov rezervacij, pri čemer smo predpostavili, da je zavarovanec ob sklenitvi pogodbe v aktivnem stanju v modelu tveganja in

plačuje premije. Ta začetni položaj zavarovanca predstavlja največ izzivov za izračun rezervacij, saj dopušča, kar največ možnih različnih kombinacij prehodov med ostalimi stanji tekom trajanja pogodbe v obeh modelih. Za določitev rezervacij, smo tako numerično reševali naslednjo diferencialno enačbo (tretjo vrstico v enačbi izpustimo v primeru ne dopuščanja reaktivacije)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^a(t) &= rV^a(t) - b^a(t) \\ &\quad - \mu^{ai}(t)(b^{ai}(t) + V^i(t) - V^a(t)) - \mu_{ad}(t)(b^{ad}(t) - V^a(t)) \\ &\quad - \mu^{ia}(t)(b^{ia}(t) + V^a(t) - V^i(t)) \\ &\quad - v_{pf}^a(V_f^a(t)_{ta} - V^a(t)) - v_{ps}^a(t)(G^a(t) - V^a(t)), \end{aligned} \quad (169)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_f^a(t)_{ta} &= rV_f^a(t)_{ta} - f^a(t)b^{a+}(t) \\ &\quad - \mu_f^{ai}(t)(f^a(t)b^{ai+}(t) + V_f^i(t)_{ta} - V_f^a(t)_{ta}) - \mu_f^{ad}(t)(f^a(t)b^{ad+}(t) - V_f^a(t)_{ta}) \\ &\quad - v_{fs}^a(f^a(t)G^{a+}(t) - V_f^a(t)_{ta}). \end{aligned} \quad (170)$$

$V_f^a(t)_{ta}$ torej označuje rezervacijo, v primeru, ko je zavarovanec v aktivnem stanju v modelu tveganja v času t in preneha s plačevanjem premij. Iz enačbe (169) vidimo, da je v primeru prekinitev police, zavarovanec upravičen do izplačila odkupne vrednosti $G^j(t)$ (oz v našem primeru $G^a(t)$), kjer j označuje stanje v modelu tveganja v času t . V izračunih bomo $G^j(t)$ enačili z vrednostjo tehnične rezervacije, tj. $G^j(t) = V^j(t)$. V primeru prenehanja plačevanja premij (170) pa se zavarovancu proporcionalno zmanjša zavarovalno vsoto tako, da $G^j(t)$ pomnožimo z ustreznim faktorjem police $f^j(t) = \frac{V^{j*}(t)}{V^{j+*}(t)}$ (* tukaj označuje, da računamo tehnično rezervacijo s fiksno obrestno mero $r = 1\%$). Opazimo, da zavarovanec tudi v tem primeru prejme izplačilo zavarovalne vsote, ki je enaka vrednosti tehnične rezervacije v določenem trenutku, saj velja:

$$V_f^{j*}(t)_{tj} - V^{j*}(t) = f^j(t)V^{j+*}(t) - V^{j*}(t) = 0. \quad (171)$$

V naših primerih je ta faktor enak $f^a(t) = \frac{V^{a*}(t)}{V^{a+*}(t)}$, tj. razmerje med tehnično rezervacijo in tehnično rezervacijo, ki vključuje le denarne tokove iz naslova izplačila zavarovalne vsote brez denarnih tokov vplačevanja premij. V primeru, ko predpostavimo neodvisnost med modeloma in s tem dopuščamo prehajanja med stanji v modelu vedenja tudi, ko je zavarovalec v stanju nezmožnosti za delo, pa je faktor police enak $f^i(t) = \frac{V^{i*}(t)}{V^{i+*}(t)} = 1$, saj predpostavimo, da zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo, premij ne plačuje. Za izračun tehnične rezervacije smo rešili

poenostavljeno obliko zgornje diferencialne enačbe (169) in sicer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V^a(t) &= rV^a(t) - b^a(t) \\ &\quad - \mu^{ai}(t)(b^{ai}(t) + V^i(t) - V^a(t)) - \mu_{ad}(t)(b^{ad}(t) - V^a(t)), \end{aligned} \quad (172)$$

kjer je

$$\begin{aligned} b^a(t) &= \int_{30}^{65} 20.000 p^{aa}(t) e^{-0.01t} dt \cdot p_{pp}^{aa}(65) - \int_t^{65} 20.000 p_{pp}^{aa}(t) e^{-0.01t} dt \\ b^{ai}(t) &= \int_t^{65} 100.000 p_{pp}^{ai}(t) e^{-0.01t} dt \\ b^{ad}(t) &= \int_t^{65} 400.000 p_{pp}^{ad}(t) e^{-0.01t} dt. \end{aligned} \quad (173)$$

Kot lahko opazimo iz zgornjih enačb, pa je bilo potrebno za izračun rezervacij najprej določiti prehodne verjetnosti med stanji. Prehodne verjetnosti smo določili s pomočjo numeričnega reševanja sistema diferencialnih enačb Kolmogorova, ki je v splošnem definirana kot

