UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

GARANCIJE IN OPCIJE V ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJIH IN NJIHOV VPLIV NA SOLVENTNOST

Ljubljana, junij 2022 TINA HAWLINA

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana Tina Hawlina, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtorica predloženega dela z naslovom Garancije in opcije v življenjskih zavarovanjih in njihov vpliv na solventnost, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem prof.dr. Mihaelom Permanom

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravila samostojno;

2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;

3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;

4. da se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;

5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;

6. da sem pridobila vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označila;

7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnala v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobila soglasje etične komisije;

8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;

10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

V Ljubljani, dne 28. 6. 2022 Podpis študentke: ____________________

KAZALO

KAZALO TABEL

KAZALO SLIK

KAZALO PRILOG

SEZNAM KRATIC

angl. – angleško
nem. – nemško
ALM – (angl. Asset-liability management); tveganje neusklajenosti sredstev in obveznosti
BDP – bruto domači proizvod
BSM – Black Scholes Mertonov model
B-S – Black-Scholesova formula
CAR – (angl. current annuitization rate); trenutna rentna obrestna mera
CEIOPS – (angl. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors); Odbor evropskih nadzornikov za zavarovanja in poklicne pokojnine
CVaR, CTE – (angl. Conditional Value at Risk, Conditional Tail Expectation); pogojna tvegana vrednost
EIA – (angl. equity-indexed annuity); rentna zavarovanja, vezana na indeks
EIOPA – (angl. European Insurance and Occupational Pensions Authority); Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine
ES – (angl. Expected Shortfall); pričakovani primanjkljaj
EU – Evropska Unija
FIA – (angl. fixed indexed annuity); rentna zavarovanja s fiksnim indeksom
GAO – (angl. guaranteed annuity option); pretvorbena rentna opcija z zajamčeno rentno stopnjo
GAR – (angl. guaranteed annuitization rate); zajamčena rentna obrestna mera
GMAB – (angl. guaranteed minimum accumulation benefit); garancija minimalne vrednosti naložb
GMDB – (angl. guaranteed minimum death benefit); zajamčena zavarovalna vsota v primeru smrti
GMIB – (angl. guaranteed minimum income benefit); garancija minimalnih rent
GMLB – (angl. guaranteed minimum living benefit); zajamčena zavarovalna vsota v primeru preživetja
GMMB – (angl. guaranteed minimum maturity benefit); zajamčena zavarovalna vsota ob zapadlosti pogodbe
GMSB – (angl. guaranteed minimum surrender benefit); zajamčena odkupna vrednost

GMWB – (angl. guaranteed minimum withdrawal benefit); garancija minimalnega zneska dvigov

GMxB – (angl. Guaranteed Minumum Benefits of type ‘x’); garantirana minimalna izplačila tipa *‘x’*

HE – (angl. hedging error); napaka pri varovanju pred tveganjem

LTC – (angl. Long Term Care uplift option); zvišanje izplačila za dolgotrajno nego

MER – (angl. management expense ratio); razmerje upravljavskih stroškov

MLE – (angl. maximum likelihood estimation); metoda največjega verjetja

NPV – (angl. net present value); neto sedanja vrednost

PVFP – (angl. Present Value of Future Profits); sedanja vrednost prihodnjih dobičkov

SCR – (angl. Solvency capital requirement); zahtevani solventnostni kapital

VA – (angl. Variable Annuity); variabilne rente

VAGLBs – (angl. variable-annuity guaranteed living benefits); variabilne rente z zajamčenimi izplačili v primeru doživetja

ZZR – (nem. Zinszusatzreserve); dodatne rezervacije za tveganje obrestne mere

UVOD

Globalni trg življenjskih zavarovanj je v zadnjem desetletju doživel mnogo sprememb. Razvijajoči se azijski trg, ki je prej predstavljal majhen del industrije življenjskih zavarovanj, je sedaj zaslužen za več kot polovico globalne rasti premije in celo za 84 % razvoja individualnih rentnih zavarovanj. Dostopnost do podatkov je eskalirala, čemur so se zavarovalnice prilagodile s hitro uvedbo naprednih analitičnih modelov in uporabo umetne inteligence. Izzivi na svetovnih trgih so bili vse prej kot lahki; življenjske zavarovalnice so se morale spopasti z bikovskim trgom. Globalna penetracija je padla na 3 %, rast premije na najbolj razvitih trgih, ki se giblje malo pod 2 % na leto, pa se je stežka ujemala z bruto domačim proizvodom (BDP).

Nedavno je pandemija koronavirusa znižala svetovne obrestne mere, ki so bile celo nižje od tistih, ki smo jih opazili v svetovni finančni krizi 2007–2008, kar je povzročilo nesorazmeren vpliv na zaloge življenjskih zavarovanj glede na preostali trg (Berdin, Gründl & Kubitza, 2017, str. 2). Življenjske zavarovalnice so tako morale začeti razvijati inovativne produkte, ki so prilagodljivi na regulatorne spremembe in trg nizkih obrestnih mer. V Evropski Uniji (EU) so se v zadnjih nekaj letih izdajale državne obveznice z negativno donosnostjo, japonski in ameriški trg pa se je boril z obrestnimi merami blizu ničle. Medtem so evropske zavarovalnice že ponujale police, ki so jamčile višji naložbeni donos, kot ob vložku v 10-letno državno obveznico.

Globalno znižane stopnje obrestnih mer je spremljala uvedba novih kapitalskih predpisov. Na primer, uvedba Solventnosti II leta 2016 v Evropski uniji je povečala kapitalske zahteve za tradicionalne življenjske in rentne produkte, kar je dodatno pritiskalo na dobičkonosnost zavarovalnic. Potrošniki bodo še naprej iskali zajamčene donose, kar pomeni, da se bodo številne zavarovalnice soočale z izzivi pri zagotavljanju jamstev na kapitalsko učinkovit in donosen način. Večina zavarovalnic se je zato že zatekla k širokemu spektru produktov kapitalskih trgov, zlasti hibridov in produktov, povezanih z enotami, ki so kapitalsko učinkovitejši in dobro delujejo v okolju z nizko obrestno mero (McKinsey & Company, 2020).

Namen magistrskega dela je s pomočjo zaupanja vredne literature raziskati, kateri življenjski produkti z garancijami so na trgu že uveljavljeni in kakšne nove produkte naj življenjska zavarovalnica razvija, da ostaja privlačna za zavarovance in hkrati, kljub regulatornim kapitalskim zahtevam, dobičkonosna. Pri tem podrobno analiziramo, kakšen vpliv imajo produkti z garancijami na solventnost zavarovalnice.

Cilj magistrskega dela je raziskati, kakšna je prihodnost življenjskih zavarovalnih produktov. Bolj podrobno; kakšne finančne garancije in opcije naj zavarovalnica vključi v svoja življenjska zavarovanja, da bo le najbolje zadostila potrebam zavarovancev in jim nudila možnost dobičkonosnejšega in bolj varnega varčevanja, kot z direktno naložbo v kapitalski trg. Pri tem mora poleg zavarovalnih tveganj dobro poznati razmere na kapitalskih trgih in svojo izpostavljenost do tveganja, ki ga ta prinaša. Razviti mora dobre notranje modele, s katerimi bo produkte primerno vrednotila, pri čemer morajo ti zadostovati trenutnim regulatornim zahtevam. Vključitev garancij v produkt zavarovalnico izpostavi finančnemu tveganju, zato pričakujemo, da bomo zanj morali oblikovati višje kapitalske rezerve, kot za življenjski produkt brez vključenih garancij.

Delo je sestavljeno iz treh poglavij. V prvem poglavju opišemo, kakšne produkte z vključenimi garancijami in opcijami že poznamo. Njihov položaj in možnost za nadaljno rast raziščemo tako na tujem, kot domačem trgu. V drugem poglavju raziščemo regulativo Solventnosti II in s kakšnimi modeli lahko take produkte vrednotimo. Tu se osredotočimo predvsem na vrednotenje garancij in opcij, vključenih v variabilne rente. Podrobneje opišemo aktuarski model in model z uporabo Black-Scholes-Merton modela. V tretjem poglavju pa sami razvijemo aktuarski in model vrednotenja pogodb z opcijami in ju uporabimo na portfelju, ki bi ga lahko našli na slovenskem trgu življenjskih zavarovanj. Z njima zagotovimo, da zavarovalnica oblikuje primerno visoke kapitalske rezerve. Delo zaključimo s sklepnimi ugotovitvami.

1 GARANCIJE IN OPCIJE V ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJIH

Namen življenjskih zavarovanj je zagotoviti finančno varnost zavarovancem in njihovim družinam. Pri konzervativnih zavarovanjih to pomeni, da se ob smrti ali preživetju zavarovane osebe izplača zavarovalna vsota. Zavarovalna vsota je fiksna in zajamčena. Zavarovanec med trajanjem zavarovalne pogodbe plača eno ali več premij, da si pridobi pravico do izplačila zavarovalne vsote v primeru smrti ali doživetja. Aktuarske tehnike so zato temeljile predvsem na oceni in upravljanju tveganj življenjskih zavarovanj: umrljivosti in dolgoživosti.

Z razvojem finančnih trgov pa so se začeli tradicionalni življenjski produkti spreminjati. Zavarovanci so se začeli zavedati naložbenih priložnosti izven zavarovalniškega sektorja. Pokazala se je potreba po produktu, ki bi poleg kritja za smrt ponujal tudi možnost naložbenega varčevanja (Hardy, 2003, str. 1).

Tako smo bili priča prehodu iz tradicionalnih zavarovanj k inovativnim produktom. Tradicionalna zavarovanja se delijo na riziko življenjska zavarovanja oz. terminska življenjska zavarovanja (angl. term insurance), zavarovanja za primer doživetja (angl. endowment insurance), mešana zavarovanja tj. zavarovanja za primer smrti in doživetja (angl. mixed endowment insurance) in rentna zavarovanja (angl. life annuity). Za snovanje modernih zavarovanj in pokojninskih produktov je bil značilen "inverzni" proces; zavarovanja so zasnovana kot paketi, pri čemer so določene opcije in pogodbene možnosti lahko vključene v zavarovanje ali pa ne, odvisno od zavarovančevih potreb. Zanimivejša inovativna zavarovanja so:

- zavarovanje za primer doživetja in vseživljenjsko zavarovanje (angl. whole life insurance), z vključitvijo različnih kritij in opcij,

- univerzalno življenjsko zavarovanje (angl. Universal Life insurance), z možnostmi spreminjanja višine premij in zavarovalne vsote, dviga sredstev z osebnega računa, uporabe nakopičenih sredstev pri plačilu premij ipd.,
- variabilne rente (angl. Variable Annuity, v nadaljevanju VA) ali garantirana minimalna izplačila tipa *'x'* (angl. Guaranteed Minumum Benefits of type 'x', v nadaljevanju GMxB),
- zavarovalni in finančni produkti, ki omogočajo izplačilo rent za upokojene osebe,
- pokojninska zavarovanja z vključenim izplačilom v primeru dolgotrajne nege (nega na domu, življenje s pomočnikom in upokojenski domovi), poznana tudi kot hibridna življenjska zavarovanja (angl. hybrid life insurance). Združujejo klasično življenjsko zavarovanje (lahko tudi rentno zavarovanje) z izplačili za dolgotranjo nego.

Zavarovalne vsote za kritja (zavarovalna vsota za smrt in dodatne zavarovalne vsote za kritja, ki so vključena v paket) implicirajo širok nabor garancij in opcij tako finančne in biometrične (tveganja vezana na zdravstveno stanje osebe: smrt, rojstvo, invalidnost, starost, število otrok ipd.) narave, kjer tveganje prevzema nase zavarovalnica (Pitacco, 2012, str. 3).

1.1 Življenjska zavarovanja z vključenimi garancijami in opcijami

Definicija 1.1 ***Vključene opcije v življenjski zavarovalni pogodbi.*** *Opcijo povezano z življenjskimi zavarovalnimi pogodbami imenujemo vključena opcija (v življenjski zavarovalni pogodbi). Ta da zavarovancu pravico, vendar ne obveze, da spremeni svojo zavarovalno pogodbo ob določenem datumu ob pogojih, vnaprej določenih v zavarovalni pogodbi (Rüfenacht, 2012, str. 18).*

1.1.1 Implicitne opcije v življenjskih zavarovanjih

Večina klasičnih življenskih zavarovanj ima v zavarovalno pogodbo vključene implicitne opcije. Implicitne opcije zavarovancu nudijo pravico do spremembe zavarovalnih pogojev med tekom trajanja zavarovalne police. Za izvršitev implicitnih opcij soglasje zavarovalnice ni potrebno. Katere implicitne opcije morajo biti vključene v zavarovalno pogodbo, primer sta opcija odkupa (angl. surrender option) in kapitalizacije police (angl. paid-up option), je pogosto določeno v zakonodaji. Ob izvršitvi opcije se ponavadi spremeni velikost in/ali čas bodočih denarnih tokov na polici, zato imajo bistven pomen za zavarovanca. Opcije vgrajene v življenjska zavarovanja imajo velik potencial, da zavarovalnico izpostavijo finančnemu tveganju.[1]

Najpogostejše implicitne opcije vključene v življenjska zavarovanja so opisane spodaj (Rüfenacht, 2012, str. 18-19; Dežman, 2019, str. 4):

- **Odkupna opcija** (angl. surrender option) daje zavarovancu pravico, da izvrši popolni ali delni odkup police in dobi vnaprej določeno odkupno vrednost. Odkupna vrednost

[1]Obsežnejši seznam implicitnih opcij, vključenih v življenjska zavarovanja najdemo v Gatzert, 2009, str. 7.

ponavadi vključuje matematično rezervacijo za polico z možnimi dividendami, zmanjšana za odkupno provizijo. Zavarovanec običajno lahko izvrši pravico le ob koncu vsakega pogodbenega leta.

- **Opcija kapitalizacije police s prenehanjem plačevanja premij** (angl. paid-up policy option) daje zavarovancu pravico, da lahko predčasno preneha s plačevanjem premij. Obstoječa polica se nadaljuje z znižanimi kritji, ki so odvisna od trenutne višine rezervacij za polico ob datumu izvršitve opcije. V praksi opcija kapitalizacije police pomeni zamenjavo obstoječe pogodbe z novo pogodbo, ki ima ustrezno znižano višino kritij, pri čemer bodoče premije ne bodo več vplačane.
- **Pretvorbena rentna opcija** (angl. annuity conversion option) daje zavarovancu pravico, da zavarovalno vsoto za doživetje pretvori v rentno zavarovanje po vnaprej določenem zajamčenem rentnem faktorju.
- **Pretvorbena opcija** (angl. policy conversion option) daje zavarovancu pravico, da pretvori obstoječo zavarovalno polico v drugo obliko zavarovanja po pogojih, določenih ob sklenitvi zavarovanja.
- **Obnovitvena opcija** (angl. extended coverage option) daje zavarovancu pravico do podaljšanja zavarovalnih kritij ob izteku obstoječe pogodbe brez predložitve izjav o zdravstvenem stanju (tj. brez dodatnega zdravniškega pregleda).

Poznamo pa tudi **finančne garancije** (oz. finančna jamstva), ki so pogosto vgrajene v življenjske zavarovalne produkte. "Zavarovalna pogodba vsebuje *finančno garancijo* kadarkoli obstaja možnost povečanja zavarovalnega kritja kot posledice spremembe parametra, ki je odvisen od okoliščin na finančnih trgih (npr. uspešnosti indeksov, donosnosti naložb portfelja ipd.). Vgrajena garancija pridobi pozitivno vrednost avtomatično, ko so izpolnjeni pogoji v zavarovalni pogodbi neodvisno od izbir zavarovanca." (Slapar, 2011, str. 28)

1.1.2 Garancije in opcije v riziko življenjskih zavarovanjih

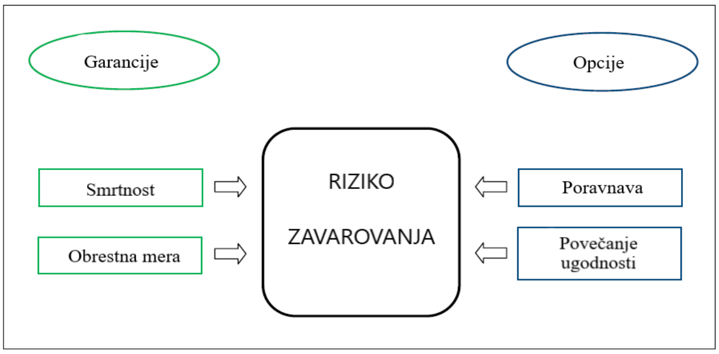
Najpogostejše garancije in opcije, ki so vključene v rizična življenjska zavarovanja, so prikazane na sliki 1. *Garancija smrtnosti* (angl. mortality guarantee) trivialno pomeni, da kakršnokoli je število smrti v portfelju, mora zavarovalnica izplačati zavarovalno vsoto za smrt, kot je določeno v zavarovalni polici. To je seveda vedno res za katerokoli življenjenjsko zavarovanje. Rizična življenjska zavarovanja navadno vsebujejo tudi *garancijo obrestne mere* (angl. interest guarantee), zaradi česar mora biti rezervaciji police letno pripisana količina kapitala, preračunana glede na določeno obrestno mero, ki je odvisna od donosa naložb zavarovalnice. Tu je vredno pripomniti, da ker imajo rizična zavarovanja precej majhne rezervacije, ta garancija tudi ob zelo slabem donosu naložb nima velikega učinka na vrednost portfelja.

Poleg tega so v riziko življenjska zavarovanja lahko vključene različne implicitne opcije. Dve najpogostejši sta *opcija poravnave* (angl. settlement option) in *možnost povečanja ugodnosti* (angl. guaranteed insurability ali benefit increase option). *Opcija poravnave* se navezuje na možnosti izplačila zavarovalne vsote za smrt, navedene spodaj:

- običajno se izplačilo zavarovancu izplača v enkratnem znesku (angl. lump sum),
- zavarovanec lahko alternativno izbere izplačilo zavarovalne vsote v manjših zaporednih obrokih v določenem obdobju,
- druga alternativna možnost je izplačevanje zavarovalne vsote v obliki rente, dokler je zavarovanec živ. V tem primeru tveganje dolgoživosti prevzame zavarovalnica.

Možnost povečanja ugodnosti zavarovancu omogoča, da si ta zviša zavarovalno vsoto ob soočenju s posebnimi dogodki v gospodinjstvu, npr. rojstvo otroka, brez predložive zdravstvenega vprašalnika in zdravniškega pregleda. Predpostavke o tveganju smrtnosti zavarovanca ostajajo enake, zato tveganje asimetrije informacij (moralnega hazarda in negativne selekcije) nosi zavarovalnica (Pitacco, 2012, str. 5 in 6).

Slika 1: Garancije in opcije v riziko življenjskih zavarovanjih



Prirejeno po Pitacco (2012, str. 6).

1.1.3 Garancije in opcije v mešanih zavarovanjih

Nekatere garancije in opcije, ki jih vključujejo riziko življenjska zavarovanja, je moč najti tudi v mešanih zavarovanjih. To so *garancija smrtnosti*, *opcija poravnave* in *garancija obrestne mere*. Slednja vključuje veliko večje tveganje kot v riziko zavarovanjih, saj so rezervacije pri mešanih zavarovanjih veliko višje. Posledično se količina kapitala, namenjena zaščiti pred tveganjem obrestne mere, progresivno povečuje.

V mešana zavarovanja so lahko vključene še mnoge druge opcije, zanimivejše so prikazane na sliki 2.

Ob izvršitvi *opcije odkupa* (pogl. 1.1.1) je zavarovalnica izpostavljena *tržnemu tveganju* (zavarovalnica je v tem primeru prisiljena prodati naložbeni portfelj po nižji obrestni meri, kot je trenutna obrestna mera), *likvidnostnemu tveganju* itd.

V mešanih zavarovanjih lahko najdemo *opcije dividend*, ki zavarovancu omogočajo, da je udeležen v dobičku zavarovalnice (ki izhajajo iz donosa naložb, tveganja smrtnosti in višine stroškov zavarovalnice). Podrobneje so možnosti:

1. dividende so lahko izplačane v denarju, kar se pogosto izvede prek nižanja bodočih premij,
2. alternativna možnost, ki jo velikokrat najdemo v evropskih policah, je, da se dividende uporabi za financiranje prirastka v zavarovalni vsoti (bodisi v primeru doživetja bodisi v primeru smrti, ali pa v obeh primerih),
3. tretja možnost je finančna akumulacija dividend po garantirani obrestni meri.

Možnosti 3 in morda tudi 2 (odvisno od uporabe mehanizma za zvišanje zavarovalne vsote), izpostavita zavarovalnico *finančnemu tveganju*.

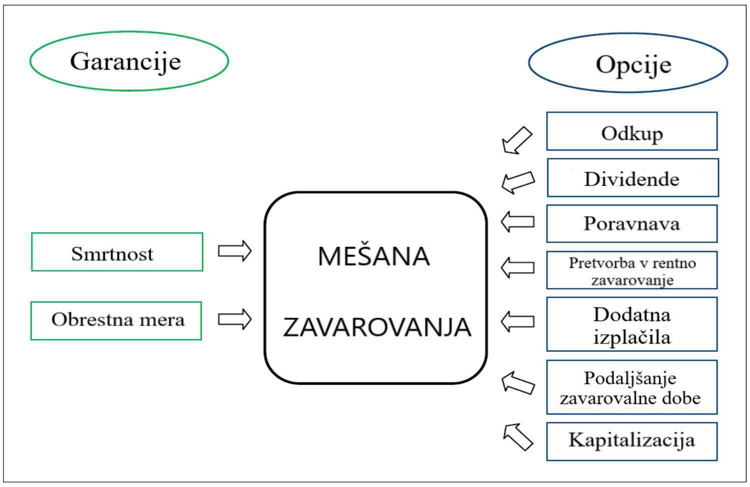
Če zavarovanec izvrši *pretvorbeno rentno opcijo* (angl. annuitization option), se zavarovalna vsota za doživetje izplačuje kot rente, vse dokler je ta živ. Zavarovalnico izvršitev te opcije izpostavi *tveganju dolgoživosti*. Višina tveganja je odvisna od časa izvršitve opcije; bližje kot je začetku zavarovanja, prej se določi stopnja rente, kar predstavlja višje agregatno tveganje dolgoživosti. Tveganje se pojavi zaradi negotovosti trenda smrtnosti v prihodnosti.

Poleg tveganja dolgoživosti izvršitev pretvorbene rentne opcije zavarovalnico izpostavi še tveganju negativne selekcije, saj bo opcijo najverjetneje izvršil zavarovanec v dobrem zdravstvenem stanju, ki bo verjetno doživel visoko starost. Prisotno je tudi finančno tveganje, ki se pojavi zaradi minimalne obrestne mere, ki je navadno vključena pri rentnih zavarovanjih.

Ob izvršitvi opcije *dodatnih izplačil* (angl. additional payments option) zavarovanec poviša svojo zavarovalno vsoto. Pri izplačilu za smrt izvršitev te opcije implicira možnost povečanja ugodnosti (pogl. 1.1.2).

Če se zavarovanec odloči za *podaljšanje zavarovalne dobe* (angl. contract term extension), se tako zavaruje pred nihanjem v obrestni meri in si namesto tega zagotovi garantirano obrestno mero. Opcija kapitalizacije je opisana v poglavju 1.1.1 (Pitacco, 2012, str. 6 in 7).

Slika 2: Garancije in opcije v mešanih življenjskih zavarovanjih z udeležbo v dobičku zavarovalnice



Prirejeno po Pitacco (2012, str. 8).

1.1.4 Garancije in opcije v rentnih zavarovanjih

Pri odloženih rentnih zavarovanjih je prisotno visoko tveganje dolgoživosti. Namreč, imamo dve obdobji, obdobje “akumulacije” in “dekumulacije” (izplačevanja) premoženja. Trajanje garancij se zato lahko razširi čez mnogo desetletij, kar zaradi nepoznavanja bodočega trenda smrtnosti zavarovalnico izpostavi zelo visokemu tveganju dolgoživosti. Pri tradicionalnih odloženih rentnih zavarovanjih se stopnja rente in višina rente določita že v začetku zavarovanja, torej je tveganje dolgoživosti visoko. Če pa bi se določili ob koncu akumulacijske dobe, bi bilo to tveganje nižje. Pri rentnih zavarovanjih se osredotočimo le na garancije in opcije v dobi dekumulacije premoženja (slika 4).

Garancija obrestne mere (opisana v pogl. 1.1.1) ima pri rentnih zavarovanjih velik vpliv zaradi povprečno dolge dobe izplačevanja. Zavarovalnica je dolžna izplačevati rente, dokler je zavarovanec živ, zato je izpostavljena *individualnemu tveganju dolgoživosti*, ki izvira iz naključnega nihanja življenjske dobe posameznika glede na primerno pričakovano vrednost. Prav tako pa mora vsem prejemalcem rent v portfelju rentnih zavarovanj (oz. pokojninskem skladu) zagotoviti rente, kar jo izpostavi *agregatnemu tveganju dolgoživosti*. Če je povprečna starost v portfelju višja od pričakovane, bo zavarovalnica utrpela izgubo, zaradi *sistemskih odklonov* trajanja življenjske dobe od pričakovane vrednosti.

Rentnim zavarovanjem se lahko priključijo različne opcije. Te opcije se lahko izvršijo že pred začetkom dobe izplačevanja, na primer ob začetku zavarovanja. Ob izvršitvi teh opcij se dodatna izplačila dodajo osnovnemu produktu rentnega zavarovanja.

Če zavarovanec izvrši opcijo *zaščite kapitala* (angl. capital protection ali money-back option), se pogodbi rentnega zavarovanja doda izplačilo za smrt. Takemu zavarovanju potem pravimo *rentno zavarovanje z zaščito vrednosti* (angl. value-protected life annuity). Ob zgodnji smrti zavarovanca se njegovemu premoženju doda razlika (če je ta pozitivna) med enkratno premijo in kumulativnimi izplačili, ki so bila do tedaj zavarovancu že izplačana. Navadno se opcija zaščite kapitala izteče ob določeni starosti (npr. 75 let); po tej starosti se zavarovancu razlika ne izplača več, četudi je pozitivna.

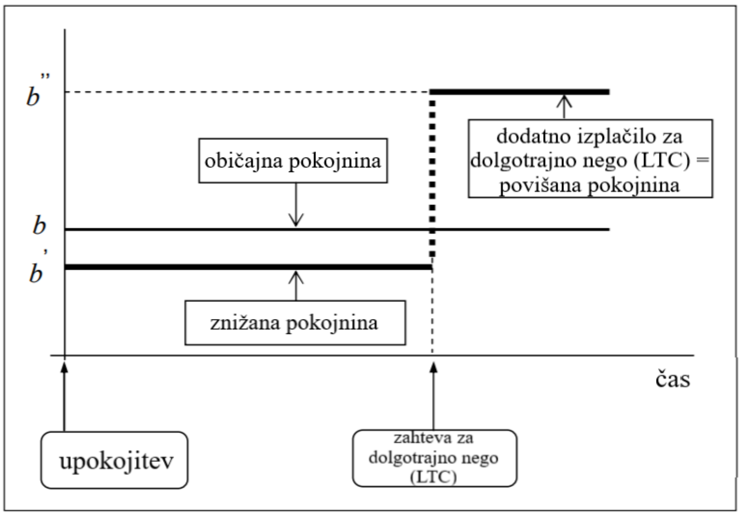
Če se rentnemu zavarovanju doda opcija *zadnjega preživelega* (angl. last-survivor annuity), se bo renta izplačevala tako dolgo dokler bo vsaj en od zavarovancev (x) in (y) živ. Lahko je določeno, da se višina rente b s časom ne spreminja, in ostaja enaka do smrti zadnjega preživelega. Druga možnost je, da se ob smrti prvega zavarovanca renta zniža na b', če prvi umre zavarovanec (y) in na b'', če prvi umre zavarovanec (x), kjer je $b' < b$ in $b'' < b$. Nasprotno se renta zniža le, ko prvi umre upokojenec (x), kar pogosto najdemo v pokojninskih zavarovanjih. Potem je $b' = b$ in $b'' < b$, tj. izplačilo se zniža le, če prvi umre zavarovanec (x). Ne glede na to, katero možnost zadnjega preživelega je dodana rentnemu zavarovanju, se trajanje tega podaljša, kot če bi imeli navadno rentno zavarovanje z enim zavarovancem. Torej je zavarovalnica v večji meri izpostavljena tveganju dolgoživosti (tako individualnemu kot tudi agregatnemu).

Zavarovanec lahko rentnemu zavarovanju doda opcijo *zvišanja izplačila za dolgotrajno nego* (angl. Long Term Care uplift option, v nadaljevanju LTC), kjer se renti doda še izplačilo glede na zdravstveno stanje zavarovanca. Če ta potrebuje dolgotrajno nego, ki je ne more kriti le s pokojnino, se bo njegovo izplačilo povišalo. Tak produkt imenujemo tudi *povišana pokojnina* (angl. enhanced pension), ki je kombinacija standardnega rentnega zavarovanja, ko je zavarovanec zdrav in povišane rente, ko zavarovanec potrebuje dolgotrajno nego. Opcija je sestavljena iz (slika 3):

1. ravni standardnega rentnega zavarovanja z izplačilom/rento b,
2.
   - rentnega zavarovanja, ko je zavarovanec zdrav z letno rento $b^{[H]}$, $(b^{[H]} < b)$,
   - rentnega zavarovanja, ko zavarovanec potrebuje dolgtrajno nego (povišana pokojnina), od časa ko zavarovanec zahteva dodatek za dogotrajno nego (LTC), z letno rento $b^{[LTC]}$, $(b^{[LTC]} > b)$.

