

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

**UPORABA STOHAŠTIČNIH MODELOV UMRLJIVOSTI ZA
IZRAČUN KAPITALSKIH ZAHTEV ZA TVEGANJE
DOLGOŽIVOSTI V OKVIRU DIREKTIVE SOLVENTNOST II**

Ljubljana, julij 2016

BARBARA JORDAN

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisana Barbara Jordan, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtorica predloženega dela z naslovom Uporaba stohastičnih modelov umrljivosti za izračun kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti v okviru direktive Solventnost II, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem prof. dr. Alešom Ahčanom

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravila samostojno;
2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;
3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;
4. da se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;
5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;
6. da sem pridobila vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označila;
7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnala v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobila soglasje etične komisije;
8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;
9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;
10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

KAZALO

UVOD	1
1 ZAKONODAJA	3
1.1 Solventnost II in ZZavar-1.....	3
1.2 Zavarovalno-tehnične rezervacije.....	4
1.2.1 Najboljša ocena obveznosti	4
1.2.2 Dodatek za tveganje.....	4
1.3 Kapitalske zahteve	5
1.4 Izračun zahtevanega solventnostnega kapitala po standardni formuli.....	5
1.4.1 Modul tveganj življenjskih zavarovanj.....	5
1.4.2 Podmodul tveganja dolgoživosti	6
2 OSNOVNE DEFINICIJE IN OZNAKE	7
2.1 Funkcija preživetja.....	7
2.2 Jakost umrljivosti.....	8
2.3 Centralna stopnja umrljivosti.....	9
2.4 Centralna izpostavljenost.....	10
2.5 Pričakovana življenjska doba.....	10
2.6 Efekt rojstne kohorte.....	11
3 PRIPRAVA STATISTIČNIH PODATKOV	11
3.1. Podatki o populaciji	11
3.2. Podatki o umrlih.....	12
3.3. Umrljivost	12
3.4. Glajenje krivulje umrljivosti.....	13
3.4.1 Umrljivost pri višjih starostih.....	13
3.4.2 Glajenje z zlepci	16
4 ANALIZA UMRLJIVOSTI PREBIVALCEV SLOVENIJE	17
5 STOHAŠTIČNI MODELI UMRLJIVOSTI	20
5.1 Zgodovina	20
5.2 Oznake	20
5.4 Lee-Carterjev model	21
5.5 Poisson Lee-Carterjev model.....	21
5.6 CBD-model.....	22
5.7 Renshaw-Habermanov model.....	23
5.8 APC-model	24
5.9 M7-model.....	25
5.10 Platov model	26

6	KALIBRACIJA MODELOV	27
6.1	Lee-Carterjev model	27
6.2	Poisson Lee-Carterjev model.....	33
6.3	CBD-model.....	36
6.4	Renshaw-Habermanov model.....	37
6.5	APC-model	39
6.6	M7-model	40
6.7	Platov model.....	41
7	NAPOVEDOVANJE UMRLJIVOSTI	42
7.1	ARIMA-modeli	42
7.2	Lee-Carterjev model	43
7.3	Poisson Lee-Carterjev model.....	46
7.4	CBD-model.....	48
7.5	Renshaw-Habermanov model.....	49
7.6	APC-model	50
7.7	M7-model	50
7.8	Platov model	51
8	KRITERIJI USTREZNOSTI	52
8.1	Kvalitativni kriteriji	52
8.2	Kvantitativni kriteriji	53
8.2.1	Ustreznost prilagajanja podatkom	53
8.2.1.1	Akaike in Bayesov informacijski kriterij	53
8.2.1.2	Ostanki	55
8.2.2	Robustnost modela	58
8.2.3	Negotovost ocenjenih parametrov	59
8.2.4	Povratni test.....	61
8.3	Izbira ustreznih modelov	64
9	UMRLJIVOST PORTFELJA	65
9.1	Merjenje umrljivosti portfelja.....	65
9.2	Napovedovanje umrljivosti portfelja	67
10	IZRAČUN KAPITALSKIH ZAHTEV ZA DOLGOŽIVOST.....	70
10.1	Testni portfelj	70
10.2	Ekstrapolacija napovedanih stopenj umrljivosti pri višjih starostih.....	71
10.3	Najboljša ocena obveznosti	71
10.4	Izračun s standardno formulo	74
10.5	Izračun z uporabo stohastičnih modelov	75
	SKLEP.....	77

LITERATURA IN VIRI	78
PRILOGE	

KAZALO TABEL

Tabela 1: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC za izbrane modele, kalibrirane na podatkih za ženske v Sloveniji, stare od 0 do 100 let.....	54
Tabela 2: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC za izbrane modele, kalibrirane na podatkih za moške v Sloveniji, stare od 0 do 100 let.....	55
Tabela 3: Najboljša ocena obveznosti, izračunana z determinističnim pristopom za izbrane starosti na testnem portfelju v okviru APC-modela.....	72
Tabela 4: Analiza najboljše ocene obveznosti v okviru izbranih stohastičnih modelov umrljivosti na testnem portfelju žensk starih 65 let	73
Tabela 5: Najboljša ocena obveznosti (v 1.000 EUR) pred in po spremembi stopenj umrljivosti ter zahtevan solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti (v 1.000 EUR), izračunan po standardni formuli	74
Tabela 6: Zahtevan solventnosti kapital za tveganje dolgoživosti, izračunan z uporabo izbranih stohastičnih modelov umrljivosti, ter potreben ekvivalenten šok v okviru standardne formule	76

KAZALO SLIK

Slika 1: Volatilnost centralnih stopenj umrljivosti prebivalcev Slovenije v letu 2014 pri visokih starostih	13
Slika 2: Surove in glajene (pri visokih starostih) začetne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014.....	15
Slika 3: Surove in glajene (pri visokih starostih) centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014.....	15
Slika 4: Surove in glajene centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014.....	17
Slika 5: Centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije v letu 2014 glede na spol .	17
Slika 6: Centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije v izbranih letih	18
Slika 7: Trend umrljivosti prebivalcev Slovenije pri izbranih starostih v letih 1982–2014.....	18
Slika 8: Funkcija preživetja novorojenih oseb v Sloveniji.....	19
Slika 9: Pričakovana življenjska doba novorojenih oseb v Sloveniji.....	19
Slika 10: Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke T_0 prebivalcev Slovenije	19
Slika 11: Vpliv parametrov CBD-modela	23
Slika 12: Ocena parametra $\beta_x^{(1)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela.....	31
Slika 13: Ocena parametrov $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela.....	32

Slika 14: Primerjava ocen parametrov Lee-Carterjevega modela, dobljenih s kalibracijo na krivuljah umrljivosti brez glajenja z zlepki (LC), z ocenami parametrov, dobljenih s kalibracijo na krivuljah umrljivosti glajenimi z zlepki (mLC)	33
Slika 15: Primerjava ocen parametrov Lee-Carterjevega modela (LC) in Poisson Lee-Carterjevega modela (PLC)	36
Slika 16: Ocene parametrov CBD-modela.....	37
Slika 17: Ocene parametrov Renshaw-Habermanovega modela.....	39
Slika 18: Ocena parametrov APC-modela	40
Slika 19: Ocene parametrov M7-modela	40
Slika 20: Ocene parametrov Platovega modela	41
Slika 21: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Lee-Carterjevega na podatkih brez galenja z zlepki	45
Slika 22: Pričakovane prihodnje centralne stopnje umrljivosti v okviru Lee-Carterjevega modela na podatkih brez glajenja z zlepki za leta 2015–2064	46
Slika 23: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki (ženske)	57
Slika 24: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva (t-x) za CBD-model	58
Slika 25: Projekcije centralnih stopenj umrljivosti v okviru Poisson Lee-Carterjevega modela upoštevajoč negotovost ocenjenih parametrov	61
Slika 26: Porazdelitvena funkcija najboljše ocene obveznosti na testnem portfelju 65 let starih žensk v okviru APC-modela.....	73

UVOD

S 1. januarjem 2016 je za zavarovalnice in pozavarovalnice začela veljati direktiva Solventnost II, v okviru katere se povsem spreminja način izračuna zahtevanega kapitala. Zahtevana raven kapitala, izračunana v okviru direktive Solventnost II, mora odražati vsa tveganja, ki jim je izpostavljena (po)zavarovalnica, vsekakor pa morajo po 203. členu Zakona o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 93/2015; v nadaljevanju ZZavar-1) v izračunu kapitalskih zahtev biti upoštevana tveganja premoženjskih zavarovanj, tveganja življenjskih zavarovanj, tveganja zdravstvenih zavarovanj, tržna tveganja, tveganja neplačila nasprotne stranke in operativna tveganja.

V magistrski nalogi se bom osredotočila na modul tveganj življenjskih zavarovanj oziroma natančneje na podmodul tveganja dolgoživosti (ZZavar-1, 2015, 208. člen). Tveganje dolgoživosti je tveganje, da bomo v povprečju živeli dlje, kot je pričakovano. To lahko za (po)zavarovalnico predstavlja dodatne nepričakovane obveznosti. Življenjska doba novorojenih oseb se je v zadnjih desetletjih povečala, in sicer predvsem zaradi boljše zdravstvene oskrbe, življenjskega standarda in načina življenja (Eurostat, 2015).

(Po)zavarovalnica lahko v skladu z 203. členom ZZavar-1 zahtevan solventnosti kapital izračuna po standardni formuli ali z uporabo notranjega modela. Kapitalske zahteve za tveganje dolgoživosti se v okviru standardne formule računajo v skladu s 138. členom Delegirane uredbe Komisije (EU) 2015/35 z dne 10. oktobra 2014 o dopolnitvi Direktive 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II) (Ur. l. EU, št. L 12/58, 17. januar 2015; v nadaljevanju Delegirana uredba) in so enake izgubi osnovnih lastnih sredstev¹ (po)zavarovalnice, ki je posledica takojšnjega trajnega 20-odstotnega zmanjšanja stopenj umrljivosti, ki se uporabljajo pri izračunu zavarovalno-tehničnih rezervacij.

Odstotek zmanjšanja stopenj umrljivosti za določitev kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti je bil določen v skladu z mero tveganja, to je v skladu s tvegano vrednostjo² osnovnih lastnih virov sredstev (po)zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta (CEIOPS³, 2007, str. 6–7). CEIOPS je na podlagi rezultatov kvantitativnih študij učinkov (angl. *Quantitative Impact Study*; v nadaljevanju QIS-študija) in dodatnih analiz predlagal, da se v okviru standardne formule za podmodul tveganja dolgoživosti uporabi 20-odstotno zmanjšanje stopenj umrljivosti (CEIOPS, 2010, str. 95–99).

¹ Lastna sredstva (po)zavarovalnice sestavljajo osnovna in pomožna lastna sredstva. Osnovna lastna sredstva predstavljajo presežek sredstev nad obveznostmi in podrejene obveznosti brez upoštevanja delnic v lasti (po)zavarovalnice. Pomožna lastna sredstva so vsa ostala lastna sredstva, ki jih ni mogoče vpoklicati za pokrivanje izgub (Berkovič Simeonov, 2010, str. 24).

² Tvegana vrednost (angl. *Value at Risk*), ki jo označimo z VaR, je mera tveganosti investicije. S pomočjo VaR ocenjujemo višino izgub v danih tržnih pogojih in v določenem času (Value at risk, b.l.).

³ CEIOPS je kratica za Odbor evropskih nadzornikov za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*).

Glede ustreznosti odstotkov zmanjšanja stopenj umrljivosti in metode izračuna zahtevanega solventnostnega kapitala za podmodul tveganja dolgoživosti je bilo v preteklosti opravljenih kar nekaj raziskav. Na primer, podjetje Risk Management Solutions (2012, str. 4) je naredilo analizo na fiktivnem portfelju zavarovalnice v Veliki Britaniji in pri tem ugotovilo, da bi bil za dani fiktivni portfelj najbolj primeren odstotek zmanjšanja stopenj umrljivosti, ki znaša okrog 60 % zmanjšanja stopenj umrljivosti v okviru standardne formule. Podjetje Risk Management Solutions ocenjuje, da bi v zavarovalniški industriji v Veliki Britaniji ustrezen odstotek zmanjšanja le-teh znašal med 40 in 90 % zmanjšanja v okviru standardne formule. Tudi Salah in Belkacem (2015, str. 1156) sta preverjala ustreznost zmanjšanja stopenj umrljivosti za podmodul tveganja dolgoživosti, in sicer na podatkih francoske zavarovalnice. Pri tem sta ugotovila, da bi bile kapitalske zahteve, izračunane z uporabo stohastičnih modelov umrljivosti, za okrog 44 % manjše kot kapitalske zahteve, izračunane s standardno formulo.

Na podlagi prebranih analiz, ki primerjajo kapitalske zahteve za podmodul tveganja dolgoživosti, izračunane z uporabo stohastičnih modelov, s kapitalskimi zahtevami, izračunanimi s standardno formulo, domnevam, da na višino kapitalskih zahtev vplivajo specifične karakteristike umrljivosti populacije določene države, struktura portfelja (po)zavarovalnice in izbira stohastičnega modela umrljivosti. Vpliva specifičnih karakteristik umrljivosti populacije določene države in strukture portfelja (po)zavarovalnice v magistrskem delu ne bom preverjala, bom pa preverila vpliv izbire stohastičnega modela umrljivosti.

Namen magistrskega dela je s pomočjo domače in predvsem tuje strokovne literature raziskati stohastične modele umrljivosti, med njimi na podlagi statističnih podatkov o umrljivosti prebivalcev Republike Slovenije (v nadaljevanju RS ali Slovenija) izbrati najbolj ustrezne ter nato ob upoštevanju zahteve po stopnji zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta z uporabo različnih stohastičnih modelov umrljivosti izračunati zahtevani solventnostni kapital za podmodul tveganja dolgoživosti.

Cilj magistrskega dela je sistematičen prikaz izračuna zahtevanega solventnostnega kapitala za podmodul tveganja dolgoživosti z uporabo stohastičnih modelov umrljivosti. Prav tako bom preverila postavljeno hipotezo, da izbira stohastičnega modela umrljivosti vpliva na višino izračunanih kapitalskih zahtev.

Magistrsko delo bo v prvem sklopu vsebovalo teoretični pregled zakonodaje ter osnovne definicije in oznake, ki se nanašajo na umrljivost in katerih razlaga je potrebna za nadaljnje razumevanje vsebine. V drugem sklopu bom analizirala umrljivost prebivalcev Slovenije v letih 1982–2014. Nato bom predstavila teoretični pregled izbranih stohastičnih modelov umrljivosti, ki mu bo sledila njihova kalibracija na podlagi statističnih podatkov o umrljivosti prebivalcev Slovenije. Nadalje bom za vsak posamezni stohastični model umrljivosti izvedla projekcije stopenj umrljivosti. Potem bom določila kriterije ustreznosti

modelov ter preverila, v kolikšni meri posamezni stohastični modeli umrljivosti izpolnjujejo te kriterije, in na podlagi ugotovljenega izbrala najprimernejše. V tretjem sklopu bom najprej predstavila teoretičen pregled metod, kako s pomočjo napovedane umrljivosti populacije napovedati umrljivost portfelja (po)zavarovalnice, nato pa bom za izbrane modele na testnem portfelju izračunala kapitalske zahteve za podmodul tveganja dolgoživosti, in sicer s standardno formulo in na podlagi mere tveganja, to je v skladu s tvegano vrednostjo osnovnih lastnih virov sredstev (po)zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta. Dobljene vrednosti bom primerjala ter poskušala potrditi ali ovreči hipotezo, da na višino kapitalskih zahtev vpliva izbira stohastičnega modela umrljivosti.

Izračune in grafične prikaze bom deloma izvedla s pomočjo programa Microsoft Excel, pretežni del pa z uporabo programskega jezika R, zato v Prilogi 11 podajam uporabljeno kodo.

Pri izdelavi magistrskega dela bom uporabila tudi teoretična znanja, pridobljena v okviru podiplomskega študija aktuarstva, in znanje, ki sem ga pridobila iz praktičnih izkušenj kot aktuarka na zavarovalnici.

1 ZAKONODAJA

Tveganje dolgoživosti je tveganje, ki izhaja iz nepredvidenega zmanjševanja umrljivosti. V zadnjih desetletjih lahko v Evropi opazimo nenehno zmanjševanje umrljivosti, ki pa s seboj prinaša izzive na socialnem, političnem, ekonomskem in zakonskem področju ter drugih področjih. V javnosti najbolj opazen je vpliv dolgoživosti na javne pokojninske sisteme. Z namenom zagotavljanja vzdržnosti javnega pokojninskega sistema se je v nekaterih državah dvignila upokojitvena starost (Barrieu et al., 2012, str. 204).

S tveganjem dolgoživosti se soočajo tudi (po)zavarovalnice, ki morajo v skladu z veljavno zakonodajo zagotavljati ustrezen solventnostni kapital, ki bo zadosten za kritje dodatnih obveznosti, ki izhajajo iz tveganja dolgoživosti. V nadaljevanju bom predstavila zakonodajo, ki ureja to področje.

1.1 Solventnost II in ZZavar-1

Za (po)zavarovalnice Evropske unije in za nekatere članice evropskega gospodarskega območja je s 1. januarjem 2016 pričela veljati evropska zavarovalniška direktiva Solventnost II. Sočasno je za slovenske (po)zavarovalnice stopil v veljavo tudi nov Zakon o zavarovalništvu ZZavar-1, ki temelji na načelih omenjene direktive.

Predhodna evropska zavarovalniška ureditev Solventnost I je bila vpeljana v sedemdesetih letih 20. stoletja in je do neke mere dopuščala odstopanja od predpisov, zaradi česar so se v

državah članicah Evropske unije uveljavile različne zakonodajne rešitve in prakse. Prav tako ni vključevala zahtev glede upravljanja tveganj in upravljanja (po)zavarovalnic, temveč je bila osredotočena predvsem na kapitalsko ustreznost (Agencija za zavarovalni nadzor, b.l.).

Namen Solventnosti II je poenotiti zakonodajo in prakse v zavarovalniški industriji v vsej Evropski uniji oziroma v evropskem gospodarskem območju ter vzpostaviti nove zahteve glede kapitalске ustreznosti v odvisnosti od tveganj, katerim je (po)zavarovalnica izpostavljena, upoštevajoč tudi kvalitativne elemente, kot je sistem upravljanja tveganj (Agencija za zavarovalni nadzor, b.l.).

V nadaljevanju bom na kratko predstavila pojme, ki jih ureja ZZavar-1 in jih bom potrebovala pri nadaljnji razlagi.

1.2 Zavarovalno-tehnične rezervacije

Po 177. členu ZZavar-1 (2015) mora (po)zavarovalnica na podlagi obveznosti, ki izhajajo iz (po)zavarovalnih pogodb, oblikovati tako imenovane zavarovalno-tehnične rezervacije. Vrednost le-teh je enaka znesku, ki bi ga (po)zavarovalnica morala plačati drugi (po)zavarovalnici, da bi ta v zameno prevzela njene obveznosti iz (po)zavarovalnih pogodb.

Vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij se načeloma izračuna kot vsota najboljše ocene obveznosti (angl. *Best Estimate of Liabilities*) in dodatka za tveganje (angl. *Risk Margin*), ki ju izračunamo ločeno (ZZavar-1, 2015, 178. člen).

1.2.1 Najboljša ocena obveznosti

179. člen ZZavar-1 (2015) določa, da se najboljša ocena obveznosti izračuna kot pričakovana sedanja vrednost prihodnjih denarnih tokov, ki izhajajo iz (po)zavarovalnih pogodb. Med denarne tokove se štejejo vsi prilivi in odlivi, ki so potrebni za poravnavo obveznosti do zavarovalcev, zavarovancev in drugih upravičencev, ne pa tudi zneskov, izterljivih iz pozavarovalnih pogodb in namenskih družb. Za izračun sedanje vrednosti se uporabi krivulja netvegane obrestne mere. Najboljša ocena obveznosti se mora izračunati na podlagi posodobljenih in verodostojnih podatkov ter realnih predpostavk z uporabo ustreznih aktuarskih in statističnih metod (ZZavar-1, 2015, 179. člen).

1.2.2 Dodatek za tveganje

Po 180. členu ZZavar-1 se dodatek za tveganje izračuna tako, da se določi stroške, ki jih ima (po)zavarovalnica, da zagotavlja znesek primernih lastnih virov sredstev v višini zahtevanega solventnostnega kapitala. Po 39. členu Deligirane uredbe (2015) je mera

stroškov kapitala enaka 6 % in predstavlja pribitek nad ustrezno netvegano obrestno mero (ZZavar-1, 2015, 180. člen).

1.3 Kapitalske zahteve

(Po)zavarovalnica mora po 202. členu ZZavar-1 (2015) zagotoviti vrednost primernih lastnih virov sredstev v višini, ki je enaka najmanj višini zahtevanega solventnostnega kapitala (angl. *Solvency Capital Requirement*).

Zahtevani solventnostni kapital lahko (po)zavarovalnica izračuna po standardni formuli ali z uporabo notranjega modela. Njegova višina mora ustrezati tvegani vrednosti osnovnih lastnih virov sredstev (po)zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta, pri čemer pa mora biti zadostna najmanj za kritje tveganj premoženjskih zavarovanj, tveganj življenjskih zavarovanj, tveganj zdravstvenih zavarovanj, tržnega tveganja, tveganja neplačila nasprotne stranke in operativnega tveganja (ZZavar-1, 2015, 203. člen).

1.4 Izračun zahtevanega solventnostnega kapitala po standardni formuli

Zahtevani solventnostni kapital se v okviru standardne formule izračuna kot vsota osnovnega zahtevanega solventnostnega kapitala, kapitalskih zahtev za operativno tveganje ter prilagoditev zaradi možnosti pokrivanja izgub s hkratnim zmanjšanjem zavarovalno-tehničnih rezervacij in zaradi odloženih davkov (ZZavar-1, 2015, 205. člen).

Po 206. členu ZZavar-1 (2015) osnovni zahtevani solventnostni kapital zajema najmanj:

- modul tveganj premoženjskih zavarovanj,
- modul tveganj življenjskih zavarovanj,
- modul tveganj zdravstvenih zavarovanj,
- modul tržnega tveganja,
- modul tveganja neplačila nasprotne stranke.

Vsak modul mora ustrezati meri tveganja, to je tvegani vrednosti osnovnih lastnih virov sredstev (po)zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta.

V magistrski nalogi se bom osredotočila na modul tveganj življenjskih zavarovanj oziroma natančneje na podmodul tveganja dolgoživosti.

1.4.1 Modul tveganj življenjskih zavarovanj

Modul tveganj življenjskih zavarovanj mora po 208. členu ZZavar-1 (2015) zajemati

najmanj naslednje podmodule tveganj:

- podmodul tveganja umrljivosti,
- podmodul tveganja dolgoživosti,
- podmodul tveganja invalidnosti in obolevnosti,
- podmodul tveganja stroškov,
- podmodul tveganja revizije,
- podmodul tveganja predčasnih prekinitev in
- podmodul tveganja katastrof.

Kapitalske zahteve podmodulov modula tveganj življenjskih zavarovanj se v okviru standardne formule računajo na podlagi metode scenarijev. V večini podmodulov, med katerimi je tudi podmodul tveganja dolgoživosti, se v okviru danega scenarija spremeni višina določenega parametra, nakar se zahtevan solventnostni kapital posameznega podmodula izračuna kot izguba osnovnih lastnih sredstev (po)zavarovalnice v primerjavi z osnovnim scenarijem (CEIOPS, 2010, str. 93–94).

Faktor oziroma vrednost, za katero se spremeni določeni parameter, se je določil v okviru procesa kalibracije. Predpostavke procesa kalibracije modula tveganj življenjskih zavarovanj so bile naslednje (EIOPA⁴, 2014, str. 29–30):

- Osnova vsakega posameznega podmodula je tveganje, ki izhaja iz spremembe višine in trenda določenega parametra. Tveganje, ki izhaja iz volatilnosti parametra, je veliko manjše v primerjavi s tveganjem, ki izhaja iz spremembe njegovega trenda, in je deloma implicitno zajeto v tveganju, ki izhaja iz spremembe višine in trenda parametra, zato ga lahko zanemarimo.
- Vpliv inflacije na vrednost izplačanih upravičenj iz naslova (po)zavarovalnih pogodb je nematerialen.
- Portfelj (po)zavarovalnice je ustrezno diverzificiran glede na starost, spol, status kadilca, socialno-ekonomski status, vrste in višine kritij, stopnjo izvajanja postopka sprejema v zavarovanje in geografsko lokacijo.

1.4.2 Podmodul tveganja dolgoživosti

138. člen Deligirane uredbe (2015) določa: »Kapitalske zahteve za tveganje dolgoživosti iz člena 105(3)(b) Direktive 2009/138/ES so enake izgubi osnovnih lastnih sredstev zavarovalnice in pozavarovalnice, ki bi bila posledica takojšnjega trajnega 20-odstotnega zmanjšanja stopenj umrljivosti, ki se uporabljajo za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij.« Pri tem k povišanju zahtevanega solventnostnega kapitala prispevajo samo

⁴ EIOPA je kratica za Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. *European Insurance and Occupational Pensions Authority*).

tiste (po)zavarovalne police, pri katerih zmanjšanje stopenj umrljivosti privede do zvišanja zavarovalno-tehničnih rezervacij brez dodatka za tveganje (Deligirana uredba, 2015, 138. člen).

Odstotek znižanja stopenj umrljivosti je bil v večini QIS-študij enak 25 % in je bil določen na osnovi analize umrljivosti v letih 1992–2006 v 9 izbranih evropskih državah, ki je pokazala, da se je v povprečju v večini starostnih pasov umrljivost v danem obdobju zmanjšala za več kot 25 % (CEIOPS, 2010, str. 97). Tudi rezultati QIS4-študije⁵ v (po)zavarovalnicah z internim modelom so pokazali, da je za zadostitev zahteve po stopnji zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta potrebno znižanje stopenj umrljivosti za od 19 % do 25 %, pri čemer je bila mediana okrog 25 % (CEIOPS, 2010, str. 99). Za vsako državo, ki je bila vključena v analizo umrljivosti, je CEIOPS s pomočjo stohastičnega modela umrljivosti določil tudi odstotek znižanja stopenj umrljivosti za posamezne starostne pasove in preostalo trajanje (po)zavarovalne pogodbe ob predpostavki, da zadosti zahtevi po stopnji zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta. Izkazalo se je, da noben odstotek ni presegal 21,8 % (CEIOPS, 2010, str. 98). Še več, večina odstotkov pri višjih starostih je bila občutno nižja od 20 %. CEIOPS je kasneje za QIS5-študijo⁶ predlagal, da se za izračun kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti uporabi 20-odstotno znižanje stopenj umrljivosti.

2 OSNOVNE DEFINICIJE IN OZNAKE

V tem poglavju bom predstavila nekatere definicije in oznake, ki se navezujejo na umrljivost in jih bom potrebovala v nadaljevanju magistrskega dela.

2.1 Funkcija preživetja

Gerber (1997, str. 15–22) je kot izhodišče modeliranja preživetja uporabil model preostale življenjske dobe, ki je predstavljen v nadaljevanju.

Denimo, da je T_0 zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka na intervalu $[0, \omega]$, ki predstavlja življenjsko dobo novorojene osebe, pri čemer je $0 < \omega < \infty$. ω označuje zgornjo starostno mejo, kar pomeni, da je verjetnost preživetja katerekoli osebe po tej starosti enaka 0. Naj bo nadalje $F(t) = P(T_0 \leq t)$ za $t \geq 0$ porazdelitvena funkcija od T_0 . Potem je funkcija preživetja $S(t)$ od T_0 definirana kot

$$S(t) = P(T_0 > t) = 1 - P(T_0 \leq t) = 1 - F(t) \quad (1)$$

Ker nas običajno zanima verjetnost preživetja x let stare osebe, definirajmo T_x kot zvezno

⁵ Leta 2008 je bila izvedena četrta QIS-študija, to je QIS4-študija.

⁶ QIS5-študija je peta in zadnja izmed QIS-študij, ki je bila izvedena leta 2010.

porazdeljeno slučajno spremenljivko na intervalu $[0, \omega]$, ki predstavlja preostalo življenjsko dobo x let stare osebe, pri čemer je $0 \leq x \leq \omega$. Naj bo nadalje $F_x(t) = P(T_x \leq t)$ za $t \geq 0$ porazdelitvena funkcija od T_x . Potem je funkcija preživetja $S_x(t)$ od T_x definirana kot

$$S_x(t) = P(T_x > t) = 1 - P(T_x \leq t) = 1 - F_x(t) \quad (2)$$

pri čemer $S_x(t)$ predstavlja verjetnost, da bo oseba stara x let živel nadaljnih t let, medtem ko $F_x(t)$ predstavlja verjetnost, da oseba stara x let ne bo dočkala starosti $x + t$ let. V aktuarstvu sta se za omenjeni verjetnosti uveljavili oznaki

$${}_tq_x = F_x(t) \quad (3)$$

$${}_tp_x = S_x(t) = 1 - {}_tq_x \quad (4)$$

Med porazdelitvenima funkcijama slučajnih spremenljivk T_0 in T_x velja naslednja zveza

$$\begin{aligned} F_x(t) &= P(T_x \leq t) = P(T_0 \leq x + t | T_0 > x) = \frac{P(x < T_0 \leq x + t)}{P(T_0 > x)} = \\ &= \frac{F(x + t) - F(x)}{S(x)} = \frac{S(x) - S(x + t)}{S(x)} \end{aligned} \quad (5)$$

Od tod sledi

$${}_tp_x = 1 - F_x(t) = 1 - \frac{S(x) - S(x + t)}{S(x)} = \frac{S(x + t)}{S(x)} \quad (6)$$

2.2 Jakost umrljivosti

Pogosto se v povezavi z umrljivostjo pojavi tudi pojem jakost umrljivosti μ_x , ki predstavlja trenutno stopnjo umrljivosti pri starosti x let ($0 \leq x \leq \omega$) in je definirana kot (The Actuarial Education Company, 2010, pogl. 7, str. 6)

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(T_0 \leq x + h | T_0 > x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{{}_hq_x}{h} \quad (7)$$

Za dovolj majhen h je verjetnost smrti x let stare osebe, to je ${}_hq_x$, približno enaka $h\mu_x$. Intuitivno si lahko jakost umrljivosti predstavljamo s pomočjo pričakovanega števila smrti v zelo veliki populaciji. Pričakovano število smrti v zelo kratkem časovnem intervalu h let na populaciji n oseb, starih x let, je približno enako $nh\mu_x$ (The Actuarial Education Company, 2010, pogl. 7, str. 6).

Iz definicije jakosti umrljivosti (7) med drugim sledi, da je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke T_x za $0 \leq t \leq \omega - x$ enaka (Dickson, Hardy, & Waters, 2009, str. 22)

$$f_x(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \quad (8)$$

Od tod sledi (Dickson et al., 2009, str. 27)

$${}_t q_x = F_x(t) = \int_0^t f_x(s) ds = \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds \quad (9)$$

in da je (Gerber, 1997, str.17)

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \quad (10)$$

2.3 Centralna stopnja umrljivosti

q_x je tako imenovana začetna stopnja umrljivosti, saj predstavlja verjetnost, da oseba, ki je na začetku stara x let, umre preden dočaka starost $x+1$ let.

V demografiji se pogosto uporablja tudi centralna stopnja umrljivosti m_x , to je verjetnost, da oseba, stara med x in $x+1$ let, umre. Definirana je takole (The Actuarial Education Company, 2010, pogl. 7, str. 12)

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_t p_x dt} \quad (11)$$

Izkaže se (sledi iz (8)), da je m_x uteženo povprečje jakosti umrljivosti znotraj leta, pri čemer so uteži verjetnosti preživetja (The Actuarial Education Company, 2010, pogl. 7, str. 13)

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \frac{\int_0^1 f_x(t) dt}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_t p_x dt} \quad (12)$$

Če dodatno predpostavimo, da je jakost umrljivosti μ_{x+t} konstantna za $0 \leq t < 1$, torej enaka μ_x med starostima x in $x + 1$ let, je centralna stopnja umrljivosti m_x enaka kar jakosti umrljivosti μ_x .

$$m_x = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x \mu_x dt}{\int_0^1 {}_t p_x dt} = \mu_x \quad (13)$$

Iz (10) in (13) tako sledi, da lahko začetno stopnjo umrljivosti izračunamo kot

$$q_x(t) = 1 - e^{-\mu_x(t)} \quad (14)$$

2.4 Centralna izpostavljenost

Denimo, da spremljamo umrljivost oseb, ki so v koledarskem letu K dopolnile starost x let (angl. *aged x last birthday*). S $P_{x,t}$ označimo število oseb, starih x let v času t . Potem je centralna izpostavljenost $E_{x,K}^C$ (angl. *central exposed to risk*) definirana kot (The Actuarial Education Company, 2010, pogl. 11, str. 14)

$$E_{x,K}^C = \int_K^{K+1} P_{x,t} dt \quad (15)$$

V praksi imamo ponavadi na voljo samo podatke o številu oseb $P_{x,t}$ starih x let v času t , pri čemer je t prvi dan v koledarskih letih K in $K + 1$, ne pa dejanskih časov vstopa in izstopa posameznih oseb v in iz opazovanja. Pravimo, da so podatki cenzurirani.

Cairns et al. (2009, str. 2) so za oceno $E_{x,K}^C$ uporabili naslednjo aproksimacijo

$$E_{x,K}^C \approx \frac{1}{2} \cdot (P_{x,K} + P_{x,K+1}) \quad (16)$$

S pomočjo ocene (16) in ob predpostavki, da imamo na voljo statistične podatke o številu umrlih $d_{x,K}$, starih x let v koledarskem letu K , lahko uporabimo naslednjo oceno za centralno stopnjo umrljivosti (Cairns et al., 2009, str. 2)

$$m_x(K) \approx \frac{d_x(K)}{E_x^C(K)} \quad (17)$$

2.5 Pričakovana življenjska doba

Popolna pričakovana življenjska doba (angl. *complete expected lifetime*) x let stare osebe je definirana kot (Gerber, 1997, str. 17)

$$\dot{e}_x = E(T_x) = \int_0^{\omega-x} t f_x(t) dt \quad (18)$$

Če uporabimo (8) in integriranje po delih, dobimo

$$\dot{e}_x = \int_0^{\omega-x} t f_x(t) dt = \int_0^{\omega-x} t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\omega-x} t \left(-\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x \right) dt = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt \quad (19)$$

V praksi na osnovi razpoložljivih podatkov najprej izračunamo tako imenovano odrezano pričakovano življenjsko dobo e_x (angl. *curtate expected lifetime*), popolno pričakovano življenjsko dobo pa ocenimo na podlagi naslednje povezave (Gerber, 1997, str. 19)

$$\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2} \quad (20)$$

Odrezana pričakovana življenjska doba je definirana kot (Gerber, 1997, str. 19)

$$e_x = E(K_x) = \sum_{k=0}^{\omega-x} k P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\omega-x} k {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x \quad (21)$$

kjer je K_x diskretna slučajna spremenljivka, ki predstavlja dopolnjeno število let, ki jih bo preživela x let stara oseba.

2.6 Efekt rojstne kohorte

V zadnjih desetletjih se je pričakovana življenjska doba v Sloveniji kakor tudi v drugih evropskih državah, povečala (Vertot, 2008). Še več, v številnih raziskavah se je izkazalo, da je stopnja povečanja pričakovane življenjske dobe odvisna tudi od leta rojstva. Govorimo o tako imenovanem efektu rojstne kohorte. Na primer umrljivost oseb v Veliki Britaniji, rojenih med letoma 1925 in 1945, se je veliko bolj zmanjšala kot umrljivost ostalih generacij (Willems, 2004, str. 834).

3 PRIPRAVA STATISTIČNIH PODATKOV

3.1. Podatki o populaciji

Statistične podatke o populaciji v RS sem pridobila na Statističnem uradu Republike Slovenije (v nadaljevanju SURS). Podatki prikazujejo število prebivalcev na začetku koledarskih let 1982–2015 ter so razdeljeni v enoletne starostne razrede od starosti 0 do starosti 100 let in glede na spol (SURS, 2016a).

V danem časovnem obdobju je večkrat prišlo do sprememb metodologije zajema podatkov. Podatki do vključno leta 1995 se nanašajo samo na državljane RS s stalnim prebivališčem v RS, medtem ko se statistični podatki od 1. januarja 1995 do 1. januarja 2008 nanašajo na (SURS, 2016c, str. 3):

- »državljanke Republike Slovenije s prijavljenim stalnim prebivališčem v Sloveniji, brez tistih, ki so v tujini odsotni več kot tri mesece in so svoj odhod prijavili v upravni enoti svojega stalnega prebivališča;
- tujce z izdanim dovoljenjem za stalno prebivanje v Republiki Sloveniji, ki imajo prijavljeno stalno prebivališče;
- tujce z izdanim dovoljenjem za začasno prebivanje v Republiki Sloveniji, ki imajo prijavljeno začasno prebivališče;
- tujce z veljavnim delovnim ali poslovnim vizumom, ki imajo v Sloveniji prijavljeno začasno prebivališče;
- osebe, ki sta jim bila po zakonu o azilu priznana pravica do azila in status begunca v Republiki Sloveniji (begunci).«

Po 1. januarju 2008 je bila definicija prebivalstva usklajena z definicijo prebivalstva in selivcev iz Uredbe Evropskega parlamenta in Sveta o statistikah Skupnosti o selitvah in mednarodni zaščiti, ki temelji na konceptu običajnega prebivališča. Po tej definiciji je prebivalec Republike Slovenije oseba s prijavljenim stalnim in/ali začasnim prebivališčem v RS, ki v Sloveniji prebiva ali ima namen prebivati vsaj eno leto in ni začasno odsotna eno leto ali več (SURS, 2016c, str. 2).

Omenjene spremembe metodologije nimajo pomembnega vpliva na določanje stopnje umrljivosti prebivalcev RS, zato bom njihov vpliv zanemarila.

3.2. Podatki o umrlih

Statistične podatke o umrlih v RS sem pridobila na SURS. Nanašajo se na leta 1980–2014 ter so razdeljeni v enoletne starostne razrede od starosti 0 do starosti 100 let in glede na spol (SURS, 2016b). Metodologija zajema podatkov o številu umrlih v RS se je spreminjala v skladu s spremembami v definiciji prebivalstva (SURS, 2011, str. 2).

3.3. Umrljivost

Za vsako starost $x = 0, 1, \dots, 100$ in koledarsko leto $t = 1982, \dots, 2014$ sem v skladu s formulo (17) izračunala surove centralne stopnje umrljivosti $m_x(t)$ kot

$$m_x(t) = \frac{d_x(t)}{E_x^C(t)} \quad (22)$$

kjer $d_x(t)$ število prebivalcev umrlih v koledarskem letu t , ki so bili v času smrti stari x let, in $E_x^C(t)$ povprečno število prebivalcev starih x let v koledarskem letu t . $E_x^C(t)$ sem izračunala kot povprečje med številom prebivalcev starih x let v začetku koledarskega leta t in številom prebivalcev starih x let v začetku koledarskega leta $t + 1$.

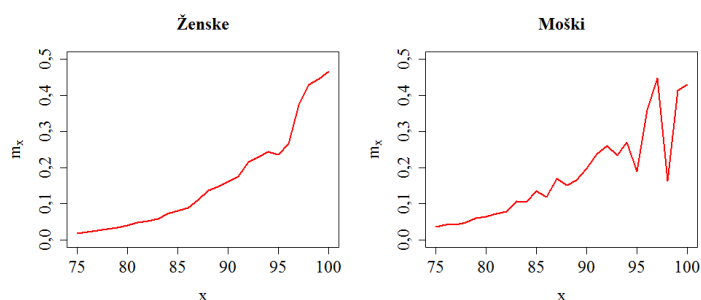
Stopnje umrljivosti v odvisnosti od starosti prikazujemo s tako imenovano krivuljo umrljivosti. Zaradi raznih anomalij v podatkih, ki so predstavljeni v nadaljevanju, sem krivulje umrljivosti pred nadaljnjo uporabo zgladila.

3.4. Glajenje krivulje umrljivosti

3.4.1 Umrljivost pri višjih starostih

Pri visokih starostih prihaja v podatkih o umrljivosti do raznih anomalij. Pri nekaterih starostih je izpostavljenost enaka 0, pri drugih pa število umrlih presega povprečno število oseb v sredini danega koledarskega leta. Prav tako zaradi majhne izpostavljenosti prihaja do višje volatilnosti v surovih stopnjah umrljivosti (Ahčan, Medved, Pitacco, Sambt & Sraka, 2012, str. 7), kar je razvidno tudi iz Slike 1, ki prikazuje surove centralne stopnje umrljivosti za starosti med 75 in 100 let v letu 2014. Temu se bom poskušala izogniti z ekstrapolacijo stopenj umrljivosti pri višjih starostih.

Slika 1: Volatilnost centralnih stopenj umrljivosti prebivalcev Slovenije v letu 2014 pri visokih starostih



V preteklosti je bilo razvitih več parametričnih modelov, ki prikazujejo umrljivost v odvisnosti od starosti. Večina izmed njih (med njimi tudi znani Gompertz-Makehamov⁷ model) predvideva eksponentno rast stopenj umrljivosti pri višjih starostih. Novejše študije (Pitacco, Denuit, Haberman & Olivieri, 2009, str. 75) kažejo, da jakost umrljivosti pri zelo visokih starostih narašča počasneje in da se krivulja umrljivosti pri zelo visokih starostih splošči.

Za ekstrapolacijo umrljivosti sem tako uporabila metodo, ki sta jo predlagala Denuit in Goderniaux (2005, str. 39–40), saj le-ta upošteva obe karakteristiki. Omenjeno metodo so za konstruiranje slovenskih retnih tablic uporabili tudi Ahčan et al. (2012, str. 7–9).

Denuit in Goderniaux (2005, str. 39) sta za ekstrapolacijo predlagala log-kvadratični model

⁷ Makeham je leta 1860 predstavil dopolnjen Gompertzov model: $\mu_x = A + BC^x$, kjer je $A \geq 0$ in $B, C > 0$ (Gerber, 1997, str. 18). Dodal je parameter A , ki prikazuje starostno neodvisen člen, s katerim običajno skušamo ujeti umrljivost, ki izhaja iz nezgod.

$$\ln(q_x(t)) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{x,t} \quad (23)$$

kjer so $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2)$ neodvisne slučajne spremenljivke. Pri tem sta za zgornjo starostno mejo ω upoštevala 130 let. To pomeni, da je $q_{130}(t) = 1$ za vse t . Dodatno sta predpostavila, da se višanje stopenj umrljivosti s starostjo upočasni, nakar doseže maksimum pri starosti 130 let. Torej je $q'_{130}(t) = 0$. Zaradi teh dveh omejitev se formula (23) poenostavi

$$\ln(q_x(t)) = c_t(\omega - x)^2 + \varepsilon_{x,t} \quad (24)$$

Parameter c_t sta določila za vsako izmed koledarskih let t na podlagi opazovanih začetnih stopenj umrljivosti $q_x(t)$ za starosti $x = 75, 76, \dots$, in sicer tako, da sta poiskala c_t , ki omogoča najbolj optimalno prilagajanje krivulje podatkom. Nato sta začetne stopnje umrljivosti za starosti večje od 85 let nadomestila z ekstrapoliranimi vrednostmi le-teh

$$\widetilde{q}_x(t) = e^{c_t(\omega-x)^2} \quad (25)$$

Ena izmed mer prilagajanja regresijskega modela podatkom je determinacijski koeficient R^2 , ki nam pove, kolikšen del variance odvisne spremenljivke lahko s pomočjo regresijskega modela pojasnimo z varianco neodvisne spremenljivke (Rawlings, Pentula & Dickey, 1998, str. 220). Večji kot je R^2 , večjo pojasnjevalno moč ima dani regresijski model. Determinacijski koeficient R^2 izračunamo s formulo

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (26)$$

kjer SST označuje skupno vsoto kvadratov (angl. *Sum of Squares Total*), SSE pa vsoto kvadratov napake (angl. *Sum of Squares Error*). Le-ta se v danem primeru izračunata kot

$$SSE = \sum_x (\ln(q_x(t)) - c_t(\omega - x)^2)^2 \quad (27)$$

$$SST = \sum_x (\ln(q_x(t)) - \overline{\ln(q_x(t))})^2 \quad (28)$$

Parameter c_t sem torej določila tako, da je bila vrednost R^2 v danem letu t največja. Preden sem določila optimalno vrednost parametra c_t , sem iz izračunov izvzela vrednosti $m_x(t)$ z vrednostjo 0. Nato sem na podlagi formul (13) in (14) izračunala vrednosti $q_x(t)$ in izvedla opisan postopek iskanja optimalne vrednosti parametra c_t . Izkazalo se je (Slika 1 in Slika 2 v Prilogi 1), da je na danih podatkih glede na vrednost R^2 v posameznih koledarskih letih najbolj ustrezna zgornja meja $\omega = 130$, kot osnova za ekstrapolacijo pa

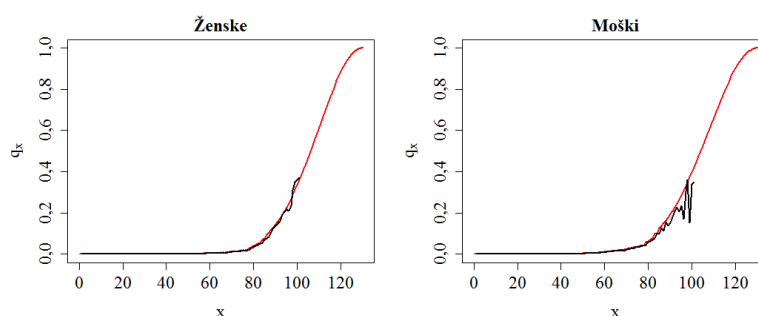
začetne stopnje umrljivosti $q_x(t)$ za starosti $x = 60, 61, \dots, 100$. Iz začetnih stopenj umrljivosti za starosti večje od 85 let, ki sem jih dobila z ekstrapolacijo, sem s pomočjo formul (13) in (14) izračunala še pripadajoče centralne stopnje umrljivosti $\widetilde{m}_x(t)$, s katerimi sem nadomestila surove centralne stopnje umrljivosti $m_x(t)$. Ustrezno sem preračunala tudi število smrti

$$\widetilde{d}_x(t) = \widetilde{m}_x(t) \cdot E_x^c(t) \quad (29)$$

Centralnih stopenj umrljivosti in število smrti za starosti do vključno 85 let nisem spreminjala.

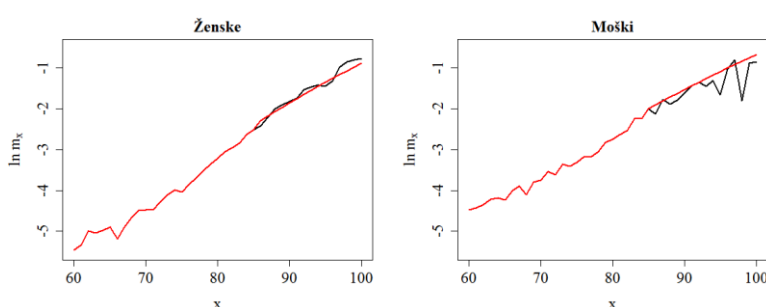
Slika 2 prikazuje rezultate ekstrapolacije za leto 2014. Na grafih so prikazane surove začetne stopnje umrljivosti (krivulja črne barve) in začetne stopnje umrljivosti po postopku glajenja pri visokih starostih (krivulja rdeče barve) glede na starost x .

Slika 2: Surove in glajene (pri visokih starostih) začetne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014



Za napovedovanje umrljivosti z uporabo stohastičnih modelov, ki jih bom predstavila v nadaljevanju, sem uporabila samo začetne stopnje umrljivosti do vključno starosti 100 let, iz katerih sem izračunala pripadajoče centralne stopnje umrljivosti. Slika 3 prikazuje centralne stopnje umrljivosti za leto 2014 pred glajenjem (krivulja črne barve) in po glajenju (krivulja rdeče barve) pri visokih starostih glede na starost x .

Slika 3: Surove in glajene (pri visokih starostih) centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014



3.4.2 Glajenje z zleпки

V nekaterih stohastičnih modelih umrljivosti se uporablja logaritem stopenj umrljivosti, zaradi česar je zaželeno, da so stopnje umrljivosti pozitivna števila. Stopnja umrljivosti je enaka 0, če pri dani starosti v danem letu ni bilo nobene smrti. To je značilno predvsem za nizke starosti, kjer je število umrlih majhno. Da bi zagotovila pozitivne stopnje umrljivosti, sem uporabila tehniko, ki so jo predlagali Ahčan et al. (2012, str. 12). Stopnjo umrljivosti, ki je enaka 0, sem ocenila s povprečjem pozitivnih stopenj umrljivosti pri dani starosti v najbližjih sosednjih koledarskih letih.

Za glajenje tako spremenjene krivulje umrljivosti sem uporabila metodo, ki sta jo predlagala Hyndman in Ullah (2007, str. 4943–4945), ki sta predpostavila, da obstaja gladka funkcija⁸ $f_t(x)$, tako da za točke $(x, \ln(m_x(t)))$, kjer je $x = 0, 1, \dots, 100$ in $t = 1982, \dots, 2014$, velja

$$\ln(m_x(t)) = f_t(x) + \sigma_t(x)\varepsilon_{x,t} \quad (30)$$

$\varepsilon_{x,t} \sim N(0,1)$ so neodvisne slučajne spremenljivke, $\sigma_t(x)$ pa omogoča, da se količina šuma spreminja s časom t .

Funkcijo $f_t(x)$ sta poiskala z neparametrično metodo, imenovano uteženi regresijski zleпки s kaznovanjem (angl. *weighted penalized regression splines*), pri kateri sta uteži definirala kot

$$w_t(x) = (\hat{\sigma}_t^2(x))^{-1} = \frac{E_t^c(x) \cdot m_x(t)}{1 - m_x(t)} \quad (31)$$

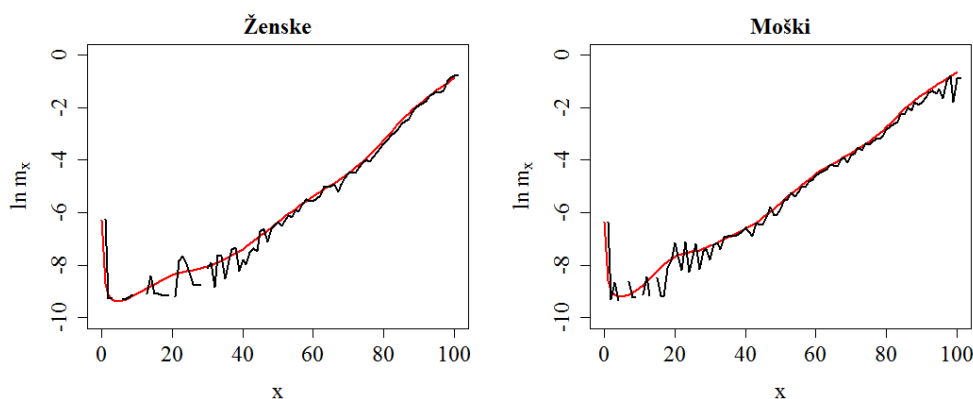
Uporaba uteži jima je omogočila obvladovanje heterogenosti, ki izhaja iz $\sigma_t(x)$. Dodatno sta predpostavila, da je funkcija $f_t(x)$ monotonno naraščajoča za $x > c$. S to predpostavko sta zmanjšala šum pri višjih starostih.

Glajenje krivulje sem izvedla v programskem jeziku R z uporabo funkcije `smooth.demogdata` iz paketa `demography` (Hyndman, Booth, Tickle, & Maindonald, 2015, str. 40–42).

Rezultati postopka glajenja so prikazani na Sliki 4, ki prikazuje surove (krivulja črne barve) in glajene (krivulja rdeče barve) centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije glede na starost za leto 2014.

⁸ Zvezno odvedljivim funkcijam pravimo gladke funkcije (Smooth function, b.l.).