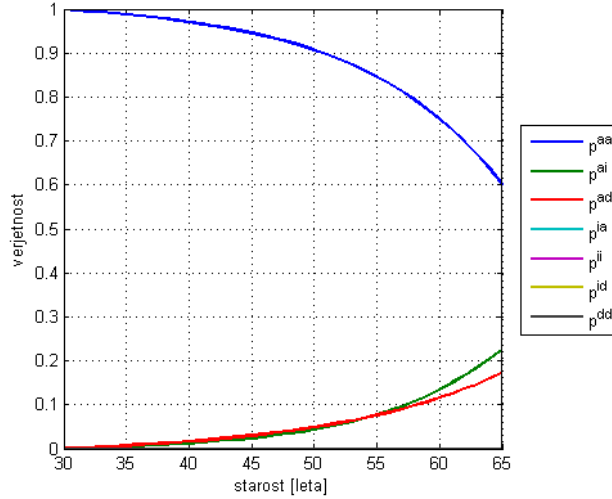
$$d_t p_{ij}(s, t) = \sum_{g: g \neq j} p_{ig}(s, t) \mu_{gj}(t) dt - p_{ij}(s, t) \mu_j(t) dt. \quad (174)$$

Sistem diferencialnih enačb in posledično prehodne verjetnosti so se med seboj razlikovale, glede na predhodno sprejeto predpostavko. Omenimo, da smo v primeru predpostavke o neodvisnosti med modeloma dopuščali prehod med različnimi stanji v modelu vedenja, ne glede na to, v katerem stanju je zavarovanec v modelu tveganja. Medtem ko smo v primeru predpostavke odvisnosti med modeloma dopuščali prehod med različnimi stanji v modelu vedenja le v primeru, ko je zavarovanec v aktivnem stanju v modelu tveganja. Za definiranje sistemov diferencialnih enačb smo izhajali iz primera, ki ga je Koller (2010) definiral za življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti (za podrobnosti glej Koller, 2010, str. 22-23). Torej, ko smo predpostavili neodvisnost med modelom tveganja brez dopuščanja reaktivacije in modelom vedenja, smo za določitev prehodnih verjetnosti rešili dva sistema diferencialnih enačb in sicer za model tveganja slednjega

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p^{aa}(t) &= -p^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t)] \\ \frac{d}{dt}p^{ai}(t) &= p^{aa}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\ \frac{d}{dt}p^{ad}(t) &= p^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) - p^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\ \frac{d}{dt}p^{ii}(t) &= -p^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\ \frac{d}{dt}p^{id}(t) &= p^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t), \end{aligned} \quad (175)$$

kjer smo za začetni pogoj vzeli $[1, 0, 0, 0, 0]$, kar pomeni, da je zavarovanec ob začetku pogodbe v aktivnem stanju. Tako smo pridobili verjetnosti prehodov prikazana na spodnjem grafu.

Slika 15: Verjetnosti prehodov v modelu tveganja brez reaktivacije



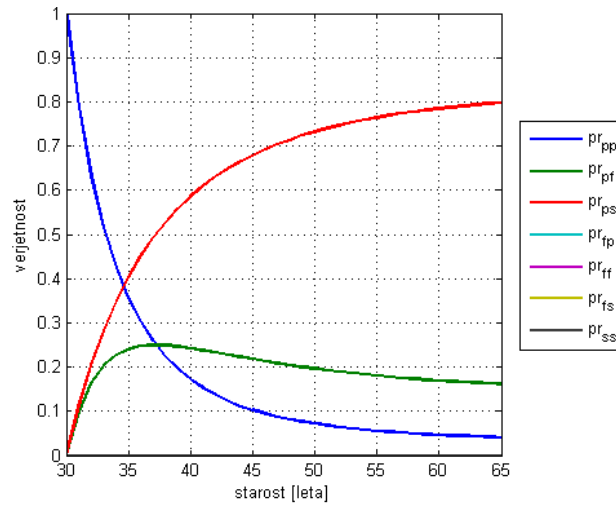
Vir: Lastno delo.

Nato pa še za model vedenja rešili slednji sistem

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}p_{pp}(t) &= -p_{pp}(t) \cdot [v_{pf}(t) + v_{ps}(t)] \\
 \frac{d}{dt}p_{pf}(t) &= p_{pp}(t) \cdot v_{pf}(t) - p_{pf}(t) \cdot v_{fs} \\
 \frac{d}{dt}p_{ps}(t) &= p_{pp}(t) \cdot v_{ps}(t) + p_{pf}(t) \cdot v_{fs}(t) \\
 \frac{d}{dt}p_{ff}(t) &= -p_{ff}(t) \cdot v_{fs}(t) \\
 \frac{d}{dt}p_{fs}(t) &= p_{ff}(t) \cdot v_{fs}(t),
 \end{aligned} \tag{176}$$

kjer smo za začetni pogoj vzeli $[1, 0, 0, 0, 0]$, torej, zavarovanec ob pričetku pogodbe plačuje premije. Prehodne verjetnosti so prikazane na grafu.