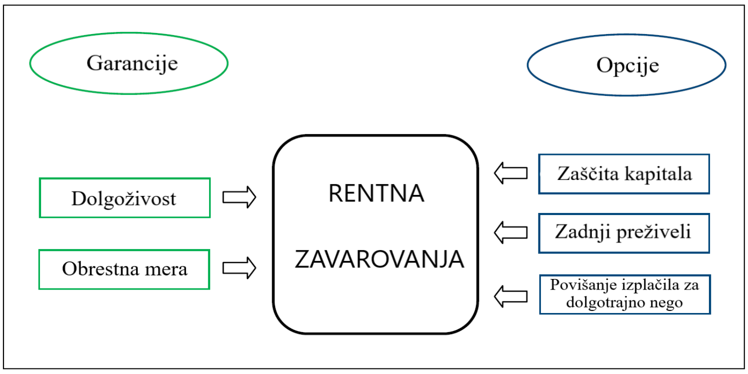
Cena povišanja pokojnine $b^{[LTC]} - b^{[H]}$ pri dani enkratni premiji je enaka razliki med $b - b^{[H]}$ (Pitacco, 2012, str. 9 in 10).

Slika 3: Rentno zavarovanje z vključeno opcijo zvišanja izplačila za dolgotrajno nego



Prirejeno po Pitacco (2015, str. 16).

Slika 4: Garancije in opcije v rentnih zavarovanjih



Prirejeno po Pitacco (2012, str. 10).

1.1.5 Garancije in opcije vključene v variabilne rente ali GMxB produkti

Rentna in pokojninska zavarovanja pogosto vključujejo garancije kot so minimalna stopnja kopičenja premoženja, minimalno letno izplačilo in minimalno enkratno izplačilo. Priključitev različnih garancij v življenjska zavarovanja je značilnost variabilnih rent. Ker gre za varčevanje za starost, ti produkti tipično združujejo naložbeno zavarovanje z odloženimi prejemki/rentami, ki jih stranka prejema v pokoju. Govorimo o t.i. *GMxB* produktih, garantiranih minimalnih izplačilih tipa *'x'*. To so izvedeni finančni instrumenti, ki so po svojih značilnostih podobni opcijam.[2] V zameno za plačilo premije jamčijo minimalna izplačila ob primeru smrti ali preživetja.

[2]Pojem opcija označuje izveden vrednostni papir na finančnem trgu.

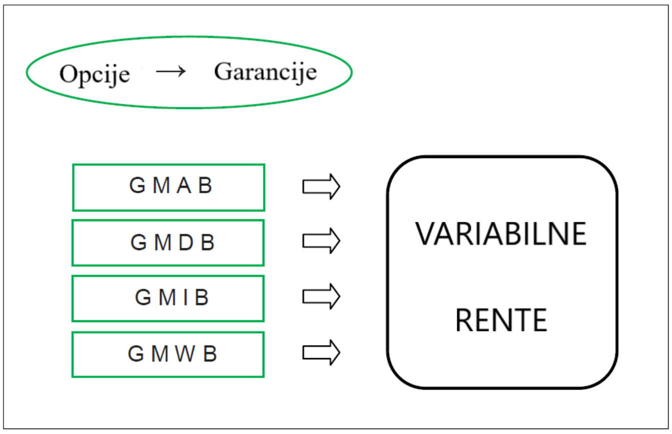
Variabilne rente so zanimiv produkt, ker vključujejo privlačne značilnosti naložbenih zavarovanj, kjer si zavarovanec sam izbere svojo naložbeno strategijo, poleg tega pa ima vključeno garancijo višine izplačila v primeru zgodnje smrti ali rent v primeru doživetja. To zavarovanje je dolgoročna naložba, z namenom varčevanja in odloga davkov. Stranke se nemalokrat odločijo zanje ravno zaradi nizkega davka, nekatere države, ki spodbujejo individualno varčevanje za starost, pa omogočajo še nižje davke. Zavarovanec pri tem zavarovanju plača enkratno premijo in si izbere sklade glede na svoj profil tveganja. Svojo naložbeno strategijo lahko brez dodatnih stroškov tekom zavarovanja menja. V nasprotju z zavarovanji z udeležbo v dobičku tu ni potrebno, da naložbena strategija replicira garancijo, za katero se odloči zavarovanec. Garancije, upravljavske provizije, administrativni stroški in ostali stroški se letno obračunajo od vrednosti police. Strošek garancije in tudi ostali stroški so navadno izraženi kot % vrednosti police.

Naložbena zavarovalna pogodba brez vključenih finančnih garancij ne vključuje finančnega tveganja za zavarovalnico. Kombinacija naložbe v sklade in zajamčene zavarovalne vsote predstavlja podlago za prenos finančnega tveganja na zavarovalnico. Finančna tveganja vezana na zajamčeno zavarovalno vsoto ali *GMxB* produkte delimo na dve vrsti, pri čemer se druga podvrsta deli še na naštete podvrste:

- **Zajamčena zavarovalna vsota v primeru smrti** (angl. guaranteed minimum death benefit, v nadaljevanju GMDB)
- **Zajamčena zavarovalna vsota v primeru preživetja** (angl. guaranteed minimum living benefit, v nadaljevanju GMLB)
  - **Garancija minimalne vrednosti naložb** (angl. guaranteed minimum accumulation benefit, v nadaljevanju GMAB)
  - **Garancija minimalnih rent** (angl. guaranteed minimum income benefit, v nadaljevanju GMIB)
  - **Garancija minimalnega zneska dvigov** (angl. guaranteed minimum withdrawal benefit, v nadaljevanju GMWB)

Poleg finančnega tveganja je v variabilnih rentah prisoten visok vpliv tveganja smrtnosti in dolgoživosti, ker je zavarovanje dolgoročno in je zato izpostavljeno naključnim nihanjem v številu smrti.

Slika 5: Garancije in opcije v variabilnih rentnih zavarovanjih



Prirejeno po Pitacco (2013, str. 10).

Poleg naštetih poznamo še:

- **Zajamčena zavarovalna vsota ob zapadlosti pogodbe** (angl. guaranteed minimum maturity benefit, v nadaljevanju GMMB)
- **Zajamčena odkupna vrednost** (angl. guaranteed minimum surrender benefit, v nadaljevanju GMSB)

Vsebinsko bomo opisali vsako *GMxB* pogodbo in se pri tem osredotočili na evropski trg. Značilnosti se zlahka prilagodijo tudi drugemu zavarovalnemu trgu.

Imamo variabilno rentno zavarovanje, z enkratnim vplačilom premije z začetkom v času 0. Naj bo P enkratna premija in $T \geq 0$ konec akumulacijske dobe; če je $T = 0$ se renta izplača takoj, zato nekatere garancije izgubijo pomen. Obravnavamo le pogodbe z enkratno premijo, ker so te temelj za sheme večkratnih vplačil premij. Z A_t označino vrednost police v času t. Ta vrednost je odvisna od razvoja referenčnih skladov, v katere se investira enkratna premija. Predpostavimo, da so možne garancije izbrane v času 0 in jih zavarovanec obdrži do konca trajanja zavarovalne pogodbe. Zaradi lažjih oznak predpostavimo, da pred upokojitvijo ni delnih odkupov.

Vse navedene finančne garancije so podrobneje opisane spodaj (Bacinello, Millossovich, Olivieri & Pitacco, 2011, str. 5; Bauer, Kling & Russ, 2008, str. 624; O'Malley, 2007, str. 3-5):

- **Zajamčena zavarovalna vsota v primeru smrti** (GMDB) jamči zavarovancu vnaprej določeno minimalno zavarovalno vsoto ob smrti zavarovanca v času trajanja zavarovalne pogodbe. Nekatere zavarovalnice omogočajo GMDB garancijo tudi po upokojitvi, do določenega leta (npr. 75 let). Sestava garancije je naslednja: zavarovalnica bo ob smrti zavarovanca pred iztekom zavarovalne pogodbe izplačala višjo vrednost med vrednostjo police in zajamčeno vrednostjo. Torej, ob smrti v času t, v dobi akumulacije premoženja (tj. $t \leq T$), je izplačilo oblike:

$$b_t^D = \max\{A_t, G_t^D\}, \;\; t \leq T, \tag{1}$$

kjer je G_t^D zajamčena vrednost. Ta je lahko bodisi fiksna bodisi odvisna od vrednosti police. Oblike zajamčene vrednosti G_t^D so prikazane na sliki 6.

Primeri fiksne zajamčene vrednosti so naslednji:

- *Garancija vplačanih premij* (angl. return of premiums), ki zavarovancu omogoča izplačilo v višini vplačanih premij zmanjšanih za delna izplačila. Ob predpostavki, da ni delnih odkupov, imamo:

$$G_t^D = P. \tag{2}$$

- *Garancija vplačanih premij povišanih za zajamčeno obrestno mero* (angl. roll-up of premiums) je enaka:

$$G_t^D = Pe^{\delta t}, \;\; \delta > 0, \tag{3}$$

  kjer je δ zajamčena jakost obrestne mere. Garancijo (3) lahko modificiramo tako, da vključuje deterministično, od časa odvisno zajamčeno obrestno mero, kar nam pomaga, da lahko modeliramo primere, ko se premija poviša le ob določeni starosti zavarovanca ali ob določenih intervalih. Če zavarovanec dvigne sredstva iz svoje naložbene police, se tudi zajamčena vrednost G_t^D primerno zniža.

Primeri zajamčene vrednosti, odvisni od vrednosti police, so naslednji:

- *Garancija najvišje vrednosti police* (angl. ratchet guarantee ali cliquet guarantee) omogoča zavarovancu izplačilo v višini najvišje dosežene vrednosti police v določenih trenutkih do določenega časa pred smrtjo. Ob zgoraj določenih predpostavkah (enkratna premija brez delnih odkupov), imamo:

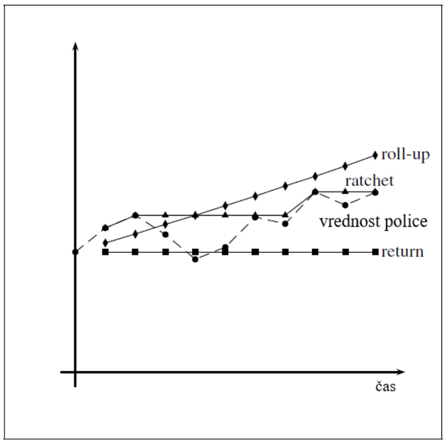
$$G_t^D = \max_{t_i < t} A_{t_i}. \tag{4}$$

  Dobiček, ki ga prinaša referenčni sklad, je posledično zaklenjen ob vnaprej določenih datumih $t_i, \; i = 0,1,\ldots,n$ in $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < T$ in enak maksimalni vrednosti naložbenega premoženja do vnaprej določenega časa v prihodnosti.
- *Garancija resetiranja vrednosti police* (angl. reset guarantee) zavarovancu nudi vrednost police ob prejšnjem določenem času:

$$G_t^D = A_{\max_{\{t_i:\; t_i < t\}}}, \tag{5}$$

  kjer so časi $t_i, \; i = 1,2,\ldots,n$ definirani kot časi resetiranja. Razlika med garancijo najvišje vrednosti police in garancijo resetiranja vrednosti police je ta, da se pri prvi zajamčena minimalna vrednost nikoli ne zniža, pri drugi pa se lahko, v primeru, da pade vrednost premoženja med dvema časoma resetiranja. Garanciji določeni z enačbama (4) in (5) se morata ustrezno spremeniti, da odražata bodoča ponavljajoča se enkratna vplačila ali bodoče odkupe na vnaprej določene datume v prihodnosti.

Slika 6: Oblike zajamčene vrednosti G_T^D



Prirejeno po Olivieri & Pitacco (2011, str. 368).

Če pogodba ne vsebuje zajamčene zavarovalne vsote v primeru smrti (GMDB), je izplačilo preprosto enako A_t, v tem primeru je v enačbi (1) $G_t^D = 0$. Zavarovanec lahko izbere tudi kombinacije garancij, na primer:

$$G_t^D = \max\left\{Pe^{\delta t}, \max_{t_i<t} A_{t_i}\right\}, \tag{6}$$

kar je kombinacija garancije vplačanih premij povišanih za zajamčeno obrestno mero (*roll-up*) in garancije najvišje vrednosti police (*ratchet*).

- **Garancija minimalne vrednosti naložb** (GMAB) jamči, da bo ob dogovorjenem času v prihodnosti (tipično ob koncu akumulacijske dobe) zavarovancu, če je živ, izplačana višja izmed naložbene vrednosti police in zajamčene vrednosti G_T^A. Izplačilo b_T^A je enako:

$$b_T^A = \max\{A_T, G_T^A\}. \tag{7}$$

Zajamčena vrednost je lahko, podobno kot pri zajamčeni zavarovalni vsoti v primeru smrti (GMDB), naslednjih oblik (ali pa vključuje več teh):

- garancija vplačanih premij,
- garancija vplačanih premij povišanih za zajamčeno obrestno mero,
- garancija najvišje vrednosti police.

Torej lahko G_T^A izrazimo s formulami (2)-(6). Naslednja garancija, ki je lahko vključena v GMAB, je garancija resetiranja, ki ob zapadlosti pogodbe omogoča obnovo zavarovanja. Garancija resetiranja ima drugačen pomen v GMAB in GMDB; opcija resetiranja pri GMAB omogoča le, da se zamakne čas zapadlosti pogodbe *T*.

- **Garancija minimalnih rent** (GMIB) nudi doživljenjsko rento od določenega časa v prihodnosti dalje. Izplačilo, ki se je do tedaj akumuliralo z obrestno mero, se pretvori v rente.

  Izplačilo ob izbiri garancije minimalnih rent je lahko naslednjih dveh oblik:

  – Količina, ki se bo obrestovala z obrestno mero η, bo večja izmed vrednosti police in določene zajamčene vrednosti G_T^I. Če so oblike določene zajamčene vrednosti podobne kot pri GMAB, potem G_T^I definiramo s formulami (2)-(6). Obrestna mera η se določi glede na tržne razmere ob pričetku izplačevanja rente. Potem je periodična (letna, mesečna, ...) renta določena kot:

  $$b^I = \eta \max\{A_T, G_T^I\}. \tag{8}$$

  – Obrestna mera je ugodnejša izmed določene zajamčene obrestne mere g in η. Količina, ki se bo obrestovala, je vrednost police. Potem je periodično izplačilo rentnega zavarovanja izraženo z:

  $$b^I = A_T \max\{\eta, g\}. \tag{9}$$

  To možnost poznamo pod imenom pretvorbena rentna opcija z zajamčeno rentno stopnjo (angl. guaranteed annuity option, v nadaljevanju GAO). V opciji 9 je implicitno predpostavljeno, da se opcija izvrši, čim je (angl. in-the-money, tj. če obrestna mera η pade pod zajamčeno obrestno mero g) in tako zanemarja subjektivne preference glede obrestovanja in izplačila kot tudi asimetrijo informacij.

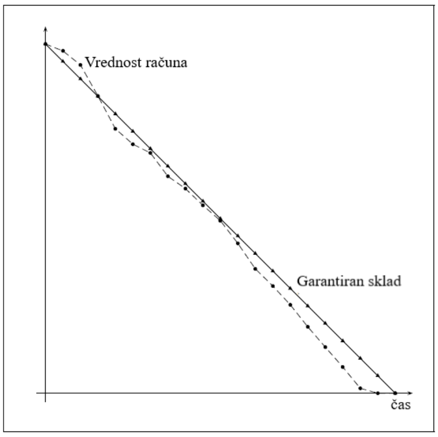
  Pri garanciji minimalnih rent obrestni meri η, ki odraža trenutne razmere na trgu, pravimo *trenutna rentna obrestna mera* (angl. current annuitization rate - CAR). Ta se določi ob začetku izplačevanja rente, medtem ko je zajamčena rentna obrestna mera g (angl. guaranteed annuitization rate - GAR) definirana že pred začetkom izplačevanja rente. Garancija minimalnih rent zavarovalnico izpostavi tveganju dolgoživosti.

- **Garancija minimalnega zneska dvigov v obdobju izplačevanja** (GMWB) omogoča periodične dvige z računa police, tudi v primeru, ko se vrednost police zmanjša na nič bodisi zaradi neuspešnih naložb bodisi zaradi dolgega življenja zavarovanca (slika 7). Garancija jamči periodično izplačilo in trajanje toka izplačil. Periodično izplačilo je določeno kot % β_t osnovne vrednosti W_t, ki je na začetku enaka vrednosti police, ko zavarovanec izbere garancijo (ker smo predpostavili, da zavarovanec vse garancije izbere v času 0, to pomeni, da je osnovna vrednost enaka višine enkratne premije P). Višino zneska dviga označimo z:

$$b_t^W = \beta_t W_t, \tag{10}$$

kjer je t iz množice določenih datumov dvigov. Na sliki je prikazano zajamčeno letno izplačilo iz garantiranega sklada, ki je enako 5 % začetne vrednosti sklada in se izplačuje za dobo 20 let (Bacinello, Millossovich, Olivieri & Pitacco, 2011, str. 5-9).

Slika 7: Garancija minimalnega zneska dvigov iz garantiranega sklada



Prirejeno po Olivieri & Pitacco (2011, str. 371).

- **Zajamčena zavarovalna vsota ob zapadlosti pogodbe** (GMMB) da zavarovancu pravico do vnaprej določene zavarovalne vsote ob zapadlosti pogodbe. Ta garancija daje zavarovancu zaščito proti padcu naložb portfelja. Preprost primer zajamčenega minimalnega vloženega kapitala je zajamčeno vračilo vplačane premije, če indeks pade po poteku zavarovanja (z omejitvijo izplačila navzgor v določenem deležu rasti indeksa, če ta zraste v obdobju trajanja zavarovalne pogodbe). Garancija je bodisi fiksna bodisi je predmet standardnega povišanja ali pa je odvisna od povišanja naložb portfelja.
- **Zajamčena odkupna vrednost** (GMSB) je variacija zajamčene zavarovalne vsote ob zapadlosti pogodbe (GMMB). V pogodbi ima zavarovanec ob odkupu po vnaprej določenem času zajamčeno denarno izplačilo. Najpogosteje je zajamčena vrednost fiksna in enaka garanciji vloženih premij (Hardy, 2003, str. 3 in 4).

1.2 Ponudba življenjskih zavarovanj z vključenimi garancijami in opcijami na domačem in tujem trgu

1.2.1 Zgodovina in razvoj inovativnih zavarovanj

Začetki razvoja inovativnih zavarovanj segajo v pozna šestdeseta leta 20. stoletja, ko so naložbena zavarovanja v Združenem kraljestvu postajala vedno bolj priljubljen produkt. Ta so tipično združevala garantirano minimalno izplačilo v primeru smrti ali doživetja z naložbo v vzajemne sklade. Popularna so bila vse do poznih sedemdesetih in so se razširila po svetu, v Avstralijo in Južnoafriško republiko, kjer so imele angleške zavarovalnice močan vpliv. V Združenih državah Amerike so se pojavile variabilne rente in rentna zavarovanja, kjer je naložbeno premoženje vezano na indeks (npr. S&P500). Ponujala so različne garancije vezane na naložbeno premoženje. V Kanadi so v devetdesetih postale popularne *pogodbe ločenih skladov* (angl. segregated funds contract), ki so vključevale kompleksne garantirane vrednosti ob smrti ali doživetju. V Nemčiji so se pojavila mešana zavarovanja, vezana na donose naložb, ki so vključevala različne garancije. Do današnjega časa so se razširila po celem svetu in imajo precejšen delež znotraj življenjskih zavarovanj, na primer v Nemčiji inovativna zavarovanja predstavljajo približno tretjino novega posla. Inovativna zavarovanja so poznana tudi pod imenom *ločen zavarovalni račun* (angl. separate account insurance), ki združuje pogodbe variabilnih rent, ločenih skladov, hibridnih produktov in naložbenih zavarovanj (Hardy, 2003, str. 1-2; Kochanski, 2010, str. 36).

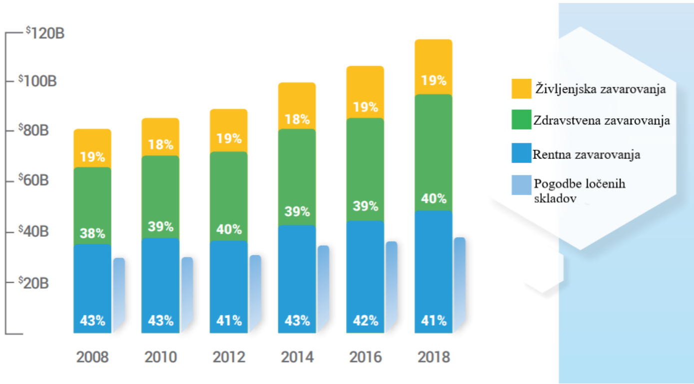
1.2.2 Tujina

Kanada - Pogodbe ločenih skladov

Pogodbe ločenih skladov v Kanadi predstavljajo najpopularnejšo alternativo naložbenim zavarovanjem. Kot je prikazano na sliki 8, je plačana premija v letu 2019 znašala 117 miljard CAD (kanadskih dolajev), od tega 48 miljard CAD prinašajo rentna zavarovanja, od česar je približno 39 miljard CAD (33 % vplačane premije) iz pogodb ločenih skladov (stolpec poleg rentnih zavarovanj) (CLHIA, 2019, str. 9).

Pogodba ločenih skladov je polica z enkratnim vplačilom premije, pri čemer zavarovalnica večino investira v enega ali več vzajemnih skladov, ki jih izbere zavarovanec sam. Upravljavska provizija se obračunava mesečno, vse pogodbe pa vključujejo garanciji GMMB in GMDB, v višini vsaj 75 % premije, navadno pa kar 100 % premije. Nekatere pogodbe vključujejo tudi povišano garancijo GMDB, ki omogoča višje izplačilo, kot je bila originalna vplačana premija. Pogosto je v pogodbe vključena GMAB garancija, ki ob zapadlosti pogodbe jamči izplačilo v 100 ali 75 % vplačane premije. Višina administrativnih stroškov je odvisna od izbire skladov, ki jim pravimo tudi *razmerje upravljavskih stroškov* (angl. management expense ratio, v nadaljevanju MER). Izraz "ločeni skladi" izhaja iz dejstva, da je premija, po obračunanih stroških, investirana v sklad, ki je ločen od ostalih sredstev zavarovalnice. Upravljanje naložb ločenih skladov je ponavadi neodvisno od zavarovalnice. Zavarovanec lahko delno ali v celoti iz ločenih skladov dvigne naloženo premoženje, pri zgodnjih dvigih pa zavarovalnica lahko zaračuna stroške prezgodnjega dviga (Hardy, 2003, str. 6).

Slika 8: Pogodbe ločenih skladov



Prirejeno po CLHIA (2019, str. 9).

ZDA - Variabilne rente

Variabilno rentno zavarovanje je zelo podobno kanadskim pogodbam ločenih skladov. V ZDA imajo variabilne rente velik delež med življenjskimi zavarovanji; v 2019 je bilo vplačane premije 101,9 miljard USD od skupne premije vplačane v življenjska zavarovanja v višini 759,34 miljard (13 % celotne vplačane premije). Vplačane premije v rentna zavarovanja v letu 2019 je bilo 365,54 miljard USD, z rastjo 3 % v primerjavi z letom 2018. Prodaja variabilnih rentnih zavarovanj je v primerjavi z letom 2018 zrasla za 2% (RIJ Publishing LLC, 2020; Rudden, 2020).

Neto premija se, po obračunanih stroških, investira v *podračune* (angl. subaccounts), ki so podobni vzajemnim skladom, ki jih ponujajo pogodbe ločenih skladov. Standardna lastnost variabilnih rent je GMDB, sedaj vedno bolj pogosta pa je tudi vključitev garancije GMMB. Te so poznane kot variabilne rente z zajamčenimi izplačili v primeru doživetja (angl. variable-annuity guaranteed living benefits - VAGLBs). Garancija zavarovalne vsote ob smrti se lahko periodično povečuje (Hardy, 2003, str. 6).

ZDA - Rentna zavarovanja, vezana na indeks

Rentna zavarovanja, vezana na indeks (angl. equity-indexed annuity, v nadaljevanju EIA) omogočajo udeležbo v uspešnosti indeksa v določeni stopnji. Stopnja 80 % pomeni, da ko cena indeksa na trgu zraste za 10 %, se zavarovančevo premoženje obrestuje z 8 %. Pogodba jamči garantirano minimalno izplačilo vplačane premije, ki se je obrestovala s fiksno obrestno stopnjo, navadno 3 %. Standardna lastnost teh pogodb je tudi fiksna odkupna vrednost, ki ni vezana na uspešnost indeksa. Ostale lastnosti se med zavarovalnicami močno razlikujejo. V pogodbo je na primer lahko vključena GMAB garancija, kjer je vrednost garancije določena z letnim resetiranjem glede na stopnjo udeležbe. Zavarovalnica lahko sama predpiše svoje razmerje upravljalskih stroškov, stopnjo udeležbe v indeksu in najnižjo spodnjo vrednost (Hardy, 2003, str. 6).

Vplačana premija v letu 2019 v rentna zavarovanja vezana na indeks je znašala 86,5 miljard USD. Od tega je bilo 17,3 miljard premije vplačane v strukturirane variabilne rente ali registirane rente, vezane na indeks (angl. structured variable annuity ali registered index-linked annuities) in 73,2 miljard premije vplačane v rente s fiksnim indeksom (angl. fixed indexed annuity, v nadaljevanju FIA). Strukturirana variabilna renta je mešanica variabilne rente in rente s fiksnim indeksom; v obdobju rasti omogoča višji izkupiček kot FIA, v obdobju recesije pa ne omogoča take zaščite pred izgubo kapitala kot FIA (omogoča zaščito v višini 10%, 20 % ali 30% višine izgube, kar pa je več kot pri variabilnih rentah, ki ne omogočajo zaščite pred izgubo). V primerjavi z letom 2018 se je prodaja strukturiranih variabilnih rent povišala za 39,3 %, medtem ko se je prodaja rent s fiksnim indeksom znižala za 10,6 % (RIJ Publishing LLC, 2020; Rudden, 2020).

Evropa

V Evropi variabilne rente niso doživele svojega razcveta, njihov tržni delež ostaja nizek (OECD, 2016, str. 24). Namesto tega je bilo za evropski trg značilno, da so zavarovalnice v veliki meri vključevale garancije v svoje tradicionalne življenjske produkte (Žnidarčič, 2016, str. 57). Sedaj pa je na trgu prisotna težnja po "kapitalsko-lahkih produktih", zato so marsikatere zavarovalnice prenehale s prodajo tradicionalnih varčevalnih produktov z garancijami ali pa so jo znatno omejile. Glavni razlog je direktiva Solventnost II, ki spodbuja trženje kapitalsko-lahkih produktov. Poleg tega v sedanjem obdobju nizkih obrestnih mer garancije, obljubljene zavarovancem, omejujejo trenutni in prihodnji dobiček zavarovalnic. Prisoten je namreč trend padanja maksimalne zajamčene obrestne mere, ki je v letu 2000 v Evropi dosegala 3 %, nato pa je v letu 2003 padla na 2,75 %, v 2015 pa na 1,75 %. Tudi v Sloveniji je trenutna z zakonom predpisana višina maksimalne zajamčene obrestne mere enaka 1,75 % (Zakon o zavarovalništvu (ZZavar-1), Ur. l. RS, št. 95/14). Tako je bilo tudi v Nemčiji, kasneje v letu 2017 pa so jo še dodatno znižali na 0,9 %. Z namenom zavarovanja pred nizkimi obrestnimi merami so zavarovalnice po zakonodaji morale vzpostaviti še dodatne rezervacije za tveganje obrestne mere (nem. Zinszusatzreserve - ZZR). Kumulativna višina rezervacij je v Nemčiji ob koncu 2016 je znašala 44,1 miljard EUR (Žnidarčič, 2016, str. 57; BaFin, 2017).

Povečuje se povpraševanje po biometričnih produktih (npr. zavarovanje za invalidnost v Nemčiji), ki potrebujejo manj kapitala za tveganja, njihov dobiček pa je v veliki meri neodvisen od ekonomskega okolja. Stranke so prehod k varčevalnim produktom brez garancij in v vseživljenjska zavarovanja, vezana na izbrane naložbe v večini dobro sprejele, obstajajo pa razlike med evropskimi trgi. V prestrukturiranju trga so najučinkovitejše nordijske države (delež prodaje v dobičku vseživljenjskih zavarovanj, vezanih na izbrane naložbe, se je povišala na 35 % v letu 2016 v primerjavi s 21 % v 2012, rezervacije za življenjske produkte pa so se znižale z 18 % na 12 %), najpočasneje pa spremembe sprejema nemški trg. Dober učinek prehoda h kapitalsko-lahkim produktom se bo v strukturi zavarovalno-tehničnih rezervacij pokazal z znatnim zamikom (S&P Global Ratings, 2018, str. 5).