Slika 4: Surove in glajene centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije za leto 2014

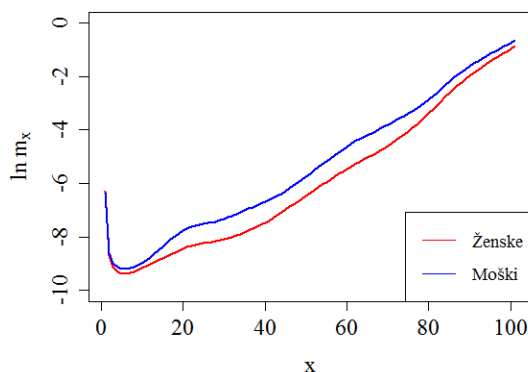


4 ANALIZA UMRLJIVOSTI PREBIVALCEV SLOVENIJE

V tem poglavju bom predstavila nekatere karakteristike umrljivosti prebivalcev Slovenije. Kot osnovo za prikaz bom uporabila z lepki glajene krivulje umrljivosti.

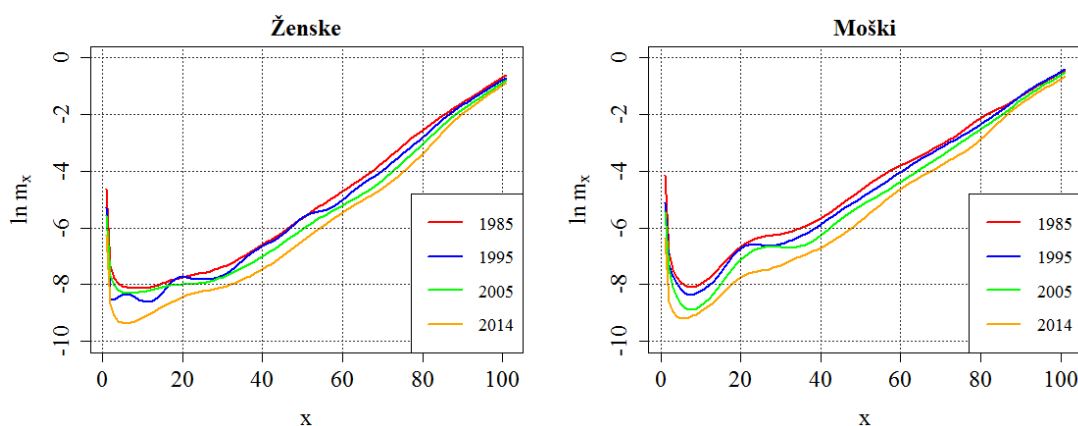
V primerjavi z ostalimi evropskimi državami je oblika krivulje umrljivosti podobna. Kot je razvidno iz Slike 5, ki prikazuje centralne stopnje umrljivosti v letu 2014, je umrljivost moških nekoliko višja od umrljivosti žensk. Umrljivost s starostjo v splošnem narašča približno eksponentno. Izjema je umrljivost dojenčkov in umrljivost okrog 20. leta starosti, kjer se umrljivost poveča na račun nezgodnih smrti. Učinek nezgodnih smrti je večji za moško populacijo.

Slika 5: Centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije v letu 2014 glede na spol

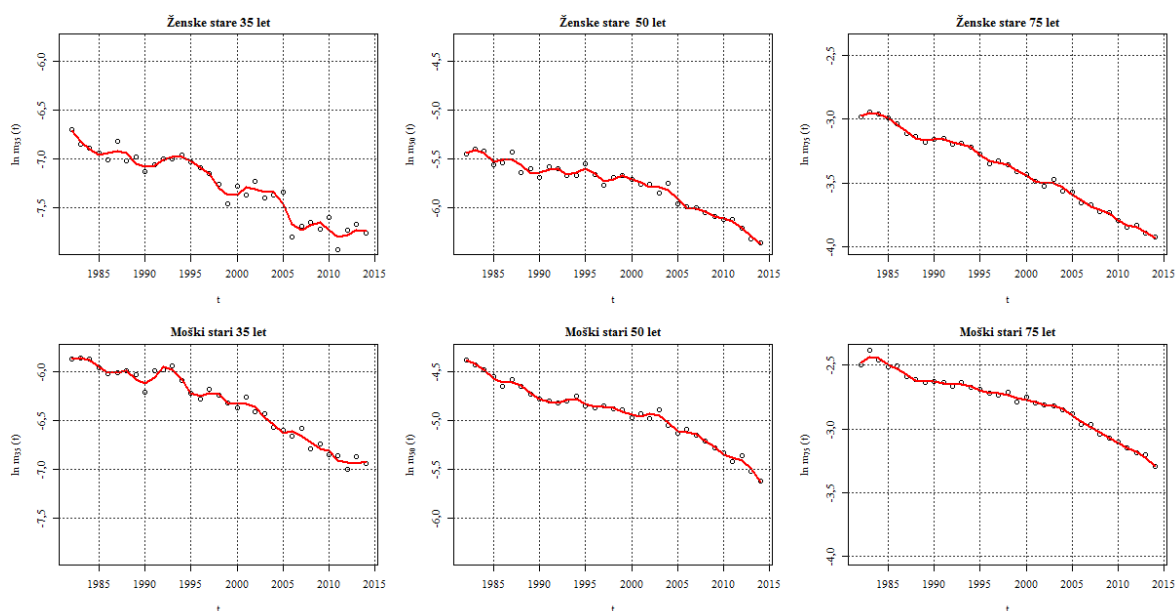


Slika 6 prikazuje centralne stopnje umrljivosti v izbranih letih. Podobno kot za ostale evropske države lahko opazimo splošen trend zmanjševanja umrljivosti, ki je posledica boljše zdravstvene oskrbe, življenjskega standarda in načina življenja (Eurostat, 2015). Kot je razvidno iz Slike 7, ki prikazuje trend umrljivosti v letih 1982–2014 za izbrane starosti, je splošen trend zmanjševanja umrljivosti prisoten pri vseh starosti, le-da je hitrost zmanjševanja pri različnih starostih različna.

Slika 6: Centralne stopnje umrljivosti prebivalcev Slovenije v izbranih letih



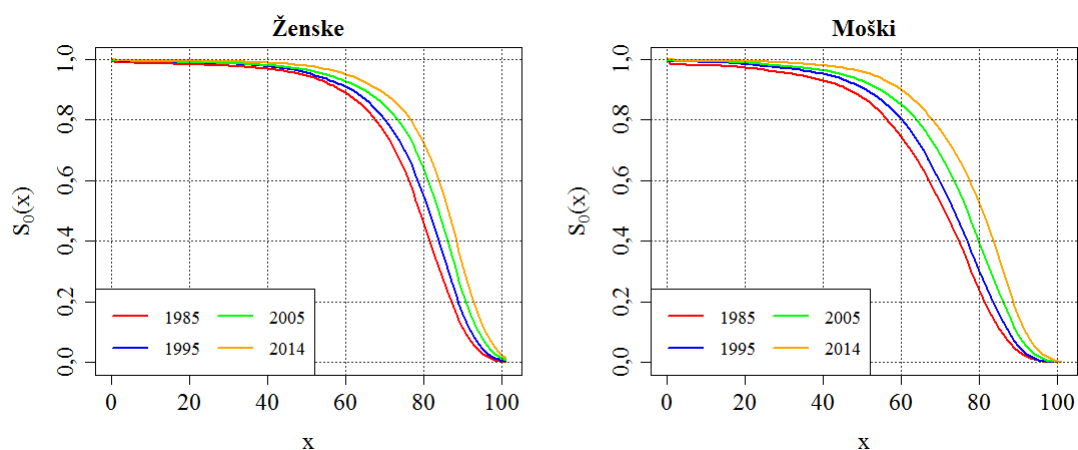
Slika 7: Trend umrljivosti prebivalcev Slovenije pri izbranih starostih v letih 1982–2014



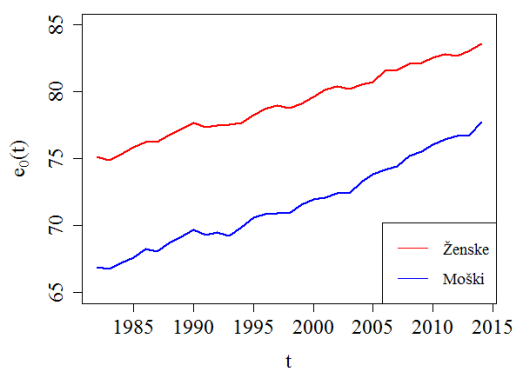
Na Sliki 8 je prikazana funkcija preživetja novorojenih oseb v Sloveniji v izbranih koledarskih letih. Oblika grafa funkcije preživetja postaja vse bolj podobna pravokotniku (angl. *rectangularization*), kar je posledica višanja pričakovane življenjske dobe novorojenih oseb (Slika 9).

Pričakovana življenjska doba novorojenih oseb je višja za ženske. V letu 2014 je ob upoštevanju nespremenjene umrljivosti znašala 83,68 let za ženske in 77,97 let za moške. V zadnjih 30 letih se je pričakovana življenjska doba novorojenih oseb v primeru moških podaljšala za 10,6 let, v primeru žensk pa za 8,1 let. Tako se je razlika od leta 1984 do leta 2014 zmanjšala z 8,1 let na 5,7 let (SURs, 2015).

Slika 8: Funkcija preživetja novorojenih oseb v Sloveniji

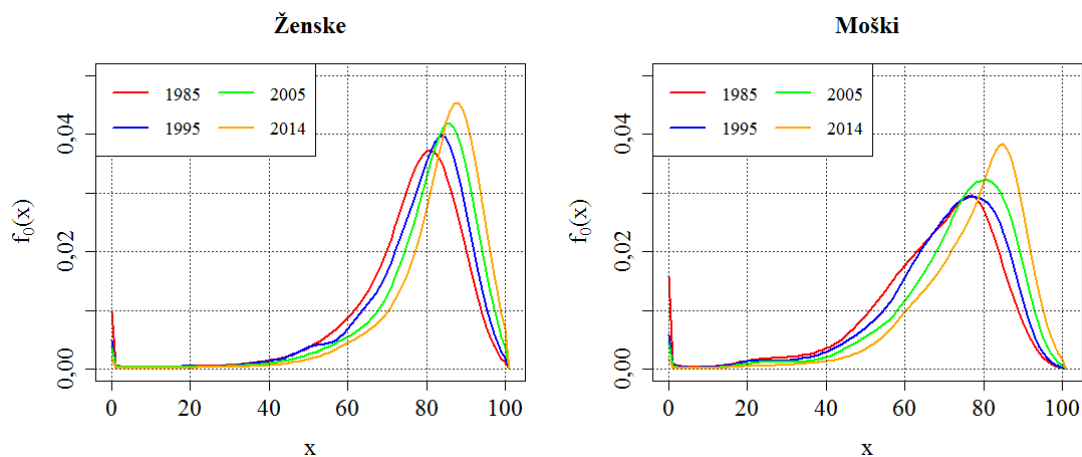


Slika 9: Pričakovana življenjska doba novorojenih oseb v Sloveniji



Enako je razvidno iz Slike 10, ki prikazuje gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke T_0 , ki predstavlja pričakovano življenjsko dobo novorojene osebe. Jasno razviden je premik krivulj v desno in njihovo ožjenje.

Slika 10: Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke T_0 prebivalcev Slovenije



5 STOHAŠTIČNI MODELI UMRLJIVOSTI

5.1 Zgodovina

Prvi poskusi parametrizacije krivulje umrljivosti segajo v 18. stoletje, ko je Abraham de Moivre leta 1725 objavil De Moivre zakon v knjigi *Annuities upon Lives*, to je v eni izmed prvih aktuarskih knjig. Leta 1825 je Gompertz predstavil model, po katerem je jakost umrljivosti eksponentna funkcija (Gerber, 1997, str. 18). Le-tega je leta 1860 dopolnil Makeham, ki mu je dodal konstantni člen, s katerim je skušal zajeti umrljivost iz naslova nezgod (Gerber, 1997, str. 18). Kasneje so bili razviti še drugi modeli, med njimi tudi Heligman-Pollard, Weibullov in Perkov model, vendar nobena izmed predlaganih rešitev ni povsem dobro opisala krivulje umrljivosti.

Ko se je začela umrljivost prebivalcev zmanjševati, se je pojavila potreba po modelu, ki bi ujel tudi tovrstne spremembe in na podlagi katerega bi lahko s pomočjo trendov v preteklosti napovedali spreminjanje stopenj umrljivosti v prihodnosti. Tako so se pojavili stohastični modeli umrljivosti. Eden izmed prvih in najbolj odmevnih je bil Lee-Carterjev model (1992). Brouhns, Denuit in Vermunt (2002) so omenjeni model dopolnili s predpostavko, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu. Cairns, Blake in Dowd (2006) so predstavili tako imenovan CBD-model⁹, ki pa je bil zasnovan predvsem za projekcijo umrljivosti starejše populacije. Leta 2004 je Willets objavil rezultate raziskave, po kateri se je umrljivost oseb v Veliki Britaniji, rojenih med leti 1925 in 1945, veliko bolj zmanjšala kot umrljivost ostalih generacij. Tako je postal pomemben del stohastičnih modelov umrljivosti tudi člen, ki je ponazarjal efekt rojstne kohorte. Pojavile so se številne razširitve Lee-Carterjevega in CBD-modela oziroma njune kombinacije, ki so skušale zajeti tudi ta aspekt (na primer, Renshaw & Haberman (2006), Currie (2006), Plat (2009)).

5.2 Oznake

V nadaljevanju bom predstavila nekatere izbrane stohastične modele umrljivosti. Pri tem bodo $x_1, \dots, x_m$ označevali starosti in $t_1, \dots, t_n$ koledarska leta, na osnovi katerih bom določila ocene parametrov posameznih stohastičnih modelov. Nadalje bom v definicijah modelov uporabila naslednje oznake:

- $\beta_x^{(i)}$ je funkcija, ki odraža starostni efekt,
- $\kappa_t^{(i)}$ je funkcija, ki odraža časovni efekt,
- $\gamma_c^{(i)}$ je funkcija, ki odraža efekt rojstne kohorte $c = t - x$.

⁹ Ime za CBD-model izhaja iz začetnic priimkov njegovih avtorjev, ki so Cairns, Blake in Dowd.

5.4 Lee-Carterjev model

Lee in Carter (1992, str. 660) sta za modeliranje centralnih stopenj umrljivosti predlagala naslednji model

$$\ln(m_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (32)$$

Parameter $\beta_x^{(1)}$ določa splošno obliko krivulje umrljivosti, parameter $\kappa_t^{(2)}$ pa časovni trend spreminjanja stopenj umrljivosti. Kako hitro se bodo stopnje umrljivosti pri določeni starosti spreminjale glede na $\kappa_t^{(2)}$, določa parameter $\beta_x^{(2)}$. Vrednost tega parametra je lahko tudi negativna, kar pomeni, da se stopnje umrljivosti pri tej starosti skozi čas zvišujejo, kar pa v praksi na dolgi rok ni običajno. $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ označuje napako, ki se nanaša na starostno specifične zgodovinske vplive, ki jih model ni zajel.

Parametrizacija Lee-Carterjevega modela ni enolična, saj je invariantna glede na naslednje transformacije (Giroi & King, 2007, str. 2)

$$\begin{aligned} \beta_x^{(2)} &\mapsto a\beta_x^{(2)} & \kappa_t^{(2)} &\mapsto \frac{1}{a}\kappa_t^{(2)} & \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \\ \beta_x^{(1)} &\mapsto \beta_x^{(1)} - b\beta_x^{(2)} & \kappa_t^{(2)} &\mapsto \kappa_t^{(2)} + b & \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (33)$$

Kot vidimo, lahko parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ z danimi transformacijami zamenjamo s parametri $\tilde{\beta}_x^{(1)}$, $\tilde{\beta}_x^{(2)}$ in $\tilde{\kappa}_t^{(2)}$, nakar bomo dobili enako rešitev

$$\begin{aligned} \ln(m_x(t)) &= \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} = \\ &= \left(\beta_x^{(1)} - b\beta_x^{(2)} \right) + a\beta_x^{(2)} \left(\frac{1}{a}(\kappa_t^{(2)} + b) \right) + \varepsilon_{x,t} = \\ &= \tilde{\beta}_x^{(1)} + \tilde{\beta}_x^{(2)} \tilde{\kappa}_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \end{aligned} \quad (34)$$

Da bi zagotovila enoličnost parametrizacije, sta Lee in Carter (1992, str. 660) predlagala uporabo naslednjih dveh pogojev

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1, \quad \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0 \quad (35)$$

5.5 Poisson Lee-Carterjev model

Brouhns et al. (2002, str. 375) so uporabili Lee-Carterjev model in dodatno predpostavili, da je število smrti, ki jo določa slučajna spremenljivka $D_x(t)$, porazdeljeno po Poissonu

$$D_x(t) \sim Po(E_x^C(t) \cdot \mu_x(t)) \quad (36)$$

in da je jakost umrljivosti $\mu_{x+h}(t)$ konstantna za $0 \leq h \leq 1$, torej enaka $\mu_x(t)$ med starostima x in $x+1$ let. Od tod sledi, da je logaritemska funkcija verjetja¹⁰ enaka (Brouhns et al., 2002, str. 378)

$$\begin{aligned} \ln L(\mu_x(t)) &= \ln \left(\prod_x \prod_t \frac{(E_x^C(t) \cdot \mu_x(t))^{d_x(t)}}{d_x(t)!} e^{-E_x^C(t) \cdot \mu_x(t)} \right) = \\ &= \sum_x \sum_t (d_x(t) \ln(\mu_x(t)) - E_x^C(t) \cdot \mu_x(t)) + A \end{aligned} \quad (37)$$

kjer je A konstanta neodvisna od $\mu_x(t)$. Ocen po metodi največjega verjetja (angl. *maximum likelihood estimate*; v nadaljevanju MLE) dobimo tako, da poiščemo maksimum funkcije $\ln L(\mu_x(t))$, torej

$$\frac{\partial \ln L(\mu_x(t))}{\partial \mu_x(t)} = \sum_x \sum_t \left(\frac{d_x(t)}{\mu_x(t)} - E_x^C(t) \right) = 0 \quad (38)$$

Pogoj je izpolnjen, kadar je vrednost parametra $\mu_x(t)$ enaka centralni stopnji umrljivosti

$$\mu_x^{MLE}(t) = \frac{d_x(t)}{E_x^C(t)} = m_x(t) \quad (39)$$

Ob upoštevanju (39) iz formule (32) dobimo naslednji model za jakost umrljivosti

$$\ln(\mu_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (40)$$

5.6 CBD-model

Cairns et al. (2006, str. 691) so za modeliranje začetnih stopenj umrljivosti predlagali dvofaktorski model, ki ga danes poznamo kot CBD-model v naslednji obliki (Cairns et al., 2009, str. 9)

$$\text{logit}(q_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad (41)$$

kjer je $\text{logit}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)$ za vsak $0 < x < 1$ in

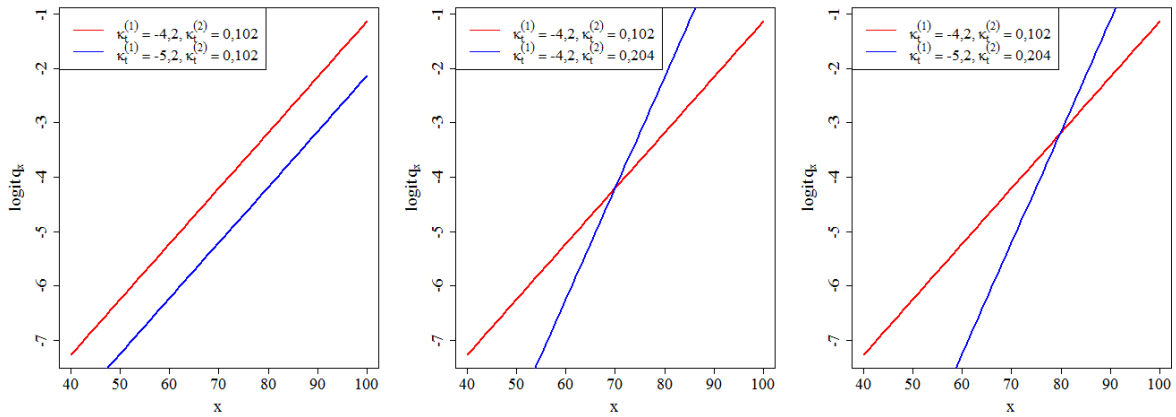
¹⁰ Funkcija verjetja enako porazdeljenih in neodvisnih slučajnih spremenljivk X_i z gostoto verjetnosti $f = f(\theta_1, \dots, \theta_n, x)$, kjer so $\theta_1, \dots, \theta_n$ njeni parametri, je enaka $L = \prod_i f(\theta_1, \dots, \theta_n, x_i)$. Logaritemska funkcija verjetja je enaka $\ln(L)$ (Greene, 2012, str. 549).

$$\bar{x} = \frac{1}{x_m - x_0} \sum_{i=1}^m x_i \quad (42)$$

Cairns et al. (2006, str. 712) so model (41) konstruirali na predpostavki, da so log-stopnje umrljivosti približno linearne glede na starost, zato ta model ni najbolj primeren za nižje starosti, za katere ta lastnost ne velja. Običajno se uporablja za starosti nad 60 let.

Parameter $\kappa_t^{(1)}$ predstavlja nivo logit-transformirane krivulje začetnih stopenj umrljivosti¹¹, parameter $\kappa_t^{(2)}$ pa njen naklon. Zmanjšanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(1)}$ je mogoče opaziti kot vzporedni premik krivulje v smeri navzdol, kar predstavlja splošno zmanjšanje umrljivosti. Naraščanje $\kappa_t^{(2)}$ se kaže v povečanju naklona krivulje in pomeni, da se logit-začetne stopnje umrljivosti pri nižjih starostih (glede na $\bar{x}$) hitreje zmanjšujejo (Chan, J. S. H. Li & J. Li, 2014, str. 42). Na Sliki 11 je viden vpliv spremembe višine posameznih parametrov.

Slika 11: Vpliv parametrov CBD-modela



Vir: W. S. Chan, J. S. H. Li in J. Li, *The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications*, 2014, str. 43.

CBD-model je v primerjavi z ostalimi modeli, ki jih bom predstavila, edini, ki nima težav z invariantnostjo parametrizacije, saj je le-ta enolična brez potrebnih dodatnih pogojev (Chan et al., 2014, str. 42).

5.7 Renshaw-Habermanov model

Renshaw in Haberman (2006, str. 558) sta predstavila enega izmed prvih stohastičnih modelov umrljivosti, ki je upošteval tudi efekt rojstne kohorte

¹¹ Logit-transformirana krivulja začetnih stopenj umrljivosti prikazuje $\text{logit}(q_x(t)) = \ln\left(\frac{q_x(t)}{1-q_x(t)}\right)$ v odvisnosti od starosti x v letu t .

$$\ln(\mu_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}\kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(0)}\gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (43)$$

Gre za razširitev Lee-Carterjevega modela z dodatnim členom. Parameter γ_{t-x} prikazuje splošen efekt rojstne kohorte za osebe rojene leta $t - x$ ne glede na starost, parameter $\beta_x^{(0)}$ pa nam pove, v kolikšni meri osebe stare x let prispevajo k danemu efektu rojstne kohorte.

Tudi Renshaw-Habermanov model ima težave z enoličnostjo parametrizacije, saj je parametrizacija invariantna glede na naslednje transformacije (Villegas, Millosovich & Kaishev, 2016, str. 7)

$$\begin{aligned} \beta_x^{(1)} &\rightarrow \beta_x^{(1)} + c_1\beta_x^{(2)} + c_2\beta_x^{(2)} & \beta_x^{(2)} &\rightarrow \frac{1}{c_3}\beta_x^{(2)} & \beta_x^{(0)} &\rightarrow \frac{1}{c_4}\beta_x^{(0)} \\ \kappa_t^{(2)} &\rightarrow c_3(\kappa_t^{(2)} - c_1) & \gamma_{t-x} &\rightarrow c_4(\gamma_{t-x} - c_2) \end{aligned} \quad (44)$$

kjer so $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ in $c_3, c_4 \neq 0$. Da bi zagotovila enoličnost parametrizacije sta Renshaw in Haberman (2006, str. 558) predlagala naslednje pogoje

$$\sum_x \beta_x^{(2)} = 1, \quad \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \quad \sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \quad \sum_x \sum_t \gamma_{t-x} = 0 \quad (45)$$

5.8 APC¹²-model

Currie (2006, str. 7) je predstavil poenostavljeno verzijo Renshaw-Habermanovega modela, to je APC-model

$$\ln(\mu_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (46)$$

V nasprotju z Renshaw-Habermanovim modelom APC-model nima starostno odvisnega parametra $\beta_x^{(2)}$, ki označuje hitrost spreminjanja stopenj umrljivosti glede na starost. Temelji namreč na predpostavki, da na stopnjo umrljivosti bolj kot starost posameznika vpliva leto rojstva.

Tudi APC-model nima enolične parametrizacije, saj je invariantna glede na naslednji dve množici transformacij (Villegas et al., 2016, str. 8)

$$\beta_x^{(1)} \rightarrow \beta_x^{(1)} - c_1 - c_2x \quad \kappa_t^{(2)} \rightarrow \kappa_t^{(2)} + c_2t \quad \gamma_{t-x} \rightarrow \gamma_{t-x} - c_1 - c_2(t-x) \quad (47)$$

$$\beta_x^{(1)} \rightarrow \beta_x^{(1)} + c_1 \quad \kappa_t^{(2)} \rightarrow \kappa_t^{(2)} - c_1 \quad \gamma_{t-x} \rightarrow \gamma_{t-x} \quad (48)$$

¹² APC-model je dobil ime po svojih komponentah: starost, obdobje in kohorta (angl. *Age-Period-Cohort*).

kjer sta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, zato za rešitev problema enoličnosti parametrizacije uporabimo naslednje pogoje (Villegas et al., 2016, str. 8)

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \quad \sum_{c=t-x} \gamma_{t-x} = 0, \quad \sum_{c=t-x} c\gamma_{t-x} = 0 \quad (49)$$

5.9 M7¹³-model

Cairns et al. (2009, str. 9–10) so med drugimi stohastičnimi modeli umrljivosti predstavili tudi razširjeno verzijo CBD-modela, to je M7-model, podan z enačbo

$$\text{logit}(q_x(t)) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}^2)\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (50)$$

kjer je

$$\overline{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{x_m - x_0} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \quad (51)$$

M7-model ima v primerjavi s CBD-modelom dva dodatna parametra, to je $\kappa_t^{(3)}$ in γ_{t-x} . Parameter $\kappa_t^{(3)}$ je pomnožen z izrazom $(x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}^2$, kar pomeni, da ima ta člen največji vpliv na starosti, ki so najbolj oddaljene od starosti $\bar{x} - \hat{\sigma}$ in $\bar{x} + \hat{\sigma}$. Kadar je vrednost parametra $\kappa_t^{(3)}$ negativna, to vpliva na povišanje stopenj umrljivosti za starosti $x \in (\bar{x} - \hat{\sigma}, \bar{x} + \hat{\sigma})$, stopnje umrljivosti za ostale starosti pa se znižajo. In obratno, kadar je vrednost parametra $\kappa_t^{(3)}$ pozitivna, to vpliva na znižanje stopenj umrljivosti za starosti $x \in (\bar{x} - \hat{\sigma}, \bar{x} + \hat{\sigma})$, stopnje umrljivosti za ostale starosti pa se zvišajo. Parameter γ_{t-x} prikazuje splošen efekt rojstne kohorte za osebe rojene leta $t - x$ ne glede na starost.

Tudi M7-model nima enolične parametrizacije, saj je le-ta invariantna glede na naslednje transformacije

$$\begin{aligned} \kappa_t^{(1)} &\rightarrow \kappa_t^{(1)} + c_1 + c_2(t - \bar{x}) + c_3((t - \bar{x})^2 + \hat{\sigma}^2) \\ \kappa_t^{(2)} &\rightarrow \kappa_t^{(2)} - c_2 - 2c_3(t - \bar{x}) \\ \kappa_t^{(3)} &\rightarrow \kappa_t^{(3)} + c_3 \\ \gamma_{t-x} &\rightarrow \gamma_{t-x} - c_1 - c_2(t - \bar{x}) - c_3(t - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (52)$$

Da bi zagotovili enoličnost transformacije, so Cairns et al. (2009, str. 10) predlagali naslednje pogoje

¹³ M7-model je, podobno kot velika večina ostalih stohastičnih modelov umrljivosti, dobil ime, ki je sestavljeno iz črke »M«, ki pomeni model (angl. *model*) in zaporedne številke.

$$\sum_{c=t-x} \gamma_{t-x} = 0, \quad \sum_{c=t-x} c\gamma_{t-x} = 0, \quad \sum_{c=t-x} c^2\gamma_{t-x} = 0 \quad (53)$$

Podobno kot CBD-model je tudi M7-model primeren za starosti, kjer so log-stopnje umrljivosti približno linearne.

5.10 Platov model

Plat (2009a, str. 395) je skušal kombinirati prednosti predhodnih modelov. Tako je predstavil model, ki je primeren za vse starosti in upošteva efekt rojstne kohorte

$$\ln(m_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(3)} + \max(0, x - \bar{x})\kappa_t^{(4)} + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (54)$$

Parameter $\beta_x^{(1)}$ podobno kot pri Lee-Carterjevem modelu skrbi za osnovno obliko krivulje umrljivosti. Parameter $\kappa_t^{(2)}$ predstavlja spremembo stopenj umrljivosti za vse starosti skozi čas, parameter $\kappa_t^{(3)}$ pa omogoča, da so te spremembe za različne starosti različne. Nadalje lahko pri nižjih starostih, to je do starosti 40 oziroma 50 let, opazimo, da je dinamika stopenj umrljivosti lahko v določenem času drugačna zaradi dejavnikov, kot so AIDS, droge, alkoholizem, nasilje in podobno. Tovrsten vpliv je zajet s parametrom $\kappa_t^{(4)}$. Parameter γ_{t-x} enako kot v ostalih modelih prikazuje efekt rojstne kohorte (Plat, 2009a, str. 395). V primeru, da nas zanima umrljivost samo za višje starosti (na primer, starosti nad 60 let), lahko faktor $\kappa_t^{(3)}$ izpustimo, nakar se model poenostavi (Plat, 2009a, str. 396)

$$\ln(m_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \kappa_t^{(2)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (55)$$

Tudi Platov model nima enolične parametrizacije, saj je invariantna glede na naslednji dve množici transformacij (Villegas et al., 2016, str. 10)

$$\begin{aligned} \beta_x^{(1)} &\rightarrow \beta_x^{(1)} + c_1 - c_2x + c_3x^2 & \kappa_t^{(3)} &\rightarrow \kappa_t^{(3)} + 2c_3t \\ \kappa_t^{(2)} &\rightarrow \kappa_t^{(2)} + c_2t + c_3(t^2 - 2\bar{x}t) & \kappa_t^{(4)} &\rightarrow \kappa_t^{(4)} \\ \gamma_{t-x} &\rightarrow \gamma_{t-x} - c_1 - c_2(t - x) - c_3(t - x)^2 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \kappa_t^{(2)} &\rightarrow \kappa_t^{(2)} - c_1 & \kappa_t^{(3)} &\rightarrow \kappa_t^{(3)} - c_2 \\ \kappa_t^{(4)} &\rightarrow \kappa_t^{(4)} - c_3 & \gamma_{t-x} &\rightarrow \gamma_{t-x} \\ \beta_x^{(1)} &\rightarrow \beta_x^{(1)} + c_1 + c_2(x - \bar{x}) + c_3 \max(0, (x - \bar{x})) \end{aligned} \quad (57)$$

kjer so $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da bi zagotovili enoličnost parametrizacije, so Villegas et al. (2016,

str. 10) predlagali naslednje pogoje

$$\begin{aligned} \sum_t \kappa_t^{(2)} &= 0, & \sum_t \kappa_t^{(3)} &= 0, & \sum_t \kappa_t^{(4)} &= 0, \\ \sum_{c=t-x} \gamma_{t-x} &= 0, & \sum_{c=t-x} c\gamma_{t-x} &= 0, & \sum_{c=t-x} c^2\gamma_{t-x} &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

6 KALIBRACIJA MODELOV

6.1 Lee-Carterjev model

Lee in Carter (1992, str. 661) sta ocene za parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ iskala s pomočjo metode najmanjših kvadratov, tj. poskušala sta minimizirati funkcijo

$$O_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}) = \sum_x \sum_t \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right)^2 \quad (59)$$

Parameter $\beta_x^{(1)}$ sta ocenila s pomočjo formule

$$\frac{\partial O_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \beta_x^{(1)}} = -2 \sum_x \sum_t \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \quad (60)$$

Ob upoštevanju pogojev (35) iz enačbe (60) sledi, da je ocena parametra $\beta_x^{(1)}$ enaka povprečju logaritmov centralnih stopenj umrljivosti

$$\hat{\beta}_x^{(1)} = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_x(t)) \quad (61)$$

Definirajmo sedaj matriko $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kot

$$Z := \ln(M_x(t)) - \hat{\beta}_x^{(1)} = \begin{pmatrix} \ln m_{x_1}(t_1) - \hat{\beta}_{x_1}^{(1)} & \dots & \ln m_{x_1}(t_n) - \hat{\beta}_{x_m}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln m_{x_m}(t_1) - \hat{\beta}_{x_1}^{(1)} & \dots & \ln m_{x_m}(t_n) - \hat{\beta}_{x_m}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (62)$$

Iščemo takšna vektorja $\hat{\beta}_x^{(2)}$ in $\hat{\kappa}_t^{(2)}$, za katera velja

$$Z \approx \hat{\beta}_x^{(2)} \left(\hat{\kappa}_t^{(2)} \right)^T \quad (63)$$

Lee in Carter (1992, str. 669) sta ocenila $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ z metodo najmanjših kvadratov, to je poiskala sta takšna $\hat{\beta}_x^{(2)}$ in $\hat{\kappa}_t^{(2)}$, za katera je vrednost funkcije

$$O_{LS}(\beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}) = \sum_x \sum_t (z_{x,t} - \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)})^2 \quad (64)$$

najmanjša. To sta storila tako, da sta poiskala singularni razcep (angl. *singular value decomposition*; kratica SVD) matrike Z , to je faktorizacija oblike

$$Z = U \Sigma V^T \quad (65)$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni¹⁴ matriki in je $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oblike

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

Vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$ imenujemo singularne vrednosti matrike Z . Stolpci matrike $U = [u_1 \dots u_m]$ so levi, stolpci matrike $V = [v_1 \dots v_n]$ pa desni singularni vektorji (Plestenjak, 2010, str. 2). Singularni razcep matrike Z lahko zapišemo tudi v obliki

$$Z = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_n u_n v_n^T \quad (67)$$

Lee in Carter (1992, str. 669) sta kot aproksimacijo uporabila samo prvi člen razcepa

$$Z \approx \sigma_1 u_1 v_1^T \quad (68)$$

kjer je σ_1 prva singularna vrednost ter u_1 in v_1 prvi levi in desni singularni vektor.

Za singularni razcep med drugim veljajo naslednje lastnosti (Plestenjak, 2010, str. 4):

- Če so $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ singularne vrednosti matrike A , potem so $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ lastne vrednosti¹⁵ matrike $A^T A$ in $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, 0, \dots, 0$ ($m - n$ ničel) lastne vrednosti matrike AA^T .
- Ortonormirani lastni vektorji matrike $A^T A$ so desni singularni vektorji $v_1, \dots, v_n$, ortonormirani lastni vektorji matrike AA^T pa levi singularni vektorji $u_1, \dots, u_m$.

¹⁴ Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonalna, če zanjo velja, da je $A^T A = AA^T = I$ oziroma $A^{-1} = A^T$ (Hoffman & Kunze, 1971, str. 162).

¹⁵ Lastna vrednost matrike A je skalar λ , za katerega velja: $Ax = \lambda x$. Pri tem je x neničelni vektor, ki mu pravimo lastni vektor (Hoffman & Kunze, 1971, str. 182).

Tako lahko aproksimacijo (68) zapišemo tudi kot

$$Z \approx \sqrt{\lambda_1} u_1 v_1^T \quad (69)$$

kjer je λ_1 največja lastna vrednost matrike ZZ^T ter u_1 pripadajoči levi lastni vektor matrike ZZ^T in v_1 pripadajoči desni lastni vektor matrike $Z^T Z$ (Girosi & King, 2007, str. 4).

Kot rešitev enačbe z metodo najmanjših kvadratov in ob upoštevanju pogojev (35) lahko $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ ocenimo kot

$$\hat{\beta}_x^{(2)} = \frac{v_1^T}{\sum_{i=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1i}} \quad (70)$$

$$\hat{\kappa}_t^{(2)} = \sqrt{\lambda_1} u_1 \sum_{i=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1i} \quad (71)$$

Iskanje ustreznih ocen parametrov z metodo singularnega razcepa ima pomanjkljivost, saj nam da enolično rešitev samo v primeru, da je $m \geq n$ in da je $\text{rang}^{16}(Z) = n$ (Plestenjak, 2010, str. 5).

Druga alternativna metoda za iskanje ocen za parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ s pomočjo metode najmanjših kvadratov je Newton-Raphsonova metoda, to je numerična metoda, pri kateri s pomočjo iteracije iščemo ničlo funkcije f . Pri tej metodi najprej predpostavimo, da je iskana ničla enaka x_0 , nato pa s postopkom iteracije ob upoštevanju formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (72)$$

kjer je f' prvi odvod funkcije f , poskušamo najti ustrežnejšo rešitev. Postopek izvajamo tako dolgo, dokler razlika

$$|x_{n+1} - x_n| \quad (73)$$

ni zadovoljivo majhna.

Lee in Carter (1992, str. 661) sta ocene za parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ iskala s pomočjo

¹⁶ Rang matrike A , ki ga označimo z $\text{rang}(A)$, je število linearno neodvisnih vrstic oziroma stolpcev (Hoffman & Kunze, 1971, str. 114). Linearna neodvisnost vrstic ali stolpcev pomeni, da se posamezne vrstice ali stolpci ne morejo izraziti z drugimi (Hoffman & Kunze, 1971, str. 40).

metode najmanjših kvadratov, tako da sta skušala minimizirati izraz (59). Ta problem je ekvivalenten iskanju rešitve sistema naslednjih enačb

$$\frac{\partial O_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \beta_x^{(1)}} = -2 \sum_x \sum_t \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial O_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \beta_x^{(2)}} = -2 \sum_x \sum_t \kappa_t^{(2)} \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \quad (75)$$

$$\frac{\partial O_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \kappa_t^{(2)}} = -2 \sum_x \sum_t \beta_x^{(2)} \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \quad (76)$$

ki ga lahko poenostavimo

$$\sum_t \left(\ln(m_x(t)) - \beta_x^{(1)} \right) = 0 \text{ za } \forall x \quad (77)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \text{ za } \forall t \quad (78)$$

$$\sum_x \beta_x^{(2)} \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right) = 0 \text{ za } \forall t \quad (79)$$

in rešimo z uporabo Newton-Raphsonove metode.

Omeniti je še treba, da Lee-Carterjev model temelji na logaritmičnih centralnih stopenju umrljivosti, zato ima razmerje med dejanskimi in ocenjenimi stopnjami umrljivosti enako težo v singularnem razcepu ne glede na to, ali je število umrlih pri določeni starosti veliko ali ne (Booth, Maindonal & Smith, 2002, str. 326). Tako sta Lee in Carter (1992, str. 661) predlagala, da z uporabo ocen $\hat{\beta}_x^{(1)}$ in $\hat{\beta}_x^{(2)}$ ponovno ocenimo $\kappa_t^{(2)}$, ki bi bolje reproduciral letno število umrlih $D(t)$. To pomeni, da za vsak t iščemo tak $\kappa_t^{(2)}$, za katerega velja

$$D(t) = \sum_{x=x_1}^{x_m} e^{(\hat{\beta}_x^{(1)} + \hat{\beta}_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) N_x(t)} \quad (80)$$

kjer je $N_x(t)$ število x let starih oseb v populaciji v času t . Da bi se izognil drugostopenjskem ocenjevanju, je Wilmoth (1993, str. 2–3) razvil metodo, ki temelji na uteženi metodi najmanjših kvadratov, to je minimiziranju vrednosti funkcije

$$W_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}) = \sum_x \sum_t w_x(t) \left(\ln(m_x(t)) - (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) \right)^2 \quad (81)$$

pri čemer je za uteži $w_x(t)$ uporabil število umrlih $d_x(t)$. Ocene za parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ je dobil tako, da je prve odvode funkcije $W_{LS}(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})$ enačil z 0. Tako je dobil naslednji sistem enačb (Wilmoth, 1993, str. 3)

$$\beta_x^{(1)} = \frac{\sum_t w_x(t) (\ln(m_x(t)) - \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)})}{\sum_t w_x(t)} \quad (82)$$

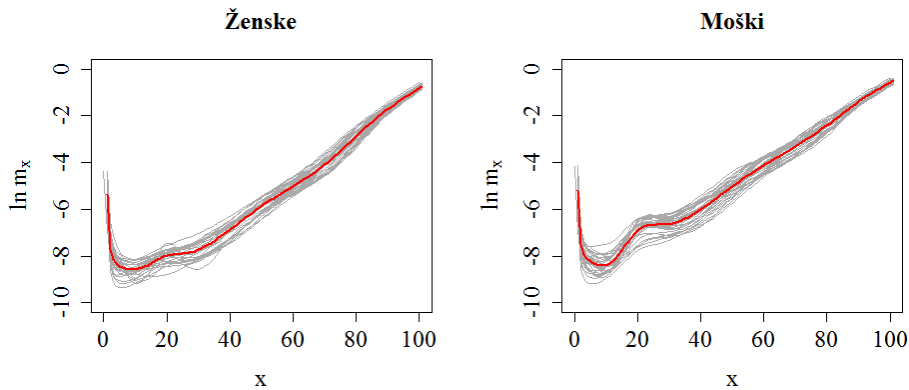
$$\beta_x^{(2)} = \frac{\sum_t w_x(t) \kappa_t^{(2)} (\ln(m_x(t)) - \beta_x^{(1)})}{\sum_t w_x(t) (\kappa_t^{(2)})^2} \quad (83)$$

$$\kappa_t^{(2)} = \frac{\sum_x w_x(t) \beta_x^{(2)} (\ln(m_x(t)) - \beta_x^{(1)})}{\sum_x w_x(t) (\beta_x^{(2)})^2} \quad (84)$$

ki ga je rešil s pomočjo numerične metode.

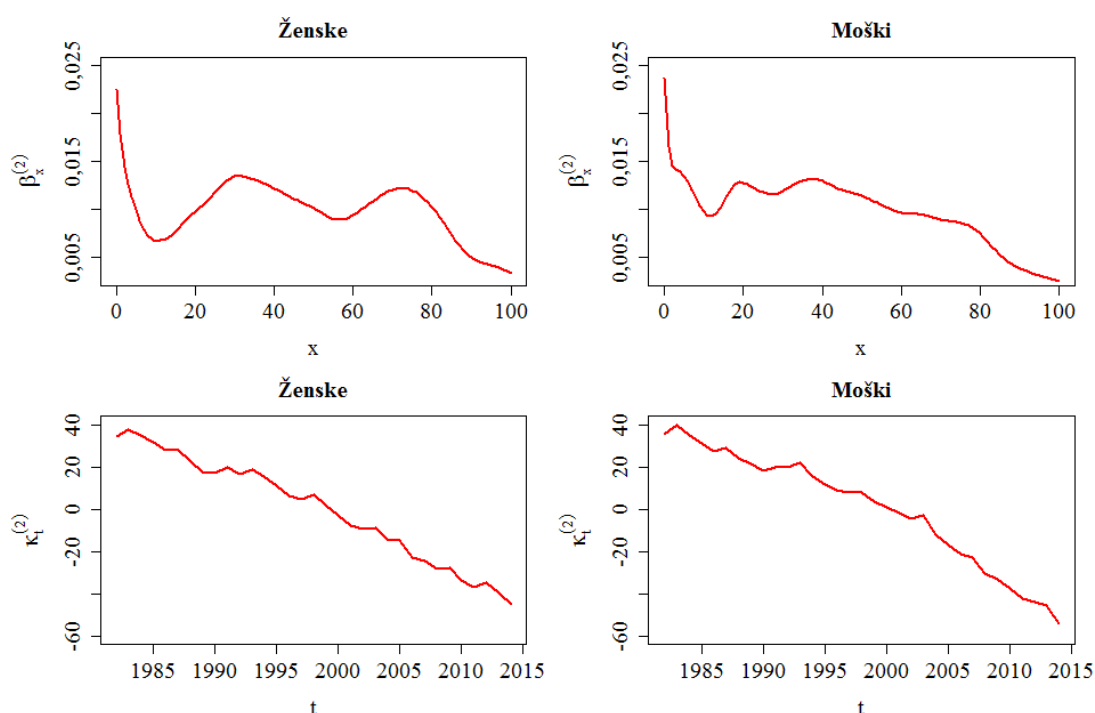
Za določitev ocen parametrov $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ sem uporabila funkcijo `lca` v okviru paketa `demography` (Hyndman et al., 2015, str. 21–23) v programskem jeziku R, ki temelji na originalni metodi, ki sta jo predstavila Lee in Carter (1992, str. 661). Kalibracijo modela sem najprej izvedla na z zlepkami glajenih krivuljah umrljivosti. Na Sliki 12 so prikazani logaritmi centralnih stopenj umrljivosti (krivulje sive barve) in ocena za parameter $\beta_x^{(1)}$ (krivulja rdeče barve), ki je bil ocenjen kot povprečje logaritmov centralnih stopenj umrljivosti.

Slika 12: Ocena parametra $\beta_x^{(1)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela



Slika 13 prikazuje oceno parametrov $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, kjer je razvidno padanje vrednosti $\kappa_t^{(2)}$ s časom, kar sovpada z zniževanjem stopenj umrljivosti. Parameter $\beta_x^{(2)}$ nam pove, kako hitro se stopnje umrljivosti pri posameznih starostih s časom znižujejo. Kot vidimo iz Slike 13, je najvišja vrednost parametra $\beta_x^{(2)}$ pri starostih od 0 do 10 let, kar pomeni, da so se stopnje umrljivosti v tem starostnem razponu v letih 1982–2014 najbolj znižale. V primeru žensk je opaziti tudi dva izrazita dviga vrednosti parametra $\beta_x^{(2)}$, in sicer med starostma 20 in 40 let ter med starostma 60 in 80 let. Razlog za prvi dvig je verjetno zmanjšanje umrljivosti v rodni dobi, za drugega pa izboljšanje zdravstvenih storitev.

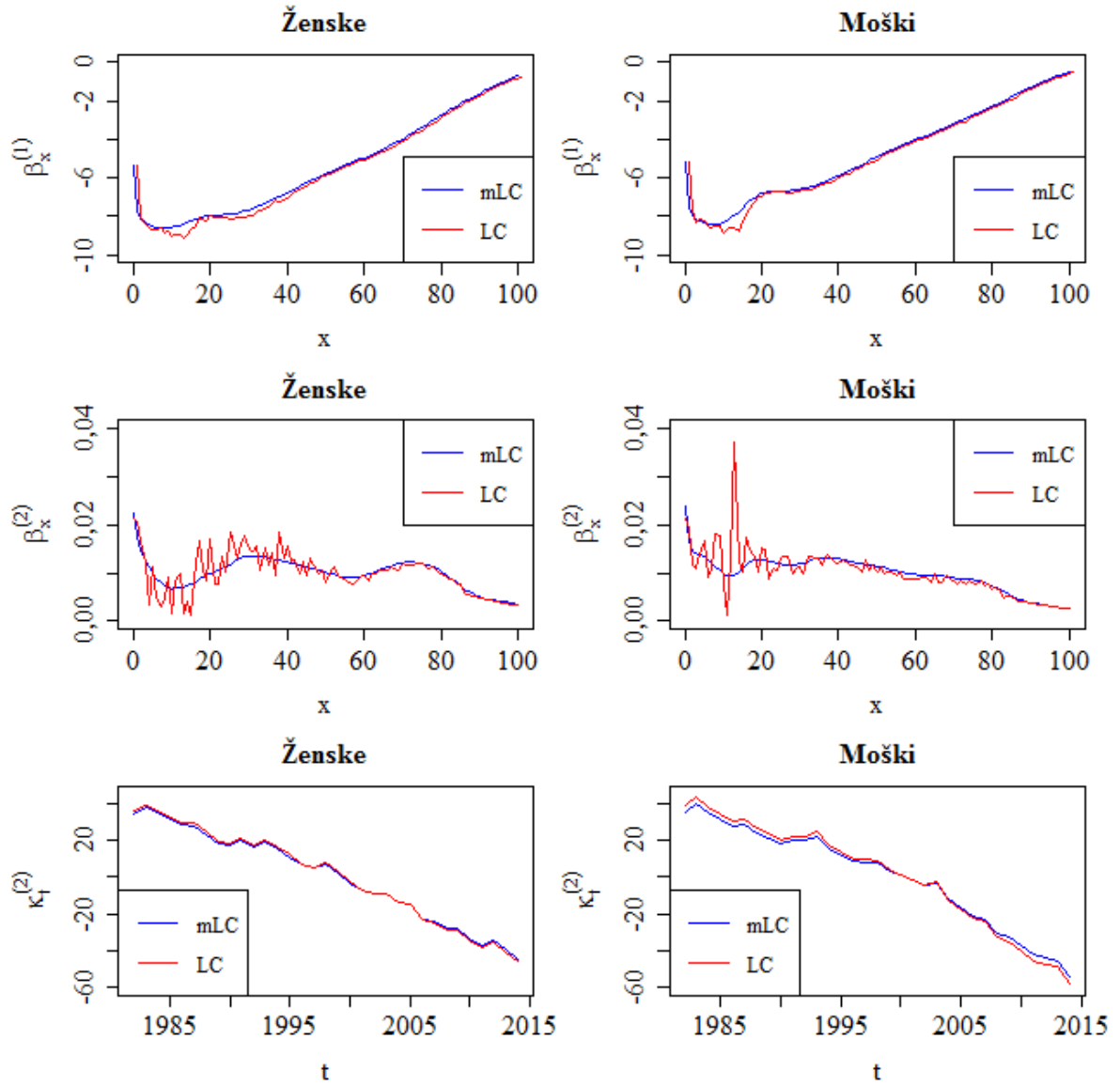
Slika 13: Oceni parametrov $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela



Kalibracijo modela sem izvedla tudi na krivuljah umrljivosti brez glajenja z zlepkami in upoštevajoč preostali postopek izboljšave vhodnih podatkov. V nadaljevanju sledi grafična primerjava z rezultati kalibracije na krivuljah umrljivosti, glajenih z zlepkami.

Kot je razvidno iz Slike 14, so največje razlike v vrednosti ocen parametrov $\beta_x^{(1)}$ in $\beta_x^{(2)}$ predvsem pri nižjih starostih, kjer je umrljivost zelo volatilna, saj sta izpostavljenost in število smrti majhna. Splošen trend spreminjanja umrljivosti s časom ne glede na starost je v obeh primerih podoben.