Slika 16: Verjetnosti prehodov v modelu vedenja



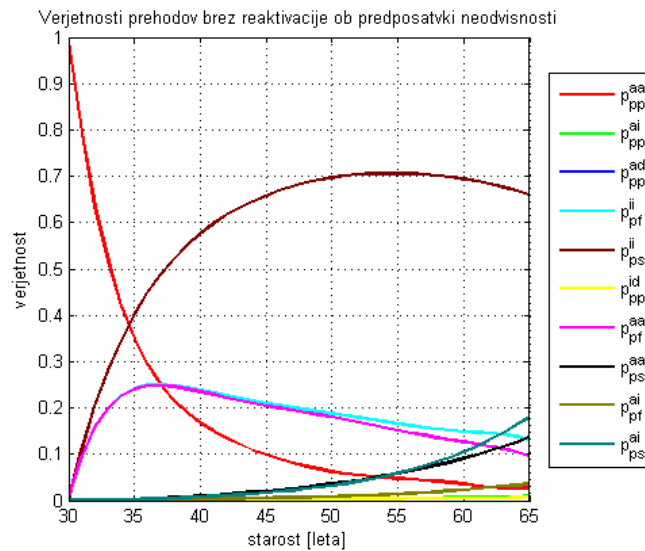
Vir: Lastno delo.

Zaradi predpostavke neodvisnosti med modeloma smo tako prehodne verjetnosti določili kot produkt verjetnosti prehodov za posamezni model, in sicer

$$p_{lm}^{jk}(t, s) = p^{jk}(t, s)p_{lm}(t, s). \quad (177)$$

Na spodnjem grafu so prikazane vrednosti posameznih prehodnih verjetnosti, kjer

Slika 17: Verjetnosti prehodov brez reaktivacije ob predpostavki neodvisnosti



Vir: Lastno delo.

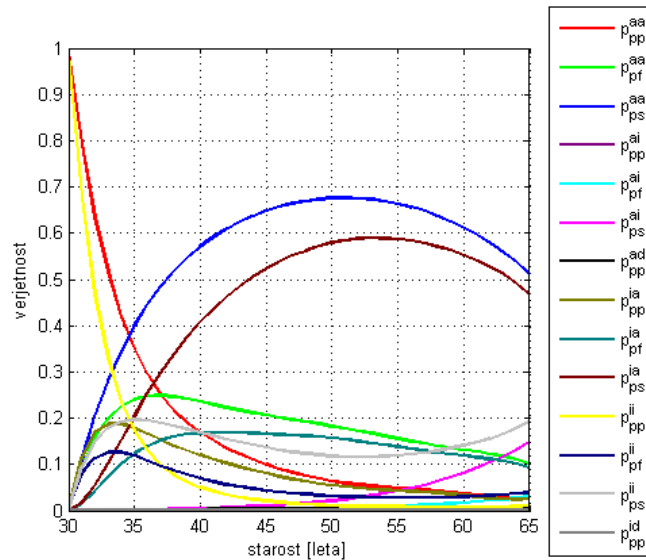
nadpisane oznake ozančujejo prehode med stanji v modelu tveganja in podpisane

oznake prehode med stanji v modelu vedenja. Oznaka a tako označuje stanje, ko je zavarovanec v aktivnem stanju (angl. active), i stanje nezmožnosti za delo (angl.: invalid) in d stanje smrti (angl. death). Podpisana oznaka p označuje stanje plačevanja premij (angl. premium payment), f stanje prenehanja plačevanja premij (angl. free policy) in s stanje prekinitve police (angl. surrender). Tako naprimer p_{pf}^{aa} označuje verjetnost, da zavarovanec ostaja v aktivnem stanju, vendar pa preneha s plačevanjem premij. V primeru, ko dopuščamo reaktivacijo v modelu tveganja, smo morali za določitev verjetnosti prehodov v modelu tveganja vključiti tudi verjetnosti prehoda iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje, tj. p_{pp}^{ia} in tako numerično rešili naslednji sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p^{aa}(t) &= p^{ai}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t)] \\
\frac{d}{dt}p^{ai}(t) &= p^{aa}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p^{ai}(t) \cdot [\mu^{ia}(t) + \mu^{id}(t)] \\
\frac{d}{dt}p^{ad}(t) &= p^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) - p^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p^{ia}(t) &= p^{ii}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p^{ia}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t)] \\
\frac{d}{dt}p^{ii}(t) &= p^{ia}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p^{id}(t) &= p^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t).
\end{aligned} \tag{178}$$

Rezultati prehodnih verjetnosti so prikazani spodaj.

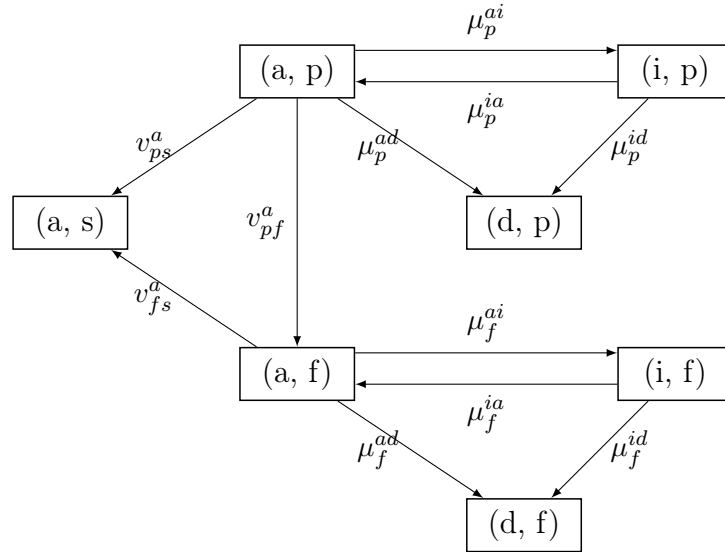
Slika 18: Verjetnosti prehodov z reaktivacijo ob predpostavki neodvisnosti



Vir: Lastno delo.

