

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

**UPORABNOST STOHAŠTIČNIH RAZLIČIC BORNHUETTER-
FERGUSONOVE METODE PRI OBLIKOVANJU ŠKODNIH
REZERVACIJ**

Ljubljana, oktober 2019

MAJA HORVATIČ

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana Maja Horvatič, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtorica predloženega dela z naslovom Uporabnost stohastičnih različic Bornhuetter-Fergusonove metode pri oblikovanju škodnih rezervacij, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem prof. dr. Mihaelom Permanom

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravila samostojno;
2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;
3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;
4. da se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;
5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;
6. da sem pridobila vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označila;
7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnala v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobila soglasje etične komisije;
8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;
9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;
10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

V Ljubljani, dne _____

Podpis študentke: _____

KAZALO

UVOD	1
1 ZAVAROVALNO-TEHNIČNE REZERVACIJE NA SLOVENSKEM TRGU ...	3
1.1 Splošno o zavarovalništvu	3
1.2 Regulatorne zahteve	4
2 PREGLED METOD ZA IZRAČUN ŠKODNIH REZERVACIJ	5
2.1 Trikotniške metode	5
2.2 Bornhuetter-Fergusonov princip.....	7
2.2.1 Metoda veriženja	11
2.2.2 Metoda pričakovanih škod.....	12
2.2.3 Metoda Cape Cod	12
2.2.4 Metoda Benktander-Hovinen	13
3 BORNHUETTER-FERGUSONOVA METODA	14
4 STOHAŠTIČNE RAZLIČICE BORNHUETTER-FERGUSONOVE METODE	15
4.1 Stohastične metode	15
4.2 Stohastične različice Bornhuetter-Fergusonove metode	20
4.2.1 Model brez privzete porazdelitve	21
4.2.2 Prerazpršen Poissonov model.....	26
4.2.3 Normalni model.....	32
5 PRAKTIČNI PRIMERI	37
5.1 Primer zdravstvenega zavarovanja.....	37
5.1.1 Nastale škode.....	37
5.1.2 Plačane škode	41
5.2 Primer avtomobilskega zavarovanja	44
5.3 Primerjava portfeljev in ugotovitve	48
SKLEP	50
LITERATURA IN VIRI	51

KAZALO TABEL

Tabela 1: Razvojni trikotnik inkrementalnih škod	8
Tabela 2: Razvojni trikotnik kumulativnih škod	8
Tabela 3: Razvojni trikotnik nastalih škod zdravstvenega zavarovanja v EUR	38
Tabela 4: Apriorne cenilke končne škode za primer zdravstvenega zavarovanja	38
Tabela 5: Ocena škodnih rezervacij za nastale škode zdravstvenega zavarovanja	39
Tabela 6: Srednja napaka ocene in koeficient variance za nastale škode zdravstvenega zavarovanja	39
Tabela 7: Standardna procesna napaka in standardna napaka ocene parametra	40
Tabela 8: Variančni parametri za nastale škode zdravstvenega zavarovanja	41
Tabela 9: Razvojni trikotnik plačanih škod zdravstvenega zavarovanja	41
Tabela 10: Apriorne cenilke končnih škod za primer zdravstvenega zavarovanja	42
Tabela 11: Ocena škodnih rezervacij za plačane škode zdravstvenega zavarovanja	42
Tabela 12: Razvojni vzorci kumulativnih škod za plačane škode zdravstvenega zavarovanja	43
Tabela 13: Srednja napaka ocene in koeficient variance za plačane škode zdravstvenega zavarovanja	43
Tabela 14: Razvojni trikotnik nastalih škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti	45
Tabela 15: Apriorne cenilke končne škode za primer zavarovanja avtomobilske odgovornosti	46
Tabela 16: Ocena škodnih rezervacij za nastale škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti	46
Tabela 17: Razvojni vzorci kumulativnih škod za zavarovanje avtomobilske odgovornosti	47
Tabela 18: Srednja napaka ocene in koeficient variance za nastale škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti	47
Tabela 19: Standardna procesna napaka in standardna napaka ocene parametra zavarovanja avtomobilske odgovornosti	48
Tabela 20: Koeficient variance standardne procesne napake za zavarovanje avtomobilske odgovornosti	48
Tabela 21: Odstopanja skupnih BF rezervacij od CL rezervacij v %	49

KAZALO SLIK

Slika 1: Razvojni trikotnik	6
Slika 2: Procesna napaka	16
Slika 3: Napaka parametra	17
Slika 4: Napaka modela	17

SEZNAM KRATIC

ang. – angleško

BF – Bornhuetter-Ferguson

BH – Benktander-Hovinen

CC – Cape Cod

CL – (ang. Chain Ladder); metoda veriženja

EC – (ang. Expected Claims); pričakovane škode

IBNR – (ang. Incurred But Not Reported); nastale, a še ne prijavljene škode

IFRS – (ang. International Financial Reporting Standard); Mednarodni standard računovodskega poročanja

MLE – (ang. Maximum Likelihood Estimation); metoda največjega verjetja

MSEP – (ang. Mean squared error of prediction); srednja kvadratna napaka ocene

ODP – prerazpršena Poissonova porazdelitev

PEE – (ang. Parameter estimation error); napaka ocene parametra

PV – (ang. Process Variance); procesna varianca

RBNS – (ang. Reported But Not Settled); prijavljene, a še ne rešene škode

UVOD

Škodne rezervacije slovenskih premoženjskih zavarovanj so v letu 2017 predstavljale 57 % vseh obveznosti (Slovensko zavarovalno združenje, 2018). Regulatorni predpisi ne omejujejo izbire metodologije za njihov izračun, določajo le ločeno obravnavo nastalih, a še ne prijavljenih škod (ang. Incurred But Not Reported, v nadaljevanju tudi IBNR), ter prijavljenih, a še ne rešenih škod (ang. Reported But Not Settled, v nadaljevanju tudi RBNS). Izračuni temeljijo na aktuarskih in statističnih metodah, ki morajo biti ustrezno dokumentirane in utemeljene. Izbira metode je odvisna od narave zavarovanja, velikosti portfelja, verjetnosti nastanka škodnega dogodka in dolžine repa reševanja škod.

Rezervacije imajo vpliv tako na določanje premije kot na dobičkonosnost zavarovalnice in je zato njihov izračun ključnega pomena. Deterministični pristop in točkovna ocena škodnih rezervacij je zadostovala pod regulatornim okvirjem Solventnosti I, vendar postaja nezadostna z uvedbo Solventnosti II. Potrebno je ne samo oceniti škodne rezervacije, temveč določiti točnost te ocene, kar je možno narediti le v stohastičnem okvirju. Zato se v zadnjih letih zanimanje za stohastične metode povečuje in je bil na tem področju narejen velik premik. Omeniti je sicer treba, da je veliko pomembnih prispevkov na to tematiko bilo napisanih že pred uvedbo Solventnosti II, kot na primer s Taylorjevim delom (Taylor, 2000). Stohastične metode sicer lahko nudijo pomembne informacije o podatkih, hkrati pa so lahko slabše razumljive, predvsem zaradi velikega števila začetnih predpostavk, ki jih je morda težko izpolniti oziroma iz njih dojeti bistvo metode (Arjas, 1989, str. 139).

Natančnost ocene rezervacije lahko izmerimo s srednjo kvadratno napako ocene, ki predstavlja dolgoročni vidik in je najbolj priljubljen aktuarski pristop za merjenje tveganja. Kratkoročni vidik je pomemben za solventnost in se ga testira v okviru razvojnega škodnega rezultata, ki predstavlja razliko med dvema zaporednima ocenama končne škode in ima optimalno vrednost okoli ničle (Saluz, 2014).

Najbolj priljubljeni metodi za izračun škodnih rezervacij ostajata deterministični – metoda veriženja (ang. Chain Ladder, v nadaljevanju tudi CL) in Bornhuetter-Fergusonova (v nadaljevanju tudi BF) metoda. Slednja je osrednji predmet obravnave magistrske naloge in je v osnovi kombinacija metode veriženja in metode pričakovanih škod. BF metodo tako kot metodo veriženja uvrščamo med trikotniške. Njena glavna predpostavka je, da se neprijavljene škode razvijejo v odvisnosti od pričakovanih škod in niso odvisne od prijavljenih, kar je tudi poglobljena razlika z metodo veriženja. Njena prednost je, da odstopanja v začetnih letih razvoja nimajo pomembnega vpliva na projekcije škod in je zato primerna tudi za nestanovitna zavarovanja. Aktuarni metodo uporabljajo tako za kratkorepa kot dolgorepa zavarovanja, posebno za manj razvita leta. Prav tako je učinkovita za nova zavarovanja, o katerih še nimamo veliko podatkov (Friedland, 2010).

Vedno več zavarovalnic pa se odloča za uporabo stohastičnih metod, predvsem kot dopolnitev determinističnih, kjer prevladujejo stohastične različice metode veriženja. Najbolj priljubljeni med njimi sta Mackova metoda veriženja in metoda ponovnega vzorčenja (ang. Bootstrap) metode veriženja. Še vedno so primarne metode za izračun deterministične, stohastične pa so namenjene predvsem dodatni informiranosti k determinističnem izračunu (ASTIN Committee of the International Actuarial Association, 2016, str. 8). Stohastične različice BF metode niso priljubljene v praksi, verjetno zato, ker niso tako preproste kot CL različice in se je njihov razvoj začel pozneje kot na področju metode veriženja.

Za metodo veriženja je negotovost ocene obravnaval že Mack leta 1993, za BF metodo pa je Mack v letu 2008 prvič predstavil formulo za oceno napake Bornhuetter-Fergusonovih rezervacij z novim razvojnim vzorcem. Sledili so Alai, Merz in Wüthrich (2009; 2011) z objavo člankov o BF metodi v okviru prerazpršene Poissonove porazdelitve (ang. Overdispersed Poisson Distribution, v nadaljevanju tudi ODP) in izpeljavo formule za srednjo napako ocene škodne rezervacije. Njihova predpostavka je, da je razvojni vzorec ocenjen z metodo veriženja. Saluz, Gisler in Wüthrich (2011) so nadaljevali delo Macka (2008) in prav tako predstavili razvojni vzorec, različen od tistega, izračunanega z metodo veriženja.

Namen magistrskega dela je raziskati BF metodo in pod drobnogled vzeti njene stohastične vidike ter nekatere izmed njih podrobneje opisati in jih preizkusiti na praktičnih primerih. Z uvedbo novih direktiv in zakonodaje postajajo stohastične metode vedno pomembnejše in je zato pomembno poznati različne pristope, da lahko s pomočjo strokovne presoje izberemo ustreznega za izračun škodnih rezervacij.

Poglavitna metoda magistrske naloge je teoretično-analitičen pregled strokovne literature, doktorskih disertacij in člankov pretežno tujih strokovnjakov. Poleg kritičnega pristopa in povzetka do sedaj objavljene literature o obravnavani tematiki, za lažje razumevanje metode predstavimo tudi na praktičnih primerih, kjer uporabimo empirično metodo, na podlagi katere lahko jasneje utemeljimo njeno uporabnost.

Pri izdelavi dela uporabimo teoretično znanje, pridobljeno med študijem, in praktično znanje iz dela v aktuarstvu zavarovalnice.

Magistrsko delo je sestavljeno iz petih glavnih poglavij, tematika pa je dodatno razdelana v podpoglavjih. V prvem poglavju na kratko opišemo zavarovalništvo na slovenskem trgu in določitev izračuna zavarovalno-tehničnih rezervacij skladno s predpisi. V drugem poglavju naredimo pregled osnovnih determinističnih metod za računanje rezervacij skozi okvir Bornhuetter-Fergusonovega principa. Večji poudarek damo na metodo Benktander-Hovinen, ki je znana kot različica BF metode in ima elemente stohastike. Osrednji poglavji sta tretje in četrto, v katerih se osredotočimo na Bornhuetter-Fergusonovo metodo. V tretjem poglavju na splošno predstavimo deterministično BF metodo in njene oznake, v četrtem

poglavju pa stohastične metode in nato stohastične različice BF metode. V petem poglavju predstavimo praktične primere na dveh različnih portfeljih premoženjskih zavarovanj – zdravstvenem in avtomobilskem. Magistrsko delo zaključimo s sklepnimi ugotovitvami.

1 ZAVAROVALNO-TEHNIČNE REZERVACIJE NA SLOVENSKEM TRGU

1.1 Splošno o zavarovalništvu

Slovenski zavarovalniški trg raste in se razvija, saj so članice Slovenskega zavarovalnega združenja, ki jih je 22, v letu 2018 ustvarile 2,3 milijarde EUR premijskih prihodkov, kar je največ do sedaj. Delež premoženjskih zavarovanj v obračunani premiji za leto 2018 znaša 69,4 % (Slovensko zavarovalno združenje, 2019).

Zakon o zavarovalništvu (ZZavar-1), Ur. l. RS, št. 93/2015, ločuje zavarovalne posle v skupini življenjskih zavarovanj in premoženjskih zavarovanj, med katera med drugim spadajo tudi zdravstvena zavarovanja. Razlika med premoženjskimi in življenjskimi zavarovanji je predvsem v modeliranju denarnih tokov in produktov.

Po ZZavar-1 poznamo 24 zavarovalnih vrst, ki so združene na podlagi nevarnosti, ki jih krijejo:

1. nezgodno zavarovanje;
2. zdravstveno zavarovanje;
3. zavarovanje kopenskih vozil;
4. zavarovanje tirnih vozil;
5. letalsko zavarovanje;
6. zavarovanje plovil;
7. zavarovanje prevoza blaga;
8. zavarovanje požara in elementarnih nesreč;
9. drugo škodno zavarovanje;
10. zavarovanje odgovornosti pri uporabi vozil;
11. zavarovanje odgovornosti pri uporabi zrakoplovov oziroma drugih letalnih naprav;
12. zavarovanje odgovornosti pri uporabi plovil;
13. splošno zavarovanje odgovornosti;
14. kreditno zavarovanje;
15. kavcijsko zavarovanje;
16. zavarovanje različnih finančnih izgub;
17. zavarovanje stroškov postopka;
18. zavarovanje pomoči;

19. življenjsko zavarovanje;
20. zavarovanje za primer poroke oziroma rojstva;
21. življenjsko zavarovanje z naložbenim tveganjem;
22. tontine;
23. zavarovanje s kapitalizacijo izplačil;
24. zavarovanje izpada dohodkov zaradi nezgode ali bolezni.

Prvih 18 zavarovalnih vrst spada pod kategorijo premoženjskih zavarovanj, preostanek pa pod življenjska zavarovanja. Predmet obravnave našega magistrskega dela so premoženjska zavarovanja.

1.2 Regulatorne zahteve

V Sloveniji poslovanje zavarovalnic urejajo ZZavar-1, podzakonski akti in sklepi Agencije za zavarovalni nadzor in priporočila Slovenskega zavarovalnega združenja ter evropska direktiva Solventnost II.

Direktiva Solventnost II je stopila v veljavo s 1. 1. 2016. Njen osnovni princip je, da so sredstva in obveznosti vrednotena na podlagi njihove ekonomske vrednosti. Solventnost II sestavljajo trije stebri: prvi steber pokriva kapitalske zahteve, zavarovalno-tehnične rezervacije in sredstva, drugi steber nadzorni proces in sistem upravljanja tveganj; tretji pa javna razkritja zavarovalnic.

Zavarovalno-tehnične rezervacije, ki so del prvega stebra, so po Solventnosti II seštevki najboljše ocene in dodatka za tveganje. Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij je enaka znesku, ki bi ga zavarovalnica morala plačati, če bi prenesla svoje pogodbene pravice in obveznosti na drugo podjetje. Najboljša ocena je razdeljena na dva dela – premijsko in škodno rezervo. V našem delu se osredotočimo na škodno rezervacijo. Metod za njen izračun je veliko, vendar niso vse primerne za vsak tip zavarovanja in portfelja. Solventnost II ne določa specifične metode za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij.

V slovenski zakonodaji ZZavar-1 izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij definira tako kot direktiva Solventnost II. Na podlagi ZZavar-1 je bil v letu 2016 objavljen Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehničnih rezervacij, Ur. l. RS, št. 4/2016, kjer so bolj podrobno opisane zahteve za njihovo vrednotenje. Za škodne rezervacije sklep določa ločeno obravnavo škodnih rezervacij za prijavljene škode (RBNS) in škodnih rezervacij za nastale, a še ne prijavljene škode (IBNR), vendar ne določa metode za njihov izračun. V 9. členu pa določa uporabnost strokovne presoje, ki je dovoljena kot dopolnitev pri ocenjevanju popolnosti, točnosti in ustreznosti podatkov za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij. Strokovna presoja je pomemben del Bornhuetter-Fergusonove metode.

Zavarovalno-tehnične rezervacije lahko imajo velik vpliv na poslovni izid zavarovalnice, saj sprememba rezervacij med stanjem na koncu in začetku obračunskega leta pozitivno ali negativno vpliva na rezultat. Zato je rezervacije potrebno računati konsistentno in ob morebitni spremembi metodologije to ustrezno obrazložiti, kljub temu, da zakonodaja ne določa postopka oblikovanja rezervacij.

2 PREGLED METOD ZA IZRAČUN ŠKODNIH REZERVACIJ

2.1 Trikotniške metode

Pri procesu od nastanka škode in odprtja škodnega spisa do zaprtja le-tega sodelujeta škodni oddelek za obravnavo škode in aktuarski oddelek za oblikovanje škodnih rezervacij. Proces se začne z nastankom škode in nadaljuje s prijavo škodnega dogodka, ki jo obravnava škodni oddelek in oceni višino rezervacije za nastalo, prijavljeno škodo. To imenujemo popis ali škodna rezervacija za nastale in prijavljene škode. Nato pride do plačila stranki za nastalo škodo, tj. do obračuna in posledično izplačila škode. Škoda je zaključena, ko je v celoti plačana. Trajanje od nastanka škode do njene prijave je zelo različno in lahko traja od nekaj dni do nekaj let. Primer dolgega zamika do prijave škode so azbestne škode, ko je bolezen kot posledica izpostavljenosti ugotovljena več let po izpostavljenosti (Saluz, 2014, str. 1). Drugi zamik nastane med prijavo in obračunom škode ter je odvisen od narave zavarovanja. Primer daljšega zamika so večje posamične škode, ki nastanejo v primeru potresov, poplav ali požarov in zanje obravnava traja dlje že zaradi več nastalih škodnih primerov naenkrat. Zamika prijave in obračuna sta odvisna od zavarovalne vrste in vplivata na dinamiko škodnega procesa.