Združeno kraljestvo - Vseživljensko zavarovanje, vezano na izbrane naložbe

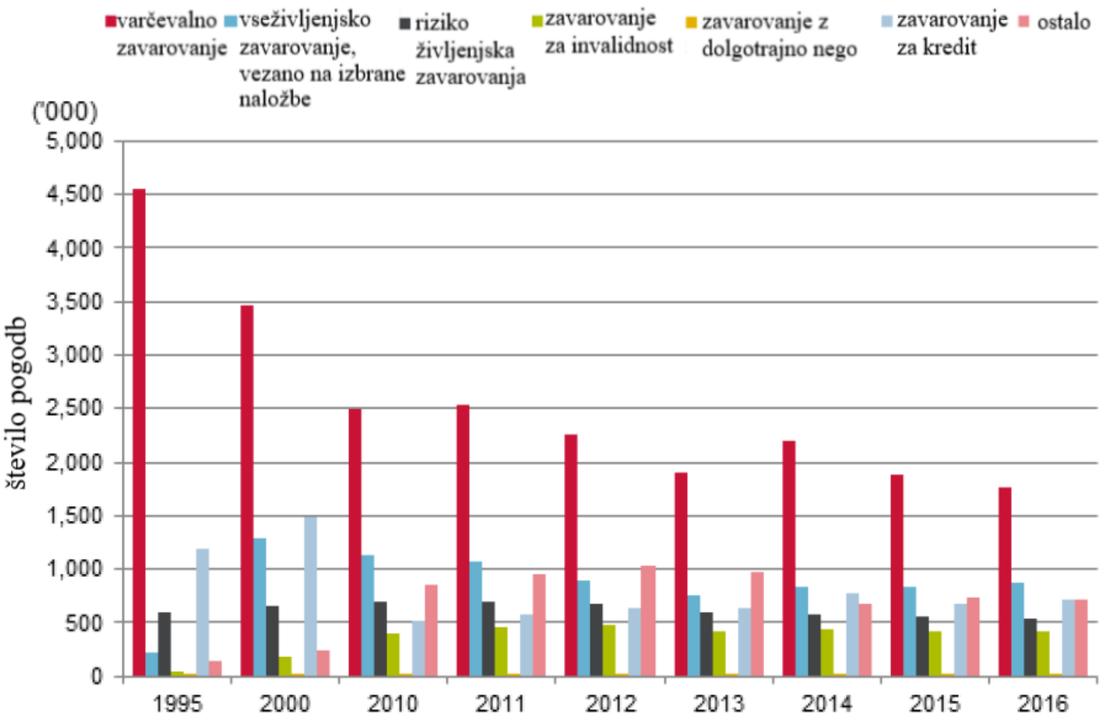
Vseživljenska zavarovanja, vezana na izbrane naložbe (angl. unit-linked) so podobna pogodbam ločenih skladov, kjer je premija po obračunanih stroških investirana v ločen sklad. V šestdestih in sedemdesetih letih prejšnjega stoletja so te pogodbe vključevale GMMB garancijo v višini 100 % premije. Zaradi negativnih učinkov, ki so delno izhajali iz kapitalske krize v letih 1973-1974, je bila GMMB garancija ukinjena, zato so pogodbe vključevale le GMDB garancijo. Nekatere pogodbe so nudile tudi zajamčeno rentno opcijo, kjer se lahko izplačilo sklada ob zapadlosti pogodbe pretvori v rentno zavarovanje z zajamčeno rentno stopnjo (GAO opcija) (Hardy, 2003, str. 6).

V zadnjem času pa smo priča prodaji vseživljenjskih zavarovanj, vezanih na izbrane naložbe, ki ne vključujejo garancij. S tem so si zavarovalnice znižale tveganje neusklajenosti sredstev in obveznosti (angl. Asset-liability management - ALM) in si izboljšale svoj solventnostni položaj. Tako je kosmata obračunana premija življenjskih zavarovanj v Združenem kraljestvu v letu 2019 znašala 229,9 miljard EUR, kjer imajo vseživljenska zavarovanja, vezana na izbrane naložbe najvišji delež - predstavljajo 60% vplačane premije (OECD, 2016; Statista Research Department, 2020).

Nemčija - Kapitalsko življenjsko zavarovanje
Kapitalsko življenjsko zavarovanje (nem. *Kapitallebensversicherung*) je podobno rentnemu zavarovanju, vezanem na indeks (EIA), z zajamčeno minimalno obrestno mero aplicirano na premije, poleg tega pa v določenem deležu nudi udeležbo na indeksu. Zaradi regulatornih omejitev so pogodbe z letno premijo standardne (Hardy, 2003, str. 6).

Tudi v Nemčiji zaznamo prehod h kapitalsko-lahkim produktom. Vendar večina zavarovalno-tehničnih rezervacij še vedno pripada tradicionalnim varčevalnim produktom z garancijami (slika 9). Vseživljenjska zavarovanja, vezana na izbrane naložbe, predstavljajo le 8 % celotnih zavarovalno-tehničnih rezervacij.

Slika 9: Struktura življenjskih zavarovanj v novem poslu na nemškem zavarovalnem trgu



Prirejeno po S&P Global Ratings (2018, str. 8).

1.2.3 Slovenija

Slovenski trg se po strukturi in oblikovanju novih produktov zgleduje po nemškem trgu. V slovenskem zavarovalniškem biltenu 2020 najdemo podatek, da je bilo kosmate obračunane premije v življenjska zavarovanja skoraj 754 milijonov EUR, od česar tradicionalna življenjska zavarovanja prestavljajo približno 31 %, visok delež imajo zavarovanja z naložbenim tveganjem (33 %), 25 % premije pa je namenjene za pokojninske sklade in rente. Tudi tu je moč zaznati željo po prestrukturiranju trga s povečanjem deleža zavarovanj z naložbenim tveganjem in nižanju garancij v klasičnih življenjskih zavarovanjih. Garancije so sicer še vedno prisotne tako v tradicionalnih zavarovanjih kot tudi v rentnih in pokojninskih zavarovanjih (Slovensko zavarovalno združenje, 2020). Zavarovalnica Triglav je v poročilu o solventnosti in finančnem položaju 2019 prikazala, da so zavarovalno-tehnične rezervacije za pogodbe z opcijami in jamstvi znašale skoraj 600 milijonov EUR, kar je 38 % višine celotnih zavarovalno-tehničnih rezervacij za življenjska zavarovanja, ki so znašale 1.550 milijonov EUR. Največ zavarovalno-tehničnih rezervacij je bilo oblikovanih za zavarovanja z udeležbo v dobičku (925 milijonov EUR) (Zavarovalnica Triglav, 2019, priloga 4: S.12.01.02). S tem vidimo, da so opcije in jamstva v življenjskih zavarovanjih v Sloveniji še vedno zelo pogosta, tveganja, ki jih prinašajo pa vse prej kot zanemarljiva.

2 MODELIRANJE OBVEZNOSTI IZ NASLOVA GARANCIJ IN OPCIJ

2.1 Modeliranje kapitalskih zahtev za produkte z garancijami po Solventnosti II

Direktiva Solventnost II je stopila v veljavo s 1. januarjem 2016 in je bila v slovensko zakonodajo vključena z ZZavar-1. Slediti ji morajo vse zavarovalnice in pozavarovalnice (izvzete so le pokojninske družbe), katerih bruto premijski dohodek presega 5 milijonov evrov ali bruto zavarovalno-tehnične rezervacije presegajo 25 milijonov evrov. Ključni cilj direktive je bil povečati usklajenost solventnostne ureditve zavarovalnic širom Evrope, z namenom zaščite zavarovancev in vzpostavitve kapitalskih zahtev. Te so, v primerjavi z minimalnimi zahtevami Solventnosti I, bolj občutljive na tveganja, ki jim je zavarovalnica izpostavljena in zagotavljajo ustrezne spodbude za dobro upravljanje s tveganji (Institute and Faculty of Actuaries, 2016).

Solventnost II v zavarovalništvo uvaja nov koncept vrednotenja in sicer **tržno vrednotenje** (angl. market consistent valuation) zavarovalnih obveznosti (Slapar, 2011, str. 26). Zavarovalno-tehnične rezervacije morajo biti segmentirane glede na zavarovalne vrste oziroma na homogene skupine tveganj (EIOPA, 2010, str. 20). Pri tem morajo zavarovalnice v skladu z direktivo evropskega parlamenta in sveta (2009/138/ES, člen 79) upoštevati vrednost finančnih garancij in kakršnih koli pogodbenih možnosti, vključenih v zavarovalne in pozavarovalne police. "Vrednost zavarovalnih obveznosti mora biti enaka znesku, za katerega bi si med seboj dobro obveščeni stranki s pravico razpolaganja v strogo poslovnem odnosu lahko prenesli pogodbe ali se poravnali. Princip tržnega vrednotenja zavarovalnih obveznosti pomeni, da se na osnovi realnih predpostavk in informacij, ki jih zagotavljajo finančni trgi, generirajo bodoči denarni tokovi, ki so osnova za določitev višine obveznosti. Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij je enaka vsoti najboljše ocene in dodatka za tveganje. Najboljša ocena je enaka uteženemu povprečju bodočih denarnih tokov ob upoštevanju časovne vrednosti denarja z uporabo ustrezne časovne strukture netvegane obrestne mere.[3] Denarni tokovi morajo odražati trenutne informacije s finančnih trgov in predpostavke o zavarovalnem portfelju in poslovanju zavarovalnice. Upoštevati morajo trenutno znane spremembe zakonodaje oziroma vse trenutno znane informacije, ki imajo lahko vpliv na višino zavarovalnih obveznosti. Verjetnosti denarnih tokov so kalibrirane na osnovi cen tržnih finančnih instrumentov, kadar so ti na razpolago." (Slapar, 2011, str. 26 in 27)

"Dodatek za tveganje je takšen, da zagotavlja, da je vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enakovredna znesku, ki bi ga zavarovalnice potrebovale za prevzem in izpolnitev zavarovalnih obveznosti. V kolikor je mogoče prihodnje denarne tokove povezane z zavarovalnimi obveznostmi zanesljivo nadomestiti z uporabo finančnih instrumentov,

[3] Netvegano obrestno mero (angl. RFR, risk-free interest rate), ki jo zavarovalnice uporabljajo za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij objavlja EIOPA na mesečni ravni.

katerih zanesljiva tržna vrednost je znana, se vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij, povezanih s temi prihodnjimi denarnimi tokovi, določi na podlagi tržne vrednosti teh finančnih instrumentov. V tem primeru niso potrebni ločeni izračuni najboljše ocene in dodatka za tveganje.

Dodatek za tveganje se izračuna z določitvijo stroškov zagotavljanja zneska primernih lastnih sredstev zavarovalnice, enakovrednega zahtevanemu solventnostnemu kapitalu, ki je potreben za podporo zavarovalnih obveznosti v času njihove veljavnosti. Pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij je potrebno upoštevati:

1. vse stroške zavarovalnice zaradi administriranja zavarovalnih polic,
2. inflacijo, vključno z inflacijo stroškov in škod,
3. vsa plačila imetnikom polic in upravičencem, vključno z bodočimi diskrecijskimi bonusi, ki jih bodo predvidoma odobrile zavarovalnice, tudi če ta plačila niso pogodbeno zajamčena. V tem primeru je potrebno zajeti tudi poslovne odločitve v zvezi z bodočimi diskrecijskimi bonusi.
4. vrednost finančnih garancij in kakršnih koli pogodbenih možnosti, vključenih v zavarovalne police." (Slapar, 2011, str. 27)

V direktivi Solventnosti II in tudi v delegirani uredbi ne najdemo navodil za vrednotenje zavarovalno-tehničnih rezervacij za produkte z vključenimi garancijami ali pogodbenimi možnostmi. Več smernic se nahaja v dokumentih EIOPE in sicer v peti študiji kvantitativnega učinka in v smernicah o vrednotenju zavarovalno-tehničnih rezervacij (EIOPA, 2015, str. 13).[4] Poleg definicije vgrajenih garancij in pogodbenih možnosti najdemo navodila o različnih metodologijah izračuna najboljše ocene. Zavarovalnice lahko po svoji presoji za vrednotenje vgrajenih garancij in opcij uporabijo kateregakoli od naslednjih pristopov (EIOPA, 2010, str. 36; Finkelstein in drugi, 2003, str. 7 in 8; Dežman, 2019, str. 26 in 27; CEIOPS, 2009, str. 25-29; Cafnik, 2013, str. 12):

- **Analitični pristop.** Če zavarovalnica uporabi analitični pristop, mora najti analitično rešitev (ali sklenjeno formulo, angl. closed-form solution) za izračun najboljše ocene. Primer analitične metode je tržno vrednotenje z repliciranjem portfelja, kjer vrednost garancije aproksimiramo s stroški popolnega ščitenja finančnih garancij in opcij s finančnimi instrumenti. Za vrednotenje garancij in opcij, se lahko uporabi tudi predpostavka, da prihodnje škode sledijo določeni verjetnostni porazdelitvi. Garancije, vgrajene v zavarovalne produkte, so velikokrat preveč kompleksne, da bi bilo moč najti analitično rešitev. Zato se zavarovalnice velikokrat poslužujejo simulacij ali približkov za analitično rešitev.
- **Deterministični pristop.** Pri deterministični metodi projekcija denarnih tokov temelji na izbranih determinističnih scenarijih s privzetimi verjetnostmi. Generirati je potrebno

[4] Kratica EIOPA označuje Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. European Insurance and Occupational Pensions Authority, v nadaljevanju EIOPA). To je finančna regulativna institucija, ki je nadomestila Odbor evropskih nadzornikov za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, v nadaljevanju CEIOPS).

dovolj velik nabor različnih scenarijev s privzetimi verjetnostmi pojava tveganj, ki jim je zavarovanica izpostavljena po določeni pogodbeni opciji. Verjetnosti pojava morajo biti utežene glede na neugodne scenarije, da se odrazijo tržne cene tveganj. Niz determinističnih projekcij mora biti dovolj velik, da zavzame množico verjetnih izidov, kjer je za vsako projekcijo potrebno upoštevati verjetnost, da se ta scenarij zgodi. Če obravnavamo le relativno dobre ali ekonomsko omejene scenarije, so obveznosti zavarovalnice iz naslova finančnih garancij in opcij podcenjene. Primera determinističnega pristopa so stresni testi in testi realizacije posameznih scenarijev, ter aktuarske metode, kot je metoda veriženja.[5] Deterministični testi so lahko izvedljivi, a nam ne dajejo dovolj nujno potrebnih kvalitativnih in kvantitativnih informacij.
- **Simulacijski pristop.** Z uporabo stohastičnega modela zavarovalnica generira verjetne scenarije v prihodnosti. Uporabi se generator ekonomskih scenarijev, ki je kalibriran z informacijami s finančnih trgov. Za projekcije vrednosti sredstev in donosov se uporablja tržno konsistenten model (angl. market consistent asset model) skupaj z dinamičnim modelom, ki mora vključevati pripadajoče verjetnosti obveznosti in vpliv vseh predvidljivih ekonomskih spremenljivk v prihodnosti. Ideja je, da s pomočjo simulacij denarnih tokov najdemo ustrezni finančni instrument, ki bi repliciral vgrajeno garancijo ali opcijo. Denarne tokove se projicira glede na več tisoč scenarijev, kjer se za vsak scenarij izračuna diskontirana sedanja vrednost. Povprečje scenarijev nam da dober približek poštene vrednosti vgrajene opcije ali garancije.

Zavarovalnice morajo ob tem zagotoviti, da vrednotenje pogodbenih opcij in finančnih jamstev temelji na ustreznih, veljavnih in relevantnih aktuarskih in statističnih metodologijah, ki upoštevajo razvoj na tem področju.

Ne glede na pomembnost inovativnih produktov, se direktiva Solventnost II osredotoča predvsem na problematiko klasičnih zavarovanj. V poročilu o študiji kvantitativnega učinka QIS5 je navedeno, da večina zavarovalnic ne izračunava solventnostnih kapitalskih zahtev za inovativne produkte tako sistematično, kot za tradicionalna zavarovanja (Kochanski & Karnarski, 2011, str. 2). Vrednotenje opcij in garancij se je izkazalo za težavno, delno zaradi omejenega dostopa do podatkov ali potrebne programske opreme. Nadzorniki so izpostavili še, da je pri vrednotenju zavarovanj z vključenimi opcijami in garancijami prisoten tudi problem izbire predpostavk, od katerih je odvisna najboljša ocena. Inovativni produkti se v osnovi zelo razlikujejo od tradicionalnih življenjskih zavarovanj in zato je tveganja, ki jih prinašajo, potrebno podrobneje raziskati. Ugotoviti je potrebno tudi, kako najbolje vrednotiti inovativne produkte v skladu z regulativnimi spremembami v Evropi (Solventost II). Tako za zavarovalnice kot za zavarovance je vrednost inovativnega produkta precej nestanovitna, saj se kapital investira v tvegana sredstva, v primerjavi z naložbenimi strategijami klasičnih življenjskih produktov s fiksnimi izplačili. V inovativne produkte so vgrajene garancije in opcije, ki morajo biti ustrezno vrednotene. Prav tako ti produkti povzročajo dinamično obnašanje zavarovancev. Zaradi navedenih lastnosti imajo lahko

[5] Metoda veriženja se redko uporablja za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij za življenjska zavarovanja, pogosto pa pri premoženjskih in zdravstvenih zavarovanjih.

inovativni produkti nepričakovan vpliv na višino zavarovalno-tehničnih rezervacij (EIOPA, 2011, str. 57 in 58; Kochanski, 2010, str. 36 in 37).

2.1.1 Zahtevani solventnostni kapital

Zahtevani solventnosti kapital (angl. Solvency capital requirement, v nadaljevanju SCR) omogoča, da je zavarovalnica ob neugodnih finančnih razmerah na trgu solventna. Stopnja SCR mora biti tolikšna, da je zavarovalnica sposobna poravnati svoje obveznosti do zavarovancev v naslednjih 12 mesecih z 99,5 % verjetnostjo. To pomeni, da zavarovalnica v povprečju propade enkrat v 200-tih letih.

Za tveganje X je zahtevani solventnostni kapital $SCR_\alpha(X)$ definiran kot:

$$SCR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}[X], \tag{11}$$

pri čemer je α enaka 0,995.

Naslednje transformacije nas pripeljejo do matematične definicije SCR:

$$\begin{aligned} SCR_\alpha(X) &= VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}[X] \\ &= VaR_\alpha(X - \mathbb{E}[X]) \\ &= \underset{x}{\text{argmin}}\{P[X - \mathbb{E}[X] \le x]\} \ge \alpha \\ &= \underset{x}{\text{argmin}}\{1 - P[X - \mathbb{E}[X] > x]\} \ge \alpha \\ &= \underset{x}{\text{argmin}}\{P[X - \mathbb{E}[X] > x]\} \le 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{12}$$

Predpostavimo, da je obdobje dvestoletne krize zoženo na čas enega leta. Kapital, ki ga ima zavarovalnica v času t, označimo z AC_t. Potem je $\mathbb{E}[X] = -AC_0$ negativen kapital, ki ga ima zavarovalnica na voljo ob času $t = 0$ in $X = \frac{AC_1}{(1+i)}$ diskontiran kapital na čas $t = 0$. Zahtevani solventnostni kapital zato lahko izrazimo kot:

$$SCR_\alpha(X) = \underset{x}{\text{argmin}}\left\{P\left[AC_0 - \frac{AC_1}{(1+i)} > x\right] \le 1 - \alpha\right\}, \tag{13}$$

kjer je $\alpha = 0{,}995$ in je netvegana obrestna mera enaka i (Kochanski, 2010, str. 37-39).

2.1.2 Standardna formula

Čeprav formula (13) popolnoma definira višino SCR, jo zavarovalnica težko uporabi v praksi. Razlog je ta, da je težko opisati celotno poslovanje zavarovalnice s stohastičnim modelom, poleg tega potrebujemo tudi več vgnezdenih modelov. Zato je CEIOPS razvil poenostavljeno standardno formulo. Ključna poenostavitev je ta, da definiramo deterministične stresne scenarije. Poleg tega predpostavimo, da je SCR sorazmeren standardnemu odklonu. Naj $X = -\Pi$ označuje naključno spremenljivko izgube ali negativno sedanjo vrednost prihodnjih dobičkov (angl. Present Value of Future Profits, v nadaljevanju PVFP) Π. Potem lahko SCR poenostavimo na:

$$\begin{aligned} SCR_\alpha &= VaR_\alpha(-\Pi) - \mathbb{E}[-\Pi] \\ &= (Obveznosti - Sredstva)|_{stres} - (Obveznosti - Sredstva) \\ &= (Sredstva - Obveznosti) - (Sredstva|_{stres} - Obveznosti|_{stres}). \end{aligned} \tag{14}$$

Vidimo, da je SCR definiran kot razlika med najboljšo oceno neto sredstev (PVFP) in neto šokiranih sredstev. V formuli 14 stres označuje stresne scenarije, ki so formulirani za različne module tveganj (obrestne mere, tveganje lastniškega kapitala, smrtnost, prekinitve in stroški) in so agregirani s korelacijsko matriko. Če je celoten izraz v enačbi (14) negativen, to pomeni, da določen stresni scenarij ne predstavlja tveganja za zavarovalnico in za ta namen ne potrebuje oblikovati kapitalskih zahtev. Naj X_i označuje spremenljivko izgube, če je zavarovalnica izpostavljena tveganju i, definiranem v modulu tveganj in naj bo $SCR(X_i)$ izračunan zahtevani solventnostni kapital za to tveganje.

Potem je agregirani zahtevani solventnostni kapital $SCR(X)$, za agregirano slučajno spremenljivko izgube $X = \sum_i X_i$ definiran kot:[6]

$$\begin{aligned} SCR_\alpha(X) &= VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}[X] \\ &= VaR_\alpha\Big(\sum_i X_i\Big) - \mathbb{E}[X] \\ &\approx \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}(VaR_\alpha(X_i) - \mathbb{E}[X_i])(VaR_\alpha(X_j) - \mathbb{E}[X_j])} + \mathbb{E}\Big[\sum_i X_i\Big] - \mathbb{E}\Big[X\Big] \\ &= \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_\alpha(X_i) SCR_\alpha(X_j)}. \end{aligned} \tag{15}$$

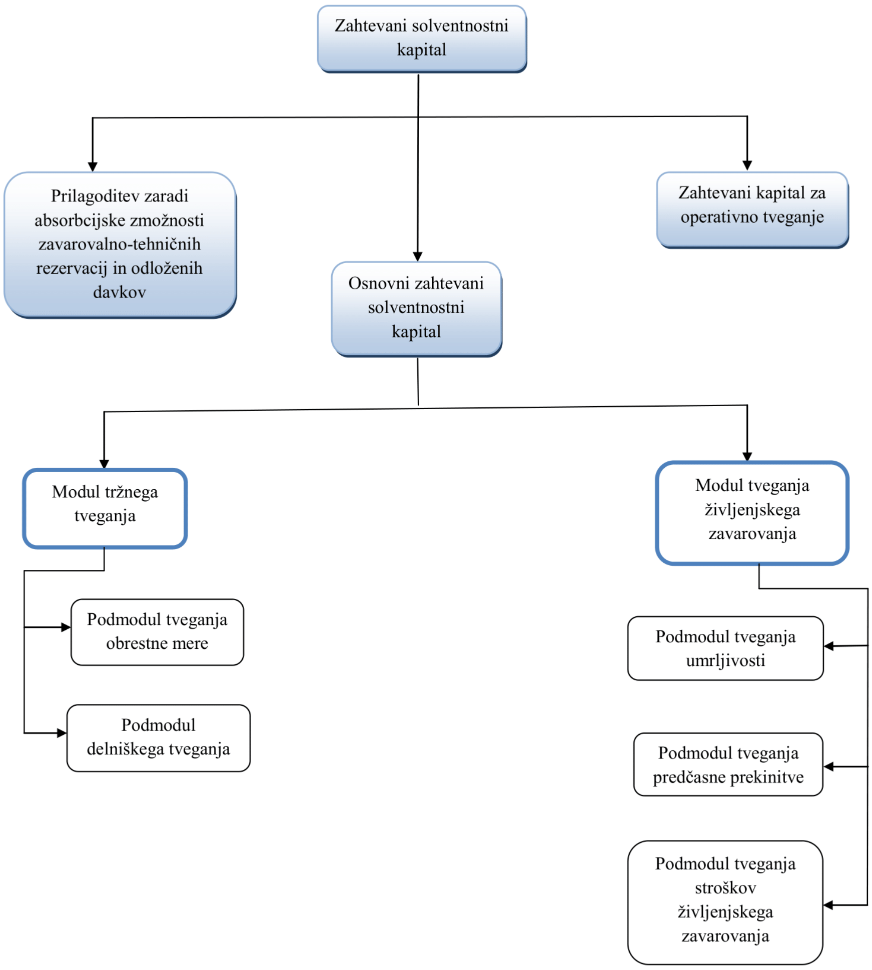
Vidimo, da je zahtevani solventnostni kapital aproksimacija, saj so korelacijski faktorji predpisani v delegirani uredbi. Ob zgoraj navedeni predpostavki, da je SCR sorazmeren standardnemu odklonu, nam enačba da pravi zahtevani solventnostni kapital.

Slika 10 prikazuje modularen pogled na standardno formulo. Navedena so le tveganja za naložbene življenjske produkte (v posebnem tudi za inovativne produkte).[7]

[6] Tu so X_i izpostavljenosti določenih skupin produktov do tveganja i.

[7] Drevo v SII vsebuje še druga tveganja, za druge vrste poslovanja, tu navajamo le tveganja za naložbene življenjske produkte.

Slika 10: Moduli tveganj za SCR



Prirejeno po Kochanski (2010, str. 40).

Nadalje lahko, z upoštevanjem, da je življenjska zavarovalnica izpostavljena zgornjim tveganjem, formulo za SCR razpišemo tako:

$$\begin{aligned}
SCR &= \sqrt{SCR_{mkt}^2 + 2 \cdot \rho_{mkt,life} \cdot SCR_{mkt} SCR_{life} + SCR_{life}^2} \\
SCR_{mkt} &= \sqrt{SCR_{int}^2 + 2 \cdot \rho_{int,eq} \cdot SCR_{int} SCR_{eq} + SCR_{eq}^2} \\
SCR_{life} &= \sqrt{SCR_{mort}^2 + SCR_{lapse}^2 + SCR_{exp}^2 + 2 \cdot \rho_{mort,lapse} \cdot SCR_{mort} SCR_{lapse}} \\
&\overline{\quad + 2 \cdot \rho_{mort,exp} \cdot SCR_{mort} SCR_{exp} + 2 \cdot \rho_{lapse,exp} \cdot SCR_{lapse} SCR_{exp}.} \qquad (16)
\end{aligned}$$

Ustrezni korelacijski faktorji se nahajajo v spodnji tabeli:[8]

[8]Zaradi enostavnosti v korelacijski tabeli in formulah za zahtevani solventnostni kapital uporabljamo angleške okrajšave za podmodule tveganj.

Tabela 1: Korelacijske matrike iz delegirane uredbe.

CorrSCR=	SCRmkt	SCRlife
SCRmkt	1	0.25
SCRlife	0.25	1

CorrMkt=	SCRint	SCReq
SCRint	1	0
SCReq	0	1

CorrLife=	SCRmort	SCRlapse	SCRexp
SCRmort	1	0	0.25
SCRlapse	0	1	0.5
SCRexp	0.25	0.5	1

Vir: Kochanski (2010, str. 41).

Tako definiran SCR omogoča tržno vrednotenje vseh sredstev in obveznosti.

Naj $\Pi = Sredstva - Obveznosti$ označuje vrednost zavarovalne police. Potem je SCR za posebne module tveganj določen kot:

$$\begin{aligned}
SCR_{int-up} &= \Pi - \Pi|_{up-shock} \\
SCR_{int-down} &= \Pi - \Pi|_{down-shock} \\
SCR_{int} &= \max\{SCR_{int-up};\ SCR_{int-down}; 0\} \\
SCR_{eq} &= \max\{\Pi - \Pi|_{eqshock}; 0\} \\
SCR_{mort} &= \max\{\Pi - \Pi|_{mortshock}; 0\} \\
SCR_{lapse-up} &= \Pi - \Pi|_{up-shock} \\
SCR_{lapse-down} &= \Pi - \Pi|_{down-shock} \\
SCR_{lapse-mass} &= \Pi - \Pi|_{mass-shock} \\
SCR_{lapse} &= \max\{SCR_{lapse-up};\ SCR_{lapse-down};\ SCR_{lapse-mass}; 0\} \\
SCR_{exp} &= \max\{\Pi - \Pi|_{expshock}; 0\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

SCR za operacijsko tveganje za naložbena zavarovanja se izračuna po fiksni formuli. Faktor tveganja (25 %) je podal CEIOPS in je pomnožen z najboljšo oceno letnih stroškov (brez stroškov pridobivanja zavarovanj) Exp_{ul} (Kochanski, 2010, str. 39-42).

$$SCR_{op} = 0{,}25 \cdot Exp_{ul}. \tag{18}$$

2.2 Modeliranje obveznosti za produkte z garancijami z aktuarskim pristopom

Za modeliranje obveznosti iz naslova garancij bomo potrebovali nekaj oznak. Naj dvojice ${}_tp_x^\tau, {}_tq_x^w$ in ${}_tq_x^d, {}_{u|t}q_x^d$ označujejo dekrementni verjetnosti preživetja in izstopa za osebo staro x, kjer w označuje odstop od pogodbe, d pa smrt. Pri tem τ označuje način, kako polica preživi, torej, da ni odstopa od pogodbe in zavarovanec ni umrl. Časovni spremenljivki u in t sta merjeni s časovnimi koraki, ki jih uporabimo v simulaciji – v vseh primerih vzamemo mesece kot časovni korak. Spremenljivke vezane na vrednost sklada in denarnih tokov so naslednje:

- G označuje stopnjo garancije na enoto premoženja, G_t uporabimo, če se ta spreminja s časom.
- F_t označuje tržno vrednost računa ločenega sklada, kjer v času t predpostavimo, da je polica še vedno aktivna. Predpostavimo, da se stroški upravljanja (MER) ob začetku meseca odštejejo iz vrednosti sklada. Ob koncu meseca se lahko sklad tudi poviša z zajamčenim izplačilom za akumulacijo. Ponekod je priročno, da razlikujemo sklad pred transakcijami ob koncu meseca in sklad, ki ga imamo takoj, ko so te transakcije izvršene. Tako z F_{t^-} označimo sklad ob koncu meseca v času t, ko transakcije še niso bile izvršene, F_{t^+} pa naj označuje sklad ob koncu meseca po izvršenih transakcijah. Če ne uporabimo - ali + znaka, privzamemo +.
- S_t označuje relativno vrednost naložbenega premoženja ob času t, kjer je S_0 zaradi priročnosti enaka 1, kar pomeni, da je S_t faktor akumulacije premoženja od časa 0 do t. S_t predstavlja temelj za izveden finančni instrument-garancijo, ki jo generiramo naključno iz primerne porazdelitve. Y_t je proces enak naravnemu logaritmu donosa, $S_t \exp\{Y_t + Y_{t+1} + \cdots + Y_{t+r-1}\} = S_{t+r}$.
- m označuje mesečno stopnjo provizije in dela, namenjenega financiranju garancije, ki se odšteje iz ločenega računa. Del, ki je namenjen za financiranje stroškov garancije, označimo z m_c. Imenujemo jo tudi marža za vgrajena pogodbena upravičenja in finančne garancije (angl. margin offset). Če pogodba vsebuje več različnih garancij, npr. garanciji GMMB in GMDB, potem je $m_c = m_m + m_d$, kjer je m_m namenjena za stroške financiranja garancije GMMB, m_d pa za GMDB.
- M_t predstavlja dohodek ob času t, ki izhaja iz provizije vgrajenih garancij, obračunanih zavarovancu.
- C_t označuje denarni tok obveznosti pogodbe v času t, zmanjšan za dohodek M_t in vključuje podatke o smrtih in odstopih od pogodb.
- L_0 je sedanja vrednost prihodnjih obveznosti, letno diskontirana s konstantno netvegano obrestno mero r.