Opazimo naprimer, da je verjetnost p_{pp}^{ia} sprva narašča, kasneje pada, kar se zdi smiselno, saj je verjetnost, da mlajši zavarovanec preide nazaj v aktivno stanje večja, kot to velja za starejšega zavarovanca. Pri določanju prehodnih verjetnosti ob predpostavki, da sta modela med seboj odvisna, smo obravnavali model prikazan na spodnji sliki, tj. prehajanje med stanji v modelu vedenja, le v primeru, ko je zavarovanec v modelu tveganja v aktivnem stanju.

Slika 19: Kombiniran model



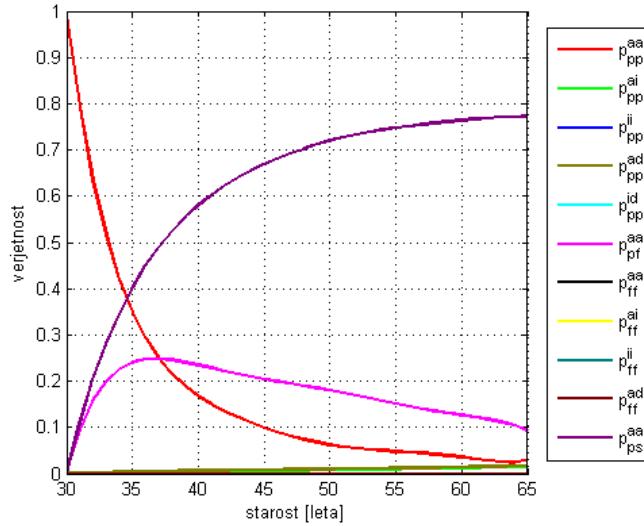
Prirejeno po Brandt Henriksen, Woetmann Nielsen, Steffensen & Svensson (2014).

Ko predpostavimo odvisnost med modeloma in ne dopuščamo reaktivacije smo za pridobitev prehodnih verjetnosti numerično rešili naslednji sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{pp}^{aa}(t) &= -p_{pp}^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{ps}(t) + v_{pf}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ai}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p_{pp}^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ii}(t) &= -p_{pp}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ad}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) + p_{pp}^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{id}(t) &= p_{pp}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{aa}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot v_{pf}(t) - p_{pf}^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{fs}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{ai}(t) &= -p_{pf}^{ai}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{fs}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{ai}(t) &= p_{pf}^{aa}(t) \mu^{ai}(t) - p_{pf}^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{ii}(t) &= -p_{pf}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{ad}(t) &= p_{pf}^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{ps}^{aa}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot v_{ps}(t) + p_{pf}^{aa}(t) \cdot v_{fs}(t).
\end{aligned} \tag{179}$$

Rezultati posameznih verjetnosti so prikazani na spodnjem grafu.

Slika 20: Verjetnosti prehodov v odvisnem modelu brez reaktivacije



Vir: Lastno delo.

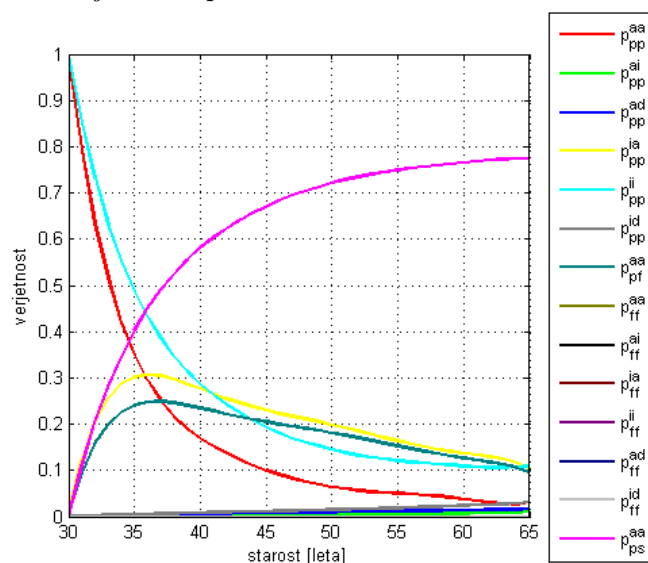
V primeru, ko dopuščamo tudi reaktivacijo v modelu tveganja, pa smo za pridobitev