Slika 14: Primerjava ocen parametrov Lee-Carterjevega modela, dobljenih s kalibracijo na krivuljah umrljivosti brez glajenja z zlepki (LC), z ocenami parametrov, dobljenimi s kalibracijo na krivuljah umrljivosti, glajenimi z zlepki (mLC)



6.2 Poisson Lee-Carterjev model

Prednost dodatnih predpostavk Poisson Lee-Carterjevega modela je v kalibraciji, saj lahko parametre $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ ocenimo z metodo največjega verjetja. Upoštevajoč (36) dobimo, da je logaritemska funkcija verjetja enaka

$$\begin{aligned} & \ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}) \\ &= \sum_x \sum_t \left(d_x(t) (\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}} \right) + A \end{aligned} \quad (85)$$

Iščemo takšne vrednosti parametrov $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, za katere bo vrednost $\ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})$ največja. Le-te dobimo tako, da poiščemo rešitev naslednjega sistema enačb

$$\frac{\partial \ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \beta_x^{(1)}} = \sum_x \sum_t (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \beta_x^{(2)}} = \sum_x \sum_t \kappa_t^{(2)} (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \quad (87)$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)})}{\partial \kappa_t^{(2)}} = \sum_x \sum_t \beta_x^{(2)} (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \quad (88)$$

ki ga lahko poenostavimo

$$\sum_t (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \text{ za } \forall x \quad (89)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \text{ za } \forall x \quad (90)$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} \beta_x^{(2)} (d_x(t) - E_x^C(t) e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}}) = 0 \text{ za } \forall x \quad (91)$$

Brouhns et al. (2002, str. 379) so za reševanje zgornjega sistema enačb predlagali naslednjo iterativno metodo v štirih korakih:

- 1. korak:

$$\hat{d}_x(t, i) = E_x^C(t) e^{\hat{\beta}_x^{(1)}(i) + \hat{\beta}_x^{(2)}(i) \hat{\kappa}_t^{(2)}(i)} \quad (92)$$

- 2. korak:

$$\hat{\beta}_x^{(1)}(i+1) = \hat{\beta}_x^{(1)}(i) + \frac{\sum_t (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i))}{\sum_t \hat{d}_x(t, i)} \quad (93)$$

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(i+1) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i), \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+1) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i)$$

- 3. korak:

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2) &= \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+1) + \frac{\sum_x (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i+1)) \hat{\beta}_x^{(2)}(i+1)}{\sum_x \hat{d}_x(t, i) (\hat{\beta}_x^{(2)}(i+1))^2} \\ \hat{\beta}_x^{(1)}(i+2) &= \hat{\beta}_x^{(1)}(i+1), \hat{\beta}_x^{(2)}(i+2) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i+1)\end{aligned}\quad (94)$$

- 4. korak:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_x^{(2)}(i+3) &= \hat{\beta}_x^{(2)}(i+2) + \frac{\sum_t (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i+2)) \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2)}{\sum_t \hat{d}_x(t, i) (\hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2))^2} \\ \hat{\beta}_x^{(1)}(i+3) &= \hat{\beta}_x^{(1)}(i+2), \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+3) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2)\end{aligned}\quad (95)$$

Pri tem so predpostavili, da je začetna vrednost parametrov enaka

$$\hat{\beta}_x^{(1)}(0) = 0, \hat{\beta}_x^{(2)}(0) = 1, \hat{\kappa}_t^{(2)}(0) = 0 \quad (96)$$

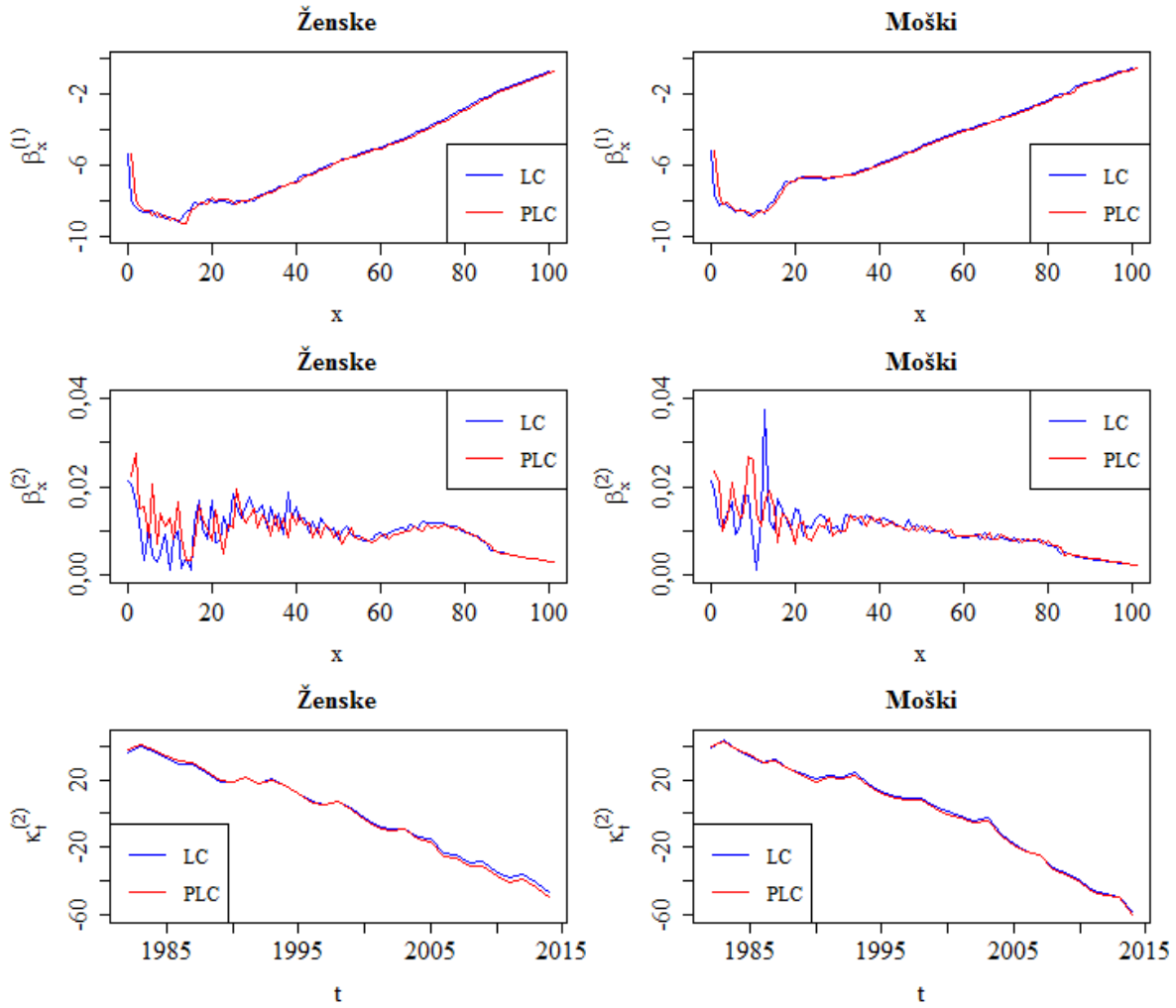
Ocene parametrov $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ sem izračunala s pomočjo programskega jezika R, in sicer z uporabo funkcije `fit`, definirane v okviru paketa `StMoMo`¹⁷ (Villegas et al., 2016, str. 16). Le-to sem uporabila tudi za kalibracijo vseh stohastičnih modelov umrljivosti, ki jih bom predstavila v nadaljevanju. V procesu kalibracije sem upoštevala pogoja (35).

Na Sliki 15 je grafična primerjava ocen parametrov, dobljenih s kalibracijo Lee-Carterjevega modela na krivuljah umrljivosti brez glajenja z zleпки (krivulja modre barve), in ocen parametrov, dobljenih s kalibracijo Poisson Lee-Carterjevega modela (krivulja rdeče barve).

Največje razlike so v oceni parametra $\beta_x^{(2)}$ za nižje starosti (0–10 let), kjer so vrednosti parametra $\beta_x^{(2)}$, dobljene s kalibracijo Poisson Lee-Carterjevega modela, višje v primerjavi z vrednostmi parametra $\beta_x^{(2)}$, dobljenih s kalibracijo Lee-Carterjevega modela na krivuljah umrljivosti brez glajenja z zleпки. Pri višjih starostih se neenačaj obrne. Vrednosti parametrov $\beta_x^{(2)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, dobljenih z danima metodama, so podobne.

¹⁷ Funkcije za kalibracijo modelov, definirane v okviru paketa `StMoMo`, temeljijo na ugotovitvah Currie (2016), da lahko večino stohastičnih modelov umrljivosti predstavimo z generaliziranim linearnim ali nelinearnim modelom.

Slika 15: Primerjava ocen parametrov Lee-Carterjevega modela (LC) in Poisson Lee-Carterjevega modela (PLC)



6.3 CBD-model

Cairns et al. (2006, str. 691) so oceni parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ določili s pomočjo metode najmanjših kvadratov, lahko pa jih poiščemo z metodo največjega verjetja. Logaritemska funkcija verjetja je ob predpostavki (36) enaka (37). Ob upoštevanju predpostavke, da je jakost umrljivosti $\mu_{x+h}(t)$ konstantna za $0 \leq h \leq 1$, torej enaka $\mu_x(t)$ med starostma x in $x + 1$ let, iz (10) sledi

$$\mu_x(t) = -\ln(1 - q_x(t)) = \ln\left(1 + \frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = \text{logit}(q_x(t)) \quad (97)$$

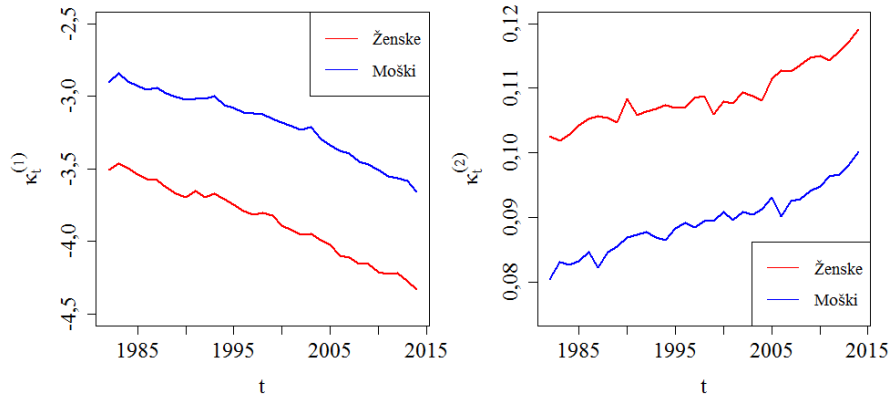
Če zanemarimo konstanto A v enačbi (37) in upoštevamo enačbo (97), dobimo, da je logaritemska funkcija verjetja enaka

$$\ln L(\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}) = \sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln(\kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}) - E_x^C(t)(\kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}) \right) \quad (98)$$

Ocene za parametre poiščemo tako, da poiščemo vrednosti $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, pri katerih je vrednost logaritemske funkcije verjetja $\ln L(\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)})$ največja, to je poiščemo ničle parcialnih odvodov prvega reda.

Ker je CBD-model primernejši za višje starosti, sem izvedla kalibracijo na podatkih za starosti od 40 do 100 let. Od tod sledi, da je $\bar{x} = 70$. Rezultati kalibracije so prikazani na Sliki 16, iz katere je razvidno zmanjševanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(1)}$ s časom, kar pomeni, da se umrljivost v splošnem zmanjšuje. Opaziti je naraščanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, kar pomeni, da se logit-začetne stopnje umrljivosti pri starostih nižjih od starosti $\bar{x}$ hitreje zmanjšujejo, saj člen $(x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}$ zaradi naraščanja $\kappa_t^{(2)}$ vse bolj zmanjšuje logit-začetne stopnje umrljivosti. Pri starostih višjih od $\bar{x}$ je učinek obraten.

Slika 16: Ocene parametrov CBD-modela



6.4 Renshaw-Habermanov model

Originalna metoda za kalibracijo Renshaw-Habermanov modela je temeljila na predpostavki, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu (glej (36)) in je bila podobna iterativni metodi, ki so jo Brouhns et al. (2002, str. 379) uporabili za kalibracijo Poisson Lee-Carterjevega modela. Renshaw in Haberman (2006, str. 560–561) sta ocenila parameter $\beta_x^{(1)}$ kot (61), nato pa sta izvedla iterativni postopek v petih korakih:

- 1. korak:

$$\hat{d}_x(t, i) = E_x^C(t) e^{\hat{\beta}_x^{(1)}(i) + \hat{\beta}_x^{(2)}(i) \hat{\kappa}_t^{(2)}(i) + \hat{\beta}_x^{(0)} \hat{\gamma}_{t-x}} \quad (99)$$

- 2. korak:

$$\hat{\gamma}_{x-t}(i+1) = \hat{\gamma}_{x-t}(i) + \frac{\sum_{t-x} w_x(t) (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i)) \hat{\beta}_x^{(0)}(i+1)}{\sum_{t-x} w_x(t) \hat{d}_x(t, i) (\hat{\beta}_x^{(0)}(i+1))^2} \quad (100)$$

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(i+1) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i), \hat{\beta}_x^{(0)}(i+1) = \hat{\beta}_x^{(0)}(i), \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+1) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i)$$

- 3. korak:

$$\hat{\beta}_x^{(0)}(i+2) = \hat{\beta}_x^{(0)}(i+1) + \frac{\sum_t w_x(t) (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i+1)) \hat{\gamma}_{x-t}(i+2)}{\sum_t w_x(t) \hat{d}_x(t, i+1) (\hat{\gamma}_{x-t}(i+2))^2} \quad (101)$$

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(i+2) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i+1), \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+1), \hat{\gamma}_{x-t}(i+2) = \hat{\gamma}_{x-t}(i+1)$$

- 4. korak:

$$\hat{\kappa}_t^{(2)}(i+3) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+2) + \frac{\sum_x w_x(t) (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i+2)) \hat{\beta}_x^{(2)}(i+3)}{\sum_x w_x(t) \hat{d}_x(t, i+2) (\hat{\beta}_x^{(2)}(i+3))^2} \quad (102)$$

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(i+3) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i+2), \hat{\beta}_x^{(0)}(i+3) = \hat{\beta}_x^{(0)}(i+2), \hat{\gamma}_{x-t}(i+3) = \hat{\gamma}_{x-t}(i+2)$$

- 5. korak:

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(i+4) = \hat{\beta}_x^{(2)}(i+3) + \frac{\sum_t w_x(t) (d_x(t) - \hat{d}_x(t, i+3)) \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+4)}{\sum_x w_x(t) \hat{d}_x(t, i+3) (\hat{\kappa}_t^{(2)}(i+4))^2} \quad (103)$$

$$\hat{\kappa}_t^{(2)}(i+4) = \hat{\kappa}_t^{(2)}(i+3), \hat{\beta}_x^{(0)}(i+4) = \hat{\beta}_x^{(0)}(i+3), \hat{\gamma}_{x-t}(i+4) = \hat{\gamma}_{x-t}(i+3)$$

pri čemer so uteži $w_x(t)$ definirane kot (Renshaw & Haberman, 2006, str. 559)

$$w_x(t) = \begin{cases} 1; & E_x^C(t) > 0 \\ 0; & E_x^C(t) = 0 \end{cases} \quad (104)$$

Pri tem sta predpostavila, da je začetna vrednost parametrov enaka (Renshaw & Haberman, 2006, str. 562)

$$\hat{\beta}_x^{(2)}(0) = \hat{\beta}_x^{(0)}(0) = 1, \hat{\kappa}_t^{(2)}(0) = 0 \quad (105)$$

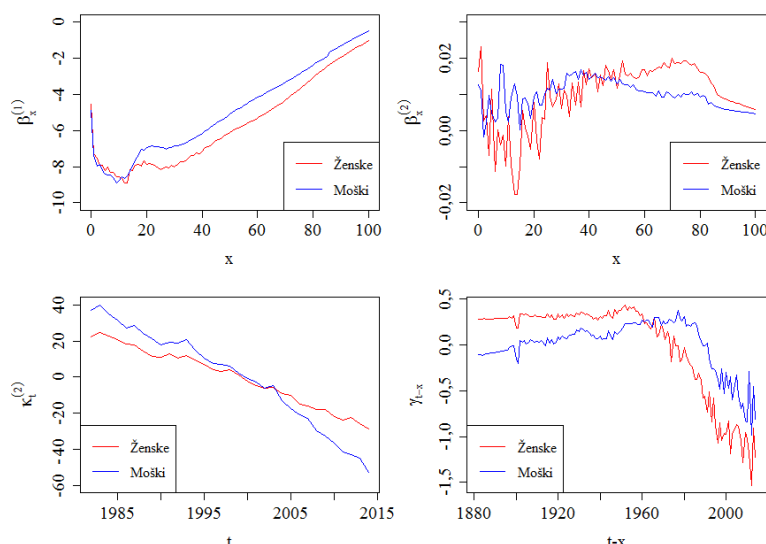
Cairns et al. (2009, str. 8) so opazili, da postopek kalibracije Renshaw-Habermanovega modela zelo počasi konvergira k rešitvi. Prav tako sta Haberman in Renshaw (2011, str.

52) ugotovila, da je primernejša za napovedovanje umrljivosti poenostavljena različica originalnega Renshaw-Habermanovega modela, in sicer

$$\ln(\mu_x(t)) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x} + \varepsilon_{x,t} \quad (106)$$

Tako sem se odločila, da bom uporabila model (106), ki ga bom v nadaljevanju imenovala Renshaw-Habermanov model. Na Sliki 17 so prikazani rezultati kalibracije ob upoštevanju pogojev (45). Grafa, ki prikazujeta ocene parametrov $\beta_x^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, sta podobna grafom pripadajočih ocen parametrov, dobljenih s kalibracijo Poisson Lee-Carterjevega modela. Ocene parametra $\beta_x^{(2)}$ so videti bistveno drugačne, saj je vrednost parametra $\beta_x^{(2)}$ nižja v primerjavi z oceno, dobljeno s kalibracijo Poisson Lee-Carterjevega modela. Razlog za to je v tem, da se del zmanjševanja umrljivosti odraža s parametrom γ_{t-x} .

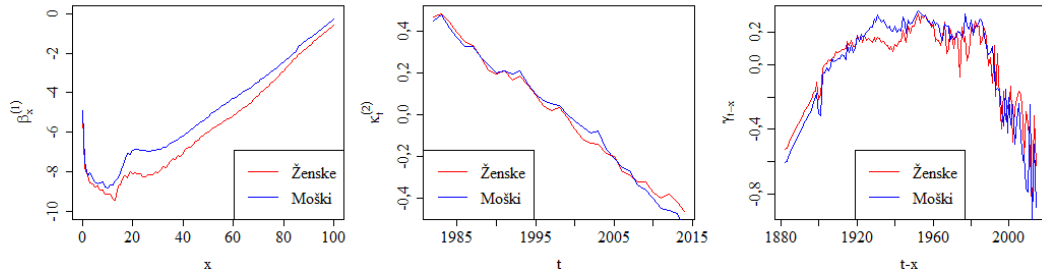
Slika 17: Ocene parametrov Renshaw-Habermanovega modela



6.5 APC-model

Ker je APC-model poenostavitev Renshaw-Habermanovega modela, je postopek kalibracije podoben. Rezultati kalibracije ob upoštevanju pogojev (49) so prikazani na Sliki 18, iz katere je razvidno, da so vrednosti parametra $\beta_x^{(1)}$ podobne kot pri Renshaw-Habermanovem modelu. Vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ sčasoma padajo, kar je skladno s splošnim trendom zmanjševanja umrljivosti. Tudi vrednosti parametra γ_{t-x} so pričakovane, saj so le-te pozitivne za starejše rojstne kohorte in negativne za mlajše. To pomeni, da se umrljivost še dodatno zmanjšuje za mlajše rojstne kohorte, za starejše pa parameter γ_{t-x} delno zmanjšuje efekt parametra $\kappa_t^{(2)}$, tako da je zmanjševanje umrljivosti za le-te rojstne kohorte počasnejše.

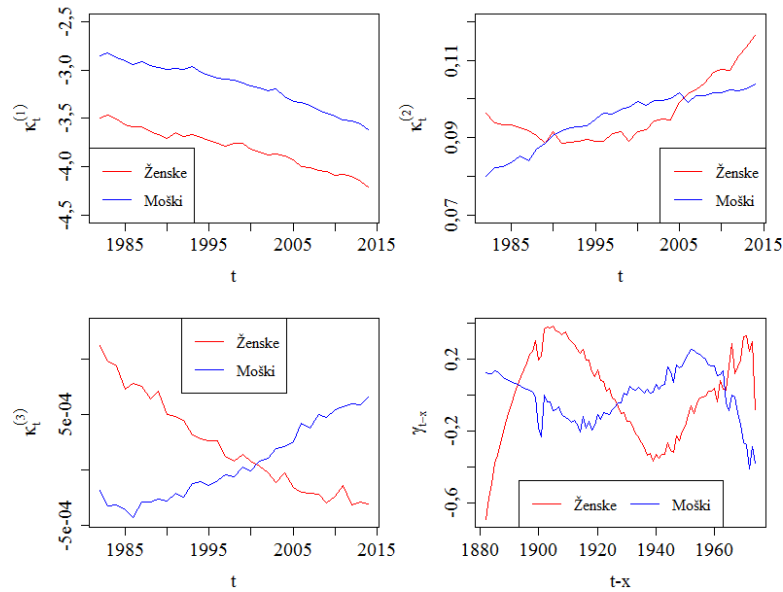
Slika 18: Ocena parametrov APC-modela



6.6 M7-model

Podobno kot CBD-model je tudi M7-model primernejši za starosti, za katere so log-stopnje umrljivosti približno linearne, zato sem se pri kalibraciji omejila na starosti od vključno 40 do 100 let. Tako je $\bar{x} = 70$ in $\hat{\sigma} = 17,6$. Pri kalibraciji sem upoštevala pogoje (53). Sledi grafični prikaz rezultatov (Slika 19).

Slika 19: Ocene parametrov M7-modela



Kot je razvidno iz Slike 19, se vrednosti parametra $\kappa_t^{(1)}$ sčasoma zmanjšujejo, kar je posledica splošnega trenda zmanjševanja umrljivosti s časom. Podobno kot v primeru CBD-modela je opazno naraščanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, ki pa v primeru M7-modela ni tako izrazito. To pomeni, da se stopnje umrljivosti pri starostih, nižjih od starosti $\bar{x} = 70$, zmanjšujejo hitreje, pri starostih, višjih od $\bar{x}$, pa počasneje. Vrednosti parametra $\kappa_t^{(3)}$ za moške naraščajo in dosežejo pozitivne vrednosti, medtem ko za ženske padajo in postanejo negativne. Parameter $\kappa_t^{(3)}$ ima največji vpliv na starosti, ki so najbolj oddaljene od starosti $\bar{x} - \hat{\sigma} = 52,4$ in $\bar{x} + \hat{\sigma} = 87,6$ let. Ker vrednost parametra $\kappa_t^{(3)}$ v primeru žensk postane

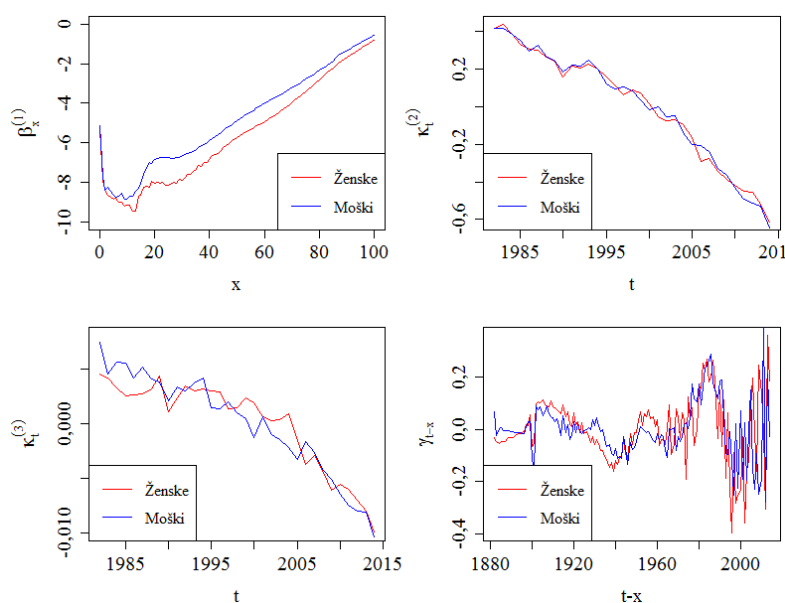
negativna, to vpliva na povišanje stopenj umrljivosti za starosti med 52,4 in 87,6 let, stopnje umrljivosti za ostale starosti pa se znižajo. V primeru moških so vrednosti parametra $\kappa_t^{(3)}$ na koncu obdobja za kalibracijo pozitivne, kar vpliva na znižanje stopenj umrljivosti za starosti med 52,4 in 87,6 let, medtem ko se stopnje umrljivosti za ostale starosti zvišajo. Tudi vrednosti parametra γ_{t-x} so za ženske ravno nasprotno kakor za moške. To sicer ni pričakovano, tako da domnevam, da vrednosti parametra γ_{t-x} v veliki meri odražajo tudi efekt starosti, ki ga model ni uspel opisati z ostalimi parametri.

6.7 Platov model

Plat (2009a, str. 70) je predpostavil, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu (glej (36)) ter ocene parametrov poiskal z metodo največjega verjetja. Kalibracijo je izvedel v programskem jeziku R, tako da je uporabil obstoječ paket Lifemetrics.

V magistrskem delu se bom omejila na poenostavljeno verzijo Platovega modela (55), ki ga bom v nadaljevanju imenovala Platov model. Rezultati kalibracije ob upoštevanju pogojev (58) so predstavljeni na Sliki 20.

Slika 20: Ocene parametrov Platovega modela



Vrednosti parametra $\beta_x^{(1)}$ so podobne kot pri predhodnih modelih. Tudi padanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ s časom je skladno s splošnim trendom zmanjševanja umrljivosti. Tretji člen Platovega modela je enak kot pri CBD-modelu, vendar v nasprotju s CBD-modelom vrednost le-tega pada ter postane negativna, njegove vrednosti pa so bistveno manjše, zaradi česar je njegov vpliv majhen. Vrednosti parametra γ_{t-x} so za starejše rojstne kohorte blizu 0, medtem ko za osebe, rojene med leti 1970 in 1990, narastejo, nato pa

padejo pod 0. Domnevam, da ponovno parameter γ_{t-x} v veliki meri odraža efekt starosti, ki ga model ni uspel opisati z ostalimi parametri.

7 NAPOVEDOVANJE UMRLJIVOSTI

Vrednost stohastičnih komponent modelov umrljivosti, to je $\kappa_t^{(i)}$ in γ_{t-x} , običajno napovedujemo z uporabo tako imenovanih avtoregresijskih integriranih modelov drsečih povprečij (angl. *autoregressive integrated moving average model*; v nadaljevanju ARIMA-model). V nadaljevanju bom na kratko predstavila, kaj so to ARIMA-modeli in katere ARIMA-modele so izbrali avtorji posameznih modelov. Nato bom izvedla projekcije vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ in γ_{t-x} z uporabo izbranih ARIMA-modelov.

Pomembno je, da posamezni model ovrednotimo na podlagi negotovosti projekcij stopenj umrljivosti pri različnih starostih. Le-ta mora biti konsistentna z variabilnostjo zgodovinskih podatkov pri danih starostih (Cairns et al., 2011, str. 356).

7.1 ARIMA-modeli

ARIMA-modeli so modeli za napovedovanje časovnih vrst¹⁸. Pri tem mora biti časovna vrsta stacionarna (angl. *stationary*), to je ne sme vsebovati trenda. To dosežemo z diferenciranjem, to je z razbijanjem časovne vrste na manjše intervale, in po potrebi z dodatnimi transformacijami. Za $ARIMA(p, d, q)$ model velja (Nau, 2016):

- Trenutno vrednost časovne vrste x_t lahko izračunamo na podlagi preteklih p vrednosti, to je

$$x_t = c + \theta_1 x_{t-1} + \dots + \theta_p x_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (107)$$

kjer so $c, \theta_1, \dots, \theta_p$ konstante in $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, ki predstavljajo napako modela. Formula (107) predstavlja tako imenovani avtoregresijski model AR(p).

- Potrebni je d razlik pri pretvorbi časovne vrste, da le-ta postane stacionarna. d -ta razlika se izračuna takole

$$\nabla^d x_t = \nabla^{d-1} x_t - \nabla^{d-1} x_{t-1} \quad (108)$$

- Trenutno napako v modelu ε_t lahko pojasnimo na podlagi preteklih q vrednosti napak. To je značilnost tudi modela drsečega povprečja $MA(q)$, ki je definiran kot

¹⁸ Časovne vrste so časovno urejeni nizi podatkov, izmerjenih v različnih časovnih točkah, navadno določenih z intervali (Time Series Analysis, b.l.).

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi_q \varepsilon_{t-q} \quad (109)$$

kjer so μ matematično upanje časovne vrste, $c, \varphi_1, \dots, \varphi_q$ konstante in $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ neodvisne slučajne spremenljivke, ki predstavljajo beli šum.

Upoštevajoč vse zgornje karakteristike lahko $ARIMA(p, d, q)$ model zapišemo v obliki (Ahčan et al., 2012, str. 18)

$$\nabla^d x_t = \theta_0 + \theta_1 \nabla^d x_{t-1} + \dots + \theta_p \nabla^d x_{t-p} + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi_q \varepsilon_{t-q} \quad (110)$$

kjer so $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p, \varphi_1, \dots, \varphi_q$ konstante in $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ neodvisne slučajne spremenljivke.

7.2 Lee-Carterjev model

Za napovedovanje stopenj umrljivosti sta Lee in Carter (1992, str. 669) privzela, da se $\beta_x^{(2)}$ s časom ne spreminja, za napovedovanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ pa sta uporabila $ARIMA(0, 1, 0)$ model¹⁹

$$\kappa_t^{(2)} = \kappa_{t-1}^{(2)} + \theta + \varepsilon_t \quad (111)$$

kjer je θ parameter zamika in $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ neodvisne slučajne spremenljivke z isto varianco.

Cenilka metode največjega verjetja za parameter θ je enaka (Giroi & King, 2007, str. 5)

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\kappa}_{t_n}^{(2)} - \hat{\kappa}_{t_1}^{(2)}}{t_n - t_1} \quad (112)$$

to je povprečni letni spremembi vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, cenilki za σ_ε in $Var(\theta)$ pa sta enaki

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_1}^{t_n-t_1} (\hat{\kappa}_{t+1}^{(2)} - \hat{\kappa}_t^{(2)} - \hat{\theta})^2 \quad (113)$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{t_n - t_1} \quad (114)$$

¹⁹ $ARIMA(0,1,0)$ modelu pravimo tudi slučajni sprehod z zamikom.

Formula (111) nam omogoča, da vrednost $\kappa_{t_n}^{(2)}$ dobimo s pomočjo vrednosti $\kappa_{t_{n-1}}^{(2)}$. Da dobimo vrednost $\kappa_{t_n}^{(2)}$ s pomočjo vrednosti $\kappa_{t_{n-2}}^{(2)}$, pa uporabimo formulo

$$\begin{aligned}\kappa_{t_n}^{(2)} &= \kappa_{t_{n-1}}^{(2)} + \hat{\theta} + \varepsilon_{t_n} = \left(\kappa_{t_{n-2}}^{(2)} + \hat{\theta} + \varepsilon_{t_{n-1}} \right) + \hat{\theta} + \varepsilon_{t_n} = \\ &= \kappa_{t_{n-2}}^{(2)} + 2\hat{\theta} + (\varepsilon_{t_{n-1}} + \varepsilon_{t_n})\end{aligned}\quad (115)$$

Če nadaljujemo z zgornjim postopkom, dobimo

$$\kappa_{t_n}^{(2)} = \kappa_{t_1}^{(2)} + (t_n - t_1)\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{t_n - t_1 - 1} \varepsilon_{t_1 + i} \quad (116)$$

Tako lahko za napovedovanje vrednosti $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ v času $t_n + (\Delta t)$ uporabimo enačbo (Giroi & King, 2007, str. 5)

$$\hat{\kappa}_{t_n + (\Delta t)}^{(2)} = \hat{\kappa}_{t_n}^{(2)} + (\Delta t)\hat{\theta} + \sum_{i=0}^{(\Delta t)} \varepsilon_{t_n + i} \quad (117)$$

Od tod lahko izračunamo napovedane centralne stopnje umrljivosti kot

$$\ln \left(\dot{m}_x(t_n + (\Delta t)) \right) = \hat{\beta}_x^{(1)} + \hat{\beta}_x^{(2)} \hat{\kappa}_{t_n + (\Delta t)}^{(2)} = \hat{\beta}_x^{(1)} + \hat{\beta}_x^{(2)} \cdot (\hat{\kappa}_{t_n}^{(2)} + (\Delta t)\hat{\theta}) \quad (118)$$

Ker so $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ in neodvisne, po centralnem limitnem izreku²⁰ velja, da je

$$\sum_{i=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_{t_n + i} \sim N(0, (\Delta t)\sigma_\varepsilon^2) \quad (119)$$

Od tod sledi aproksimacija (Giroi & King, 2007, str. 5)

$$\hat{\kappa}_{t_n + (\Delta t)}^{(2)} \approx \hat{\kappa}_{t_n}^{(2)} + (\Delta t)\hat{\theta} + \sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_t \quad (120)$$

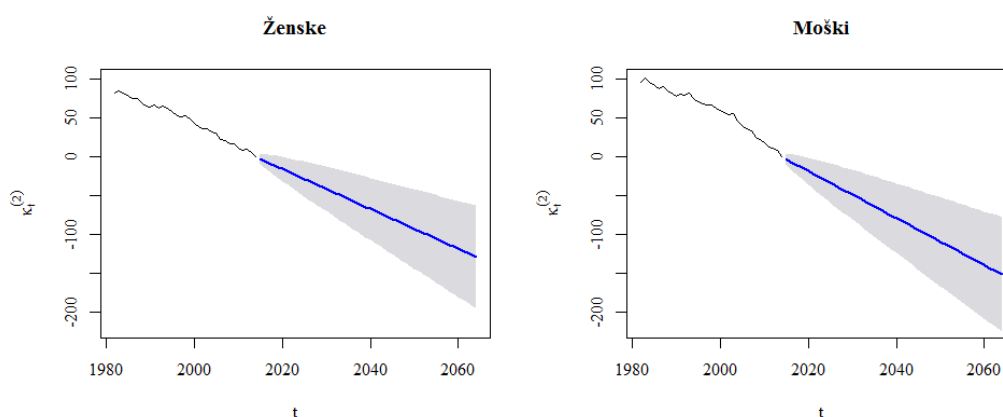
iz katere je razvidno, da napaka v napovedovanju umrljivosti približno narašča s kvadratnim korenom obdobja napovedovanja (Δt) .

²⁰ Centralni limitni izrek pravi, da je v primeru, da so $X_1, \dots, X_n$ paroma neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z matematičnim upanjem μ in varianco σ^2 , slučajna spremenljivka $S = X_1 + \dots + X_n$ za velike n porazdeljena kot $N(n\mu, n\sigma^2)$ (Central Limit Theorem, b.l.).

Projekcije vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ sem izvedla v programskem jeziku R z uporabo funkcije `forecast.lca` v okviru paketa `demography` (Hyndman et al., 2015, str. 15–16), ki za napovedovanje uporablja slučajni sprehod z zamikom, to je ARIMA (0,1,0) model.

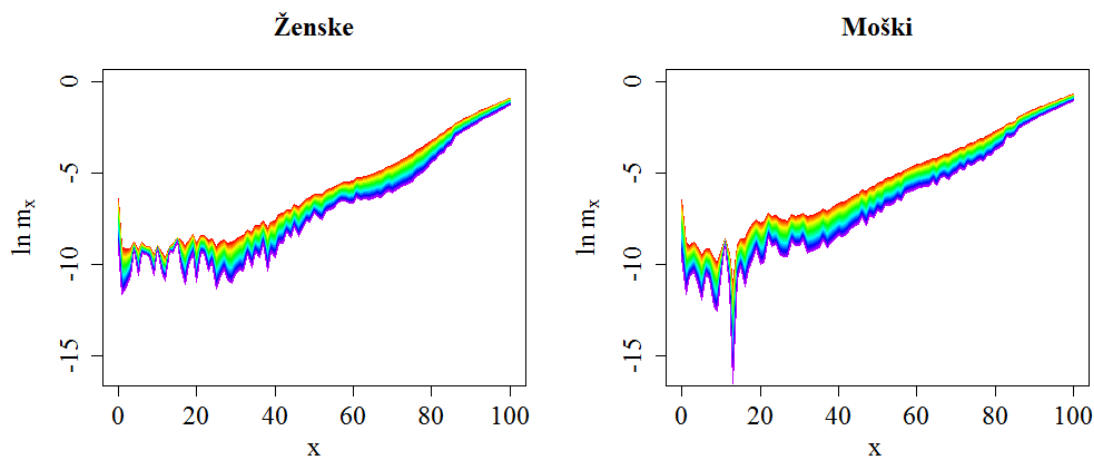
Slika 21 prikazuje ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ na podatkih brez glajenja z zlepki. Ustrezne vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ na podatkih, glajenih z zlepki, so prikazane na Sliki 3 v Prilogi 2. Sredinska črta prikazuje najbolj verjetne vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, obarvano območje pa označuje meje 95-odstotnega intervala zaupanja. To pomeni, da bo z verjetnostjo 95 % napovedana vrednost parametra $\kappa_t^{(2)}$ znotraj danega območja. Ker je vrednost parametra $\kappa_t^{(2)}$ napovedana s pomočjo slučajnega sprehoda z zamikom, kjer je zamik povprečna letna sprememba ocenjenih vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, in ker je iz Slike 14 razvidno padanje ocenjenih vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$, je pričakovano, da se trend padanja nadaljuje.

Slika 21: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela na podatkih brez glajenja z zlepki



Slika 22 prikazuje najbolj verjetne prihodnje centralne stopnje umrljivosti za ženske in moške, pri čemer rdeča barva označuje bližnjo, vijolična barva pa daljno prihodnost. Prikazane centralne stopnje umrljivosti so dobljene na podlagi ocen parametra $\kappa_t^{(2)}$, dobljenih s kalibracijo na podatkih brez glajenja z zlepki. Ustrezna grafa najbolj verjetnih prihodnjih centralnih stopenj umrljivosti, dobljenih na podlagi ocen parametra $\kappa_t^{(2)}$, dobljenih s kalibracijo na podatkih, glajenih z zlepki, so v Prilogi 2 (Slika 4). Kot pričakovano, lahko opazimo splošen trend padanja centralnih stopenj umrljivosti.

Slika 22: Pričakovane prihodnje centralne stopnje umrljivosti v okviru Lee-Carterjevega modela na podatkih brez glajenja z zlepki za leta 2015–2064



Originalni Lee-Carterjev model, to je brez predpostavke o Poissonovi porazdelitvi števila smrti (36), bom zaradi prednosti, ki jih prinaša ta dodatna predpostavka, izpustila iz nadaljnje analize, saj je obnašanje obeh modelov podobno.

7.3 Poisson Lee-Carterjev model

Brouhns et al. (2002, str. 380) so za napovedovanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ uporabili ARIMA (0,1,1) model, to je

$$\kappa_t^{(2)} = \kappa_{t-1}^{(2)} + \theta + \varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} \quad (121)$$

kjer so $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ neodvisne slučajne spremenljivke z isto varianco, θ pa predstavlja povprečno letno spremembo vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$.

Za napovedovanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ bom uporabila multivariatni naključni sprehod z zamikom (angl. *multivariate random walk with drift*), ki so ga uporabili tudi Cairns et al. (2006, str. 714) ter Haberman in Renshaw (2011, str. 37). Ta model bom uporabila tudi v nadaljevanju za napovedovanje vseh časovno odvisnih parametrov $\kappa_t^{(i)}$.

Multivariatni slučajni sprehod z zamikom je definiran kot (Villegas et al., 2016, str. 22)

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta + \varepsilon_t, \quad \kappa_t = \begin{pmatrix} \kappa_t^{(1)} \\ \vdots \\ \kappa_t^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (122)$$

kjer je $\boldsymbol{\theta}$ N -dimenzionalen vektor, ki predstavlja parametre zamika, $\boldsymbol{\Sigma}$ ($N \times N$)-dimenzionalna kovariančna matrika in $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ multivariatni beli šum.

Poisson Lee-Carterjev model ima samo en časovno odvisen parameter $\kappa_t^{(2)}$, zato imamo v tem primeru opravka z običajnim slučajnim sprehodom z zamikom, to je z ARIMA (0,1,0) modelom.

Napovedovanje časovno odvisnega parametra $\kappa_t^{(2)}$ sem izvedla v programskem jeziku R z uporabo funkcij `forecast` in `simulate` v okviru paketa `StMoMo` (Villegas et al., 2016, str. 23–24), ki jih bom uporabila tudi za napovedovanje vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ in γ_{t-x} ter projekcijo začetnih stopenj umrljivosti za vse nadaljnje modele. Obe funkciji napovedujeta časovno odvisne parametre z uporabo multivariatnega slučajnega sprehoda z zamikom, pri čemer temeljita na algoritmu, ki sta ga predstavila Haberman in Renshaw (2011, str. 37), to je

$$\kappa_{t_n+(\Delta t)} = \kappa_{t_n} + (\Delta t)\boldsymbol{\theta} + \sqrt{(\Delta t)}\mathbf{z}_m \quad (123)$$

kjer je $m = 1, \dots, M$ zaporedna simulacija in $\mathbf{z}_m$ naključni vzorec slučajne spremenljivke s porazdelitvijo $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Ta algoritem je skladen z aproksimacijo (120).

Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ so prikazane na Sliki 5 v Prilogi 2, projekcije začetnih stopenj umrljivosti pa na Sliki 15 v Prilogi 2. Slika 5 in tudi Slike 6 do 14 v Prilogi 2 prikazujejo ocenjene in napovedane vrednosti parametrov izbranih stohastičnih modelov umrljivosti za naslednjih 50 let. Sredinska črtkana črna barva prikazuje najbolj verjetne vrednosti parametrov, zunanji črti rdeče barve pa zgornjo in spodnjo mejo 95-odstotnega intervala zaupanja. Iz Slike 5 (Priloga 2) je razvidno zmanjševanje vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ s časom, kar je posledica izbire modela za napovedovanje, saj le-ta vključuje zamik, ki povzroča trend spreminjanja napovedanih vrednosti v skladu s trendom spreminjanja ocenjenih vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ s časom. Za napovedovanje vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ sem tudi v primeru ostalih stohastičnih modelov uporabila multivariatni slučajni sprehod z zamikom, zato bo trend spreminjanja napovedanih vrednosti s časom tudi v primeru le-teh usklajen s trendom spreminjanja pripadajočih ocenjenih vrednosti parametrov.

Slika 15 in tudi Slike 16 do 20 v Prilogi 2 prikazujejo projekcije začetnih stopenj umrljivosti za obdobje 50 oziroma 100 let za starosti 45, 65 in 85 let, dobljene z izvedbo 500 ponovitev simulacij. Projekcije začetnih stopenj umrljivosti so prikazane v pasovih glede na njihovo verjetnost nastopa, in sicer najtemnejši pas je najbolj verjeten, najsvetlejši pa najmanj. Zunanje meje pasov od znotraj navzven označujejo meje 50-, 80- in 95-odstotnega intervala zaupanja. Širina pasov nam pove, kako negotove so projekcije stopenj

umrljivosti. Širši kot je pas, manj gotove so. V splošnem velja, da so projekcije za leta, ki so bolj oddaljena od izhodiščnega leta, manj gotove (Dowd, Blake & Cairns, 2007, str. 5). Ker so opazovane stopnje umrljivosti bolj volatilne pri višjih starostih, so pričakovani širši pasovi pri višjih starostih (Cairns et al., 2011, str. 359).

Poisson Lee-Carterjev model ima natanko en stohastični časovno odvisen parameter $\kappa_t^{(2)}$, ki predstavlja splošen trend spreminjanja stopenj umrljivosti s časom, parameter $\beta_x^{(2)}$, s katerim je pomnožen, pa nam pove, v kolikšni meri ta sprememba stopenj umrljivosti velja za določeno starost. Kot je razvidno iz Slike 15, vrednost parametra $\beta_x^{(2)}$ med starostma 45 in 85 let za moške v splošnem pada, pri ženskah pa je opaziti dvig vrednosti parametra $\beta_x^{(2)}$ med starostma 60 in 80 let. Manjša kot je vrednost parametra $\beta_x^{(2)}$, manjši je vpliv spremembe stopenj umrljivosti, ki jo določa $\kappa_t^{(2)}$, kar se odraža v ožjih pasovih (Cairns et al., 2011, str. 359). Kot je razvidno iz Slike 15 v Prilogi 2, se za moške pasovi z višjo starostjo ožijo. Enako velja za ženske, če primerjamo pasova pri starostih 45 in 85 let. Pas pri starosti 65 let je širši zaradi dviga vrednosti parametra $\beta_x^{(2)}$ med starostma 60 in 80 let. Torej lahko sklepamo, da negotovost projekcij stopenj umrljivosti v primeru Poisson Lee-Carterjevega modela ni konsistentna z variabilnostjo zgodovinskih podatkov.

7.4 CBD-model

Tudi Cairns et al. (2011, str. 357) so za napovedovanje vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ uporabili multivariatni (oziroma v danem primeru bivariatni) slučajni sprehod z zamikom.

V primeru bivariatnega slučajnega sprehoda z zamikom lahko vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ napovemo z uporabo algoritma

$$\kappa_{t_n+(\Delta t)}^{(1)} = \hat{\kappa}_{t_n-1}^{(1)} + (\Delta t)\theta_1 + \sqrt{(\Delta t)}z_m^{(1)} \quad (124)$$

$$\kappa_{t_n+(\Delta t)}^{(2)} = \hat{\kappa}_{t_n-1}^{(2)} + (\Delta t)\theta_2 + \sqrt{(\Delta t)}z_m^{(2)} \quad (125)$$

kjer je $m = 1, \dots, M$ zaporedna simulacija ter $z_m^{(1)}$ in $z_m^{(2)}$ naključna vzorca slučajnih spremenljivke s porazdelitvama $N(0, \hat{\sigma}_1^2)$ in $N(0, \hat{\sigma}_2^2)$. Le-ta algoritem uporablja tudi paket StMoMo.

Napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ so predstavljene na Sliki 6 (Priloga 2), Slika 16 (Priloga 2) pa prikazuje projekcije začetnih stopenj umrljivosti. Če na grafih na Slikah 15 in 16 v Prilogi 2 uporabimo enako merilo na ordinatnih oseh, lahko opazimo, da so napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru CBD-modela nižje, pasovi pa širši v

primerjavi s Poisson Lee-Carterjevim modelom. Podobno kot pri Poisson Lee-Carterjevem modelu tudi za CBD-model na danih podatkih ne velja, da se pasovi z višanjem starosti širijo. Najozži so pasovi za starosti blizu starosti $\bar{x}=70$ let, kar je posledica vpliva negotovosti, ki izhaja iz parametra $\kappa_t^{(2)}$. Le-ta je najbolj izrazita pri starostih, ki so najbolj oddaljene od starosti $\bar{x}$. Opaziti je tudi nenavaden zamik med nivojema dejanskih in napovedanih stopenj umrljivosti pri ženskah, starih 45 let.

7.5 Renshaw-Habermanov model

Poseben izziv pri konstruiranju stohastičnega modela umrljivosti za namen napovedovanja umrljivosti predstavlja izbira stohastičnega procesa, ki se nanaša na efekt rojstne kohorte. Predpostavlja se, da je le-ta neodvisen od stohastičnega procesa časovno odvisnih parametrov $\kappa_t^{(i)}$ (Cairns et al., 2011, str. 357).

Za napovedovanje vrednosti parametra γ_{t-x} bom uporabila ARIMA (1,1,0) model, ki sta ga predlagala Renshaw in Haberman (2006, str. 566)

$$\gamma_c = \theta_0 + \theta_1 \gamma_{c-1} + \theta_2 \gamma_{c-2} + \varepsilon_c \quad (126)$$

pri čemer je $c = x - t$.

Grafični prikaz napovedanih vrednosti parametrov $\kappa_t^{(2)}$ in γ_{t-x} je v Prilogi 2 (Sliki 7 in 8), Slika 17 (Priloga 2) pa prikazuje projekcije začetnih stopenj umrljivosti do leta 2114. V primerjavi s predhodnimi grafi lahko opazimo nazobčano obliko pasov, kar je posledica vpliva dodatnega parametra γ_{t-x} , ki predstavlja efekt rojstne kohorte. Iz Slike 17 (Priloga 2) je razvidno, da se pasovi po določenem času ponovno zgladijo. To se zgodi, ko ocenjene vrednosti $\hat{\gamma}_{t-x}$ nadomestijo napovedane vrednosti $\dot{\gamma}_{t-x}$. V začetku so vsi pasovi rahlo ukrivljeni navzgor, saj so ocenjene vrednosti parametra γ_{t-x} pozitivne. Ko ocenjene vrednosti parametra γ_{t-x} postanejo negativne, se krivulja ponovno ukrivi navzdol. Kot je razvidno iz Slike 8 v Prilogi 2, so napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} negativne in se s časom zmanjšujejo, kar dodatno prispeva k zmanjševanju napovedanih stopenj umrljivosti na dolgi rok.

Iz Slike 17 (Priloga 2) je razvidno, da je pas za ženske, stare 65 let, v splošnem veliko bolj ukrivljen navzdol kot za ostali dve starosti. To je vpliv parametra $\beta_x^{(2)}$, katerega vrednost se dvigne med starostma 60 in 80 let (Slika 17). Podobno kot pri Poisson Lee-Carterjevem modelu je opaziti ožjenje pasov z višanjem starosti, ki je dobro razvidno predvsem iz grafa za moške (Slika 17 v Prilogi 2), kjer vrednost parametra $\beta_x^{(2)}$ s starostjo pada (Slika 17).

7.6 APC-model

APC-model je poenostavljen Renshaw-Habermanov model, zato sem za napovedovanje vrednosti parametra γ_{t-x} tudi tokrat uporabila ARIMA (1,1,0) model.

Projekcije parametrov $\kappa_t^{(2)}$ in γ_{t-x} so prikazane v Prilogi 2 (Sliki 9 in 10), na Sliki 18 (Priloga 2) pa so prikazane projekcije začetnih stopenj umrljivosti, iz katerih je razvidno, da se pasovi z višanjem starosti tudi v primeru APC-modela ne širijo. Kot je razvidno iz Slike 18 (Priloga 2), v primeru APC-modela pri projekcijah za ženske, stare 65 let, ni tako izrazite ukrivljenosti navzdol kot pri Renshaw-Habermanovem modelu, kar je posledica odsotnosti parametra $\beta_x^{(2)}$. Splošen trend spreminjanja stopenj umrljivosti določa parameter $\kappa_t^{(2)}$, katerega vrednost s časom pada (Slika 10 v Prilogi 2), zato tudi stopnje umrljivosti s časom padajo. Na ukrivljenost pasov vpliva parameter γ_{t-x} , s katerim skušamo ujeti vpliv posameznih rojstnih kohort. Kot je razvidno iz ocen parametra γ_{t-x} na Sliki 18, je le-ta večino obdobja pozitiven, kar povzroča, da padanje stopenj umrljivosti s časom ni tako izrazito. Za kasnejše rojstne kohorte vrednost parametra γ_{t-x} pade pod 0, zaradi česar se pasovi ukrivijo navzdol. To je dobro vidno iz grafa za moške na Sliki 18 (Priloga 2). Napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} so v povprečju približno konstantne (Slika 9 v Prilogi 2). Gibljejo se okrog negativne vrednosti, kar dodatno pripomore k zniževanju stopenj umrljivosti.

7.7 M7-model

Cairns et al. (2011, str. 357) so za projekcijo vrednosti parametra γ_{t-x} uporabili ARIMA (1,0,0) model, to je

$$\gamma_c = \theta_0 + \theta_1 \gamma_{c-1} + \varepsilon_c \quad (127)$$

pri čemer je $c = x - t$. Projekcije vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ in γ_{t-x} so prikazane v Prilogi 2 (Slika 11 in Slika 12), na Sliki 19 (Priloga 2) pa so prikazane projekcije začetnih stopenj umrljivosti.