Razmerje med spremenljivkami je opisano z naslednjimi enačbami, kjer privzamemo, da je marža za vgrajene finančne garancije in opcije zbrana mesečno vnaprej.

$$F_{t^-} = \frac{S_t}{S_{t-1}} F_{(t-1)^+}, \tag{19}$$

$$F_{t^+} = F_{t^-}(1-m) = F_{(t-1)}(1-m)\frac{S_t}{S_{t-1}}. \tag{20}$$

Ob predpostavki, da ni bilo dodatnih vplačil med časoma t in $t+u$, imamo:[9]

$$F_{(t+u)^+} = F_t \, \frac{S_{t+u}(1-m)^u}{S_t}. \tag{21}$$

Naj bo F_{0^-} vrednost ločenega sklada ob času vrednotenja (to je ob sklenitvi zavarovanja, ko je vrednost ločenega sklada enaka enkratni vloženi premiji). Potem je:

$$F_t = F_{0^-} \, \frac{S_t(1-m)^t}{S_0}. \tag{22}$$

Dohodek iz marže za vgrajene finančne garancije in opcije, namenjen njihovemu financiranju, je enak:

$$M_t = (F_{t^-}) \, m_c \overset{(22)}{=} m_c \, F_{0^-} \, \frac{S_t(1-m)^t}{S_0}. \tag{23}$$

2.2.1 Zajamčena zavarovalna vsota ob zapadlosti pogodbe, GMMB

Za enostavno polico, ki vključuje GMMB garancijo, bomo pokazali, kako generirati porazdelitev sedanje vrednosti obveznosti garancije. Polico ima zavarovanec, star x, preostalo trajanje zavarovanja v letih pa označimo z n. Predpostavimo mesečni diskretni časovni model za donos kapitala in stroškov upravljanja. Predpostavimo tudi, da se odstop in smrt lahko zgodita le ob koncu meseca. Izhodi iz pogodb so modelirani deterministično, tako da je edini naključni simuliran proces vrednosti referenčnega sklada.

Cilj je, da predstavimo osnovna načela, se pa modeliranja obveznosti lahko lotimo z različnimi pristopi in drugačno izbiro predpostavk. Ker je S_t delniški indeks in ker smo predpostavili, da je njegova vrednost v času $t = 0$ enaka 1, je S_t faktor akumulacije premoženja od časa 0 do časa t. Denarni tok v času t je enak:

$$C_t = -{}_t p_x^{\tau} M_t, \qquad t = 0{,}1, \cdots, n-1, \tag{24}$$

v času n oz. ob koncu zavarovalne pogodbe pa je enak spodnji enačbi. Tu upoštevamo, da je

[9] Ker vrednost naložbenega premoženja S_t v kateremkoli času opišemo z markovskim procesom (tj. da je verjetnost razvoja odvisna le od sedanjega stanja in ne od preteklosti procesa), je bodoča tržna vrednost ločenega sklada F_{t+u} odvisna le od sedanjega stanja ločenega sklada v času t. Ker po času t ni dodatnih vplačil in se zavarovancu iz ločenega sklada mesečno trga strošek m, se enačba iz (20) razpiše v (21). To pa lahko naredimo zaradi lastnosti Markova; proces gibanja vrednosti ločenega sklada je "brez spomina". Lastnost Markova lahko uporabimo, ker privzamemo, da so slučajne spremenjivke $S_1, S_2, \ldots$ neodvisne (Hardy, 2003, str. 30).

$(G - F_n)^+ = \max(0, G - F_n)$[10].

$$C_n = -{}_np_x^\tau (G - F_n)^+. \tag{25}$$

Sedanja vrednost prihodnjih obveznosti GMMB garancije, diskontirane z netvegano obrestno mero r je enaka:

$$L_0 = \sum_{t=0}^{n} C_t e^{-rt}. \tag{26}$$

C_t in L_0 je mogoče izračunati za poljubni delniški indeks in poljubno porazdelitev denarnih tokov v različnih letih. Za sedanjo vrednost prihodnjih obveznosti lahko simuliramo slučajno spremenljivko L_0 (Hardy, 2003, str. 99-102).

2.2.2 Zajamčena zavarovalna vsota v primeru smrti, GMDB

Če predpostavimo, da ni možnosti resetiranja (1. poglavje, enačba (5)) ali pa prenosa ugodnosti (angl. rollover benefit) [11], je izplačilo ob smrti višje od začetne naložbe in vrednosti sklada ob smrti. Za modeliranje izplačila ob smrti uporabimo deteministični pristop, kjer je verjetnost, da zavarovanec umre v intervalu $(0,\ t)$ enaka ${}_tq_x^d$. Podobno ${}_{t-1}|_1q_x^d$ označuje verjetnost, da zavarovanec umre med časoma $t-1$ in t. Denarni tok obveznosti ob času t je potem enak:

$$C_t = -{}_tp_x^\tau M_t^d \;+\; {}_{t-1}|_1q_x^d (G - F_t)^+, \qquad t = 0{,}1, \cdots, n. \tag{27}$$

Uporabimo enačbi za M_t in F_t (22 in 23), s predpostavko, da je $S_0 = 1$ in dobimo:

$$C_t = -{}_tp_x^\tau F_{0^-} S_t (1-m)^{t-1} m_d \;+\; {}_{t-1}|_1q_x^d (G - F_{0^-} S_t (1-m)^t)^+ \tag{28}$$

Tu je m_d marža za tveganje garancije zajamčene zavarovalne vsote v primeru smrti in M^d dohodek ob času t, ki izhaja iz provizije za GMDB, obračunane zavarovancu.

Primer izračuna obveznosti za zavarovalno pogodbo, ki vključuje GMMB in GMDB

Imamo zavarovalno pogodbo, ki vključuje GMMB in GMDB s fiksno stopnjo garancije, z naslednjimi lastnostmi:

- Naj bo $x = 50,\ F_{0^-} = 100,\ G = 100,\ m = 0{,}02/12$ na mesec in $m_c = 0{,}005/12$ na mesec.

[10] V enačbah (24) in (25) predstavlja τ način, na katerega lahko pogodba preživi, ki je v literaturi definiran tako, da zavarovanec ne umre in ne prekine pogodbe.

[11] Opcija prenosa (angl. rollover option) zavarovancu omogoča spremembo tipa pokojninskega načrta (npr. prenos sredstev s kolektivnega pokojninskega načrta na individualni pokojninski načrt), pri čemer je možno tudi dvigniti sredstva.

- Naj bo preostalo trajanje pogodbe 12 mesecev.
- Naj bodo verjetnosti preživetja in smrti podane z tablicami smrtnosti v prilogi 1.
- Naj bo delniški indeks S_t en sam naključno generiran scenarij, ustvarjen z uporabo RSLN modela.[12]

Primer je narejen na eni simulaciji, ker želimo pokazati potek izračuna, če pa bi želeli dobiti realistične informacije, bi bilo potrebno narediti vsaj 1000 simulacij razvoja delniškega indeksa. V tabeli 2 se nahaja izračun za en naključno generiran scenarij S_t.[13] Ker smo predpostavili, da se dohodek iz marže za tveganje garancij zbere mesečno vnaprej, v zadnjem mesecu tega dohodka ni. Izplačilo v primeru smrti je večje od 0 le v prvem in zadnjem mesecu, za preostale mesece je vrednost sklada višja od višine garancije. Ob koncu pogodbe je vrednost sklada malo nižja od vrednosti garancije, zato se izvrši GMMB.

Tabela 2: Izračun obveznosti za zavarovalno pogodbo z vključenima garancijama GMMB in GMDB.

Mesec t	Delniški indeks S_t simuliran	F_{t^-}	${}_tp_x^\tau$	${}_{t\vert 1}q_x^d$	Marža za tveganje garancij	Izplačila DB in MB	C_t
0	1.0000	100.00	1.0000	0.0003	0.042		−0.042
1	.9935	99.19	0.9931	0.0003	0.041	0.0002	−0.041
2	1.0227	101.93	0.9862	0.0003	0.042	0	−0.042
3	1.0399	103.48	0.9793	0.0003	0.042	0	−0.042
4	1.0761	106.90	0.9725	0.0003	0.043	0	−0.043
5	1.1095	110.03	0.9658	0.0003	0.044	0	−0.044
6	1.0800	106.93	0.9591	0.0003	0.043	0	−0.043
7	1.1195	110.65	0.9524	0.0003	0.044	0	−0.044
8	1.2239	120.77	0.9458	0.0003	0.048	0	−0.048
9	1.0894	107.32	0.9392	0.0003	0.042	0	−0.042
10	1.0865	106.86	0.9327	0.0003	0.042	0	−0.042
11	1.0573	103.81	0.9262	0.0003	0.040	0	−0.040
12	1.0150	99.49	0.9198	0.0003	0.000	0.471	0.471

Prirejeno po Hardy (2003, str. 102).

Ob privzeti netvegani obrestni meri v višini 6 % je sedanja vrednost L_0 prihodnjih obveznosti za ta scenarij enaka -0,145. Negativni predznak pomeni neto dohodek (Hardy, 2003, str. 102-103).

[12] Log-normalni model s preklopom režima ali RSLN model (angl. Regime-switching lognormal model) je en od najpreprostejših modelov s preklopom režima, kjer se proces naključno preklopi v vsakem koraku izmed K log-normalnimi procesi. Pri modelih s preklopom režima predpostavimo, da se diskreten proces naključno preklopi med K možnimi režimi. Gibanje vrednosti delniškega indeksa v kateremkoli času S_t opišemo s procesom Markova. Pristop ohranja preprostost, ki jo ima neodvisen log-normalen model, v posebnem se da vrednost analitično izraziti, poleg tega pa uspe bolj natančno povzeti obnašanje ob ekstremnih spremembah. To je ena najpreprostejših oblik, s katero povzamemo stohastično volatilnost, ta pa naključno prehaja med K vrednostmi, ki ustrezajo K režimom. Ideja za uporabo tega modela je, da se stanje trga lahko preklopi iz stabilnega okolja z nizko volatilnostjo v nestabilno okolje z visoko volatilnostjo (Hardy, 2003, str. 30).

[13] Privzet je ameriški decimalni zapis.

2.2.3 Garancija minimalne vrednosti naložb, GMAB

V garanciji minimalne vrednosti naložb je pogosto vključena možnost obnovitve pogodbe. To pomeni, da ima polica več datumov zapadlosti. Po obnovitvi pogodbe mora preteči minimalna doba (tipično 10 let) držanja police, preden zavarovanec lahko spet obnovi pogodbo. Pogoji obnovitve pogodbe so natančno določeni, prav tako je določeno tudi kolikokrat zavarovanec lahko pogodbo obnovi. Ko se izvrši obnovitev pogodbe, se zgodi naslednje: Če je garancija "in-the money" (tj. $G > F_T$, višina garancije je višja od vrednosti ločenega sklada), zavarovalnica zavarovancu izplača razliko. Potem je ob obnovitvi vrednost ločenega sklada enaka G (vrednosti garancije). Garancija obdrži enako vrednost, kot pred obnovitvijo. Če je garancija "out-of-the money" (tj. $G < F_T$, vrednost ločenega sklada je višja od vrednosti garancije), se garancija avtomatično resetira na višino vrednosti ločenega sklada ob času T. Torej se minimum F_T in G vedno poveča, da doseže maksimum med F_T in G, z izplačilom razlike, če je $G > F_T$. Temu pravimo tudi opcija prenosa, saj se oplemenitena sredstva prenesejo v naslednje obdobje. Višina stroškov, ki se obračunavajo zavarovancem ni garantirana, vendar se ti redko povišajo, zato predpostavimo, da sprememb ni. Nekateri zavarovanci se odločijo, da pogodbe ne bodo obnovili, kar označimo z dekrementno verjetnostjo q^w.

Predpostavimo, da je naslednja obnovitev mogoča v naslednjih n_1 mesecih, in da se naslednji datumi obnovitve zgodijo ob časih $n_2, \ldots, n_k$, če je pogodba ob teh časih še veljavna. Ker se višina ločenega sklada lahko poviša ob datumih obnovitve, razlikujemo med vrednostjo sklada preden se izplača razlika med vrednostjo garancije in ločenega sklada, $F_{n_r^-}$, in po izplačilu, $F_{n_r^+}$. Veljavna garancija ob začetku projiciranega obdobja je $G_0 = F_{n_0^+}$, tj. enaka vrednosti ločenega sklada ob zadnjem resetiranju pred projekcijo. Imamo:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \max\left(G_0, F_{n_1^-}\right) = G_0 \max\left(1; 1 + \frac{F_{n_1^-}}{F_{n_0^+}}\right)\\
G_2 &= \max\left(G_1, F_{n_2^-}\right) = G_0 \prod_{r=1}^{2} \max\left(1; 1 + \frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}}\right)\\
&\vdots\\
G_k &= \max\left(G_{k-1}, F_{n_k^-}\right) = G_0 \prod_{r=1}^{k} \max\left(1; 1 + \frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}}\right). \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Vrednost ločenega sklada med datumi obnovitve pa je odvisna od rasti indeksa, $S_{n_r}/S_{n_{r-1}}$, z odšteto upravljavsko provizijo, torej je:

$$
\frac{F_{n_r^-}}{F_{n_{r-1}^+}} = (1-m)^{n_r - n_{r-1}} \frac{S_{n_r}}{S_{n_{r-1}}}. \qquad (30)
$$

Tako lahko vsaka vrednost veljavne garancije sledi vsaki posamezni projekciji. Med časoma zapadlosti, npr. v mesecu t, kjer je $n_r < t < n_{r+1}$, je denarni tok obveznosti enak:

$$C_t = {}_{t-1}|_1 q_x^d (G_r - F_t)^+ - {}_t p_x^\tau M_t, \qquad n_r < t < n_{r+1} \tag{31}$$

Prihodek (v enačbi (31) predznačen z -) prihaja iz marže za tveganje garancije, obračunane zavarovancu, odhodek pa predstavlja izplačilo zavarovancu ob smrti, kjer je višina garancije ob času t enaka G_r.

Ob časih obnovitve $n_1, \ldots, n_k$ je denarni tok enak:

$$C_{n_r} = {}_{n_r-1}|_1 q_x^d (G_r - F_{n_r^-})^+ + {}_{n_r} p_x^\tau (G_r - F_{n_r^-})^+ - {}_{n_r} p_x^\tau M_{n_r}, \tag{32}$$

kjer prvi izraz omogoča izplačilo ob smrti v zadnjem mesecu (GMDB), drugi izraz je izplačilo ob času zapadosti (razlika med G in F v času r), tretji izraz pa je dobiček iz naslova marže za tveganje garancije ob obnovitvi pogodbe.

Za stohastično analizo obveznosti iz naslova garancij moramo velikokrat ponoviti izračune, kjer vsakokrat uporabimo različen razvoj delniškega indeksa. Če izračun naredimo na pogodbi s trajanjem 22 let z mesečnimi denarnimi tokovi, nam 10.000 različnih simulacij da veliko informacij in možnosti za analizo izhodnih podatkov.

2.3 Modeliranje obveznosti za produkte z garancijami z dinamičnim varovanjem pred tveganjem

Za vrednotenje garancij in s tem modeliranje obveznosti lahko uporabimo Black-Scholesov model. Garancijo preučujemo kot ustrezno prodajno ali nakupno opcijo. To je ustreznik, ki ga najdemo na finančnih trgih z izvedenimi finančnimi instrumenti. Najprej bomo na kratko opisali Black-Scholes-Mertonovo formulo za vrednotenje opcij in pokazali, kako z njeno uporabo lahko modeliramo obveznosti za GMMB in GMDB garanciji.

2.3.1 Black-Scholes-Mertonov model za vrednotenje opcij

Za uporabo Black-Scholes-Mertonovega modela potrebujemo naslednje predpostavke.

- Trg je sestavljen iz brezkuponskih obveznic (netveganih sredstev) in delnic (tveganih sredstev).
- Delnica ne izplačuje dividend.
- Portfelj je možno rebalansirati v zveznem času (tj. delnice in obveznice lahko kupujemo in prodajamo).
- Ob trgovanju z delnicami in obveznicami ni transakcijskih stroškov.

- Zvezna netvegana obrestna mera, r na časovno enoto, je konstantna in njena krivulja donosa je ravna.
- Delnice in obveznice lahko kupujemo ali prodajamo v kakršnihkoli količinah, negativnih ali pozitivnih. Transakcijo lahko izvršimo kadarkoli, kjer nakupna ali prodajna vrednost ne vpliva na vrednost instrumenta.
- Vrednost delnice S_t ob času t v realnem času opišemo z geometrijskim Brownovim gibanjem.

To niso realistične predpostavke, saj portfelja ni možno rebalansirati v zveznem času in ker so transakcijski stroški ob prodaji ali nakupu vedno prisotni. Vemo tudi, da je krivulja donosa netvegane obrestne mere redko ravna. Kljub temu Black-Scholes-Mertonov model deluje zelo dobro, tako za določanje cene opcije kot tudi za določanje strategije za upravljanje s tveganji (Dickson, Hardy & Waters, 2012, str. 414).[14]

Black-Scholes-Mertonov model nam, pod predpostavkami o trgu, podaja pomembne rezultate:

- Obstaja ena sama do tveganja nevtralna porazdelitev, pravimo ji tudi Q-mera, za proces gibanja vrednosti delnice, pod katero je $\{S_t\}_{t\geq 0}$ porazdeljen log-normalno s parametroma $r - \sigma^2/2$ in σ^2.
- Vrednost katerekoli evropske opcije, ki ima za osnovo vrednost delnice, s funkcijo izplačila $h(S_T)$ ob času zapadlosti T, je ob času $t \leq T$ enaka pričakovani sedanji vrednosti izplačila pod do tveganja nevtralno porazdelitvijo (Q-mero). Označimo jo z $v(t)$

$$v(t) = E_t^Q\Big[e^{-r(T-t)}h(S_T)\Big], \tag{33}$$

  kjer E_t^Q označuje pogojno pričakovano vrednost pod do tveganja nevtralno mero, z uporabo vseh informacij, ki so na voljo do časa t. To v posebnem pomeni, da za vrednotenje opcije ob času t privzamemo, da poznamo vrednost delnice ob času t.

Iz rezultata 33 izhajajo pomembne ugotovitve:

- Čez katerikoli fiksen časovni interval, recimo naprimer $(t,\ t+\tau)$, kjer je $\tau > 0$, je faktor akumulacije vrednosti delnice $S_{t+\tau}/S_t$ pod do tveganja nevtralno mero, prav tako porazdeljen log-normalno, s parametroma $(r - \sigma^2/2)\tau$ in $\sigma^2\tau$.

$$\frac{S_{t+\tau}}{S_t} \sim_Q LN((r - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau), \tag{34}$$

  kar pomeni, da je:

$$\log\frac{S_{t+\tau}}{S_t} \sim_Q N((r - \sigma^2/2)\tau, \sigma^2\tau). \tag{35}$$

[14] V nadaljevanju se na Black-Scholes-Mertonov model sklicujemo z oznako BSM model, na Black-Scholes formulo pa z oznako B-S formula.

- Pričakovana sedanja vrednost prihodnje vrednosti delnice $S_{t+\tau}$, je pod Q-mero (z letno obrestno mero r) enaka vrednosti delnice danes, S_t. Ugotovitev izhaja iz prejšnje točke, ker je:

$$E_t^Q[S_{t+\tau}/S_t] = \exp((r-\sigma^2)\tau + \tau\sigma^2/2) = e^{r\tau}. \tag{36}$$

- Mera realnega sveta, P, je z Q-mero povezana na dva načina. Prvi je, da tako pod Q, kot tudi pod P-mero ceno delnice opišemo z log-normalnim procesom. BSM model je v ustreznem smislu limita binomskega modela. Druga povezava pove, da je parameter variance, σ, enak za obe meri.
- Formula (33) je zvezna razširitev rezultata binomskega modela. Tako v binomskem, kot tudi v BSM modelu, je vrednost evropske opcije ob času $t \leq T$ enaka pričakovani sedanji vrednosti funkcije izplačila pod do tveganja nevtralno porazdelitvijo.

Sedaj predpostavimo, da imamo evropsko nakupno opcijo z izvršno ceno K. Vemo, da je izplačilo opcije v času T enako $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$. Potem nakupno ceno opcije v času t izrazimo z $c(t)$, kjer je:

$$c(t) = E_t^Q\Big[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+\Big]. \tag{37}$$

Za ovrednotenje te cene razpišemo enačbo:

$$c(t) = e^{-r(T-t)} S_t E_t^Q\Big[(S_T/S_t - K/S_t)^+\Big]. \tag{38}$$

Vemo, da je pod Q-mero

$$S_T/S_t \sim LN((r-\sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)). \tag{39}$$

Naj torej f in F označujeta log-normalno gostoto in njeno porazdelitveno funkcijo. Ker je S_T/S_t porazdeljena log-normalno pod Q-mero, imamo:

$$\begin{aligned} c(t) &= e^{r(T-t)} S_t \int_{K/S_t}^{\infty} (x - K/S_t) f(x) dx \\ &= e^{r(T-t)} S_t \left(\int_{K/S_t}^{\infty} x f(x) dx - \frac{K}{S_t}(1 - F(K/S_t)) \right). \end{aligned} \tag{40}$$

Za log-normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko s parametroma μ in σ^2 uporabimo spodnji rezultat, kjer Φ označuje porazdelitveno funkcijo standardizirane normalne porazdelitve.

$$\int_0^a xf(x)dx = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}\Phi\left(\frac{\log a - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right). \tag{41}$$

Ker je matematično upanje te slučajne spremenljivke enako:

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}, \tag{42}$$

imamo

$$\begin{aligned}\int_a^\infty xf(x)dx &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\log a - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right)\\ &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\}\Phi\left(\frac{-\log a + \mu + \sigma^2}{\sigma}\right).\end{aligned} \tag{43}$$

Pridobljeni rezultat uporabimo v formuli (40) za ceno opcije in dobimo:

$$\begin{aligned}c(t) &= e^{-r(T-t)}S_t e^{r(T-t)}\Phi\left(\frac{-\log(K/S_t) + (r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\ &\quad - e^{-r(T-t)}K\left(1 - \Phi\left(\frac{\log(K/S_t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)\\ &= S_t\Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\ &\quad - e^{-r(T-t)}K\ \Phi\left(\frac{\log(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),\end{aligned} \tag{44}$$

kar ponavadi zapišemo v obliki:

$$c(t) = S_t\Phi(d_1(t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)), \tag{45}$$

kjer sta

$$d_1(t) = \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \text{in} \qquad d_2(t) = d_1(t) - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{46}$$

Ker se S_t v formuli (45) eksplicitno pojavi le v prvem delu formule in r le v drugem, portfelj, ki replicira nakupno opcijo v času t, vsebuje:

- $\Phi(d_1(t))$ enot delnice, s skupno vrednostjo v času t, $S_t\Phi(d_1(t))$, in
- kratko pozicijo v $\Phi(d_2(t))$ enotah brezkuponske obveznice z nominalno vrednostjo K, z ročnostjo do časa T in vrednostjo ob času t, $-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t))$.

To je samofinancirajoč portfelj, ki ga v času t potrebujemo za repliciranje opcije. Vrednosti $\Phi(d_1(t))$ in $\Phi(d_2(t))$ sta obe odvisni od trenutne vrednosti delnice in časa. Če je nakupna vrednost opcije zelo majhna v primerjavi s trenutno vrednostjo delnice, je $\Phi(d_1(t))$ blizu 1 in $\Phi(d_2(t))$ blizu 0. Portfelj, ki replicira nakupno opcijo, teži k dolgi poziciji v delnici in k nič v obveznici.

Za evropsko prodajno opcijo, s prodajno ceno K, je njena cena ob času t enaka $p(t)$, kjer je:

$$p(t) = E_t^Q\Big[e^{-r(T-t)}(K - S_T)^+\Big], \tag{47}$$

kar nam po integraciji, da

$$p(t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t)) - S_t\Phi(-d_1(t)), \tag{48}$$

kjer sta $d_1(t)$ in $d_2(t)$ definirana enako, kot prej.

Portfelj, ki replicira prodajno opcijo v času t, vsebuje:

- $\Phi(d_2(t))$ enot brezkuponske obveznice, z nominalno vrednostjo K, z ročnostjo do časa T in vrednostjo ob času t, $Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t))$.
- kratko pozicijo v $\Phi(-d_1(t))$ enotah delnice s skupno vrednostjo ob času t, $-S_t\Phi(-d_1(t))$.

Za evropsko nakupno in prodajno opcijo lahko pokažemo, da je (Dickson, Hardy & Waters, 2012, str. 416-419; Milevsky, 2006, str. 250):

$$S_t\frac{d}{dS_t}c(t) = S_t\Phi(d_1(t)) \qquad \text{in} \qquad S_t\frac{d}{dS_t}p(t) = -S_t\Phi(-d_1(t)). \tag{49}$$

2.3.2 Black-Scholes formula za GMMB

GMMB opišemo z enostavno prodajno opcijo za ločeni sklad. Predpostavimo, da je vrednost sklada ob času vrednotenja $t = 0$ enaka F_0. G naj označuje garancijo in predpostavimo, da je ta fiksna.

Potem je obveznost zavarovalnice za pogodbo z GMMB, ob zapadlosti T, enaka $(G - F_t)^+$. Zapis je identičen prodajni opciji, kjer je prodajna cena enaka G z osnovnim sredstvom F_t. Standardni pogodbeni pogoji za police tega tipa določajo, da je G tipično enaka 75 ali 100 % začetne enkratne premije na polici. Naj m označuje mesečni strošek upravljavske provizije, ki se odšteje iz ločenega sklada. Potem je

$$F_t = F_0 \frac{S_T}{S_0}(1-m)^T, \tag{50}$$

kjer je S_t delniški indeks, ki ga uporabljamo kot referenčno vrednost za lastniški kapital. Izplačilo, ki ga omogoča GMMB, je enako $W = (G - F_T)^+$. Predpostavimo, da je $F_0 = S_0$ in potem je cena opcije

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-rT} E_Q[((G - F_T)^+)] \\ &= e^{-rT} E_Q[((G - S_T(1-m)^T)^+)] \qquad (51) \\ &= (1-m)^T \{e^{-rT} E_Q[(G(1-m)^{-T} - S_T)^+)]\}. \qquad (52) \end{aligned}$$

Za določitev cene garancije po Black-Scholesovem modelu[15] lahko uporabimo katerokoli od enačb (51) in (52). Če uporabimo enačbo (51), v B-S formuli le zamenjamo S_0 s $S_0(1-m)^T$. Če pa bi želeli uporabiti (52), potem povišamo garancijo G na $G(1-m)^{-T}$ in celotno formulo pomnožimo z $(1-m)^T$.

Druga možnost je malo bolj zapletena, zato uporabimo prvo in dobimo, da je vrednost prodajne opcije v standardni B-S formuli ob času $t = 0$ enaka:

$$P_0 = Ge^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0(1-m)^T\Phi(-d_1), \tag{53}$$

kjer je

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(S_0(1-m)^T/G) + (r + \sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T})} \\ &= \frac{\log(S_0/G) + (r + \log(1-m) + \sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T})} \qquad (54) \end{aligned}$$

in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Formula ne modelira tveganja smrtnosti in prekinitev. Pred tveganjem smrtnosti se zavarovalnica lahko zavaruje z diversifikacijo portfelja. Namreč, če bo prodala zadostno veliko število pogodb, bo strošek smrtnosti znan natanko, z relativno napako, ki z naraščajočim številom pogodb pada. To je dobra utemeljitev za uporabo determinističnega pristopa.