verjetnosti definirali sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{pp}^{aa}(t) &= p_{pp}^{ai} \cdot \mu^{ia}(t) - p_{pp}^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{ps}(t) + v_{pf}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ai}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p_{pp}^{ai}(t) \cdot [\mu^{id}(t) + \mu^{ia}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ad}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) + p_{pp}^{ai}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ia}(t) &= p_{pp}^{ii}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p_{pp}^{ia}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{ps}(t) + v_{pf}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{ii}(t) &= p_{pp}^{ia}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p_{pp}^{ii}(t) \cdot [\mu^{id}(t) + \mu^{ia}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{pp}^{id}(t) &= p_{pp}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{pf}^{aa}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot v_{pf}(t) + p_{ff}^{ai}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p_{pf}^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{fs}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{aa}(t) &= p_{ff}^{ai}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p_{ff}^{aa}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{fs}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{ai}(t) &= p_{ff}^{aa}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p_{ff}^{ai}(t) \cdot [\mu^{ia}(t) + \mu^{id}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{ia}(t) &= p_{ff}^{ii}(t) \cdot \mu^{ia}(t) - p_{ff}^{ia}(t) \cdot [\mu^{ai}(t) + \mu^{ad}(t) + v_{fs}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{ii}(t) &= p_{ff}^{ia}(t) \cdot \mu^{ai}(t) - p_{ff}^{ii}(t) \cdot [\mu^{ia}(t) + \mu^{id}(t)] \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{ad}(t) &= p_{ff}^{aa}(t) \cdot \mu^{ad}(t) + p_{ff}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{ff}^{id}(t) &= p_{ff}^{ii}(t) \cdot \mu^{id}(t) \\
\frac{d}{dt}p_{ps}^{aa}(t) &= p_{pp}^{aa}(t) \cdot v_{ps}(t) + p_{pf}^{aa}(t) \cdot v_{fs}(t).
\end{aligned}
\tag{180}$$

Tako smo dobili prehodne verjetnosti za naš na začetku pravilno predpostavljen model, ki torej upošteva reaktivacijo in pravilno predpostavlja odvisnost med modeloma. S pomočjo zgoraj prikazanih in izračunanih verjetnosti, smo nato s pomočjo diferencialnih enačb (169) in (170) izračunali tehnično rezervacijo ter ostale tržne rezervacije, ob različnih predpostavkah.

Slika 21: Verjetnosti prehodov v odvisnem modelu z reaktivacijo



Vir: Lastno delo.

Rezultati posameznih rezervacij so podani v tabeli in prikazani na spodnjem grafu.

Tabela 8: Vrednosti rezervacij ob različnih predpostavkah

Leta	30	35	40	45	50	55	60	65
Model tveganja z reakt.	63.058,04	219.233,09	306.306,97	343.641,96	358.031,32	368.202,14	392.469,87	463.068,31
Model tveganja brez reakt.	63.513,55	221.536,19	311.146,73	351.475,11	369.516,55	384.506,48	415.982,21	499.328,67
Tehnična	63.996,93	230.764,98	336.252,37	390.766,10	422.178,20	448.694,53	489.434,55	583.322,98
Neod. brez reakt.	63.996,61	230.754,64	336.194,03	390.571,99	421.641,75	447.319,27	485.978,44	574.434,67
Odv. brez reakt.	63.491,45	228.094,50	330.655,99	381.959,29	409.738,35	431.957,51	466.724,10	550.356,66
Neod. z reakt.	63.614,23	228.715,41	331.770,28	383.371,39	411.236,40	433.226,91	467.491,00	550.193,50
Odv. z reakt.	63.155,96	226.340,81	326.789,15	375.360,73	399.530,00	416.827,75	444.357,34	515.683,53

Vir: Lastno delo.

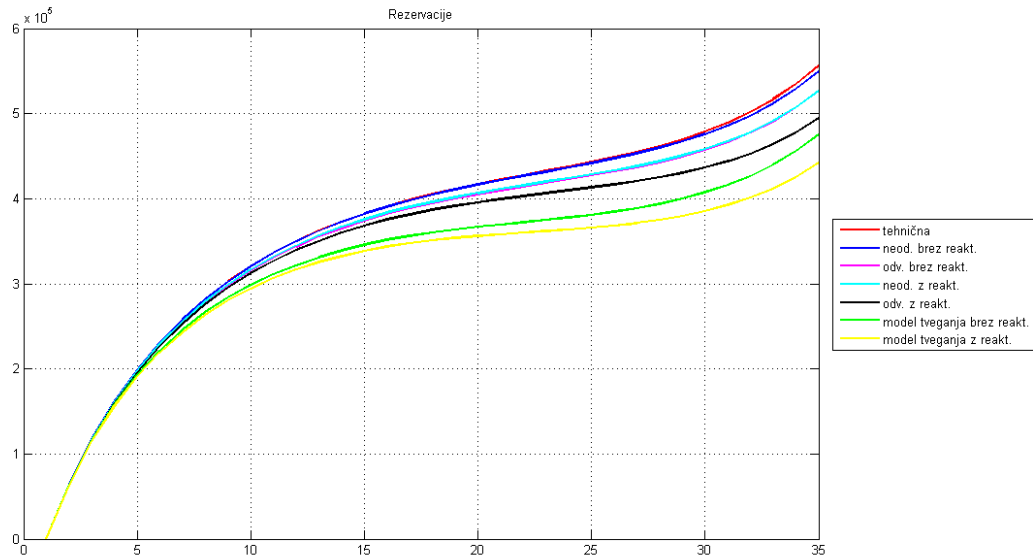
Iz rezultatov vseh sedmih izračunanih rezervacij lahko pridemo do naslednjih zaključkov:

- v primeru, da vključimo model vedenja in tako upoštevamo pravilno predpostavko opazimo, da ima zavarovalnica korist, saj oblikuje rezervacijo, ki je nižja od tehnične rezervacije.
- nadalje opazimo, da s predpostavko neodvisnosti med modeloma in neupoštevanja reaktivacije (neod. brez reakt.), lahko zavarovalnica oblikuje rezervacijo, nekoliko nižjo od tehnične. Predpostavka o neodvisnosti med modeloma, nam sicer poenostavi izračun rezervacije, vendar pa ni realistična, saj sta modela med seboj odvisna. Kljub temu, da slednja rezervacija

prevzema nerealistično predpostavko o neodvisnosti, pa si zavarovalnica na ta način oblikuje zelo varen nivo rezervacij.

- ko vzamemo pravilno predpostavko in tako prevzamemo odvisnost med modeloma opazimo, da je rezervacija, ki jo mora zavarovalnica oblikovati bistveno nižja od tehnične in znaša 550.356,66€. Torej vidimo, da je za zavarovalnico izredno pomembno, da upošteva prave predpostavke in na ta način lahko oblikuje bistveno nižjo rezervacijo. Razlog za precejšno znižanje rezervacije, ko predpostavimo odvisnost namesto neodvisnost, se skriva v tem, da v primeru neodvisnosti, dopuščamo, da zavarovalec prehaja med vsemi stanji v modelu vedenja, ne glede na to, v katerem stanju je v modelu tveganja. To pomeni, da lahko naprimer zavarovanec prekine police tudi takrat, ko je v modelu tveganja v stanju nezmožnosti za delo. Slednje sicer v primeru odvisnosti med modeloma ni možno, saj predpostavimo, da lahko zavarovalec prehaja med stanji v modelu vedenja le takrat, ko je v modelu tveganja v aktivnem stanju.
- nazadnje, z vključitvijo možnosti reaktivacije (tj. možnosti prehoda zavarovanca iz stanja nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje v modelu tveganja) dosežemo še nekoliko dodatno znižanje rezervacije, saj v primeru reaktivacije dopuščamo možnost, da se zavarovanec ponovno vrne v aktivno stanje, kar pomeni pričetek ponovnega plačevanja premij po začasni prekinitvi plačevanja zaradi nezmožnosti za delo, to pa za zavarovalnico pomeni več pobranih premij in s tem oblikovanja nižjih rezervacij.
- zgornji izračuni nam omogočajo tudi študijo izoliranega učinka reaktivacije na rezervacijo, kar dobimo s primerjavo rezervacij odv. brez reakt. in odv. z reakt., torej, kjer upoštevamo predpostavko o odvisnosti med modeloma, pri čemer enkrat dopuščamo možnost reaktivacije drugič ne. V primeru reaktivacije je rezervacija za 6% nižja od rezervacije, ki ne dopušča reaktivacije.
- na koncu smo z namenom, da analiziramo učinek vedenja zavarovalca na rezervacijo izračunali še rezervacije brez upoštevanja modela vedenja (na grafu označeni kot model tveganja brez reakt. in model tveganja z reakt.). Iz grafa je razvidno, da imata rezervaciji, kjer je model vedenja izključen, najnižjo vrednost, kar nam pove, da ima model vedenja precejšen vpliv na končno vrednost rezervacije. Opazimo, da je rezervacija, kjer dopuščamo reaktivacijo nižja za 36.260,36€, kar kaže, da ima reaktivacija precejšnji vpliv na znižanje rezervacije.

Slika 22: Prikaz rezervacij



Vir: Lastno delo.

SKLEP

V magistrski nalogi smo se osredotočili na izračun matematičnih rezervacij glede na pričakovano vedenje zavarovanca. Glavni cilj je bil modelirati zavarovalno polico ob upoštevanju tveganja prenehanja plačevanja premij ali prekinitve police s strani zavarovanca in izpeljati tehnike vrednotenja matematičnih rezervacij.

S tem namenom smo v nalogi najprej predstavili markovske verige za modeliranje življenjskih zavarovanj in z njihovo pomočjo določili verjetnosti prehodov zavarovanca iz enega stanja v drugo. Premije smo določili z upoštevanjem principa ekvivalence in tako vsoto sedanjih vrednosti bodočih pričakovanih izplačanih škod delili z vsoto sedanjih vrednosti bodočih vplačanih premij. Vpeljali smo tudi Norbergovo metodo za izračun matematičnih rezervacij in višjih momentov sedanje vrednosti za splošno znana življenjska zavarovanja.