Podobno kot pri CBD-modelu je opazno ožene pasov z višanjem starosti. Vpliv parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ je podoben kot v primeru CBD-modela. M7-model pa ima v primerjavi s CBD-modelom dva dodatna parametra, to je $\kappa_t^{(3)}$ in γ_{t-x} . Iz Slike 11 v Prilogi 2, ki prikazuje ocenjene in napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$, je razvidno, da vrednost parametra $\kappa_t^{(3)}$ za ženske pada in postane celo negativen, za moške pa narašča in je pozitivna. Negativne vrednosti parametra $\kappa_t^{(3)}$ vplivajo na povišanje stopenj umrljivosti za starosti med $\bar{x} - \hat{\sigma} = 52,4$ let in $\bar{x} + \hat{\sigma} = 87,6$ let, stopnje umrljivosti za ostale starosti pa se

znižajo. In obratno, kadar je vrednost parametra $\kappa_t^{(3)}$ pozitivna, to vpliva na znižanje stopenj umrljivosti za starosti med $\bar{x} - \hat{\sigma} = 52,4$ let in $\bar{x} + \hat{\sigma} = 87,6$ let, medtem ko se za ostale starosti stopnje umrljivosti zvišajo. Iz Slike 19 (Priloga 2) je razvidno, da je v primeru žensk ravno pri starosti 65 let opaziti največji naklon pasov navzgor, medtem ko je pri moških pri tej starosti opaziti največji naklon pasov navzdol. Na ukrivljenost pasov vpliva parameter γ_{t-x} , ki predstavlja efekt rojstne kohorte. Ocenjene vrednosti parametra γ_{t-x} imajo največji vpliv pri višjih starostih, saj pri nižjih starostih le-te hitro zamenjajo napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} . Iz Slike 19 je pri ženskah pri rojstnih kohortah, ki imajo neposreden vpliv na projekcijo, v začetku opazno naraščanje vrednosti parametra γ_{t-x} , in sicer iz negativnih v pozitivne vrednosti, nato pa sledi ponoven nenaden padec vrednosti. Ta se odraža na projekcijah na Sliki 19 (Priloga 2) kot začetna ukrivljenost navzdol (negativne vrednosti parametra γ_{t-x}), ki jim sledi ukrivljenost navzgor (naraščanje vrednosti parametra γ_{t-x}), dokler se pasovi naenkrat ne »zlomijo« zaradi nenadnega padca vrednosti parametra γ_{t-x} . Pri moških je pri rojstnih kohortah, ki imajo neposreden vpliv na projekcijo, iz Slike 19 razvidno začetno naraščanje pozitivnih vrednosti parametra γ_{t-x} , ki se odraža kot dvig stopenj umrljivosti, ki je viden na Sliki 19 (Priloga 2) pri starosti 85 let. Sledi padec stopenj umrljivosti pri vseh starostih, ki je posledica padca vrednosti parametra γ_{t-x} (Slika 19). Nadalje, iz Slike 12 v Prilogi 2 je razvidno, da se napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} v povprečju pri ženskah rahlo spustijo pod 0, vendar je tako v primeru žensk kakor tudi v primeru moških opazno asimptotično približevanje vrednosti 0.

7.8 Platov model

Plat (2009a, str. 397) je za napovedovanje vrednosti parametra γ_{t-x} uporabil ARIMA (1,0,0) model. Projekcije vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ in γ_{t-x} so prikazane v Prilogi 2 (Slika 13 in Slika 14), iz katerih je razvidno, da tako ocenjene kot napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ s časom padajo, zaradi česar se napovedane stopnje umrljivosti s časom zmanjšujejo (glej Sliko 20 v Prilogi 2). Vpliv ocenjenih vrednosti parametra γ_{t-x} (Slika 20) se odraža kot dvig stopenj umrljivosti, ki jim sledi padec le-teh, dokler vpliv ocenjenih vrednosti parametra γ_{t-x} ne zamenja vpliv napovedanih vrednosti parametra γ_{t-x} (Slika 13 v Prilogi 2). Iz Slike 13 v Prilogi 2 je razvidno, da se napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} gibljejo v bližini vrednosti 0, kar je posledica izbire pogojev (58) za kalibracijo. Tako na dolgi rok efekt rojstne kohorte v povprečju izzveni oziroma je minimalen.

Tudi v primeru Platovega modela na prvi pogled ni opaziti pričakovanega širjenja pasov z višanjem starosti. Če si ogledamo pasove pri starostih 65 in 85 let, lahko opazimo, da so pasovi pri starosti 85 let malenkost širši. Do podobne ugotovitve pridemo, če pasove narišemo še pri starosti 75 let. Pasovi za starost 45 let so širši verjetno predvsem na račun volatilnosti podatkov.

8 KRITERIJI USTREZNOSTI

V tem poglavju bom predstavila nekatere metode, s katerimi si pomagamo pri iskanju ustreznega stohastičnega modela umrljivosti. Na podlagi ugotovitev bom izbrala modele, s pomočjo katerih bom v nadaljevanju izračunala zahtevani solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti. Kot že omenjeno, v analizi ne bom upoštevala prvotnega Lee-Carterjevega modela, temveč le Poisson Lee-Carterjev model. Dodatna predpostavka o Poissonovi porazdelitvi števila smrti nam namreč omogoča uporabo številnih metod, katerih uporaba brez dodatne predpostavke o porazdelitvi števila smrti sicer ne bi bila možna.

8.1 Kvalitativni kriteriji

Cairns et al. (2009, str. 11–12) so kot zaželene kvalitativne lastnosti stohastičnih modelov umrljivosti izpostavili naslednje:

- **enostavnost:** model naj bo čim bolj preprost, to je s čim manj parametri.
- **transparentnost:** model mora biti dovolj transparenten, to je razumljiv za uporabnika, da se izognemo nevarnosti napačne uporabe.
- zmožnost generiranja naključnih poti.
- **zmožnost modeliranja efekta rojstnih kohort,** če ga je možno opaziti na dani populaciji.
- **zmožnost produciranja netrivialne korelacijske strukture letnih sprememb stopenj umrljivosti pri različnih starostih:** korelacijska struktura je trivialna, če obstaja popolna korelacija med spremembami v stopnjah umrljivosti pri različnih starostih od določenega leta do naslednjega leta (Cairns et al., 2009, str. 12).
- **biološka smiselnost:** kriterij ne temelji na znanstveno dokazljivih dejstvih, temveč gre zgolj za subjektiven kriterij. Gre za to, da se uporabnik modela vpraša, ali lahko dane projekcije stopenj umrljivosti pojasni na podlagi bioloških faktorjev, razvoja v medicini in sprememb v okolju.

Vsi predstavljeni stohastični modeli umrljivosti vključujejo veliko število parametrov (stolpec Efektivno število parametrov v Tabelah 1 in 2, kakor tudi v Tabelah 1 in 2 v Prilogi 3), zato ne moremo govoriti o enostavnosti. So pa vsekakor nekateri modeli enostavnejši kot drugi. Najbolj enostavna sta CBD- in Poisson Lee-Carterjev model, medtem ko je najmanj enostaven Renshaw-Habermanov model. Vsi modeli vključujejo možnost generiranja naključnih poti za namene napovedovanja stopenj umrljivosti, vendar vsi ne upoštevajo efekta rojstne kohorte. Efekta rojstne kohorte ne modelirata Poisson Lee-Carterjev model in CBD-model. Slabost Poisson Lee-Carterjevega modela, kakor tudi vseh ostalih modelov z enim časovno odvisnim parametrom $\kappa_t^{(i)}$, je nezmožnost produciranja netrivialne korelacijske strukture letnih sprememb stopenj umrljivosti pri različnih starostih (Cairns et al., 2009, str. 12).

8.2 Kvantitativni kriteriji

Stohastični model umrljivosti bi moral zagotavljati konsistentnost z zgodovinskimi podatki in producirati biološko smiselne napovedi stopenj umrljivosti, njegovi parametri in projekcije pa bi morali biti robustni ne glede na izbiro podatkov, ki so osnova za kalibracijo (Cairns, 2009, str. 12).

8.2.1 Ustreznost prilagajanja podatkom²¹

Pomembno je, da so vrednosti, ki jih producira model, konsistentne z opazovanimi zgodovinskimi vrednostmi. V nadaljevanju bom predstavila nekatera merila, ki sem jih uporabila in nam povedo, v kolikšni meri se model prilagaja podatkom.

8.2.1.1 Akaike in Bayesov informacijski kriterij

Če bi primerjali samo maksimalne vrednosti funkcije verjetja, potem bi naj modeli z več parametri zagotavljali boljšo konsistentnost z zgodovinskimi podatki. Denimo, da imamo vgnezdene modele, kjer je določen model poseben primer drugega. V takšnem primeru bo imel model z več parametri višjo maksimalno vrednost funkcije verjetja, čeprav bi bil drugi model ustrežnejši (Cairns et al., 2009, str. 13). Tako se je pojavila potreba po vpeljavi kriterijev, ki bi to slabost, da modeli z več parametri niso nujno bolj ustrezni, upoštevali. Predstavila bom dvojico tovrstnih kriterijev, in sicer Bayesov in Akaike informacijski kriterij.

Naj bo Φ_r vektor parametrov modela r , $\hat{\Phi}_r$ njegova cenilka največjega verjetja in $l(\hat{\Phi}_r)$ vrednost logaritemske funkcije verjetja. Naj bo nadalje N število opazovanj in ν_r efektivno število ocenjenih parametrov²². Potem sta Akaike informacijski kriterij (angl. *Akaike Information Criterion*; v nadaljevanju AIC) in Bayesov informacijski kriterij (angl. *Bayesian Information Criterion*; v nadaljevanju BIC) za model r definirana takole

$$AIC_r = 2\nu_r - 2 \cdot l(\hat{\Phi}_r) \quad (128)$$

$$BIC_r = \nu_r \cdot \log N - 2 \cdot l(\hat{\Phi}_r) \quad (129)$$

Najboljši model je tisti z najnižjo vrednostjo AIC oziroma BIC. Kadar za kriterij uporabljamo vrednost AIC, za vsakega izmed R -modelov velja, da je verjetnost, da i -ti model minimizira vrednost informacijskih izgub, enaka

²¹ Angl. *goodness of fit*.

²² Na primer, pri Lee-Carter modelu imamo 101 ocen za vrednosti $\beta_x^{(1)}$, 101 za vrednosti $\beta_x^{(2)}$ in 33 za vrednosti $\kappa_t^{(2)}$. To je skupaj 235, od koder odštejemo 2 zaradi omejitev (35) (Cairns et al., 2009, str. 13).

$$e^{\frac{1}{2}(AIC_i - AIC_{min})} \quad (130)$$

pri čemer se AIC_i nanaša na i -ti model, AIC_{min} pa predstavlja najmanjšo vrednost AIC izmed vseh R modelov (Burnham & Anderson, 2004, str. 271).

Kadar je model kompleksnejši, tj. vsebuje veliko število parametrov, se bo to bolj odražalo v višji vrednosti BIC kot AIC. Če izbiramo model glede na BIC, lahko, če je nabor podatkov majhen, izberemo model s premajhnim številom parametrov, medtem ko lahko v primeru AIC v splošnem izberemo preveč kompleksen model (Burnham & Anderson, 2004, str. 285).

Za izračun vrednosti AIC in BIC sem uporabila funkciji AIC in BIC, ki sta sestavni del paketa StMoMo v programskem jeziku R. Dobljene vrednosti so prikazane v Tabelah 1 in 2. Da bi bile vrednosti med seboj primerljive, sem ponovno izvedla kalibracijo CBD- in M7-modela, in sicer za starosti od 0 do 100 let.

Glede na vrednosti AIC in BIC sta se najslabše odrezala CBD- in M7-model, saj imata najvišjo vrednost AIC in BIC. Ostali modeli so med seboj primerljivi, saj so se nekateri bolje odrezali glede na AIC drugi glede na BIC. Glede na BIC so se odrezali boljše modeli z manjšim številom parametrov, glede na AIC pa tisti z večjim številom parametrov.

Ker sta bila CBD- in M7-model kreirana predvsem za starosti, pri katerih so log-stopnje umrljivosti približno linearne, sem na vseh modelih izvedla tudi kalibracijo za starosti od 40 do 100 let. Izračunane vrednosti zgornjih kriterijev so prikazane v Tabelah 1 in 2 v Prilogi 3. Pri tem starostnem razponu se je M7-model odrezal veliko bolje, medtem ko so rezultati CBD-modela še vedno slabi.

Tabela 1: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC, kalibrirane na podatkih za ženske v Sloveniji, stare od 0 do 100 let

Model	Efektivno število parametrov	Maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja	AIC	Razvrstitev glede na AIC	BIC	Razvrstitev glede na BIC
PLC	233	-10.091,48	20.648,95	2	22.072,96	1
CBD	66	-23.252,74	46.637,47	6	47.040,84	6
RH	365	-9.916,79	20.563,58	1	22.794,32	4
APC	264	-10.121,75	20.771,49	4	22.384,96	2
M7	229	-13.700,60	27.859,19	5	29.258,76	5
PLAT	295	-10.035,69	20.661,39	3	22.464,32	3

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

Tabela 2: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC, kalibrirane na podatkih za moške v Sloveniji, stare od 0 do 100 let

Model	Efektivno število parametrov	Maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja	AIC	Razvrstitev glede na AIC	BIC	Razvrstitev glede na BIC
PLC	233	-10.883,09	22.232,19	4	23.656,19	2
CBD	66	-21.016,92	42.165,84	6	42.569,21	6
RH	365	-10.573,94	21.877,89	1	24.108,63	4
APC	264	-10.720,92	21.969,85	3	23.583,32	1
M7	229	-16.380,98	33.219,97	5	34.619,53	5
PLAT	295	-10.660,61	21.911,22	2	23.714,15	3

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platonov model

8.2.1.2 Ostanke

Ostanke (angl. *residuals*) so razlike med opazovanimi in ocenjenimi vrednostmi. Ostanek i -te opazovane vrednosti O_i izračunamo kot

$$r_i = O_i - E_i \quad (131)$$

kjer je E_i ocena za i -to vrednost, dobljena z modelom. V nadaljevanju bom predstavila dve vrsti ostankov, in sicer standardizirane ostanke in standardizirane deviančne ostanke.

Standardizirani ostanek je definiran kot

$$r_i^S = \frac{y_i - \hat{y}_i}{\hat{\sigma}_{y_i}} \quad (132)$$

kjer je y_i i -ta opazovana vrednost, $\hat{y}_i$ njena ocena in $\hat{\sigma}_{y_i}$ standardni odklon opazovane vrednosti.

Za vse predstavljene stohastične modele umrljivosti, razen za originalni Lee-Carterjev model, velja predpostavka, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu (glej (36)), zaradi česar je standardizirani ostanek števila smrti enak (Dowd et al., 2010a, str. 257)

$$r_x^S(t) = \frac{d_x(t) - \hat{d}_x(t)}{\hat{\sigma}_{d_x(t)}} = \frac{D_x(t) - E_x^C(t) \cdot \hat{m}_x(t)}{\sqrt{E_x^C(t) \cdot \hat{m}_x(t)}} = \frac{m_x(t) - \hat{m}_x(t)}{\sqrt{\frac{\hat{m}_x(t)}{E_x^C(t)}}} \quad (133)$$

Standardizirani deviančni ostanek (angl. *standardised deviance residuals*) je definiran kot

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{y}_i) \sqrt{\text{dev}_{y_i}} \quad (134)$$

kjer je y_i i -ta opazovana vrednost, $\hat{y}_i$ njena ocena in dev_{y_i} njen prispevek k celotni devianci modela M

$$\text{Dev}(M) = \sum_i \text{dev}_{y_i} \quad (135)$$

Devianca (angl. *deviance*) modela M se izračuna kot

$$\text{Dev}(M) = -2(\log \mathcal{L}(y, \hat{\theta}_M) - \log \mathcal{L}(y, \hat{\theta}_{M_S})) \quad (136)$$

kjer je y nabor n -tih opazovanih vrednosti, $\hat{\theta}_M$ nabor ocenjenih parametrov modela M , $\log \mathcal{L}(y, \hat{\theta}_M)$ logaritemska funkcija verjetja modela M , $\hat{\theta}_{M_S}$ nabor ocenjenih parametrov nasičenega modela (angl. *saturated model*) M_S in $\log \mathcal{L}(y, \hat{\theta}_{M_S})$ logaritemska funkcija verjetja nasičenega modela M_S . Nasičen model M_S modela M je model s toliko parametri kot je opazovanih vrednosti, to je z n parametri, kar omogoča, da lahko v celoti pojasni vse opazovane vrednosti (Deviance, b.l.).

V primeru predpostavke o Poissonovi porazdelitvi števila smrti (glej (36)) je vrednost logaritemske funkcije verjetja ob upoštevanju ocene jakosti umrljivosti $\hat{\mu}_x(t)$, dobljene s posameznim modelom, enaka

$$\begin{aligned} \ln L(\hat{\mu}_x(t)) &= \ln \left(\prod_x \prod_t \frac{(E_x^C(t) \cdot \hat{\mu}_x(t))^{d_x(t)}}{d_x(t)!} e^{-E_x^C(t) \cdot \hat{\mu}_x(t)} \right) = \\ &= \sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln(E_x^C(t) \hat{\mu}_x(t)) - E_x^C(t) \cdot \hat{\mu}_x(t) \right) + A = \\ &= \sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln(\hat{d}_x(t)) - \hat{d}_x(t) \right) + A \end{aligned} \quad (137)$$

Od tod sledi, da je vrednost deviance modela enaka

$$\begin{aligned} \text{Dev}(M) &= -2 \left(\sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln(\hat{d}_x(t)) - \hat{d}_x(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln(d_x(t)) - d_x(t) \right) \right) = \end{aligned} \quad (138)$$

$$= 2 \sum_x \sum_t \left(d_x(t) \ln \left(\frac{d_x(t)}{\hat{d}_x(t)} \right) - (d_x(t) - \hat{d}_x(t)) \right)$$

Standardizirane deviančne ostanke lahko tako zapišemo kot

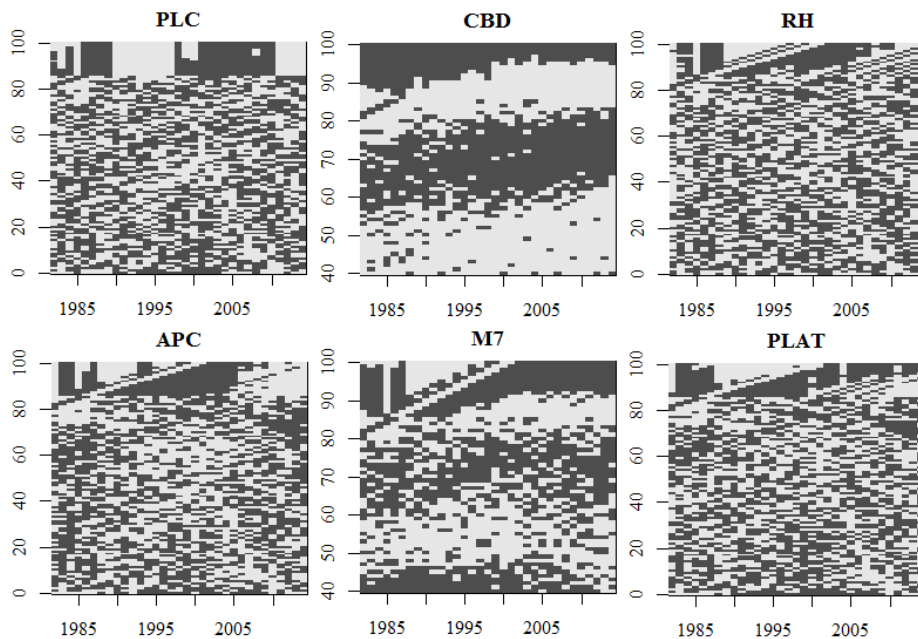
$$r_x^D(t) = \text{sign}(d_x(t) - \hat{d}_x(t)) \sqrt{2 \left(d_x(t) \ln \left(\frac{d_x(t)}{\hat{d}_x(t)} \right) - (d_x(t) - \hat{d}_x(t)) \right)} \quad (139)$$

Standardizirane ostanke so za oceno ustreznosti prilagajanja podatkov uporabili Cairns et al. (2009, str. 13), v magistrski nalogi pa bom kot kriterij ustreznosti modela uporabila prilagojene standardizirane deviančne ostanke (v nadaljevanju ostanke), definirane v okviru paketa StMoMo (funkcija residuals). Vrednosti le-teh se od standardiziranih deviančnih ostankov razlikujejo v konstanti, s katero so pomnoženi

$$r_x^{D^*}(t) = r_x^D(t) \sqrt{\frac{K - v}{\text{Dev}(M)}} \quad (140)$$

kjer je K število opazovanih vrednosti in v efektivno število parametrov v modelu M . Slika 23 prikazuje vrednost izračunanih ostankov glede na njihov predznak, in sicer za žensko populacijo. Pripadajoči grafi za moško populacijo so v Prilogi 4 (Slika 26).

Slika 23: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanke (ženske)

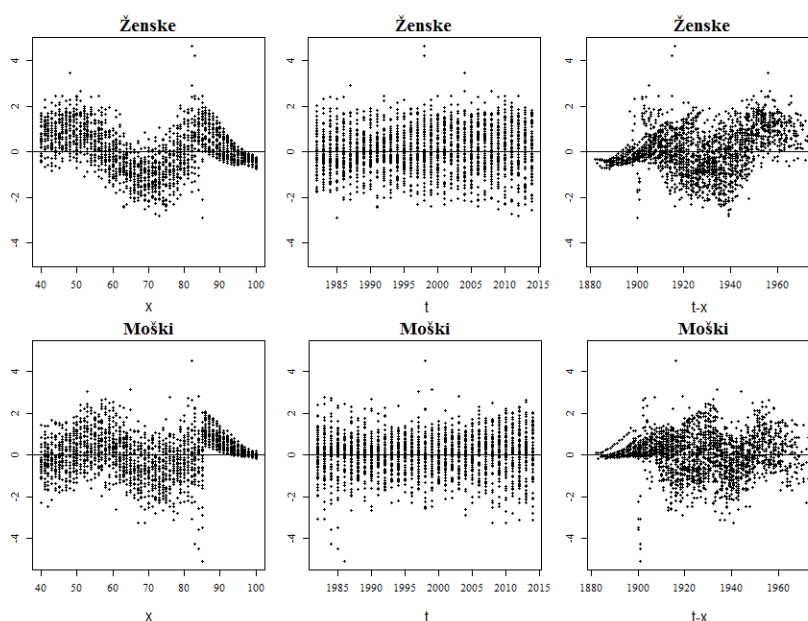


Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

V primeru CBD- in M7-modela lahko iz Slike 23 razberemo vzorec, ki nakazuje, da ta modela nista najbolj primerna. Pri moških (Slika 26 v Prilogi 4) se pojavi vzorec tudi v primeru Poisson Lee-Carterjevega modela, kar verjetno nakazuje na vpliv rojstnih kohort, ki jih le-ta model ne zajame. Vzorec se pojavi tudi pri vseh modelih za starosti nad 85 let, kar je posledica ekstrapolacije stopenj umrljivosti pri visokih starostih.

Da CBD-model ni najbolj primeren, lahko vidimo tudi iz Slike 24, ki prikazuje vrednost prilagojenih standardiziranih deviančnih ostankov v odvisnosti od starosti, leta in rojstne kohorte za CBD-model.

Slika 24: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za CBD-model



Iz grafa na Sliki 24 je jasno opazen vzorec, ki kaže, da obstaja odvisnost napake od starosti in posledično tudi od rojstne kohorte. Pripadajoči grafi za M7-model so zelo podobni in so prikazani skupaj z grafi za ostale modele v Prilogi 4 (Slike 21 do 25). Iz Slike 21 v Prilogi 4, ki prikazuje omenjene grafe za Poisson Lee-Carterjev model, lahko pri moških opazimo vzorec, ki nakazuje odvisnost vrednosti ostankov od leta rojstva, medtem ko pri ženskah ni opaziti izrazitega vzorca. Ta vzorec (diagonale) je mogoče opaziti tudi na Sliki 26 v Prilogi 4.

8.2.2 Robustnost modela

Model je robusten, kadar so robustni njegovi parametri in projekcije. Pravimo, da so parametri modela robustni, če se majhne spremembe v številu let ali naboru starosti za kalibracijo izrazijo v majhnih spremembah ocenjenih vrednosti parametrov (Cairns et al., 2009, str. 18). Podobno so robustne projekcije modela, če se majhne spremembe v številu

let ali naboru starosti za kalibracijo, ki je osnova za projekcije, izrazijo v majhnih spremembah napovedanih stopenj umrljivosti (Cairns et al., 2011, str. 356).

Robustnost ocenjenih parametrov (angl. *parameter robustness*) sem preverila tako, da sem primerjala ocene parametrov, ki sem jih dobila s kalibracijo na podatkih za ženske²³ v Sloveniji za leta 1982–2014 z ocenami parametrov, ki sem jih dobila s kalibracijo podatkov za leta 1992–2014. Grafični prikaz rezultatov je v Prilogi 5 (Slike 27 do 32). Najbolj robustne parametre ima CBD-model (Slika 32 v Prilogi 5). Ker nihče izmed parametrov CBD-modela ni odvisen od starosti, vrednosti časovno odvisnih parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$, dobljenih s kalibracijama na različnih obdobjih, v skupnem obdobju sovpadajo. Najslabše se je odrezal Renshaw-Habermanov model (Slika 28 v Prilogi 5), ki je v primeru kalibracije na podatkih za leta 1992–2014 ponudil najbolj drugačno rešitev v primerjavi z rešitvijo v primeru kalibracije za leta 1982–2014.

Robustnost projekcij (angl. *robustness of projections*) sem preverila tako, da sem primerjala projekcije stopenj umrljivosti, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 (v nadaljevanju Scenarij 1), s projekcijami stopenj umrljivosti, dobljenih s kalibracijo na podatkih za dano skupino oseb za leta 1992–2014 (v nadaljevanju Scenarij 2). Grafični prikaz rezultatov je v Prilogi 6 (Slika 33). Za vse modele, razen za Platov model in APC-model, velja, da so pasovi v Scenariju 1 širši kot v Scenariju 2, kar je posledica večje volatilnosti v stopnjah umrljivosti v letih 1982–1992. Večja volatilnost v stopnjah umrljivosti se odraža v večji volatilnosti ocenjenih vrednosti parametrov $\kappa_t^{(i)}$ in v večji varianci le-teh, zaradi česar so projekcije stopenj umrljivosti bolj negotove (Cairns et al., 2011, str. 361). Pasovi so v Scenariju 1 v primeru Platovega modela ožji, v primeru APC-modela pa približno enaki pasovom v Scenariju 2. V primeru M7-modela so pasovi zelo široki, kar pomeni, da so projekcije stopenj umrljivosti zelo negotove. Prav tako je v primeru M7-modela opaziti nenavadno začetno višanje stopenj umrljivosti, ki mu sledi nenavaden padec. Ker je zmanjševanje stopenj umrljivosti bolj izrazito v letih 1992–2014, se to posledično odraža v nižjih projekcijah stopenj umrljivosti. Le-to je opazno pri vseh modelih, razen pri APC-modelu in Renshaw-Habermanovem modelu. V primeru Renshaw-Habermanovega modela so projekcije stopenj umrljivosti v Scenariju 2 v povprečju višje kot v Scenariju 1, v primeru APC-modela pa so povprečne stopnje umrljivosti v Scenariju 1 in 2 podobne. Najslabše sta se tako odrezala M7-model in Renshaw-Habermanov model, najboljše pa APC-model, kjer so projekcije stopenj umrljivosti obeh scenarijev podobne.

8.2.3 Negotovost ocenjenih parametrov

V okviru procesa izbire stohastičnega modela umrljivosti je treba upoštevati tudi tveganje, ki izhaja iz negotovosti ocenjenih vrednosti parametrov modela (Villegas et al., 2016, str.

²³ Na podatkih za moške v Sloveniji dobimo podobne rezultate.

28). Zaradi analitične nesledljivosti procesa ocenjevanja parametrov za oceno negotovosti ocenjenih parametrov uporabimo tako imenovano metodo ponovnega vzorčenja (angl. *bootstrapping*). Metoda ponovnega vzorčenja se uporablja, kadar je porazdelitvena funkcija določene slučajne spremenljivke (npr. števila smrti) neznana in potrebujemo oceno določenega statističnega parametra. V tem primeru na podlagi empirične porazdelitvene funkcije opazovanih vrednosti za dano slučajno spremenljivko generiramo B vzorcev, na podlagi katerih izračunamo vrednosti parametra. Porazdelitveno funkcijo danega parametra aproksimiramo z empirično porazdelitveno funkcijo, ki jo dobimo na podlagi iz vzorcev izračunanih vrednosti parametra (Chernick & LaBudde, 2011, str. 3–5).

Za ocenjevanje negotovosti parametrov (angl. *parameter uncertainty*) bom uporabila tako imenovano Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja, ki so jo predstavili Brouhns, Denuit in Van Keilegom (2005, str. 220–221). Pri Poissonovi metodi ponovnega vzorčenja na podlagi predpostavke o Poissonovi porazdelitvi števila smrti generiramo B vzorcev za število smrti, to je $d_x^b(t)$, kjer je $b = 1, \dots, B$. Vsak vzorec $d_x^b(t)$ uporabimo za ponovno kalibracijo modela, tako da dobimo B vzorcev ocen parametrov $\beta_x^{(i),b}$, $\kappa_t^{(i),b}$ in γ_{t-x}^b . Na podlagi empiričnih porazdelitvenih funkcij ocen parametrov lahko določimo intervale zaupanja le-teh.

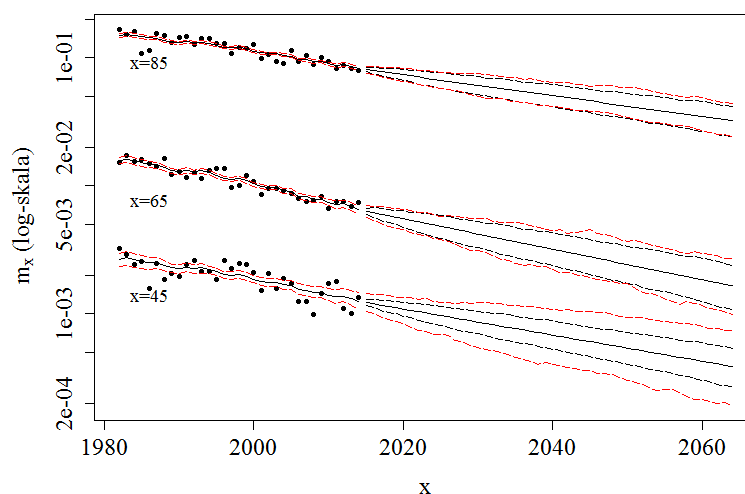
Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja sem izvedla v programskem jeziku R, in sicer s pomočjo funkcije *bootstrap*, definirane v okviru paketa *StMoMo*. Ker je hitrost izvedbe dane metode odvisna od zmogljivosti računalnika, na katerem se izvaja, sem se omejila na velikost vzorca $B = 100$. Rezultati za ženske so predstavljeni v Prilogi 7 (Slike 34 do 39). Različna intenziteta sivine v grafih ponazarja intervale zaupanja s stopnjami zaupanja 50 %, 80 % in 95 %.

Kot je razvidno iz Slike 34 (Priloga 7), je v primeru Poisson Lee-Carterjevega modela najbolj negotova ocena parametra $\beta_x^{(2)}$, in sicer pri nižjih in zelo visokih starostih. Le-ta izhaja iz velike volatilnosti podatkov. Pri CBD-modelu je opaziti večjo volatilnost parametra $\kappa_t^{(3)}$ (Slika 35 v Prilogi 7). Zelo nenavadno obnašanje je opaziti pri Renshaw-Habermanovem modelu (Slika 37 v Prilogi 7), kjer sem imela tudi nekaj težav s kalibracijami na danih vzorcih, saj proces iteracije, v okviru katerega iščemo ocene parametrov, ni konvergiral. V primeru APC-modela (Slika 36 v Prilogi 7) je negotovost ocenjenih parametrov dokaj majhna, razen v primeru parametra γ_{t-x} , kjer je večja negotovost predvsem posledica velike volatilnosti podatkov pri nižjih starostih (desni del grafa). V primeru M7-modela (Slika 38 v Prilogi 7) je negotovost ocene parametra γ_{t-x} zelo majhna, so pa zelo negotove ocene parametrov $\kappa_t^{(2)}$ in $\kappa_t^{(3)}$. Tudi ocene parametrov Platovega modela, z izjemo parametra $\beta_x^{(1)}$, so dokaj negotove (Slika 39 v Prilogi 7).

Negotovost ocenjenih parametrov dodatno prispeva k negotovosti projekcij stopenj umrljivosti. Slika 25 prikazuje projekcije centralnih stopenj umrljivosti v okviru Poisson

Lee-Carterjevega modela. Krivulje rdeče barve predstavljajo meje 95-odstotnega intervala zaupanja, upoštevajoč negotovost ocenjenih parametrov, črtkane krivulje črne barve pa meje 95-odstotnega intervala zaupanja brez upoštevanja negotovosti ocenjenih parametrov. Opazimo lahko, da se odstopanja v mejah intervalov zaupanja z višanjem starosti manjšajo. Razlog za to je v večji negotovosti ocen parametra $\beta_x^{(2)}$ pri nižjih starostih (Slika 34 v Prilogi 7).

Slika 25: Projekcije centralnih stopenj umrljivosti v okviru Poisson Lee-Carterjevega modela upoštevajoč negotovost ocenjenih parametrov



8.2.4 Povratni test

Kljub temu da se model dobro prilagaja podatkom, je robusten, negotovost ocenjenih parametrov majhna in so njegove napovedi biološko smiselne, se lahko slabo obnese na testu, v okviru katerega se napovedane stopnje umrljivosti za preteklo obdobje primerja z dejanskimi stopnjami umrljivosti danega obdobja. Tovrstni test se imenuje povratni test (angl. *backtest*).

Ogrodje vsakega povratnega testa predstavljajo naslednji štiri koraki (Dowd et al., 2010b, str. 282):

- Določitev merila, na osnovi katerega se ugotavlja, kako se bo določen model odrezal v povratnem testu. Med možna merila sodijo: stopnja umrljivosti, pričakovana življenjska doba, cene rent in podobno.
- Določitev obdobja, na podlagi katerega se izvaja kalibracija (v nadaljevanju obdobje za kalibracijo). Na primer: če želimo oceniti parametre v letu t in določimo, da bo dano obdobje dolgo n let, potem bomo za kalibracijo uporabili zgodovinske podatke med leti $n - t$ in $t - 1$.

- Določitev obdobja, za katerega se izvaja projekcija na podlagi ocenjenih parametrov (v nadaljevanju napovedno obdobje).
- Določitev kriterijev, na podlagi katerih lahko določimo, ali je dani model prestal povratni test.

V magistrskem delu bom za merilo v povratnih testih uporabila začetno stopnjo umrljivosti $q_x(t)$, obdobje za kalibracijo, napovedno obdobje in kriterije posameznih povratnih testov pa bom določila glede na obliko posameznega povratnega testa.

Dowd et al. (2010b, str. 283) so predstavili naslednje štiri oblike povratnih testov:

- **povratni test zmanjševanja napovednega obdobja** (angl. *contracting horizon backtest*) preverja, ali projekcije stopenj umrljivosti konvergirajo k stopnjam umrljivosti določenega leta, če prvotno zmanjšano obdobje za kalibracijo povečujemo v smeri izbranega leta.
- **povratni test razširjenega napovednega obdobja** (angl. *expanding horizon backtest*) preverja ustreznost napovedanih stopenj umrljivosti, tako da napovedane stopnje umrljivosti, dobljene na podlagi kalibracije skrajšanega obdobja, primerja z dejanskimi znanimi stopnjami umrljivosti preostalega preteklega obdobja.
- **povratni test premikajočega se napovednega obdobja** (angl. *rolling fixed-length horizon backtest*) prav tako preverja, ali se napovedane stopnje umrljivosti ujemajo z dejanskimi. Razlika je v tem, da je napovedno obdobje fiksne dolžine in se premika skozi čas. Pri tem se ustrezno povečuje obdobje za kalibracijo, primerja pa se napovedane in dejanske stopnje umrljivosti, ki so ob koncu napovednega obdobja.
- **test napovedane gostote verjetnosti smrti** (angl. *mortality probability density forecast test*) temelji na testiranju hipoteze, da so dejanske stopnje umrljivosti določenega leta konsistentne z napovedano gostoto verjetnosti smrti, ki je dobljena na podlagi kalibracije skrajšanega obdobja.

V magistrskem delu bom izvedla povratni test zmanjševanja napovednega obdobja in povratni test razširjenega napovednega obdobja, medtem ko bom za ostale oblike povratnih testov predstavila možen postopek izvedbe le-teh na danih podatkih.

S povratnim testom zmanjševanja napovednega obdobja sem preverjala, ali projekcije začetnih stopenj umrljivosti za ženske stare 65 let konvergirajo k dejanskim začetnim stopnjam umrljivosti v letu 2014. Najprej sem izvedla kalibracijo na podatkih za leta 1982–2002, nato pa začetne stopnje umrljivosti projicirala vse do vključno leta 2014. Potem sem ponovno izvedla kalibracije, vendar vsakič za daljše obdobje, to je za obdobja 1982–2003, 1982–2004, ..., 1982–2013. Za vsako izmed kalibracij sem izvedla projekcije začetnih stopenj umrljivosti do vključno leta 2014. Bolj ko se približujemo letu 2014, bolj bi se morali intervali zaupanja napovedanih začetnih stopenj umrljivosti za ženske, stare 65 in leto 2014 ožati, projekcije stopenj umrljivosti pa konvergirati k določeni začetni stopnji

umrljivosti, ki bi naj bila blizu dejanske začetne stopnje umrljivosti za ženske, stare 65 v letu 2014. Rezultati povratnega testa so predstavljeni na Sliki 40 (Priloga 8). Gre za grafičen prikaz napovedanih začetnih stopenj umrljivosti v odvisnosti od zadnjega koledarskega leta v obdobju za kalibracijo, na osnovi katere izvajamo projekcijo začetnih stopenj umrljivosti za ženske stare 65 let v letu 2014. Črtkana krivulja označuje pričakovane začetne stopnje umrljivosti za ženske, stare 65 let v letu 2014, rdeče krivulje pa označujejo meje 95-odstotnega intervala zaupanja le-teh. Črna točka označuje dejansko začetno stopnjo umrljivosti žensk, starih 65 let v letu 2014. Kot je razvidno iz Slike 40 (Priloga 8), za vse modele velja, da napovedane začetne stopnje umrljivosti konvergirajo k določeni začetni stopnji umrljivosti. Le-ta je blizu dejanske začetne stopnje umrljivosti žensk starih 65 let v letu 2014 za vse modele, razen za Poisson Lee-Carterjev in Renshaw-Habermanov model. V primeru Renshaw-Habermanovega modela je opaziti tudi vzorec, ki nakazuje na nestabilnost napovedi.

Povratni test razširjenega napovednega obdobja sem izvedla tako, da sem najprej izvedla kalibracijo na podatkih za leta 1982–2002. Nato sem izvedla projekcijo začetnih stopenj umrljivosti vse do vključno leta 2014 ter dobljene vrednosti primerjala z dejanskimi začetnimi stopnjami umrljivosti v letih 2003–2014. Preverjala sem, ali dejanske začetne stopnje umrljivosti padejo v 95-odstotni interval zaupanja napovedanih vrednosti. Iz Slike 41 (Priloga 9) je razvidno, da so se najboljše odrezali Poisson Lee-Carterjev, Renshaw-Habermanov in APC-model, pri katerih so vse dejanske začetne stopnje umrljivosti znotraj meja 95-odstotnega intervala zaupanja. Najslabše se je odrezal M7-model, saj so skoraj vse dejanske začetne stopnje umrljivosti zunaj 95-odstotnega intervala zaupanja. Tako pri M7-modelu, kakor tudi pri CBD-modelu in Platovem modelu, so dejanske začetne stopnje umrljivosti blizu spodnje meje 95-odstotnega intervala zaupanja.

Povratni test premikajočega se napovednega obdobja lahko na danih podatkih izvedemo tako, da najprej naredimo kalibracijo na podatkih za leta 1982–1992 ter nato primerjamo napovedane stopnje umrljivosti za leto 2002 z dejanskimi. Postopek nato ponavljamo, pri čemer se obdobje kalibracije podaljšuje za eno leto, primerjamo pa stopnje umrljivosti v letu, ki je vsakič za eno leto zamaknjeno v prihodnost, dokler ne pridemo do leta 2014. Na primer, kadar izvajamo kalibracijo na podatkih za leta 1982–1997, primerjamo napovedane in dejanske stopnje umrljivosti v letu 2007. To pomeni, da je dolžina napovednega obdobja vedno enaka, le-da se premika skozi čas. V danem primeru je dolžina napovednega obdobja vedno enaka 10 let. Na koncu preverimo, ali dejanske začetne stopnje umrljivosti padejo v 95-odstotne intervale zaupanja pripadajočih napovedanih vrednosti.

Test napovedane gostote verjetnosti smrti lahko na danih podatkih izvedemo tako, da najprej naredimo kalibracijo na podatkih za leta 1982–1992, nato pa na podlagi napovedanih stopenj umrljivosti določimo gostoto verjetnosti smrti za leto 2002. Namen testa je preveriti ničelno hipotezo, da je napovedana gostota verjetnosti smrti konsistentna z dejanskimi stopnjami umrljivosti v letu 2002. Denimo, da preverjamo hipotezo za starost

x . Če narišemo graf gostote verjetnosti smrti, kjer so na abscisni osi predstavljene dejanske stopnje umrljivosti pri vseh starostih, zajetih v kalibracijo, potem lahko p-vrednost²⁴ ničelne hipoteze določimo kot ordinato presečišča med grafom gostote verjetnosti smrti in navpične premice, ki seka abscisno os v dejanski stopnji umrljivosti za starost x , saj le-ta namreč ustreza verjetnosti, da bo stopnja umrljivosti pri starosti x manjša ali enaka opazovani stopnji umrljivosti (Dowd et al., 2010b, str. 292). Če je p-vrednost manjša od izbrane stopnje tveganja, lahko ničelno hipotezo zavrnilo. Ker nas resničnost ničelne hipoteze zanima v več letih, lahko postopek ponovimo tako, da obdobje za kalibracijo povečujemo za eno leto, skladno s tem pa povečujemo tudi leto, v katerem primerjamo dobljeno napovedano gostoto verjetnosti smrti z dejanskimi stopnjami umrljivosti.

8.3 Izbira ustreznih modelov

Kot že ugotovljeno, CBD- in M7-model nista primerna modela za dani nabor podatkov, saj sta se zelo slabo odrezala v okviru testov prilagajanja podatkom, to je glede na kriterija AIC in BIC ter glede na strukturo prilagojenih standardiziranih deviančnih ostankov, dobljenih s kalibracijo na danih podatkih. Tudi v primeru Poisson Lee-Carterjevega modela je bilo za moške opaziti določen vzorec na grafu (Slika 26 v Prilogi 3), ki prikazuje vrednosti prilagojenih standardiziranih deviančnih ostankov glede na njihov predznak, kar nakazuje na vpliv rojstnih kohort, ki jih le-ta model ne zajame.

V testu robustnosti parametrov se je najslabše odrezal Renshaw-Habermanov model, ki je ob spremembi obdobja za kalibracijo ponudil najbolj drugačno rešitev. Prav tako se je pokazal kot model z največjo negotovostjo ocenjenih parametrov. Problem Renshaw-Habermanovega modela je tudi v tem, da ima velikokrat težave s konvergenco iterativnega postopka iskanja ocen parametrov.

Glede na rezultate testov sta se najbolje odrezala APC-model in Platov model, čeprav ima vsak izmed njih tudi svoje pomanjkljivosti. Platov model je edini model, za katerega velja, da se pasovi z višanjem starosti širijo. Se je pa Platov model slabše odrezal na testu robustnosti projekcij, saj je pas projekcij stopenj umrljivosti, ki sem jih dobila s kalibracijo na podatkih za leta 1992–2014, v nasprotju s pričakovanji širši kot pas projekcij stopenj umrljivosti, ki sem jih dobila s kalibracijo na podatkih za leta 1982–2014. Prav tako se je slabše odrezal na povratnem testu razširjenega napovednega obdobja. APC-model se je na testu robustnosti projekcij in povratnem testu razširjenega napovednega obdobja odrezal veliko bolje, saj so pasovi omenjenih projekcij med seboj podobni. Slabost APC-modela pa je, da se pasovi projekcij stopenj umrljivosti z višanjem starosti ne širijo.

Za izračun kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti bom uporabila kar 4 modele, in sicer Poisson Lee-Carterjev model, Renshaw-Habermanov model, APC-model in Platov

²⁴ p-vrednost je verjetnost, da je pričakovana vrednost večja ali enaka opazovani vrednosti, ob predpostavki, da velja ničelna hipoteza (P-Value, b.l.).

model. To bom storila z namenom, da prikažem, kako lahko izbira neustreznega modela vpliva na višino izračunanih kapitalskih zahtev.

9 UMRLJIVOST PORTFELJA

Umrljivost portfelja (po)zavarovalnice se običajno razlikuje od umrljivosti populacije, saj nanj vpliva antiselekcija. Na primer_ za nakup rentnega zavarovanja se običajno odločajo zavarovanci boljšega zdravstvenega stanja, zato so stopnje umrljivosti takšnega portfelja lahko nižje kakor stopnje umrljivosti v populaciji (Repek & Šemrov, 2012, str. 59).

9.1 Merjenje umrljivosti portfelja

Umrljivost portfelja (po)zavarovalnice merimo s tako imenovanimi izkustvenimi faktorji umrljivosti portfelja (angl. *portfolio experience mortality factors*). Izkustveni faktor umrljivosti portfelja za osebe, stare x let v letu t , je definiran kot (Plat, 2009b, str. 90)

$$P_x(t) = \frac{q_x^{port}(t)}{q_x^{pop}(t)} \quad (141)$$

kjer $q_x^{pop}(t)$ prikazuje stopnjo umrljivosti osebe stare x let v letu t v celotni populaciji določene države, $q_x^{port}(t)$ pa stopnjo umrljivosti osebe stare x let v letu t v portfelju (po)zavarovalnice.

Kadar računamo izkustvene faktorje umrljivosti portfelja, je smiselno portfelj razdeliti glede na naslednje značilnosti tveganj (oseb): starost, smrt, zavarovalna vsota, zavarovalna doba, status kadilca, indeks telesne mase, socialno-ekonomski položaj, geografska regija, prebivališča, zaposlitev in podobno. Prav tako je smiselno le-te določati na nivoju homogenih skupin tveganj, to je zavarovalnih produktov s podobnimi značilnostmi. Na primer: portfelj mešanih življenjskih zavarovanj ima višje izkustvene faktorje umrljivosti kot portfelj rentnih zavarovanj (Barrieu et al., 2012, str. 207). Zaradi slabe baze podatkov o tveganjih se veliko (po)zavarovalnic pri izračunu izkustvenih faktorjev umrljivosti portfelja znotraj posamezne homogene skupine tveganj običajno omejijo zgolj na starost in spol.

Za izračun izkustvenih faktorjev umrljivosti portfelja lahko uporabljamo začetne ali centralne stopnje umrljivosti, pri čemer je treba paziti, da za prikaz umrljivosti populacije in umrljivosti portfelja uporabimo enaki količini (Plat, 2009b, str. 89). V nadaljevanju bom za izračun stopenj umrljivosti portfelja uporabila aproksimacijo (17), ki se uporablja za izračun centralnih stopenj umrljivosti.

Stopnje umrljivosti v portfelju (po)zavarovalnice lahko izračunamo s pomočjo dveh metod, in sicer metode števila smrti in metode zavarovalnih vsot.

Stopnjo umrljivosti osebe, stare x let v letu t v okviru metode števila smrti, izračunamo s formulo

$${}_NDq_x^{port}(t) = \frac{d_x^{port}(t)}{n_x^{port}(t)} = \frac{1}{n_x^{port}(t)} \sum_{i=1}^{n_x^{port}(t)} \theta_x^{port}(t, i) \quad (142)$$

kjer je $n_x^{port}(t)$ povprečno število oseb v portfelju v letu t , starih x let, $d_x^{port}(t)$ pa število umrlih oseb starih x let v letu t . $\theta_x^{port}(t, i)$ je indikator, ki označuje, ali je i -ta oseba umrla. Kadar je i -ta oseba umrla, je enak 1; sicer je enak 0.

V primeru metode zavarovalnih vsot vsako osebo utežimo z zavarovalno vsoto, tako da stopnjo umrljivosti osebe stare x let v letu t izračunamo kot

$${}_{SA}q_x^{port}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_x^{port}(t)} SA_x^{port}(t, i) \theta_x^{port}(t, i)}{\sum_{i=1}^{n_x^{port}(t)} SA_x^{port}(t, i)} \quad (143)$$

kjer $SA_x^{port}(t, i)$ označuje zavarovalno vsoto i -te osebe.

Oglejmo si razliko med obema metodama na primeru portfelja 500 polic, ki ga tvorijo ženske stare 65 let. 300 oseb je zavarovanih za zavarovalno vsoto 10.000 EUR, 200 oseb pa za zavarovalno vsoto 50.000 EUR. V danem letu je umrlo 20 oseb, in sicer 16 oseb z zavarovalno vsoto 10.000 EUR in 4 osebe z zavarovalno vsoto 50.000 EUR.

Stopnja umrljivosti po metodi števila smrti bi v danem primeru je enaka

$${}_NDq_{65}^{port}(t) = \frac{20}{500} = 4 \% \quad (144)$$

stopnja umrljivosti po metodi zavarovalnih vsot pa

$${}_{SA}q_{65}^{port}(t) = \frac{16 \cdot 10.000 \text{ EUR} + 4 \cdot 50.000 \text{ EUR}}{300 \cdot 10.000 \text{ EUR} + 200 \cdot 50.000 \text{ EUR}} \doteq 2.8 \% \quad (145)$$

Za (po)zavarovalnice je metoda zavarovalnih vsot bolj relevantna, saj se v stopnjah umrljivosti po tej metodi odraža dejanska višina zavarovalnih vsot, ki jih bo morala (po)zavarovalnica izplačati.

V splošnem so stopnje umrljivosti, dobljene z metodo zavarovalnih vsot, nižje v primerjavi s stopnjami umrljivosti, dobljenimi z metodo števila smrti, medtem ko pa je volatilitnost večja (Plat, 2009b, str. 87–88).

9.2 Napovedovanje umrljivosti portfelja

(Po)zavarovalnice običajno nimajo veliko zgodovinskih podatkov, na podlagi katerih bi lahko izvedle kalibracijo stohastičnih modelov umrljivosti. Prav tako je portfelj (po)zavarovalnice veliko manjši v primerjavi z velikostjo populacije države (Plat, 2009b, str. 87). V praksi se ta problem velikokrat reši tako, da se na projekcijah stopenj umrljivosti populacije uporabi kar (deterministične) izkustvene faktorje umrljivosti portfelja, čeprav je smiselno privzeti, da so tudi izkustveni faktorji umrljivosti portfelja stohastične spremenljivke (Plat, 2009a, str. 88). V nadaljevanju bom predstavila model, ki je skušal to dejstvo upoštevati in ki so ga predlagali Haberman et al. (2014, str. 28–34). V modelu so predpostavili, da je število smrti v populaciji in portfelju porazdeljeno z binomsko porazdelitvijo, kot osnova pa so jim služile začetne stopnje umrljivosti. V nadaljevanju bom izhajala iz centralnih stopenj umrljivosti in bom privzela, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu.

Za populacijo označimo z $D_x^{pop}(t)$ število umrlih oseb starih x let v letu t in z $E_x^{C,pop}(t)$ centralno izpostavljenost oseb starih x let v letu t . Potem je centralna stopnja umrljivosti oseb starih x let v populaciji v letu t enaka

$$m_x^{pop}(t) = \frac{D_x^{pop}(t)}{E_x^{C,pop}(t)} \quad (146)$$

Če predpostavimo, da je jakost umrljivosti znotraj leta konstantna, pripadajočo začetno stopnjo umrljivosti izračunamo s formulo (sledi po (14))

$$q_x^{pop}(t) = 1 - e^{-m_x^{pop}(t)} \quad (147)$$

Podobno definiramo $D_x^{port}(t)$, $E_x^{C,port}(t)$, $m_x^{port}(t)$ in $q_x^{port}(t)$ za portfelj oziroma homogeno skupino tveganj znotraj portfelja.