Druga vrsta škodnih rezervacij, ki jih moramo oblikovati po ZZavar-1, so škodne rezervacije za nastale, a še ne prijavljene škode. Večina metod za IBNR je organiziranih v matriko z leti nastanka v vrsticah in razvojnimi leti v stolpcih. Realizirani podatki so v zgornjem levem delu trikotnika z oznako D_I , spodnji trikotnik z oznako D_I^C pa je namenjen izračunu rezervacij. Trikotnika skupaj tvorita matriko, kot je prikazano na sliki 1. Tovrstne metode imenujemo trikotniške zaradi razvrščanja podatkov v trikotnike. Preko razvojnih trikotnikov lahko prikažemo in analiziramo različne vrednosti, kot na primer nastale škode, plačane škode, stroške, povezane s škodami ali število prijavljenih škod. V našem delu se navezujemo na podatke o nastalih ali plačanih škodah, vendar lahko ugotovitve apliciramo tudi na preostale enote.

Slika 1: Razvojni trikotnik

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j						
	0	1	2	...	j	...	J
0	$\mathcal{D}_I$						končne škode $C_{i,J}$
1							
...							
$I + 1 - J$							
...	$\mathcal{D}_I^c$						
i							
...							
I							

Vir: Lastno delo.

V matriko je zajeto omejeno število razvojnih let J in I let nastanka. Brez škode za splošnost v nekaterih primerih magistrskega dela predpostavimo, da je $I = J$. Poleg let kot enote prikaza škod lahko v matriki uporabljamo tudi mesečne, kvartalne ali polletne intervale, odvisno od dinamike izračuna rezervacij in količine podatkov, ki so nam na voljo. V praktičnih primerih v zadnjem poglavju našega dela uporabljamo v primeru zdravstvenega zavarovanja mesečne podatke, v primeru avtomobilskega pa letne podatke. V obeh primerih pa ima trikotnik enako število vrstic in stolpcev, tj. $I = J = 9$.

Končna škoda (ang. Ultimate claim), $C_{i,J}$, je definirana kot seštevek kumulativnih realiziranih škod, IBNR in RBNS. Če obravnavamo plačane škode, iz trikotnika izpustimo RBNS. Rezervacija R_i za leto nastanka i tako predstavlja razliko med končno škodo in realizirano kumulativno škodo, $C_{i,I-i}$.

Pri nekaterih portfeljih prihaja do obračuna ali nastanka škod tudi po letu J , vendar ga zaradi majhnega odstotka ne upoštevamo neposredno v metodi, temveč ga imenujemo rep in ga ocenimo s faktorjem za rep. Podrobno se je s to problematiko ukvarjal Party, C. T. F. W. (2016), ki je predstavil različne metode za oceno faktorja za rep. Ena izmed možnosti je, da vzamemo merilo industrije, na katero se nanaša zavarovanje, druga je prilagoditev krivulje izbranim ali opazovanim razvojnim faktorjem za ekstrapolacijo faktorjev za rep. Tretja možnost je, da preprosto uporabimo že realizirana razvojna leta, ki so presegla meje trikotnika, in njihov rep apliciramo na še ne razvita leta. Podrobnejši pregled ni predmet obravnave našega dela.

2.2 Bornhuetter-Fergusonov princip

Schmidt (2006) ter Schmidt in Zoecher (2008) sta predstavila poenoteni Bornhuetter-Fergusonov princip, ki je neposredna razširitev BF metode. Namen tega principa je posplošitev trikotniških metod z enotnimi oznakami. Dokazano je, da lahko končne ocene škod različnih metod prikažemo preko oblike BF napovedi. Prihodnja podpoglavja z opisi metod bodo predstavljena v okviru tega principa.

Poleg poenotenja različnih metod ta princip lahko služi tudi za ustvarjanje novih metod za izračun škodnih rezervacij, za enostavno primerjavo rezervacij različnih metod in za primerjavo obravnavanega portfelja s trgom (Schmidt, 2008).

V nadaljevanju uporabimo definicije in oznake Schmidta (2008), ki smo jih prilagodili oznakam v našem delu. Za razvojni trikotnik z inkrementalnimi škodami imamo družino slučajnih spremenljivk $\{X_{i,j}\}_{i \in \{0,1,\dots,I\}, j \in \{0,1,\dots,J\}}$, kjer interpretiramo $X_{i,j}$ kot škodo za leto nastanka i , ki je zaključena z zamikom j let in posledično v razvojnem letu j in koledarskem letu $i + j$. Slučajno spremenljivko $X_{i,j}$ imenujemo inkrementalna škoda leta nastanka i in razvojnega leta j .

Za kumulativne škode obravnavamo družino slučajnih spremenljivk $\{C_{i,j}\}_{i \in \{0,1,\dots,I\}, j \in \{0,1,\dots,J\}}$ in interpretiramo $C_{i,j}$ kot slučajno spremenljivko leta nastanka i , ki je zaključena po j razvojnih letih. Slučajno spremenljivko $C_{i,I-i}$ definiramo kot kumulativno škodo trenutnega koledarskega leta I ter $C_{i,J}$ kot končno kumulativno škodo.

Povezava inkrementalnih s kumulativnimi škodami je

$$C_{i,j} := \sum_{l=0}^j X_{i,l}. \quad (1)$$

In obratno

$$X_{i,j} = \begin{cases} C_{i,0}, & j = 0 \\ C_{i,j} - C_{i,j-1}, & \text{drugače} \end{cases} \quad (2)$$

za vse $0 \leq j \leq J$.

V spodnjih tabelah (Tabela 1 in Tabela 2) sta prikazana razvojna trikotnika opazovanih inkrementalnih in kumulativnih škod, v tem zaporedju.

Tabela 1: Razvojni trikotnik inkrementalnih škod

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j								
	0	1	...	j	...	$J - i$	...	$J - 1$	J
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	...	$X_{0,j}$	...	$X_{0,J-i}$	...	$X_{0,J-1}$	$X_{0,J}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	...	$X_{1,j}$	...	$X_{1,J-i}$	...	$X_{1,J-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$X_{i,0}$	$X_{i,1}$	...	$X_{i,j}$	...	$X_{i,J-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$I - j$	$X_{I-j,0}$	$X_{I-j,1}$	...	$X_{I-j,j}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$I - 1$	$X_{I-1,0}$	$X_{I-1,1}$							
I	$X_{I,0}$								

Prirejeno po Schmidt (2008, str. 3).

Tabela 2: Razvojni trikotnik kumulativnih škod

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j								
	0	1	...	j	...	$J - i$	...	$J - 1$	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,J-i}$	...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,J-i}$	...	$C_{1,J-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$	...	$C_{i,j}$	...	$C_{i,J-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$I - j$	$C_{I-j,0}$	$C_{I-j,1}$	...	$C_{I-j,j}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$I - 1$	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$							
I	$C_{I,0}$								

Prirejeno po Schmidt (2008, str. 3).

Škodno rezervacijo za leto nastanka i označimo kot

$$R_i := \sum_{j=I-i+1}^J X_{i,j}. \quad (3)$$

Uporabo razvojnih trikotnikov pri oblikovanju škodnih rezervacij lahko upravičimo s predpostavko, da so stolpci inkrementalnih škod običajno proporcionalni med seboj, kar je

ekvivalentno temu, da so vrstice v matriki proporcionalne med seboj. To lahko drugače zapišemo v obliki multiplikativnega modela

$$E[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j, \quad (4)$$

za vse $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$ ter parametre $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_I$ in $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_J$. Dodatno brez škode za splošnost predpostavimo še $\sum_{j=0}^J \gamma_j = 1$, iz česar sledi

$$\mu_i = E[C_{i,J}] \quad (5)$$

in posledično

$$\gamma_j = \frac{E[X_{i,j}]}{E[C_{i,J}]}, \quad (6)$$

kjer je μ_i pričakovana končna škoda leta nastanka i in γ_j pomeni delež škod, rešenih v razvojnem letu j . Parametre $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_J$ poimenujemo razvojni vzorec inkrementalnih škod.

Multiplikativni model lahko zapišemo še preko kumulativnih škod, saj velja predpostavka, da pričakovane kumulativne škode zadoščajo enakosti

$$E[C_{i,j}] = \mu_i \beta_j \quad (7)$$

za vse $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$ ter parametre $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_I$ in $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_J$ z $\beta_J = 1$. Tukaj se ponovno srečamo z enakostjo $\mu_i = E[C_{i,J}]$ in parametre $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_J$ poimenujemo razvojni vzorec kumulativnih škod. Razvojna vzorca inkrementalnih in kumulativnih škod sta povezana z enakostjo

$$\beta_j = \sum_{l=0}^j \gamma_l \quad (8)$$

in

$$\gamma_j = \begin{cases} \beta_0, & j = 0 \\ \beta_j - \beta_{j-1}, & \text{drugače} \end{cases} \quad (9)$$

za vse $0 \leq j \leq J$.

Za multiplikativni model dodatno velja, da za pričakovane kumulativne škode velja enakost

$$E[C_{i,j}] = E[C_{i,j-1}] f_j \quad (10)$$

za vse $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$ ter parametre $f_1, \dots, f_J$, ki jih skupno poimenujemo razvojni vzorec za faktorje ali krajše razvojni faktorji. Razvojni vzorec inkrementalnih škod in razvojni faktorji so povezani z identiteto

$$\beta_j = \beta_{j-1} f_j \quad (11)$$

ter zaradi enakosti $\beta_j = 1$ in $\prod_{k=j+1}^J \frac{1}{f_k} := 1$ sledi

$$\beta_j = \prod_{l=j+1}^J \frac{1}{f_l}. \quad (12)$$

Predpostavko multiplikativnega modela in temu ekvivalentne predpostavke osnovnega razvojnega vzorca inkrementalnih škod lahko upoštevamo kot enostavno obliko stohastičnega modela, ki je osnovna za vse metode škodnih rezervacij, ki temeljijo na razvojnih trikotnikih.

Sedaj nadaljujemo z ocenami zgoraj definiranih slučajnih spremenljivk, saj so njihove vrednosti neznane. Začnemo z oceno inkrementalne škode $X_{i,j}$, ki jo označimo z

$$\hat{X}_{i,j} := \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j, \quad (13)$$

kjer je $\hat{\mu}_i$ apriorna cenilka pričakovane končne škode $\mu_i = E[C_{i,J}]$ in $\hat{\gamma}_j$ apriorna cenilka razvojnega vzorca inkrementalnih škod $\gamma_j = E[X_{i,j}]/E[C_{i,J}]$.

Podobno označimo ocene kumulativnih škod, in sicer

$$\hat{C}_{i,j} := \hat{\mu}_i \hat{\beta}_j, \quad (14)$$

kjer je $\hat{\mu}_i$ apriorna cenilka pričakovane končne škode in $\hat{\beta}_j$ apriorna cenilka razvojnega vzorca kumulativnih škod $\beta_j = E[C_{i,J}]/E[C_{i,j}]$. Apriorne cenilke lahko izračunamo neposredno iz razvojnega trikotnika ali pa iz drugih, zunanjih virov, kot na primer premij.

Rezervacijo za leto nastanka i lahko zapišemo kot $R_i = C_{i,J} - C_{i,I-i}$ in zadošča enačbi $E[R_i] = E[C_{i,J}] - E[C_{i,I-i}] = \mu_i(1 - \beta_{I-i})$, zato cenilko rezervacije ocenimo z naslednjo enakostjo

$$\hat{R}_i := \hat{\mu}_i(1 - \hat{\beta}_{I-i}). \quad (15)$$

Idejo za razvoj ocen za Bornhuetter-Fergusonove rezervacije (v nadaljevanju tudi BF rezervacije) lahko uporabimo tudi za razvoj ocene bodočih kumulativnih škod. Ker velja $C_{i,j} = C_{i,I-i} + (C_{i,j} - C_{i,I-i})$ in $E[C_{i,j} - C_{i,I-i}] = \mu_i(\beta_j - \beta_{I-i})$, definiramo formulo za oceno prihodnjih kumulativnih škod

$$\hat{C}_{i,j}^{BF} := C_{i,I-i} + \hat{\mu}_i(\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{I-i}), \quad (16)$$

ki jo uporabljamo kot podlago za zapis drugih metod za izračun škodnih rezervacij in je osnova Bornhuetter-Fergusonovega principa (v nadaljevanju tudi BF princip), s katero lahko zapišemo tudi preostale metode.

Za končno kumulativno škodo velja naslednja enakost

$$\hat{C}_{i,j}^{BF} = C_{i,I-i} + \hat{\mu}_i(1 - \hat{\beta}_{I-i}) = C_{i,I-i} + \hat{R}_i. \quad (17)$$

V člankih Schmidta (Schmidt, 2006) ter Schmidta in Zoecherja (Schmidt & Zoecher, 2008) je bilo prikazano, da lahko mnogo metod zapišemo z zgornjo formulo z ustrezno izbiro apriornih cenilk $\hat{\mu}_i$ in $\hat{\beta}_i$. Tiste metode, za katere je to izvedljivo, imenujemo različice BF principa.

V nadaljevanju predstavimo nekatere izmed metod za škodne rezervacije skozi oznake BF principa ter omenimo njihove prednosti in slabosti.

2.2.1 Metoda veriženja

Metoda veriženja (ang. Chain Ladder, v nadaljevanju tudi CL) je zaradi svoje preprostosti in učinkovitosti najpogostejše uporabljena v praksi. Njena temeljna lastnost je, da so končne škode za vsako leto nastanka izračunane na podlagi razvoja preteklih let. Zaradi tega je metoda učinkovita za portfelje s stabilnimi škodami. V primeru sprememb v načinu likvidacije škod metoda ni več primerna oziroma jo je treba prilagoditi, na primer z ročnim prilagajanjem razvojnih faktorjev. Najbolj je primerna za portfelje z zadostnimi podatki o škodah. V nasprotnem primeru lahko imajo velike škode močan vpliv na razvojne faktorje. Metoda se najbolje izkaže za portfelje s škodami z visoko pogostostjo in nizko višino posamezne škode. Uporabna je za kratkorepe in dolgorepe portfelje (Friedland, 2010, str. 84).

Cenilke metode veriženja so določene z naslednjo formulo

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} := C_{i,I-i} \prod_{l=j-i+1}^j \hat{f}_l^{CL}, \quad (18)$$

kjer je

$$\hat{f}_j^{CL} := \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j-1}} \quad (19)$$

razvojni faktor metode veriženja za razvojno leto j . Drugače lahko faktorje kumulativno zapišemo še z razvojnim vzorcem kumulativnih škod

$$\hat{\beta}_j^{CL} := \prod_{l=j+1}^J \frac{1}{\hat{f}_l}, \quad (20)$$

iz česar sledi, da lahko cenilke metode veriženja zapišemo še kot

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = C_{i,I-i} + \frac{C_{i,I-i}}{\hat{\beta}_{I-i}^{CL}} (\hat{\beta}_j^{CL} - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}), \quad (21)$$

kar pomeni, da je metoda veriženja različica Bornhuetter-Fergusonovega načela z $\hat{\beta}_j := \hat{\beta}_j^{CL}$ in $\hat{\mu}_i := C_{i,I-i} / \hat{\beta}_{I-i}^{CL}$.

Pri metodi veriženja so vse rezervacije izračunane neposredno iz razvojnega trikotnika, brez zunanjih informacij, kar je lahko hkrati prednost in slabost. Pri stabilnem portfelju se metoda dobro izkaže, pri portfelju z manjkajočimi podatki pa je v njene izračune potrebno vgraditi tudi druge podatke.

2.2.2 Metoda pričakovanih škod

Metoda pričakovanih škod (ang. Expected Claims Method, v nadaljevanju tudi EC) je sestavni del nekaterih ostalih metod kot sta Bornhuetter-Ferguson in Cape Cod metoda. Glavna predpostavka metode je, da ocenimo skupne neplačane ali neprijavljene škode z apriornimi cenilkami namesto iz realiziranega razvoja škod. V določenih okoliščinah so namreč le-te lahko pomanjkljive, saj nudijo premalo informacij o končnih škodah, in zato raje uporabimo apriorne cenilke (Friedland, 2010, str. 131).

Cenilke metode pričakovanih škod so določene z naslednjo formulo

$$\hat{C}_{i,j}^{EC} := C_{i,I-i} + \hat{\mu}_i, \quad (22)$$

kjer je $C_{i,I-i}$ diagonalno izplačilo škode in $\hat{\mu}_i$ apriorna cenilka končne škode. Hitro lahko ugotovimo, da je metoda pričakovanih škod različica BF principa z $\hat{\beta}_{I-i} := 1$.

Metoda pričakovanih škod se najbolje izkaže za nove produkte ali za kasnejša leta nastanka, ko imajo razvojni faktorji še večji vpliv na razvoj škod. Uporabljamo jo predvsem za dolgoročno zavarovanje in zavarovanja, kjer ni na voljo dovolj zgodovinskih podatkov o škodah. V zadnjem primeru lahko kot apriorne cenilke uporabimo merila industrije. Njena prednost, to je stabilnost, je hkrati tudi njena slabost, saj se slabo odziva na spremembe škod, ker metoda popolnoma ignorira izkušnje realizacije škod.

2.2.3 Metoda Cape Cod

Cape Cod (v nadaljevanju tudi CC) ali Stanard-Bühlmann metoda je podobna Bornhuetter-Fergusonovi. Razlika med njima je v izpeljavi pričakovanega škodnega količnika: v Cape Cod metodi je le-ta pridobljen iz izkušenj nastalih škod, za razliko od BF metode, kjer je neodvisen od izkušenj in je pogosto odločitev strokovne presoje. Pri Cape Cod metodi je

torej temeljna predpostavka, da se bodo neprijavljene ali neplačane škode razvile na podlagi pričakovanih škod, ki so izpeljane z uporabo nastalih ali plačanih škod in zaslužene premije.

Metodo lahko uporabljamo za kratkorepe in dolgorepe zavarovalne vrste; običajno jih uporabljamo na nastalih škodah, lahko pa tudi na plačanih.

Ocena kumulativnih škod za metodo Cape Cod je definirana kot

$$\hat{C}_{i,j}^{CC} = C_{i,I-i} + v_i \hat{q}^{CC} (\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{I-i}), \quad (23)$$

kjer je v_i zaslužena premija leta nastanka i in

$$\hat{q}^{CC} := \frac{\sum_{k=0}^I C_{k,I-k}}{\sum_{k=0}^I \hat{\beta}_{I-k} v_k} \quad (24)$$

je škodni količnik CC, ki je cenilka pričakovanega škodnega količnika $q = E[C_{i,J}/v_i]$, skupen za vsa leta nastanka. Ta metoda je različica načela BF z $\hat{\mu}_i := v_i \hat{q}^{CC}$.

Zaradi podobnosti z BF metodo so primerljive tudi njune prednosti in slabosti. Cape Cod slabše odreagira v situacijah z manj škodami ali nestanovitnimi škodami, ker so pričakovane škode odvisne od nastalih škod (Friedland, 2010, str. 174).