Tveganje prekinitev se tudi da diversificirati, vendar le, če so prekinitve neodvisne od obveznosti iz naslova garancije. Vemo, da so prekinitve povezane z uspešnostjo ločenega

[15] Verjeti moramo, da z BSM modelom dovolj dobro določimo ceno opcije, saj na trgu nikoli nimamo izpolnjenih predpostavk, ki jih le-ta zahteva.

sklada, a za to še ni bilo predlaganih prepričljivih modelov. Ker ustreznih stohastičnih modelov za modeliranje tveganja prekinitev ni, uporabimo determinističen model, kjer na modeliranje prekinitev postopamo podobno, kot pri modeliranju smrtnosti. Predpostavimo, da so prekinitve neodvisne od obveznosti iz naslova garancije in da so izhodi iz pogodb pod Q-mero neodvisni od obveznosti iz naslova garancije. To pomeni, da če je BSP_0 cena opcije, ki ne modelira tveganja prekinitev in je ${}_Tp_x^\tau$ verjetnost, da je pogodba ob času zapadlosti veljavna, je cena opcije, ki omogoča modeliranje prekinitev, enaka ${}_Tp_x^\tau BSP_0$.

V splošnem lahko za portfelj, s katerim repliciramo GMMB, in, ki omogoča modeliranje prekinitev, vedno uporabimo vrednost opcije in jo pomnožimo z verjetnostjo preživetja. To pomeni, da če je verjetnost, da zavarovanec prekine pogodbo ali umre pred datumom zapadlosti enaka ${}_Tq_x^\tau = 0{,}25$, in če vemo, da je BSP_0 količina, ki jo zavarovalnica potrebuje za izplačilo ob zapadlosti garancije, potem je zahtevana količina, ki modelira tudi prekinitve in smrti, enostavno enaka $0{,}75 \cdot BSP_0$.

Na primeru bomo pokazali, kako ugotovitve uporabiti v praksi. Naj bo zavarovanec star 50 let in ima pogodbo ločenih skladov z vključeno GMMB. Predpostavimo čase zapadlosti: 5, 10 ali 20 let. Predpostavimo, da je letna volatilnost ločenega sklada enaka $\sigma = 20$ %, netvegana obrestna mera je $r = 6$ % in upravljavska provizija je 3 % nominalne vrednosti, ki se obračunava mesečno. Stroški portfelja, ki replicira GMMB, so za različne stopnje garancije predstavljene v tabeli 3, za sklad, ki je vreden 100 USD ob času vrednotenja.[16]

Tabela 3: Stroški zavarovanja za tveganje GMMB za vrednost garancije izraženo v % vrednosti sklada ob času vrednotenja, ki modelira izstope iz pogodb.

Garancija v % vrednosti sklada	Čas do zapadlosti T		
	5	10	20
60	0.552	0.607	0.218
80	2.341	1.704	0.477
100	5.883	3.438	0.833
120	11.125	5.747	1.270
${}_Tp_{50}^\tau$	0.65520	0.42247	0.15972

Prirejeno po Hardy (2003, str. 136).

V tabeli vidimo, da je cena zavarovanja za tveganje garancije, če je le datum zapadlosti dovolj daleč v prihodnosti, nizka. To velja tudi v primeru, če je vrednost garancije dosti višja od vrednosti sklada (opcija je "in-the-money"). Razloga za to sta, da cena prodajne opcije pada z dolgoročnim trajanjem in vpliv preživetja. Po drugi strani pa, če imamo opcijo s kratkoročnim trajanjem, cena prodajne opcije raste, tudi če je ob vrednotenju vrednost garancije enaka le 80 % vrednosti sklada.

[16] Uporabljen je ameriški decimalni sistem. Dekrementne verjetnosti izstopa iz pogodb so navedene v prilogi 1.

2.3.3 Black-Scholes formula za GMDB

Obveznost iz naslova GMDB je podobna obveznosti GMMB, z razliko, da je datum zapadlosti odvisen od časa zavarovančeve smrti in ne od njegovega preživetja. To pomeni, da je trajanje opcije, samo zase, slučajna spremenljivka.

Naj bo $BSP_0(T)$ cena prodajne opcije ob času 0, za GMDB pogodbo z trajanjem T let. Torej je T slučajna spremenljivka, ki predstavlja bodoče trajanje življenja zavarovanca, T_x v aktuarskem zapisu. Naj bo $E_T[\ ]$ zapis, ki označuje pričakovano vrednost pogojno na porazdelitev slučajne spremenljivke T. Potem je cena varovalnega portfelja, ki replicira GMDB, preprosto enaka pričakovani vrednosti $BSP_0(T)$, pogojno na porazdelitev slučajne spremenljivke T. Predpostavljamo, da je gibanje sklada neodvisno od slučajne spremenljivke T. Naj ${}_Tp_x^\tau$ označuje dekrementno verjetnost preživetja in naj bo $\mu_{x,t}^{(d)}$ jakost smrtnosti ob času t za zavarovanca, starega x ob času $t = 0$. Potem je cena portfelja varovanja pred tveganjem garancije ob času $t = 0$ za pogodbo z maksimalnim trajanjem n časovnih enot, enaka:

$$E_T[BSP_0(T)] = \int_0^n BSP_0(t)_t p_x^\tau \mu_{x,t}^{(d)} dt. \tag{55}$$

Numerično lahko enačbo (55) ovrednotimo z aproksimacijo:

$$H(0) = \sum_{t=1}^{n} BSP_0(t)\ {}_{t-1}p_x^\tau\ {}_1q_{x,t-1}^d, \tag{56}$$

kjer je t merjen v primerno majnih časovnih intervalih (npr. mesecih), ${}_{t-1}p_x^\tau$ je verjetnost preživetja za $t-1$ časovnih enot in ${}_1q_{x,t-1}^d$ je verjetnost, da zavarovanec umre v časovnem intervalu $(t-1,t)$, pri čemer je že preživel $t-1$ časovnih enot. $H(t)$ označuje vrednost portfelja varovanja pred tveganjem v času t.

Celoten strošek varovanja pred tveganjem GMDB dobimo, če $BSP_0(t)$ v enačbi 55 razpišemo na tvegani in netvegani del. Potem je celotni strošek zavarovanja pred garancijo ob času 0 enak:

$$\begin{aligned} H(0) &= \int_0^n BSP_0(t)_t p_x^\tau \mu_{x,t}^{(d)} dt \\ &= \int_0^n (Ge^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0(1-m)^T\Phi(-d_1))_t p_x^\tau \mu_{x,t}^{(d)} dt \\ &= \int_0^n (Ge^{-rT}\Phi(-d_2))_t p_x^\tau \mu_{x,t}^{(d)} dt \\ &+ \int_0^n (-S_0(1-m)^T\Phi(-d_1))_t p_x^\tau \mu_{x,t}^{(d)} dt. \end{aligned} \tag{57}$$

kjer prvi del predstavlja netvegani delež in drugi del predstavlja tvegani delež portfelja, ki replicira GMDB (Hardy, 2003, str. 134-137).

2.3.4 Modeliranje obveznosti z dinamičnim varovanjem pred tveganjem za produkt z GMMB

Mnogi aktuarji menijo, da se modeliranja obveznosti produktov z naložbenimi garancijami v praksi ne moremo lotiti z dinamičnim varovanjem pred tveganjem. Kljub temu, da model vsebuje poenostavljene predpostavke in so parametri negotovi, se je izkazalo, da dinamično varovanje pred tveganjem deluje izjemno dobro. Portfelj dinamičnega varovanja pred tveganjem, pridobljen z uporabo BSM modela, je zadosten, da pokrije obveznosti ob doživetju iz naslova garancij. Poleg tega je potrebno modelirati tudi transakcijske stroške, ki niso del cene opcije po B-S enačbi. Želja je kvantificirati preostalo obveznost, ki ostaja nezavarovana s portfeljem varovanja pred tveganjem. Celotne kapitalske zahteve so tako vsota portfelja varovanja pred tveganjem (tj. cena, ki jo za opcijo plačajo zavarovanci) in nezavarovanih obveznosti.

BSM model predpostavlja neprekinjeno trgovanje; v vsakem trenutku se portfelj varovanja pred tveganjem prilagodi spremembi cene delnice. Prilagoditev delniškega dela v portfelju varovanja pred tveganjem je natačno uravnotežena s prilagoditvijo obvezniškega dela. V praksi na trgu ne moremo neprekinjeno trgovati, in, če bi lahko, bi to generiralo neobvladljive transakcijske stroške.

Diskretna napaka varovanja pred tveganjem se pojavi, ko omilimo predpostavko o neprekinjenem trgovanju. Med diskretnimi časovnimi intervali, kjer varovanje ni prilagojeno, varovanje pred tveganjem morda ne bo samofinancirano; sprememba delniškega dela varovanja pred tveganjem v diskretnem časovnem intervalu v splošnem ne bo enaka spremembi obvezniškega dela varovanja. Razlika je napaka pri varovanju pred tveganjem (angl. hedging error, v nadaljevanju HE), ki ji pravimo tudi napaka sledenja (angl. tracking error).

Frekvenca, s katero se portfelj varovanja pred tveganjem ponovno uravnoteži, je kompromis med natančnostjo in transakcijskimi stroški. Napaka varovanja pred tveganjem se lahko modelira s časovno strategijo ali strategijo premikanja. Pri časovni strategiji predpostavimo, da se portfelj varovanja pred tveganjem v rednih intervalih ponovno uravnovesi. Pristop, ki temelji na premikanju, pa predvideva, da je portfelj varovanja pred tveganjem ponovno uravnotežen, ko se cena delnice premakne za določen sprožilni %. Strategija premikanja je učinkovitejša; ustvarja manj napak pri varovanju pred tveganjem za dano raven pričakovanih transakcijskih stroškov. Preprosteje pa je demonstrirati metodo z uporabo rednih časovnih korakov, kjer lažje vključimo tudi stroške umrljivosti. Predstavimo to metodo z mesečnimi časovnimi koraki.

Za obveznost opcije naj bo Υ_t vrednost obvezniškega dela varovanja pred tveganjem ob času t (v mesecih) in naj bo $S_t\Psi_t$ delniški del. Obveznice se obrestujejo z mesečno netvegano obrestno mero v višini $r/12$. Med mesecema t in $t+1$ se vrednost delnice spremeni iz S_t v S_{t+1}. Cena opcije v času t je:

$$H(t) = \Upsilon_t + \Psi_t S_t. \tag{58}$$

Nemudoma pred uravnoteženjem ob t, je vrednost portfelja varovanja pred tveganjem enaka

$$H(t^-) = \Upsilon_{t-1} e^{r/12} + \Psi_{t-1} S_t, \tag{59}$$

potrebujemo pa portfelj v višini $H(t)$. Razlika $H(t) - H(t^-)$ je napaka varovanja pred tveganjem. Če je razlika negativna, potem je napaka varovanja pred tveganjem vir dobička. To pomeni, da je portfelj varovanja pred tveganjem pred uravnoteženjem prenesen naprej vreden več kot potrebujemo za uravnotežen portfelj ob času t.

Tabela 4 prikazuje rezultate ene simulacije napake pred tveganjem za dvoletno GMMB ali evropsko nakupno opcijo z mesečnim varovanjem pred tveganjem. Izvršna cena ali garancija ob $t = 0$ je $K = \$100$, kar je enako vrednosti sklada ob začetku dvoletne projekcije. Upravljavska provizija v višini 3 % se odšteje iz vrednosti sklada. Netvegana obrestna mera znaša 6 %, volatilnost portfelja varovanja pred tveganjem pa znaša 20 % letno. Gibanje vrednosti sklada v drugem stolpcu je simulirano z log-normalno porazdelitvijo z menjavo režimov. To je mera realnega sveta, saj nas zanima realističen rezultat in ne rezultat pod Q-mero, ki jo uporabljamo le za vrednotenje portfelja varovanja pred tveganjem. V tretjem stolpcu izračunamo delniški del portfelja varovanja pred tveganjem; to je

$$-S_t(0{,}97)^2 \Phi\left(-\left(\frac{\log(S_t(0{,}97)^2/K) + (r + \sigma^2/2)(2 - t/12)}{\sigma\sqrt{2 - t/12}} \right) \right). \tag{60}$$

V četrtem stolpcu pa izračunamo obvezniški del portfelja varovanja pred tveganjem:

$$K e^{-r(2-t/12)} \Phi\left(-\left(\frac{\log(S_t(0{,}97)^2/K) + (r - \sigma^2/2)(2 - t/12)}{\sigma\sqrt{2 - t/12}} \right) \right). \tag{61}$$

Peti stolpec je enak vsoti tretjega in četrtega stolpca; to je Black-Scholesova cena opcije ob t mesecih, ki je izračunana s projekcijo cene delnice ob tem času ($H(t)$). Ta predstavlja potrebno ceno varovanja pred tveganjem, preneseno v naslednji mesec.

Šesti stolpec prikazuje vrednost varovanja pred tveganjem prenesenega naprej iz predhodnega meseca. Ta vrednost temelji na tem, da se cena delnice spremeni med časoma $t - 1$ in t, obveznica pa se obrestuje z mesečno netvegano obrestno mero. To pomeni, da je vrednost portfelja varovanja pred tveganjem prenesenega naprej iz časa $t = 0$ v čas $t = 1$, enaka:

$$H(1^-) = -34{,}160 \frac{S_1}{S_0} + 41{,}961 e^{r/12} = 8{,}157. \tag{62}$$

V sedmem stolpcu je prikazana napaka pri varovanju pred tveganjem $H(t) - H(t^{-})$. Na primer, ob času $t = 1$ potrebujemo varovanje pred tveganjem $\$7{,}951$, na voljo pa imamo $\$8{,}157$ po prejšnjem uravnoteženju. Torej napaka pri varovanju pred tveganjem znaša $-\$0{,}206$.

Tabela 4: Simulacija napake pred tveganjem za dvoletno GMMB.

Čas (v mesecih) t	S_t	Delniški del	Obvezniški del	BSP $H(t)$	$H(t^{-})$	HE
0	100.000	−34.160	41.961	7.801	0.000	
1	99.573	−35.145	43.096	7.951	8.157	−0.206
2	104.250	−31.296	37.708	6.412	6.516	−0.105
3	103.447	−32.577	39.209	6.632	6.842	−0.210
4	101.703	−34.901	42.081	7.180	7.377	−0.197
5	100.251	−37.081	44.759	7.679	7.889	−0.211
6	101.784	−36.104	43.203	7.099	7.336	−0.237
7	107.445	−30.419	35.665	5.246	5.308	−0.062
8	106.365	−32.111	37.603	5.492	5.730	−0.238
9	107.996	−30.682	35.618	4.936	5.188	−0.252
10	119.560	−18.480	20.823	2.343	1.829	0.513
11	118.520	−19.363	21.755	2.393	2.608	−0.215
12	120.944	−16.811	18.714	1.903	2.106	−0.202
13	119.696	−17.767	19.718	1.951	2.171	−0.219
14	128.840	−9.442	10.280	0.838	0.693	0.145
15	131.346	−7.209	7.782	0.573	0.706	−0.133
16	133.677	−5.248	5.618	0.370	0.484	−0.114
17	136.096	−3.478	3.692	0.214	0.303	−0.089
18	141.205	−1.456	1.529	0.074	0.102	−0.028
19	150.057	−0.239	0.249	0.009	−0.010	0.019
20	154.164	−0.040	0.042	0.001	0.004	−0.003
21	165.900	0.000	0.000	0.000	−0.002	0.002
22	159.486	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
23	179.358	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
24	192.550	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Prirejeno po Hardy (2003, str. 146).

Izračunamo lahko celotno sedanjo vrednost bodočih obveznosti z diskontiranjem napake pri varovanju pred tveganjem, ki je v tem primeru enaka $-\$2{,}0$. Ob večkratnem simuliranju napake pri varovanju pred tveganjem, bi ta morala v povprečju znašati približno nič, če je volatilnost mere, ki jo uporabimo za projekcije približno enaka volatilnosti Q-mere. V tem primeru je napaka pri varovanju pred tveganjem negativna, kar je posledica tega, da je mera realnega sveta (P-mera, ki znaša 14% letno) nižja od Q-mere, ki znaša 20 %. Če bi predpostavili režim z visoko volatilnostjo, bi bila napaka pri varovanju pred tveganjem pozitivna. Primer prikazuje, kako zelo različna je občutljivost spremenljivke izgube pri aktuarskem pristopu in pristopu z dinamičnim varovanjem pred tveganjem. Pri aktuarskem pristopu je vir izgube slaba uspešnost sredstev in volatilnost sama po sebi ne predstavlja težav, medtem ko je pristop dinamičnega varovanja pred tveganjem zelo občutljiv na visoko volatilnost trga.

2.3.5 Modeliranje obveznosti z dinamičnim varovanjem pred tveganjem za produkt, ki vsebuje GMMB in GMDB

Za opcijo, odvisno od smrti ali doživetja mora napaka pri varovanju pred tveganjem upoštevati verjetnosti preživetja pogodb. Za pogodbo, ki vključuje GMDB in GMMB, je izplačilo ob smrti enako $(G - F_t)^+$, ki ga izplača zavarovalnica ob koncu meseca smrti, če zavarovanec umre med mesecema t in $t - 1$ in izplačilo ob doživetju pogodbe je enako $(G - F_n)^+$. Naj bo $P(t,w)$ Black-Scholesova cena nakupne opcije ob času t, z doživetjem $w \geq t$ in naj ${}_{w-t|}q^d_{x,t}$ označuje verjetnost, da oseba stara x let in t mesecev kot zavarovanec preživi še nadaljnih $w - t$ mesecev in umre v naslednjem mesecu. Naj ${}_{n-t}p^\tau_{x,t}$ označuje verjetnost, da zavarovanec star x let in t mesecev preživi in ne prekine pogodbe v naslednjih $n - t$ mesecih. Potem je cena varovanja pred tveganjem v času t za pogodbo z GMMB in GMDB, pogojno na dogodek, da je polica veljavna v času t, enaka:

$$H^c(t) = \sum_{w=t}^{n-1} {}_{w-t|}q^d_{x,t} P(t,w) + {}_{n-t}p^\tau_{x,t} P(t,n). \tag{63}$$

Brezpogojno ceno varovanja pred tveganjem ob času t (to je, za polico veljavno ob času $t = 0$) dobimo z množenjem enačbe (63) s ${}_tp^\tau_x$:

$$H(t) = \sum_{w=t}^{n-1} {}_wq^d_x P(t,w) + {}_np^\tau_x P(t,n). \tag{64}$$

Napaka pri varovanjem pred tveganjem se izračuna kot razlika med varovanjem pred tveganjem ob času t, z vsebovanim izplačilom ob tem času in varovanjem pred tveganjem prenesenim naprej iz časa $t - 1$. S pogojnimi izplačili razdelimo varovanje pred tveganjem $H(t)$ na delniški in obvezniški del: $S_t\Psi^c_t$ je delniški del in Υ^c_t obvezniški del varovanja pred tveganjem, ki ju potrebujemo ob t, pogojno na dogodek, da je pogodba veljavna ob t:

$$H^c(t) = \Upsilon^c_t + \Psi^c_t S_t, \tag{65}$$

kjer je

$$\Psi^c_t = \frac{\partial}{\partial S_t} H^c(t) \qquad \text{in} \qquad \Upsilon^c_t = H^c(t) - S_t\Psi^c_t. \tag{66}$$

Podobno je

$$H(t) = \Upsilon_t + \Psi_t S_t, \tag{67}$$

kjer je $\Psi_t = \Psi^c_t S_t$ in $\Upsilon_t = {}_{n-t}p^\tau_{x,t}\Upsilon^c_t$ pri razbitju brepogojne cene varovanja pred tveganjem na delnice in obveznice. Brezpogojne vrednosti so pričakovane obveznosti, potrebovane za polico veljavno ob $t = 0$. Tako kot pri dinamičnem varovanju pred tveganjem za določen datum doživetja, je vrednost portfelja varovanja pred tveganjem, ki se je akumulirala iz $t - 1$ ravno pred uravnoteženjem ob t, enaka:

$$H(t^-) = \Upsilon_{t-1} e^{r/12} + \Psi_{t-1} S_t. \tag{68}$$

Poglejmo sedaj napako pri varovanju pred tveganjem ob t, pogojno na dogodek, da je pogodba veljavna ob $t-1$. Če zavarovanec preživi, je napaka pri varovanju pred tveganjem enaka razliki med portfeljem varovanja pred tveganjem ob času t in porfeljem varovanja pred tveganjem prenesenim naprej iz $t-1$. Če zavarovanec umre ali prekine pogodbo, je napaka pri varovanju pred tveganjem enaka razliki izplačila ob t (če ga imamo) in varovanju pred tveganjem prenesenim naprej. Ko vzamemo oba primera in ju pomnožimo s primernimi verjetnostmi, ki so pogojene na preživetje do $t-1$, dobimo napako pri varovanju pred tveganjem ob t, pogojno na preživetje do $t-1$. Izraz $q^l_{x,t-1}$ je verjetnost, da zavarovanec odstopi od pogodbe med $t-1$ in t, pogojno na preživetje police do časa $t-1$. Napaka pri varovanju pred tveganjem, pogojno na preživetje police do časa $t-1$, je tako enaka:

$$\begin{aligned}
& p^\tau_{x,t-1}(H^c(t) - H^c(t^-)) \\
& + q^d_{x,t-1}((G - F_t)^+ - H^c(t^-)) \\
& + q^l_{x,t-1}(-H^c(t^-)) \\
& = p^\tau_{x,t-1} H^c(t) + q^d_{x,t-1}((G - F_t)^+) - H^c(t^-).
\end{aligned} \tag{69}$$

Brezpogojno napako pri varovanju pred tveganjem ob t, HE_t, dobimo z množenjem z verjetnostjo, da je pogodba veljavna ob $t-1$. Ta je enaka verjetnosti preživetja od starosti x do x in $t-1$ mesecev.

$$\begin{aligned}
HE_t &= {}_{t-1}p^\tau_x \{ p^\tau_{x,t-1} H^c(t) + q^d_{x,t-1}((G - F_t)^+) - H^c(t^-) \} \\
&= H(t) + {}_{t-1}q^d_x((G - F_t)^+) - H(t^-).
\end{aligned} \tag{70}$$

Enačba pove, da ni nujno upoštevati verjetnosti preživetja in odstopov individualno ob vsakem mesecu. Za GMMB pogodbo je napaka pri varovanju pred tveganjem, ki je odvisna od preživetja, dobljena z množenjem napak za določen datum doživetja z verjetnostmi preživetja za celotno trajanje pogodbe.

2.3.6 Transakcijski stroški

Za institucionalne vlagatelje so transakcijski stroški pri kupovanju obveznic zanemarljivo majhni. Transakcijski stroški so proporcionalni glede na absolutno razliko v vrednosti delniškega dela portfelja varovanja pred tveganjem. Transakcijski stroški ob koncu meseca t so enaki:

$$\tau S_t|\Psi_t - \Psi_{t-1}|. \tag{71}$$

Da omogočimo modeliranje preživetja ob doživetju, naj bo Ψ_t^c definirana kot v enačbi (66). Torej predpostavimo, da je pogodba veljavna ob t in dopuščamo nepredvidljivost trajanja življenja zavarovanca starega x od časa t, do konca trajanja pogodbe n. Če je Ψ_t brezpogojni ustreznik, potem je $\Psi_t = {}_tp_x^\tau \Psi_t^c$ delniški del projiciranega portfelja varovanja pred tveganjem, ki ga potrebujemo ob t. Pričakovana vrednost delnic, ki jih potrebujemo ob t, če je pogodba veljavna ob $t-1$, je enaka:

$$p_{x,t-1}^\tau \Psi_t^c S_t. \tag{72}$$

Transakcijski stroški ob t, pogojno na preživetje do t^-, so enaki:

$$\tau S_t \; |p_{x,t-1}^\tau \Psi_t^c - \Psi_{t-1}^c|. \tag{73}$$

Enačbo pomnožimo z verjetnostjo preživetja $t-1$ mesecev, za brezpogojne transakcijske stroške ob t:

$$\begin{aligned} TC_t &= \tau S_t \{\tau S_t \; |p_{x,t-1}^\tau \Psi_t^c - \Psi_{t-1}^c|\} \\ &= \tau S_t|\Psi_t - \Psi_{t-1}|. \end{aligned} \tag{74}$$

Predpostavimo $\tau = 0{,}2$ (Hardy, 2003, str. 144-150).

2.4 Mere tveganja

V poglavjih 2.2 in 2.3 smo pokazali, kako modelirati porazdelitev obveznosti za garancije in opcije z aktuarskim pristopom ali dinamičnim varovanjem pred tveganji. Sedaj nas zanima, kako uporabiti porazdelitev slučajne spremenljivke, da bi določili primerno kapitalsko rezervo ali zahtevani solventnostni kapital. Zahtevani sloventnostni kapital je lahko enak kapitalski rezervi, ampak v splošnem je kapitalska rezerva definirana z računovodskimi načeli, medtem ko je solventnostni kapital dodan z namenom, da zadošča regulatornim zahtevam in potrebam za upravljanje s tveganji.

Zato bomo uporabili mere tveganja na porazdelitvi obveznosti, da lahko med seboj primerjamo produkte, kjer nas zanima predvsem vidik tveganja in donosa. Mera tveganja je metoda, ki povzema tveganja porazdelitve slučajne spremenljivke v eno samo vrednost. Formalno je mera tveganja funkcional, ki porazdelitvi priredi realne vrednosti; torej če X predstavlja primerno slučajno spremenljivko in $\mathcal{H}$ predstavlja funkcional mere tveganja, zapišemo:

$$\mathcal{H} : X \to \mathbb{R}. \tag{75}$$

Najbolj pogosto je mera tveganja v aktuarstvu uporabljena za določanje premij, kjer uporabimo porazdelitev tveganja, z namenom, da določimo premijo police. Večina strokovnjakov v financah pozna **tvegano vrednost** (angl. value-at-risk, v nadaljevanju VaR), ki jo uporabimo na porazdelitvi bodočih izgub portfelja, da določimo kapitalske zahteve z namenom ohranjanja solventnosti zavarovalnice.

Najprej bomo predstavili kvantilno mero tveganja. Tvegana vrednost je poznana finančna uporaba kvantilne mere tveganja. Potem bomo opisali še **pogojno mero tveganja** ali **pričakovani primanjkljaj** (angl. conditional tail expectation, v nadaljevanju CVaR, CTE ali expected shortfall, v nadaljevanju ES), ki je povezana s kvantilno mero tveganja.

Na primerih bomo pokazali, kako uporabimo mero tveganja na sedanji vrednosti slučajne spremenljivke bodoče izgube L_0. Če je bil privzet aktuarski pristop, potem je sedanja vrednost (angl. net present value, v nadaljevanju NPV) slučajne spremenljivke enaka:

$$L_0 = NPV\ cene\ garancije - NPV\ odtega\ mar\check{z}e. \tag{76}$$

Če pa je bila privzeta dinamična strategija varovanja pred tveganjem, potem je sedanja vrednost slučajne spremenljivke[17]

$$\begin{aligned} L_0 = &\ za\check{c}etni\ stro\check{s}ki\ zavarovanja\ pred\ tveganjem \\ &+ NPV\ napak\ ob\ zavarovanju\ pred\ tveganjem \\ &+ NPV\ transakcijskih\ stro\check{s}kov - NPV\ odtega\ mar\check{z}e. \end{aligned} \tag{77}$$

2.4.1 Kvantilna mera tveganja

Naj bo slučajna spremenljivka L_0 sedanja vrednost prihodnjih izgub, diskontirana z do tveganja nevtralno obrestno mero. Kvantilna mera tveganja za L_0 je definirana za parameter α, $0 \leq \alpha \leq 1$, kot

$$\mathcal{H}[L_0] = V_\alpha = \inf\{V : Pr[L_0 \leq V] \geq \alpha\} \tag{78}$$

V_α je 100α kvantil porazdelitve izgube, torej je kvantilna mera tveganja. Izraz enostavno interpretiramo: V_α je najmanjši znesek v netveganih sredstvih, tako da je ob zapadlosti, v kombinaciji s skladom F_n in odtegi marže, pridobljenimi med intervalom $t(0, n)$, akumuliranih po netvegani obrestni meri, verjetnost, da imamo dovoljšnjo količino, da

[17] V formuli (77) so napake ob zavarovanju pred tveganjem ob času t definirane kot razlika med vrednostjo portfelja, ki replicira opcijo in vrednostjo prodajne opcije ob času zaprtja po mesec dolgem izvrševanju zavarovanja pred tveganjem, kjer je privzeta dinamična strategija varovanja pred tveganjem (Carr & Wu, 2004, str. 54).

izplačamo garancijo G, vsaj $1-\alpha$. Za zajamčeno zavarovalno vsoto v primeru smrti, je V_α enak povprečju različnih škodnih datumov, glede na tveganje smrtnosti. Za verjetnostno porazdelitev porabimo mero resničnega sveta ali P-mero. Kvantilna mera tveganja je osnova za izračun tvegane vrednosti.

Izračun kvantilne mere tveganja za GMMB

Včasih je mogoče natančno izračunati kvantilno mero tveganja. V primeru, ko to ni mogoče, njeno vrednost ocenimo.[18] Če zavarovalnica ne uporablja dinamičnega varovanja pred tveganjem in je donosnost delnice porazdeljena log-normalno (kot v primeru v poglavju 2.2.2), potem ima cena GMMB porazdelitev z masno verjetnostjo v ničli in log-normalno gostoto nad ničlo (ker ima krnjeno[19], transformirano log-normalno porazdelitev). Ko pa dodamo še odteg marže, eksaktni izračun postane nepraktičen. Sedanja vrednost GMMB z odštetim dobičkom iz marže je vsota odvisnih log-normalnih slučajnih spremenljivk, ki se ne da izraziti analitično.