Denimo, da imamo podatke o $D_x^{pop}(t)$ in $E_x^{C,pop}(t)$ za starosti $x_1, \dots, x_{m_{pop}}$ in koledarska leta $t_1, \dots, t_{n_{pop}}$, podatke o $D_x^{port}(t)$ in $E_x^{C,port}(t)$ pa za starosti $x_1, \dots, x_{m_{port}}$ in koledarska leta $t_1, \dots, t_{n_{port}}$.

Sedaj predpostavimo, da je število smrti v populaciji porazdeljeno po Poissonu

$$D_x^{pop}(t) \sim Po(E_x^{C,pop}(t)m_x^{pop}(t)) \quad (148)$$

in poiščemo ustrezen stohastični model umrljivosti za populacijo. V splošnem lahko le-tega zapišemo kot

$$\ln(m_x^{pop}(t)) = \alpha_x^{pop} + \sum_{i=1}^{N_{pop}} \beta_x^{(i,pop)} \kappa_t^{(i,pop)} + \beta_x^{(0,pop)} \gamma_{t-x}^{pop} \quad (149)$$

oziroma

$$\text{logit}(q_x^{pop}(t)) = \alpha_x^{pop} + \sum_{i=1}^{N_{pop}} \beta_x^{(i,pop)} \kappa_t^{(i,pop)} + \beta_x^{(0,pop)} \gamma_{t-x}^{pop} \quad (150)$$

Pri tem α_x^{pop} označuje splošen (izhodiščni) nivo stopenj umrljivosti populacije, N_{pop} pa število členov v modelu, ki jih potrebujemo, da pojasnimo spremembe v stopnjah umrljivosti populacije s časom. Parametri $\kappa_t^{(i,pop)}$ označujejo splošen trend spreminjanja stopenj umrljivosti populacije s časom, $\beta_x^{(i,pop)}$ pa nam povedo, v kolikšni meri se bo ta sprememba odrazila pri določeni starostni skupini. S parametrom γ_{t-x}^{pop} skušamo ujeti efekt rojstne kohorte populacije, $\beta_x^{(0)}$ pa nam pove, v kolikšni meri osebe, stare x let, prispevajo k danemu efektu rojstne kohorte.

Prav tako predpostavimo, da je število smrti v portfelju (oziroma homogeni skupini tveganj znotraj portfelja) porazdeljeno po Poissonu

$$D_x^{port}(t) \sim Po(E_x^{C,port}(t)m_x^{port}(t)) \quad (151)$$

Stopnje umrljivosti portfelja modeliramo tako, da modeliramo razliko med stopnjami umrljivosti portfelja in stopnjami umrljivosti populacije. V splošnem lahko model zapišemo kot

$$\begin{aligned} \ln(m_x^{port}(t)) - \ln(m_x^{pop}(t)) &= \ln\left(\frac{m_x^{port}(t)}{m_x^{pop}(t)}\right) = \ln(P_x^m(t)) = \\ &= \alpha_x^{diff} + \sum_{i=1}^{N_{diff}} \beta_x^{(i,diff)} \kappa_t^{(i,diff)} + \beta_x^{(0,diff)} \gamma_{t-x}^{diff} \end{aligned} \quad (152)$$

kjer je $P_x^m(t)$ izkustveni faktor umrljivosti portfelja, izražen s centralnimi stopnjami umrljivosti, oziroma kot

$$\begin{aligned}
& \text{logit}(q_x^{port}(t)) - \text{logit}(q_x^{pop}(t)) \\
&= \alpha_x^{diff} + \sum_{i=1}^{N_{diff}} \beta_x^{(i,diff)} \kappa_t^{(i,diff)} + \beta_x^{(0,diff)} \gamma_{t-x}^{diff}
\end{aligned} \tag{153}$$

Pri tem α_x^{diff} označuje splošen (izhodiščni) nivo razlik v stopnjah umrljivosti med portfeljem in populacijo, N_{diff} pa število členov v modelu, ki jih potrebujemo, da pojasnimo spremembe v razlikah stopenj umrljivosti med portfeljem in populacijo s časom. Parametri $\kappa_t^{(i,diff)}$ označujejo splošen trend spreminjanja razlik stopenj umrljivosti med portfeljem in populacijo s časom, $\beta_x^{(i,diff)}$ pa nam povedo, v kolikšni meri se bo ta sprememba odrazila pri določeni starostni skupini. S parametrom γ_{t-x}^{diff} skušamo ujeti razliko med učinkom rojstne kohorte portfelja in populacija, $\beta_x^{(0)}$ pa nam pove, v kolikšni meri se bo ta razlika v učinku rojstne kohorte izrazila za določeno starostno skupino.

Haberman et al. (2014, str. 32) so za napovedovanje časovnih komponent $\kappa_t^{(i,pop)}$ in $\kappa_t^{(i,diff)}$ uporabili multivariatna slučajna sprehoda z zamikom

$$\kappa_t^{pop} = \kappa_{t-1}^{pop} + \theta^{pop} + \varepsilon_t^{pop}, \quad \kappa_t^{pop} = \begin{pmatrix} \kappa_t^{(1,pop)} \\ \vdots \\ \kappa_t^{(N_{pop,pop})} \end{pmatrix}, \quad \xi_t^{pop} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma^{pop}) \tag{154}$$

$$\kappa_t^{diff} = \kappa_{t-1}^{diff} + \theta^{diff} + \varepsilon_t^{diff}, \quad \kappa_t^{diff} = \begin{pmatrix} \kappa_t^{(1,diff)} \\ \vdots \\ \kappa_t^{(N_{diff,diff})} \end{pmatrix}, \quad \xi_t^{diff} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma^{diff}) \tag{155}$$

kjer je θ^{pop} N_{pop} -dimenzionalen, θ^{diff} pa N_{diff} -dimenzionalen vektor, ki predstavljata parametre zamika, Σ^{pop} ($N_{pop} \times N_{pop}$)-dimenzionalna in Σ^{diff} ($N_{diff} \times N_{diff}$)-dimenzionalna kovariančna matrika ter ξ_t^{pop} in ξ_t^{diff} multivariatna bela šuma.

Za projekcije vrednosti γ_{t-x}^{pop} so Haberman et al. (2014, str. 32) uporabili ARIMA (1,1,0) model

$$\Delta \gamma_c^{pop} = \theta_0^{pop} + \theta_1^{pop} \Delta \gamma_{c-1}^{pop} + \varepsilon_c^{pop} \tag{156}$$

kjer je $\Delta \gamma_c^{pop} = \gamma_c^{pop} - \gamma_{c-1}^{pop}$ in $\varepsilon_c^{pop} \sim N(0, \sigma_{pop}^2)$, za projekcije parametra γ_{t-x}^{diff} pa ARIMA (1,0,0) model

$$\gamma_c^{diff} = \theta_0^{diff} + \theta_1^{diff} \gamma_{c-1}^{diff} + \varepsilon_c^{diff} \tag{157}$$

kjer je $\varepsilon_c^{diff} \sim N(0, \sigma_{diff}^2)$.

Haberman et al. (2014, str. 32) so v svojem modelu privzeli, da so časovne vrste, ki določajo stopnje umrljivosti populacije, in časovne vrste, ki določajo razlike med stopnjami umrljivosti portfelja in stopnjami umrljivosti populacije, neodvisne.

Zgoraj prikazan model, ki ga imenujemo model referenčne populacije, lahko uporabimo tudi za napovedovanje umrljivosti populacij, ki so majhne ali imajo malo zgodovinskih podatkov. Na primer Antonio et al. (2015, str. 3) so za umrljivost prebivalstva Belgije uporabili naslednji model

$$\ln(\mu_x^{BE}(t)) = \ln(\mu_x^{EU}(t)) + \ln(\mu_x^{diff}(t)) \quad (158)$$

kjer $\mu_x^{BE}(t)$ predstavlja jakost umrljivosti prebivalca Belgije starega x let v letu t , $\mu_x^{EU}(t)$ pripadajočo jakost umrljivosti 14 evropskih držav, vključno z Belgijo, ki imajo nadpovprečen bruto domači proizvod, in $\mu_x^{diff}(t)$ del jakosti umrljivosti, ki je specifična za Belgijo. Pri tem so $\mu_x^{EU}(t)$ in $\mu_x^{diff}(t)$ modelirali s Poisson Lee-Carterjevim modelom

$$\ln(\mu_x^{EU}(t)) = A_x + B_x K_t + \eta_{x,t} \quad (159)$$

$$\ln(\mu_x^{diff}(t)) = a_x + b_x k_t + \xi_{x,t} \quad (160)$$

ki predvideva, da je število smrti porazdeljeno po Poissonu. Za projekcijo K_t so uporabili ARIMA (0,1,0) model, za projekcijo parametra k_t pa ARIMA(1,0,0) model (Antonio et al., 2015, str. 4)

$$K_t = K_{t-1} + \theta + \varepsilon_t \quad (161)$$

$$k_t = a k_{t-1} + \delta_t \quad (162)$$

kjer je $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ in $\varepsilon_\delta \sim N(0, \sigma_\delta^2)$. Iz napovedanih jakosti umrljivosti so, ob upoštevanju predpostavke, da se jakost umrljivosti znotraj leta ne spreminja, pripadajoče začetne stopnje umrljivosti dobili iz enačbe (14).

10 IZRAČUN KAPITALSKIH ZAHTEV ZA DOLGOŽIVOST

10.1 Testni portfelj

Izračun kapitalskih zahtev za dolgoživost sem izvedla na testnem portfelju, ki ga sestavlja 1.000 polic rentnih zavarovanj, v okviru katerih se ob koncu vsakega leta, ob predpostavki,

da je zavarovanec živ, izplača renta v višini $A = 2.400 \text{ EUR}$. Zavarovanci so osebe istega spola, ki so na dan izračuna kapitalskih zahtev, to je na dan 31. december 2015, bili enako stari. Nadalje sem predpostavila, da je umrljivost portfelja enaka umrljivosti populacije prebivalcev Slovenije ter da sta bila izplačilo rent in obračun morebitnih obratovalnih stroškov ob koncu leta 2015 že izvedena.

10.2 Ekstrapolacija napovedanih stopenj umrljivosti pri višjih starostih

Ker so podatki, na podlagi katerih sem izvedla projekcijo stopenj umrljivosti, omejeni na starosti do vključno 100 let, in ker je v splošnem pričakovati vedno daljšo življenjsko dobo (Slika 9), sem v skladu z ugotovitvami, predstavljenimi v podpoglavju 3.4.1, za višje starosti uporabila metodo ekstrapolacije začetnih stopenj umrljivosti, ki sta jo predstavila Denuit in Goderniaux (2005, str. 39). Z dano metodo ekstrapolacije sem izračunala začetne stopnje umrljivosti za starosti večje od 85 let. Za zgornjo starostno mejo sem določila starost $\omega = 130$ let, kot osnovo za ekstrapolacijo pa začetne stopnje umrljivosti za starosti med 60 in 100 let. Začetne stopnje umrljivosti za starosti do vključno 85 let sem pustila nespremenjene.

10.3 Najboljša ocena obveznosti

Najboljša ocena obveznosti se izračuna kot pričakovana sedanja vrednost prihodnjih denarnih tokov, ki izhajajo iz (po)zavarovalnih pogodb, to je

$$BEL_0 = - \sum_{k>0} \frac{CF_k}{(1+r_k)^k} \quad (163)$$

kjer je CF_k pričakovani denarni tok na koncu k -tega leta in r_k netvegana obrestna mera za dospelost k (angl. *spot rate*). Kadar gre za odlive (na primer, plačila obveznosti iz (po)zavarovalnih pogodb), je CF_k negativen. Oznaka BEL_t označuje najboljšo oceno obveznosti v času t , merjenem od izhodiščnega datuma vrednotenja, ki je v danem primeru 31. december 2015. To pomeni, da BEL_0 označuje najboljšo oceno obveznosti, ki velja na dan 31. decembra 2015 (konec dneva).

Predpostavimo, da na danem testnem portfelju denarne tokove CF_k poleg rentnih izplačil $A = 2.400 \text{ EUR}$ sestavljajo še obratovalni stroški $E = 30 \text{ EUR}$, ki se zgodijo ob koncu vsakega leta in se letno povečujejo s stopnjo inflacije $i = 1 \%$. Do realizacije omenjenih denarnih tokov pride le v primeru, da je zavarovana oseba ob koncu leta živa. Dodatno predpostavimo, da se zavarovanje prekine samo v primeru smrti. Če je oseba v času $t = 0$ stara x let, potem lahko pričakovani denarni tok CF_k zapišemo kot

$$CF_k = - {}_k p_x (A + E(1+i)^{k-1}) \quad (164)$$

${}_k p_x$ označuje verjetnost, da bo oseba stara x let dočkala starost $x + t$ let, in se izračuna kot (Gerber, 1997, str. 21)

$${}_k p_x = {}_{k-1} p_x (1 - {}_k q_x) = p_x p_{x+1} \dots p_{x+k-1} \quad (165)$$

pri čemer je ${}_0 p_x = 1$.

V izračunu najboljše ocene obveznosti sem upoštevala neprilagojeno²⁵ (angl. *without volatility adjustment*) netvegano obrestno mero na dan 31. december 2015 (EIOPA, 2016) za območje evra, ki se uporablja za izračun solventnostnega kapitala v okviru direktive Solventnost II.

Za izračun najboljše ocene obveznosti za namen izračuna kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti z uporabo standardne formule sem uporabila krivuljo umrljivosti, ki jo sestavljajo pričakovane (najbolj verjetne) stopnje umrljivosti, izračunane v okviru projekcij posameznih stohastičnih modelov umrljivosti. (Po)zavarovalnice, ki za izračun najboljše ocene obveznosti in kapitalskih zahtev uporabljajo deterministični pristop²⁶, običajno uporabijo modificirano krivuljo preteklega leta. Rezultati izračuna najboljše ocene obveznosti z determinističnim pristopom na izbranih testnih portfeljih, dobljenih z APC-modelom, so predstavljeni v Tabeli 3. Kot je razvidno iz Tabele 3, najboljša ocena obveznosti s starostjo pada. To je posledica dejstva, da bodo mlajši zavarovanci v povprečju živeli dlje, zato zanje pričakujemo več prihodnjih obveznosti. Opazimo lahko tudi, da je najboljša ocena obveznosti za ženske višja kot za moške. Pričakovana starost žensk je v povprečju višja (glej Sliko 9), zato pričakujemo, da bodo v povprečju živele dlje, zaradi česar zanje pričakujemo več prihodnjih obveznosti.

Tabela 3: Najboljša ocena obveznosti, izračunane z determinističnim pristopom na testnem portfelju v okviru APC-modela

Spol	Ženske			Moški		
Starost	45 let	65 let	85 let	45 let	65 let	85 let
BEL_0 (v 1.000 EUR)	77.912,00	49.068,75	15.126,08	73.599,64	42.645,25	12.037,85

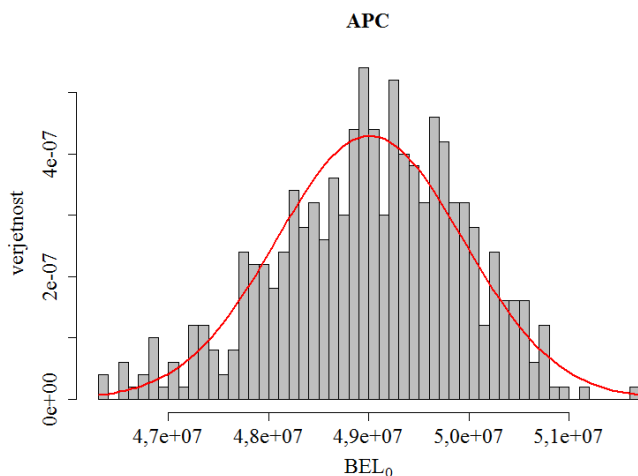
V nasprotju z determinističnim pristopom pri stohastičnem pristopu za izračun najboljše ocene obveznosti BEL_0 izvedemo več projekcij prihodnjih stopenj umrljivosti, tako da dobimo porazdelitev najboljše ocene obveznosti. Na Sliki 26 je prikazana porazdelitvena funkcija najboljše ocene obveznosti, ki sem jo dobila z izvedbo 500 simulacij projekcij stopenj umrljivosti z APC-modelom na testnem portfelju žensk starih 65 let. Rdeča črta označuje graf gostote verjetnosti normalne porazdelitve z enakim matematičnim upanjem

²⁵ (Po)zavarovalnica lahko po 182. členu ZZavar-1 uporabi uskladitveno prilagoditev netvegane obrestne mere.

²⁶ O determinističnem pristopu govorimo, kadar je osnova za izračun en scenarij.

in standardnim odklonom. Grafični prikaz porazdelitvenih funkcij najboljše ocene obveznosti za ostale izbrane stohastične modele umrljivosti na danem portfelju je v Prilogi 10 (Slika 42).

Slika 26: Porazdelitvena funkcija najboljše ocene obveznosti na testnem portfelju 65 let starih žensk v okviru APC-modela



V Tabeli 4 je na testnem portfelju žensk, starih 65 let, za izbrane stohastične modele umrljivosti prikazana pričakovana najboljša ocena obveznosti $\overline{BEL}_0$, odstotek standardnega odklona σ_{BEL_0} v le-tej, njena tvegana vrednost z 99,5-odstotno stopnjo zaupanja ($VaR_{99,5\%}(BEL_0)$) in ekvivalenten šok, ki bi v okviru determinističnega pristopa vrnil vrednost BEL_0 , ki je enaka $VaR_{99,5\%}(BEL_0)$.

Tabela 4: Analiza najboljše ocene obveznosti v okviru izbranih stohastičnih modelov umrljivosti na portfelju žensk, starih 65 let

Model	$\overline{BEL}_0$ (v 1.000 EUR)	$\sigma_{BEL_0}/\overline{BEL}_0$ (v %)	$VaR_{99,5\%}(BEL_0)$ (v 1.000 EUR)	Ekvivalenten šok za $VaR_{99,5\%}(BEL_0)$ (v %)
PLC	49.166,39	1,93	51.384,34	-10,74
RH	49.993,60	2,12	52.567,33	-17,18
APC	49.065,40	1,89	51.297,70	-14,75
PLAT	47.767,92	2,04	50.166,99	-15,67

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, PLAT = Platov model

Kot je razvidno iz Tabele 4 je povprečna vrednost najboljše ocene obveznosti $\overline{BEL}_0$ zelo podobna vrednosti najboljše ocene obveznosti, izračunane v okviru determinističnega pristopa. Najnižjo $\overline{BEL}_0$ in $VaR_{99,5\%}(BEL_0)$ sem dobila v okviru Platovega modela, najvišjo pa v okviru Renshaw-Habermanovega modela. Kot lahko vidimo, je ekvivalenten

šok, ki ga moramo uporabiti za izračun BEL_0 v okviru determinističnega pristopa, da bi dobili vrednost, ki je enaka $Var_{99,5\%}(BEL_0)$, med modeli zelo različen.

10.4 Izračun s standardno formulo

Po 138. členu Deligirane uredbe (2015) se kapitalske zahteve za tveganje dolgoživosti v okviru standardne formule izračunajo kot izguba osnovnih lastnih sredstev (po)zavarovalnice zaradi 20-odstotnega trajnega znižanja stopenj umrljivosti. Kapitalske zahteve za tveganje dolgoživosti v času t so torej enake

$$SCR_t^{long} = NAV_t - (NAV_t | (1 - 20\%) q_x(s); \forall s \geq t) \quad (166)$$

Pri tem NAV_t označuje čisto vrednost osnovnih lastnih sredstev (angl. *net asset value*) v času t in se izračuna kot

$$NAV_t = A_t - BEL_t \quad (167)$$

kjer A_t označuje tržno vrednost sredstev, BEL_t pa najboljšo oceno obveznosti v času t . Za vse nadaljnje izračune privzemimo, da sprememba stopenj umrljivosti ne vpliva na vrednost sredstev A_t . Tako lahko formulo (166) poenostavimo

$$SCR_t^{long} = BEL_t^{long} - BEL_t \quad (168)$$

pri čemer BEL_t^{long} označuje najboljšo oceno obveznosti po znižanju stopenj umrljivosti. Pri tem velja omeniti, da je treba SCR_t računati na nivoju posamezne police oziroma skupin polic, določenih v skladu s 35. členom Deligirane uredbe (2015).

V Tabeli 5 sta prikazani najboljši oceni obveznosti pred in po spremembi stopenj umrljivosti za -20 % ter zahtevan solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti, izračunan po standardni formuli.

Tabela 5: Najboljša ocena obveznosti (v 1.000 EUR) pred in po spremembi stopenj umrljivosti ter zahtevan solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti (v 1.000 EUR), izračunan po standardni formuli

Model	PLC	RH	APC	PLAT
BEL_0	49.878,82	49.972,07	49.068,75	47.823,70
BEL_0^{long}	52.826,95	53.040,59	52.177,27	50.888,08
SCR_0^{long}	2.948,13	3.068,52	3.108,51	3.064,38

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, PLAT = Platov model

Najvišji zahtevani solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti sem dobila na podlagi pričakovanih stopenj umrljivosti APC-modela, najnižjega pa na podlagi pričakovanih stopenj umrljivosti Poisson Lee-Carterjevega modela.

10.5 Izračun z uporabo stohastičnih modelov

Zahtevan solventnostni kapital mora ustrezati tvegani vrednosti osnovnih lastnih virov sredstev (po)zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta. Intuitivno zahtevan solventnostni kapital je enak osnovnim lastnim virom sredstev, ki jih potrebujemo v času $t = 0$ za pokritje izgub, ki se bodo z vsaj 99,5-odstotno verjetnostjo zgodile v enem letu, to je do $t = 1$ (Börger, 2010, str. 228). To pomeni, da je zahtevani solventnostni kapital enak najmanjši vrednosti φ , za katero velja (Bauer et al., 2012, str. 456)

$$P(NAV_1 \geq 0 | NAV_0 = \varphi) \geq 99,5 \% \quad (169)$$

Zaradi poenostavitve izračunov lahko uporabimo naslednjo aproksimacijo (Bauer et al., 2012, str. 457)

$$SCR_0 = \operatorname{argmin}_{\varphi} \left\{ P \left(NAV_0 - \frac{NAV_1}{1 + r_1} > \varphi \right) \leq 0,5 \% \right\} \quad (170)$$

Zgornjo formulo lahko uporabimo tudi za izračun zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti SCR_t^{long} . Dodatno bom zaradi enostavnosti predpostavila, da so denarni tokovi iz naslova sredstev v prvem letu enaki denarnim tokovom iz naslova obveznosti, to je CF_1 . Tako velja (Börger, 2010, str. 234)

$$A_1 = A_0(1 + r_1) + CF_1 \quad (171)$$

Ker gre v primeru danih testnih portfeljev za izplačilo rent in poplačilo obratovalnih stroškov, je denarni tok CF_1 negativen.

Ob upoštevanju (171) se formula (170) poenostavi (Börger, 2010, str. 234)

$$SCR_0^{long} = \operatorname{argmin}_{\varphi} \left\{ P \left(\frac{BEL_1 - CF_1}{1 + r_1} - BEL_0 > \varphi \right) \leq 0,5 \% \right\} \quad (172)$$

BEL_1 izračunamo tako, da za vsako izmed projekcij stopenj umrljivosti, ki smo jih izvedli v času $t = 0$, ponovno izvedemo projekcijo stopenj umrljivosti v času $t = 1$, upoštevajoč napovedane stopnje umrljivosti za prvo leto. To pomeni, da v času $t = 1$ ponovno izvedemo kalibracijo modelov, ki temelji na zgodovinskih podatkih in na napovedanih

stopnjah umrljivosti za prvo leto. Na podlagi dobljenih ocen parametrov modela nato izvedemo projekcijo stopenj umrljivosti za $t > 1$, na podlagi katerih izračunamo BEL_1 .

Za izračun zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti sem tako v času $t = 0$ kakor tudi v času $t = 1$ izvedla 100 simulacij, na podlagi katerih sem dobila 10.000 možnih vrednosti za φ . φ sem nato poiskala kot tvegano vrednost ob 99,5-odstotni stopnji zaupanja. Zaradi omejitev funkcij v paketu StMoMo, da kot vhodne podatke sprejmejo le število smrti in izpostavljenost in ne stopenj umrljivosti, sem za izpostavljenost v letu 2015 vzela število prebivalcev konec leta 2014, število smrti pa sem izračunala na podlagi projekcij stopenj umrljivosti za leto 2015. Zahtevani solventnostni kapital sem izračunala za testni portfelj, ki ga sestavljajo ženske stare 65 let. Na podlagi izračunanega solventnostnega kapitala SCR_0^{long} sem izračunala tudi višino šoka, ki bi ga morala aplicirati v standardni formuli za izračun kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti, da bi dobila enako višino zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti. Rezultati so predstavljeni v Tabeli 6.

Tabela 6: Zahtevan solventnosti kapital za tveganje dolgoživosti, izračunan z uporabo izbranih stohastičnih modelov umrljivosti, ter potreben ekvivalenten šok v okviru standardne formule

Model	PLC	RH	APC	PLAT
SCR_0^{long} (v 1.000 EUR)	2.737,81	22.464,36	3.168,87	3.287,52
Ekvivalenten šok (v %)	-18,71	-82,96	-20,35	-21,30

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, PLAT = Platov model

Iz Tabele 6 je razvidno, da je višina zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti za različne stohastične modele umrljivosti različna, tako da ima izbira modela vsekakor velik vpliv na višino kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti. Še posebej je to opazno v primeru Renshaw-Habermanovega modela, ki da popolnoma drugačen rezultat. V primeru APC-modela in Platovega modela je zahtevani solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti sicer podoben, vendar je zelo velika razlika v višini izračunane najboljše ocene obveznosti.

Če primerjamo s stohastičnimi modeli umrljivosti izračunan zahtevani solventnostni kapital za tveganje dolgoživosti s tistim, izračunanim s standardno formulo, opazimo, da so razlike pri vseh modelih, razen pri Renshaw-Habermanovem modelu, majhne. Pri tem se je pomembno zavedati, da so dobljene vrednosti izračunane na določenem testnem portfelju in da so razlike v izračunih na dejanskem portfelju (po)zavarovalnice lahko veliko večje.

SKLEP

V zadnjih desetletjih je tveganje dolgoživosti postalo pomemben dejavnik tako za posamezne države, kakor tudi za (po)zavarovalnice, zato je pomembno, da le-te znajo oceniti njegov vpliv na prihodnje obveznosti. Stohastični modeli umrljivosti so odlično orodje, s katerim je mogoče zajeti velik spekter značilnosti spreminjanja stopenj umrljivosti skozi čas in na podlagi ugotovljenega napovedati stopnje umrljivosti v prihodnosti. Vsekakor pa moramo biti previdni pri izbiri ustreznega modela. V magistrskem delu sem skušala prikazati celoten proces od priprave osnovnih statističnih podatkov, validacije modela do izračuna kapitalskih zahtev za tveganje dolgoživosti.

Kot osnova za stohastično modeliranje umrljivosti so kvalitetni in ustrezno segmentirani podatki za dovolj dolgo zgodovinsko obdobje. Podatki o prebivalstvu RS so zaradi majhne populacije dokaj volatilni. Prav tako so za starejša zgodovinska obdobja premalo segmentirani oziroma celo manjkajo. Glede na slabo kvaliteto podatkov bi tako bilo bolj smiselno za napovedovanje umrljivosti populacije oziroma portfelja uporabiti metodo referenčne populacije. V magistrskem delu sem uporabila originalne podatke o prebivalstvu RS, kar se je posledično odražalo v večji negotovosti ocen parametrov stohastičnih modelov umrljivosti kakor tudi v projekcijah stopenj umrljivosti.

Zelo pomemben del procesa izbire ustreznega modela je proces validacije, ki vključuje številne teste, s pomočjo katerih preverjamo, ali se model ustrezno prilagaja podatkom, ali so projekcije stopenj umrljivosti smiselne, ali je negotovost ocenjenih parametrov in projekcij stopenj umrljivosti sprejemljiva in podobno. V magistrskem delu sem preverjala 6 stohastičnih modelov umrljivosti, pri čemer med njimi ni bilo nobenega, ki bi popolnoma zadostil kriterijem. K temu sta se najbolj približala APC- in Platonov model. To ne pomeni, da so preostali modeli na splošno neustrezni. Ustreznost modela je med drugim odvisna tudi od populacije, razpona starosti, za katero izvajamo kalibracijo, in namena uporabe modela.

Ko izberemo ustrezen model, sledi izračun zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti. Izkazalo se je, da je izbira ustreznega modela zelo pomembna, saj se izračunan solventnostni kapital lahko ob uporabi drugega modela povsem razlikuje.

Ker je proces izračuna zahtevanega solventnostnega kapitala z uporabo stohastičnih modelov umrljivosti obsežen in zahteven proces, ki zahteva nenehno preverjanje ustreznosti modelov in predpostavk, se predvsem manjše (po)zavarovalnice odločajo za izračun zahtevanega solventnostnega kapitala za tveganje dolgoživosti na podlagi standardne formule.

LITERATURA IN VIRI

1. The Actuarial Education Company (2010). *CT4-PC-10. Combined Materials Pack. ActEd Study Materials: 2010 Examinations. Subject CT4*. B.k.: The Actuarial Education Company.
2. Agencija za zavarovalni nadzor. (b.l.). *Nove kapitalske zahteve za zavarovalnice in pozavarovalnice*. Najdeno 1. marca 2016 na spletnem naslovu: <https://www.a-zn.si/Default.aspx?id=154>
3. Ahčan, A., Medved, D., Pitacco, E., Sambt, J., & Sraka, R. (2012). *Slovenian Annuity Tables*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
4. Antonio, K., Devolder, L., & Devriendt, S. (2015). *The IA|BE 2015 mortality projection for the Belgian population*. KU Leuven: Faculty of Economics and Business.
5. Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui, N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravanelli, C., & Salhi, Y. (2012). Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012(3), 203–231.
6. Bauer, D., Reuss, A., & Singer, D. (2012). On the Calculation of the Solvency Capital Requirement based on Nested Simulations. *Astin Bulletin*, 42(2), 453–499.
7. Berkovič Simeonov, M. (2012). Lastni viri sredstev zavarovalnic in pozavarovalnic v solventnosti 2. *Zavarovalniški horizonti*, 2010(3–4), 19–40.
8. Booth, H., Maindonal, J., & Smith, L. (2002). Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline. *Population Studies*, 56(3), 326–336.
9. Börger, M. (2010). Deterministic Shock vs. Stochastic Value-at-Risk – An Analysis of the Solvency II Standard Model Approach to Longevity Risk. *Blätter der DGVFM*, 31(2), 225–259.
10. Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3), 373–393.
11. Brouhns, N., Denuit, M., & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3), 212–224.
12. Burnham, K. P. & Anderson, D. R. (2004). Multimodel inference: understanding AIC and BIC in Model Selection. *Sociological Methods & Research*, 33(2), 261–304.
13. Cairns, A. J. G., Blake, D., & Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 687–718.
14. Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., & Balevich, I. (2009). A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England & Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1), 1–35.

15. Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2011). Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(3), 355–367.
16. Central Limit Theorem. (b.l.). V *Wolfram MathWorld, the web's most extensive mathematics resource*. Najdeno 18. junija 2016 na spletnem naslovu: <http://mathworld.wolfram.com/CentralLimitTheorem.html>
17. Chan, W. S., Li, J. S. H., & Li, J. (2014). The CBD Mortality Indexes: Modeling and Applications. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 38–58.
18. Chernick, M. R., & LaBudde, R. A. (2011). *An introduction to bootstrap methods with applications to R*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
19. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2007). QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR. *CEIOPS-FS-14/07*.
20. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (2010). QIS5 Calibration Paper. *CEIOPS-SEC-40-10*.
21. Currie, I. D. (2006). *Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines*. Najdeno 16. marca 2016 na spletnem naslovu: <http://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>
22. Currie, I. D. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4), 356–383.
23. Delegirana uredba Komisije (EU) 2015/35 z dne 10. oktobra 2014 o dopolnitvi Direktive 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta o začetku opravljanja in opravljanju dejavnosti zavarovanja in pozavarovanja (Solventnost II). *Uradni list Evropske unije* št. L 12/58.
24. Denuit, M. & Goderniaux, A. (2005). Closing and projecting life tables using log-linear models. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaries*, (1), 29–49.
25. Deviance. (b.l.). V *Mathworks*. Najdeno 8. aprila 2016 na spletnem naslovu: <http://www.mathworks.com/help/stats/generalizedlinearmodel.deviancettest.html>
26. Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2009). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. New York: Cambridge University Press.
27. Dowd, K., Blake, D., & Cairns, A. J. G. (2007). The Myth of Methuselah and the Uncertainty of Death: The Mortality Fan Charts. *Pensions Institute Discussion Paper PI-0704*.
28. Dowd, K., Blake, D., Cairns, A. J. G., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010a). Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models. *Pensions Institute Discussion Paper PI-0802*.
29. Dowd, K., Blake, D., Cairns, A. J. G., Coughlan, G. D., Epstein, D., & Khalaf-Allah, M. (2010b). Backtesting stochastic mortality models: An ex-post evaluation of multi-period-ahead density forecasts. *North American Actuarial Journal*, 14(3), 281–298.
30. European Insurance and Occupational Pensions Authority (2014). The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation. *EIOPA-14-322*.

31. European Insurance and Occupational Pensions Authority (2016). *Risk-Free Interest Rate Term Structures*. Podatki o netvegani obrestni meri na dan 31. december 2015. Najdeno 26. aprila 2016 na spletnem naslovu: https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA_RFR_20151231_2.zip
32. Eurostat (2015). Mortality and life expectancy statistics. Najdeno 14. marca 2016 na spletnem naslovu: http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Mortality_and_life_expectancy_statistics
33. Gerber, H. U. (1997). *Life insurance mathematics* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.
34. Giroi, F., & King, G. (2007, 14. september). Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method. Najdeno 16. februarja 2016 na spletnem naslovu <http://gking.harvard.edu/files/lc.pdf>
35. Greene, W. H. (2012). *Econometric Analysis* (7th ed.). England: Pearson Education Limited.
36. Haberman, S., & Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics* 48(1), 35–55.
37. Haberman, S., Kaishev, V., Millossovich, P., Villegas, A., Baxter, S., Gaches, A., Gunnlaugsson GradStat, S., & Sison, M. (2014). *Longevity Basis Risk: A Methodology for Assessing Basis Risk*. London: The Institute and Faculty of Actuaries and the Life and Longevity Markets Association.
38. Hoffman, K., & Kunze, R. (1971). *Linear algebra* (2nd ed.). Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
39. Hyndman, R. J., & Ullah, M. S. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 02/2007, 51(10), 4942–4956.
40. Hyndman, R. J., Booth, H., Tickle, L., & Maindonald, J. (2015). *Package 'demography'*. Najdeno 21. marca 2015 na spletnem naslovu: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf>
41. Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659–675.
42. Nau, R. F. (2016). *Introduction to ARIMA: nonseasonal models*. Najdeno 11. aprila 2016 na spletnem naslovu: <http://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm>
43. Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., & Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. New York: Oxford University Press Inc.
44. Plat, R. (2009a). On stochastic mortality modelling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3), 393–404.
45. Plat, R. (2009b). Stochastic Portfolio Specific Mortality and the Quantification of Mortality Basis Risk. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(1), 123–132.
46. Plestenjak, B. (2010). 10. Singularni razcep. Najdeno 5. marca 2016 na spletnem naslovu: http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/NlaBol/Gradivo/10_SVD.pdf

47. P-Value. (b.l.). V *Wolfram MathWorld, the web's most extensive mathematics resource*. Najdeno 18. junija 2016 na spletnem naslovu: <http://mathworld.wolfram.com/P-Value.html>
48. Rawlings, J. O., Pentula, S. G., & Dickey, D. A. (1998). *Applied regression analysis: a research tool* (2nd ed.). USA: Springer-Verlag New York.
49. Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2003). Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(2), 255–272.
50. Repek, S., & Šemrov, J. (2012). Primer določanja verjetnostne porazdelitve obveznosti rentnih življenjskih zavarovanj glede na tveganje dolgoživosti z uporabo stohastičnih metod vrednotenja. *Zavarovalniški horizonti*, 1(3), 45–68.
51. Risk Management Solutions (2012). MORTALITY-DRIVEN RISKS: Calculating Capital Requirements for Solvency II. *RMS WHITE PAPER June 2012*.
52. Salah, S. B. & Belkacem, L. (2015). On The Longevity Risk Assessment Under Solvency II. *The Journal of Applied Business Research*, 31(3), 1149–1158.
53. Smooth function. (b.l.). V *Wolfram MathWorld, the web's most extensive mathematics resource*. Najdeno 29. maja 2016 na spletnem naslovu: <http://mathworld.wolfram.com/SmoothFunction.html>
54. Statistični urad Republike Slovenije (2011). Naravno in selitveno gibanje prebivalstva, Slovenija. Metodološka pojasnila. Najdeno 2. marca 2016 na spletnem naslovu: <http://www.stat.si/statweb/Common/PrikaziDokument.ashx?IdDatoteke=8150>
55. Statistični urad Republike Slovenije (2015). Ženske ob smrti povprečno 8 let starejše od moških. Najdeno 8. junija 2016 na spletnem naslovu: <http://www.stat.si/StatWeb/prikazi-novico?id=5293&idp=17&headerbar=15>
56. Statistični urad Republike Slovenije (2016a). *Podatki o prebivalstvu Republike Slovenije glede na spol in starost po stanjih na dan 31. 12. oziroma 1. 1. v letih 1982–2014* (interno gradivo). Ljubljana: Statistični urad Republike Slovenije.
57. Statistični urad Republike Slovenije (2016b). Podatki o umrlih prebivalcih Republike Slovenije glede na spol in starosti v letih 1982–2014. Najdeno 13. januarja 2016 na spletnem naslovu: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/varval.asp?ma=05L1006S&ti=&path=../Database/Dem_soc/05_prebivalstvo/32_Umrlijivost/05_05L10_umrli_SL/&lang=2
58. Statistični urad Republike Slovenije (2016c). Prebivalstvo, Slovenija. Metodološko pojasnilo. Najdeno 2. marca 2016 na spletnem naslovu: <http://www.stat.si/statweb/Common/PrikaziDokument.ashx?IdDatoteke=7808>
59. Time Series Analysis. (b.l.). V *Wolfram MathWorld, the web's most extensive mathematics resource*. Najdeno 18. junija 2016 na spletnem naslovu: <http://mathworld.wolfram.com/TimeSeriesAnalysis.html>
60. Value At Risk - VaR. (b.l.). V *Investopedia*. Najdeno 18. junija 2016 na spletnem naslovu: <http://www.investopedia.com/terms/v/var.asp>
61. Vertot, N. (2008, 29. september). *1. oktober, mednarodni dan starejših*. Najdeno 24. marca 2016 na spletnem naslovu:

<http://www.stat.si/StatWeb/glavnanavigacija/podatki/prikazistaronovico?IdNovice=1908>

62. Villegas, A. M., Millossovich, P., & Kaishev, V. (2016). *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*. Najdeno 16. marca 2016 na spletnem naslovu: <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>
63. Willets, R. C. (2004). The Cohort Effect: Insights and Explanations. *British Actuarial Journal*, 10(4), 833–877.
64. Wilmoth, J. R. (1993). *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*. Technical report. California U.S.A.: University of California, Berkeley, Department of Demography.
65. Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS* št. 93/2015.

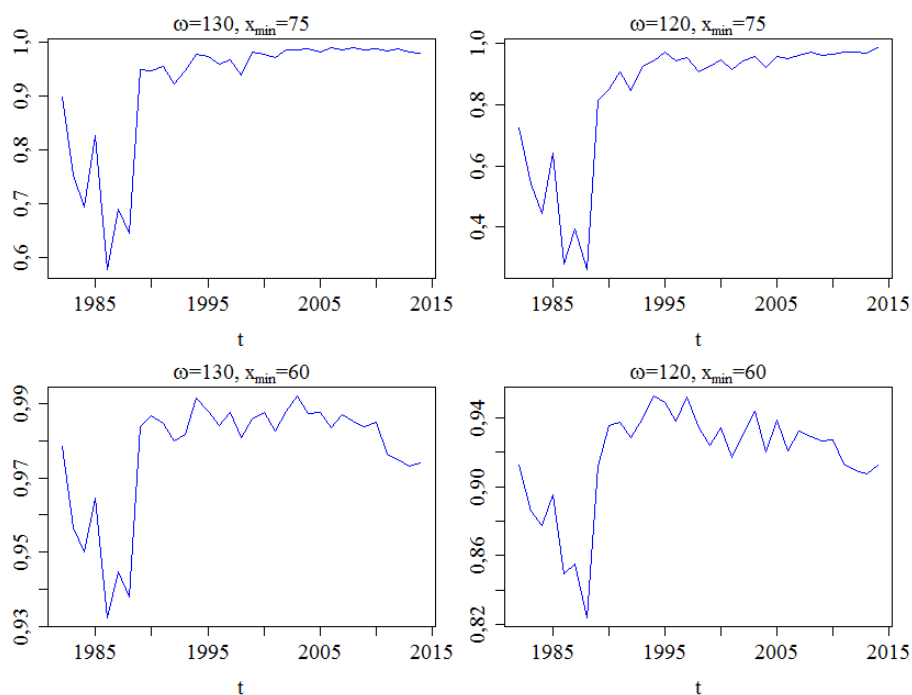
PRILOGE

KAZALO PRILOG

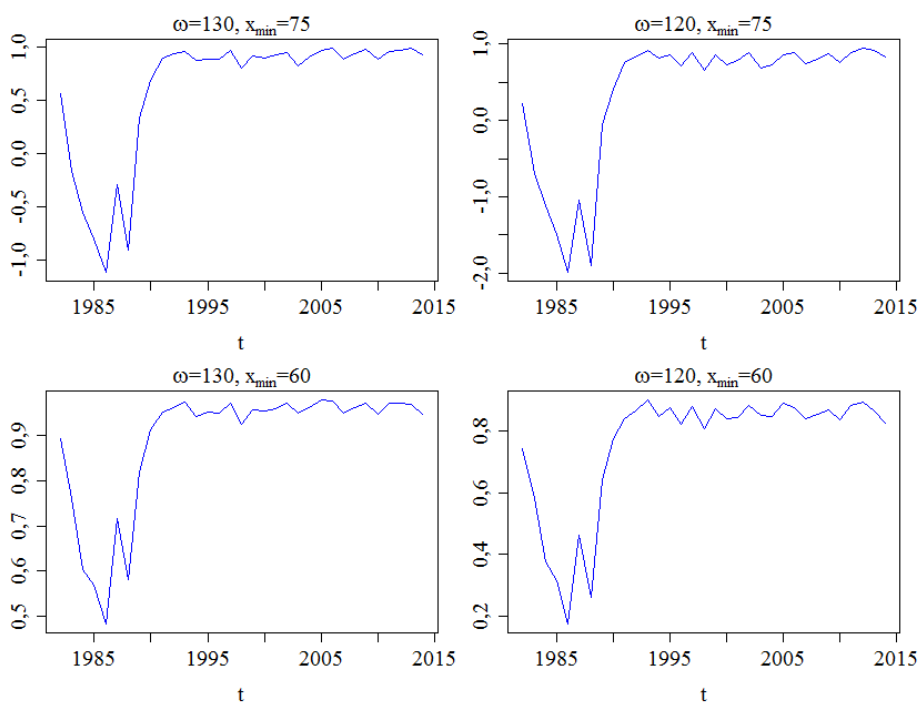
Priloga 1: Vrednost determinacijskega koeficienta R^2	1
Priloga 2: Grafični prikaz projekcij parametrov in stopenj umrljivosti	2
Priloga 3: Vrednosti AIC in BIC v primeru kalibracije na podatkih o umrljivosti prebivalcev Slovenije za starosti od 40 do 100 let	8
Priloga 4: Grafični prikaz prilagojenih standardiziranih deviančnih ostankov	9
Priloga 5: Grafični prikaz ocenjenih parametrov, dobljenih s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014.....	12
Priloga 6: Grafični prikaz projekcij stopenj umrljivosti, dobljenih s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014	15
Priloga 7: Negotovost ocenjenih parametrov	16
Priloga 8: Povratni test zmanjševanja napovednega obdobja	18
Priloga 9: Povrtani test razširjenega napovednega obdobja.....	19
Priloga 10: Grafični prikaz porazdelitvene funkcije najboljše ocene obveznosti za izbrane stohastične modele umrljivosti na portfelju 1.000 polic, kjer so zavarovanci ženske stare 65 let.....	20
Priloga 11: Uporabljena programska koda, napisana v programskem jeziku R	21
Priloga 12: Seznam uporabljenih kratic	63

PRILOGA 1: Vrednost determinacijskega koeficienta R^2

Slika 1: Vrednost determinacijskega koeficienta R^2 (ženske)

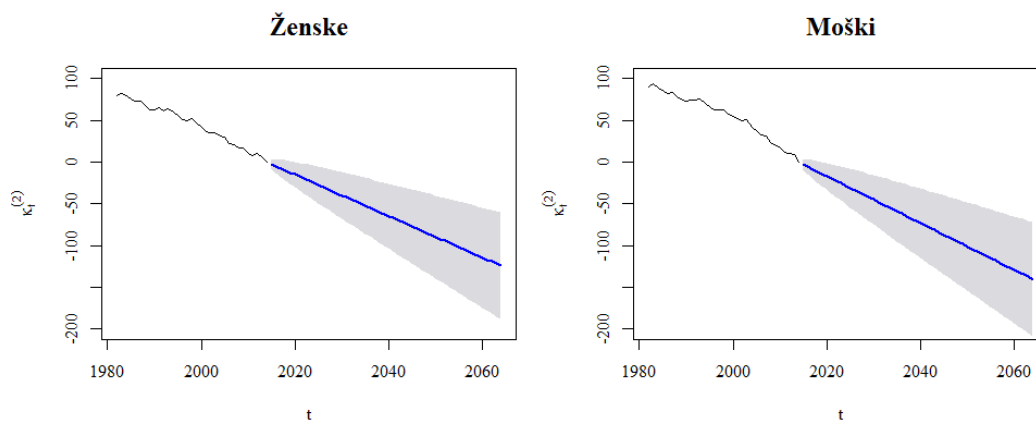


Slika 2: Vrednost determinacijskega koeficienta R^2 (moški)

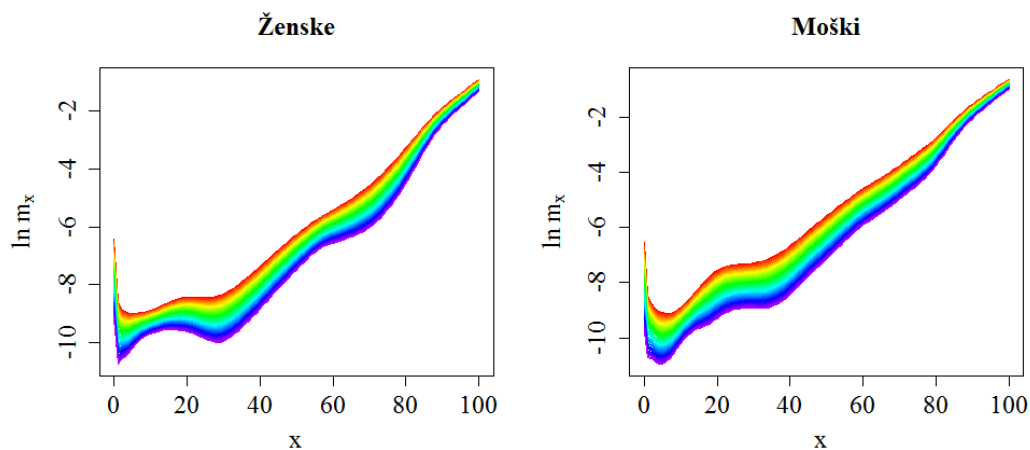


PRILOGA 2: Grafični prikaz projekcij parametrov in stopenj umrljivosti

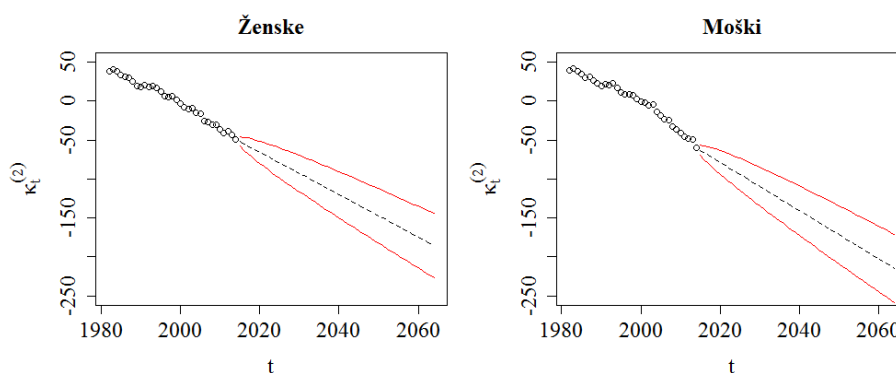
Slika 3: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Lee-Carterjevega modela na podatkih, glajenih z zlepki



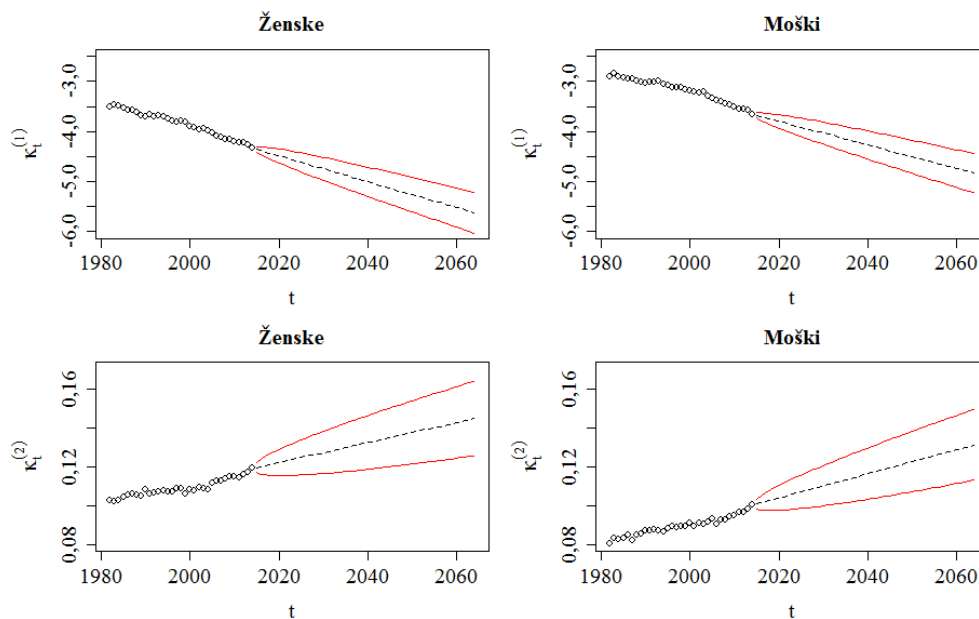
Slika 4: Pričakovane prihodnje centralne stopnje umrljivosti v okviru Lee-Carterjevega modela na podatkih glajenih z zlepki za leta 2015–2064



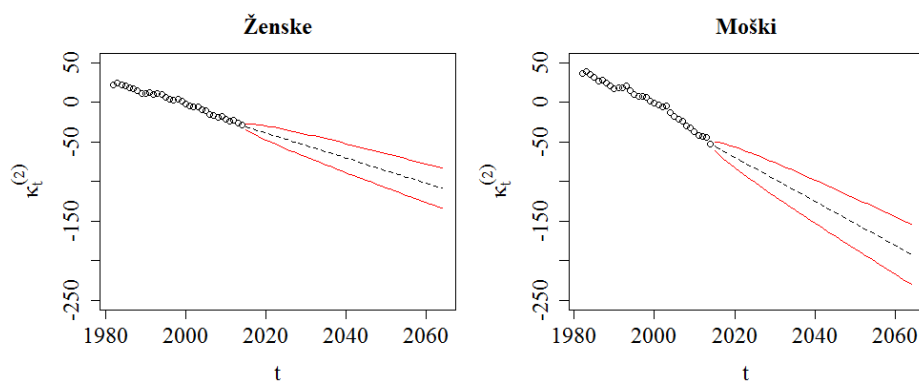
Slika 5: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Poisson Lee-Carterjevega modela