2.2.4 Metoda Benktander-Hovinen

Metoda Benktander-Hovinen (v nadaljevanju tudi BH) je kredibilnostno uteženo povprečje med metodo veriženja in BF metodo. V primerjavi z metodo veriženja je bolj stabilna, v primerjavi z BF metodo pa bolj odzivna. V literaturi je poimenovana tudi kot različica BF metode, saj se od nje razlikuje le v izpeljavi pričakovanih škod. Namesto apriornih cenilk pričakovanih končnih škod uporabi projekcije končnih škod BF metode (Friedland, 2010, str. 160).

Teorija kredibilnosti je del statistike, ki jo uporabljamo za napovedovanje bodočega negotovega dogodka. Ta pristop uporabimo, ko imamo na voljo več ocen za bodoč negotov dogodek ter jih želimo med seboj povezati in kombinirati tako, da dobimo najbolj primerno oceno. V aktuarstvu je teorija kredibilnosti uporabna predvsem pri določanju višine premije. Če teorijo kredibilnosti prenesemo na naš primer BH metode, imamo kombinacijo izbire ocene končne škode BF in CL metode, ki jo ponazorimo z naslednjo enačbo

$$\hat{\mu}_i(\alpha) = \alpha \hat{C}_{i,J}^{CL} + (1 - \alpha) \hat{\mu}_i, \quad (25)$$

kjer je $\alpha \in [0,1]$ kredibilnostna utež med oceno končne škode po CL metodi in apriorno cenilko končne škode. Z α uravnavamo, kolikšen del pripišemo kateri izmed končnih škod. Benktander in Hovinen sta za konstanto α določila razvojni vzorec β_{I-i} . Če oceno apriorne

cenilke končne škode prenesemo v okvir BF principa, dobimo za oceno končne škode naslednjo enakost

$$\hat{C}_{i,J}^{BH} = C_{i,I-i} + (1 - \hat{\beta}_{I-i})(\hat{\beta}_{I-i}\hat{C}_{i,J}^{CL} + (1 - \hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i), \quad (26)$$

kjer smo cenilko $\hat{\mu}_i$ zamenjali s kombinacijo kredibilnostnih uteži med CL in BF metodo, $\hat{\beta}_{I-i}\hat{C}_{i,J}^{CL} + (1 - \hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i$.

Metoda Benktander-Hovinen je izpeljanka dveh samostojnih modelov; Benktanderjevega iz leta 1976 in Hovinenovega iz leta 1981. Oba modela vodita do enakih ocen končnih škod. Povezavo med njima je našel Mack (2000) in jo predstavil kot prvo stohastično izpeljanko BF metode v okviru teorije kredibilnosti. Benktander-Hovinen je kombinacija kredibilnosti med BF metodo ter metodo veriženja in jo poznamo kot iteracijo BF metode. Mack (2000) trdi, da ima BH metoda skoraj vedno manjšo srednjo kvadratno napako ocene kot CL in BF metoda. Optimalna kombinacija med CL in BF metodama je večkrat predmet obravnave; Arbenz in Salzmann (2011) sta razvila hibridno stohastično metodo veriženja brez določene porazdelitve, ki ne uporablja kredibilnosti za določanje uteži, temveč so uteži vnaprej določene s strani aktuarja.

3 BORNHUETTER-FERGUSONOVA METODA

Bornhuetter-Fergusonova metoda je po priljubljenosti takoj za metodo veriženja. Prvič je bila predstavljena leta 1972 v članku Ronalda Bornhuetterja in Ronalda Fergusona z naslovom The Actuary and IBNR. Izvirna metoda pri izračunu končnih škod uporablja razvojni vzorec metode veriženja in jo na ta način aktuarji uporabljajo tudi v praksi, čeprav ta pristop ni nujno najboljši, kar pa bomo podrobneje obravnavali v naslednjem poglavju. V tem poglavju predstavimo deterministično BF metodo v obliki, kot je bila originalno predstavljena in je uporabljena v praksi, torej z implementacijo razvojnih faktorjev metode veriženja, ter njene prednosti in slabosti.

Metodo bomo predstavili v okviru BF principa, ki smo ga predstavili v prejšnjem poglavju in je definiran z enačbama (16) in (17).

Osnovna deterministična BF metoda je predstavljena z naslednjo enačbo za kumulativne škode

$$\hat{C}_{i,J}^{BF} := C_{i,I-i} + v_i \hat{q}_i (\hat{\beta}_J^{CL} - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}), \quad (27)$$

kjer je v_i zaslužena premija leta nastanka i , $\hat{q}_i$ pa ocena pričakovanega škodnega količnika $q_i := E[C_{i,J}/v_i]$ leta nastanka i ter $\hat{\beta}_{J-i}^{CL}$ ocena kumulativnega razvojnega vzorca izračunanega po metodi veriženja. Zaslužena premija je mera volumna, namesto katere lahko

uporabimo tudi obračunano premijo, število zavarovanj ali druge mere z ustrezno prilagoditvijo pričakovanega škodnega količnika (Schmidt & Zoecher, 2008).

Sledi ocena končne kumulativne škode BF metode

$$\hat{C}_{i,J}^{BF} = C_{i,I-i} + v_i \hat{q}_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}), \quad (28)$$

za razliko od metode veriženja, pri kateri je ocena končne kumulativne škode $\hat{C}_{i,J}^{CL} = C_{i,J-i} \hat{\beta}_{J-i}^{CL^{-1}}$. Pri tem se najbolje vidi razliko med BF in CL, saj je pri CL ocena končne škode zmnožek trenutne škode z inverzom razvojnega vzorca, pri BF pa je relacija s trenutno škodo aditivna.

Glavna prednost BF metode v primerjavi z metodo veriženja je, da za kvalitetno uporabo ne potrebuje veliko zgodovinskih podatkov oziroma velikega portfelja. Največja razlika med njima je, da pri BF neprijavljene škode niso popolnoma odvisne od nastalih ali plačanih, temveč se razvijajo tudi na podlagi pričakovanih škod. Z razvojem škod je več teže na dejanskih škodah in pričakovane škode sčasoma postanejo manj pomembne. Zato predvsem v začetnih razvojnih letih, ko izračun temelji pretežno na pričakovanih škodah, nestabilnost podatkov ne vpliva na izračun rezervacij in je to še ena prednost BF metode. Aktuarji BF metodo uporabljajo tako za zavarovanja s kratkim kot dolгим repom (Friedland, 2010, str. 152).

BF metoda se izkaže kot najbolj učinkovita za zavarovalne vrste z omejenimi izkušnjami ali brez izkušenj o škodah (Carrato, McGuire & Scarth, 2016, str. 27). Poleg svoje preprostosti je BF metoda zelo priljubljena, ker je precej robustna v primeru odstopanj v podatkih in omogoča vključitev strokovne presoje in zunanjih informacij, na primer premij ali strateških planov (Alai, Merz & Wüthrich, 2009, str. 8).

4 STOHAŠTIČNE RAZLIČICE BORNHUEETTER-FERGUSONOVE METODE

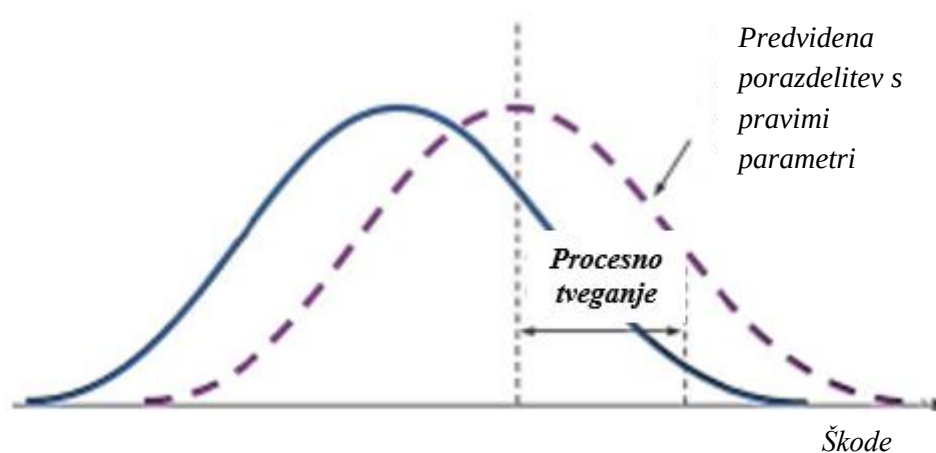
4.1 Stohastične metode

Za izračun škodnih rezervacij so do nedavnega zadoščale deterministične metode, ki z algoritmom vrnejo vrednost rezervacije. Z razvojem tehnologije in novimi direktivami, kot je Solventnost II, oblikovanje škodnih rezervacij ni več samo pridobivanje vrednosti rezervacij, vendar tudi ocena točnosti teh vrednosti. Scenarijski testi in testi občutljivosti nudijo le delni vpogled v variabilnost rezervacij, celotno sliko pa lahko pridobimo le s stohastičnimi metodami (Carrato, McGuire & Scarth, 2016, str. 12).

Napako ocene modela delimo na tri vrste glede na njihov izvor (Carrato, McGuire & Scarth, 2016, str. 15 – 17):

- Procesna napaka (Slika 2) predstavlja slučajnost v prihodnjih škodah. Tudi v primeru, ko je model ustrezno določen in so parametri pravilno ocenjeni, se nestanovitnost, povezana z zavarovalnim procesom, lahko kaže v razlikah med pričakovanimi rezultati. Procesno napako velikokrat enačimo z varianco slučajne spremenljivke modela (v našem primeru so to inkrementalne škode).

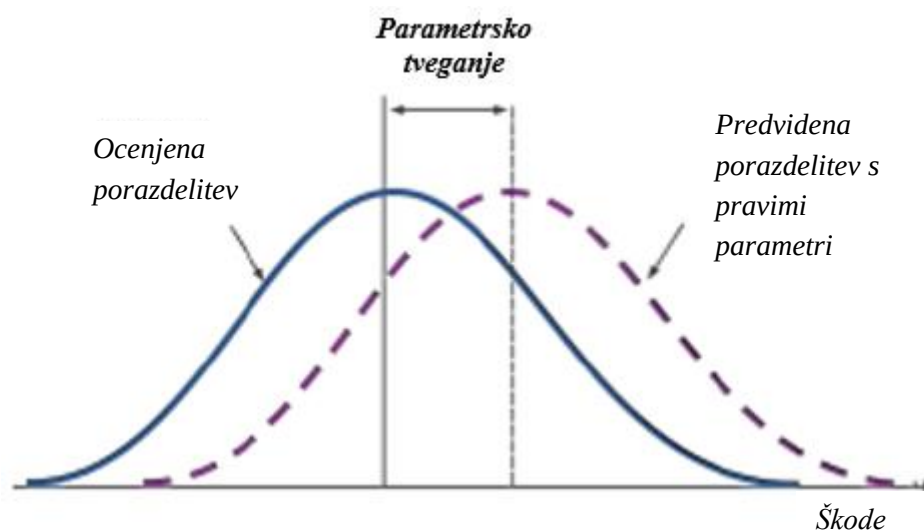
Slika 2: Procesna napaka



Prirejeno po Carrato, McGuire & Scarth (2016, str. 16).

- Napaka parametra (Slika 3) izhaja iz negotovosti pri oceni parametra pod predpostavko, da je model ustrezno določen. Je razlika med matematičnima upanjema ocenjene porazdelitve in predpostavljene porazdelitve s pravimi parametri.

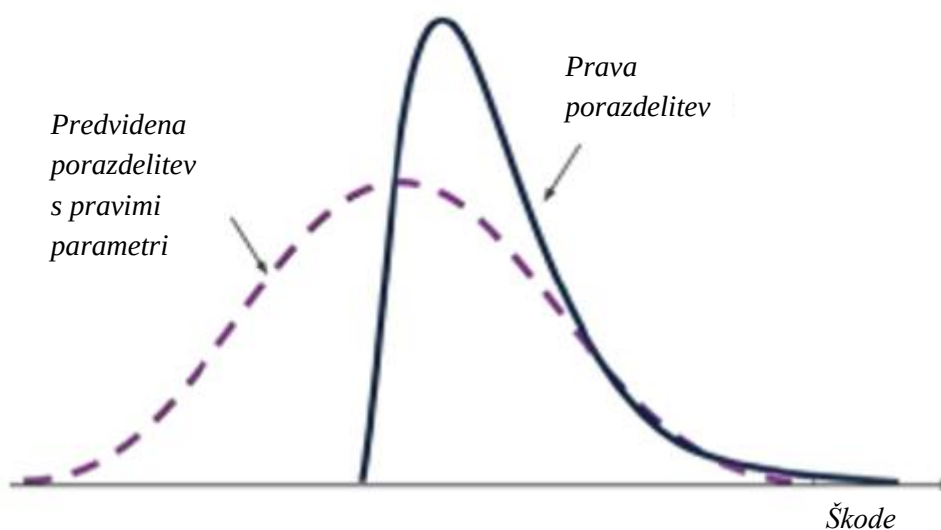
Slika 3: Napaka parametra



Prerejeno po Carrato, McGuire & Scarth (2016, str. 16).

- Napaka modela (Slika 4) predstavlja sistemsko napako oziroma napako v izbiri modela. Primeri takega tveganja so spremembe v zakonodaji ali okoljske spremembe, ki vplivajo na število ali spremembo višine škod.

Slika 4: Napaka modela



Prerejeno po Carrato, McGuire & Scarth (2016, str. 17).

Za določanje negotovosti ocene rezervacije uporabimo prva dva momenta, tj. matematično upanje in varianco, ki sta začetni korak določanja porazdelitve. Nadalje kot mero negotovosti ocene rezervacije vpeljemo (pogojno) srednjo napako ocene (ang. Mean Squared Error of Prediction, v nadaljevanju tudi MSEP), ki predstavlja dolgoročni vidik zavarovalnega

tveganja, saj upošteva celotni razvoj škod. MSEP ima dva člena – procesno napako in napako parametra.

Predpostavimo, da imamo slučajno spremenljivko X in množico opazovanih vrednosti $\mathcal{D}$. Naj bo $\hat{X}$ cenilka za X . Potem je formula za izračun pogojne srednje napake cenilke $\hat{X}$ slučajne spremenljivke X definirana z naslednjo enakostjo

$$mse_{p_{X|\mathcal{D}}}(\hat{X}) := E \left[(\hat{X} - X)^2 | \mathcal{D} \right]. \quad (29)$$

Če dodatno predpostavimo, da je $\hat{X}$ D -merljiva, dobimo naslednjo enakost

$$mse_{p_{X|\mathcal{D}}}(\hat{X}) = \underbrace{Var(X|\mathcal{D})}_{= \text{pogojna procesna varianca}} + \underbrace{(\hat{X} - E[X|\mathcal{D}])^2}_{= \text{pogojna napaka ocene parametra}}, \quad (30)$$

kjer je prvi člen pogojna procesna varianca, ki izhaja iz slučajnosti procesa in je neodpravljljiva, drugi člen pa pogojna napaka ocene parametrov. (Pogojna) srednja (kvadratna) napaka ocene izmeri natančnost cenilke $\hat{X}$ za X .

Zgornje ugotovitve prenesemo v okvir škodnih rezervacij, kjer imamo množico informacij D_I v času I , $\mathcal{I}_I$ pa je σ -algebra, ki je skupek vseh informacij, ki jih uporabimo za izračun rezervacije v času I . To v praksi pomeni, da poleg podatkov iz trikotnika upoštevamo tudi zunanje parametre, npr. premije. V literaturi je pogosto uporabljena pogojnost na množico D_I namesto $\mathcal{I}_I$. To je odvisno od interpretacije: če $\hat{\mu}_i$ upoštevamo kot opazovane vrednosti, uporabimo pogoj $\mathcal{I}_I$, v primeru apriornih informacij pa uporabimo D_I . V zadnjem primeru smo v Bayesovem okvirju, kjer so μ_i slučajne spremenljivke z apriorno porazdelitvijo in je $\hat{\mu}_i$ pričakovana vrednost μ_i , v prvem primeru pa $\hat{\mu}_i$ interpretiramo kot strokovno določene »opazovane« vrednosti (Saluz, Bühlmann & Gisler, 2011, str. 15). Ker v našem primeru interpretiramo ocene končne škode kot strokovne ocene, predpostavimo, da so $\hat{R}_i$ $\mathcal{I}_I$ -merljive cenilke za R_i in so

$$\hat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} + \hat{R}_i \quad (31)$$

cenilke končne škode za leto nastanka i , $D_I \subset \mathcal{I}_I$. Za $\mathcal{I}_I$ -merljivo cenilko $\hat{C}_{i,J}$ določimo pogojno srednjo kvadratno napako ocene

$$\begin{aligned} mse_{C_{i,J}|\mathcal{I}_I}(\hat{C}_{i,J}) &= E \left[(\hat{C}_{i,J} - C_{i,J})^2 | \mathcal{I}_I \right] = E \left[(\hat{R}_i - R_i)^2 | \mathcal{I}_I \right] \\ &= mse_{R_i|\mathcal{I}_I}(\hat{R}_i). \end{aligned} \quad (32)$$

Kot vidimo iz zgornje enakosti, sta pogojni srednji kvadratni napaki za $\hat{C}_{i,J}$ in $\hat{R}_i$ enaki in v naših primerih uporabljamo obe oznaki.

Druga mera negotovosti ocene je koeficient variance, ki je pri rezervacijah običajno izračunan kot MSEP deljen z izračunano končno škodo, za vsako leto nastanka posebej (Saluz, 2011). Koeficient variance rezervacije R_i v našem delu definiramo kot

$$CoVa(R_i) := \frac{\sqrt{MSEP}}{R_i}. \quad (33)$$

Glavni teoretični cilj stohastične metode je določitev porazdelitve rezervacij. V večini primerov ne moremo analitično oceniti porazdelitve in se poslužujemo numeričnih algoritmov kot so metoda ponovnega vzorčenja ali metode markovske verige Monte Carlo za simulacijo porazdelitve. Kljub temu v praksi zadostuje ocena drugih momentov, kot na primer (pogojna) srednja napaka ocene ali koeficient variance, saj se v večini primerov zadostno približajo analitični porazdelitvi le z uporabo prvih dveh momentov (Wüthrich & Merz, 2008, str. 35 – 36). Lahko bi rekli, da se tega drži Mack (2008), ki v svojem delu predstavi srednjo napako ocene brez določene porazdelitve, le z določitvijo matematičnega upanja in variance. Njegov model bomo podrobneje opisali v nadaljevanju.