Zato bomo izračunali ceno garancije in pri tem ignorirali dobiček iz marže. Najprej določimo, če je verjetnost, ko je garancija "out-of-the-money" (vrednost sklada je višja od vrednosti garancije) večja ali manjša od kvantilne stopnje. Potem je sedanja vrednost garancije, kjer zanemarimo odteg za maržo in tveganje smrtnosti, enaka:

$$L_0 = \begin{cases} (G-F_n)e^{-rn}, & G \geq F_n \\ 0, & G < F_n \end{cases} \tag{79}$$

Zanima nas α kvantil slučajne spremenljivke L_0. Naj bo proces gibanja delnice S_t, $S_0 = F_0$, in ob času n enak vrednosti delnice znižane za upravljavsko provizijo, $F_k = S_k(1-m)^k$ za celo število k. Definiramo, da je $\xi = Pr[L_0 = 0]$. To je verjetnost, da je vrednost sklada ob koncu višja kot vrednost garancije, kar pomeni, da ni izplačila iz naslova garancije.

$$\xi = Pr[G < F_n] = Pr[G < S_n(1-m)^n] = Pr\left[\frac{G}{S_0} < \frac{S_n(1-m)^n}{S_0}\right]. \tag{80}$$

Ker smo predpostavili, da je donosnost delnice porazdeljena log-normalno, imamo:

$$\frac{S_n(1-m)^n}{S_0} \sim \log N(n(\mu + \log(1-m)), n\sigma^2), \tag{81}$$

in preprosto lahko izračunamo verjetnost, da je cena garancije enaka 0, torej je ξ

[18] Če je porazdelitev obveznosti narejena s stohastično simulacijo, je kvantilno mero tveganja lahko oceniti. Z urejanjem simulacij je α-kvantilna mera tveganja $(N\alpha)$-ta vrednost vrstilne statistike vrednosti obveznosti, kjer je N število simulacij. Torej, če je j-ta najmanjša simulirana sedanja vrednost izgube $L_{0(j)}$, potem je ocena α- kvantila enaka $L_{0(N\alpha)}$.

[19] V statistiki je krnitev stanje, pri katerem je vrednost meritve ali opazovanja znana le delno. Rezultat opazovanja je bodisi točna vrednost bodisi pa vemo, da se ta vrednost nahaja znotraj nekega intervala, vendar je ne moremo natančno določiti.

$$\xi = 1 - \Phi\left(\frac{\log\frac{G}{S_0} - n(\mu + \log(1-m))}{\sqrt{n}\sigma}\right). \tag{82}$$

Za primer vzamemo pogodbo s trajanjem $n = 120$ mesecev in naj ima S_t/S_{t-1} log-normalno porazdelitev s parametroma $\mu = 0{,}0081$ in $\sigma = 0{,}0451$ mesečno in naj bo $m = 0{,}25$ % mesečno. Predpostavimo, da je začetna vrednost sklada enaka $F_0 = S_0 = 100\$$ in naj bo garancija v višini 100 % začetne vrednosti sklada. Potem je

$$\xi = 1 - \Phi\left(\frac{\log G/S_0 - n(\mu + \log(1-m))}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \Phi(-1{,}3594) = 0{,}9130. \tag{83}$$

Torej, če so sredstva porazdeljena log-normalno, potem z verjetnostjo 0,913 ne bo izplačila iz garancije. Kvantilna mera za katerikoli α-parameter manjši kot 91,3 % mora torej biti nič. Ni treba dodatnih skladov, da bi zagotovili verjetnost 90 %, za zmožnost izplačila vrednosti garancije; tej verjetnosti zadostimo s skladom samim.

Za kvantilno mero tveganja $\alpha > \xi$, vemo, da kvantil pade v del porazdelitve, kjer je $L_0 > 0$ ali iz enačbe (79) je $L = (G - F_n)e^{-rn}$. V tem primeru je kvantilna mera tveganja V_α definirana kot najmanjša vrednost, ki zadošča

$$Pr[F_n + V_\alpha e^{rn} > G] \geq \alpha, \tag{84}$$

in (pod predpostavko, da je F_n zvezna slučajna spremenljivka), je

$$V_\alpha = (G - F_{F_n}^{-1}(1-\alpha))e^{-rn}. \tag{85}$$

Tu je $F_{F_n}()$ porazdelitvena funkcija za vrednost sklada ob zapadlosti, F_n. Če spet predpostavimo, da so dobički iz sklada porazdeljeni log-normalno s parametroma μ in σ letno, in naj bo $z_p = \Phi^{-1}(p)$, potem je:

$$V_\alpha = (G - F_0 \exp(-z_\alpha\sqrt{n}\sigma + n(\mu + \log(1-m))))e^{-rn}. \tag{86}$$

Za ta primer je višina zahtevanega solventnostnega kapitala, izračunana s kvantilno mero tveganja, predstavljena v tabeli 5.

Tabela 5: Kvantilna mera tveganja za 10-letno GMMB pogodbo, brez upoštevanja tveganja smrtnosti ali prekinitev.

Model / Parametri	ξ	$V_{90\%}$	$V_{95\%}$	$V_{99\%}$
Lognormal/MLE $\mu = 0.0081$ $\sigma = 0.0451$ $m = 0.0025$	0.9130	0	7.22	20.84

Prirejeno po Hardy (2003, str. 163).

2.4.2 Pogojna tvegana vrednost, CTE

Znana alternativna mera, ki jo lahko uporabimo namesto kvantilne mere tveganja, je pogojna tvegana vrednost. Pogojna tvegana vrednost je tesno povezana s kvantilno mero tveganja in je podobno definirana s paramerom α, kjer je α med 0 in 1. Za dan α je pogojna tvegana vrednost definirana kot pogojna pričakovana vrednost izgube, pri čemer je pogoj, da ta izguba pade v zgornji $(1-\alpha)$ rep porazdelitve.

Za kvantilno mero tveganja (definirano z enačbo (85)) je pogojna tvegana vrednost (CTE) s parametrom α za zvezno porazdelitev slučajne spremenljivke izgube, dana kot

$$CTE_\alpha(L) = E[L_0|L_0 > V_\alpha]. \tag{87}$$

Ta enačba nam, čeprav je intuitivno lahka za razumevanje, ne da uporabnih rezultatov, ko V_α pade v funkcijo verjetnosti slučajne spremenljivke izgube. To se na primer zgodi, ko je $\alpha < \xi$, v tem primeru je $V_\alpha = 0$. Kot primer naj imamo slučajno spremenljivko izgube z naslednjo porazdelitvijo:

$$L = \begin{cases} 0, & \text{z verjetnostjo} \quad 0{,}98 \\ 100, & \text{z verjetnostjo} \quad 0{,}02. \end{cases} \tag{88}$$

Potem je 95 % kvantil enak $V_{0{,}95} = 0$, vrednost $E[L|L > 0]$ pa je 100. Ampak, 95 % CTE je povprečje izgub, ki padejo nad $V_{0{,}05}$, kar je:

$$CTE_{0{,}95} = \frac{(0{,}03)(0) + (0{,}02)(100)}{0{,}05} = 40. \tag{89}$$

V splošnejšem primeru, CTE s parametrom α izračunamo tako, da najdemo

$$\beta' = \max\{\beta \ : \ V_\alpha = V_\beta\}, \tag{90}$$

in potem je

$$CTE_\alpha(L) = \frac{(1-\beta')E[X|X > V_\alpha] + (\beta' - \alpha)V_\alpha}{1-\alpha}. \tag{91}$$

Izračun pogojne tvegane vrednosti za GMMB

Podobno kot za kvantilno mero tveganja, je za GMMB možno natanko izračunati pogojno tvegano vrednost.[20] Privzeta GMMB pogodba je najpreprostejše oblike, kjer zanemarimo odteg za maržo in predpostavimo, da nimamo dinamičnega varovanja pred tveganjem. Ponovno uporabimo ξ, kot $Pr[F_n > G]$, kar je verjetnost, da pod to garancijsko pogodbo ne pride do izplačila. Pogledamo primera, ko je $\alpha \geq \xi$ in $\alpha < \xi$ in ju obravnavamo posamezno. Najprej predpostavimo, da je $\alpha \geq \xi$ in naj bo vrednost sklada enaka $F_n = S_n(1-m)^n$ in naj ima gostoto $f_{F_n}()$ in porazdelitveno funcijo $F_{F_n}()$. Potem je:

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(L) &= E[L_0|L_0 > V_\alpha] \\ &= E[(G - F_n)e^{-rn}|F_n < (G - V_\alpha e^{rn})]. \end{aligned} \tag{92}$$

Verjetnost $P[F_n < (G - V_\alpha e^{rn})] = (1-\alpha)$ izhaja iz definicije V_α (enačba (84)) in imamo:

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(L) &= \frac{e^{-rn}}{1-\alpha}\left\{\int_0^{G-V_\alpha e^{rn}} (G-y)f_{F_n}(y)dy\right\} \\ &= \frac{e^{-rn}}{1-\alpha}\left\{G\,F_{F_n}(G - V_\alpha e^{rn}) - \int_0^{G-V_\alpha e^{rn}} yf_{F_n}(y)dy\right\} \\ &= e^{-rn}\left\{G - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{G-V_\alpha e^{rn}} yf_{F_n}(y)dy\right\}. \end{aligned} \tag{93}$$

Če je, kot navadno privzamemo, $S_n \sim LN(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$, potem je za $\alpha \geq \xi$:

$$\begin{aligned} CTE_\alpha(L) &= e^{-rn}\left\{G - \frac{e^{n(\mu + \log(1-m) + \sigma^2/2)}}{1-\alpha}\right. \\ &\qquad \left.\times\, \Phi\left(\frac{\log(G - V_\alpha e^{rn}) - n(\mu + \log(1-m) + \sigma^2)}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\} \\ &= e^{-rn}\left\{G - \frac{e^{n(\mu+\log(1-m)+\sigma^2)}}{1-\alpha}\Phi(-z_\alpha - \sqrt{n}\sigma)\right\}. \end{aligned} \tag{94}$$

[20] V primeru, ko eksakten izračun ni mogoč, se poslužujemo simulacij z vrstilnimi statistikami.

Če pa je $\alpha < \xi$, potem je kvantil enak 0. Uporabimo enačbo (91), z $\beta' = \xi$ in $V_\alpha = V_\xi = 0$, tako, da je $CTE_\xi(X) = E[X|X > 0]$ in

$$CTE_\alpha(X) = \frac{(1-\xi)}{(1-\alpha)} CTE_\xi(X). \tag{95}$$

V tabeli 6 so predstavljeni rezultati pogojne tvegane vrednosti, kjer uporabimo enake parametre, kot v tabeli 5. Ponovno zanemarimo tveganje smrtnosti in prekinitev.

Tabela 6: Pogojna tvegana vrednost za 10-letno GMMB pogodbo, brez upoštevanja tveganja smrtnosti ali prekinitev.

Model / Parametri	ξ	$CTE_{90\%}$	$CTE_{95\%}$	$CTE_{99\%}$
Lognormal/MLE	0.9130	8.89	15.50	25.77

Prirejeno po Hardy (2003, str. 167).

3 MODELIRANJE KAPITALSKIH ZAHTEV ZA REALISTIČEN PORTFELJ

Modeliranja kapitalskih zahtev za življenjsko zavarovanje z garancijo smo se lotili na dva načina. Prvi način je aktuarski pristop, kjer modeliramo bodoče denarne tokove, drugi pa je pogled na zavarovalno pogodbo, kot opcijo, kjer za vrednotenje opcije uporabimo BSM model. Pri obeh izračunih se opremo na teorijo, opisano v poglavjih (2.2) in (2.3). Garancija, ki jo zavarovanje vsebuje, je najpreprostejša; jamčimo, da bomo ob času doživetja (GMMB) ali smrti (GMDB) izplačali vsaj toliko, kot je zavarovanec dotedaj vplačal v ločeni sklad. Model je postavljen v programu R, celotna koda je dodana v prilogi 5.

3.1 Opis portfelja in predpostavk

Privzeli smo, da imamo zavarovalni portfelj, sestavljen iz 2.937 polic, kjer zavarovanci premijo v ločen sklad vplačajo enkratno, ob času $t = 0$. Povprečna višina enkratne vplačane premije je 6.424,8 EUR, z minimalnim vplačilom 6.000 EUR, maksimalna enkratna premija v portfelju pa znaša 54.000 EUR. Celotna vplačana premija portfelja znaša 18.869.760 EUR. V portfelju je 62 % moških in 38 % žensk. Trajanje življenjskega zavarovanja z garancijama je 10 let, povprečna pristopna starost zavarovanca pa je 36 let.

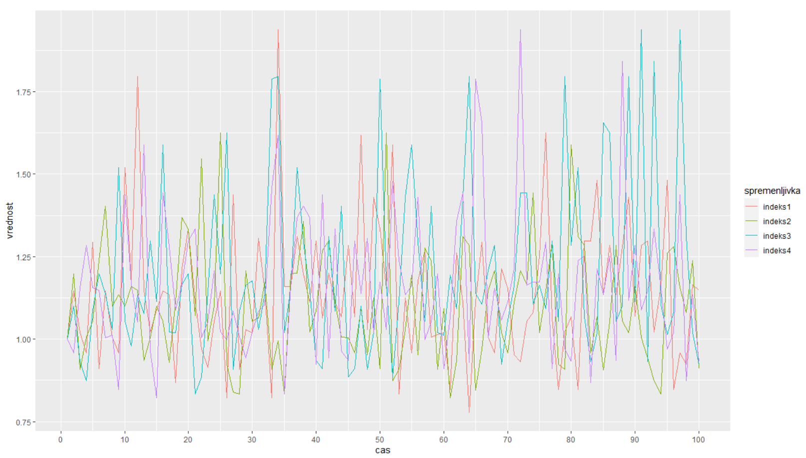
Za modeliranje obveznosti zavarovalnih pogodb z garancijami smo potrebovali predpostavke o smrtnosti in prekinitvah polic. Letna stopnja umrljivosti je enaka za oba spola, izračunali pa smo jo na podlagi tablic umrljivosti po spolu za leto 2014, ki smo jih pridobili iz spletne strani Statističnega urada Republike Slovenije. Prav tako smo pridobili tudi podatke o številu prebivalstva po spolu v letu 2014. Glede na spolno strukturo prebivalstva smo izpeljali letno stopnjo umrljivosti, ki je navedena v prilogi 2. V modelu smo letno stopnjo umrljivosti še linearno interpolirali, da smo dobili mesečno stopnjo umrljivosti (Gerber, 1997, str. 21 in 22). Predpostavka o deterministični stopnji prekinitev polic je vzeta iz literature Kochanski, 2010, str. 50 in je navedena v prilogi 3. Predpostavimo, da se letna stopnja prekinitev začne z 10 % v letu $t = 0$ in se letno znižuje za 1 %, dokler ne doseže 2 %. Tudi to smo linearno interpolirali in dobili mesečno stopnjo prekinitev. Pri izračunu kapitalskih zahtev smo uporabili netvegano obrestno mero v višini 6 % letno.

3.2 Izračun kapitalskih zahtev za garanciji z aktuarskim pristopom

Najprej smo se lotili modeliranja obveznosti garancij GMDB in GMMB z aktuarskim pristopom, ki je podrobneje razpisan v poglavju (2.2). Izračun kapitalskih zahtev smo izvedli na portfelju in predpostavkah, ki so na kratko opisane zgoraj. Izračun sedanje vrednosti bodočih obveznosti izhaja iz modeliranja bodočih denarnih tokov, ki jih na koncu diskontiramo z netvegano obrestno mero.

Začeli smo s simulacijo 100-ih razvojev delniškega indeksa, za obdobje 10-tih let. Predpostavili smo, da je ta porazdeljen lognormalno s parametroma $\mu = 0{,}14$ in $\sigma = 0{,}2$. Zavarovančeva premija se namreč takoj vloži v ločen sklad, ki pa se giblje skladno z razvojem delniškega indeksa. Delniški indeks je tudi izvor vse slučajnosti, saj je od njegove višine odvisno, ali bo do izplačila sploh prišlo. S_0 je kot v teoretičnem primeru enaka 1, potem pa se S_t (faktor akumulacije premoženja) generira s simulacijo. Na sliki 11 vidimo prve 4 simulacije razvoja delniškega indeksa v časovni dobi 100-ih mesecev. Indeksi močno skačejo, sčasoma pa v povprečju zrastejo, tako, kot bi pričakovali na delniških trgih. Mesečna upravljavska provizija, m, ki se odšteje iz ločenega računa, znaša 3 %. Za vsakega zavarovanca izračunamo, kakšna je vrednost njegovega premoženja ob času t, po odtegu upravljavske provizije m.

Slika 11: Simulacije razvoja delniškega indeksa



Vir: lastno delo.

Bodoči denarni tokovi zavarovalnice, ki izhajajo iz garancij GMDB in GMMB, so prejem marže za garanciji, če je polica še v veljavi in izplačilo v primeru smrti ter izplačilo ob doživetju. Maržo za tveganje garancij smo določili v višini $m_c = 0{,}005/12$ vrednosti premoženja in jo prejemamo, dokler je polica veljavna, kar pomeni, da zavarovanec pogodbe ne prekine in med njenim trajanjem ne umre. V modelu smo izračunali prihodnje denarne tokove tako:

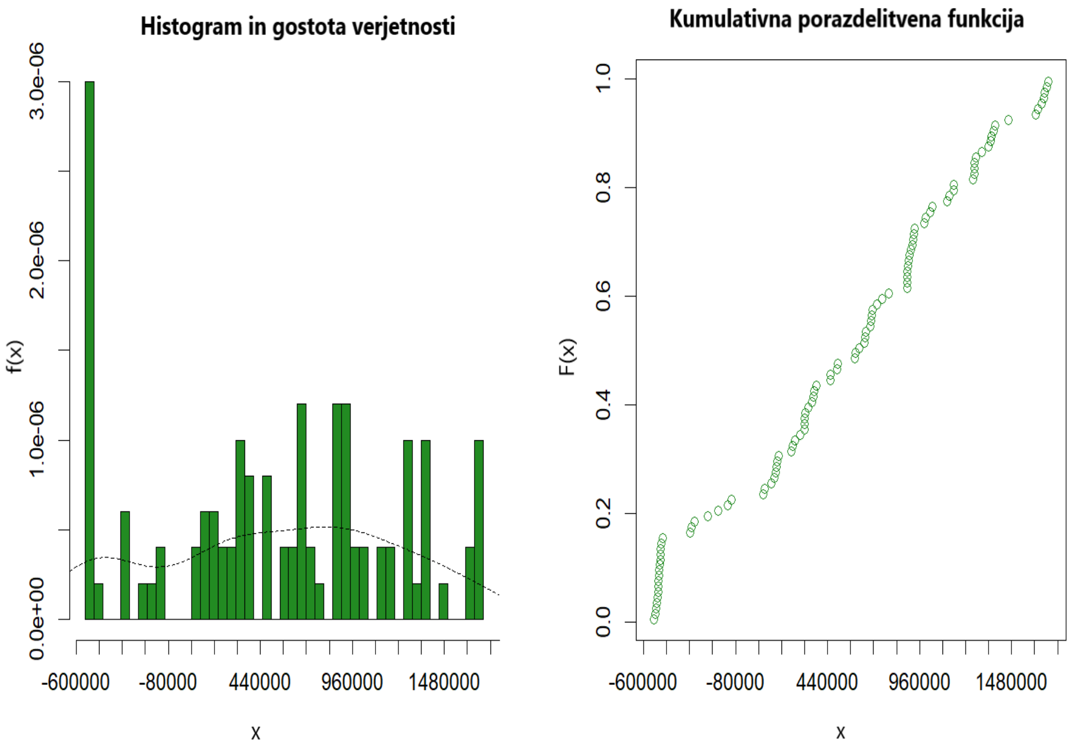
$$C_t = -{}_tp_x^{\tau} M_t + {}_{t-1}|_1 q_x^d (G - F_t)^+ + {}_np_x^{\tau}(G - F_n)^+, \qquad t = 0{,}1, \cdots, n. \tag{96}$$

To je obveznost v času t, ki jo diskontiramo z netvegano obrestno mero v višini 6 %, da dobimo sedanjo vrednost bodočih obveznosti. S tem dobimo slučajno spremenljivko bodoče izgube v času $t = 0$.

$$L_0 = \sum_{t=0}^{n} C_t e^{-rt}. \tag{97}$$

Histogram sedanje vrednosti bodoče izgube prikazuje slika 12, poleg nje pa je prikazana še njena kumulativna porazdelitvena funkcija. Vidimo, da je funkcija gostote verjetnosti zamaknjena v desno, nima pa težkega desnega repa.

Slika 12: Histogram, gostota verjetnosti in kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke bodoče izgube



Vir: lastno delo.

Za določitev kapitalskih zahtev z naslova garancij za ta portfelj smo izračunali tvegano vrednost (VaR), V_α, za percentile $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in $99{,}5\%.$ Ponovimo, da je V_α najmanjši znesek v netveganih sredstvih, tako, da je ob zapadlosti, verjetnost, da imamo dovoljšnjo količino, da izplačamo znesek iz garancij GMMB in GMDB, vsaj $1-\alpha$.

Zahtevani solventnostni kapital je po definiciji enak

$$SCR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}[X] = 1.681.840\ \textit{EUR} - 528.815{,}7\ \textit{EUR} = 1.153.024{,}4\ \textit{EUR},$$

kjer je percentil $\alpha = 99{,}5\%$ in matematično upanje spremenljivke izgube enako 528.815,7 EUR. Ker slučajna spremenljivka izgube nima težkih repov, bi lahko zagovarjali tudi privzem nižjega percentila α, npr. 95 %.

Izračunali smo tudi pričakovani primanjkljaj (ES) za percentile $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in $99{,}5\%.$ Če bi za kvantilno mero tveganja vzeli pričakovani primankljaj za namen izračuna zahtevanega kapitala pri $\alpha = 99{,}5\%$, bi dobili le malo višji znesek in sicer 1.157.238 EUR. Mere tveganj in zahtevani solventnostni kapital prikazuje tabela 7.

Tabela 7: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ *in* $99{,}5\%$

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	528.815,7	1.367.451,4	1.581.493,1	838.635,7	1.052.677,4
95%	95,0	528.815,7	1.629.977,3	1.668.467,2	1.101.161,6	1.139.651,5
99,5%	99,5	528.815,7	1.681.840,1	1.686.054,0	1.153.024,4	1.157.238,3

Vir: lastno delo.

Ker 6 % letna netvegana obrestna mera, ki smo jo uporabili pri izračunu kapitalskih zahtev, ni značilna za slovenski trg, smo izračunali kapitalske zahteve tudi ob uporabi 1 % letne netvegane obrestne mere.

Zahtevani solventnostni kapital pri percentilu $\alpha = 95\%$ je enak 1.814.075 EUR, matematično upanje spremenljivke izgube pa je enako 1.095.942 EUR. Uporaba nižje letne netvegane obrestne mere se odrazi v višjem zahtevanem solventnostnem kapitalu.

Tabela 8: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ *in* $99{,}5\%$ *z uporabo 1 % letne netvegane obrestne mere*

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	1.095.942,2	2.476.256,8	2.833.007,4	1.380.314,6	1.737.065,3
95%	95,0	1.095.942,2	2.910.016,8	2.977.823,0	1.814.074,6	1.881.880,8
99,5%	99,5	1.095.942,2	3.002.814,0	3.009.682,3	1.906.871,8	1.913.740,1

Vir: lastno delo.

3.3 Izračun kapitalskih zahtev za garanciji z uporabo opcij

V poglavju 2.3 smo opisali, kako se lotiti izračuna kapitalskih zahtev z naslova garancij z uporabo opcij na finančnih trgih. Garancijo repliciramo z evropsko prodajno opcijo, kot v enačbah (53) in (54). Tu enačbi ponovno navedemo.

$$BSP_0 = Ge^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0(1-m)^T\Phi(-d_1), \tag{98}$$

kjer je

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(S_0(1-m)^T/G) + (r+\sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T})} \\ &= \frac{\log(S_0/G) + (r+\log(1-m)+\sigma^2/2)T}{(\sigma\sqrt{T})} \end{aligned} \tag{99}$$

in $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Tako za izračun vrednosti GMMB, kot tudi GMDB moramo najprej poznati vrednost prodajne opcije v $t = 0$, to je BSP_0. Ceno prodajne opcije izračunamo na portfelju, opisanem v začetku poglavja 3, kjer pa predpostavimo enkratno vplačilo premije v času $t = 0$. Trajanje zavarovanja je 10 let. Parametri, ki nastopajo v B-S formuli so v modelu enaki:

$S_0 = Prem_{\{t=0\}}$

$G = S_0$

$T = 10$

$m = 3\,\%(letno)$

$r = 6\,\%(letno)$

$\sigma = 20\,\%.$

Vrednost sklada za polico i je v času $t = 0$ kar enaka enkratni vloženi premiji na polici. BSP_0 za portfelj znaša 1.541.386 EUR. Za izračun vrednosti GMMB uporabimo vrednost prodajne opcije v času $t = 0$ in jo pomnožimo z verjetnostjo preživetja police do časa doživetja. Izračunamo, da je vrednost GMMB za ta portfelj enaka 852.891,7 EUR. Za izračun vrednosti GMDB pa uporabimo aproksimacijo iz formule (56), ki jo tu navedemo ponovno in dobimo, da je vrednost GMDB enaka 208,45 EUR.

$$H(0) = \sum_{t=1}^{n} BSP_0(t)\ {}_{t-1}p_x^{\tau}\ {}_1q_{x,t-1}^{d}, \tag{100}$$

Skupno bi od zavarovancev za produkt z GMMB in GMDB torej prejeli 853.100,15 EUR, v povprečju zavarovanec za opciji plača 290,47 EUR.

Pri modeliranju kapitalskih zahtev z dinamičnim varovanjem pred tveganjem smo sledili teoriji, opisani v poglavjih (2.3.4 - 2.3.6). Za oblikovanje kapitalskih zahtev je potrebno izračunati napako pri varovanju pred tveganjem in transakcijske stroške v določenem mesecu. Enačbi tu navedemo še enkrat:

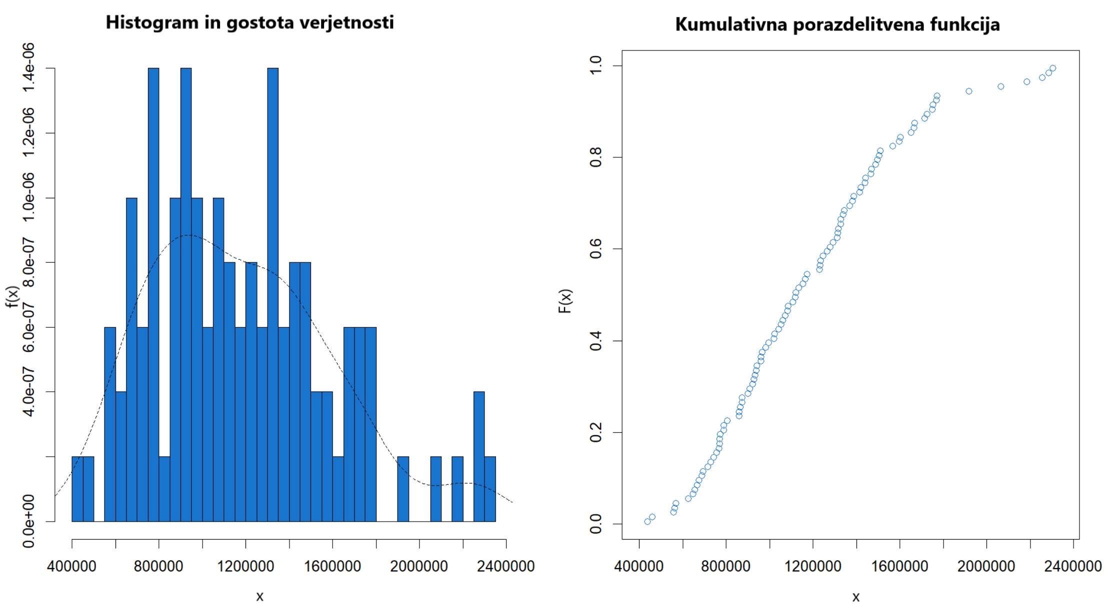
$$HE_t = H(t) + {}_{t-1}q_x^d((G - F_t)^+) - H(t^-), \tag{101}$$

$$TC_t = \tau S_t |\Psi_t - \Psi_{t-1}|. \tag{102}$$

Napake pri varovanju in transakcijske stroške še diskontiramo na čas $t = 0$, da dobimo sedanjo pričakovano vrednost bodočih izgub. Pri izračunu transakcijskih stroškov je $\tau = 0{,}01$.

Histogram sedanje vrednosti bodočih obveznosti slučajne spremenljivke napake pri varovanju pred tveganjem prikazuje slika 13, poleg nje pa je prikazana še njena kumulativna porazdelitvena funkcija. Opazimo, da je napaka pri varovanju pred tveganjem porazdeljena čisto drugače, kot je bila pri aktuarskem pristopu porazdeljena slučajna spremenljivka izgube. Ima tudi malce težji desni rep, kar je posledica visoke predpostavljene volatilnosti sklada.

Slika 13: Histogram, gostota verjetnosti in kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke napake pri varovanju pred tveganjem



Vir: lastno delo.

Ponovno je bil cilj izračunati zahtevani solventnostni kapital, kar lahko vidimo v tabeli 9.