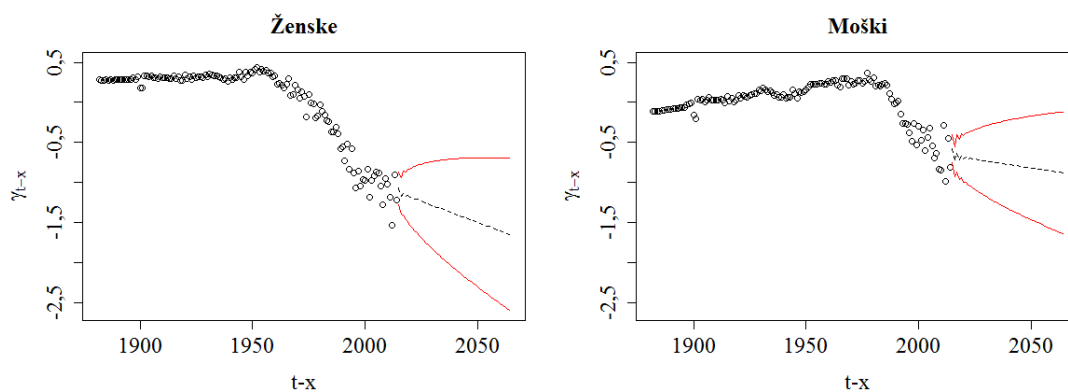
Slika 6: Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$ in $\kappa_t^{(2)}$ v okviru CBD-modela



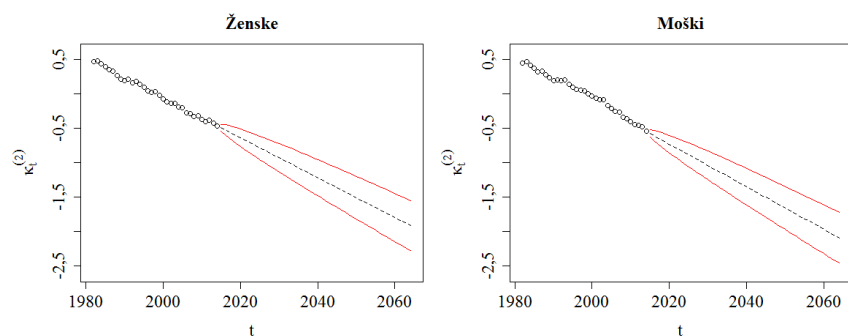
Slika 7: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru Renshaw-Habermanovega modela



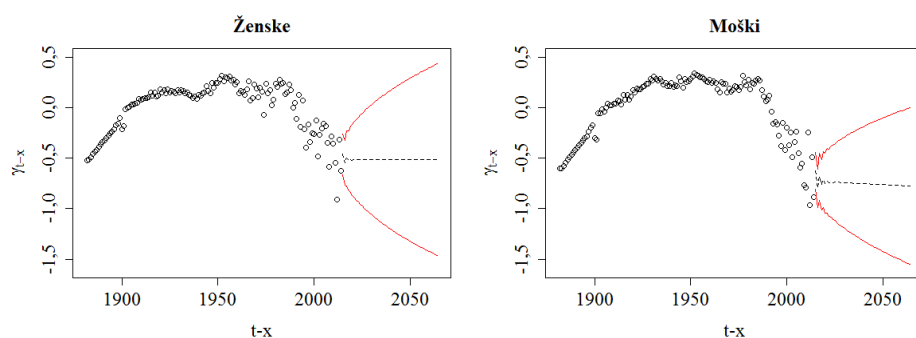
Slika 8: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} v okviru Renshaw-Habermanovega modela



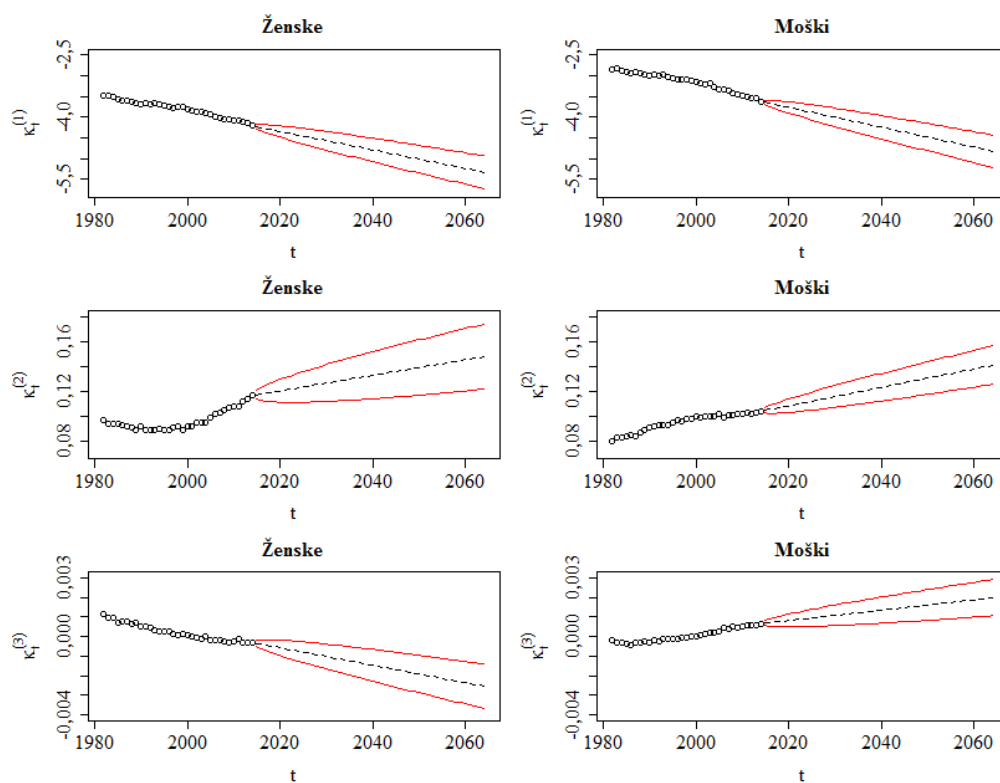
Slika 9: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra $\kappa_t^{(2)}$ v okviru APC-modela



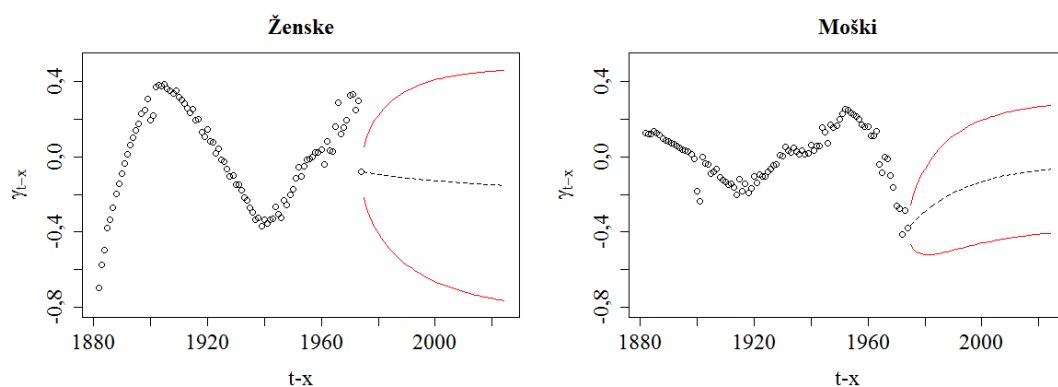
Slika 10: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} v okviru APC-modela



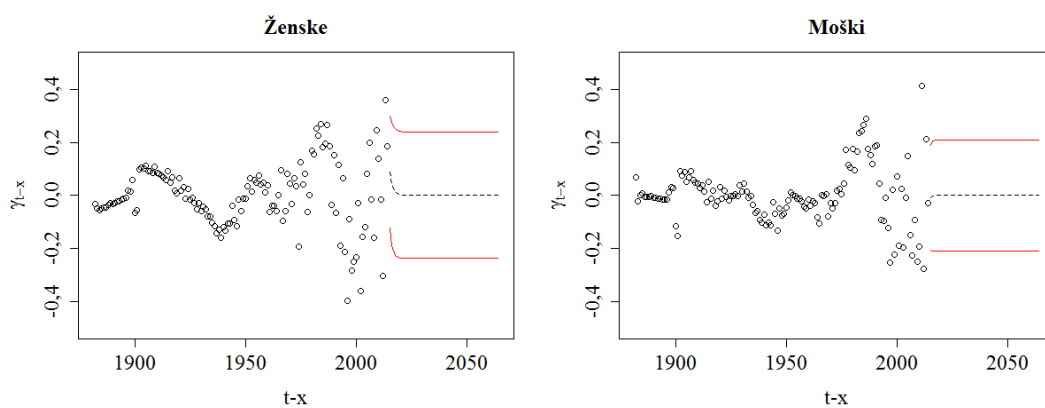
Slika 11: Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(1)}$, $\kappa_t^{(2)}$ in $\kappa_t^{(3)}$ v okviru M7-modela



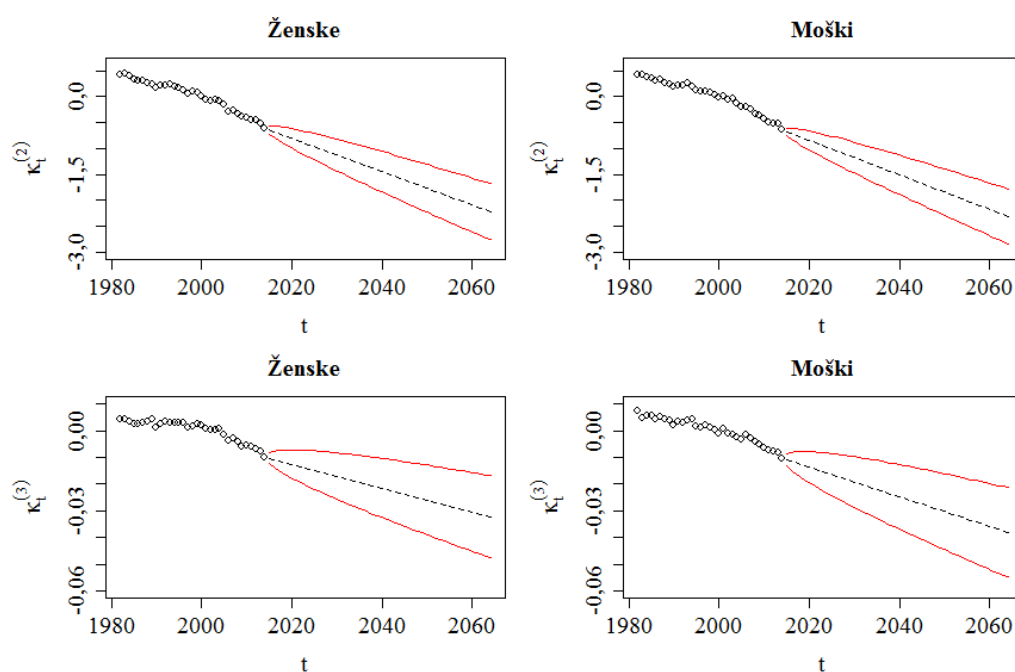
Slika 12: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} v okviru M7-modela



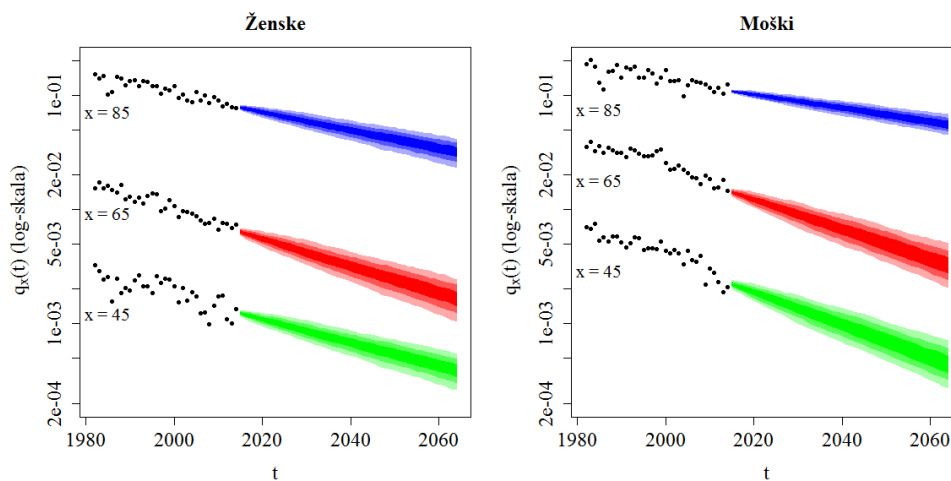
Slika 13: Ocenjene in napovedane vrednosti parametra γ_{t-x} v okviru Platovega modela



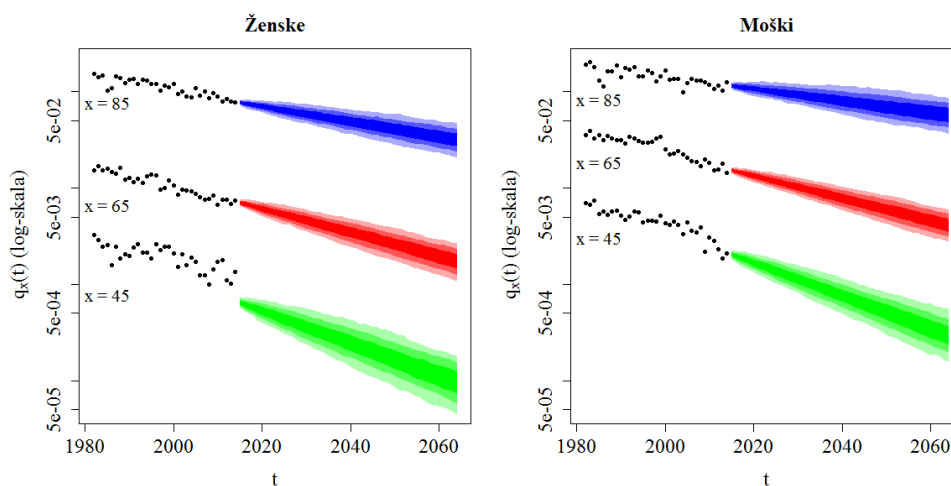
Slika 14: Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov $\kappa_t^{(2)}$ in $\kappa_t^{(3)}$ v okviru Platovega modela



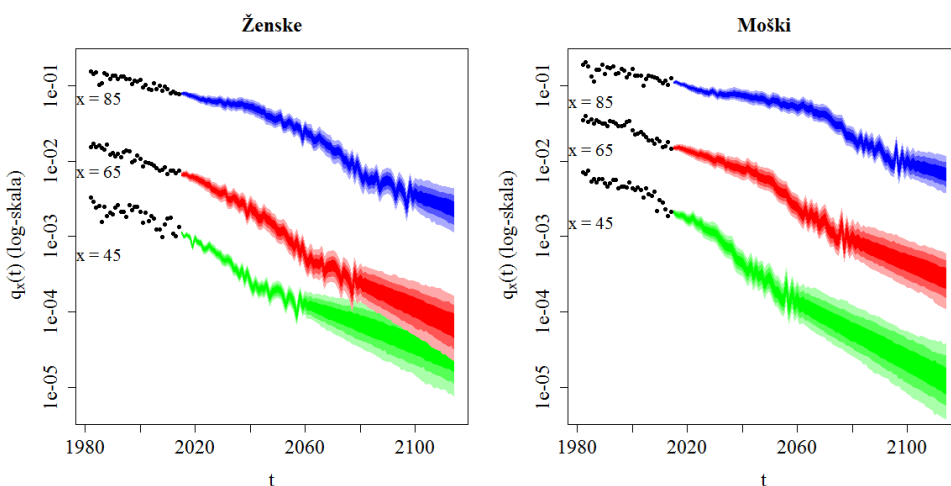
Slika 15: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti okviru Poisson Lee-Carterjevega modela



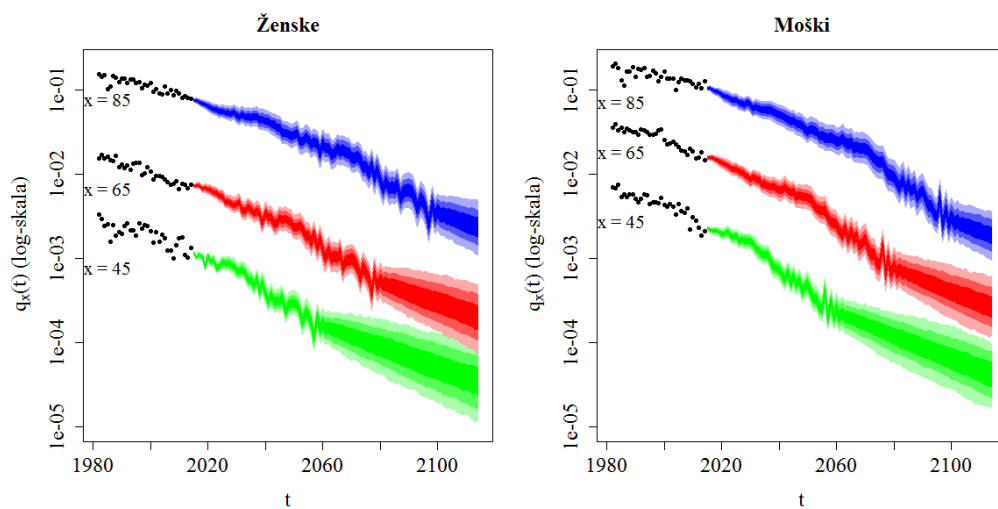
Slika 16: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru CBD-modela



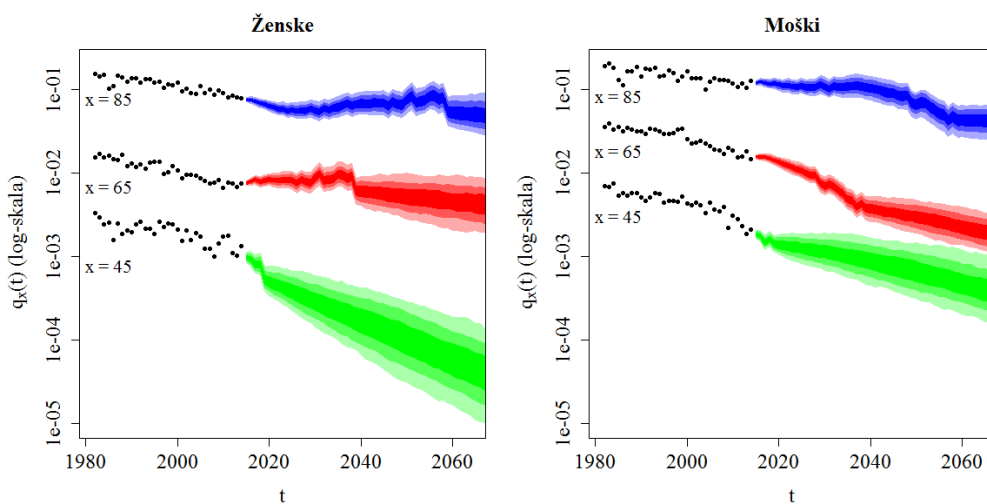
Slika 17: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru Renshaw-Habermanovega modela



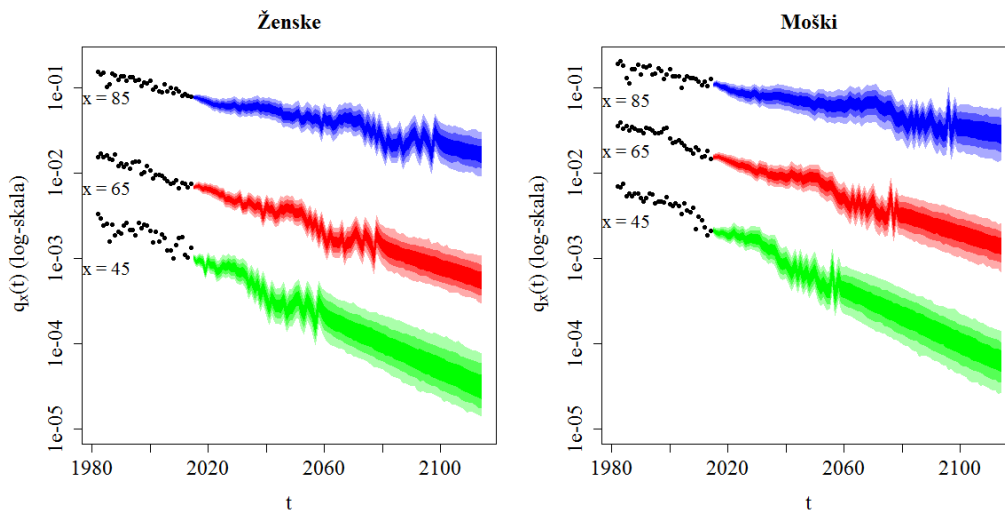
Slika 18: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru APC-modela



Slika 19: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru M7-modela



Slika 20: Ocenjene in napovedane začetne stopnje umrljivosti v okviru Platovega modela



PRILOGA 3: Vrednosti AIC in BIC v primeru kalibracije na podatkih o umrljivosti prebivalcev Slovenije za starosti od 40 do 100 let

Tabela 1: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC za izbrane modele, kalibrirane na podatkih za ženske v Sloveniji, stare od 40 do 100 let

Model	Efektivno število parametrov	Maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja	AIC	Razvrstitev glede na AIC	BIC	Razvrstitev glede na BIC
PLC	153	-7.345,52	14.997,04	3	15.854,97	1
CBD	66	-9.006,15	18.144,29	6	18.514,38	6
RH	245	-7.212,56	14.915,11	1	16.288,92	4
APC	184	-7.374,34	15.116,67	4	16.148,43	2
M7	189	-7.606,57	15.591,13	5	16.650,93	5
PLAT	215	-7.272,98	14.975,96	2	16.181,55	3

Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

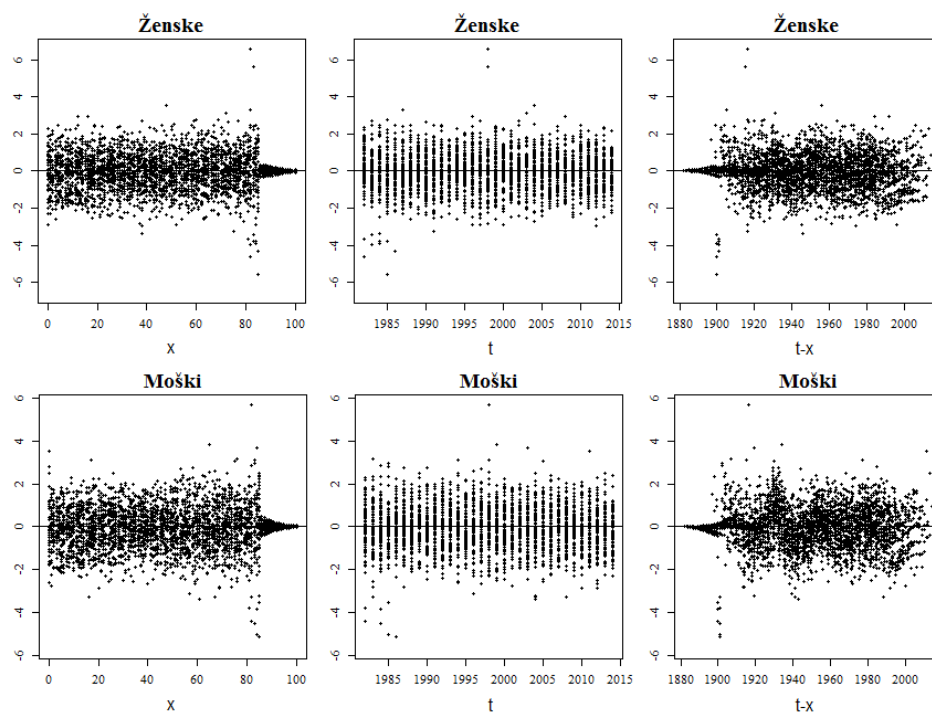
Tabela 2: Efektivno število parametrov, maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja, AIC in BIC za izbrane modele, kalibrirane na podatkih za moške v Sloveniji, stare od 40 do 100 let

Model	Efektivno število parametrov	Maksimalna vrednost logaritemske funkcije verjetja	AIC	Razvrstitev glede na AIC	BIC	Razvrstitev glede na BIC
PLC	153	-7.551,33	15.408,67	5	16.266,59	2
CBD	66	-7.988,93	16.109,87	6	16.479,95	6
RH	245	-7.288,30	15.066,59	1	16.440,40	5
APC	184	-7.372,23	15.112,46	3	16.144,21	1
M7	189	-7.499,12	15.376,24	4	16.436,03	4
PLAT	215	-7.340,64	15.111,28	2	16.316,87	3

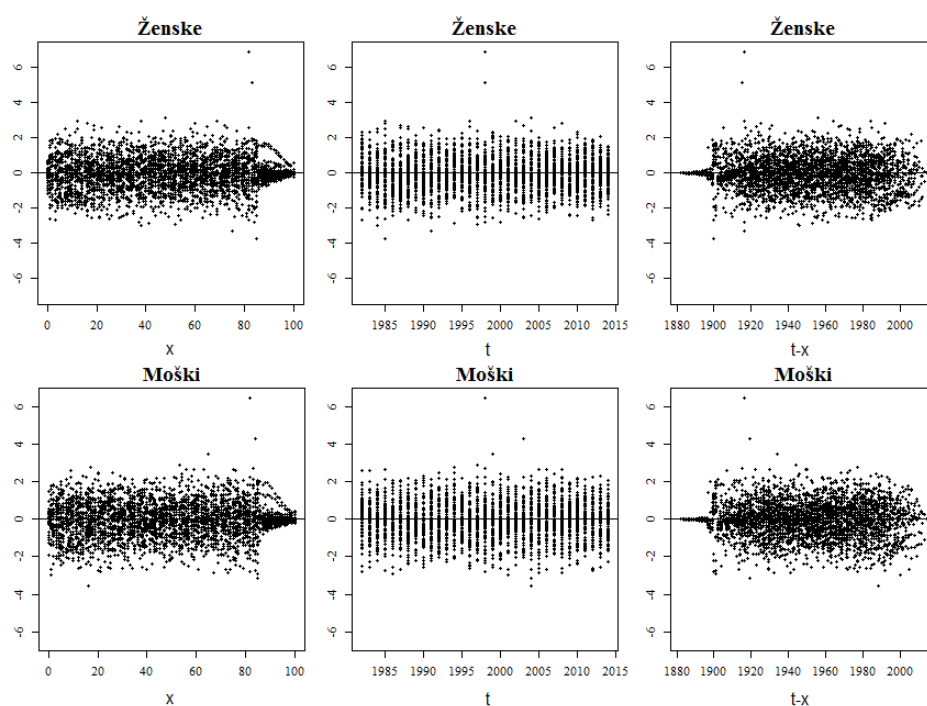
Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

PRILOGA 4: Grafični prikaz prilagojenih standardiziranih deviančnih ostankov

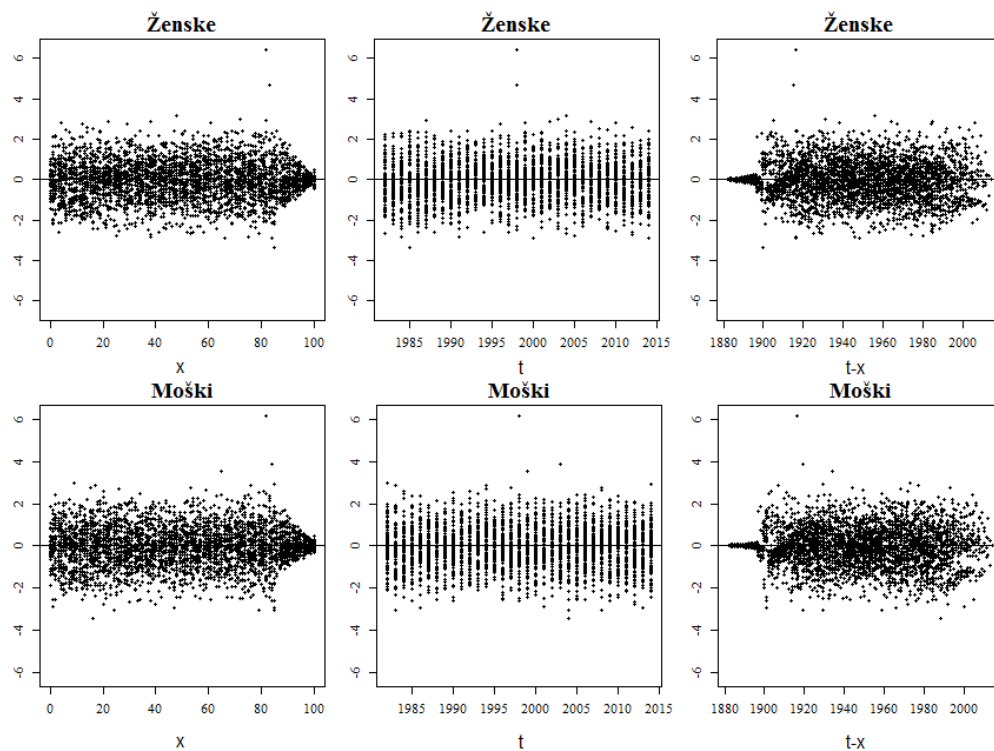
Slika 21: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za Poisson Lee-Carterjev model



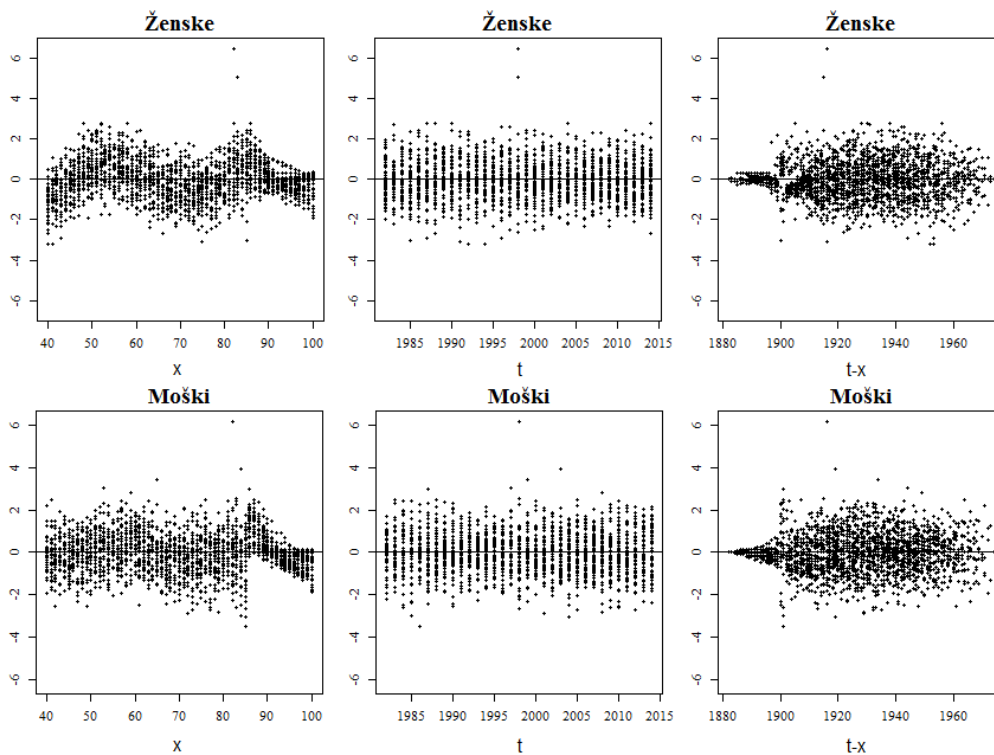
Slika 22: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za Renshaw-Habermanov model



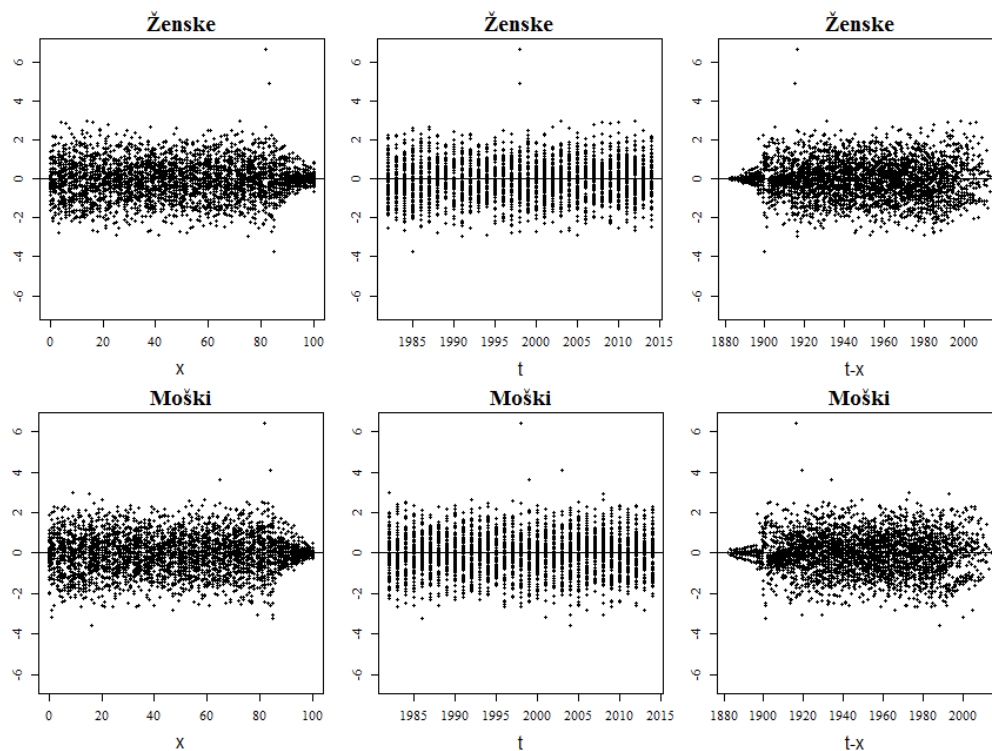
Slika 23: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za APC-model



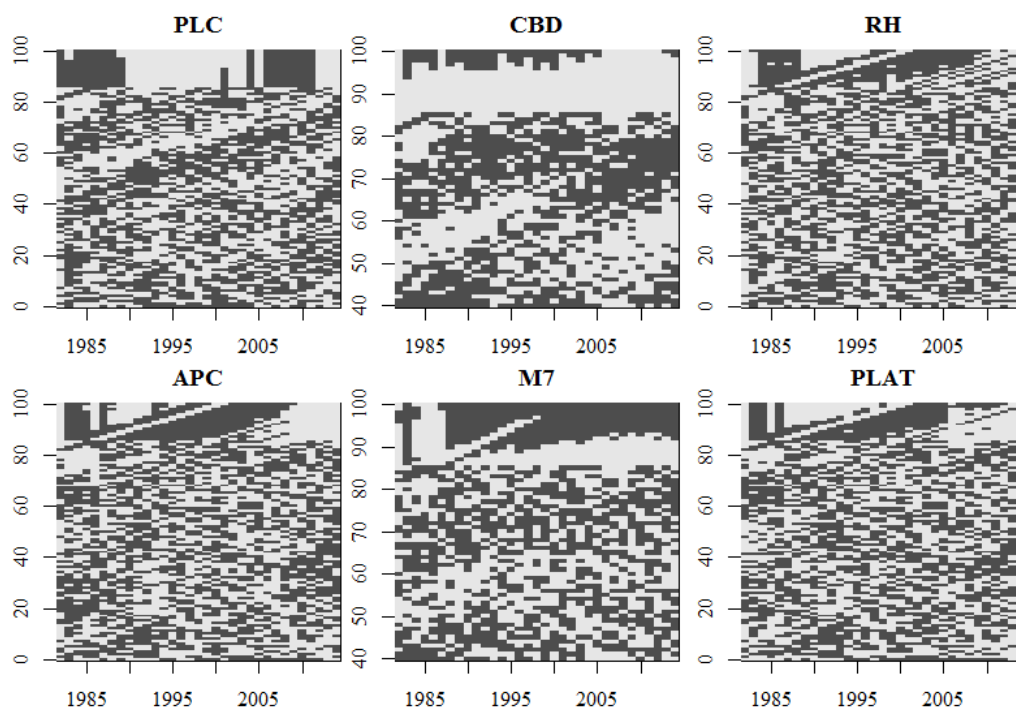
Slika 24: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za M7-model



Slika 25: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost (x), koledarsko leto (t) in leto rojstva ($t-x$) za Platonov model



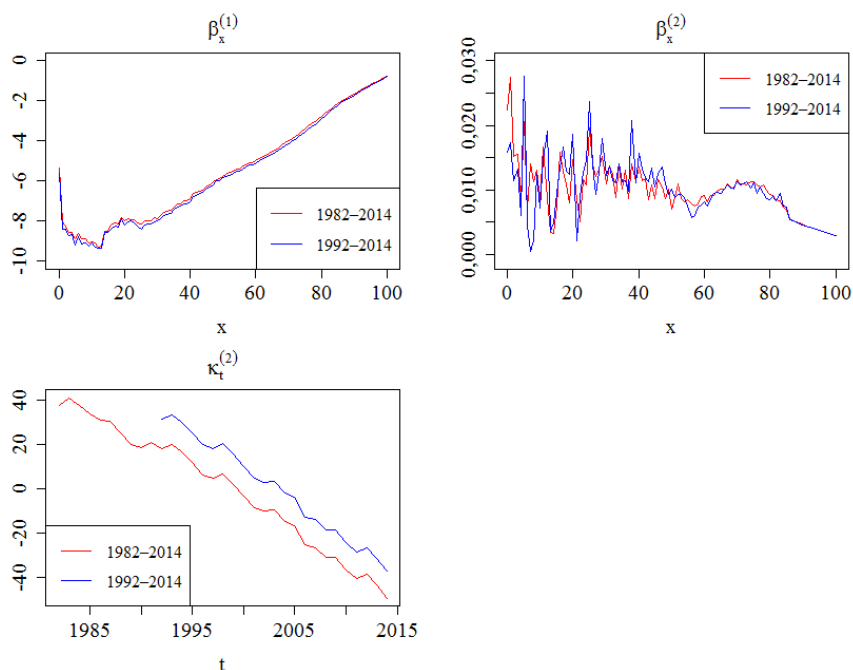
Slika 26: Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na predznak (moški)



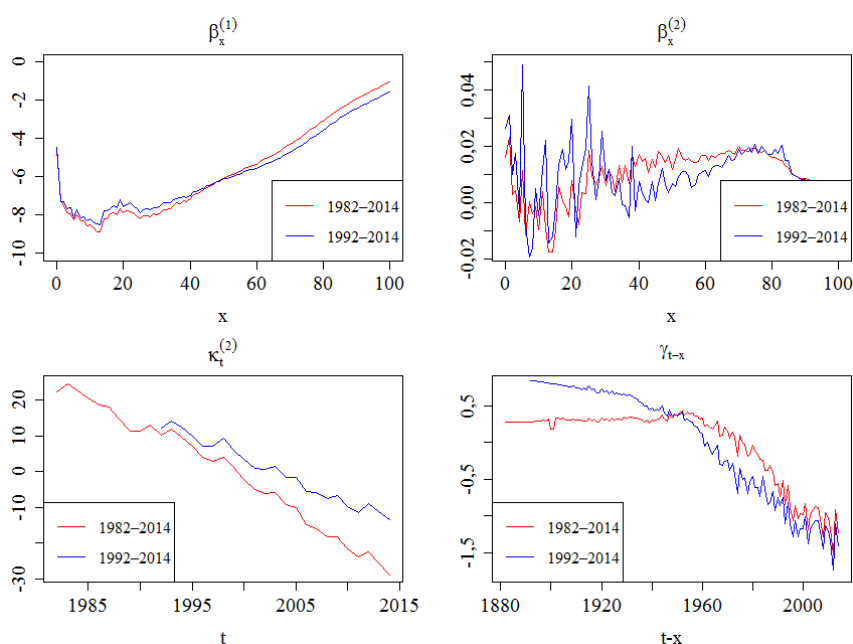
Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platonov model

PRILOGA 5: Grafični prikaz ocenjenih parametrov, dobljenih s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014

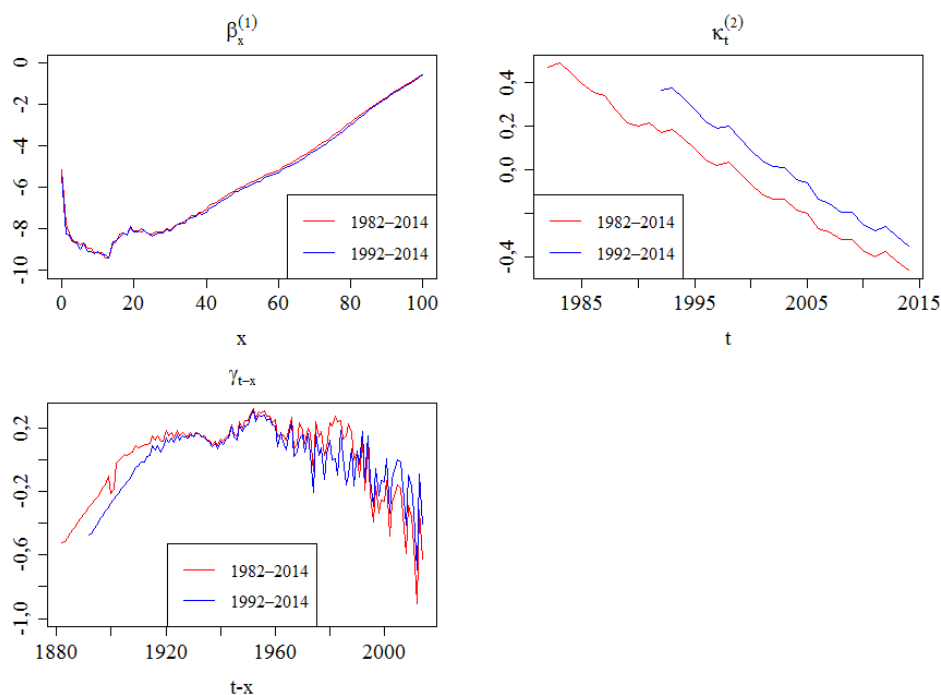
Slika 27: Ocenjene vrednosti parametrov Poisson Lee-Carterjevega modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014



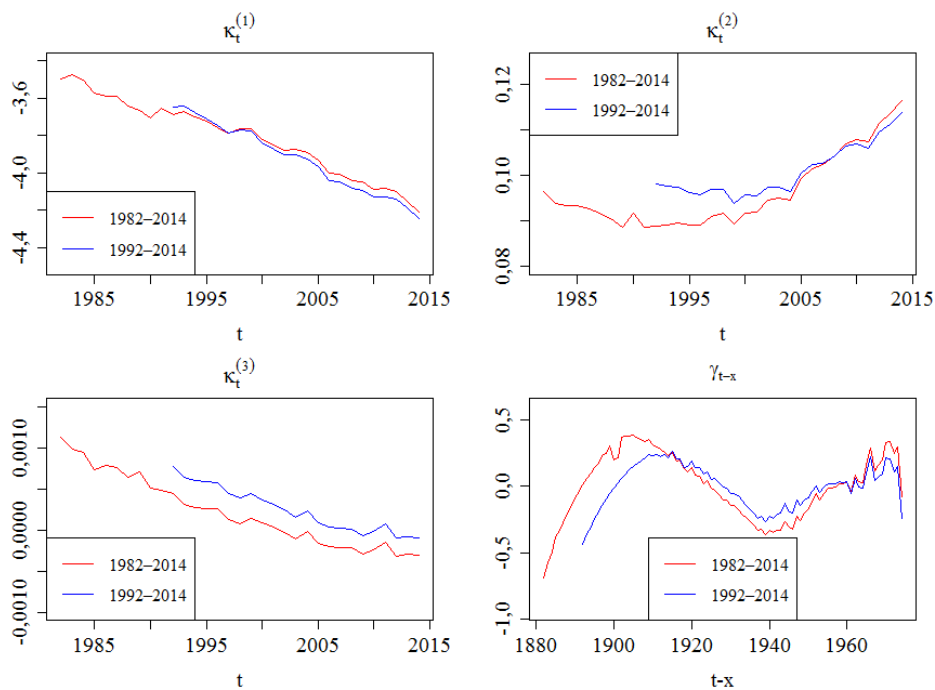
Slika 28: Ocenjene vrednosti parametrov Renshaw-Habermanovega modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014



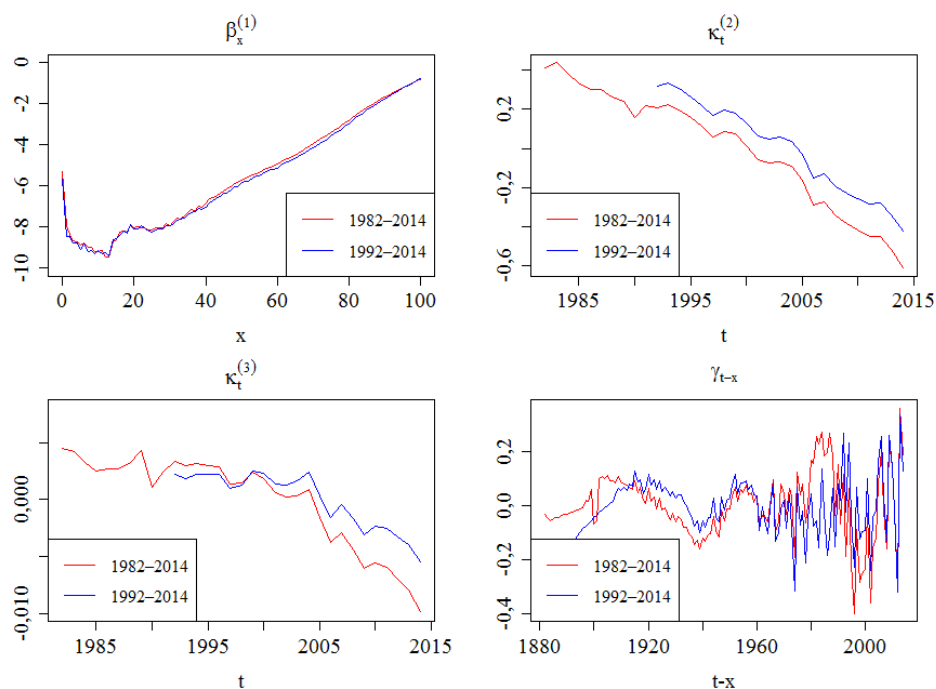
Slika 29: Ocenjene vrednosti parametrov APC-modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014



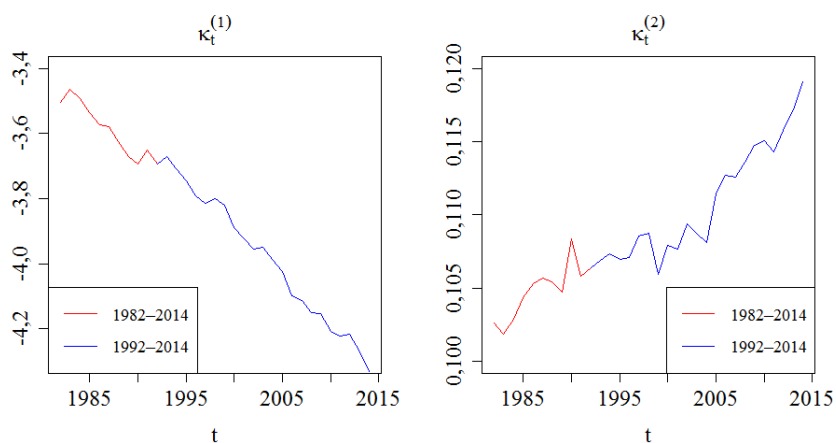
Slika 30: Ocenjene vrednosti parametrov M7-modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014



Slika 31: Ocenjene vrednosti parametrov Platovega modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014

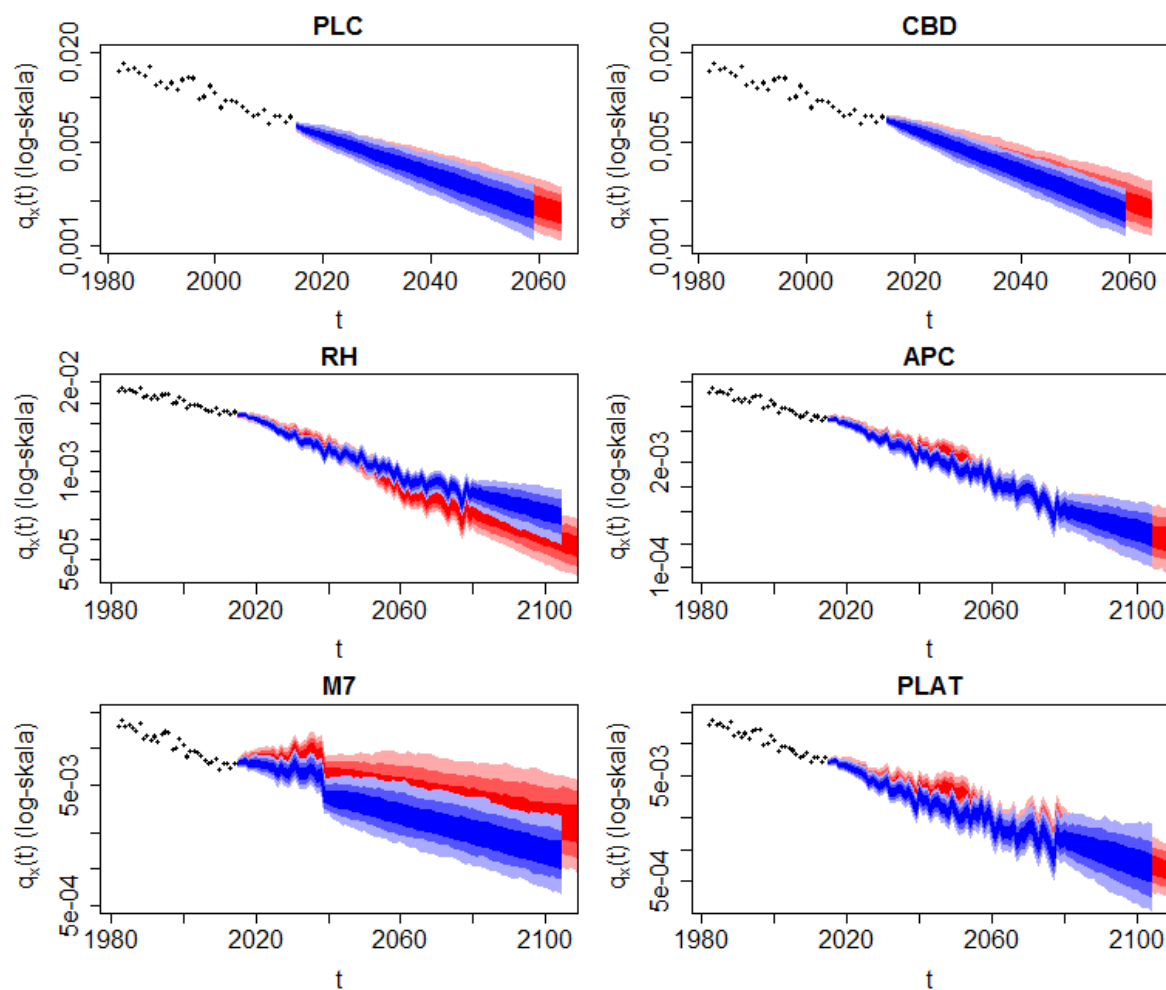


Slika 32: Ocenjene vrednosti parametrov CBD-modela, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014