Drugi vidik zavarovalnega tveganja, kratkoročni ali enoletni, je postal pomemben predvsem z uvedbo Solventnosti II, ki upošteva tudi enoletne časovne intervale. Za ovrednotenje enoletnega tveganja uporabimo rezultat razvoja škod (ang. Claims Development Result, v nadaljevanju tudi CDR), ki predstavlja razliko med dvema zaporednima ocenama končne škode

$$CDR_i^{(t+1)} = \hat{C}_{i,J}^{(t)} - \hat{C}_{i,J}^{(t+1)}. \quad (34)$$

Merz & Wüthrich (2008) v svojem delu poudarjata, da ima CDR neposreden vpliv na izkaz poslovnega izida in s tem na dobiček ali izgubo. Glede na to, da po Solventnosti II računamo najboljšo oceno, ta ne bi smela biti ne pretirano konservativna ne previsoka. V primeru pozitivnega CDR več zaporednih računovodskih let pa še ne pomeni, da so rezervacije preveč konservativne, kljub temu, da je idealni rezultat CDR okoli ničle (Saluz, 2014, str. 6).

Pristopa k stohastičnim metodam sta dva; določitev modela in analitične formule za standardne napake ali uporaba simulacijskih tehnik. Prvi pristop je težji in ima svoje pomanjkljivosti, saj z njim ne določimo celotne porazdelitve. Drugi pristop je lažji, vendar moramo še vedno določiti osnovni model in ima praktične pomanjkljivosti ter omejitve (England, 2010, str. 6). Pri obravnavi stohastičnih različic BF metode smo se v našem delu odločili za prvi pristop.

4.2 Stohastične različice Bornhuetter-Fergusonove metode

Razvoj stohastičnih metod za Bornhuetter-Fergusonovo metodo se je začel bistveno pozneje kot za metodo veriženja, za katero je prvo izpeljavo napake ocene objavil Mack že leta 1993. Prva različica BF stohastične metode je bila predstavljena v članku Macka (2000) kot del teorije kredibilnosti, ki je po nekaterih virih tudi del stohastičnih metod (Radtke, Schmidt & Schnauss, 2016). Mack (2000) je predstavil metodo Benktander-Hovinen, ki je kombinacija kredibilnosti med BF metodo ter metodo veriženja in smo jo opisali v drugem poglavju v osnovi kot deterministično metodo. V tem članku so predstavljeni preprosti stohastični modeli in izpeljane formule za napako ocene za vse tri modele, tj. BF, CL in BH.

Verrall (2004) je preučil, kako je BF metoda lahko modelirana v okviru Bayesovega posplošenega linearnega modela. Model je izpeljan z uporabo simulacijske metode markovskih verig Monte Carlo, ni pa izpeljana analitična formula za napako ocene. Njegovo delo so nadaljevali England, Verrall in Wüthrich (2012), ki so stohastično različico Bornhuetter-Fergusonove metode predstavili v okviru Bayesovega prerazpršenega Poissonovega modela.

Na področju prevrednotenja apriornih ocen pričakovane končne škode je bil napisan članek Saluz, Bühlmann, Gisler in Moriconi (2014) o prilagajanju ocen v okviru teorije kredibilnosti in oceni negotovosti končnih rezervacij. Uporaba teorije kredibilnosti izhaja iz kombiniranja različnih metod za rezervacije. V posebnem primeru je opisan primer uteženega povprečja med CL in BF metodo, podoben metodi Benktander-Hovinen. Optimalna kombinacija med metodama je predmet obravnave tudi v delu Wüthricha in Merza (2008).

Leta 1972 je bila BF metoda predstavljena z uporabo razvojnega vzorca metode veriženja in je na ta način še zdaj najbolj uporabljena v praksi. Mack (2006) je v svojem članku prvi podvomil v ustreznost uporabe razvojnih faktorjev metode veriženja, saj je to v nasprotju s predpostavko BF metode, da so rezervacije neodvisne od dejanskih podatkov o škodah. Leta 2008 je nato predstavil model brez privzetkov o porazdelitvi za BF metodo in izpeljal prvo formulo za napako ocene BF rezervacije. V tem modelu je uporabil oceno razvojnega vzorca, ki se razlikuje od klasične uporabe BF metode v praksi. Alai, Merz in Wüthrich (2009) so kljub zavedanju o nekonsistentnosti ostali pri uporabi CL vzorca ter predstavili prerazpršeni Poissonov model in njemu pripadajočo formulo za MSE. Saluz, Gisler in Wüthrich (2011) obravnavajo različne stohastične modele za BF metodo s parametričnimi predpostavkami o porazdelitvi inkrementalnih škod. Na podlagi teh modelov so izpeljani razvojni vzorci z metodo največjega verjetja ter pogojna srednja napaka ocene.

V nadaljevanju bomo predstavili tri stohastične različice Bornhuetter-Fergusonove metode, ki smo jih izbrali na podlagi jasnosti, dovolj preproste uporabe v praksi in zaradi medsebojne primerljivosti. Pri izbiri stohastičnih BF metod za naše delo smo se odločili za analitični pristop, brez modelov, ki uporabljajo simulacijske tehnike. Na podlagi tega smo izbrali tri

modele; prvi je Mackov model brez porazdelitve, ki je izredno pomemben za nadaljnji razvoj BF stohastičnih metod; sledi prerazpršen Poissonov model, ki se najbolj približa uporabi BF metode v praksi; kot tretjega pa predstavimo model z normalno porazdelitvijo škod.

4.2.1 Model brez privzete porazdelitve

Bornhuetter-Fergusonova metoda vsebuje dva parametra; razvojni vzorec in apriorno oceno končne škode. Zato ima negotovost ocene končne škode velik vpliv na napako ocene. Ker začetna ocena običajno pride iz zunanjih virov, izven trikotnika, kot na primer iz oddelka za določanje premije ali je določena s strani aktuarja na podlagi njegovega poznavanja, mora biti tudi ocena negotovosti določena izven trikotnika. To pomeni, da je napaka ocene BF rezervacij krepko odvisna od bolj kot ne subjektivnega ocenjevanja aktuarja, kar je smiselno, saj je sama BF metoda odvisna od strokovne presoje (Mack, 2008).

V tem podpoglavju predstavimo Mackov model brez porazdelitve (Mack, 2008) in se naslonimo na njegove definicije ter opise in oznake prilagodimo oznakam v našem delu. Pri predstavitvi modela začnemo z določitvijo strukture, ki izhaja iz BF formule za rezervacijo, in določimo matematični upanji za kumulativne in inkrementalne škode

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}] &= \mu_i \beta_j, \\ E[X_{i,j}] &= \mu_i \gamma_j, \end{aligned} \tag{35}$$

kjer tako kot v prejšnjih poglavjih velja $\beta_j = \sum_{k=0}^j \gamma_k$. Ker velja $\mu_i \gamma_j = (\mu_i c)(\gamma_j / c)$ za vsako konstanto $c > 0$, so parametri lahko enolično določeni le do konstantnega faktorja. Zato brez škode za splošnost predpostavimo, da velja enakost $\gamma_0 + \dots + \gamma_J = 1$. Za končno kumulativno škodo za leto J velja

$$E[C_{i,J}] = \mu_i. \tag{36}$$

Nato določimo še enakost za drugi moment, varianco, za inkrementalne škode

$$\text{Var}(X_{i,j}) = \mu_i s_j^2. \tag{37}$$

Predpostavke Mackovega modela brez porazdelitve so naslednje, za $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$:

- Vse inkrementalne škode $X_{i,j}$ so med seboj neodvisne.
- Obstajajo parametri μ_i, γ_j , za katere velja $E[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j$ in $\gamma_0 + \dots + \gamma_J = 1$.
- Obstajajo konstante proporcionalnosti s_j^2 , $0 \leq j \leq J$, za katere velja $\text{Var}(X_{i,j}) = \mu_i s_j^2$.
- Dane so apriorne cenilke $\hat{\mu}_i$ za μ_i , $0 \leq i \leq I$.

Iz zgornjih predpostavk za $i \geq I - J + 1$ sledi

$$E[R_i|D_I] = \mu_i(\gamma_{I-i+1} + \dots + \gamma_J) = \mu_i(1 - \beta_{I-i}), \text{ kjer je } \beta_{I-i} = \sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j. \quad (38)$$

Iz tega sledi, da so predpostavke konsistentne z BF rezervacijami.

Mack (2006; 2008) kritizira uporabo razvojnih faktorjev metode veriženja v BF metodi, saj kršijo temeljno predpostavko BF metode o neodvisnosti med preteklimi in prihodnjimi škodami. Zaradi proporcionalnosti CL rezervacij glede na trenutni kumulativni znesek škod za CL rezervacijo velja, da se z manjšo trenutno škodo $C_{i,I-i}$ zmanjša tudi rezervacija za leto nastanka i . Mack (2008) poudari, da BF rezervacija za leto nastanka i ni neposredno odvisna od $C_{i,I-i}$ in zato uporaba CL razvojnih faktorjev, ki so direktni zmnožek z že znanimi škodami, ni ustrezna. Zato predlaga nov razvojni vzorec, ki izhaja iz ocene za rezervacijo

$$\hat{R}_i = (1 - \hat{\beta}_{I-i}) \hat{\mu}_i \Rightarrow \beta_{I-i} = 1 - \frac{\hat{R}_i}{\hat{\mu}_i} = \frac{(\hat{\mu}_i - \hat{R}_i)}{\hat{\mu}_i} \approx \frac{C_{i,I-i}}{\hat{\mu}_i}, \quad (39)$$

kjer je $\hat{\beta}_{I-i}$ cenilka za β_{I-i} , $\hat{\mu}_i$ pa apriorna cenilka za μ_i . Sledi ocena za β_j

$$\hat{\beta}_j := \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i} \quad (40)$$

kot uteženo povprečje količnikov $C_{i,j}/\hat{\mu}_i$. Tak pristop k ocenjevanju lahko vodi v napačne ocene, kjer je lahko $\hat{\beta}_j > \hat{\beta}_{j+1}$, ker je $\hat{\beta}_j$ ocenjena na osnovi drugačnega števila let nastanka. V izogib takim situacijam definiramo naslednjo oceno za inkrementalni vzorec

$$\hat{\gamma}_j := \frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i}, \quad (41)$$

in s prilagoditvijo faktorjev do te mere, da se skupaj seštejejo v 1, dobimo končni vzorec $\hat{\gamma}_0^*, \dots, \hat{\gamma}_J^*$, za katerega veljata enakosti $\sum_{j=0}^J \hat{\gamma}_j^* = 1$ in $\hat{\beta}_j^* = \sum_{k=0}^j \hat{\gamma}_k^*$ za $0 \leq j \leq J$.

Z oceno variance pri parametrih opazimo, da je

$$\tilde{s}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \frac{(X_{i,j} - \mu_i \tilde{\gamma}_j)^2}{\mu_i} \quad (42)$$

nepistranska cenilka s_j^2 , $0 \leq j \leq J-1$. Torej lahko nadaljujemo z oceno

$$\hat{s}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \frac{(X_{i,j} - \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j^*)^2}{\hat{\mu}_i}, \quad 0 \leq j \leq J-1, \quad (43)$$

in ponovno prilagodimo faktorje ali v primeru, ko je $J = I$, uporabimo ekstrapolacijo, da pridobimo končne cenilke $\hat{s}_0^{2*}, \dots, \hat{s}_J^{2*}$. V primeru, ko imamo stabilne podatke o škodah, Mack ponudi bolj formalen način za oceno parametrov μ_i in s_j^2 z regresijo z glajenjem, ki je podrobneje opisana v Mackovem članku (Mack, 2008, str. 228 – 229).

Ne glede na postopek izbora imamo na koncu ocene parametrov $\hat{\gamma}_0^*, \dots, \hat{\gamma}_J^*$ in $\hat{s}_0^{2*}, \dots, \hat{s}_J^{2*}$, iz česar sledi ocena za BF rezervacijo za leto nastanka $i > I - J$

$$\hat{R}_i = \hat{\mu}_i (\hat{\gamma}_{I-i+1}^* + \dots + \hat{\gamma}_J^*) = \hat{\mu}_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}^*). \quad (44)$$

Za oceno pogojne srednje napake ocene $\hat{R}_i$ dodatno predpostavimo:

- Cenilke $\hat{\gamma}_0^*, \dots, \hat{\gamma}_J^*$ so neodvisne od apriornih cenilk $\hat{\mu}_i, \dots, \hat{\mu}_I$.
- Cenilke $\hat{\gamma}_j^*$ in $\hat{s}_j^{2*}$ so nepristranske za γ_j in s_j^2 .

Nato lahko definiramo pogojno srednjo kvadratno napako ocene rezervacije R_i

$$mse_{p_{R_i|X_{i,0}, \dots, X_{i,I-i}}}(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 | X_{i,0}, \dots, X_{i,I-i}]. \quad (45)$$

Nadalje upoštevamo neodvisnost med $\hat{R}_i$ in inkrementalnimi škodami $X_{i,0}, \dots, X_{i,I-i}$ ter izpeljemo cenilko srednje kvadratne napake ocene

$$mse_{p_{R_i}}(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2] = \underbrace{Var(R_i)}_{=PV_i} + \underbrace{Var(\hat{R}_i)}_{=PEE_i}. \quad (46)$$

Prvi člen na desni strani enačbe imenujemo procesna varianca. Osnovna enačba za varianco rezervacije je $Var(R_i) = Var(X_{i,I-i+1}) + \dots + Var(X_{i,J}) = \mu_i(s_{I-i+1}^2 + \dots + s_J^2)$. Zaradi neznanih parametrov uporabimo cenilke in tako dobimo oceno procesne variance z naslednjo enakostjo

$$\widehat{PV}_i = \widehat{Var}(R_i) = \hat{\mu}_i \sum_{j=I-i+1}^J \hat{s}_j^{2*}. \quad (47)$$

Pri oceni variance $Var(\hat{R}_i) = Var(\hat{\mu}_i(1 - \hat{\beta}_{I-i}^*))$ spomnimo na naslednji lastnosti variance:

- za neodvisni slučajni spremenljivki X in Y velja $Var(XY) = (E[X])^2 Var(Y) + Var(X)Var(Y) + Var(X)(E[Y])^2$;
- $Var(X + a) = Var(X)$, kjer je X slučajna spremenljivka in a konstanta.

V našem kontekstu to pomeni, da za neodvisni slučajni spremenljivki $\hat{\mu}_i$ in $1 - \hat{\beta}_{I-i}$ dobimo enakost $Var(\hat{R}_i) = (E[\hat{\mu}_i])^2 Var(\hat{\beta}_{I-i}^*) + Var(\hat{\mu}_i) Var(\hat{\beta}_{I-i}^*) + Var(\hat{\mu}_i)(1 - E[\hat{\beta}_{I-i}^*])^2$. Zaradi neznanih varianc sledi ocena napake parametra

$$\widehat{PEE}_i = \widehat{Var}(\hat{R}_i) = \underbrace{(\hat{\mu}_i^2 + \widehat{Var}(\hat{\mu}_i)) \widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i}^*)}_{=varianca\ parametra} + \underbrace{\widehat{Var}(\hat{\mu}_i)(1 - \hat{\beta}_{I-i}^*)^2}_{=varianca\ apriorne\ cenilke}. \quad (48)$$

Potrebno je torej še oceniti varianci $Var(\hat{\mu}_i)$ in $Var(\hat{\beta}_{I-i}^*)$. Variance apriorne cenilke $\hat{\mu}_i$ se lahko lotimo intuitivno z oceno intervala zaupanja okoli standardne napake (ang. standard error, v nadaljevanju tudi s.e.) $\hat{\mu}_i$, saj vemo, da velja $Var(\hat{\mu}_i) = (s.e.(\hat{\mu}_i))^2$. Verjetnost vrednosti lahko ocenimo s pomočjo normalne porazdelitve, pri kateri velja, da bo interval $(\hat{\mu} - 2 \cdot s.e.(\hat{\mu}_i), \hat{\mu}_i + 2 \cdot s.e.(\hat{\mu}_i))$ vseboval pravo vrednost $E(\hat{\mu}_i)$ s 95-odstotno verjetnostjo. S pomočjo koeficienta variance apriorne cenilke $\hat{\mu}_i$, ki ga lahko izračunamo ali določimo sami in se običajno giblje med 5% in 10%, lahko izračunamo njeno standardno napako. Sledi enakost

$$s.e.(\hat{\mu}_i) = CoVa(\hat{\mu}_i) \cdot \hat{\mu}_i \text{ oziroma } Var(\hat{\mu}_i) = CoVa^2(\hat{\mu}_i) \cdot \hat{\mu}_i^2. \quad (49)$$

Sledi določitev ocene variance $\hat{\beta}_{I-i}^*$, ki jo lahko drugače zapišemo še kot

$$Var(\hat{\beta}_{I-i}^*) = Var(\hat{\gamma}_1^* + \dots + \hat{\gamma}_{I-i}^*) = Var(\hat{\gamma}_{I+1-i}^* + \dots + \hat{\gamma}_{I+1}^*). \quad (50)$$

Ker velja, da so $\hat{\gamma}_j$ paroma negativno korelirane, velja $Var(\hat{\gamma}_1^* + \dots + \hat{\gamma}_{I-i}^*) = Var(\hat{\gamma}_1^*) + \dots + Var(\hat{\gamma}_{I-i}^*)$. Vsote naraščajo z vsakim dodanim členom, kar pa ne velja za vsoto vseh členov, ki se sešteje v 0, $Var(\hat{\gamma}_1^* + \dots + \hat{\gamma}_I^*) = Var(1) = 0$. Zato določimo dve formuli, ki sta odvisni od velikosti k :

- za majhne k določimo formulo $Var(\hat{\gamma}_k^*) = Var(1 - \hat{\gamma}_k^*)$;
- za večje vrednosti k pa velja enakost $Var(\hat{\gamma}_1^*) + \dots + Var(\hat{\gamma}_k^*) = Var(\hat{\gamma}_{k+1}^*) + \dots + Var(\hat{\gamma}_I^*)$.