Tabela 9: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in $99{,}5\%$ iz naslova napake pri varovanju pred tveganjem

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	1.177.972,6	1.727.398,9	2.005.035,1	549.426,3	827.062,5
95%	95,0	1.177.972,6	1.925.204,5	2.218.882,7	747.231,9	1.040.910,1
99,5%	99,5	1.177.972,6	2.294.289,9	2.304.134,4	1.116.317,2	1.126.161,7

Vir: lastno delo.

Zahtevani solventnostni kapital pri $99{,}5\%$ percentilu je sedaj enak

$$SCR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}[X] = 2.294.290\ \textit{EUR} - 1.177.973\ \textit{EUR} = 1.116.317{,}2\ \textit{EUR}.$$

Če bi za izračun kapitalskih zahtev uporabili pričakovani primanjkljaj pri $99{,}5\%$ percentilu, bi te znašale 1.126.161,7 EUR.

Ker se ob trgovanju pojavljajo transakcijski stroški, je potrebno oblikovati kapitalske zahteve tudi zanje. Tabela 10 prikazuje matematično upanje transakcijskih stroškov, mere tveganja in zahtevani solventnostni kapital.

Tabela 10: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in $99{,}5\%$ iz naslova transakcijskih stroškov

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	12.848,2	31.723,1	41.230,4	18.874,9	28.382,2
95%	95,0	12.848,2	39.541,5	45.840,0	26.693,3	32.991,8
99,5%	99,5	12.848,2	49.437,2	51.649,7	36.589,0	38.801,5

Vir: lastno delo.

Kapitalske zahteve iz naslova transakcijskih stroškov pri $99{,}5\%$ percentilu z uporabo tvegane vrednosti znašajo 36.589,02 EUR. Torej so kapitalske zahteve pri pristopu dinamičnega varovanja pred tveganjem enake 1.152.906,22 EUR.

Podobno kot pri aktuarskem izračunu tudi tu navedemo izračun kapitalskih zahtev z upoštevano 1 % letno netvegano obrestno mero. Tabela 11 prikazuje zahtevani solventnostni kapital iz naslova napake pri varovanju pred tveganjem.

Tabela 11: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in 99,5% iz naslova napake pri varovanju pred tveganjem z uporabo 1 % letne netvegane obrestne mere

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	3.088.954,3	4.259.439,8	4.980.304,9	1.170.485,5	1.891.350,6
95%	95,0	3.088.954,3	4.829.188,7	5.245.850,2	1.740.234,5	2.156.895,9
99,5%	99,5	3.088.954,3	5.608.253,9	5.805.255,8	2.519.299,7	2.716.301,5

Vir: lastno delo.

V tabeli 12 se nahaja zahtevani solventnostni kapital iz naslova transakcijskih stroškov, ob upoštevanju 1 % letne netvegane obrestne mere.

Tabela 12: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in 99,5% iz naslova transakcijskih stroškov z uporabo 1 % letne netvegane obrestne mere

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	27.947,2	67.775,9	82.320,1	39.828,7	54.372,9
95%	95,0	27.947,2	80.124,8	91.823,4	52.177,6	63.876,1
99,5%	99,5	27.947,2	100.823,1	106.397,7	72.875,9	78.450,4

Vir: lastno delo.

Zahtevani solventnostni kapital z uporabo dinamičnega varovanja pred tveganjem z upoštevanjem 1 % letne netvegane obrestne mere pri 95 % percentilu znaša 1.792.411,58 EUR. Zahtevani solventnostni kapital z aktuarskim izračunom pri 95 % percentilu znaša 1.814.075 EUR. Razlika med izračunoma kapitalskih zahtev je pri 99,5 % percentilu večja, ker ima slučajna spremenljivka napake pri varovanju pred tveganjem težje repe.

Pokazali smo, da z uporabo različnih pristopov dobimo podobno visoke kapitalske zahteve. S tem trdimo, da sta oba pristopa primerna za modeliranje produktov z garancijami. Opazimo tudi, da kapitalske zahteve niso nizke, kar je posledica visoke volatilnosti ločenega sklada in dejstva, da imamo dolgoročno življenjsko polico.

3.4 Izračun kapitalskih zahtev pri letnem vplačevanju premije z aktuarskim pristopom

Zanimalo nas je še, kakšne bi bile kapitalske zahteve za produkt z garancijama GMMB in GMDB, če bi zavarovanci vplačevali premijo letno in bi uporabili netvegano obrestno mero, ki jo predpiše EIOPA. Privzeli smo podoben zavarovalni portfelj, kot v poglavju (3.1). Ta je sestavljen iz 2.937 polic, razlika pa je v tem, da zavarovanci premijo vplačujejo letno. Povprečna višina letne vplačane premije je tako enaka 642,5 EUR, z minimalnim vplačilom 600 EUR, maksimalna letna premija v portfelju pa znaša 5.400 EUR. Zaradi enostavnosti privzamemo, da imajo vse police enak datum začetka zavarovanja in da vsi zavarovanci vplačujejo premijo prvi mesec v letu.

Tako kot prej simuliramo 100 razvojev delniškega indeksa, ki je porazdeljen log-normalno z $\mu = 0{,}14$ in $\sigma = 0{,}2$.

Maržo za tveganje garancij smo določili v višini $m_c = 0{,}0005/12$ vrednosti premoženja in jo prejemamo, dokler je polica veljavna, kar pomeni, da zavarovanec pogodbe ne prekine in med njenim trajanjem ne umre. V modelu smo izračunali denarne tokove prejema marže malce drugače:

$$\begin{aligned} C_t &= {}_tp_x^\tau M_t \\ &= {}_tp_x^\tau (F_{t^-})\, m_c \\ &= {}_tp_x^\tau \Big(F_{(t-1)} \frac{S_t}{S_{t-1}} + S_t P_t \Big)(1-m)\, m_c, \qquad t = 0{,}1, \cdots, n-1. \end{aligned} \tag{103}$$

Tu je ${}_tp_x^\tau$ verjetnost, da zavarovanec ne umre in ne prekine pogodbe. Vrednost premoženja je izračunana nekoliko drugače kot v teoretičnem modelu, ker zavarovanci premijo vplačujejo letno. Vrednost njegovega premoženja se tako izračuna kot vrednost premoženja v času $t-1$, pomnožena z razvojem indeksa med časoma $t-1$ in t, čemur prištejemo še vložek premije P_t pomnožene z delniškim indeksom v času t, če v tem času pride do vplačila. Za končno vrednost premoženja se zavarovancu odtegne še mesečna upravljavska provizija m. Vse skupaj potem množimo z maržo za tveganje garancij, m_c. Denarnega toka na tej točki še nismo predznačevali, je pa ta tok predznačen negativno, saj nam niža bodočo obveznost.

Denarni tok za izplačilo garancije GMDB je izračunan kot razlika med garancijo in vrednostjo premoženja v času t, če je ta pozitivna, pomnožena z verjetnostjo smrti v obdobju $t-1$ in t. Verjetnost smrti v obdobju $t-1$ in t, ${}_{t-1}|_1 q_x^d$, pomeni, da je zavarovanec preživel do časa $t-1$, potem pa v roku enega meseca umrl.

$$C_t = {}_{t-1}|_1 q_x^d (G - F_t)^+, \qquad t = 0{,}1, \cdots, n. \tag{104}$$

Denarni tok izplačila z naslova garancije GMMB je enak:

$$C_n = {}_np_x^\tau (G - F_n)^+. \tag{105}$$

To pomeni, da ob času n, doživetju, izplačamo razliko med vrednostjo garancije in vrednostjo premoženja, če je le-ta pozitivna. Pri tem je ${}_np_x^\tau$ verjetnost preživetja zavarovalne pogodbe do časa n.

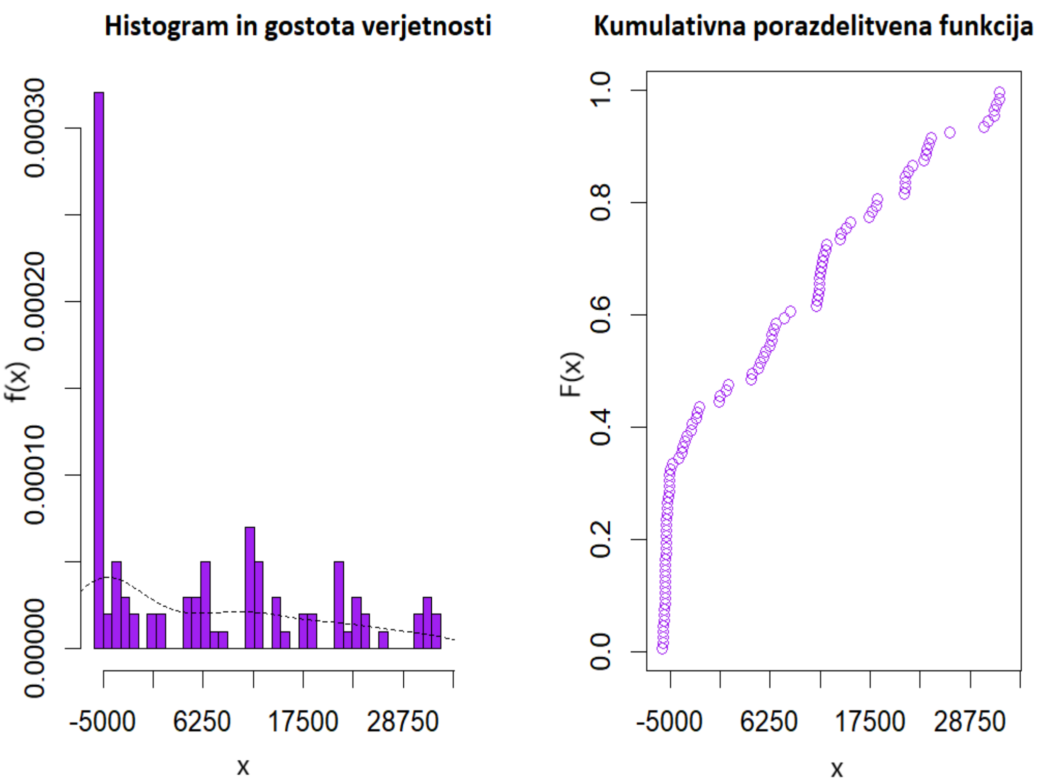
Končni denarni tok z naslova garancij je enak:

$$C_t = -\textit{prejem marže} + \textit{izplačilo GMDB} + \textit{izplačilo GMMB}. \tag{106}$$

Obveznost v času t diskontiramo z netvegano obrestno mero predpisano od EIOPE, da dobimo sedanjo vrednost bodočih obveznosti.

Na sliki 14 vidimo, da se slučajna spremenljivka izgube porazdeljuje podobno, kot pri aktuarskem pristopu z enkratnim vplačilom premije, vendar pa so velikostni redi zelo drugačni, saj je izplačilo $(G - F_t)^+$ veliko manjše, kot pri enkratnem vplačilu premije. Zato pri letnem vplačevanju premije predpostavimo tudi manjšo maržo, ki jo za garanciji plača zavarovanec.

Slika 14: Histogram, gostota verjetnosti in kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke izgube pri letnem vplačevanju premije



Vir: lastno delo.

Zahtevani solventnostni kapital pri $99{,}5\%$ percentilu z uporabo tvegane vrednosti znaša 25.649,64 EUR, kar vidimo tudi v tabeli 13.

Tabela 13: Zahtevani solventnostni kapital in mere tveganj pri percentilih $\alpha = 90\%,\ 95\%$ in $99{,}5\%$ pri letnem vplačevanju premije

	alfa	E[X]	VaR	ES	SCR_VaR	SCR_ES
90%	90,0	6.404,5	23.917,0	29.479,0	17.512,5	23.074,6
95%	95,0	6.404,5	30.839,4	31.737,6	24.434,9	25.333,2
99,5%	99,5	6.404,5	32.054,1	32.088,8	25.649,6	25.684,3

Vir: lastno delo.

SKLEP

Cilj magistrskega dela je bil ugotoviti, kako bo razvoj inovativnih življenjskih produktov vplival na solventnost zavarovalnice. V prvem poglavju smo namreč spoznali, da je zavarovalnih produktov z vključenimi produkti in opcijami na trgu vedno več, ker pa so relativno novi, ne moremo reči ali so oblikovane rezervacije za njih zadostne.

Vrednotili smo preprosto življenjsko zavarovanje, z vključenima garancijama GMMB in GMDB, ki izplača zavarovancu ob zavarovalnem dogodku (tj. smrtjo zavarovanca ali doživetjem police) višjo izmed vrednosti ločenega sklada in garantirane vrednosti, ki je kar enaka vloženi premiji v ločeni sklad. Najprej smo za vrednotenje uporabili aktuarski model, pri čimer smo privzeli fiktiven portfelj življenjskih zavarovanj, ki bi se lahko znašel na slovenskem trgu.

Potem smo se lotili izračuna še z uporabo finančih opcij, natančneje evropske prodajne opcije, z uporabo BSM modela. Pri obeh izračunih smo privzeli, da vsi zavarovanci vplačajo premijo enkratno v začetku zavarovalne pogodbe. Uporabili smo netvegano obrestno mero v višini 6 %. Oba izračuna nam podata podobno višino kapitalskih zahtev, zato sklenemo, da sta oba primerna za modeliranje le-teh. Ker smo izpostavljeni finančnemu tveganju in visoki volatilnosti indeksa, smo morali oblikovati precej višji zahtevani solventnosti kapital, kot ga navadno dobimo pri modeliranju kapitalskih zahtev za življenjske produkte, kjer finančno tveganje ni prisotno.

Ker na trgu lahko najdemo marsikakšno variacijo pogodb z garancijami, smo modelirali kapitalske zahteve še za produkt z vključenima garancijama GMMB in GMDB, kjer zavarovanci premijo vplačujejo letno. Pri izračunu smo uporabili obrestno mero, predpisano od EIOPE.

Zaključujemo, da so življenjski produkti z vključenimi garancijami in opcijami na trgu zaželeni, za njih pa je potrebno oblikovati ustrezne rezervacije. Ker smo modelirali precej enostavni garanciji, produkt še ni tako zelo kapitalsko zahteven, če pa bi ponujali vsaj nek % zajamčenega donosa, pa bi lahko videli že precej drugačno sliko. Najbolj kapitalsko težki produkti bi bila rentna zavarovanja, ki bi ponujala zajamčen donos. Tedaj smo poleg tveganju gibanja ločenega sklada, obrestne mere, stopnji smrtnosti in prekinitev močno izpostavljeni tudi inflaciji.

Vsekakor je modeliranje primernih rezervacij za take produkte zanimivo, je pa močno odvisno od številčnosti in kompleksnosti garancij, ki jih vključimo v življenjsko zavarovanje. Če zavarovancem zavarovalnica nudi veliko različnih garancij in obveznosti, mora biti tudi cena za te visoka.

LITERATURA IN VIRI

1. Bacinello, A. R., Millossovich, P., Olivieri, A. & Pitacco, E. (2011). Variable annuities: a unifying valuation approach. *Insurance: Mathematics & Economics, 49*(3), 285–297. doi: 10.1016/j.insmatheco.2011.05.003.
2. BaFin. (2017). *State of the insurance sector. Article from the Annual Report 2016 of the BaFin.* Pridobljeno 26. oktobra 2021 iz https://www.bafin.de/EN/PublikationenDaten/Jahresbericht/Jahresbericht2016/Kapitel4/Kapitel4_2/Kapitel4_2_4/kapitel4_2_4_node_en.html
3. Bauer, D., Kling, A. & Russ, J. (2008). A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities. *ASTIN Bulletin, 38*(2), 621–651.
4. Berdin, E., Gründl, H. & Kubitza C. (2017). Rising interest rates, lapse risk, and the stability of life insurers. *ICIR Working Paper Series 29/17.* Frankfurt am Main: Goethe University Frankfurt.
5. Carr, P. & Wu, L. (2004). *Static Hedging of Standard Options.* NYU Tandon Research Paper No. 585451. doi: 10.2139/ssrn.585451.
6. Cafnik, J. (2013). *Vrednotenje finančnih garancij in opcij v življenjskih zavarovanjih* (magistrsko delo). Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko.
7. CEIOPS. (2009). *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Actuarial and statistical methodologies to calculate the best estimate.* Frankfurt: CEIOPS.
8. CLHIA. (2019). *Canadian Life & Health Insurance Facts. 2019 Edition.* Pridobljeno 22. oktobra 2021 iz https://www.clhia.ca/web/CLHIA_LP4W_LND_Webstation.nsf/resources/Factbook_2/$file/2019+Factbook+English.pdf
9. Dežman, E. (2019). *Življenjska zavarovanja z vključenimi garancijami in opcijami v okolju nizkih obrestnih mer* (magistrsko delo). Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
10. Dickson, D. C. M., Hardy, M. R. & Waters, H. R. (2012). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks* (1. izd). New York: Cambridge University Press. ISBN-13: 978-0-511-65169-4.
11. Evropski parlament. (2009). Direktive: Direktiva 2009/138/ES evropskega parlamenta in sveta z dne 25. novembra 2009 o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II). *Uradni list Evropske unije. 2009.* Pridobljeno 11. aprila 2020 iz https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=en

12. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (2010). *QIS5 Technical Specifications.* Pridobljeno 10. novembra 2020 iz http://www.mmenzietti.altervista.org/TAAV/technical_specifications_QIS5_en.pdf
13. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (2011). *EIOPA Report on the fifth Quantative Impact Study (QIS5) for Solvency II.* Pridobljeno 6. maja 2020 iz https://register.eiopa.europa.eu/Publications/Reports/QIS5_Report_Final.pdf
14. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (2015). *Smernice o vrednotenju zavarovalno-tehničnih rezervacij.* Pridobljeno 10. novembra 2020 iz https://www.eiopa.europa.eu/content/guidelines-valuation-technical-provisions_en
15. Finkelstein, G., McWilliam, E., Nagle, S., de Beus, P., van Leijenhorst, R., Maas, L. & Cui, J. (2003). *Guarantee and embedded options.* Pridobljeno 30. aprila 2020 iz http://www.actuaries.org/AFIR/colloquia/Maastricht/DeBeus.pdf
16. Gatzert, N. (2009). Implicit options in life insurance: An overview. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 98*(2), 141–164. doi: 10.1007/s12297-008-0046-2.
17. Gerber, H. U. (1997). *Life insurance mathematics* (3. izd.). Berlin: Springer Science & Business Media.
18. Hardy, M. (2003). *Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance.* Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
19. Institute and Faculty of Actuaries. (2016). *SOLVENCY II – LIFE INSURANCE.* Pridobljeno 3. novembra 2021 iz https://www.actuaries.org.uk/system/files/field/document/IandF_SA2_SolvencyII_2016.pdf
20. Kochanski, M. (2010). *Solvency capital requirement for German unit-linked insurance products.* Pridobljeno 21. marca 2020 iz http://www.risk-insurance.de/aufsaetze/201009/Kochanski.pdf/
21. Kochanski, M. & Karnarski, B. (2011). Solvency capital requirement for hybrid products. *European Actuarial Journal,* 1. doi: 10.1007/s13385-011-0040-2.
22. McKinsey and Company. (2020). *The future of life insurance: Reimagining the industry for the decade ahead.* Pridobljeno 23. aprila 2022 iz https://www.mckinsey.com/industries/financial-services/our-insights/the-future-of-life-insurance-reimagining-the-industry-for-the-decade-ahead
23. Milevsky, M. A. (2006). *The calculus of retirement income.* New York: Cambridge University Press.
24. OECD. (2016). *Life Annuity Products and Their Guarantees.* Paris: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264265318-en.
25. Olivieri, A. & Pitacco, E. (2011). *Introduction to Insurance Mathematics.* Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-16029-5.
26. O'Malley, P. (2007). *Development of GMxB markets in Europe.* Ireland: Life Strategies, Ltd. Pridobljeno 10. maja 2020 iz http://www.actuaries.org/LIFE/Events/Stockholm/OMalley.pdf
27. Pitacco, E. (2012). *From "benefits" to "guarantees": looking at life insurance products*

in a new framework (Working paper). (CEPAR), Sydney: University of New South Wales.

28. Pitacco, E. (2013). Options and guarantees in life insurance and pension products. *10th Fall School.* Budimpešta: Hungarian Actuarial Society.
29. Pitacco, E. (2015). *Actuarial values for Long-term Care insurance products. A sensitivity analysis.* Zurich: IAA MWG meeting. Pridobljeno 6. oktobra 2021 iz http://www.actuaries.org/CTTEES_TFM/Documents/MWG_Zurich_Item14_LTC_Pitacco.pdf
30. RIJ Publishing LLC. (2020). *For annuities, 2019 was great. 2020 is TBD.* Pridobljeno 23. oktobra 2021 iz https://retirementincomejournal.com/article/for-annuities-2019-was-great-2020-is-tbd/
31. Rudden, J. (2020). Statista. *Value of direct premiums written by life/annuity insurance industry in the United States from 2011 to 2019, by line.* Pridobljeno 23. oktobra 2021 iz https://www.statista.com/statistics/214555/total-direct-premiums-written-of-us-life-and-health-insurance-industry/
32. Rüfenacht, N. (2012). *Implicit Embedded Options in Life Insurance Contracts.* Basel: Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-3-7908-2843-6.
33. Slapar, M. (2011). Tržno vrednotenje garancij v življenjskih zavarovanjih. *Zavarovalniški horizonti, 7*(3), 25-41.
34. S&P Global Ratings. (2018). *European Life Insurers Are Playing The Long Game With Product Shifts.* Frankfurt. Pridobljeno 21. marca 2020 iz https://www.allnews.ch/sites/default/files/files/European%20Life%20Insurers_22%20Feb%202018.pdf
35. Statista Research Department (2020). *Life insurance industry in the United Kingdom (UK) - statistics & facts.* Pridobljeno 23. oktobra 2021 iz https://www.statista.com/topics/6688/life-insurance-industry-uk/#dossierSummary
36. Statistični urad Republike Slovenije. (brez datuma). *Podatkovni portal SI-STAT.* Pridobljeno 10. maja 2020 iz https://pxweb.stat.si/SiStat
37. Slovensko zavarovalno združenje, GIZ, (2020). *Statistični zavarovalniški bilten 2020.* Pridobljeno 26. oktobra 2021 iz http://szb.zav-zdruzenje.si/szb-2020.html#Bilten/Zavarovanje
38. Zavarovalnica Triglav, d.d. (2019): *Poročilo o solventnosti in finančnem položaju Zavarovalnice Triglav, d.d., za leto 2019.* Pridobljeno 26. oktobra 2021 iz https://letnoporocilo.triglav.eu/storage/doc/202004/sfcrskupina2019final.pdf
39. Žnidarčič, A. (2016). *Udeležba v dobičku življenjskih zavarovanj* (magistrsko delo). Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

PRILOGE

Priloga 1: Kanadske tablice smrtnosti

Stopnje smrtnosti in preživetja povzete po kanadskih tablicah smrtnosti. Ob času $t = 0$ privzamemo, da je zavarovanec star 50 let, kjer je t izražen v mesecih. Neodvisna stopnja odstopa je 0,667% mesečno pri vseh starostih.

t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_tp^{\tau}_x$	${}_{t\vert 1}q^d_x$	t	$p^{\tau}_{x,t}$	${}_tp^{\tau}_x$	${}_{t\vert 1}q^d_x$
0	0.99307	1.00000	0.00029				
1	0.99307	0.99307	0.00029	45	0.99293	0.72911	0.00031
2	0.99306	0.98618	0.00029	46	0.99292	0.72396	0.00031
3	0.99306	0.97934	0.00029	47	0.99292	0.71883	0.00031
4	0.99306	0.97255	0.00029	48	0.99292	0.71374	0.00031
5	0.99306	0.96580	0.00029	49	0.99291	0.70869	0.00032
6	0.99305	0.95909	0.00029	50	0.99291	0.70366	0.00032
7	0.99305	0.95243	0.00029	51	0.99290	0.69867	0.00032
8	0.99305	0.94581	0.00029	52	0.99290	0.69372	0.00032
9	0.99304	0.93923	0.00029	53	0.99290	0.68879	0.00032
10	0.99304	0.93270	0.00029	54	0.99289	0.68390	0.00032
11	0.99304	0.92621	0.00029	55	0.99289	0.67903	0.00032
12	0.99304	0.91976	0.00029	56	0.99288	0.67420	0.00032
13	0.99303	0.91336	0.00029	57	0.99288	0.66941	0.00032
14	0.99303	0.90700	0.00030	58	0.99287	0.66464	0.00032
15	0.99303	0.90067	0.00030	59	0.99287	0.65990	0.00032
16	0.99302	0.89439	0.00030	60	0.99287	0.65520	0.00032
17	0.99302	0.88816	0.00030	61	0.99286	0.65052	0.00032
18	0.99302	0.88196	0.00030	62	0.99286	0.64588	0.00032
19	0.99302	0.87580	0.00030	63	0.99285	0.64127	0.00032
20	0.99301	0.86968	0.00030	64	0.99285	0.63668	0.00032
21	0.99301	0.86361	0.00030	65	0.99284	0.63213	0.00032
22	0.99301	0.85757	0.00030	66	0.99284	0.62761	0.00033
23	0.99300	0.85157	0.00030	67	0.99283	0.62311	0.00033
24	0.99300	0.84561	0.00030	68	0.99283	0.61865	0.00033
25	0.99300	0.83970	0.00030	69	0.99282	0.61421	0.00033
26	0.99299	0.83382	0.00030	70	0.99282	0.60980	0.00033
27	0.99299	0.82797	0.00030	71	0.99282	0.60542	0.00033
28	0.99299	0.82217	0.00030	72	0.99281	0.60107	0.00033
29	0.99298	0.81640	0.00030	73	0.99281	0.59675	0.00033
30	0.99298	0.81067	0.00031	74	0.99280	0.59246	0.00033
31	0.99298	0.80498	0.00031	75	0.99280	0.58820	0.00033
32	0.99297	0.79933	0.00031	76	0.99279	0.58396	0.00033
33	0.99297	0.79371	0.00031	77	0.99279	0.57975	0.00033
34	0.99297	0.78813	0.00031	78	0.99278	0.57557	0.00033
35	0.99296	0.78259	0.00031	79	0.99278	0.57141	0.00033
36	0.99296	0.77708	0.00031	80	0.99277	0.56728	0.00033
37	0.99296	0.77161	0.00031	81	0.99277	0.56318	0.00033
38	0.99295	0.76618	0.00031	82	0.99276	0.55911	0.00033
39	0.99295	0.76078	0.00031	83	0.99276	0.55506	0.00033
40	0.99295	0.75541	0.00031	84	0.99275	0.55104	0.00033
41	0.99294	0.75008	0.00031	85	0.99274	0.54704	0.00034
42	0.99294	0.74479	0.00031	86	0.99274	0.54307	0.00034
43	0.99293	0.73953	0.00031	87	0.99273	0.53913	0.00034
44	0.99293	0.73430	0.00031	88	0.99273	0.53521	0.00034

Priloga 2: Slovenske tablice smrtnosti za leto 2014

starost	verjetnost smrti
0	0,0018303
1	0,0000928
2	0,0001356
3	0,0000446
4	0,0000000
5	0,0000447
6	0,0001404
7	0,0000994
8	0,0001057
9	0,0000000
10	0,0000552
11	0,0001111
12	0,0001104
13	0,0001081
14	0,0001617
15	0,0001096
16	0,0001081
17	0,0002052
18	0,0002558
19	0,0004025
20	0,0002929
21	0,0003342
22	0,0006598
23	0,0003003
24	0,0003369
25	0,0004734
26	0,0002200
27	0,0003679
28	0,0003388
29	0,0003535
30	0,0005604
31	0,0004804
32	0,0005565
33	0,0007353
34	0,0006335
35	0,0007219
36	0,0008333
37	0,0008928
38	0,0007594
39	0,0009242
40	0,0008031
41	0,0007954
42	0,0011703
43	0,0010970
44	0,0014287
45	0,0017532
46	0,0019437
47	0,0017700
48	0,0019466
49	0,0023280
50	0,0028382
51	0,0028765
52	0,0037997
53	0,0033373
54	0,0041156
55	0,0045738
56	0,0050117
57	0,0060506
58	0,0063498
59	0,0067864
60	0,0079076
61	0,0083535
62	0,0099628
63	0,0103240
64	0,0108761
65	0,0110453
66	0,0117818
67	0,0127696
68	0,0136508
69	0,0168844
70	0,0161207
71	0,0196607
72	0,0196174
73	0,0243641
74	0,0243495
75	0,0258165
76	0,0299635
77	0,0310318
78	0,0372517
79	0,0438318
80	0,0492885
81	0,0553405
82	0,0616704
83	0,0729589
84	0,0828005
85	0,0964909

Priloga 3: Stopnja prekinitev

leto trajanja pogodbe	stopnja prekinitev
1	10%
2	9%
3	8%
4	7%
5	6%
6	5%
7	4%
8	3%
9	2%
10	2%