PRILOGA 6: Grafični prikaz projekcij stopenj umrljivosti izbranih stohastičnih modelov umrljivosti, dobljenih s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 in za leta 1992–2014

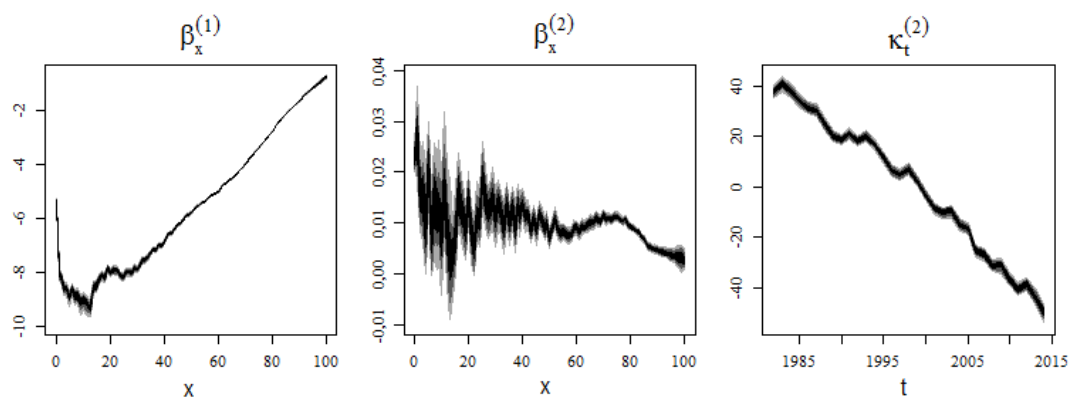
Slika 33: Projekcije stopenj umrljivosti za izbrane stohastične modele umrljivosti, dobljene s kalibracijo na podatkih za 65 let stare ženske v Sloveniji za leta 1982–2014 (rdeča) in za leta 1992–2014 (modra)



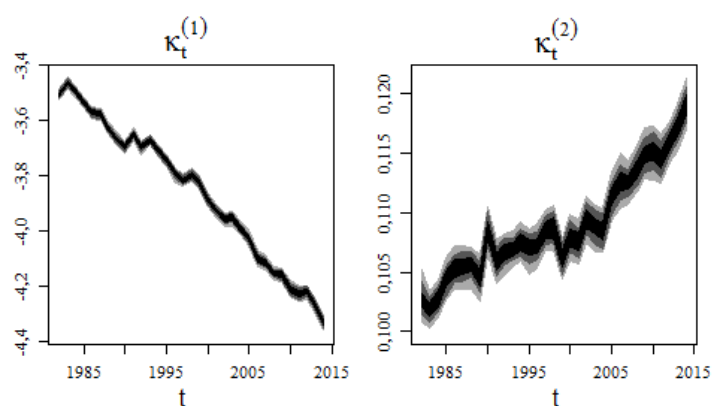
Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

PRILOGA 7: Negotovost ocenjenih parametrov

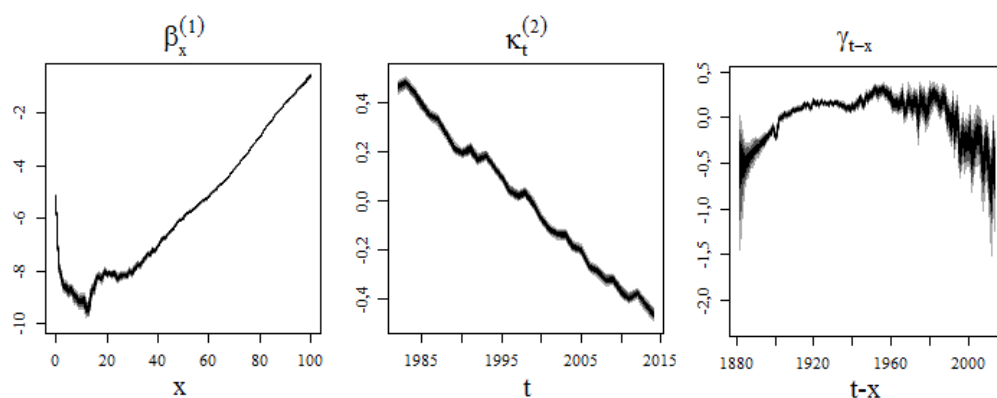
Slika 34: Ocenjene vrednosti parametrov Poisson Lee-Carterjevega modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja



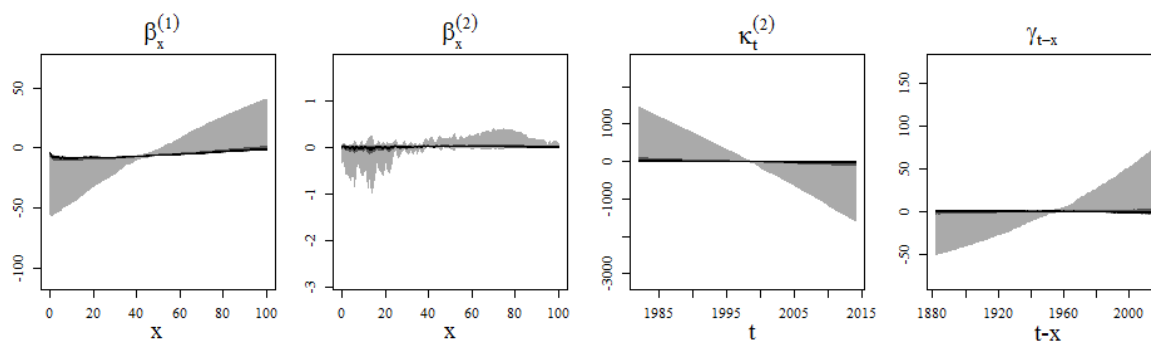
Slika 35: Ocenjene vrednosti parametrov CBD-modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja



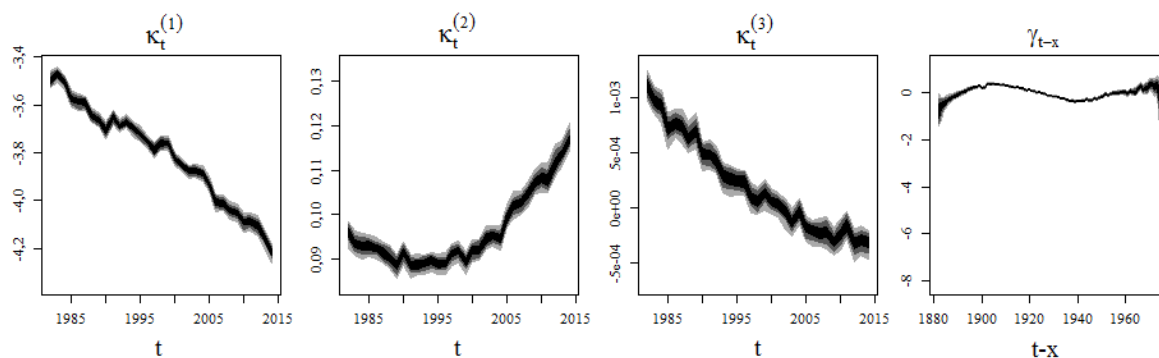
Slika 36: Ocenjene vrednosti parametrov APC-modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja



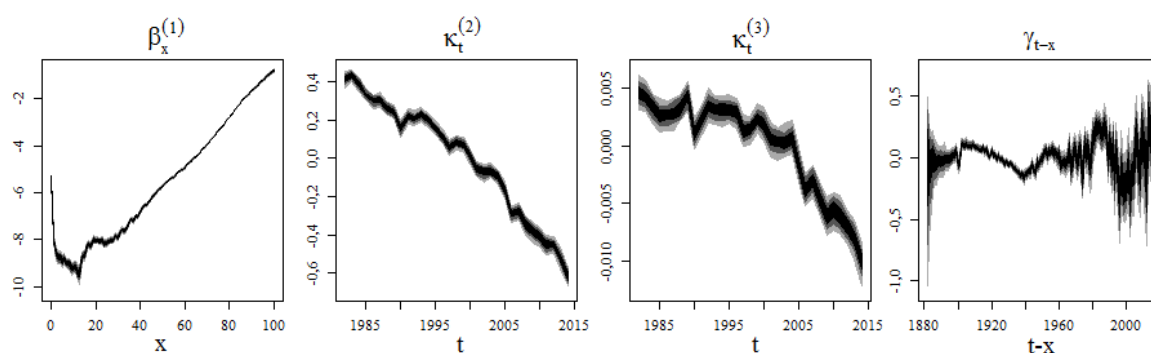
Slika 37: Ocenjene vrednosti parametrov Renshaw-Habermanovega modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja



Slika 38: Ocenjene vrednosti parametrov M7-modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja

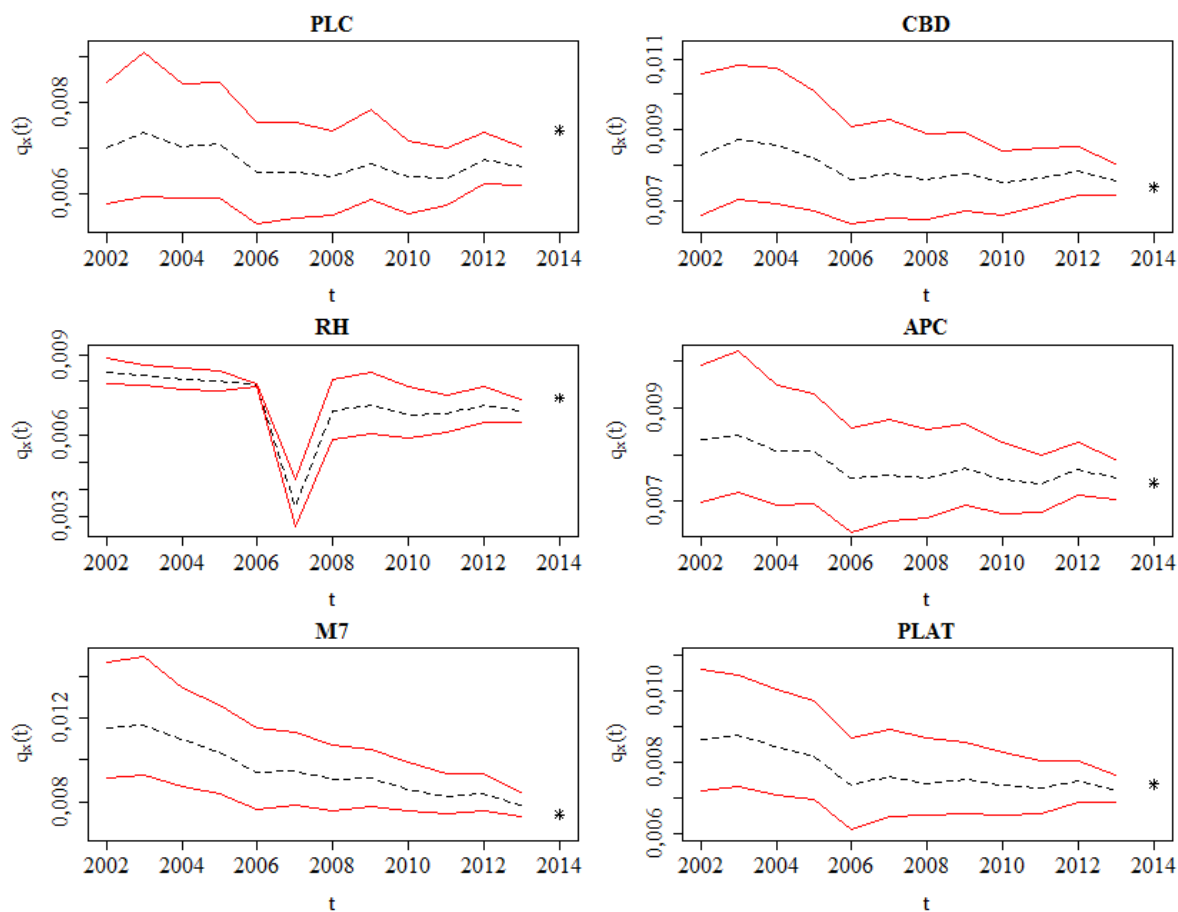


Slika 39: Ocenjene vrednosti parametrov Platovega modela, dobljene s Poissonovo metodo ponovnega vzorčenja



PRILOGA 8: Povratni test zmanjševanja napovednega obdobja

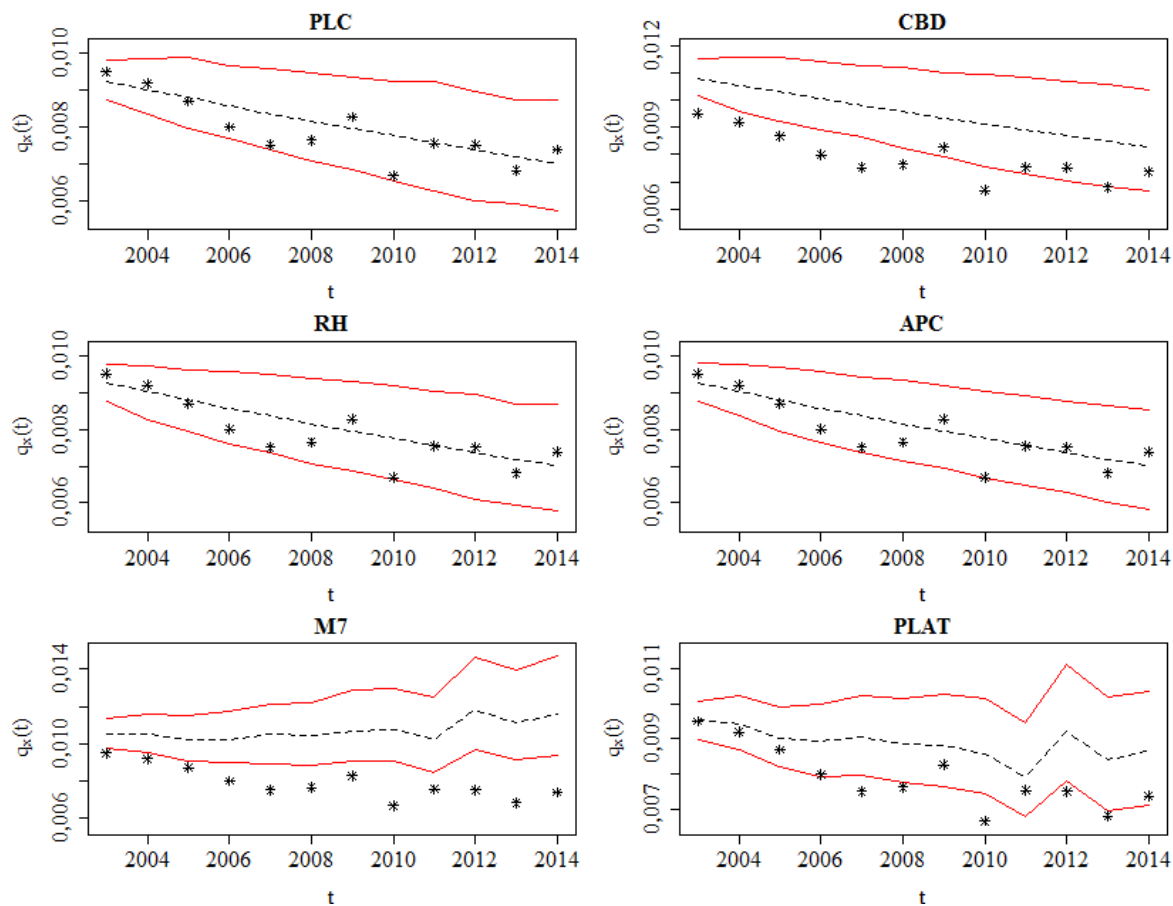
Slika 40: Projekcije začetnih stopenj umrljivosti za ženske stare 65 let za leto 2014 glede na zadnje leto obdobja za kalibracijo



Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

PRILOGA 9: Povratni test razširjenega napovednega obdobja

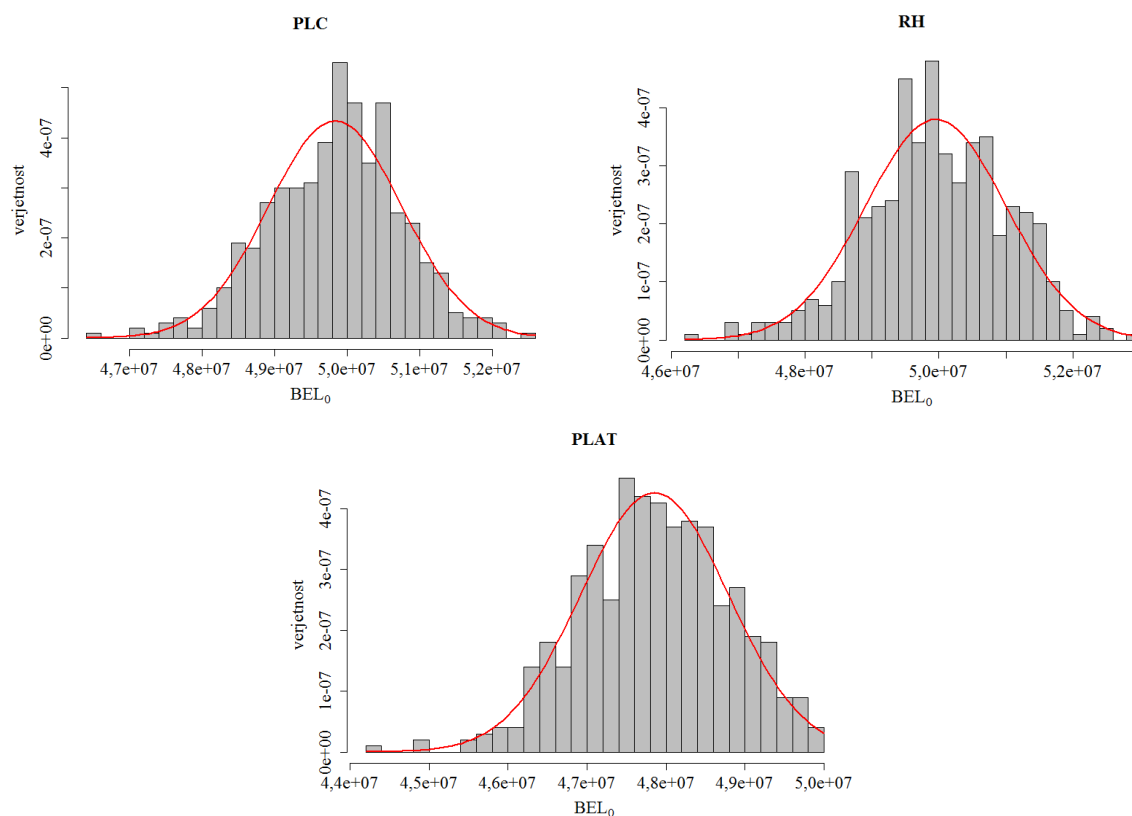
Slika 41: Projekcije začetnih stopenj umrljivosti za ženske, stare 65 let, za leto 2014 glede na zadnje leto obdobja za kalibracijo



Legenda: PLC = Poisson Lee-Carterjev model, CBD = CBD-model, RH = Renshaw-Habermanov model, APC = APC-model, M7 = M7-model, PLAT = Platov model

PRILOGA 10: Grafični prikaz porazdelitvene funkcije najboljše ocene obveznosti za izbrane stohastične modele umrljivosti na portfelju 1.000 polic, kjer so zavarovanci ženske stare 65 let

Slika 42: Porazdelitvene funkcije najboljše ocene obveznosti v okviru Poisson Lee-Carterjevega (PLC), Renshaw-Habermanovega (RH) in Platovega (PLAT) modela



PRILOGA 11: Uporabljena programska koda, napisana v programskem jeziku R

#OSNOVNE NASTAVITVE:

#Določitev direktorija, kjer so shranjene datoteke, ki jih potrebujemo:

```
setwd("C:/R")
```

#Namestitev in zagon paketov:

```
#install.packages("demography")
```

```
#install.packages("StMoMo")
```

```
#install.packages("fanplot")
```

```
library(demography)
```

```
library(StMoMo)
```

```
library(fanplot)
```

#Nastavitev pisave in merila za grafe:

```
par(family="serif")
```

```
options(OutDec= ",")
```

#Priprava statističnih podatkov:

```
Ex_F=read.table("Ex_F.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
Ex_M=read.table("Ex_M.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
colnames(Ex_F)=c(1982:2014)
```

```
colnames(Ex_F)=c(1982:2014)
```

```
dx_F=read.table("dx_F.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
dx_M=read.table("dx_M.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
colnames(dx_F)=c(1982:2014)
```

```
colnames(dx_F)=c(1982:2014)
```

```
mx_F=read.table("mx_F.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
mx_M=read.table("mx_M.txt",header=TRUE,sep="\t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)
```

```
qx_F=1-exp(-mx_F)
```

```
qx_M=1-exp(-mx_M)
```

#GLAJENJE KRIVULJE UMRLJIVOSTI:

#Grafični prikaz volatilnosti pri visokih starostih (leto 2014):

```
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
```

```
plot(c(75:100),mx_F[76:101,33],xlab="x",ylim=c(0,0.5),ylab=as.expression(bquote(m[x])),type="l",lwd=2,col="red",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
```

```
plot(c(75:100),mx_M[76:101,33],xlab="x",ylim=c(0,0.5),ylab=as.expression(bquote(m[x])),type="l",lwd=2,col="red",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
```

#Postopek ekstrapolacije začetnih stopenj umrljivosti pri visokih starostih (Denuit & Goderniaux):

```
DG_opt<-function(data,col,omega,xmin){
```

```
  qx<-data.frame(x=as.numeric(row.names(data)),qx= data[,col])
```

```
  xmin<-xmin+1
```

```
  ln_qx<-data.frame(x=qx[xmin:101,1],ln_qx=log(qx[xmin:101,2]))
```

```
  ln_qx <- ln_qx[!is.infinite(ln_qx$ln_qx),]
```

```
  avg_ln_qx<-mean(ln_qx$ln_qx)
```

```
  sst_ln_qx<-data.frame(x=ln_qx$x,sst=(ln_qx[,2]- avg_ln_qx)^2)
```

```
  sst<-sum(sst_ln_qx$sst)
```

```
  r2_opt<-function(c){
```

```
    r2<-function(ln_qx, sst,omega,c){
```

```
      sse_ln_qx=data.frame(x=ln_qx$x,sse=(ln_qx$ln_qx-c*(ln_qx$x-omega)^2)^2)
```

```
      r2=1-sum(sse_ln_qx$sse)/sst
```

```
      return(r2)
```

```
    }
```

```
    return(r2(ln_qx,sst,omega,c))
```

```
  }
```

```
  c<- optimize(r2_opt,lower=-10,upper=10,maximum=TRUE)
```

```
  c1 <-cbind.data.frame(c$maximum,c$objective)
```

```
  return(c1)
```

```
}
```



```

plot(c(1982:2014),qx_M_opt1[132,],xlab="t",ylab=as.expression(bquote(R^2)),type="l",lwd=1.8,col="blue",cex.lab=1.5,
cex.main=1.5,cex.axis=1.5,main= as.expression(bquote(paste(omega, "=130, ", x[1min], "=60")))))
#omega=120,x_min=60, x_ext=85
qx_M_opt1<-DG(qx_M,120,60,85)
plot(c(1982:2014),qx_M_opt1[132,],xlab="t",ylab=as.expression(bquote(R^2)),type="l",lwd=1.8,col="blue",cex.lab=1.5,
cex.main=1.5,cex.axis=1.5,main= as.expression(bquote(paste(omega, "=120, ", x[1min], "=60")))))
#Izvedba ekstrapolacije pri visokih starostih:
qx_F_opt1<-DG(qx_F,130,60,85)
qx_M_opt1<-DG(qx_M,130,60,85)
qx_F_opt1<- qx_F_opt1[1:131,] #v 132. vrstici je vrednost determinacijskega koeficienta R2
qx_M_opt1<- qx_M_opt1[1:131,]
colnames(qx_F_opt1)=c(1982:2014)
colnames(qx_M_opt1)=c(1982:2014)
#Surove in glajene (pri visokih starostih) začetne stopnje umrljivosti (leto 2014):
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 2, 0, 0))
#Ženske:
plot(c(0:130),qx_F_opt1[,33],xlab="x",ylim=c(0,1),ylab=as.expression(bquote(q[x])),type="l",lwd=2,col="red",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(qx_F[,33], type="l", lwd=2, col="black")
#Moški:
plot(c(0:130),qx_M_opt1[,33],xlab="x",ylim=c(0,1),ylab=as.expression(bquote(q[x])),type="l",lwd=2,col="red",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(qx_M[,33], type="l", lwd=2, col="black")
#Izračun pripadajočih centralnih stopenj umrljivosti:
mx_F_opt1= -log(1-qx_F_opt1)
mx_M_opt1=-log(1-qx_M_opt1)
#Odrežemo zapise za starosti nad 100 let:
mx_F_opt1<- mx_F_opt1[1:101,]
mx_M_opt1<- mx_M_opt1[1:101,]
#Surove in glajene (pri visokih starostih) centralne stopnje umrljivosti (leto 2014):
#Ženske
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0,2.5, 0, 0))
plot(c(60:100),log(mx_F[61:101,33]), xlab="x", ylab=as.expression(bquote(paste("ln ",m[x]))), type="l", lwd=2, col="black",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-5.5,-0.5))
lines(c(60:100), log(mx_F_opt1[61:101,33]),type="l", lwd=2, col="red")
#Moški
plot(c(60:100),log(mx_M[61:101,33]),xlab="x",ylab=as.expression(bquote(paste("ln ",m[x]))), type="l", lwd=2,col="black", main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-5.5,-0.5))
lines(c(60:100), log(mx_M_opt1[61:101,33]), type="l", lwd=2, col="red")
#Sprememba števila smrti na podlagi glajenih centralnih stopenj umrljivosti:
dx_F_opt1=dx_F
dx_M_opt1=dx_M
#Ženske:
for (j in 1:33){
  for (i in 86:100){
    dx_F_opt1[i+1,j]=mx_F_opt1[i+1,j]*Ex_F[i+1,j]
  }
}
#Moški:
for (j in 1:33){
  for (i in 86:100){
    dx_M_opt1[i+1,j]=mx_M_opt1[i+1,j]*Ex_M[i+1,j]
  }
}

```

```

    }
  }
}

#Centralne stopnje umrljivosti, ki so enake 0, nadomestimo s povprečjem centralnih stopenj umrljivosti v
najbližjih sosednjih koledarskih letih:
Opt_mx<-function(data){
  for (j in 1:33){
    tmin=j
    tmax=j
    for (i in 1:101){
      if(data[i,j]==0){
        #tmin
        if(j>1){
          for (k in (j-1):1){
            if (data[i,k]>0 & tmin==j){
              tmin=k
            }
          }
        }
        #tmax
        if(j<33){
          for (k in (j+1):33){
            if(data[i,k]>0 & tmax==j){
              tmax=k
            }
          }
        }
        data[i,j]=(data[i,tmin]+data[i,tmax])/2
      }
    }
  }
  return(data)
}

mx_F_opt2=Opt_mx(mx_F_opt1)
mx_M_opt2=Opt_mx(mx_M_opt1)

#Grafični prikaz rezultatov procedure:
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
#Ženske:
plot(c(0:100),log(mx_F_opt2[,33]),xlab="x",ylim=c(-12,0),ylab=as.expression(bquote(paste("ln",m[x]))),type="l",
lwd=2, col="red",main="Ženske",cex.lab=1.2,cex.axis=1.2)
lines(c(0:100), log(mx_F_opt1[,33]), type="l", lwd=2, col="black")
#Moški:
plot(c(0:100),log(mx_M_opt2[,33]),xlab="x",ylim=c(-14,0),ylab=as.expression(bquote(paste("ln",m[x]))),type="l",
lwd=2, col="red",main="Moški",cex.lab=1.2,cex.axis=1.2)
lines(c(0:100),log(mx_M_opt1[,33]), type="l", lwd=2, col="black")

#Glajenje z zlepk:
#Priprava podatkov za paket demography:
mx_M_demogdata<-
demogdata(mx_M_opt2,Ex_M,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="male")
mx_F_demogdata<-
demogdata(mx_F_opt2,Ex_F,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="female")
#Glajenje z zlepk:
mx_M_opt3<-smooth.demogdata(mx_M_demogdata,method="mspline",b=60,weight=TRUE)
mx_F_opt3<-smooth.demogdata(mx_F_demogdata,method="mspline",b=60,weight=TRUE)

#Surove in glajene centralne stopnje umrljivosti:
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1

```

```

par(mar = mar.default + c(0, 2.5, 0, 0))
#Ženske
plot(mx_F_opt3, year=2014, xlab="x", ylim=c(-10,0), ylab=as.expression(bquote(paste("ln ", m[x]))), type="l", lwd=2,
col="red", main="Ženske", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(log(mx_F[,33]), type="l", col="black", lwd=2)
#Moški
plot(mx_M_opt3, year=2014, xlab="x", ylim=c(-10,0), ylab=as.expression(bquote(paste("ln ", m[x]))), type="l", col="red", lwd=2, main="Moški", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(log(mx_M[,33]), type="l", col="black", lwd=2)
mx_F_opt3=as.data.frame(mx_F_opt3$rate)
mx_M_opt3=as.data.frame(mx_M_opt3$rate)
colnames(mx_F_opt3)=c(1982:2014)
colnames(mx_M_opt3)=c(1982:2014)
#ANALIZA UMRLJIVOSTI PREBIVALCEV SLOVENIJE
#Branje podatkov o glajenih centralnih stopnjah umrljivosti:
ln_mx_F=log(mx_F_opt3)
ln_mx_M=log(mx_M_opt3)
#Primerjava centralnih stopnej umrljivosti med spoloma v letu 2014:
layout(matrix(c(1,1), 1,1, byrow = TRUE))
plot(ln_mx_F[, "2014"], xlab="x", ylim=c(-10,0), ylab=as.expression(bquote(paste("ln ", m[x]))), type="l", lwd=2, col="red", main=" ", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(ln_mx_M[, "2014"], type="l", col="blue", lwd=2)
legend("bottomright", bg = "white", c("Ženske", "Moški"), y.intersp = 1.5, ncol=1, lty=c(1,1), col= c("red", "blue") ,cex = 1.2)
#Centralne stopnje umrljivosti v izbranih letih:
layout(matrix(c(1,2), 1, 2, byrow = TRUE))
#Ženske
plot(ln_mx_F[, "1985"], xlab="x", ylim=c(-10,0), ylab=as.expression(bquote(paste("ln ", m[x]))), type="l", lwd=2, col="red", main="Ženske", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(ln_mx_F[, "1995"], type="l", lwd=2, col="blue")
lines(ln_mx_F[, "2005"], type="l", lwd=2, col="green")
lines(ln_mx_F[, "2014"], type="l", lwd=2, col="orange")
grid(col="grey20")
legend("bottomright", bg="white", c("1985", "1995", "2005", "2014"), y.intersp=1.5, ncol=1, lty=c(1,1,1,1), lwd=rep(2,4), col = c("red", "blue", "green", "orange"), cex = 1.2)
#Moški
plot(ln_mx_M[, "1985"], xlab="x", ylim=c(-10,0), ylab=as.expression(bquote(paste("ln ", m[x]))), type="l", lwd=2, col="red", main="Moški", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(ln_mx_M[, "1995"], type="l", lwd=2, col="blue")
lines(ln_mx_M[, "2005"], type="l", lwd=2, col="green")
lines(ln_mx_M[, "2014"], type="l", lwd=2, col="orange")
grid(col="grey20")
legend("bottomright", bg="white", c("1985", "1995", "2005", "2014"), y.intersp=1.5, ncol=1, lty=c(1,1,1,1), lwd=rep(2,4), col = c("red", "blue", "green", "orange"), cex = 1.2)
#Trend spreminjanja centralnih stopenj umrljivosti pri izbranih starostih:
layout(matrix(c(1:6), 2, 3, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 2, 0, 0))
#Ženske, 35 let
plot(c(1982:2014), ln_mx_F[36,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ", m[35], " (t)")), main="Ženske stare 35 let", ylim=c(-7.9,-5.8))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_F[36,]), years = c(1982:2014), cex.lab=2, cex.axis=2, cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014), smooth$fitted, col="red", lwd=2)
grid(col="grey20")
#Ženske, 50 let

```

```

plot(c(1982:2014),ln_mx_F[51,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ",m[50]," (t)")), main="Ženske stare 50 let",ylim=c(-
6.4,-4.3))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_F[51,]), years = c(1982:2014) ,cex.lab=2,cex.axis=2,cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014),smooth$fitted,col="red",lwd=2)
grid(col="grey20")
#Ženske, 75 let
plot(c(1982:2014),ln_mx_F[76,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ",m[75]," (t)")), main="Ženske stare 75 let",ylim=c(-
4,-2.4))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_F[76,]), years = c(1982:2014) ,cex.lab=2,cex.axis=2,cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014),smooth$fitted,col="red",lwd=2)
grid(col="grey20")
#Moški, 35 let
plot(c(1982:2014),ln_mx_M[36,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ",m[35]," (t)")), main="Moški stari 35 let",ylim=c(-
7.9,-5.8))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_M[36,]), years = c(1982:2014) ,cex.lab=2,cex.axis=2,cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014),smooth$fitted,col="red",lwd=2)
grid(col="grey20")
#Moški, 50 let
plot(c(1982:2014),ln_mx_M[51,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ",m[50]," (t)")), main="Moški stari 50 let",ylim=c(-
6.4,-4.3))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_M[51,]), years = c(1982:2014) ,cex.lab=2,cex.axis=2,cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014),smooth$fitted,col="red",lwd=2)
grid(col="grey20")
#Moški, 75 let
plot(c(1982:2014),ln_mx_M[76,], xlab="t", ylab=bquote(paste("ln ",m[75]," (t)")), main="Moški stari 75 let",ylim=c(-4,-
2.4))
dummy = list(q = as.numeric(ln_mx_M[76,]), years = c(1982:2014) ,cex.lab=2,cex.axis=2,cex.main=2)
smooth <- loess(dummy$q ~ dummy$years, span=0.2, degree=2)
lines(c(1982:2014),smooth$fitted,col="red",lwd=2)
grid(col="grey20")
#Funkcija preživetja, gostota verjetnosti in pričakovana življenjska doba:
#Ženske
surv_rate_F <- matrix(0,102,33)
dens_F <- matrix(0,102,33)
surv_rate_F[1,] <- 1
px_F <-1
le_F <- matrix(0,1,33)
for(i in 1:33){
  for(j in 2:102){
    px_F <- 1-(1-exp(-mx_F_opt3[j-1,i]))
    surv_rate_F[j,i] <- surv_rate_F[j-1,i]*px_F
    dens_F[j-1,i] <- mx_F_opt3[j-1,i]*surv_rate_F[j,i]
    le_F[1,i] <- le_F[1,i]+ surv_rate_F[j,i]
  }
}
le_F <- le_F+0.5
#Moški
surv_rate_M <- matrix(0,102,33)
dens_M <- matrix(0,102,33)
surv_rate_M[1,] <- 1
px_M <-1
le_M <- matrix(0,1,33)

```

```

for(i in 1:33){
  for(j in 2:102){
    px_M <- 1-(1-exp(-mx_M_opt3[j-1,i]))
    surv_rate_M[j,i] <- surv_rate_M[j-1,i]*px_M
    dens_M[j-1,i] <- mx_M_opt3[j-1,i]*surv_rate_M[j,i]
    le_M[1,i] <- le_M[1,i]+ surv_rate_M[j,i]
  }
}
le_M <- le_M+0.5
#Pričakovana življenjska doba novorojenih oseb:
layout(matrix(c(1:1),1, 1, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 2.5, 0, 0))
plot(c(1982:2014),le_F[1,],xlab="t",ylim=c(65,85),ylab=expression(paste(e[0],"(t)")),type="l",lwd=2,col="red",cex.lab=
1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1982:2014), le_M[1,], type="l", lwd=2, col="blue")
legend("bottomright", bg = "white",c("Ženske","Moški"), y.intersp = 1.5, ncol=1, lty=c(1,1), col = c("red","blue"), cex =
1.2)
#Funkcija preživetja novorojene osebe:
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow = TRUE))
mar.default <- c(5,2,2,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 2.5, 0, 0))
#Ženske
plot(c(0:101), surv_rate_F[,4],xlab="x",ylim=c(0,1),ylab=as.expression(bquote(paste(S[0],"(x)"))), type="l", lwd=2,
col="red", main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5) #leto 1985
lines(c(0:101), surv_rate_F[,14], type="l", lwd=2, col="blue") #leto 1995
lines(c(0:101), surv_rate_F[,24], type="l", lwd=2, col="green") #leto 2005
lines(c(0:101), surv_rate_F[,33], type="l", lwd=2, col="orange") #leto 2014
grid(col="grey20")
legend("bottomleft", bg = "white",c("1985","1995","2005","2014"), y.intersp = 1.5, ncol=2, lty=c(1,1,1,1),lwd=rep(2,4),
col = c("red","blue","green","orange"), cex = 1.2)
#Moški
plot(c(0:101),surv_rate_M[,4],xlab="x",ylim=c(0,1),ylab=as.expression(bquote(paste(S[0],"(x)"))),type="l", lwd=2,
col="red", main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5) #leto 1985
lines(c(0:101), surv_rate_M[,14], type="l", lwd=2, col="blue") #leto 1995
lines(c(0:101), surv_rate_M[,24], type="l", lwd=2, col="green") #leto 2005
lines(c(0:101), surv_rate_M[,33], type="l", lwd=2, col="orange") #leto 2014
grid(col="grey20")
legend("bottomleft", bg = "white",c("1985","1995","2005","2014"), y.intersp = 1.5, ncol=2, lty=c(1,1,1,1),lwd=rep(2,4),
col = c("red","blue","green","orange"), cex = 1.2)
#Gostota verjetnosti preživetja novorojene osebe
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.4, 0, 0))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow = TRUE))
#Ženske
plot(c(0:101),dens_F[,4],xlab="x",ylim=c(0,0.05),ylab=as.expression(bquote(paste(f[0],"(x)"))),type="l",lwd=2,
col="red", main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5) #leto 1985
lines(c(0:101), dens_F[,14], type="l", lwd=2, col="blue") #leto 1995
lines(c(0:101), dens_F[,24], type="l", lwd=2, col="green") #leto 2005
lines(c(0:101), dens_F[,33], type="l", lwd=2, col="orange") #leto 2014
grid(col="grey20")
legend("topleft", bg = "white",c("1985","1995","2005","2014"), y.intersp = 1.5, ncol=2, lty=c(1,1,1,1),lwd=rep(2,4), col
= c("red","blue","green","orange"), cex = 1.2)
#Moški
plot(c(0:101),dens_M[,4],xlab="x",ylim=c(0,0.05),ylab=as.expression(bquote(paste(f[0],"(x)"))),type="l",lwd=2,col="red",
main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5) #leto 1985

```

```

lines(c(0:101), dens_M[,14], type="l", lwd=2, col="blue") #leto 1995
lines(c(0:101), dens_M[,24], type="l", lwd=2, col="green") #leto 2005
lines(c(0:101), dens_M[,33], type="l", lwd=2, col="orange") #leto 2014
grid(col="grey20")
legend("topleft", bg = "white", c("1985", "1995", "2005", "2014"), y.intersp = 1.5, ncol=2, lty=c(1,1,1,1), lwd=rep(2,4), col
= c("red", "blue", "green", "orange"), cex = 1.2)
#DEFINICIJE STOHAŠTIČNIH MODELOV UMRLJIVOSTI
#Poisson Lee-Carterjev model:
constLC <- function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
  c1 <- mean(kt[1, ], na.rm = TRUE)
  c2 <- sum(bx[, 1], na.rm = TRUE)
  list(ax = ax + c1 * bx, bx = bx / c2, kt = c2 * (kt - c1))
}
LC <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = TRUE, periodAgeFun = "NP", constFun = constLC)
#CBD-model
f2 <- function(x, ages) x - mean(ages)
CBD <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = FALSE, periodAgeFun = c("1", f2))
#Prikaz pomena parametrov CBD-modela
CBD_par <- function(x_min, x_max, kappa11, kappa21, kappa12, kappa22){
  n <- x_max - x_min + 1
  logit_qx1 <- data.frame(age = c(x_min:x_max), logit_qx = numeric(n))
  logit_qx2 <- data.frame(age = c(x_min:x_max), logit_qx = numeric(n))
  x_avg = (x_min + x_max) / 2
  for (i in (1:n)){
    logit_qx1[i,2] = kappa11 + kappa21 * ((x_min + i - 1) - x_avg)
    logit_qx2[i,2] = kappa12 + kappa22 * ((x_min + i - 1) - x_avg)
  }
  plot(c(x_min:x_max), logit_qx1[,2], type="l", col="red", lwd=2, xlab="x", ylab=as.expression(bquote(paste("logit
", q[x]))), cex.lab=1.8, cex.axis=1.8)
  lines(c(x_min:x_max), logit_qx2[,2], type="l", col="blue", lwd=2)
  legend("topleft", bg="white", c(as.expression(bquote(paste(kappa[t]^(1) == .(kappa11),
kappa[t]^(2) == .(kappa21)))), as.expression(bquote(paste(kappa[t]^(1) == .(kappa12),
kappa[t]^(2) == .(kappa22))))), ncol=1, lty=c(1,1), col=c("red", "blue"), cex = 1.7)
}
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.6, 0, 0))
layout(matrix(c(1:3), 1, 3, byrow = TRUE))
CBD_par(40,100,-4.2,0.102,-5.2,0.102)
CBD_par(40,100,-4.2,0.102,-4.2,0.204)
CBD_par(40,100,-4.2,0.102,-5.2,0.204)
#Renshaw-Habermanov model:
RH <- rh(link = "log", cohortAgeFun = "1") #original RH model: cohortAgeFun = "NP"
#APC-model
APC <- apc(link = "log")
#M7-model
M7 <- m7(link = "log")
#Platov model
f2 <- function(x, ages) mean(ages) - x
constPlat <- function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
  nYears <- dim(wxt)[2]
  x <- ages
  t <- 1:nYears
  c <- (1 - tail(ages, 1)):(nYears - ages[1])
  xbar <- mean(x)
  #sum g(c)=0, \sum cg(c)=0, \sum c^2g(c)=0
  phiReg <- lm(gc ~ 1 + c + I(c^2), na.action = na.omit)

```

```

phi <- coef(phiReg)
gc <- gc - phi[1] - phi[2] * c - phi[3] * c^2
kt[2, ] <- kt[2, ] + 2 * phi[3] * t
kt[1, ] <- kt[1, ] + phi[2] * t + phi[3] * (t^2 - 2 * xbar * t)
ax <- ax + phi[1] - phi[2] * x + phi[3] * x^2
#sum kt[i, ] = 0
ci <- rowMeans(kt, na.rm = TRUE)
ax <- ax + ci[1] + ci[2] * (xbar - x)
kt[1, ] <- kt[1, ] - ci[1]
kt[2, ] <- kt[2, ] - ci[2]
list(ax = ax, bx = bx, kt = kt, b0x = b0x, gc = gc)
}

PLAT <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = TRUE, periodAgeFun = c("1", f2), cohortAgeFun = "1", constFun =
constPlat)

#KALIBRACIJA MODELOV
#Lee-Carterjev model (glajenje z zlepk):
#Priprava podatkov:
mx_F=mx_F_opt3
mx_M=mx_M_opt3
mx_M_demogdata_smooth<-
demogdata(mx_M,Ex_M,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="male")
mx_F_demogdata_smooth<-
demogdata(mx_F,Ex_F,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="female")
#Kalibracija:
mLC_F=lca(mx_F_demogdata_smooth,series="female",adjust="dt")
mLC_M=lca(mx_M_demogdata_smooth,series="male",adjust="dt")
#Ocena parametra  $\beta_x^{(1)}$ 
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow = TRUE))
#Ženske:
plot(c(0:100),log(mx_F[,1]),type="l",col="darkgrey",xlab="x",ylim=c(-10,0),ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
for(i in (2: 33)){
  lines(log(mx_F[,i]),type="l",col="darkgrey")
}
lines(mLC_F$ax,type="l",lwd=2,col="red")
#Moški:
plot(c(0:100),log(mx_M[,1]),type="l",col="darkgrey",xlab="x",ylim=c(-10,0),ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
for(i in (2: 33)){
  lines(log(mx_M[,i]),type="l",col="darkgrey")
}
lines(mLC_M$ax,type="l",lwd=2,col="red")
#Ocene parametrov  $\beta_x^{(2)}$  in  $\kappa_t^{(2)}$ 
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1.5, -1, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow = TRUE))
#Ženske, beta2:
plot(c(0:100),mLC_F$b2,type="l",col="red",lwd=2,xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^2))),main="Ženske",ce
x.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(0.003,0.025))
#Moški, beta2:
plot(c(0:100),mLC_M$b2,type="l",col="red",lwd=2,xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^2))),main="Moški",ce
x.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(0.003,0.025))
#Ženske, kappa2:
plot(c(1982:2014),mLC_F$kt,type="l",col="red",lwd=2,xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^2))),
main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-60,40))
#Moški, kappa2:

```

```

plot(c(1982:2014),mLC_M$kt,type="l",col="red",lwd=2,xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),
main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-60,40))
#Lee-Carterjev model (brez glajenja z zlepk):
#Priprava podatkov:
mx_F=mx_F_opt2
mx_M=mx_M_opt2
mx_M_demogdata<-
demogdata(mx_M,Ex_M,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="male")
mx_F_demogdata<-
demogdata(mx_F,Ex_F,ages=0:100,years=1982:2014,type="mortality",label="Slovenia",name="female")
#Kalibracija:
LC_F=lca(mx_F_demogdata,series="female",adjust="dt")
LC_M=lca(mx_M_demogdata,series="male",adjust="dt")
#Primerjava ocen parametrov (z/brez glajenja z zlepk):
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,beta1
plot(c(0:100),t(mLC_F$ax),type="l",col="blue",xlab="x",ylim=c(-10,0),
ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),main="Ženske",lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(LC_F$ax,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomright",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,beta1
plot(c(0:100),t(mLC_M$ax),type="l",col="blue",xlab="x",ylim=c(-10,0),
ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),main="Moški",lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(LC_M$ax,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomright",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Ženske,beta2
plot(c(0:100),t(mLC_F$bx),type="l",col="blue",lwd=1.8,xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),main="Ženske",
ylim=c(0,0.04),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(0:100),LC_F$bx,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("topright",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,beta2
plot(c(0:100),t(mLC_M$bx),type="l",col="blue",lwd=1.8,xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),main="Moški",
ylim=c(0,0.04),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(0:100),LC_M$bx,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("topright",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Ženske,kappa2
plot(c(1982:2014),t(mLC_F$kt),type="l",col="blue",lwd=1.8,xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),main="Ženske",
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-60,45))
lines(c(1982:2014),LC_F$kt,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomleft",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,kappa2
plot(c(1982:2014),t(mLC_M$kt),type="l",col="blue",lwd=1.8,xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),main="Moški",
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-60,45))
lines(c(1982:2014),LC_M$kt,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomleft",bg="white",c("mLC","LC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Poisson Lee-Carterjev model:
#Kalibracija modela:
ages.fit<-0:100
ages<-c(0:100)
years<-c(1982:2014)
PLC_F <- fit(LC, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
PLC_M <- fit(LC, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
#Grafična primerjava ocen parametrov s parametri, dobljenih z Lee-Carterjevim modelom na podatkih, brez glajenja z zlepk:

```

```

mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,beta1:
plot(c(0:100),t(LC_F$ax),type="l",col="blue",xlab="x",ylim=c(-10,0),ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),main="Ženske",lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLC_F$ax,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomright",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,beta1:
plot(c(0:100),t(LC_M$ax),type="l",col="blue",xlab="x",ylim=c(-10,0),ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),main="Moški",lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLC_M$ax,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomright",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Ženske,beta2:
plot(c(0:100),t(LC_F$bx),type="l",col="blue",xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),main="Ženske",lwd=1.8,ylim=c(0,0.04),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLC_F$bx,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("topright",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,beta2:
plot(c(0:100),t(LC_M$bx),type="l",col="blue",xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),main="Moški",lwd=1.8,ylim=c(0,0.04),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLC_M$bx,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("topright",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Ženske,kappa2:
plot(c(1982:2014),t(LC_F$kt),type="l",col="blue",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),main="Ženske",lwd=1.8,ylim=c(-60,45),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(1982:2014),PLC_F$kt,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomleft",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#Moški,kappa2:
plot(c(1982:2014),t(LC_M$kt),type="l",col="blue",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),main="Moški",lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,ylim=c(-60,45))
lines(c(1982:2014),PLC_M$kt,type="l",lwd=1.8,col="red")
legend("bottomleft",bg="white",c("LC","PLC"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("blue","red"),cex = 1.2)
#CBD-model:
#Kalibracija modela:
ages=c(0:100)
years=c(1982:2014)
ages.fit<-40:100
CBD_F <- fit(CBD, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
CBD_M <- fit(CBD, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
#Grafični prikaz ocen parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Kappa1:
plot(c(1982:2014),CBD_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),lwd=2,ylim=c(-4.5,-2.5),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(1982:2014),CBD_M$kt[1,],type="l",lwd=2,col="blue")
legend("topright",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
#Kappa2:
plot(c(1982:2014),CBD_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=2,ylim=c(0.075,0.12),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(1982:2014),CBD_M$kt[2,],type="l",lwd=2,col="blue")
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
#Renshaw-Habermanov model:
#Kalibracija modela:

```

```

ages=c(0:100)
years=c(1982:2014)
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0) #clip nam pove, koliko začetnih in končnih rojstnih kohort
ne upoštevamo v kalibraciji
RH_F<- fit(RH, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit, wxt = wxt)
RH_M<- fit(RH, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit, wxt = wxt)
#Grafični prikaz ocen parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -2, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Beta1:
plot(c(0:100),RH_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",ylim=c(-
10,0),ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(0:100),RH_M$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Beta2:
plot(c(0:100),RH_F$bx,type="l",col="red",xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(-
0.02,0.03),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(0:100),RH_M$bx,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Kappa2:
plot(c(1982:2014),RH_F$kt,type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(-
60,40),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(1982:2014),RH_M$kt,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Gamma:
plot(c(1982:2014),RH_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(1982:2014),RH_M$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#APC-model:
#Kalibracija modela:
ages=c(0:100)
years=c(1982:2014)
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0) #clip nam pove, koliko začetnih in končnih rojstnih kohort
ne upoštevamo v kalibraciji
APC_F<- fit(APC, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit, wxt = wxt)
APC_M<- fit(APC, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit, wxt = wxt)
#Grafični prikaz ocen parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -2, -1))
layout(matrix(c(1:3),1, 3, byrow=TRUE))
#Beta1:
plot(c(0:100),APC_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",ylim=c(-
10,0),ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(0:100),APC_M$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.5)
#Kappa2:
plot(c(1982:2014),APC_F$kt,type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,cex.lab=1.5,
cex.axis=1.5)
lines(c(1982:2014),APC_M$kt,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske", "Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.5)
#Gamma:

```

```

plot(c(1882:2014),APC_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1882:2014),APC_M$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottom",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.5)
#M7-model
#Kalibracija modela:
ages=c(0:100)
years=c(1982:2014)
ages.fit<-40:100
M7_F <- fit(M7, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
M7_M <- fit(M7, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
#Grafični prikaz ocen parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -2, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Kappa1
plot(c(1982:2014),M7_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-4.5,-2.5),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1982:2014),M7_M$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Kappa2
plot(c(1982:2014),M7_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(0.07,0.12),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1982:2014),M7_M$kt[2,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Kappa3:
plot(c(1982:2014),M7_F$kt[3,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),lwd=1.8,ylim=c(-0.00045,0.0013),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1982:2014),M7_M$kt[3,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("top",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Gamma:
plot(c(1882:1974),t(M7_F$gc),type="l",col="red",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(c(1882:1974),t(M7_M$gc),type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottom",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=2,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Platov model:
#Kalibracija modela:
ages=c(0:100)
years=c(1982:2014)
ages.fit<-0:100
PLAT_F <- fit(PLAT, Dxt = dx_F_opt1, Ext = Ex_F, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
PLAT_M <- fit(PLAT, Dxt = dx_M_opt1, Ext = Ex_M, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
#Grafični prikaz ocen parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -2, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Beta1:
plot(PLAT_F$ages,PLAT_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",ylab=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-10,-0),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(PLAT_M$ages,PLAT_M$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Kappa2
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(PLAT_M$years,PLAT_M$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)