Natančneje, varianco cenilke $\hat{\beta}_{I-i}^*$ lahko izračunamo z naslednjo formulo

$$Var(\hat{\beta}_{I-i}^*) = \min \left(Var(\hat{\gamma}_1^*) + \dots + Var(\hat{\gamma}_{I-i}^*), Var(\hat{\gamma}_{I+1-i}^*) + \dots + Var(\hat{\gamma}_I^*) \right). \quad (51)$$

Variance cenilk $\hat{\gamma}_k^*$ izpeljemo iz enačbe (41). Sledi izpeljava variance

$$Var(\hat{\gamma}_j^*) \approx Var \left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i} \right) = \frac{\hat{S}_j^{2*}}{\sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i}. \quad (52)$$

Če povzamemo, končna ocena MSEP za BF oceno rezervacije $\hat{R}_i$ je

$$\begin{aligned}
mse_{p_{R_i}}(\hat{R}_i) = & \underbrace{\hat{\mu}_i \sum_{j=I-i+1}^J \hat{s}_j^{2*}}_{=procesna\ varianca} + \underbrace{(\hat{\mu}_i^2 + \widehat{CoVa}^2(\hat{\mu}) \cdot \hat{\mu}^2) \widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i}^*)}_{=varianca\ parametra} \\
& + \underbrace{\widehat{CoVa}^2(\hat{\mu}) \cdot \hat{\mu}^2 \cdot (1 - \hat{\beta}_{I-i}^*)^2}_{=varianca\ apriorne\ cenilke}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Če podrobneje pogledamo zadnja dva člena, ki skupaj tvorita PEE_i , lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{PEE_i}}{\hat{\mu}_i} &\approx s.e.(\hat{\beta}_{I-i}^*), \text{ za } \hat{\beta}_{I-i}^* \text{ blizu } 1, \\
\frac{\sqrt{PEE_i}}{\hat{\mu}_i} &\approx \frac{s.e.(\hat{\mu}_i)}{\hat{\mu}_i}, \text{ za } \hat{\beta}_{I-i}^* \text{ blizu } 0,
\end{aligned} \tag{54}$$

kar pomeni, da je za leta nastanka z manj izkušnjami negotovost končne škode neposredno prenesena v oceno rezervacije.

Za srednjo pogojno napako skupne višine škodne rezervacije, tj. za $R = R_0 + R_1 + \dots + R_I$ imamo nepristransko cenilko $\hat{R} = \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \dots + \hat{R}_I$. Njena ocena MSEP je $msep_R(\hat{R}) = Var(\hat{R}) + Var(R)$. Zaradi neodvisnosti med leti nastanka velja $Var(R) = Var(R_0) + \dots + Var(R_I)$ in iz tega dobimo oceno

$$\widehat{Var}(R) = \sum_{i=0}^I \hat{\mu}_i (\hat{s}_{I+1-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_I^{2*}). \tag{55}$$

Za oceno $Var(\hat{R})$ potrebujemo drugačen pristop, saj so ocene rezervacij $\hat{R}_0, \dots, \hat{R}_I$ pozitivno korelirane preko parametra $\hat{\gamma}_j$ in tudi preko $\hat{\mu}_i$. Imamo torej oceno

$$Var(\hat{R}) = \sum_{i=0}^I Var(\hat{R}_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(\hat{R}_i, \hat{R}_j). \tag{56}$$

Kovariance izračunamo po formuli

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{R}_i, \hat{R}_j) = & \frac{1}{1 + |i - j|} \sqrt{Var(\hat{\mu}_i) Var(\hat{\mu}_j) (1 - \hat{\beta}_{I-i})(1 - \hat{\beta}_{I-j})} \\
& + \sqrt{\frac{\hat{\beta}_{I-j}(1 - \hat{\beta}_{I-i})}{\hat{\beta}_{I-i}(1 - \hat{\beta}_{I-j})}} \sqrt{Var(\hat{\beta}_{I-i}) Var(\hat{\beta}_{I-j})} \hat{\mu}_i \hat{\mu}_j.
\end{aligned} \tag{57}$$

Skupno lahko agregatno MSEP zapišemo z naslednjo enakostjo

$$msepr_R(\hat{R}) = \sum_{i=0}^I msepr_{R_i}(\hat{R}_i) + 2 \sum_{i < j} Cov(\hat{R}_i, \hat{R}_j). \quad (58)$$

V Mackovem članku je bila prvič izpeljana pogojna srednja kvadratna napaka ocene za Bornhuetter-Fergusonovo metodo. Algoritem v veliki meri temelji na strokovni presoji. Nudi tudi formulo za oceno razvojnega vzorca, ki se razlikuje od metode veriženja in je zato BF popolnoma neodvisna metoda. Kljub temu, da sodeč po raziskavi ASTIN Working Party On Non-Life Reserving (2016) algoritem v praksi ni v uporabi, je navdihnil mnogo člankov in je postavil dobro osnovo za nadaljnji razvoj stohastičnih BF metod. Nadgradnjo tega članka je naredil Dal Moro (2018), ki je prvi razvil oceno za tretji moment končne porazdelitve BF rezervacij, asimetrijo (ang. skewness). Predvsem v kontekstu prihajajočega mednarodnega računovodskega standarda IFRS 17 je asimetrija pomemben podatek, s katerim lahko ocenimo različne kvantile porazdelitve rezervacij, ki jih bo potrebno razkriti v kontekstu najboljše ocene in dodatka za tveganje.

4.2.2 Prerazpršen Poissonov model

Alai, Merz in Wüthrich (2009) so za BF metodo izpeljali oceno za pogojni MSEP na podlagi posplošenih linearnih modelov in cenilk največjega verjetja za parametre modela. V letu 2011 so predstavili poenostavljene formule, ki jih bomo tudi sami predstavili v tem poglavju.

Kljub kritikam je razvojni vzorec metode veriženja še vedno v uporabi v kontekstu BF metode. S tem zavedanjem so Alai, Merz in Wüthrich razvojne faktorje metode veriženja vključili v predpostavke modela, saj je bil njihov cilj ovrednotiti model, uporabljen v praksi, ne pa izboljšava BF modela samega po sebi.

Verrall (2004) je uporabil Bayesov pristop, s katerim pridemo do rezultatov BF metode. Alai, Merz in Wüthrich uporabijo podoben pristop v okviru posplošenih linearnih modelov z uporabo metode največjega verjetja (ang. Maximum likelihood estimation, v nadaljevanju tudi MLE). Ta okvir je fleksibilen za statistično modeliranje in analitični cenilki MSEP omogoča uporabo asimptotičnih lastnosti cenilke največjega verjetja. V splošnem lahko v Bayesovem okvirju dobimo numerične rezultate le z uporabo simulacijskih metod, kot na primer markovske verige Monte Carlo. Zato Alai, Merz in Wüthrich uporabijo prerazpršeno Poissonovo porazdelitev (ang. Overdispersed Poisson Distribution, v nadaljevanju tudi ODP) škod, za katero je znano, da vodi do enakih škodnih rezervacij kot CL model.

Prerazpršena Poissonova porazdelitev je posplošitev Poissonove porazdelitve, ki za razliko od Poissonove porazdelitve dovoljuje razlikovanje variance od matematičnega upanja in dovoljuje vrednosti, ki niso nujno celoštevilске. Izhaja iz družine disperzijskih eksponentnih porazdelitev, ki so posplošitev eksponentnih porazdelitev. Zaradi svoje strukture igrajo

pomembno vlogo pri posplošenih linearnih modelih. Slučajna spremenljivka pripada disperzijski eksponentni družini, če lahko njeno gostoto zapišemo kot

$$f_Y(y; \theta; \phi) = \exp \left\{ \frac{[y\theta - b(\theta)]}{a(\phi)} + c(y, \phi) \right\}. \quad (59)$$

ODP je del te družine z $a(\phi) = \phi$, $b(\theta) = e^\theta$ in $c(y, \phi) = -\ln y$. V aktuarski literaturi je splošno znano, da ODP model vodi do enakih škodnih rezervacij kot CL model. To pomeni, da kljub temu, da sta modela popolnoma različna, vodita do enakih rezervacij, do razlike pa pride le, če ocenjujemo višje momente. Dokazano je, da ODP model zadošča tudi predpostavkam BF modela (Alai, Merz & Wüthrich, 2009, str. 14).

Predpostavko o varianci prerazpršenega Poissonovega modela $Var(X_{i,j}) = \phi \mu_i \gamma_j$ je kritiziral Taylor (2002), ker po njegovem mnenju ne ustreza opazovanjem v praksi. Dodatno ta predpostavka implicira, da morajo biti parametri γ_j pozitivni, kar pogosto ni nujno za inkrementalne škode. Do negativnih inkrementalnih škod lahko pride v primeru stornov škod zaradi napake ali pa regresnih zahtevkov, do katerih pride v primeru povrnitve škode s strani povzročitelja, po tem ko je bila škoda že plačana. Kljub temu za ODP model predpostavke o nenegativnosti niso toliko omejujoče kot za Poissonov model, saj je omejitev le v pozitivnosti stolpcev inkrementalnih škod. Kljub temu še vedno ostaja omejitev nenegativnosti pričakovanih vrednosti inkrementalnih škod. V okviru posplošenih linearnih modelov lahko v primeru neučinkovitosti ODP najdemo mnogo alternativ ter razširitev in ima zato ODP v kombinaciji s posplošenimi linearnimi modeli še vedno veliko prednosti (Carrato, McGuire & Scarth, 2016, str. 23-24).

Opise in definicije prerazpršenega Poissonovega modela za BF povzamemo po Alai, Merz in Wüthrich (2011) ter jih do določene mere prilagodimo, da smiselno ustrezajo oznakam našega magistrskega dela.

Začnemo z definicijo cenilke rezervacije v letu nastanka i

$$\hat{R}_i = \hat{\mu}_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}), \quad (60)$$

kjer je $\hat{\mu}_i$ apriorna cenilka pričakovane končne škode μ_i in $\hat{\beta}_{I-i}^{CL}$ označuje razvojni vzorec metode veriženja. V nasprotju z Mackovim modelom brez porazdelitve ima ta model prerazpršeno Poissonovo porazdelitev za inkrementalne škode $X_{i,j}$.

Predpostavke ODP modela za BF metodo so naslednje:

- Inkrementalne škode $X_{i,j}$ so med seboj neodvisne in so porazdeljene z ODP ter obstajajo pozitivni parametri ϕ , $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_I$ in $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_J$, za katere veljajo naslednje enakosti

$$E[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j, \text{Var}(X_{i,j}) = \phi \mu_i \gamma_j, \text{ in } \sum_{j=0}^J \gamma_j = 1, \quad 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J. \quad (61)$$

- ϕ imenujemo disperzijski parameter, ki je neodvisen od leta nastanka i in razvojnega leta j .
- $\hat{\mu}_i$ so neodvisne slučajne spremenljivke, ki so nepristranske cenilke pričakovanih končnih škod $\mu_i = E[C_{i,J}]$, $0 \leq i \leq I$.
- $X_{i,j}$ in $\hat{\mu}_k$ so neodvisne za vse i, j, k .

Začnemo z oceno parametrov, μ_i , γ_j , ϕ . Kot smo že omenili bomo pri tem uporabili cenilke največjega verjetja. Logaritemska funkcija verjetja za množico opazovanih inkrementalnih škod, $\mathcal{D}_I = \{X_{i,j}, i + j \leq I\}$ je podana s formulo

$$l_{D_I}(\mu_i, \gamma_j, \phi) = \sum_{\substack{i+j \leq I \\ j < I}} \left(\frac{1}{\phi} (X_{i,j} \log(\mu_i \gamma_j) - \mu_i \gamma_j) + \log c(X_{i,j}; \phi) \right) + \left(\frac{1}{\phi} \left(X_{0,I} \log \left[\mu_0 \left(1 - \sum_{n=0}^{I-1} \gamma_n \right) \right] \right) - \mu_0 \left(1 - \sum_{n=0}^{I-1} \gamma_n \right) + \log c(X_{0,I}; \phi) \right), \quad (62)$$

kjer je $c(\cdot, \phi)$ ustrezna normalizacijska funkcija. Narejena je bila tudi zamenjava $\gamma_j = (1 - \sum_{n=0}^{J-1} \gamma_n)$ na podlagi pogojev iz predpostavk modela. Cenilke največjega verjetja $\hat{\mu}_i, \hat{\gamma}_j$ pridobimo z odvodi po μ_i in γ_j in nato odvode izenačimo z 0. Rezultati so

$$\hat{\mu}_0 = \sum_{j=0}^J X_{0,j},$$

$$\hat{\mu}_i \sum_{j=0}^{I-i} \hat{\gamma}_j = \sum_{j=0}^{I-i} X_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, I\}, \quad (63)$$

$$\hat{\gamma}_j \left(\sum_{i=1}^{I-j} \hat{\mu}_i + X_{0,I} \frac{1}{1 - \sum_{n=0}^{J-1} \hat{\gamma}_n} \right) = \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j}, \quad j \in \{0, \dots, J-1\}.$$

Cenilke $\hat{\mu}_i, \hat{\gamma}_j$ lahko izračunamo tudi s pomočjo CL razvojnih faktorjev,

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j+1} C_{i,j}}, \text{ iz česar sledi} \quad (64)$$

$$\hat{\gamma}_j = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\hat{f}_k} \left(1 - \frac{1}{\hat{f}_{j-1}} \right), \quad \hat{\mu}_i = C_{i,I-1} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-1}.$$

Iz zgornjih enačb vidimo, da $\hat{\mu}_i, \hat{\gamma}_j$ niso odvisne od parametra ϕ , vendar ga kljub temu potrebujemo za izračun negotovosti ocene. Za oceno $\hat{\phi}$ uporabimo Pearsonove ostanke

$$r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \mu_i \gamma_j}{\sqrt{\mu_i \gamma_j}}, \quad (65)$$

za katere velja $E[r_{i,j}^2] = \phi$. Zaradi neznanih parametrov se vrnemo k ocenam z metodo največjega verjetja, ki v okvirju ODP modela sovpada s CL ocenami. Znale ugotovitve prenesemo v oceno Pearsonovih ostankov

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{C}_{i,j}^{CL} \hat{\gamma}_j^{CL}}{\sqrt{\hat{C}_{i,j}^{CL} \hat{\gamma}_j^{CL}}}, \quad (66)$$

iz česar sledi ocena za disperzijski parameter

$$\hat{\phi} = \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i+j \leq I} (\hat{r}_{i,j})^2 = \frac{1}{d} \sum_{\substack{0 \leq i+j \leq I, \\ j \leq J}} \frac{(X_{i,j} - \hat{C}_{i,j}^{CL} \hat{\gamma}_j^{CL})^2}{\hat{C}_{i,j}^{CL} \hat{\gamma}_j^{CL}}, \quad (67)$$

kjer je $d = \frac{(I+1)(I+2)}{2} - 2I - 1$ prostostna stopnja modela ter $\hat{C}_{i,j}^{CL}$ predstavlja končno škodo izračunano po CL metodi in $\hat{\gamma}_j^{CL}$ njen razvojni faktor.

Tako imamo ocenjene vse parametre in lahko nadaljujemo z naslednjim korakom, izpeljavo formule za oceno pogojne srednje kvadratne napake ocene rezervacije

$$\begin{aligned} msep_{R_i|\mathcal{D}_I}(\hat{R}_i) &= E[(\hat{R}_i - R_i)^2 | \mathcal{D}_I] = \\ &= \underbrace{\sum_{j=I-i+1}^J \text{Var}(X_{i,j})}_{=PV_i} + \underbrace{(1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL})^2 \text{Var}(\hat{\mu}_i) + \mu_i^2 \left(\sum_{j=I-i+1}^J (\hat{\gamma}_j^{CL} - \gamma_j) \right)^2}_{=PEE_i}. \end{aligned} \quad (68)$$

Prvi člen, ki ga imenujemo procesna varianca, ocenimo s cenilkami parametrov in dobimo

$$\widehat{PV}_i = \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\phi} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j^{CL} = \hat{\phi} \hat{\mu}_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}). \quad (69)$$

Negotovost $Var(\hat{\mu}_i)$ v apriorni cenilki $\hat{\mu}_i$ je ocenjena z uporabo zunanje cenilke koeficienta variance $CoVa(\hat{\mu}_i)$, ki običajno zavzema vrednosti med 5% in 10%. Iz tega sledi ocena variance $Var(\hat{\mu}_i)$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_i) = \hat{\mu}_i^2 \widehat{CoVa}(\hat{\mu}_i)^2. \quad (70)$$

Sledi ocena posameznih komponent napake ocene parametrov ali PEE_i . Najprej ocenimo

$$\left(\sum_{j=I-i+1}^J (\hat{\gamma}_j^{CL} - \gamma_j) \right)^2 \quad (71)$$

z matematičnim upanjem na naslednji način

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{j=I-i+1}^J (\hat{\gamma}_j^{CL} - \gamma_j) \right)^2 \right] &= \sum_{j,l=I-i+1}^J E[(\hat{\gamma}_j^{CL} - \gamma_j)(\hat{\gamma}_l^{CL} - \gamma_l)] \\ &\approx \sum_{j,l=I-i+1}^J Cov(\hat{\gamma}_j^{CL}, \hat{\gamma}_l^{CL}). \end{aligned} \quad (72)$$

Zaradi značilnosti cenilk metode največjega verjetja, ki so asimptotično nepristranske in multivariantno normalno porazdeljene

$$\sqrt{n}(\hat{\zeta} - \zeta) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, H(\zeta, \phi)^{-1}), \text{ ko gre } n \rightarrow \infty,$$

lahko kovariančno matriko razvojnih faktorjev metode veriženja $\hat{\gamma}_j^{CL}$ ocenimo z inverzno Fisherjevo matriko informacije. Fisherjeva matrika informacije je definirana kot

$$H(\zeta, \phi)_{r,s} = -E_{\zeta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta_r \partial \zeta_s} l_{\mathcal{D}_I}(\zeta, \phi) \right], \quad r, s = 1, \dots, I + J + 1, \quad (73)$$

kjer je $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{I+J+1}) = (\mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_{J-1})$ in $\hat{\zeta}$ pripadajoča cenilka metode največjega verjetja ter $l_{\mathcal{D}_I}$ logaritemska verjetnostna funkcija. $H(\zeta, \phi)$ je matrika velikosti $(2I + 1) \times (2I + 1)$. Njeni elementi so definirani z naslednjimi enakostmi

$$\begin{aligned} h_{i+1,i+1} &= \frac{\mu_i^{-1}}{\phi} \sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j, \quad i \in \{0, \dots, I\}, \\ h_{I+2+j, I+2+j} &= \frac{\gamma_j^{-1}}{\phi} \sum_{i=0}^{I-j} \mu_i + \frac{\mu_0}{\phi(1 - \sum_{n=0}^{I-1} \gamma_n)}, \quad j \in \{0, \dots, I-1\}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$h_{l+2+j, l+2+l} = \frac{\mu_0}{\phi(1 - \sum_{n=0}^{J-1} \gamma_n)}, \quad j, l \in \{0, \dots, I-1\}, j \neq l,$$

$$h_{i+1, l+2+j} = \frac{1}{\phi}, \quad i \in \{1, \dots, I\}, j \in \{0, \dots, I-i\},$$

$$h_{l+2+j, i+1} = \frac{1}{\phi}, \quad j \in \{0, \dots, I-1\}, i \in \{1, \dots, I-j\}.$$