Priloga 4: Netvegana obrestna mera

leto	RFR						
1	-0,635%	41	1,419%	81	2,478%	121	2,848%
2	-0,635%	42	1,467%	82	2,492%	122	2,854%
3	-0,615%	43	1,514%	83	2,505%	123	2,860%
4	-0,584%	44	1,559%	84	2,518%	124	2,866%
5	-0,536%	45	1,602%	85	2,531%	125	2,872%
6	-0,486%	46	1,643%	86	2,543%	126	2,877%
7	-0,446%	47	1,683%	87	2,555%	127	2,883%
8	-0,387%	48	1,722%	88	2,567%	128	2,889%
9	-0,337%	49	1,759%	89	2,578%	129	2,894%
10	-0,287%	50	1,794%	90	2,590%	130	2,899%
11	-0,241%	51	1,829%	91	2,601%	131	2,905%
12	-0,187%	52	1,862%	92	2,611%	132	2,910%
13	-0,151%	53	1,894%	93	2,622%	133	2,915%
14	-0,113%	54	1,925%	94	2,632%	134	2,920%
15	-0,079%	55	1,954%	95	2,643%	135	2,925%
16	-0,061%	56	1,983%	96	2,652%	136	2,930%
17	-0,051%	57	2,011%	97	2,662%	137	2,935%
18	-0,037%	58	2,038%	98	2,672%	138	2,940%
19	-0,015%	59	2,064%	99	2,681%	139	2,945%
20	0,020%	60	2,089%	100	2,690%	140	2,949%
21	0,072%	61	2,114%	101	2,699%	141	2,954%
22	0,134%	62	2,137%	102	2,708%	142	2,958%
23	0,205%	63	2,160%	103	2,717%	143	2,963%
24	0,280%	64	2,183%	104	2,725%	144	2,967%
25	0,357%	65	2,204%	105	2,733%	145	2,972%
26	0,436%	66	2,225%	106	2,741%	146	2,976%
27	0,515%	67	2,245%	107	2,749%	147	2,980%
28	0,593%	68	2,265%	108	2,757%	148	2,984%
29	0,669%	69	2,284%	109	2,765%	149	2,989%
30	0,744%	70	2,303%	110	2,773%	150	2,993%
31	0,817%	71	2,321%	111	2,780%		
32	0,887%	72	2,339%	112	2,787%		
33	0,955%	73	2,356%	113	2,794%		
34	1,021%	74	2,373%	114	2,801%		
35	1,085%	75	2,389%	115	2,808%		
36	1,146%	76	2,405%	116	2,815%		
37	1,205%	77	2,420%	117	2,822%		
38	1,262%	78	2,435%	118	2,828%		
39	1,316%	79	2,450%	119	2,835%		
40	1,369%	80	2,464%	120	2,841%		

Priloga 5: R koda

Izračun kapitalskih zahtev z aktuarskim pristopom.

```
## podatki

library(lubridate)
library(readxl)
library(ggplot2)

podatki_za_magistrsko <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/podatki_za_mag_2.xlsx

predpostavke_2 <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/predpostavke_2.xlsx")

predpostavke <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero
/Moja magistrska naloga/predpostavke.xlsx", sheet = "prekinitve", range = "E3:H183")

## datumi (od 2021/01 do 2031/01 izračunavamo denarne tokove iz naslova garancij)
datumi <- seq(as.Date("2021/01/01"), as.Date("2031/01/01"), by = "month")
mesec <- format(datumi,"%m")
mesec <- as.integer(mesec)
podatki_mag <- data.frame(podatki_za_magistrsko)
matrika <- data.frame(datumi, mesec)
```

Za vsako polico poiščemo stopnjo umrljivosti, stopnjo prekinitve in verjetnost preživetja.

```
starost_j = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
verj_pr= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
verj_smrti = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
prekinitve = c(nrow=length(datumi))
for (j in 1:length(podatki_mag$DOB_1)){
  for (i in 1:length(datumi)){
    starost_j[i,j]= year(matrika[i,1]) - year(podatki_mag[j,15]) - 10
    dobiverj <- predpostavke_2$verjetnost
    names(dobiverj) <- predpostavke_2$starost
    prekinitve[i] <- i
    dobi_st_prekin <- predpostavke$`letno % prekinitev`
    names(dobi_st_prekin) <- predpostavke$mesec
    ##surova verj prez
    verj_pr[i,j] <- (1-(1-(1 - unname(dobiverj[starost_j[i,j]])) ^(1/12)))
    - (1 - (1 - unname(dobi_st_prekin[prekinitve[i]])) ^ (1 / 12))
    ##surova verj smrti
    verj_smrti[i,j] <- (1-(1 - unname(dobiverj[starost_j[i,j]]))^(1/12))
  }
}
starost_mat = cbind(matrika, starost_j)

## PREMIJA -- enkratno vpračilo ob t=0, vsi zavarovanci
vpl_prem= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
  for (i in 1:(length(datumi)-1)){
    vpl_prem[1,j] <- podatki_mag[j,11]*10
  }
}
vpl_prem[is.na(vpl_prem)] <- 0

## preživel je 10 let -- potrebujemo za izplačilo ob doživetju
prezivetje= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for(j in 1:ncol(verj_pr)) {
  for (i in 2:nrow(verj_pr)){
    prezivetje[1,j] <- 1
    prezivetje[i,j] <- verj_pr[i,j]*prezivetje[i-1,j]
  }
}
```

Simuliramo 100 razvojev delniškega indeksa, s $S_0 = 1$, $\mu = 0,14$ in $\sigma = 0,2$.

```
#delniški indeks - MonteCarlo 100x

# moji parametri
set.seed(6)
mu = 0.14
sigma = 0.2

indeks <- rlnorm(121,mu, sigma)
indeksi <- replicate(n = 100, expr = {
  x_i = sample(indeks, length(indeks), replace = T)})

for (j in 1:ncol(indeksi)){
  indeksi[1,j] <- 1
}
matrika_ind <- cbind(matrika, indeksi)

## rišemo 4 razvoje delniških indeksov za čas 100 mesecev - Slika 11
mat4 <- indeksi[-(101:nrow(matrika_ind)), -(5:length(matrika_ind))]
y= matrix(mat4, ncol=1)
df <- data.frame(cas=rep(1:100, 4), vrednost=y, spremenljivka=rep(paste0("indeks", 1:4),
    each=100))
ggplot(data = df, aes(x=cas, y=vrednost)) + geom_line(aes(colour=spremenljivka))
    + scale_x_continuous(breaks = seq(0, 100, 10))
```

Definiramo upravljavsko provizijo, ki se odšteje mesečno iz ločenega sklada v višini $m = 0,03/12$ in izračunamo S_t/S_{t-1}.

```
marza <- 0.03/12 ## ta marža označuje upravljavsko provizijo, ki se mesečno odtegne
                 ## ob vložku v sklad
vektor_izgube <- c()

##pomožno S_t/S_{t-1}
razv_ind = matrix(nrow=length(indeks), ncol=ncol(matrika_ind))
for (m in 3:ncol(matrika_ind)){
  for (i in 2:nrow(matrika_ind)){
    razv_ind[1,m] <- matrika_ind[1,m]
    razv_ind[i,m] <- matrika_ind[i,m]/matrika_ind[i-1,m]
  }
}

razvoj <- razv_ind[, -(1:2)]
```

Vse denarne tokove od tu naprej računamo za vsakega od 100-tih razvojev indeksa. V tem delu izračunamo vrednost premoženja, po odtegu upravljavske provizije.

$$F_t = F_{(t-1)}(1-m)\ S_t/(S_{(t-1)})$$

```
## Računamo za vsak razvoj indeksa.
## Izračunavamo vrednost premoženja za vsako polico.
## F_t = F_(t-1)*(1-m)*(S_t/(S_(t-1)))

for (m in 1:ncol(razvoj)){
  vrednost_prem = matrix(0,nrow=length(indeks), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  vrednost_prem[is.na(vrednost_prem)] <- 0
  for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
    for (i in 2:length(indeks)){
      vrednost_prem[1,j] = vpl_prem[1,j]*(1-marza)
      vrednost_prem[i,j] = vrednost_prem[i-1,j]*(1-marza)*(razvoj[i,m])
    }
  }


## marža za tveganje garancij -- odtegne se m_gar, edini naš pozitiven denarni tok
  marza_gar <- 0.005/12
  marza_tv_garancij = matrix(nrow=length(indeks), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
    marza_tv_garancij[1,j] = marza_gar*vrednost_prem[1,j]*prezivetje[1,j]
    for (i in 2:length(indeks)){
      marza_tv_garancij[i,j] = marza_gar*vrednost_prem[i,j]*prezivetje[i,j]
    }
  }
```

```
## GMDB - izplačilo ob smrti - GMDB = max(vpl_prem-vrednost_prem,0)
  GMDB = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:ncol(vrednost_prem)){
    for (i in 2:nrow(vrednost_prem)){
      GMDB[1,j]=0
      GMDB[i,j] = prezivetje[i-1,j]*verj_smrti[i,j]*
    (max(vpl_prem[1,j]-vrednost_prem[i,j],0))
    }
  }


## GMMB - izplačilo ob zapadlosti pogodbe
  GMMB = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  GMMB[is.na(GMMB)] <- 0

  for(j in 1:ncol(prezivetje)){
    GMMB[121,j] = (max(vpl_prem[1,j]-vrednost_prem[121,j],0))*prezivetje[121,j]
  }

## končni denarni tok
  marza_tv_gar_v <- c(0)
  GMMB_v <- c(0)
  GMDB_v <- c(0)

  marza_tv_gar_v <- rowSums(marza_tv_garancij)
  GMMB_v <- rowSums(GMMB)
  GMDB_v <- rowSums(GMDB)

  den_tok <- c(0)
  for (i in 1:length(datumi)){
    den_tok[i] = -marza_tv_gar_v[i]+GMDB_v[i]+GMMB_v[i]
  }

## loss variable - spremenljivka izgube v t=0, diskontirana s r=6%
  LV <- c(0)
  marza_za_gar <-c(0)
  for (i in 1:length(indeks)){
    LV[i] = den_tok[i]*exp(-0.06*(i-1)/12)
    marza_za_gar[i] = marza_tv_gar_v[i]*exp(-0.06*(i-1)/12)
  }

  loss <- sum(LV)
  vektor_izgube <- cbind(vektor_izgube,loss)
}

## narišemo histogram izgub
hist(vektor_izgube, col="darkolivegreen1", main = "Histogram izgube", breaks=50
    , xlab="izguba", ylab="frekvenca",xaxp=c(-600000, 2000000, 10), las=1)
p <- qplot(vektor_izgube, geom="histogram", main = "Histogram izgube",
    xlab = "Izguba", fill=I("green"),  col=I("darkgreen"),  alpha=I(.2
    ), xlim=c(-600000, 2000000))

V <- as.numeric(vektor_izgube)
plotdist(V, histo = TRUE, demp = TRUE, col="forestgreen", breaks=50,
xaxp=c(-600000, 2000000, 20))

## VaR in Expected Shortfall za alfa in (.9,.95,.995)
VaR <-quantile(vektor_izgube, p = c(.9,.95,.995))
VaR

VaR90 <- quantile(vektor_izgube, p=0.90)
VaR95 <- quantile(vektor_izgube, p=0.95)
VaR995 <- quantile(vektor_izgube, p=0.995)
ES90 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR90])
ES95 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR95])
ES995 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR995])
ES90
ES95
ES995
```

```
##Prileganje porazdelitev ne deluje, ker imamo močno negativne sedanje vrednosti bodoče
spremenljivke izgube (tj. dobiček) in ji skušamo najti porazdelitev s pozitivnim
definicijskim območjem. Lahko poskusimo z normalno porazdelitvijo, vendar nam to ne da
nobenih rezultatov, kateri porazdelitvi ustreza porazdelitev spremenljivke izgube.

##kapitalske zahteve - tabela
SCR <- cbind(c(90,95,99.5), c(mean(vektor_izgube),mean(vektor_izgube),
    mean(vektor_izgube)), c(VaR90,VaR95,VaR995),c(ES90, ES95, ES995),
    c(VaR90-mean(vektor_izgube), VaR95-mean(vektor_izgube),VaR995-mean(vektor_izgube)),
    c(ES90-mean(vektor_izgube),ES95-mean(vektor_izgube),ES995-mean(vektor_izgube)))
colnames(SCR) <- c("alfa","E[X]", "VaR", "ES", "SCR_VaR", "SCR_ES")
```

Izračun kapitalskih zahtev z dinamičnim varovanjem pred tveganjem.

```
## PREMIJA -- enkratno vpračilo v ločen sklad ob t=0, vsi zavarovanci

vpl_prem= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
  for (i in 1:(length(datumi)-1)){
    vpl_prem[1,j] <- podatki_mag[j,11]*10
  }
}
vpl_prem[is.na(vpl_prem)] <- 0

vrednost_prem = matrix(0,nrow=length(indeks), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
vrednost_prem[is.na(vrednost_prem)] <- 0
vektorIzgube <- c()
vektorIzgubeStroski <- c()

##izračunamo vrednost premoženja
for (m in 3:ncol(matrika_ind)){
  for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
    for (i in 2:length(indeks)){
      vrednost_prem[1,j] = vpl_prem[1,j]
      vrednost_prem[i,j] = vrednost_prem[i-1,j]*matrika_ind[i,m]
    }
  }

##izračunamo delniški in obvezniški del portfelja varovanja pred tveganjem in
H(t) - portfelj varovanja pred tveganjem
  marza <- 0.03
  sigma <- 0.2
  stock_part = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  bond_part = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  H_t = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  vr_opcije_GMMB=matrix(nrow=1, ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  vr_opcije_GMDB=matrix(nrow=1, ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  H_tMinus = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  HE = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  TC = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:ncol(vrednost_prem)){
    for (i in 1:nrow(vrednost_prem)){
      ##STOCK PART of the HEDGE
      stock_part[i,j] = -vrednost_prem[i,j]*(1-marza)^10*
      pnorm(-((log(vrednost_prem[i,j]*(1-marza)^10/vrednost_prem[1,j]) +
       (0.06 + sigma^2/2)*(10-(i-1)/12)) / (sigma*sqrt(10-(i-1)/12))))
      ##BOND PART of the HEDGE
      bond_part[i,j] = vrednost_prem[1,j]*exp(-0.06*(10-(i-1)/12))*
      pnorm(-((log(vrednost_prem[i,j]*(1-marza)^10/vrednost_prem[1,j]) +
       (0.06 - sigma^2/2)*(10-(i-1)/12)) / (sigma*sqrt(10-(i-1)/12))))
      ##BSP - H(t)
      H_t[i,j] = stock_part[i,j] + bond_part[i,j]
    }
  }
```

```
  vektorHedge <- c()
  vektorHedge <- rowSums(H_t)
  BSP_0 =vektorHedge[1]
  for (j in 1:ncol(vrednost_prem)){
    for (i in 2:nrow(vrednost_prem)){
      ## cena opcije GMMB in GMDB v t=0
      vr_opcije_GMMB[1,j] = H_t[1,j]*prezivetje[121,j]
      vr_opcije_GMDB[1,j] = H_t[1,j]*prezivetje[i-1,j]*verj_smrti[i,j]
      ## H(t-)
      H_tMinus[1,j]=0
      H_tMinus[i,j]=stock_part[i-1,j]*vrednost_prem[i,j]/vrednost_prem[i-1,j]+
      bond_part[i-1,j]*exp(0.06/12) ##imamo mesečno obr mero 6%
      ##HE - napaka pri varovanju pred tveganjem
      HE[1,j]=0
      ##F_t=F0minus * S_t(1-m)^t/S_0 (S_0=1) => F_t = F0minus*S_t(1-m)^t
      HE[i,j]= H_t[i,j]+prezivetje[i-1,j]*verj_smrti[i,j]*
      max((vrednost_prem[1,j]-vrednost_prem[i,j]*(1-marza)^((i-1)/12)),0)-H_tMinus[i,j]
      ##TC -- izračunamo transakcijske stroške
      TC[1,j] =0
      TC[i,j] =0.01*vrednost_prem[i,j]*max(stock_part[i,j]/(-vrednost_prem[i,j])-
      stock_part[i-1,j]/(-vrednost_prem[i-1,j]),0)
    }
  }
  vektorGMMBopc <- c()
  vektorGMDBopc <- c()
  vektorGMMBopc <- rowSums(vr_opcije_GMMB)
  vektorGMDBopc <- rowSums(vr_opcije_GMDB)
  vektorHE <-c()
  vektorTC <- c()
  vektorHE <- rowSums(HE)
  vektorTC <- rowSums(TC)
```

```
  izguba <- c()
  spr_izg <- c()
  stroski <- c()
  izg_stroski <-c()
  for (i in 1:length(indeks)){
    spr_izg[i] = vektorHE[i]*exp(-0.06*(i-1)/12) #diskontiranje s 0,06/12 - mesečno
    stroski[i] = vektorTC[i]*exp(-0.06*(i-1)/12)
  }
  izguba <- sum(spr_izg)
  izg_stroski <- sum(stroski)
  vektorIzgube <- cbind(vektorIzgube,izguba)
  vektorIzgubeStroski <- cbind(vektorIzgubeStroski,izg_stroski)
}
```

```
##histogram porazdelitve napake pri varovanju pred tveganjem
hist(vektorIzgube, col="lightskyblue", main = "Histogram izgube", breaks=50,
          xlab="izguba", ylab="frekvenca",xaxp=c(400000, 2400000, 10), las=1)
p2 <- qplot(vektorIzgube, geom="histogram", main = "Histogram izgube", xlab = "Izguba",
fill=I("blue"),  col=I("darkblue"),  alpha=I(.2), xlim=c(0, 3000000))

V <- as.numeric(vektorIzgube)
plotdist(V, histo = TRUE, demp = TRUE, col="dodgerblue3", breaks=50,
xaxp=c(400000, 2400000, 10))

##VaR in Expected Shortfall za alfa in (.9,.95,.995) za napako pri varovanju
pred tveganjem in transakcijske stroške
VaR_opc <-quantile(vektorIzgube, p = c(.9,.95,.995))
VaR_opc

VaR90_opc <- quantile(vektorIzgube, p=0.90)
VaR95_opc <- quantile(vektorIzgube, p=0.95)
VaR995_opc <- quantile(vektorIzgube, p=0.995)
ES90_opc <- mean(vektorIzgube[vektorIzgube>=VaR90_opc])
ES95_opc <- mean(vektorIzgube[vektorIzgube>=VaR95_opc])
ES995_opc <- mean(vektorIzgube[vektorIzgube>=VaR995_opc])
ES90_opc
ES95_opc
ES995_opc
```

```r
VaR_opc_str <-quantile(vektorIzgubeStroski, p = c(.9,.95,.995))
VaR_opc_str
VaR90_opc_str <- quantile(vektorIzgubeStroski, p=0.90)
VaR95_opc_str <- quantile(vektorIzgubeStroski, p=0.95)
VaR995_opc_str <- quantile(vektorIzgubeStroski, p=0.995)
ES90_opc_str <- mean(vektorIzgubeStroski[vektorIzgubeStroski>=VaR90_opc_str])
ES95_opc_str <- mean(vektorIzgubeStroski[vektorIzgubeStroski>=VaR95_opc_str])
ES995_opc_str <- mean(vektorIzgubeStroski[vektorIzgubeStroski>=VaR995_opc_str])
ES90_opc_str
ES95_opc_str
ES995_opc_str
```

```r
##kapitalske zahteve za napako pri varovanju pred tveganjem
SCR_opc <- cbind(c(90,95,99.5), c(mean(vektorIzgube),mean(vektorIzgube),
mean(vektorIzgube)), c(VaR90_opc,VaR95_opc,VaR995_opc),c(ES90_opc,ES95_opc,ES995_opc),
c(VaR90_opc-mean(vektorIzgube),VaR95_opc-mean(vektorIzgube),VaR995_opc-
mean(vektorIzgube)),c(ES90_opc-mean(vektorIzgube),ES95_opc-mean(vektorIzgube),
ES995_opc-mean(vektorIzgube)))
colnames(SCR_opc) <- c("alfa","E[X]", "VaR", "ES", "SCR_VaR", "SCR_ES")
```

```r
##kapitalske zahteve za transakcijske stroške
SCR_stroski <- cbind(c(90,95,99.5),c(mean(vektorIzgubeStroski),mean(vektorIzgubeStroski),
mean(vektorIzgubeStroski)), c(VaR90_opc_str, VaR95_opc_str,VaR995_opc_str),
c(ES90_opc_str, ES95_opc_str, ES995_opc_str), c(VaR90_opc_str-mean(vektorIzgubeStroski),
VaR95_opc_str-mean(vektorIzgubeStroski),VaR995_opc_str-mean(vektorIzgubeStroski)),
c(ES90_opc_str-mean(vektorIzgubeStroski),ES95_opc_str-mean(vektorIzgubeStroski),
ES995_opc_str-  mean(vektorIzgubeStroski)))
colnames(SCR_stroski) <- c("alfa","E[X]", "VaR", "ES", "SCR_VaR", "SCR_ES")
```

Izračun kapitalskih zahtev za **letno vplačevanje** premije z aktuarskim pristopom.

```r
## podatki

library(lubridate)
library(readxl)
library(ggplot2)

podatki_za_magistrsko <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/podatki_za_mag_2.xlsx")

predpostavke_2 <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/predpostavke_2.xlsx")

predpostavke <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/predpostavke.xlsx", sheet = "prekinitve", range = "E3:H183")

RFR_eiopa <- read_excel("C:/Users/tinah/Desktop/Magistrska-Vpliv predpostavk
(lapse,__) na kapitalske zahteve produktov vezanih na garantirano obrestno mero/
Moja magistrska naloga/RFR.xlsx")
```

```r
## datumi (od 2021/01 do 2031/01 izračunavamo denarne tokove iz naslova garancij)
datumi <- seq(as.Date("2021/01/01"), as.Date("2031/01/01"), by = "month")
mesec <- format(datumi,"%m")
mesec <- as.integer(mesec)
podatki_mag <- data.frame(podatki_za_magistrsko)
matrika <- data.frame(datumi, mesec)
```

```r
## STAROST, VERJ_UMR, VERJ_PR
starost_j = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
verj_pr= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
verj_smrti = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$DOB_1))
prekinitve = c(nrow=length(datumi))
for (j in 1:length(podatki_mag$DOB_1)){
  for (i in 1:length(datumi)){
    starost_j[i,j]= year(matrika[i,1]) - year(podatki_mag[j,15]) - 10
    dobiverj <- predpostavke_2$verjetnost
    names(dobiverj) <- predpostavke_2$starost
    prekinitve[i] <- i
    dobi_st_prekin <- predpostavke$`letno % prekinitev`
    names(dobi_st_prekin) <- predpostavke$mesec
```

```
    ##surova verj prez
    verj_pr[i,j] <- (1-(1-(1 - unname(dobiverj[starost_j[i,j]]))^(1/12)))
    - (1 - (1 - unname(dobi_st_prekin[prekinitve[i]])) ^ (1 / 12))
    ##surova verj smrti
    verj_smrti[i,j] <- (1-(1 - unname(dobiverj[starost_j[i,j]]))^(1/12))
  }
}
starost_mat = cbind(matrika, starost_j)

## PREMIJA, letno vplačevanje premije
prem= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
  for (i in 1:(length(datumi)-1)){
    if (matrika[i,2]==1) {
      prem[i,j] <- podatki_mag[j,11]
    }
  }
}
prem[is.na(prem)] <- 0

## preživel je 10 let -- potrebujemo za izplačilo ob doživetju
prezivetje= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for(j in 1:ncol(verj_pr)) {
  for (i in 2:nrow(verj_pr)){
    prezivetje[1,j] <- 1
    prezivetje[i,j] <- verj_pr[i,j]*prezivetje[i-1,j]
  }
}
```

```
#delniški indeks - MonteCarlo 100x

# moji parametri
set.seed(6)
mu = 0.14
sigma = 0.2


indeks <- rlnorm(121,mu, sigma)
indeksi <- replicate(n = 100, expr = {
  x_i = sample(indeks, length(indeks), replace = T)})

for (j in 1:ncol(indeksi)){
  indeksi[1,j] <- 1
}
matrika_ind <- cbind(matrika, indeksi)

## rišemo 4 razvoje indeksov
mat4 <- indeksi[-(101:nrow(matrika_ind)), -(5:length(matrika_ind))]
y= matrix(mat4, ncol=1)
df <- data.frame(cas=rep(1:100, 4), vrednost=y, spremenljivka=rep(paste0("indeks", 1:4),
each=100))
ggplot(data = df, aes(x=cas, y=vrednost)) + geom_line(aes(colour=spremenljivka))
+ scale_x_continuous(breaks = seq(0, 100, 10))
```

```
## vplačana premija do časa t
vpl_prem= matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
for(j in 1:ncol(prem)) {
  for (i in 2:nrow(prem)){
    vpl_prem[1,j] <- prem[1,j]
    vpl_prem[i,j] <- prem[i,j]+vpl_prem[i-1,j]
  }
}
```

Pridobimo netvegano obrestno mero po mesecih.

```
## matrika RFR
elapsed_months <- function(end_date, start_date) {
  ed <- as.POSIXlt(end_date)
  sd <- as.POSIXlt(start_date)
  12 * (ed$year - sd$year) + (ed$mon - sd$mon)
}
```

```r
pret_mes <- c(0)
RFR_najden <- c(0)
matrika <- cbind(matrika, pret_mes, RFR_najden)
for (i in 1:length(indeks)){
  matrika[i,3] <- -elapsed_months(matrika[1,1], matrika[i,1])
}
matrika[1,4] = 1
for (i in 2:length(indeks)){
  dobiRFR <- RFR_eiopa$RFR
  names(dobiRFR) <- RFR_eiopa$mesec
  matrika[i,4] <- unname(dobiRFR[matrika[i,3]])
}
```

```r
marza <- 0.03/12 ## ta marža označuje upravljavsko provizijo, ki se mesečno odtegne
                 ## ob vložku v sklad
vektor_izgube <- c()

##pomožno S_t/S_{t-1}
razv_ind = matrix(nrow=length(indeks), ncol=ncol(matrika_ind))
for (m in 3:ncol(matrika_ind)){
  for (i in 2:nrow(matrika_ind)){
    razv_ind[1,m] <- matrika_ind[1,m]
    razv_ind[i,m] <- matrika_ind[i,m]/matrika_ind[i-1,m]
  }
}

razvoj <- razv_ind[, -(1:2)]
```

Vse denarne tokove od tu naprej računamo za vsakega od 100-tih razvojev indeksa. Denarne tokove ob letnem vplačevanju premije izračunamo nekoliko drugače.

$$C_t = {}_tp_x^{\tau}\Big(F_{(t-1)}\frac{S_t}{S_{t-1}} + S_tP_t\Big)(1-m)\ m_c \qquad t = 0, 1, \cdots, n-1.$$

```r
## Računamo za vsak razvoj indeksa.
## Izračunavamo vrednost premoženja za vsako polico.
for (m in 3:ncol(matrika_ind)){
vrednost_prem = matrix(0,nrow=length(indeks), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
    for (i in 2:length(indeks)){
        vrednost_prem[1,j] = prem[1,j]*(1-marza)
        vrednost_prem[i,j] = vrednost_prem[i-1,j]*(1-marza)*(razv_ind[i,m])
        +matrika_ind[i,m]*(1-marza)*prem[i,j]
    }
  }


## marža za tveganje garancij -- odtegne se m_gar, edini naš pozitiven denarni tok
  marza_gar <- 0.0005/12
  marza_tv_garancij = matrix(nrow=length(indeks), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:length(podatki_mag$PREMIJA)){
    marza_tv_garancij[1,j] = marza_gar*vrednost_prem[1,j]*prezivetje[1,j]
    for (i in 2:length(indeks)){
      marza_tv_garancij[i,j] = marza_gar*vrednost_prem[i,j]*prezivetje[i,j]
    }
  }


## GMDB - izplačilo ob smrti - GMDB = max(vpl_prem-vrednost_prem,0)

  GMDB = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  for (j in 1:ncol(vrednost_prem)){
    for (i in 2:nrow(vrednost_prem)){
      GMDB[1,j]=0
      GMDB[i,j] = prezivetje[i-1,j]*verj_smrti[i,j]*(max(vpl_prem[i,j]
      -vrednost_prem[i,j],0))
    }
  }
```

```r
## GMMB - izplačilo ob zapadlosti pogodbe
  GMMB = matrix(nrow=length(datumi), ncol=length(podatki_mag$PREMIJA))
  GMMB[is.na(GMMB)] <- 0

  for(j in 1:ncol(prezivetje)){
    GMMB[121,j] = (max(vpl_prem[121,j]-vrednost_prem[121,j],0))*prezivetje[121,j]
  }

## končni denarni tok
  marza_tv_gar_v <- c(0)
  GMMB_v <- c(0)
  GMDB_v <- c(0)
  marza_tv_gar_v <- rowSums(marza_tv_garancij)
  GMMB_v <- rowSums(GMMB)
  GMDB_v <- rowSums(GMDB)

  den_tok <- c(0)
  for (i in 1:length(datumi)){
    den_tok[i] = -marza_tv_gar_v[i]+GMDB_v[i]+GMMB_v[i]
  }

## loss variable - spremenljivka izgube
  LV <- c(0)
  marza_za_gar <-c(0)
  for (i in 1:length(indeks)){
    LV[i] = den_tok[i]*exp(-matrika[i,3]*matrika[i,4])
    marza_za_gar[i] = marza_tv_gar_v[i]*exp(-matrika[i,3]*matrika[i,4])
  }

loss <- sum(LV)
vektor_izgube <- cbind(vektor_izgube,loss)
}

## narišemo histogram izgub
hist(vektor_izgube, col="darkolivegreen1", main = "Histogram izgube", breaks=30,
xlab="izguba", ylab="frekvenca")
```

```r
V <- as.numeric(vektor_izgube)
plotdist(V, histo = TRUE, demp = TRUE, col="purple", breaks=50,
xaxp=c(-10000, 100000, 20))

##VaR in Expected Shortfall za alfa in (.9,.95,.995)
VaR <-quantile(vektor_izgube, p = c(.9,.95,.995))
VaR

VaR90 <- quantile(vektor_izgube, p=0.90)
VaR95 <- quantile(vektor_izgube, p=0.95)
VaR995 <- quantile(vektor_izgube, p=0.995)
ES90 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR90])
ES95 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR95])
ES995 <- mean(vektor_izgube[vektor_izgube>=VaR995])
ES90
ES95
ES995
```