Nazadnje v modeliranje življenjskih zavarovanj vključimo še zavarovalčevo vedenje. V ta namen smo definirali kombinirani model, ki je bil sestavljen iz modela tveganja in modela vedenja. Za model tveganja smo predpostavili življenjsko zavarovanje za primer smrti in invalidnosti sestavljenega iz treh stanj: stanja aktivnosti, stanja nezmožnosti za delo in stanja smrti ter model vedenja, ki je prav tako bil definiran s tremi stanji: stanje plačevanje premije, prenehanje plačevanja premij

in prekinitev police. Različice našega kombiniranega modela so se tako pojavljale v dveh dimenzijah in sicer glede na to, ali smo prevzeli, da sta model tveganja in model vedenja med seboj neodvisna ali odvisna, ter glede na to, ali smo v modelu tveganja dopuščali možnost reaktivacije, tj. prehoda iz stanje nezmožnosti za delo nazaj v aktivno stanje.

V splošnem je znano, da sta modela bolj ali manj med seboj odvisna, saj je zavarovanec v stanju nezmožnosti za delo bolj nagnjen k prenehanju plačevanja premij ali pa prekinitvi police, kot pa zavarovanec, ki je v modelu tveganja v aktivnem stanju. Zanimalo nas je, do kakšnih razlik v vrednostih matematičnih rezervacij prihaja, ko enkrat predpostavimo neodvisnost in spet drugič odvisnost med modeloma, kjer je odvisnost v našem primeru pomenila, da zavarovancu dopuščamo prehajanje med stanji v modelu vedenja le v času, ko je v modelu tveganja v aktivnem stanju. Poleg tega pa smo skušali analizirati tudi izoliran učinek vedenja zavarovanca na višino rezervacije in vpliv reaktivacije na končno vrednost rezervacije.

V ta namen smo matematične rezervacije definirali v obliki diferencialnih enačb in jih numerično rešili v programu MATLAB na primeru življenjskega zavarovanja za primer smrti in invalidnosti z upoštevanjem modela vedenja. Za konkretne izračune smo predpostavili, da imamo zavarovanca starega 30 let, ki sklene zavarovalno pogodbo za naslednjih 35 let, torej se pogodba zaključi pri starosti 65 let. Poleg tega smo predpostavili zvezno obrestovanje z letno tehnično obrestno mero 1%, pri čemer zavarovanec vplačuje premije z intenziteto 20.000 € in je upravičen do anuitet v stanju nezmožnosti za delo v višini 100.000 € letno in zavarovalne vsote v primeru smrti za obdobje 35 let v višini 400.000 € oz. zavarovalne vsote v primeru doživetja, ki je enaka vrednosti tehnične rezervacije izračunane ob pričetku veljavnosti police. Za točno in pravilno oblikovano rezervacijo smo vzeli primer, kjer upoštevamo odvisnost med modelom tveganja in modelom vedenja, hkrati pa dopuščali še možnost reaktivacije v modelu tveganja. To rezervacijo smo primerjali z rezervacijami, kjer smo postopoma sproščali predpostavke in dopuščali neodvisnost med modeloma ter ukinjali možnosti reaktivacije. Tako smo prišli do naslednjega zaključka: Predpostavka o neodvisnosti med modeloma, nam zelo poenostavi izračun rezervacije, vendar pa ni realistična. Zavarovalnica si na ta način oblikuje varen nivo rezervacije, ki je še vedno nižja od tehnične. Ko vzamemo pravilno predpostavko in tako privzamemo odvisnost med modeloma opazimo, da je rezervacija, ki jo mora zavarovalnica oblikovati bistveno nižja od tehnične. Razlog za precejšno znižanje rezervacije, ko predpostavimo odvisnost, se

skriva v tem, da lahko zavarovalec prehaja med stanji v modelu vedenja le takrat, ko je v modelu tveganja v aktivnem stanju. Nazadnje, z vključitvijo možnosti reaktivacije dosežemo še nekoliko dodatno znižanje rezervacije, saj v primeru reaktivacije dopuščamo možnost, da se zavarovanec ponovno vrne v aktivno stanje, kar pomeni pričetek ponovnega plačevanja premij po začasni prekinitvi plačevanja zaradi nezmožnosti za delo, to pa za zavarovalnico pomeni več pobranih premij in s tem oblikovanje nižjih rezervacij. Numerični izračuni nam omogočajo tudi študijo izoliranega učinka reaktivacije na rezervacijo, kar dobimo s primerjavo rezervacij, kjer upoštevamo predpostavko o odvisnosti med modeloma, pri čemer enkrat dopuščamo možnost reaktivacije drugač ne. V primeru reaktivacije je rezervacija za kar 6% nižja od rezervacije, ki ne dopušča reaktivacije. Na koncu smo z namenom, da analiziramo učinek vedenja zavarovalca na rezervacijo izračunali še rezervacije brez upoštevanja modela vedenja. Rezervaciji, kjer je model vedenja izključen, imata najnižjo vrednost in sta nižji za več kot 80.000 € kar nam pove, da ima model vedenja precejšen vpliv na končno vrednost rezervacije.