Preostali členi matrike so ničelni. Elemente matrike nato izračunamo z zamenjavo parametrov z njihovimi cenilkami, ki smo jih izpeljali zgoraj, $\hat{C}_{i,j}^{CL}$, $\hat{\gamma}_j^{CL}$ in $\hat{\phi}$, in dobimo Fisherjevo matriko informacije $H(\hat{\zeta}, \hat{\phi})$. Inverz matrike $H(\hat{\zeta}, \hat{\phi})^{-1}$ vsebuje nekatere odvečne informacije o parametrih μ_i , ki jih za naše namene ne potrebujemo, in zato definiramo novo matriko velikosti $(I+1) \times (I+1)$

$$\mathcal{G} = (g_{j,l})_{j,l=0,\dots,I} \quad (75)$$

z elementi

$$\begin{aligned} g_{j,l} &= \widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j^{CL}, \hat{\gamma}_l^{CL}) = H(\hat{\zeta}, \hat{\phi})_{l+2+j, l+2+l}^{-1}, \quad j, l \in \{0, \dots, I-1\} \\ g_{j,I} &= g_{I,j} = \widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j^{CL}, \hat{\gamma}_I^{CL}) = - \sum_{l=0}^{J-1} H(\hat{\zeta}, \hat{\phi})_{l+2+j, l+2+l}^{-1}, \quad j \in \{0, \dots, I-1\} \\ g_{I,I} &= \widehat{Var}(\hat{\gamma}_I^{CL}) = \sum_{0 \leq j, l \leq J-1} H(\hat{\zeta}, \hat{\phi})_{l+2+j, l+2+l}^{-1}. \end{aligned} \quad (76)$$

Iz zgornjega sledi, da je cenilka za srednjo pogojno napako ocene $\hat{R}_i$

$$\begin{aligned} \widehat{mse}_{R_i|\mathcal{D}_I}(\hat{R}_i) &= \hat{\phi} \hat{\mu}_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL}) + (1 - \hat{\beta}_{I-i}^{CL})^2 \widehat{Var}(\hat{\mu}_i) \\ &\quad + \hat{\mu}_i^2 \sum_{j,l=I-i+1}^J \widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j^{CL}, \hat{\gamma}_l^{CL}). \end{aligned} \quad (77)$$

Formula za srednjo pogojno napako ocene skupne višine škodne rezervacije sledi po podobnem razmisleku kot pri Mackovem modelu in je naslednja

$$\begin{aligned} \widehat{mse}_{R|\mathcal{D}_I}(\hat{R}) &= \sum_{i=I-J+1}^I \widehat{mse}_{R_i|\mathcal{D}_I}(\hat{R}_i) \\ &\quad + 2 \sum_{i < k} \hat{\mu}_i \hat{\mu}_k \sum_{\substack{j > I-i, \\ l > I-k}} \widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j^{CL}, \hat{\gamma}_l^{CL}). \end{aligned} \quad (78)$$

Ena izmed prednosti te metode je, da se najbolj približa uporabi v realnosti, ker uporablja CL razvojne faktorje, kar je hkrati tudi njena slabost, ker ni konsistentna s konceptom BF metode. Še ena slabost je omejitev nenegativnosti pričakovanih inkrementalnih škod.

4.2.3 Normalni model

V treh modelih, predstavljenih v Saluz, Gisler in Wüthrich (2011), so z metodo največjega verjetja izpeljane cenilke za razvojne vzorce in eksplcitne formule za oceno korelacijskih matrik teh cenilk. Tovrstne korelacije potrebujemo za oceno pogojne srednje kvadratne napake ocene v BF rezervacijah. Obravnavane so tri različne porazdelitve škod in razvit razvojni vzorec, neodvisen od metode veriženja.

Prvi model je model s prerazpršeno Poissonovo porazdelitvijo, ki ustreza podobnim predpostavkam kot model Alai, Merz in Wüthrich (2011), vendar s pomembno razliko, da dovoljuje koreliranost apriornih cenilk, kar je v praksi zelo verjeten scenarij. Kljub temu pa ima omejujočo predpostavko o varianci $Var(X_{i,j}) = \phi\mu_i\gamma_j$, ki je pogosto neustrezna za uporabo v praksi. Zato je predstavljen drugi model, ki dovoljuje variiranje disperzijskega parametra ϕ_j v različnih razvojnih letih, vendar ostaja omejitev pozitivnosti inkrementalnih škod.

Tretji model temelji na normalni porazdelitvi škod in nima naštetih omejitev. Nanj se bomo osredotočili v tem poglavju. Opisi in definicije so povzete po članku Saluz, Gisler in Wüthrich (2011). Predpostavke modela z normalno porazdelitvijo so naslednje:

- Inkrementalne škode $X_{i,j}$ so neodvisne in normalno porazdeljene ter obstajajo parametri $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_J$, in pozitivni parametri $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_I$ za katere veljajo naslednje enakosti

$$\begin{aligned} E[X_{i,j}] &= \mu_i\gamma_j, \\ Var(X_{i,j}) &= \mu_i\sigma_j^2, \\ \text{za } 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J \text{ in} \end{aligned} \tag{79}$$

$$\sum_{j=0}^J \gamma_j = 1.$$

- Apriorne cenilke $\hat{\mu}_i$ za $\mu_i = E[C_{i,J}]$ so nepristranske in neodvisne od $X_{l,j}$, za $0 \leq l \leq I, 0 \leq j \leq J$.

Tako kot pri Mackovem modelu (Mack, 2008) je tudi za normalni model predstavljen nov razvojni vzorec za inkrementalne škode. Za začetek predpostavimo, da imamo na voljo

celotni razvoj škod, tj. D_l in D_l^c . Iz tega izhaja cenilka za razvojni vzorec inkrementalnih škod

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{\sum_{i=0}^I X_{i,j}}{\sum_{i=0}^I C_{i,j}} := \frac{X_{[I],j}}{C_{[I],j}} \quad (80)$$

in $\sum_{j=0}^J \tilde{\gamma}_j = 1$. Tukaj definiramo oznako za vsoto $\sum_{i=0}^k Y_{i,j} := Y_{[k],j}$, ki jo uporabljamo tudi v nadaljevanju.

Ker je spodnji desni trikotnik D_l^c neznan, zamenjamo neznane $X_{i,j}$ z BF cenilkami $\hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j$, iz česar sledi

$$\hat{\gamma}_j = \frac{X_{[I-j],j} + \sum_{i=I-j+1}^I \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j}{C_{[I-j],j} + \sum_{i=I-j+1}^I (C_{i,I-i} + \sum_{l=I-i+1}^J \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_l)}, \quad 0 \leq j \leq J. \quad (81)$$

Želimo si najti optimalno cenilko razvojnega vzorca $\hat{\gamma}_j$, kar naredimo z metodo največjega verjetja. Najprej predpostavimo, da so μ_i znani in izračunamo cenilke z metodo največjega verjetja pod pogojem $\sum_{j=0}^J \gamma_j = 1$ in z uporabo Lagrangeevega multiplikatorja κ . Logaritemska funkcija verjetja je podana z enačbo

$$l_{D_I}(\gamma_0 \dots \gamma_J, \kappa) = \sum_{i+j \leq I} -\frac{(X_{i,j} - \mu_i \gamma_j)^2}{2\mu_i \sigma_j^2} + \kappa \left(1 - \sum_{j=0}^J \gamma_j \right), \quad (82)$$

iz česar izračunamo parcialni odvod

$$\frac{\partial l_{D_I}}{\partial \gamma_j} = \sum_{i=0}^{I-j} \frac{(X_{i,j} - \mu_i \gamma_j)}{\sigma_j^2} - \kappa = 0 \quad (83)$$

in dobimo

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{X_{[I-j],j} - \kappa \sigma_j^2}{\mu_{[I-j]}}. \quad (84)$$

S stranskim pogojem

$$1 = \sum_{j=0}^J \tilde{\gamma}_j = \sum_{l=0}^J \frac{X_{[I-l],l}}{\mu_{[I-l]}} - \sum_{j=0}^J \kappa \frac{\sigma_j^2}{\mu_{[I-l]}} \quad (85)$$

izpeljemo formulo za κ

$$\kappa = \frac{\sum_{l=0}^J \frac{X_{[I-l],l}}{\mu_{[I-l]}} - 1}{\sum_{j=0}^J \frac{\sigma_j^2}{\mu_{[I-l]}}}. \quad (86)$$

in iz tega sledijo naslednje cenilke po metodi največjega verjetja

$$\tilde{\gamma}_j = \underbrace{\frac{X_{[I-j],j}}{\mu_{[I-j]}}}_{\substack{= \text{najboljša linearna} \\ \text{cenilka za } \gamma_j}} + \underbrace{\frac{\frac{\sigma_j^2}{\mu_{[I-j]}}}{\sum_{l=0}^J \frac{\sigma_l^2}{\mu_{[I-l]}}} \left(1 - \sum_{l=0}^J \frac{X_{[I-l],l}}{\mu_{[I-l]}}\right)}_{= \text{normalizirana aditivna korekcija}}, 0 \leq j \leq J \quad (87)$$

Neznana ostajata parametra μ_i in σ_j^2 , ki ju moramo oceniti. Za μ_i imamo določeno apriorno cenilko $\hat{\mu}_i$. Če bi variančni parameter σ_j^2 ocenili z metodo največjega verjetja, bi bil sistem enačb le iterativno rešljiv. Zato vzamemo naslednje cenilke

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i \left(\frac{X_{i,j}}{\hat{\mu}_i} - \frac{X_{[I-j],j}}{\hat{\mu}_{[I-j]}} \right)^2, 0 \leq j \leq J, j \neq I, \quad (88)$$

ki so nepristranske cenilke za σ_j^2 , če velja $\hat{\mu}_i = \mu_i$, $0 \leq i \leq I$. Če je $J = I$, naredimo ekstrapolacijo, da dobimo cenilko za σ_j^2

$$\hat{\sigma}_j^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{j-1}^2}{\hat{\sigma}_{j-2}^2}, \hat{\sigma}_{j-2}^2, \hat{\sigma}_{j-1}^2 \right) = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{j-1}^2}{\hat{\sigma}_{j-2}^2}, \hat{\sigma}_{j-2}^2 \right). \quad (89)$$

Končna ocena razvojnega vzorca inkrementalnih škod je

$$\hat{\gamma}_j = \frac{X_{[I-j],j}}{\hat{\mu}_{[I-j]}} + \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{\mu}_{[I-j]}}{\sum_{l=0}^J \hat{\sigma}_l^2 / \hat{\mu}_{[I-l]}} \left(1 - \sum_{l=0}^J \frac{X_{[I-l],l}}{\hat{\mu}_{[I-l]}} \right). \quad (90)$$

Razvojni vzorec kumulativnih škod je ocenjen z $\hat{\beta}_j = \sum_{k=0}^j \hat{\gamma}_k$, $0 \leq j \leq J$.

Namen je izpeljava cenilke za pogojno srednjo kvadratno napako ocene končne škode izračunane po BF. Končno kumulativno škodo definiramo z

$$\hat{C}_{i,J} = C_{i,I-i} + \mu_i (1 - \hat{\beta}_{I-i}). \quad (91)$$

Naj bo $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_I)$ in naj bo $\mathcal{I}_I = \sigma(\mathcal{D}_I, \hat{\mu})$ σ -algebra, ki vsebuje informacije v času I . Pogojna srednja kvadratna napaka ocene za končno škodo $\hat{C}_{i,J}$ z danim $\mathcal{I}_I$ je nato podana s formulo

$$mse_{p_{C_{i,J}|J_I}}(\hat{C}_{i,J}) = \underbrace{\sum_{j=I-i+1}^J Var(X_{i,j})}_{=PV_i} + \underbrace{\left(\hat{\mu}_i(1 - \hat{\beta}_{I-i}) - \mu_i(1 - \beta_{I-i})\right)^2}_{=PEE_i}. \quad (92)$$

Varianca slučajne spremenljivke $X_{i,j}$ je določena že v predpostavkah modela, $Var(X_{i,j}) = \mu_i \sigma_j^2$. Neznane parametre zamenjamo z že znanimi ocenami in iz tega sledi ocena za procesno varianco

$$\widehat{PV}_i = \hat{\mu}_i \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\sigma}_j^2. \quad (93)$$

Napako ocene parametra PEE_i lahko zapišemo tudi kot

$$PEE_i = (1 - \hat{\beta}_{I-i})^2 (\hat{\mu}_i - \mu_i)^2 + \mu_i^2 (\beta_{I-i} - \hat{\beta}_{I-i})^2 + 2(1 - \hat{\beta}_{I-i}) \mu_i (\hat{\mu}_i - \mu_i) (\beta_{I-i} - \hat{\beta}_{I-i}). \quad (94)$$

Neznani ostajajo členi $(\hat{\mu}_i - \mu_i)^2$, $(\beta_{I-i} - \hat{\beta}_{I-i})^2$ in $(\hat{\mu}_i - \mu_i)(\beta_{I-i} - \hat{\beta}_{I-i})$.

Preučimo nihanja $\hat{\mu}_i$ in $\hat{\beta}_{I-i}$ okoli pravih vrednosti μ_i in β_{I-i} ali drugače povedano, izračunamo matematično upanje po vseh možnih elementih J_I . Če zanemarimo odvisnost med $\hat{\mu}_i$ in $\hat{\beta}_j$ zaradi nepristranskosti cenilke $\hat{\mu}_i$ in približne asimptotične nepristranskosti cenilke $\hat{\beta}_j$ dobimo naslednjo cenilko za napako ocene parametra

$$\widehat{PEE}_i = (1 - \hat{\beta}_{I-i})^2 \widehat{Var}(\hat{\mu}_i) + \hat{\mu}_i^2 \widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i}), \quad (95)$$

kjer sta $\widehat{Var}(\hat{\mu}_i)$ in $\widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i})$ cenilki za variance $Var(\hat{\mu}_i)$ in $Var(\hat{\beta}_{I-i})$.

Kovariančna matrika ocenjenega razvojnega vzorca inkrementalnih škod je približno ocenjena z inverzom Fisherjeve matrike informacije. Logaritemska verjetnostna funkcija je podana z naslednjo enačbo

$$l_{\mathcal{D}_I}(\gamma_0 \dots \gamma_{J-1}) = - \sum_{\substack{i+j \leq I, \\ j \leq J-1}} \frac{(X_{i,j} - \mu_i \gamma_j)^2}{2\mu_i \sigma_j^2} - \sum_{i=0}^{I-J} \frac{(X_{i,J} - \mu_i (1 - \sum_{j=0}^{J-1} \gamma_j))^2}{2\mu_i \sigma_J^2} + r, \quad (96)$$

kjer r vsebuje vse preostale člene, ki niso odvisni od $(\gamma_0, \dots, \gamma_{J-1})$, in vhodne podatke Fisherjeve matrike informacije dobimo z naslednjo enakostjo

$$H(\gamma)_{j,k} = E \left[\frac{\partial l_{\mathcal{D}_I}}{\partial \gamma_j} \frac{\partial l_{\mathcal{D}_I}}{\partial \gamma_k} \right] = \frac{\mu_{[I-j]}}{\sigma_j^2} \left(\mathbb{1}_{\{j=k\}} + \frac{\mu_{[I-J]}/\sigma_J^2}{\mu_{[I-k]}/\sigma_k^2} \right), \quad 0 \leq j, k \leq J-1. \quad (97)$$

Inverz Fisherjeve matrike informacije je lahko eksplicitno izračunan in so končne cenilke za kovariance $\hat{\gamma}_j$ podane z naslednjo enakostjo, kjer σ_j^2 in $\mu_{[I-j]}$ zamenjamo z njihovimi cenilkami,

$$\widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}_k) \approx (H(\gamma)^{-1})_{j,k} = \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\mu}_{[I-j]}} \left(\mathbb{1}_{\{j=k\}} - \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \hat{\mu}_{[I-k]}}{\sum_{l=0}^J \hat{\sigma}_l^2 / \hat{\mu}_{[I-l]}} \right), \quad (98)$$

$$0 \leq j, k \leq J.$$

Zaradi stranske omejitve $\sum_{j=0}^J \hat{\gamma}_j = 1$ morajo biti korelacije izven diagonale negativne.

Kovariančna matrika za razvojni vzorec kumulativnih škod $\hat{\beta}_{I-i}$ je prav tako ocenjena z uporabo Fisherjeve matrike informacije

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i}) = \widehat{Cov}(\hat{\beta}_{I-i}, \hat{\beta}_{I-i}),$$

$$\widehat{Cov}(\hat{\beta}_{I-i}, \hat{\beta}_{I-k}) = \sum_{j=0}^{I-i} \sum_{l=0}^{I-k} \widehat{Cov}(\hat{\gamma}_j, \hat{\gamma}_l), \quad I - J + 1 \leq i, k \leq I. \quad (99)$$

Ostane še ocena varianc apriornih cenilk $\hat{\mu}_i$. Običajno lahko aktuarji, ki so zmožni oceniti apriorno cenilko $\hat{\mu}_i$, ocenijo tudi njeno natančnost oziroma standardno napako ali varianco, $Var(\hat{\mu}_i)$. V nasprotnem primeru, ko ne moremo sami oceniti variance, jo lahko ocenimo pod predpostavko, da ima $\hat{\mu}_i$ konstantni koeficient variance $CoV a(\hat{\mu}_i) \equiv c$ in sledi ocena variance $Var(\hat{\mu}_i)$

$$\widehat{Var}(\hat{\mu}_i) = \widehat{CoV a}^2(\hat{\mu}_i) \cdot \hat{\mu}_i^2, \quad (100)$$

ki je enaka oceni iz Mackovega modela brez porazdelitve.

Iz zgornjega sledi, da je cenilka za pogojni MSEP cenilke končne škode $\hat{C}_{i,J}$ za normalno porazdelitev škod

$$\widehat{mse}_{p_{C_{i,J}|J_I}}(\hat{C}_{i,J}) = \hat{\mu}_i \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\sigma}_j^2 + \widehat{Var}(\hat{\mu}_i)(1 - \hat{\beta}_{I-i})^2 + \hat{\mu}_i^2 \widehat{Var}(\hat{\beta}_{I-i}). \quad (101)$$

Srednjo pogojno napako ocene skupne višine škodne rezervacije izračunamo po formuli

$$\begin{aligned}
\widehat{mse}_{\sum_{i=I-J+1}^I c_{i,J} | \mathcal{I}_I} \left(\sum_{i=I-J+1}^I \hat{c}_{i,J} \right) &= \sum_{i=I-J+1}^I \widehat{mse}_{c_{i,J} | \mathcal{I}_I} (\hat{c}_{i,J}) \\
+ 2 \sum_{I-J+1 \leq i \leq k \leq I} &\left((1 - \hat{\beta}_{I-i})(1 - \hat{\beta}_{I-k}) \frac{I - |i - k|}{I} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\mu}_i) \widehat{Var}(\hat{\mu}_k)} \right. \\
&\left. + \hat{\mu}_i \hat{\mu}_k \widehat{Cov}(\hat{\beta}_{I-i}, \hat{\beta}_{I-k}) \right). \quad (102)
\end{aligned}$$

Normalni model je vsebinsko nadaljevanje Mackovega modela brez porazdelitve (2008). Lahko ga uporabimo tudi za primer brez določene porazdelitve. Saluz, Gisler in Wüthrich (2011, str. 305) predpostavljajo, da je ODP model neprimeren za večino praktičnih primerov. Posplošeni ODP priporočajo za trikotnik plačanih škod, normalni model pa za nastale škode. Za zadnja modela dobimo enake cenilke. Trdijo, da tudi v primeru, ko predpostavke o porazdelitvi niso popolnoma izpolnjene, ni razloga, da kljub temu ne bi uporabili cenilk po teh metodah, saj ni bolj ustreznih od njih.

5 PRAKTIČNI PRIMERI

5.1 Primer zdravstvenega zavarovanja

Za primer zdravstvenega zavarovanja uporabimo zgodovinske podatke slovenske zavarovalnice, ki so zaradi varovanja podatkov anonimizirani in pomnoženi s konstanto. Podatki so urejeni v razvojnem trikotniku. Naredili smo izračune škodnih rezervacij za Bornhuetter-Fergusonove (v nadaljevanju tudi BF) modele, opisane v prejšnjem poglavju, na nastalih in plačanih škodah, ki bodo predstavljeni v naslednjih podpoglavjih. V tem in naslednjem poglavju uporabimo za model brez porazdelitve oznako Mack BF, za prerazpršeni Poissonov model ODP ter za normalni model oznako Normalni. Portfelj zdravstvenega zavarovanja ima izrazito največ škod v drugem razvojnem mesecu ($j = 1$). Namesto let smo uporabili mesece, saj ima portfelj izrazito kratek rep reševanja škod in je zato nesmiselno obravnavati letni trikotnik.

5.1.1 Nastale škode

V tabeli 3 je prikazan kumulativni razvojni trikotnik škod, ki zajema obračunane škode in popis, tj. RBNS.

Tabela 3: Razvojni trikotnik nastalih škod zdravstvenega zavarovanja v EUR

Mesec nastanka škode i	Razvojni mesec j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9.481	30.308	32.251	32.597	32.722	32.786	32.786	32.919	32.961	32.998
1	10.590	29.574	31.396	31.794	31.891	31.891	31.903	31.958	32.084	
2	10.787	32.989	35.192	35.497	35.563	35.678	35.739	35.790		
3	10.284	30.365	32.254	32.446	32.633	32.721	32.780			
4	10.849	32.469	34.359	34.835	35.145	35.237				
5	11.738	34.024	36.211	36.773	36.907					
6	9.929	28.451	30.063	30.442						
7	9.230	28.192	30.210							
8	11.449	33.614								
9	12.024									

Vir: Izbrana slovenska zavarovalnica (2019).

Za izračun potrebujemo še apriorne cenilke končne škode, ki so podane v tabeli 4. Njihova ocena je bila narejena na podlagi zaslužene premije in na podlagi izkušenj škodnih količnikov.

Tabela 4: Apriorne cenilke končne škode za primer zdravstvenega zavarovanja

i	$\hat{\mu}_i$
0	32.989
1	32.077
2	35.762
3	32.818
4	35.238
5	37.018
6	30.697
7	30.803
8	36.475
9	37.125

Vir: Izbrana slovenska zavarovalnica (2019).

Najprej izračunamo škodne rezervacije za posamezen BF model, poleg tega pa za primerjavo dodamo še osnovni izračun po metodi veriženja, CL. Opazimo, da je višina rezervacij po BF modelih zelo podobna, po CL metodi pa malce odstopa in je višja od BF modelov. To je predvsem posledica neupoštevanja apriornih cenilk, ki določajo mero volumna.

Tabela 5: Ocena škodnih rezervacij za nastale škode zdravstvenega zavarovanja

<i>i</i>	Ocena rezervacij			
	CL	Mack BF	ODP	Normalni
0	0	0	0	0
1	36	36	36	21
2	133	132	132	106
3	200	198	199	172
4	250	247	249	219
5	341	338	339	307
6	420	417	418	387
7	768	762	764	728
8	3.032	3.013	3.018	2.974
9	26.881	25.613	25.651	25.632
Skupaj	32.063	30.756	30.807	30.546

Vir: Lastno delo.

Nadaljujemo z oceno pogojne srednje napake ocene in s koeficientom variance za posamezno leto, kar je prikazano v tabeli 6.

Tabela 6: Srednja napaka ocene in koeficient variance za nastale škode zdravstvenega zavarovanja

<i>i</i>	$\sqrt{mse}$			CoVa		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
1	84	44	82	234,6%	121,3%	400,4%
2	121	78	117	91,6%	59,1%	110,1%
3	126	91	122	63,6%	45,6%	71,0%
4	137	101	133	55,5%	40,8%	60,8%
5	150	117	146	44,5%	34,4%	47,5%
6	159	123	155	38,2%	29,4%	40,0%
7	196	163	191	25,7%	21,3%	26,2%
8	303	342	295	10,1%	11,3%	9,9%
9	1.378	1.538	1.369	5,4%	6,0%	5,3%
Skupaj	1.545	1.651	1.528	5,0%	5,4%	5,0%

Vir: Lastno delo.

Skupno imata najmanjšo srednjo napako ocene in koeficient variance Mack BF in Normalni model. Na podlagi tega bi lahko sklepali, da sta zaradi najmanjše napake najbolj ustrezna za naš izbran portfelj. Individualni koeficienti variance se najbolj razlikujejo v začetnih

mesecih nastanka, kar je predvsem posledica procesne napake, kot vidimo v tabeli 7. Tudi v skupnem znesku nastaja največja razlika med modeli ravno v procesni varianci. Razlog za to je predvsem v razliki med izračunom procesne napake, saj imata Mack BF in Normalni model spremenljive vrednosti za posamezen mesec razvoja $\hat{s}_j^{2*}$ oziroma $\hat{\sigma}_j^2$ za razliko od ODP modela, ki za izračun uporabi konstantno vrednost $\hat{\phi}$ v kombinaciji z vrednostjo $\hat{y}_j$. Tako na primer za $j = 1$ dobimo naslednje vrednosti; za Mack BF in Normalni model apriorno cenilko končne ocene pomnožimo z vrednostjo $\sum_{j=9-1+1}^9 \hat{s}_j^{2*} = \sum_{j=9-1+1}^9 \hat{\sigma}_j^2 = 0,11$, pri ODP z vrednostjo $\hat{\phi}\hat{y}_1 = 0,03$. V tabeli 8 vidimo gibanje parametrov za posamezni model po razvojnih obdobjih. Od drugega razvojnega meseca dalje je vrednost parametra Mackovega BF in Normalnega modela enaka, kar vpliva na skoraj enako standardno procesno napako. Spomnimo se, da sta si Mackov BF in Normalni model bolj podobna zaradi izbire drugačnega razvojnega vzorca od vzorca metode veriženja. Bolj kot to, kateri izračun je bolj ustrezen, se je torej potrebno vprašati, ali smemo uporabiti razvojni vzorec metode veriženja, saj smo že opomnili, da ta ni v skladu s predpostavkami BF metode. Poleg tega konstantni disperzijski parameter $\hat{\phi}$ ni nujno najbolj ustrezen in je morebiti prenizek ter zato vodi v nižjo procesno varianco. Vpliv prvih mesecev nastanka na celotno napako je bistveno manjši, saj višina rezervacije izhaja pretežno iz zadnjega meseca nastanka škod, saj manjka največji del razvoja, tj. prvi mesec.

Tabela 7: Standardna procesna napaka in standardna napaka ocene parametra

<i>i</i>	$\sqrt{PV_i}$			$\sqrt{PEE_i}$		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
1	60	31	60	59	31	57
2	89	60	89	81	50	76
3	98	73	98	80	53	74
4	106	82	106	87	60	80
5	117	96	117	94	67	87
6	134	106	134	86	62	78
7	169	144	169	99	77	89
8	233	285	233	193	189	181
9	486	832	466	1.290	1.293	1.287
Skupaj	619	912	603	1.415	1.376	1.403

Vir: Lastno delo.

Tabela 8: Variančni parametri za nastale škode zdravstvenega zavarovanja

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{s}_j^{2*}$	5,69	4,86	0,56	0,35	0,21	0,05	0,03	0,07	0,11	0,11
$\hat{\phi}$	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00	27,00
$\hat{\sigma}_j^2$	5,56	4,36	0,56	0,35	0,21	0,05	0,03	0,07	0,11	0,11

Vir: Lastno delo.

Na splošno bi lahko rekli, da je višina napak precej visoka, kar ni tako nepričakovano. Za portfelj zdravstvenega zavarovanja je zelo značilen sezonski vpliv na dinamiko prijave in plačila škod, kar se kaže v posameznem mesecu nastanka škode, hkrati pa je razvoj škod nepredvidljiv, saj razvojni faktorji za posamezni mesec nastanka, predvsem pri prehodu iz 0. na 1. mesec razvoja, precej nihajo. Zato je koeficient variance precej visok. Rezervacije so zelo očitno skoncentrirane v zadnjem mesecu nastanka, saj ima zavarovalna vrsta zelo kratek rep reševanja. Nenavadna je nižja ocena BF rezervacij v primerjavi s CL rezervacijami, kar nakazuje na možno konservativno apriorno oceno končnih škod. Seveda je možno apriorno oceno končne škode aposteriorno prilagajati, vendar potem ni več apriorna. Ponovno vrednotenje ocene končne škode so obravnavali Saluz, Bühlmann, Gisler in Moriconi (2014), kar pa je izven obsega tega dela.

5.1.2 Plačane škode

Nadaljujemo s portfeljem plačanih škod, za katerega je v tabeli 9 prikazan kumulativni trikotnik plačanih škod, ki zajema enako časovno obdobje kot trikotnik nastalih škod.

Tabela 9: Razvojni trikotnik plačanih škod zdravstvenega zavarovanja

Mesec nastanka škode i	Razvojni mesec j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	8.418	30.211	32.077	32.450	32.699	32.763	32.765	32.919	32.928	32.957
1	9.230	29.494	31.315	31.752	31.852	31.886	31.903	31.903	32.035	
2	9.847	32.939	35.153	35.473	35.563	35.678	35.678	35.751		
3	8.947	30.320	32.169	32.446	32.633	32.710	32.738			
4	9.549	32.168	34.359	34.835	35.131	35.208				
5	10.475	34.024	36.211	36.697	36.838					
6	9.929	28.451	29.913	30.333						
7	9.230	28.064	30.126							
8	10.633	33.542								
9	11.561									

Vir: Izbrana slovenska zavarovalnica (2019).

V tabeli 10 so prikazane apriorne cenilke končnih škod.

Tabela 10: Apriorne cenilke končnih škod za primer zdravstvenega zavarovanja

i	$\hat{\mu}_i$
0	32.376
1	30.059
2	35.382
3	31.136
4	32.209
5	32.923
6	31.002
7	27.133
8	34.443
9	35.035

Vir: Izbrana slovenska zavarovalnica (2019).

Po enakem postopku kot pri nastalih škodah izračunamo rezervacije, ki so prikazane v tabeli 11. Kot vidimo, so rezervacije za plačane škode nekoliko nižje kot za nastale škode, rezervacija po CL metodi pa je višja kot za nastale škode.

Tabela 11: Ocena škodnih rezervacij za plačane škode zdravstvenega zavarovanja

i	Ocena rezervacij			
	CL	Mack BF	ODP	Normalni
0	0	0	0	0
1	28	25	26	23
2	110	105	108	76
3	175	160	165	126
4	201	177	183	142
5	291	251	258	217
6	399	396	402	364
7	764	662	671	642
8	3.042	2.847	2.864	2.846
9	29.256	25.034	25.111	25.037
Skupaj	34.265	29.658	29.789	29.472

Vir: Lastno delo.

Preverimo še razvojni vzorec kumulativnih škod, ki je prikazan v tabeli 12 in kaže na ustaljeno padanje po mesecih z ekstremnim padcem v zadnjem mesecu nastanka, kar je pričakovano glede na dinamiko obračunov iz ničnega v prvi razvojni mesec. To tudi vpliva na nadaljnje izračune in standardne odklone, saj je glede na večji delež pričakovanih nastalih škod težje napovedati končne škode zaradi velikih nihanj med meseci razvoja. Podoben razplet je pri nastalih škodah, vendar je vpliv manjši, saj imamo še popis, ki malce zmanjša razliko med prvima dvema mesecema.

Tabela 12: Razvojni vzorci kumulativnih škod za plačane škode zdravstvenega zavarovanja

<i>i</i>	razvojni vzorec $\hat{\beta}_{i-i}^*$		
	Mack BF	ODP	Normalni
0	100,00%	100,00%	100,00%
1	99,92%	99,91%	99,92%
2	99,70%	99,69%	99,79%
3	99,49%	99,47%	99,60%
4	99,45%	99,43%	99,56%
5	99,24%	99,22%	99,34%
6	98,72%	98,70%	98,83%
7	97,56%	97,53%	97,64%
8	91,73%	91,68%	91,74%
9	28,55%	28,32%	28,54%

Vir: Lastno delo.

Glede na višino napake se najbolj izkaže ODP model. Presenetljivo je v primerjavi z nastalimi škodami situacija popolnoma drugačna: v primeru plačanih škod je razlika med koeficientom variance ODP glede na modela z drugačnim razvojnim vzorcem večja kot pri nastalih škodah. Pri ODP modelu se koeficient poviša za 0,3%, pri Mackovem BF pa za 3,3% in za 1,4% pri Normalnem modelu.

Tabela 13: Srednja napaka ocene in koeficient variance za plačane škode zdravstvenega zavarovanja

<i>i</i>	$\sqrt{mse_p}$			<i>CoVa</i>		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
1	123	42	24	490,6%	157,9%	102,7%
2	184	79	123	175,7%	73,4%	162,0%
3	189	92	141	117,8%	55,6%	112,0%
4	194	97	145	109,5%	52,9%	102,2%
5	199	112	150	79,3%	43,5%	69,0%

Se nadaljuje

Tabela 13: Srednja napaka ocene in koeficient variance za plačane škode zdravstvenega zavarovanja (nad.)

<i>i</i>	$\sqrt{mse}$			<i>CoVa</i>		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
6	212	135	170	53,5%	33,5%	46,7%
7	214	169	179	32,30%	25,10%	27,90%
8	430	365	379	15,10%	12,70%	13,30%
9	2.293	1.572	1.741	9,20%	6,30%	7,00%
Skupaj	2.460	1.685	1.891	8,30%	5,70%	6,40%

Vir: Lastno delo.

Iz naštetega lahko sklepamo, da je pri našem portfelju zdravstvenega zavarovanja bolj ustrezno delati rezervacije na nastalih škodah, saj so njihove napake ocene nižje. Vendar, ali je tak sklep ustrezen? Imamo namreč enak vir podatkov, vendar tako različne rezultate modelov, predvsem Mackovega BF in Normalnega. Ali lahko sklepamo, da je izbira modelov zato neustrezna? Spomnimo se, da smo na začetku poglavja o stohastičnih metodah že govorili o izvoru napak, med katerimi je bila omenjena tudi napaka pri izbiri modela. Negotovost izbire modela je težko izmeriti, vendar je lahko kljub temu razlog nestanovitnosti v ocenah rezervacij. Vprašljiva je tudi sama porazdelitev rezervacij, kar bi lahko bil naslednji korak pri testiranju modelov. Na podlagi naših primerov bi lahko rekli, da se naš portfelj zdravstvenega zavarovanja najbolj približa prerazpršeni Poissonovi porazdelitvi inkrementalnih škod.

5.2 Primer avtomobilskega zavarovanja

V drugem primeru uporabimo zgodovinske podatke ameriških zavarovalnic med letoma 1998 in 2007 (Friedland, 2010). Podatki vsebujejo kumulativne nastale škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti, ki so v trikotniku prikazani v tabeli 14, in apriorne ocene končne škode v tabeli 15.

Tabela 14: Razvojni trikotnik nastalih škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode <i>i</i>	Razvojno leto <i>j</i>									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	37.017.487	43.169.009	45.568.919	46.784.558	47.337.318	47.533.264	47.634.419	47.689.655	47.724.678	47.742.304
1	38.954.484	46.045.718	48.882.924	50.219.672	50.729.292	50.926.779	51.069.285	51.163.540	51.185.767	
2	41.155.776	49.371.478	52.358.476	53.780.322	54.303.086	54.582.950	54.742.188	54.837.929		
3	42.394.069	50.584.112	53.704.296	55.150.118	55.895.583	56.156.727	56.299.562			
4	44.755.243	52.971.643	56.102.312	57.703.851	58.363.564	58.592.712				
5	45.163.102	52.497.731	55.468.551	57.015.411	57.565.344					
6	45.417.309	52.640.322	55.553.673	56.976.657						
7	46.360.869	53.790.061	56.786.410							
8	46.582.684	54.641.339								
9	48.853.563									

Vir: Friedland (2010, str. 106).

Tabela 15: Apriorne cenilke končne škode za primer zavarovanja avtomobilske odgovornosti

i	$\hat{\mu}_i$
0	47.740.890
1	51.195.152
2	54.876.596
3	56.480.772
4	58.953.814
5	58.183.221
6	58.316.320
7	59.823.095
8	60.937.704
9	64.099.215

Vir: Friedland (2010, str. 142)

Ponovimo izračune iz prejšnjega podpoglavja in tako dobimo nove vrednosti škodnih rezervacij v tabeli 16.

Tabela 16: Ocena škodnih rezervacij za nastale škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti

i	ocena rezervacij			
	CL	Mack BF	ODP	Normalni
1	18.904	18.941	18.901	18.974
2	52.024	52.124	52.011	52.208
3	143.472	143.887	143.568	144.017
4	302.554	303.498	302.855	303.472
5	549.766	551.504	550.411	551.269
6	1.179.216	1.184.615	1.182.469	1.185.040
7	2.750.521	2.767.977	2.763.741	2.765.822
8	5.982.667	6.020.412	6.013.625	6.015.495
9	14.840.727	14.944.894	14.935.074	14.980.945
Skupaj	25.819.851	25.987.852	25.962.654	26.017.243

Vir: Lastno delo.

Rezervacije po CL metodi so v tem primeru najnižje, vendar so tudi odstopanja med posameznimi metodami manjša v primerjavi s portfeljem zdravstvenega zavarovanja. V tabeli 17 preverimo še razvojne kumulativne faktorje za vse tri modele, ki so si zelo podobni, ne glede na različne pristope k njihovi oceni.