S pomočjo numeričnih izračunov za konkretno zavarovanje smo tako opazili, da vedenje zavarovanca precej vpliva na nivo rezervacij in ni zanemarljivo. Poleg tega pa na izračun rezervacij vpliva tudi izbira višine tehnične obrestne mere, v našem primeru smo zaradi trenutnih gospodarskih razmer predpostavili 1%, kar pomeni da je bila nižja glede na dolgoročno krivuljo donosnosti in posledično so bile izračunane tržne rezervacije nižje od tehničnih. Za zaključek omenimo, da rezervacije kot take predstavljajo obveznosti za zavarovalnice in tako znižujejo nivo kapitala, zato zavarovalnice stremijo k zniževanju le-teh, vendar pa se morajo pri tem zavedati, da prenizek nivo rezervacij povečuje izpostavljenost zavarovalnice. Zaradi tega je za zavarovalnico zelo pomembno, da vključi v svoje izračune vsa tveganja tudi pričakovano vedenje zavarovanca in oblikuje primeren nivo rezervacij.

LITERATURA IN VIRI

1. Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D., Khorasanee, Z., Plumb, H. R. & Rickayzen, B. (2004). *Modern Actuarial Theory and Practice* (2. izd.). New York: Chapman and Hall/CRC.
2. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A. & Nesbitt C.J. (1997). *Actuarial Mathematics*, (2. izd.). Society of Actuaries. Pridobljeno 16. novembra 2019 iz <https://www.scribd.com/doc/143427217/Actuarial-Mathematics-by-Newton-Bowers>
3. Brandt Henriksen, L.F. (2014). *Aspects of Valuation and Optimization in Life*

- Insurance* (doktorska disertacija). Copenhagen: Faculty of Science, Department of Mathematical Science.
4. Brandt Henriksen, L.F., Woetmann Nielsen J., Steffensen M. & Svensson C. (2014). Markov Chain Modeling of Policyholder Behavior in Life Insurance and Pension. *European Actuarial Journal*, 4(1), 1-29.
 5. Buchardt, K. (2013). Dependent Interest and Transition Rates in Life Insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 167-179.
 6. Buchardt, K., Møller, T. & Schmidt, K. B. (2014). Cash flows and policyholder behaviour in the semi-Markov life insurance setup. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1-29.
 7. Buchardt, K. & Møller, T. (2015). Life insurance cash flows with policyholder behavior. *Multidisciplinary Digital Publishing Institute*, 3(3), 290-317.
 8. Christodoulou, N.S. (2009). An algorithm using Runge-Kutta methods of orders 4 and 5 for systems of ODEs. *Pushpa Publishing House*, 2(1), 47-57.
 9. Cox D.R. & Miller H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. London: Chapman and Hall.
 10. Dickson, D.C.M, Hardy, M.R. & Waters, H.R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. International Series on Actuarial Science. New York: Cambridge University Press.
 11. Dormand, J.R. & Prince P.J. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1), 19-26.
 12. European Insurance and Occupational Pensions Authority. (2019). *Risk-free interest rate term structure - Monthly technical information 2019*. Pridobljeno 16. novembra 2019 iz <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>
 13. Gerber, H.U. (1996). *Matematika življenskih zavarovanj*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
 14. Grimmet, G.R. & Stirzaker, D.R. (2001). *Probability and Random processes* (3. izd.). New York: Oxford University Press.
 15. Hoem, J.M. (1969). Markov Chain Models in Life Insurance. *Blätter der DGVFM IX*, 91-107.
 16. Jones, B. L. (1994). *Actuarial Calculations using a Markov Model*. Department of Statistics and Actuarial Science. Pridobljeno 16. novembra 2019 iz <https://pdfs.semanticscholar.org/47ef/1be3ddab0d9e42fa38b11ceb80497e41831e.pdf>.

17. Koller, M. (2010). *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
18. Koller, M. (2012). *Stochastic Models in Life Insurance* (1. izd.). New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
19. Kraft, H. & Steffensen, M. (2008). Optimal Consumption and Insurance: A Continuous-Time Markov Chain Approach. *Astin Bulletin*, 38(1), 231-257.
20. MathWorks, Inc. (1984-2005). *MATLAB: The Language of Technical Computing: computation, visualization, programming: installation guide for UNIX version 7*. Natwick: Math Works Inc.
21. Moore, H. (2012). *MATLAB for Engineers* (3. izd.). New York: Pearson.
22. Norberg, R. (1991). Reserves in Life and Pension Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3-24.
23. Norberg, R. (1995a). A time-continuous Markov chain interest rate model with applications to insurance. *Applied Stochastic Models Data Analysis*, 11(3), 245-256.
24. Norberg, R. (1995b). Differential equations for moments of present values in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 17(2), 171-180.
25. Norberg, R. (2002). *Basic Life Insurance Mathematics*. Pridobljeno 16. marca 2019 iz <http://web.math.ku.dk/~mogens/lifebook.pdf>
26. Slapar, M. (2006). *Markovske verige v življenjskih zavarovanjih* (magistrsko delo). Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
27. Steffensen, M. (2000). A no arbitrage approach to Thiele's differential equation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(2), 201-214.
28. Steffensen, M. (2002). Intervention options in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(1), 71-85.
29. Valdez, E. A. (2001). Bivariate analysis of survivorship and persistency. *Insurance: Mathematics and Economics*, 29(3), 357-373.
30. Van Der Molen, F. (2017). *Markov Chains and its Applications to Insurance*, (bachelor thesis). Utrecht: Universiteit Utrecht.