Tabela 17: Razvojni vzorci kumulativnih škod za zavarovanje avtomobilske odgovornosti

i	razvojni vzorec $\hat{\beta}_{1-i}^*$		
	Mack BF	ODP	Normalni
0	100,00%	100,00%	100,00%
1	99,96%	99,96%	99,96%
2	99,91%	99,91%	99,90%
3	99,75%	99,75%	99,75%
4	99,49%	99,49%	99,49%
5	99,05%	99,05%	99,05%
6	97,97%	97,97%	97,97%
7	95,37%	95,38%	95,38%
8	90,12%	90,13%	90,13%
9	76,68%	76,70%	76,63%

Vir: Lastno delo.

V tabeli 18 so prikazane vrednosti srednje napake ocene in koeficienta variance, ki je v tem primeru najnižji pri Normalnem modelu.

Tabela 18: Srednja napaka ocene in koeficient variance za nastale škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti

i	$\sqrt{mse_p}$			CoVa		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
1	5.982	23.562	8.835	31,6%	124,7%	46,6%
2	15.321	36.337	16.776	29,4%	69,9%	32,1%
3	28.465	56.196	29.291	19,8%	39,1%	20,3%
4	38.566	79.252	39.203	12,7%	26,2%	12,9%
5	55.753	104.937	56.151	10,1%	19,1%	10,2%
6	118.461	155.606	118.477	10,0%	13,2%	10,0%
7	181.975	255.872	181.796	6,6%	9,3%	6,6%
8	355.516	433.706	354.848	5,9%	7,2%	5,9%
9	978.710	890.327	967.949	6,5%	6,0%	6,5%
Skupaj	1.169.203	1.105.874	1.079.759	4,5%	4,3%	4,2%

Vir: Lastno delo.

V tabeli 19 so podatki o standardnih procesnih napakah in standardnih napakah ocen parametra za vse tri modele, v tabeli 20 pa koeficienti variance standardne napake. Kot vidimo, so vrednosti precej nizke, kar lahko pripišemo dejstvu, da je portfelj skupek več zavarovalnic in imamo zato manjšo standardno procesno napako.

Tabela 19: Standardna procesna napaka in standardna napaka ocene parametra zavarovanja avtomobilske odgovornosti

<i>i</i>	$\sqrt{PV_i}$			$\sqrt{PEE_i}$		
	Mack BF	ODP	Normalni	Mack BF	ODP	Normalni
1	4.100	16.371	6.103	4.356	16.947	6.389
2	11.815	27.156	12.708	9.755	24.143	10.952
3	22.905	45.118	23.391	16.900	33.500	17.630
4	30.042	65.530	30.428	24.183	44.572	24.718
5	42.481	88.342	42.748	36.107	56.635	36.408
6	93.494	129.485	93.605	72.745	86.295	72.628
7	108.002	197.958	108.048	146.460	162.121	146.203
8	175.503	292.007	175.400	309.176	320.676	308.467
9	594.376	460.181	594.075	777.554	762.178	764.199
Skupaj	638.654	606.736	638.456	979.366	924.570	870.778

Vir: Lastno delo.

Tabela 20: Koeficient variance standardne procesne napake za zavarovanje avtomobilske odgovornosti

<i>i</i>	$CoVa(PV_i)$		
	Mack BF	ODP	Normalni
1	21,6%	86,6%	32,2%
2	22,7%	52,2%	24,3%
3	15,9%	31,4%	16,2%
4	9,9%	21,6%	10,0%
5	7,7%	16,1%	7,8%
6	7,9%	11,0%	7,9%
7	3,9%	7,2%	3,9%
8	2,9%	4,9%	2,9%
9	4,0%	3,1%	4,0%
Skupaj	2,5%	2,3%	2,5%

Vir: Lastno delo.

5.3 Primerjava portfeljev in ugotovitve

Rezervacije po CL metodi so najnižje pri portfelju avtomobilskega zavarovanja, za razliko od portfelja zdravstvenega zavarovanja, kjer so rezervacije po CL metodi najvišje. Odstopanja BF rezervacij od CL rezervacij so precej velika pri portfelju zdravstvenega

zavarovanja. Razlog v tem je predvsem v razliki med apriorno oceno končne škode, ki jo uporablja BF metoda, in oceno končne škode po metodi veriženja. Iz tega lahko sklepamo, da apriorna cenilka bolj odstopa od ocene končne škode po metodi veriženja pri zdravstvenem zavarovanju kot pri avtomobilskem. Kot vidimo iz tabele 21, je odstotek odstopanja od CL rezervacije vedno najnižji pri ODP modelu, kar lahko pripišemo uporabi CL razvojnih faktorjev pri obeh metodah. Mack BF in Normalni model pa sta si bolj sorodna in zato so njuni izračuni medsebojno bolj podobni, kar se kaže tudi pri podobnosti vrednosti rezervacij.

Tabela 21: Odstopanja skupnih BF rezervacij od CL rezervacij v %

portfelj	odstopanja BF rezervacij od CL rezervacij		
	Mack BF	ODP	Normalni
nastale škode zdravstveno	-4,1%	-3,9%	-4,7%
plačane škode zdravstveno	-13,4%	-13,1%	-14,0%
nastale škode avtomobilsko	0,7%	0,6%	0,8%

Vir: Lastno delo.

Parametre modela smo želeli ohraniti v prvotnem stanju, brez prilagajanja, da bi videli njihov direktni vpliv na rezervacije in napake. Pri razvojnih vzorcih kumulativnih škod iz tabele 12 in tabele 17 vidimo, da pride do največjih razlik med portfeljema v zadnjem obdobju nastanka. Pri zdravstvenem zavarovanju je vrednost zadnjega razvojnega faktorja zelo nizka, saj se glavnina obračunov zgodi v prvem razvojnem mesecu, pri avtomobilskem pa je dinamika obračunov bolj stabilna. Velik vpliv ima tudi izbira časovnega intervala za razvojne trikotnike, saj imamo pri zdravstvenem zavarovanju mesečne trikotnike, pri avtomobilskem pa letne. Z možnostjo izbire letnih trikotnikov dosežemo tudi večjo stabilnost portfelja.

Pričakovali bi, da ima v prvih letih/mesecih nastanka škode ODP model najvišjo srednjo napako ocene, vendar skupno najnižjo, kar se glede padanja po letih/mesecih nastanka izkaže le v primeru avtomobilskega zavarovanja; v primeru zdravstvenega zavarovanja se to odraža drugače, lahko bi rekli, da netipično. Najverjetneje je vzrok v tem, da ima portfelj zdravstvenega zavarovanja netipično največ izplačil in popisa v drugem mesecu, kar je narava obravnavanega portfelja.

Slabost ODP modela je kot že rečeno, da ne dovoljuje negativnih inkrementalnih škod, do česar pride v primeru stornov škod ali regresnih zahtevkov, ko zavarovalnica za že plačan znesek škode zahteva povrnitev stroškov od povzročitelja škode ali zavarovanca. Poleg tega pa ne sledi filozofiji BF rezervacij, ki naj ne bi bile odvisne od preteklih škod.

SKLEP

Proces izračuna škodnih rezervacij je za zavarovalnico zelo pomemben, saj škodne rezervacije običajno predstavljajo največji delež obveznosti v bilanci stanja zavarovalnice. Pri izbiri metode za izračun moramo biti pozorni, da je model za izračun ustrezen in je njegova uporaba konsistentna. Najbolj varna pot do ustrezne izbire metode je preizkušanje različnih modelov in pregled vrednosti, ki jih modeli vrnejo. Prva vrednost je sama višina škodnih rezervacij, sledijo pa še ocene napak – standardne procesne napake, standardne napake parametra ter posledično (pogojne) srednje napake ocene in koeficienta variance. Intuitivno lahko sklepamo, da manjša kot je napaka, bolj ustrezen je model. Seveda pa moramo pred tem biti pozorni na predpostavke modela, ki so ključnega pomena, saj brez izpolnjevanja predpostavk načeloma ne moremo uporabiti posameznega modela. Od treh predstavljenih modelov sta si medsebojno najbolj podobna Mackov BF in Normalni model. Oba predstavita alternativni razvojni vzorec inkrementalnih škod kot izboljšavo vzorca metode veriženja, ki je kritiziran kot nekonsistenten z BF filozofijo, saj krši predpostavko o neodvisnosti rezervacij od inkrementalnih škod. Razvojni vzorec metode veriženja je kljub temu še vedno najbolj uporabljen v praksi in je s tem zavedanjem tudi uporabljen v ODP modelu, ki je tretji izmed predstavljenih modelov.

V magistrskem delu smo opisane modele preizkusili na dveh portfeljih – portfelju zdravstvenega zavarovanja ter portfelju avtomobilskega zavarovanja odgovornosti. Pri zdravstvenem zavarovanju smo izračune naredili na nastalih in plačanih škodah. Boljše rezultate je pokazal model na nastalih škodah, z nižjimi ocenami napak od plačanih, kar bi pričakovali, glede na to, da popis nudi dodatne informacije o nastanku in razvoju škod. Nepričakovano je gibanje koeficientov variance v obeh primerih za Mackov BF in Normalni model, saj imajo začetna leta nastanka še višje koeficiente variance kot ODP model. Zaradi velikih razlik Mackovega BF in Normalnega modela med nastalimi in plačanimi škodami zdravstvenega zavarovanja lahko sklepamo, da na obstoječem portfelju, brez prilagajanja parametrov, nista ustrezna, saj je razlika glede na enak izvor podatkov prevelika.

V primeru portfelja avtomobilskega zavarovanja odgovornosti so rezultati bolj stabilni in z nižjimi napakami kot pri zdravstvenem zavarovanju. To pripišemo veliko večjemu in bolj stabilnemu portfelju. Za ta portfelj lahko sklepamo, da je uporaba BF modelov bolj ustrezna, ker so njihove napake nižje in lahko gibanje napak lažje utemeljimo.

Pretehtati je treba vse prednosti in slabosti posameznega modela, nič pa ne more nadomestiti strokovne presoje in izkušenj aktuarja, ki lahko že samo s prilagoditvijo nekaterih razvojnih faktorjev ali ocene končnih škod, ki so pomemben del Bornhuetter-Fergusonove metode, prispeva k ustrežnejši oceni škodnih rezervacij. Iskanje najboljše ocene rezervacij je ravno pravi kombinacija med preizkušanjem metod in strokovno presojo ter dobrim poznavanjem portfelja. Stohastične modele lahko dojemamo kot pomoč pri določanju višine rezervacij, vendar moramo pri tem upoštevati smiselnost rezultatov in modele ustrezno prilagoditi posameznem portfelju. Z uvedbo novih direktiv in standardov postajajo

stohastične metode vedno pomembnejše pri oblikovanju škodnih rezervacij in je njihov razvoj v razcvetu, zato lahko v bližnji prihodnosti pričakujemo napredek na tem področju ter morebitno nadgradnjo obstoječih modelov in njihovo avtomatizacijo s statističnimi programskimi orodji.

LITERATURA IN VIRI

1. Agencija za zavarovalni nadzor. (2018). *Poročilo Agencije za zavarovalni nadzor za leto 2017*. Ljubljana: Agencija za zavarovalni nadzor.
2. Alai, D. H., Merz, M. & Wüthrich, M. V. (2009). Mean square error of prediction in the Bornhuetter-Ferguson claims reserving method. *Annals of Actuarial Science*, 4(1), 7–31.
3. Alai, D. H., Merz, M. & Wüthrich, M. V. (2011). Prediction Uncertainty in the Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method: Revisited. *Annals of Actuarial Science*, 5(1), 7–17.
4. Arbenz, P., & Salzmann, R. (2011). *On a combination of multiplicative and additive stochastic loss reserving methods*. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
5. Arjas, E. (1989). The Claims Reserving Problem in Non-Life Insurance: Some Structural Ideas. *Astin Bulletin*, 19(2), 139-152.
6. ASTIN Working Party on Non-Life Reserving. (2016). *Non-Life Reserving Practices*. Ottawa: ASTIN Committee of the International Actuarial Association.
7. Bornhuetter, R. L. & Ferguson, R. E. (1972). The Actuary and IBNR. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 59, 181–195.
8. Carrato, A., McGuire, G. & Scarth, R. (2016). *A Practitioner's Introduction to Stochastic Reserving*. Pridobljeno 20. maja 2019 iz <https://www.actuaries.org.uk/documents/practitioners-introduction-stochastic-reserving>
9. Dal Moro, E. & Lo, J. (2014). An industry question: the ultimate and One-year reserving uncertainty for different non-life reserving methodologies. *ASTIN Bulletin*, 44(3), 495–499.
10. Dal Moro, E. (2018, 27. november). *The Skewness of Bornhuetter-Ferguson*. Pridobljeno 10. maja 2019 na spletnem naslovu https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3278497
11. England, P. D. & Verall, R. J. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(2), 443–518.
12. England, P. D. (2010, 28. junij). *Stochastic Made »Simple«*. London: Institute of Actuaries: General Insurance Reserving Seminar.
13. England, P. D., Verall, R. J. & Wüthrich, M. V. (2012). Bayesian over-dispersed Poisson model and the Bornhuetter & Ferguson claims reserving method. *Annals of Actuarial Science*, 6(2), 258–283.
14. Frece, T. P. (2011). *Osnove zavarovalništva*. Ljubljana: Zavod IRC.

15. Friedland, J. (2010, 30. julij). *Estimating Unpaid Claims Using Basic Techniques*. Pridobljeno 14. februarja 2018 iz https://www.casact.org/library/studynotes/Friedland_estimating.pdf
16. Gediminaitė, I. (2009). *On the prediction error in several claims reserves estimation methods* (magistrsko delo). Stockholm: Royal Institute of Technology.
17. Happ, S. (2014). *Stochastic Claims Reserving under Consideration of Various Different Sources of Information* (doktorska disertacija). Hamburg: University of Hamburg.
18. Harej, B. & Slapar, M. (2013). Merjenje tveganja škodnih rezervacij v okviru Solventnosti 2. *Zavarovalniški horizonti*, 1, 39–64.
19. Hayne, R. (2013). A Flexible Framework for Stochastic Reserving Models. *Variance* 7(2), 123–151.
20. International Actuarial Association. (2010). *Stochastic Modeling – Theory and Reality from an Actuarial Perspective*. Ottawa: International Actuarial Association.
21. James, G., Witten, D., Hastie, T. & Tibshirani, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R*. New York: Springer.
22. Klappach, H. (2007). Solvency II: Best Practice in Loss Reserving in Property and Casualty Insurance – the foundation is critical. *NFT* 1, 25–29.
23. Mack, T. (2000). Credible claims reserves: the Benktander method. *ASTIN Bulletin*, 30, 333–347.
24. Mack, T. (2006). *Parameter Estimation for Bornhuetter/Ferguson*. Casualty Actuarial Society Forum, 141–157.
25. Mack, T. (2008). Prediction Error of Bornhuetter/Ferguson. *Astin Bulletin*, 38(1), 87–103.
26. Močivnik, P. (2010). *Slovar zavarovalnih izrazov*. Pridobljeno 13. aprila 2018 iz <https://www.zav-zdruzenje.si/sredisce-informacij/slovar-zavarovalnih-izrazov>
27. Party, C. T. F. W. (2016). *Bornhuetter-Ferguson Initial Expected Loss Ratio Working Party Paper*. Arlington: Casualty Actuarial Society E-Forum.
28. Radtke, M., Schmidt, K. D. & Schnaus, A. (2016). *Handbook on Loss Reserving*. Heidelberg: Springer.
29. Saluz, A., Gisler, A. & Wüthrich, M. V. (2011). Development Pattern and Prediction Error for the Stochastic Bornhuetter-Ferguson Claims Reserving Method. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 41(2), 279–313.
30. Saluz, A., Bühlmann, H., Gisler, A. & Moriconi, F. (2014). *Bornhuetter-Ferguson reserving method with repricing*. Pridobljeno 23. marca 2019 iz https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2697167
31. Saluz, A. & Gisler, A. (2014). Best estimate reserves and the claims development results in consecutive calendar years. *Annals of Actuarial Science*, 8(2), 351–373.
32. Saluz, A. (2014). *Stochastic Loss Reserving with Emphasis on the Bornhuetter-Ferguson Method* (doktorska disertacija). Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
33. Schmidt, K. D. (2006). *Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey*. Arlington: Casualty Actuarial Society Forum, 269–317.

34. Schmidt, K. D. & Zoecher, M. (2008). The Bornhuetter-Ferguson Principle. *Variance*, 2(1), 85–110.
35. Schmidt, K. D. (2008). *Bornhuetter-Ferguson as a General Principle of Loss Reserving*. Dresden: Technische Universität Dresden.
36. Shapland, M. R. & Leong, J. (2010). *Bootstrap Modeling: Beyond the Basics*. Arlington: Casualty Actuarial Society E-Forum.
37. Shapland, M. R. (2016). Using the ODP Bootstrap Model: A Practitioner's Guide. Virginia: CAS.
38. Slovensko zavarovalno združenje. (2017). *Statistični letni podatki za leto 2016 – Računovodski izkazi (bilanca stanja, izkaz poslovnega izida, izkaz vseobsegajočega donosa)*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
39. Slovensko zavarovalno združenje. (2018). *Statistični zavarovalniški bilten 2018*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
40. Slovensko zavarovalno združenje. (2019). *Statistični zavarovalniški bilten 2019*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
41. Taylor, G. C. (2000). *Loss Reserving – An Actuarial Perspective*. Boston: Kluwer.
42. Taylor, G. C. (2002). Written discussion on the paper "Stochastic claims reserving in general insurance" by P. D. England and R. J. Verrall. *British Actuarial Journal*, 8(3), 540–542.
43. Terminološka komisija Statističnega društva Slovenije. (2018). *Angleško-slovenski glosar statističnih izrazov*. Pridobljeno 9. junija 2019 iz <https://www.rosigma.si/glosar/>
44. Tse, Y.-K. (2009). *Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation*. Cambridge: Cambridge University Press.
45. Verrall, R. J. (2004). A Bayesian Generalized Linear Model for the Bornhuetter-Ferguson Method of Claims Reserving. *North American Actuarial Journal*, 8(3), 67–89.
46. England, P. D., Verrall, R. J. & Wüthrich, M. V. (2012). Bayesian over-dispersed Poisson model and the Bornhuetter & Ferguson claims reserving method. *Annals of Actuarial Science*, 6(2), 258–283.
47. Wüthrich, M. V. (2007). Using a Bayesian Approach for Claims Reserving. *Variance* 1(2), 292–301.
48. Wüthrich, M. V. & Merz, M. (2008). *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
49. Wüthrich, M. V. & Merz, M. (2015). Stochastic Claims Reserving Manual: Advances in Dynamic Modeling. *Swiss Finance Institute Research Paper*, 15(34).