```

```

#Kappa3:
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),lwd=1.8,ylim
=c(-0.01,0.008),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(PLAT_M$years,PLAT_M$kt[2,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#Gamma:
plot(PLAT_F$cohort,PLAT_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
lines(PLAT_M$cohort,PLAT_M$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("Ženske","Moški"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex=1.2)
#NAPOVEDOVANJE UMRLJIVOSTI:
#Lee-Carterjev model (glajenje z zlepk):
h<-50
mLC_F_for<-forecast.lca(mLC_F,h=h,level=95)
mLC_M_for<-forecast.lca(mLC_M,h=h,level=95)
#Projekcije vrednosti parametra  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.4, 0, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
plot(mLC_F_for$kt.f,main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),
,cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5,ylim=c(-200,100))
plot(mLC_M_for$kt.f,main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),
,cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5,ylim=c(-200,100))
#Projekcije centralnih stopenj umrljivosti:
plot(mLC_F_for,main="Ženske",ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),xlab="x",cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5)
plot(mLC_M_for,main="Moški",ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),xlab="x",cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5)
#Lee-Carterjev model (brez glajenja z zlepk):
h<-50
LC_F_for<-forecast.lca(LC_F,h=h,level=95)
LC_M_for<-forecast.lca(LC_M,h=h,level=95)
#Projekcije vrednosti parametra  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 0.4, 0, 0))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
plot(LC_F_for$kt.f, main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),ylim=c(-220,100))
plot(LC_M_for$kt.f, main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),ylim=c(-220,100))
#Projekcije centralnih stopenj umrljivosti:
plot(LC_F_for,main="Ženske",ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),xlab="x",cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5,ylim=c(-16,0))
plot(LC_M_for,main="Moški",ylab=as.expression(bquote(paste("ln
",m[x]))),xlab="x",cex.lab=1.5,cex.main=1.5,cex.axis=1.5,ylim=c(-16,0))
#Poisson Lee-Carterjev model:
h<-50
PLC_F_for_95<-forecast(PLC_F,h=h,level=95)
PLC_M_for_95<-forecast(PLC_M,h=h,level=95)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
plot(PLC_F$years,PLC_F$kt,xlim=c(min(PLC_F$years),max(PLC_F_for_95$years)),ylim=c(-
250,50),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.mai
n=1.5)

```

```

lines(PLC_F_for_95$years,PLC_F_for_95$kt.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(PLC_F_for_95$years,PLC_F_for_95$kt.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLC_F_for_95$years,PLC_F_for_95$kt.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški:
plot(PLC_M$years,PLC_M$kt,xlim=c(min(PLC_M$years),max(PLC_M_for_95$years)), ylim=c(-
250,50),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.mai
n=1.5)
lines(PLC_M_for_95$years,PLC_M_for_95$kt.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(PLC_M_for_95$years,PLC_M_for_95$kt.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLC_M_for_95$years,PLC_M_for_95$kt.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
h<-50
nsim<-500
PLC_F_sim<-simulate(PLC_F,nsim = nsim,h=h)
PLC_M_sim<-simulate(PLC_M,nsim = nsim,h=h)
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
mxt_PLC_F <- PLC_F$Dxt / PLC_F$Ext
qxt_PLC_F<- 1-exp(-mxt_PLC_F)
qxt_PLC_F_sim<-1-exp(-PLC_F_sim$rates)
#45 let
plot(PLC_F$years, qxt_PLC_F["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.0002, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_PLC_F_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#65 let
points(PLC_F$years, mxt_PLC_F["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLC_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#85 let
points(PLC_F$years, qxt_PLC_F["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLC_F_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")), ln
= NULL)
#labels
text(1985, mxt_PLC_F[c("44", "68", "84"), "2014"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Moški:
mxt_PLC_M<- PLC_M$Dxt / PLC_M$Ext
qxt_PLC_M<-1-exp(-mxt_PLC_M)
qxt_PLC_M_sim<-1-exp(-PLC_M_sim$rates)
#45 let
plot(PLC_M$years, qxt_PLC_M["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.0002, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_PLC_M_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#65 let
points(PLC_M$years, qxt_PLC_M["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLC_M_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#85 let
points(PLC_M$years, qxt_PLC_M["85", ], pch = 20)

```

```

fan(t(qxt_PLC_M_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
#labels
text(1985, qxt_PLC_M[c("49", "66", "82"), "2014"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#CBD-model
h<-50
CBD_F_for_95<-forecast(CBD_F,h=h,level=95)
CBD_M_for_95<-forecast(CBD_M,h=h,level=95)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov  $\kappa_t^{(1)}$  in  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Ženske, kappa1:
plot(CBD_F$years,CBD_F$kt[1,],xlim=c(min(CBD_F$years),max(CBD_F_for_95$years)),ylim=c(-6,-
2.5),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=
1.5)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black",lty=2)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa1:
plot(CBD_M$years,CBD_M$kt[1,],xlim=c(min(CBD_M$years),max(CBD_M_for_95$years)),ylim=c(-6,-
2.5),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black",lty=2)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ženske, kappa2:
plot(CBD_F$years,CBD_F$kt[2,],xlim=c(min(CBD_F$years),max(CBD_F_for_95$years)),ylim=c(0.08,0.17),col="black",
main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(CBD_F_for_95$years,CBD_F_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa2
plot(CBD_M$years,CBD_M$kt[2,],xlim=c(min(CBD_M$years),max(CBD_M_for_95$years)),ylim=c(0.08,0.17),col="black",
main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(CBD_M_for_95$years,CBD_M_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-50
CBD_F_sim<-simulate(CBD_F,nsim = nsim,h=h)
CBD_M_sim<-simulate(CBD_M,nsim = nsim,h=h)
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1,-1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
mxt_CBD_F <- CBD_F$Dxt / CBD_F$Ext
qxt_CBD_F <- 1-exp(-mxt_CBD_F)
#starost 45
plot(CBD_F$years, qxt_CBD_F["45", ], xlim = c(1982, 2064), ylim = c(0.00005, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)")))), pch = 20, log =
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)

```

```

fan(tt(CBD_F_sim$rates["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green",
"white")), ln = NULL)
#starost 65
points(CBD_F$years, qxt_CBD_F["65", , ], pch = 20)
fan(tt(CBD_F_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 85
points(CBD_F$years, qxt_CBD_F["85", , ], pch = 20)
fan(tt(CBD_F_sim$rates["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
#labels
text(1985, qxt_CBD_F[c("43", "65", "84"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"), cex=1.3)
#Moški:
mxt_CBD_M<- CBD_M$Dxt / CBD_M$Ext
qxt_CBD_M <-1-exp(-mxt_CBD_M)
#starost 45
plot(CBD_M$years, qxt_CBD_M["45", , ], xlim = c(1982, 2064), ylim = c(0.00005, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y", main="Moški", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
fan(tt(CBD_M_sim$rates["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green",
"white")), ln = NULL)
#starost 65
points(CBD_M$years, qxt_CBD_M["65", , ], pch = 20)
fan(tt(CBD_M_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 85
points(CBD_M$years, qxt_CBD_M["85", , ], pch = 20)
fan(tt(CBD_M_sim$rates["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
#labels
text(1985, qxt_CBD_M[c("45", "65", "82"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"), cex=1.3)
#Renshaw-Habermanov model:
h<-50
RH_F_for_95<-forecast(RH_F, h=h, level=95, gc.order=c(1,1,0))
RH_M_for_95<-forecast(RH_M, h=h, level=95, gc.order=c(1,1,0))
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske, kappa2:
plot(RH_F$years, RH_F$kt[1,], xlim=c(min(RH_F$years), max(RH_F_for_95$years)), ylim=c(-
250,50), col="black", main="Ženske", xlab="t", ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))), cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.mai
n=1.5)
lines(RH_F_for_95$years, RH_F_for_95$kt.f$mean[1,], type="l", col="black", lty=2)
lines(RH_F_for_95$years, RH_F_for_95$kt.f$lower[1,], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(RH_F_for_95$years, RH_F_for_95$kt.f$upper[1,], type="l", col="red", lwd=1.8)
#Moški, kappa2:
plot(RH_M$years, RH_M$kt[1,], xlim=c(min(RH_M$years), max(RH_M_for_95$years)), ylim=c(-
250,50), col="black", main="Moški", xlab="t", ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))), cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.mai
n=1.5)
lines(RH_M_for_95$years, RH_M_for_95$kt.f$mean[1,], type="l", col="black", lty=2)
lines(RH_M_for_95$years, RH_M_for_95$kt.f$lower[1,], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(RH_M_for_95$years, RH_M_for_95$kt.f$upper[1,], type="l", col="red", lwd=1.8)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\gamma_{t-x}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))

```

```

layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske, gamma
plot(RH_F$cohort,RH_F$gc,xlim=c(min(RH_F$cohort),max(RH_F_for_95$gc.f $cohorts)),ylim=c(-
2.6,0.5),col="black",main="Ženske",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x]))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_F_for_95$gc.f $cohorts,RH_F_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black", lty=2)
lines(RH_F_for_95$gc.f $cohorts,RH_F_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(RH_F_for_95$gc.f $cohorts,RH_F_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, gamma
plot(RH_M$cohort,RH_M$gc,xlim=c(min(RH_M$cohort),max(RH_M_for_95$gc.f $cohorts)),ylim=c(-
2.6,0.5),col="black",main="Moški",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x]))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_M_for_95$gc.f $cohorts,RH_M_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(RH_M_for_95$gc.f $cohorts,RH_M_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(RH_M_for_95$gc.f $cohorts,RH_M_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-100
RH_F_sim<-simulate(RH_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
RH_M_sim<-simulate(RH_M,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1,-1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
mxt_RH_F <- RH_F$Dxt / RH_F$Ext
qxt_RH_F<-1-exp(- mxt_RH_F)
qxt_RH_F_sim<-1-exp(-RH_F_sim$rates)
#starost 45
plot(RH_F$years,qxt_RH_F["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.000005, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)")))),pch=20,log=
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_RH_F_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")), ln
= NULL)
#starost 65
points(RH_F$years, qxt_RH_F["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_RH_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln =
NULL)
#starost 85
points(RH_F$years, qxt_RH_F["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_RH_F_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")), ln
= NULL)
#labels
text(1985, qxt_RH_F [c("43", "65", "84"), "2014"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Moški:
mxt_RH_M <- RH_M$Dxt / RH_M$Ext
qxt_RH_M<-1-exp(-mxt_RH_M)
qxt_RH_M_sim<-1-exp(-RH_M_sim$rates)
#starost 45
plot(RH_M$years,qxt_RH_M["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.000005, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)")))), pch = 20, log =
"y",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_RH_M_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65

```

```

points(RH_M$years, qxt_RH_M["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_RH_M_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 85
points(RH_M$years, qxt_RH_M["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_RH_M_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")), ln
= NULL)
#labels
text(1985, qxt_RH_M [c("43", "65", "80"), "2014"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#APC-model:
h<-50
APC_F_for_95<-forecast(APC_F,h=h,level=95,gc.order=c(1,1,0))
APC_M_for_95<-forecast(APC_M,h=h,level=95,gc.order=c(1,1,0))
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\kappa_t^{(2)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,kappa2:
plot(APC_F$years,APC_F$kt[1,],xlim=c(min(APC_F$years),max(APC_F_for_95$years)),ylim=c(-2.6,0.6),col="black",
main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2)))) ,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_F_for_95$years,APC_F_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black", lty=2)
lines(APC_F_for_95$years,APC_F_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(APC_F_for_95$years,APC_F_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa2:
plot(APC_M$years,APC_M$kt[1,],xlim=c(min(APC_M$years),max(APC_M_for_95$years)),ylim=c(-
2.6,0.6),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_M_for_95$years,APC_M_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black",lty=2)
lines(APC_M_for_95$years,APC_M_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(APC_M_for_95$years,APC_M_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\gamma_{t-x}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,gamma
plot(APC_F$cohort,APC_F$gc,xlim=c(min(APC_F$cohort),max(APC_F_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
1.6,0.5),col="black",main="Ženske",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_F_for_95$gc.f $cohorts,APC_F_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black", lty=2)
lines(APC_F_for_95$gc.f $cohorts,APC_F_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(APC_F_for_95$gc.f $cohorts,APC_F_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, gamma
plot(APC_M$cohort,APC_M$gc,xlim=c(min(APC_M$cohort),max(APC_M_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
1.6,0.5),col="black",main="Moški",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_M_for_95$gc.f $cohorts,APC_M_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(APC_M_for_95$gc.f $cohorts,APC_M_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(APC_M_for_95$gc.f $cohorts,APC_M_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-100
APC_F_sim<-simulate(APC_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
APC_M_sim<-simulate(APC_M,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1

```

```

par(mar = mar.default + c(-1,1,-1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
mxt_APC_F <- APC_F$Dxt / APC_F$Ext
qxt_APC_F <- 1-exp(-mxt_APC_F)
qxt_APC_F_sim <- 1-exp(-APC_F_sim$rates)
#starost 45
plot(APC_F$years,qxt_APC_F["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t" (log-skala))))), pch = 20, log =
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_APC_F_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65
points(APC_F$years, qxt_APC_F["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_APC_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 85
points(APC_F$years, qxt_APC_F["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_APC_F_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")), ln
= NULL)
#labels
text(1985, qxt_APC_F [c("43", "65","84"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Moški:
mxt_APC_M <- APC_M$Dxt / APC_M$Ext
qxt_APC_M <- 1-exp(-mxt_APC_M)
qxt_APC_M_sim <- 1-exp(-APC_M_sim$rates)
#starost 45
plot(APC_M$years,qxt_APC_M["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t" (log-skala))))), pch = 20, log =
"y",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_APC_M_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65
points(APC_M$years, qxt_APC_M["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_APC_M_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 85
points(APC_M$years, qxt_APC_M["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_APC_M_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
#labels
text(1985, qxt_APC_M [c("43", "65","80"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#M7-model:
h<-50
M7_F_for_95<-forecast(M7_F,h=h,level=95,gc.order=c(1,0,0))
M7_M_for_95<-forecast(M7_M,h=h,level=95,gc.order=c(1,0,0))
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov  $\kappa_t^{(1)}$ ,  $\kappa_t^{(2)}$  in  $\kappa_t^{(3)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,kappa1
plot(M7_F$years,M7_F$kt[1,],xlim=c(min(M7_F$years),max(M7_F_for_95$years)),ylim=c(-5.8,-
2.5),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=
1.5)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black", lty=2)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)

```

```

lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa1:
plot(M7_M$years,M7_M$kt[1,],xlim=c(min(M7_M$years),max(M7_M_for_95$years)),ylim=c(-5.8,-
2.5),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.
5)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ženske, kappa2
plot(M7_F$years,M7_F$kt[2,],xlim=c(min(M7_F$years),max(M7_F_for_95$years)),ylim=c(0.07,0.18),col="black",mai
n="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa2
plot(M7_M$years,M7_M$kt[2,],xlim=c(min(M7_M$years),max(M7_M_for_95$years)),ylim=c(0.07,0.18),col="black",
main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ženske, kappa3
plot(M7_F$years,M7_F$kt[3,],xlim=c(min(M7_F$years),max(M7_F_for_95$years)),ylim=c(-
0.004,0.003),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,ce
x.main=1.5)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$mean[3,],type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$lower[3,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_F_for_95$years,M7_F_for_95$kt.f$upper[3,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa3
plot(M7_M$years,M7_M$kt[3,],xlim=c(min(M7_M$years),max(M7_M_for_95$years)),ylim=c(-
0.004,0.003),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,ce
x.main=1.5)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$mean[3,],type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$lower[3,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_M_for_95$years,M7_M_for_95$kt.f$upper[3,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\gamma_{t-x}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1,2, byrow=TRUE))
#Ženske, gamma
plot(M7_F$cohort,M7_F$gc,xlim=c(min(M7_F$cohort),max(M7_F_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
0.8,0.5),col="black",main="Ženske",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_for_95$gc.f$cohorts,M7_F_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_F_for_95$gc.f$cohorts,M7_F_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_F_for_95$gc.f$cohorts,M7_F_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, gamma
plot(M7_M$cohort,M7_M$gc,xlim=c(min(M7_M$cohort),max(M7_M_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
0.8,0.5),col="black",main="Moški",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_M_for_95$gc.f$cohorts,M7_M_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(M7_M_for_95$gc.f$cohorts,M7_M_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(M7_M_for_95$gc.f$cohorts,M7_M_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-100

```

```

M7_F_sim<-simulate(M7_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
M7_M_sim<-simulate(M7_M,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
mxt_M7_F <- M7_F$Dxt/M7_F$Ext
qxt_M7_F<- 1-exp(-mxt_M7_F)
mxt_M7_M <- M7_M$Dxt/M7_M$Ext
qxt_M7_M<- 1-exp(-mxt_M7_M)
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1,-1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
#Ženske:
#starost 45
plot(M7_F$years, qxt_M7_F["45", ], xlim = c(1982, 2064), ylim = c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(M7_F_sim$rates["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65
points(M7_F$years, qxt_M7_F["65", ], pch = 20)
fan(t(M7_F_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 85
points(M7_F$years, qxt_M7_F["85", ], pch = 20)
fan(t(M7_F_sim$rates["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")), ln
= NULL)
text(1985, qxt_M7_F[c("43", "64", "84"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Moški:
#starost 45
plot(M7_M$years, qxt_M7_M["45", ], xlim = c(1982, 2064), ylim= c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(M7_M_sim$rates["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65
points(M7_M$years, qxt_M7_M["65", ], pch = 20)
fan(t(M7_M_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 85
points(M7_M$years, qxt_M7_M["85", ], pch = 20)
fan(t(M7_M_sim$rates["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
text(1985, qxt_M7_M[c("45", "65", "82"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Platov model:
h<-50
PLAT_F_for_95<-forecast(PLAT_F,h=h,level=95,gc.order=c(1,0,0))
PLAT_M_for_95<-forecast(PLAT_M,h=h,level=95,gc.order=c(1,0,0))
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametrov  $\kappa_t^{(2)}$  in  $\kappa_t^{(3)}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Ženske,kappa2:
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[1,],xlim=c(min(PLAT_F$years),max(PLAT_F_for_95$years)),ylim=c(-
3,0.6),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))))
,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black", lty=2)
lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)

```

```

lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa2:
plot(PLAT_M$years,PLAT_M$kt[1,],xlim=c(min(PLAT_M$years),max(PLAT_M_for_95$years)),ylim=c(-
3,0.6),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))))
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$mean[1,],type="l",col="black",lty=2)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$lower[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$upper[1,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ženske, kappa3:
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[2,],xlim=c(min(PLAT_F$years),max(PLAT_F_for_95$years)),ylim=c(-
0.06,0.01),col="black",main="Ženske",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))))
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLAT_F_for_95$years,PLAT_F_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, kappa3:
plot(PLAT_M$years,PLAT_M$kt[2,],xlim=c(min(PLAT_M$years),max(PLAT_M_for_95$years)),ylim=c(-
0.06,0.01),col="black",main="Moški",xlab="t",ylab=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))))
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$mean[2,],type="l",col="black",lty=2)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$lower[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLAT_M_for_95$years,PLAT_M_for_95$kt.f$upper[2,],type="l",col="red",lwd=1.8)
#Ocenjene in napovedane vrednosti parametra  $\gamma_{t-x}$ :
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 1, -1, -1))
layout(matrix(c(1:2),1,2, byrow=TRUE))
#Ženske, gamma
plot(PLAT_F$cohort,PLAT_F$gc,xlim=c(min(PLAT_F$cohort),max(PLAT_F_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
0.5,0.5),col="black",main="Ženske",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])))
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_F_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(PLAT_F_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_F_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLAT_F_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_F_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Moški, gamma
plot(PLAT_M$cohort,PLAT_M$gc,xlim=c(min(PLAT_M$cohort),max(PLAT_M_for_95$gc.f$cohorts)),ylim=c(-
0.5,0.5),col="black",main="Moški",xlab="t-x",ylab=as.expression(bquote(gamma[t-x])))
cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_M_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_M_for_95$gc.f$mean,type="l",col="black",lty=2)
lines(PLAT_M_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_M_for_95$gc.f$lower,type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(PLAT_M_for_95$gc.f$cohorts,PLAT_M_for_95$gc.f$upper,type="l",col="red",lwd=1.8)
#Projekcije začetnih stopenj umrljivosti:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-100
PLAT_F_sim<-simulate(PLAT_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
PLAT_M_sim<-simulate(PLAT_M,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
mxt_PLAT_F <- PLAT_F$Dxt / PLAT_F$Ext
qxt_PLAT_F<- 1-exp(-mxt_PLAT_F)
qxt_PLAT_F_sim<-1-exp(-PLAT_F_sim$rates)
mxt_PLAT_M <- PLAT_M$Dxt / PLAT_M$Ext
qxt_PLAT_M<- 1-exp(-mxt_PLAT_M)
qxt_PLAT_M_sim<-1-exp(-PLAT_M_sim$rates)
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,1,-1,-1))
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))

```

```

#Ženske:
#starost 45
plot(PLAT_F$years,qxt_PLAT_F["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Ženske",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_PLAT_F_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green", "white")),
ln = NULL)
#starost 65
points(PLAT_F$years, qxt_PLAT_F["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLAT_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 85
points(PLAT_F$years, qxt_PLAT_F["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLAT_F_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
text(1985, qxt_PLAT_F [c("43", "65","84"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#Moški:
#starost 45
plot(PLAT_M$years,qxt_PLAT_M["45", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00001, 0.2), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log =
"y",main="Moški",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
fan(t(qxt_PLAT_M_sim["45", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("green",
"white")), ln = NULL)
#starost 65
points(PLAT_M$years, qxt_PLAT_M["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLAT_M_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 85
points(PLAT_M$years, qxt_PLAT_M["85", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLAT_M_sim["85", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue", "white")),
ln = NULL)
text(1985, qxt_PLAT_M [c("43", "65","80"), "2010"], labels = c("x = 45", "x = 65", "x = 85"),cex=1.3)
#IZRAČUN AIC IN BIC (na primeru Poisson Lee-Carterjevega modela):
#Efektivno število parametrov:
PLC_F$npar
PLC_M$npar
#Maksimalna vrednost funkcije verjetja:
PLC_F$loglik
PLC_M$loglik
#AIC:
AIC(PLC_F)
AIC(PLC_M)
#BIC:
BIC(PLC_F)
BIC(PLC_M)
#PRILAGOJENI STANDARDIZIRANI DEVIANČNI OSTANKI (na primeru Poisson Lee-Carterjevega modela):
PLC_F_dev_res<-residuals(PLC_F)
PLC_M_dev_res<-residuals(PLC_M)
#Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na predznak:
plot(PLC_F_dev_res, type = "signplot",main="PLC")
plot(PLC_M_dev_res, type = "signplot",main="PLC")
#Prilagojeni standardizirani deviančni ostanki glede na starost, leto in rojstno kohorto:
plot(PLC_F_dev_res, type = "scatter", main="Ženske",cex.main=1.8)
plot(PLC_M_dev_res, type = "scatter", main="Moški",cex.main=1.8)
#ROBUSTNOST PARAMETROV

```

#Poisson Lee-Carterjev model:**#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:**

```
dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
```

```
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
```

```
years_1992=c(1992:2014)
```

#Kalibracija:

```
ages.fit<-0:100
```

```
PLC_F_1992 <- fit(LC, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
```

#Grafična primerjava parametrov:

```
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
```

```
par(mar = mar.default + c(-1, 0.4, -1, -1))
```

```
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
```

#Beta1:

```
plot(PLC_F$ages,PLC_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",ylab="",lwd=1.8,ylim=c(-10,0),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,main= as.expression(bquote(beta[x]^(1))))
```

```
lines(PLC_F_1992$ages,PLC_F_1992$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
```

```
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
```

#Beta2:

```
plot(PLC_F$ages,PLC_F$bx,type="l",col="red",xlab="x",ylab="",lwd=1.8,ylim=c(-0.001,0.03),cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5,main=as.expression(bquote(beta[x]^(2))))
```

```
lines(PLC_F_1992$ages,PLC_F_1992$bx,type="l",col="blue",lwd=1.8)
```

```
legend("topright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
```

#Kappa2

```
plot(PLC_F$years,PLC_F$kt,type="l",col="red",xlab="t",ylab="",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
```

```
lines(PLC_F_1992$years,PLC_F_1992$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
```

```
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
```

#CBD-model:**#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:**

```
dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
```

```
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
```

```
years_1992=c(1992:2014)
```

#Kalibracija:

```
ages.fit<-40:100
```

```
CBD_F_1992 <- fit(CBD, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
```

#Grafična primerjava parametrov:

```
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
```

```
par(mar = mar.default + c(-1, 0.4, -1, -1))
```

```
layout(matrix(c(1:2),1, 2, byrow=TRUE))
```

#Kappa1:

```
plot(CBD_F$years,CBD_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-4.3,-3.4),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
```

```
lines(CBD_F_1992$years,CBD_F_1992$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
```

```
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
```

#Kappa2

```
plot(CBD_F$years,CBD_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(0.1,0.12),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
```

```
lines(CBD_F_1992$years,CBD_F_1992$kt[2,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
```

```
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex = 1.2)
```

#Renshaw-Habermanov model:**#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:**

```

dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
years_1992=c(1992:2014)
#Kalibracija:
ages.fit<-0:100
RH_F_1992 <- fit(RH, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
#Grafična primerjava parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 0.4, -1, -1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Beta1:
plot(RH_F$ages,RH_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",main=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-10,-0)
,ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_F_1992$ages,RH_F_1992$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#Beta2:
plot(RH_F$ages,RH_F$bx,type="l",col="red",xlab="x",main=as.expression(bquote(beta[x]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(-
0.018,0.05),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_F_1992$ages,RH_F_1992$bx,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#Kappa2
plot(RH_F$years,RH_F$kt,type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylab="",cex.a
xis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_F_1992$years,RH_F_1992$kt[,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#Gamma:
plot(RH_F$cohort,RH_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",main=as.expression(bquote(gamma[t-x])),lwd=1.8,ylim=c(-
1.8,0.8),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(RH_F_1992$cohort,RH_F_1992$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#APC-model
#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:
dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
years_1992=c(1992:2014)
#Kalibracija:
ages.fit<-0:100
APC_F_1992 <- fit(APC, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
#Grafična primerjava parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,0.4,-1,-1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Beta1:
plot(APC_F$ages,APC_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",main=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-
10,-0),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_F_1992$ages,APC_F_1992$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#Kappa2:
plot(APC_F$years,APC_F$kt,type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylab="",ce
x.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_F_1992$years,APC_F_1992$kt[,],type="l",col="blue",lwd=1.8)

```

```

legend("bottomleft",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex =
1.2)
#Gamma:
plot(APC_F$cohort,APC_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",main=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),lwd=1.8,ylim=c(-1,0.3),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(APC_F_1992$cohort,APC_F_1992$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottom",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex =
1.2)
#M7-model:
#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:
dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
years_1992=c(1992:2014)
#Kalibracija:
ages.fit<-40:100
M7_F_1992 <- fit(M7, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
#Grafična primerjava parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,0.4,-1,-1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Kappa1:
plot(M7_F$years,M7_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-
4.5,-3.4),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_1992$years,M7_F_1992$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex =
1.2)
#Kappa2:
plot(M7_F$years,M7_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylim=c(0.
08,0.125),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_1992$years,M7_F_1992$kt[2,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("topleft",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex = 1.2)
#Kappa3:
plot(M7_F$years,M7_F$kt[3,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),lwd=1.8,ylim=c(-
0.001,0.0015),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_1992$years,M7_F_1992$kt[3,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex =
1.2)
#Gamma:
plot(M7_F$cohort,M7_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",main=as.expression(bquote(gamma[t-x])),lwd=1.8,ylim=c(-
0.95,0.6),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(M7_F_1992$cohort,M7_F_1992$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottom",bg="white",c("1982–2014", "1992–2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red", "blue"),cex =
1.2)
#Platov model:
#Priprava podatkov za ponovno kalibracijo:
dx_F_1992=dx_F_opt1[,11:33]
Ex_F_1992=Ex_F[,11:33]
years_1992=c(1992:2014)
#Kalibracija:
ages.fit<-0:100
PLAT_F_1992 <- fit(PLAT, Dxt = dx_F_1992, Ext = Ex_F_1992, ages = ages, years = years_1992, ages.fit = ages.fit)
#Grafična primerjava parametrov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1,0.4,-1,-1))
layout(matrix(c(1:4),2, 2, byrow=TRUE))
#Beta1:

```

```

plot(PLAT_F$ages,PLAT_F$ax,type="l",col="red",xlab="x",main=as.expression(bquote(beta[x]^(1))),lwd=1.8,ylim=c(-
10,0),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_1992$ages,PLAT_F_1992$ax,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomright",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex
= 1.2)
#Kappa2:
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[1,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(2))),lwd=1.8,ylab
="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_1992$years,PLAT_F_1992$kt[1,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex =
1.2)
#Kappa3:
plot(PLAT_F$years,PLAT_F$kt[2,],type="l",col="red",xlab="t",main=as.expression(bquote(kappa[t]^(3))),lwd=1.8,ylim
=c(-0.01,0.008),ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_1992$years,PLAT_F_1992$kt[2,],type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex =
1.2)
#Gamma:
plot(PLAT_F$cohort,PLAT_F$gc,type="l",col="red",xlab="t-x",main=as.expression(bquote(gamma[t-
x])),lwd=1.8,ylab="",cex.axis=1.5,cex.lab=1.5,cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_1992$cohort,PLAT_F_1992$gc,type="l",col="blue",lwd=1.8)
legend("bottomleft",bg="white",c("1982-2014","1992-2014"),y.intersp=1.5,ncol=1,lty=c(1,1),col=c("red","blue"),cex =
1.2)
#ROBUSTNOST PROJEKCIJ:
set.seed(NULL)
nsim<-500
#Poisson Lee-Carterjev model:
h<-45
PLC_F_1992_sim<-simulate(PLC_F_1992,nsim = nsim,h=h)
mxt_PLC_F_1992 <- PLC_F_1992$Dxt/PLC_F_1992$Ext
qxt_PLC_F_1992<-1-exp(-mxt_PLC_F_1992)
qxt_PLC_F_1992_sim<-1-exp(-PLC_F_1992_sim$rates)
#CBD-model:
h<-45
CBD_F_1992_sim<-simulate(CBD_F_1992,nsim = nsim,h=h)
mxt_CBD_F_1992 <- CBD_F_1992$Dxt/CBD_F_1992$Ext
qxt_CBD_F_1992<-1-exp(-mxt_CBD_F_1992)
#Renshaw-Habermanov model:
h<-90
RH_F_1992_sim<-simulate(RH_F_1992,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
mxt_RH_F_1992 <- RH_F_1992$Dxt / RH_F_1992$Ext
qxt_RH_F_1992<- 1-exp(-mxt_RH_F_1992)
qxt_RH_F_1992_sim<-1-exp(-RH_F_1992_sim$rates)
#APC-model:
h<-90
APC_F_1992_sim<-simulate(APC_F_1992,nsim = nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
mxt_APC_F_1992 <- APC_F_1992$Dxt / APC_F_1992$Ext
qxt_APC_F_1992<- 1-exp(-mxt_APC_F_1992)
qxt_APC_F_1992_sim<-1-exp(-APC_F_1992_sim$rates)
#M7-model:
h<-90
M7_F_1992_sim<-simulate(M7_F_1992,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
mxt_M7_F_1992 <-M7_F_1992$Dxt / M7_F_1992$Ext
qxt_M7_F_1992<-1-exp(-mxt_M7_F_1992)
#Platov model:
h<-90

```

```

PLAT_F_1992_sim<-simulate(PLAT_F_1992,nsim = nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
mxt_PLAT_F_1992 <- PLAT_F_1992$Dxt/PLAT_F_1992$Ext
qxt_PLAT_F_1992<- 1-exp(-mxt_PLAT_F_1992)
qxt_PLAT_F_1992_sim<-1-exp(-PLAT_F_1992_sim$rates)
#Grafčni prikaz projekcij:
probs = c(2.5, 10, 25, 50, 75, 90, 97.5)
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 0.6, -2, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#PLC:
#starost 65 (1982-2014)
plot(PLC_F$years, qxt_PLC_F["65", ], xlim = c(1982, 2064), ylim = c(0.001, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log = "y",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5, main =
"PLC")
fan(t(qxt_PLC_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(PLC_F_1992$years, mxt_PLC_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLC_F_1992_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#CBD:
#starost 65 (1982-2014)
plot(CBD_F$years, qxt_CBD_F["65", ], xlim = c(1982, 2064), ylim = c(0.001, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log = "y",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5, main =
"CBD")
fan(t(CBD_F_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(CBD_F_1992$years, mxt_CBD_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(CBD_F_1992_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#RH:
#starost 65 (1982-2014)
plot(RH_F$years, qxt_RH_F["65", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00003, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log = "y",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5, main =
"RH")
fan(t(qxt_RH_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(RH_F_1992$years, mxt_RH_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_RH_F_1992_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#APC:
#starost 65 (1982-2014)
plot(APC_F$years, qxt_APC_F["65", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.00008, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t) (log-skala)"))), pch = 20, log = "y",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5, main =
"APC")
fan(t(qxt_APC_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(APC_F_1992$years, mxt_APC_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_APC_F_1992_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#M7:
#starost 65 (1982-2014)

```

```

plot(M7_F$years, qxt_M7_F["65", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.0005, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)")))), pch = 20, log = "y", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, main =
"M7")
fan(t(M7_F_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")), ln
= NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(M7_F_1992$years, mxt_M7_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(M7_F_1992_sim$rates["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#PLAT:
#starost 65 (1982-2014)
plot(PLAT_F$years, qxt_PLAT_F["65", ], xlim = c(1982, 2014+h), ylim = c(0.0003, 0.02), xlab = "t", ylab =
as.expression(bquote(paste(q[x], "(t (log-skala)")))), pch = 20, log = "y", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5, main =
"PLAT")
fan(t(qxt_PLAT_F_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("red", "white")),
ln = NULL)
#starost 65 (1992-2014)
points(PLAT_F_1992$years, mxt_PLAT_F_1992["65", ], pch = 20)
fan(t(qxt_PLAT_F_1992_sim["65", , ]), start = 2015, probs = probs, n.fan = 4, fan.col = colorRampPalette(c("blue",
"white")), ln = NULL)
#NEGOTOVOST OCENJENIH PARAMETROV (na primeru Poisson Lee-Carterjevega modela):
nBoot<-100
PLC_F_boot <- bootstrap(PLC_F, nBoot = nBoot, type = "semiparametric")
plot(PLC_F_boot, nCol=3, parametricbx=FALSE)
#Vpliv negotovosti ocenjenih parametrov na projekcije stopenj umrljivosti:
h<-50
nsim<-500
PLC_F_sim_pu<-simulate(PLC_F_boot, h=h)
PLC_F_for<-forecast(PLC_F, h=h)
PLC_F_sim<-simulate(PLC_F, nsim=nsim, h=h)
mxt_F <- PLC_F$Dxt/PLC_F$Ext
PLC_F_mxt_Hat<- fitted(PLC_F, type = "rates")
PLC_F_mxt_Central <- PLC_F_for $rates
#95% Prediction intervals without parameter uncertainty:
PLC_F_mxt_Pred2.5 <- apply(PLC_F_sim$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
PLC_F_mxt_Pred97.5 <- apply(PLC_F_sim$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
#95% intervals with parameter uncertainty (in sample, and predictions)
PLC_F_mxt_HatPU2.5 <- apply(PLC_F_sim_pu$fitted, c(1, 2), quantile, probs=0.025)
PLC_F_mxt_HatPU97.5 <- apply(PLC_F_sim_pu$fitted, c(1, 2), quantile, probs=0.975)
PLC_F_mxt_PredPU2.5 <- apply(PLC_F_sim_pu$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
PLC_F_mxt_PredPU97.5 <- apply(PLC_F_sim_pu$rates, c(1, 2), quantile, probs=0.975)
#Izris grafa:
mar.default <- c(5, 4, 4, 2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(0, 1, 0, -1))
layout(matrix(c(1:1), 1, 1, byrow=TRUE))
x <- c("45", "65", "85")
matplot(PLC_F$years, t(mxt_F[x, ]), xlim=range(PLC_F$years, PLC_F_for$years), ylim=range(PLC_F_mxt_HatPU97.5[x,
], PLC_F_mxt_PredPU2.5[x, ], mxt_F[x, ]), type = "p", xlab = "x", ylab=as.expression(bquote(paste(m[x], "(log-
skala)"))), log = "y", pch = 20, col = "black", lwd=1.8, cex.lab=1.5, cex.axis=1.5)
matlines(PLC_F$years, t(PLC_F_mxt_Hat[x, ]), lty = 1, col = "black", lwd=1.8)
matlines(PLC_F$years, t(PLC_F_mxt_HatPU2.5[x, ]), lty = 5, col = "red", lwd=1.8)
matlines(PLC_F$years, t(PLC_F_mxt_HatPU97.5[x, ]), lty = 5, col = "red", lwd=1.8)
matlines(PLC_F_for$years, t(PLC_F_mxt_Central[x, ]), lty = 1, col = "black", lwd=1.8)
matlines(PLC_F_sim$years, t(PLC_F_mxt_Pred2.5[x, ]), lty = 5, col = "black", lwd=1.8)
matlines(PLC_F_sim$years, t(PLC_F_mxt_Pred97.5[x, ]), lty = 5, col = "black", lwd=1.8)
matlines(PLC_F_sim_pu$years, t(PLC_F_mxt_PredPU2.5[x, ]), lty = 5, col = "red", lwd=1.8)

```

```

matlines(PLC_F_sim_pu$years, t(PLC_F_mxt_PredPU97.5[x, ]), lty = 5, col = "red", lwd=1.8)
text(1986, PLC_F_mxt_HatPU2.5[x, "2007"], labels = c("x=45", "x=65", "x=85"), cex=1.2)
#POVRATNI TEST ZMANJŠEVANJA NAPOVEDNEGA OBDOBJA:
year_curr=2014
year_max=2002
year_min=1982
ages=c(0:100)
mx_F <-dx_F_opt1/Ex_F
qx_F<-1-exp(-mx_F)
h<-15
nsim<-500
#Poisson Lee-Carterjev model:
mx_PLC_F_fit<- fitted(PLC_F, type = "rates")
qx_PLC_F_fit<-1-exp(-mx_PLC_F_fit)
PLC_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(PLC_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-0:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))) {
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  PLC_F_backtest <- fit(LC, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit)
  PLC_F_for_backtest<-forecast(PLC_F_backtest,h =h)
  PLC_F_sim_backtest<-simulate(PLC_F_backtest,nsim=nsim,h=h)
  PLC_F_mxt_mean_backtest<- PLC_F_for_backtest$rates
  PLC_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(PLC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
  PLC_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(PLC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
  mx_F_lower<- PLC_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_lower<-1-exp(-mx_F_lower)
  mx_F_upper<- PLC_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_upper<-1-exp(-mx_F_upper)
  mx_F_mean<- PLC_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
  qx_F_mean<-1-exp(-mx_F_mean)
  PLC_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
  PLC_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- qx_F_lower
  PLC_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- qx_F_mean
  PLC_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<- qx_F_upper
}
#CBD-model
qx_CBD_F_fit_CBD<- fitted(CBD_F, type = "rates")
CBD_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(CBD_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-40:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))) {
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  CBD_F_backtest <- fit(CBD, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit)
  CBD_F_for_backtest<-forecast(CBD_F_backtest,h =h)
  CBD_F_sim_backtest<-simulate(CBD_F_backtest,nsim=nsim,h=h)
  CBD_F_mxt_mean_backtest<- CBD_F_for_backtest$rates
  CBD_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(CBD_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)

```

```

CBD_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(CBD_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
CBD_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
CBD_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- CBD_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
CBD_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- CBD_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
CBD_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<-CBD_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]

}

#Renshaw-Habermanov model:
mx_RH_F_fit<- fitted(RH_F, type = "rates")
qx_RH_F_fit<-1-exp(-mx_RH_F_fit)
RH_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(RH_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-0:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))) {
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
  RH_F_backtest <- fit(RH, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit, wxt = wxt)
  RH_F_for_backtest<-forecast(RH_F_backtest,h =h,gc.order=c(1,1,0))
  RH_F_sim_backtest<-simulate(RH_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
  RH_F_mxt_mean_backtest<- RH_F_for_backtest$rates
  RH_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(RH_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
  RH_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(RH_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
  mx_F_lower<- RH_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_lower<-1-exp(-mx_F_lower)
  mx_F_upper<- RH_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_upper<-1-exp(-mx_F_upper)
  mx_F_mean<- RH_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
  qx_F_mean<-1-exp(-mx_F_mean)
  RH_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
  RH_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- qx_F_lower
  RH_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- qx_F_mean
  RH_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<- qx_F_upper
}

#APC-model:
mx_APC_F_fit<- fitted(APC_F, type = "rates")
qx_APC_F_fit<-1-exp(-mx_APC_F_fit)
APC_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(APC_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-0:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))) {
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
  APC_F_backtest <- fit(APC, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit, wxt = wxt)
  APC_F_for_backtest<-forecast(APC_F_backtest,h =h,gc.order=c(1,1,0))
  APC_F_sim_backtest<-simulate(APC_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
  APC_F_mxt_mean_backtest<- APC_F_for_backtest$rates
  APC_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(APC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
  APC_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(APC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)

```

```

mx_F_lower<- APC_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
qx_F_lower<-1-exp(-mx_F_lower)
mx_F_upper<- APC_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]
qx_F_upper<-1-exp(-mx_F_upper)
mx_F_mean<- APC_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
qx_F_mean<-1-exp(-mx_F_mean)
APC_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
APC_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- qx_F_lower
APC_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- qx_F_mean
APC_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<- qx_F_upper
}

#M7-model:
qx_M7_F_fit<- fitted(M7_F, type = "rates")
M7_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(M7_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-40:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))){
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  M7_F_backtest <- fit(M7, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit)
  M7_F_for_backtest<-forecast(M7_F_backtest,h=h,gc.order=c(1,0,0))
  M7_F_sim_backtest<-simulate(M7_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,0,0))
  M7_F_mxt_mean_backtest<- M7_F_for_backtest$rates
  M7_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(M7_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
  M7_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(M7_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
  M7_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
  M7_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- M7_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
  M7_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- M7_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
  M7_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<- M7_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]
}

#Platov model:
mx_PLAT_F_fit<- fitted(PLAT_F, type = "rates")
qx_PLAT_F_fit<-1-exp(-mx_PLAT_F_fit)
PLAT_F_65_backtest<-matrix(0,nrow=year_curr-year_max,ncol=4)
colnames(PLAT_F_65_backtest)=c("end_year","lower95","mean","upper95")
ages.fit<-0:100
for (i in (0:(year_curr-year_max-1))){
  year_end=year_max+i
  years=c(1982:year_end)
  Ex_F_backtest=Ex_F[,1:(year_end-1982+1)]
  dx_F_backtest=dx_F_opt1[,1:(year_end-1982+1)]
  PLAT_F_backtest <- fit(PLAT, Dxt = dx_F_backtest, Ext = Ex_F_backtest, ages = ages, years = years, ages.fit
= ages.fit)
  PLAT_F_for_backtest<-forecast(PLAT_F_backtest,h=h,gc.order=c(1,0,0))
  PLAT_F_sim_backtest<-simulate(PLAT_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,0,0))
  PLAT_F_mxt_mean_backtest<- PLAT_F_for_backtest$rates
  PLAT_F_mxt_Pred2.5_backtest<- apply(PLAT_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
  PLAT_F_mxt_Pred97.5_backtest<- apply(PLAT_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
  mx_F_lower<- PLAT_F_mxt_Pred2.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_lower<-1-exp(-mx_F_lower)
  mx_F_upper<- PLAT_F_mxt_Pred97.5_backtest["65","2014"]
  qx_F_upper<-1-exp(-mx_F_upper)
  mx_F_mean<- PLAT_F_mxt_mean_backtest["65","2014"]
}

```

```

    qx_F_mean<-1-exp(-mx_F_mean)
    PLAT_F_65_backtest[i+1,"end_year"]<-year_end
    PLAT_F_65_backtest[i+1,"lower95"]<- qx_F_lower
    PLAT_F_65_backtest[i+1,"mean"]<- qx_F_mean
    PLAT_F_65_backtest[i+1,"upper95"]<- qx_F_upper
  }
#Grafični prikaz rezultatov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 0.6, -2, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#Poisson Lee-Carterjev model:
plot(PLC_F_65_backtest[, "end_year"], PLC_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.0053, 0.0092), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab="t", ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="PLC", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(PLC_F_65_backtest[, "end_year"], PLC_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(PLC_F_65_backtest[, "end_year"], PLC_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#CBD-model:
plot(CBD_F_65_backtest[, "end_year"], CBD_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.0063, 0.0113), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab="t", ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="CBD", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(CBD_F_65_backtest[, "end_year"], CBD_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(CBD_F_65_backtest[, "end_year"], CBD_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#Renshaw-Habermanov model:
plot(RH_F_65_backtest[, "end_year"], RH_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.0025, 0.0091), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab="t", ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="RH", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(RH_F_65_backtest[, "end_year"], RH_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(RH_F_65_backtest[, "end_year"], RH_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#APC-model:
plot(APC_F_65_backtest[, "end_year"], APC_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.0064, 0.0102), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab = "t", ylab = as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="APC", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(APC_F_65_backtest[, "end_year"], APC_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(APC_F_65_backtest[, "end_year"], APC_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#M7-model:
plot(M7_F_65_backtest[, "end_year"], M7_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.0065, 0.015), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab = "t", ylab = as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="M7", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(M7_F_65_backtest[, "end_year"], M7_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(M7_F_65_backtest[, "end_year"], M7_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#Platov model:
plot(PLAT_F_65_backtest[, "end_year"], PLAT_F_65_backtest[, "mean"], type="l", ylim=c(0.006, 0.011), col="black", lwd=1.8, lty=2, xlim=c(year_max, year_curr), xlab = "t", ylab = as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))), main="PLAT", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5, cex.main=1.5)
lines(PLAT_F_65_backtest[, "end_year"], PLAT_F_65_backtest[, "lower95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
lines(PLAT_F_65_backtest[, "end_year"], PLAT_F_65_backtest[, "upper95"], type="l", col="red", lwd=1.8)
points(2014, qx_F[66,33], pch=8, col="black")
#POVRATNI TEST RAZŠIRJENEGA NAPOVEDNEGA OBDOBJA:
ages=c(0:100)
years=c(1982:2002)
mx_F <- dx_F_opt1/Ex_F

```

```

qx_F<-1-exp(-mx_F)
colnames(qx_F)=c(1982:2014)
h<-12
nsim<-500
#Poisson Lee-Carterjev model:
ages.fit<-0:100
PLC_F_backtest <- fit(LC, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
PLC_F_for_backtest<-forecast(PLC_F_backtest,h=h)
PLC_F_sim_backtest<-simulate(PLC_F_backtest,nsim=nsim,h=h)
mx_PLC_F_mean_backtest<- PLC_F_for_backtest$rates
mx_PLC_F_Pred2.5_backtest<- apply(PLC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
mx_PLC_F_Pred97.5_backtest<- apply(PLC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
qx_PLC_F_lower_backtest <-1-exp(-mx_PLC_F_Pred2.5_backtest)
qx_PLC_F_upper_backtest <-1-exp(-mx_PLC_F_Pred97.5_backtest)
qx_PLC_F_mean_backtest <-1-exp(-mx_PLC_F_mean_backtest)
#CBD-model
ages.fit<-40:100
CBD_F_backtest <- fit(CBD, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
CBD_F_for_backtest<-forecast(CBD_F_backtest,h=h)
CBD_F_sim_backtest<-simulate(CBD_F_backtest,nsim=nsim,h=h)
qx_CBD_F_mean_backtest <- CBD_F_for_backtest$rates
qx_CBD_F_lower_backtest<- apply(CBD_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
qx_CBD_F_upper_backtest<- apply(CBD_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
#Renshaw-Habermanov model:
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
RH_F_backtest <- fit(LC, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit, wxt
= wxt)
RH_F_for_backtest<-forecast(RH_F_backtest,h=h,gc.order=c(1,1,0))
RH_F_sim_backtest<-simulate(RH_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
mx_RH_F_mean_backtest<- RH_F_for_backtest$rates
mx_RH_F_Pred2.5_backtest<- apply(RH_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
mx_RH_F_Pred97.5_backtest<- apply(RH_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
qx_RH_F_lower_backtest <-1-exp(-mx_RH_F_Pred2.5_backtest)
qx_RH_F_upper_backtest <-1-exp(-mx_RH_F_Pred97.5_backtest)
qx_RH_F_mean_backtest <-1-exp(-mx_RH_F_mean_backtest)
#APC-model:
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
APC_F_backtest <- fit(LC, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit,
wxt = wxt)
APC_F_for_backtest<-forecast(APC_F_backtest,h=h,gc.order=c(1,1,0))
APC_F_sim_backtest<-simulate(APC_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
mx_APC_F_mean_backtest<- APC_F_for_backtest$rates
mx_APC_F_Pred2.5_backtest<- apply(APC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
mx_APC_F_Pred97.5_backtest<- apply(APC_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
qx_APC_F_lower_backtest <-1-exp(-mx_APC_F_Pred2.5_backtest)
qx_APC_F_upper_backtest <-1-exp(-mx_APC_F_Pred97.5_backtest)
qx_APC_F_mean_backtest <-1-exp(-mx_APC_F_mean_backtest)
#M7-model:
ages.fit<-40:100
M7_F_backtest <- fit(M7, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
M7_F_for_backtest<-forecast(M7_F_backtest,h=h,gc.order=c(1,0,0))
M7_F_sim_backtest<-simulate(M7_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,0,0))
qx_M7_F_mean_backtest <- M7_F_for_backtest$rates
qx_M7_F_lower_backtest<- apply(M7_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)

```

```

qx_M7_F_upper_backtest<- apply(M7_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
#Platov model:
ages.fit<-0:100
PLAT_F_backtest <- fit(PLAT, Dxt = dx_F_opt1[,1:21], Ext = Ex_F[,1:21], ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit)
PLAT_F_for_backtest<-forecast(PLAT_F_backtest,h =h,gc.order=c(1,0,0))
PLAT_F_sim_backtest<-simulate(PLAT_F_backtest,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1,1,0))
mx_PLAT_F_mean_backtest<- PLAT_F_for_backtest$rates
mx_PLAT_F_Pred2.5_backtest<- apply(PLAT_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.025)
mx_PLAT_F_Pred97.5_backtest<- apply(PLAT_F_sim_backtest$rates, c(1, 2), quantile, probs = 0.975)
qx_PLAT_F_lower_backtest <-1-exp(-mx_PLAT_F_Pred2.5_backtest)
qx_PLAT_F_upper_backtest <-1-exp(-mx_PLAT_F_Pred97.5_backtest)
qx_PLAT_F_mean_backtest <-1-exp(-mx_PLAT_F_mean_backtest)
#Grafični prikaz rezultatov:
mar.default <- c(5,4,4,2) + 0.1
par(mar = mar.default + c(-1, 0.6, -2, -1))
layout(matrix(c(1:6),3, 2, byrow=TRUE))
#Poisson Lee-Carterjev model:
plot(c(2003:2014),qx_PLC_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0054,0.0102),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="t"
,ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="PLC",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_PLC_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_PLC_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#CBD-model:
plot(c(2003:2014),qx_CBD_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0055,0.012),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="t",
ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="CBD",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_CBD_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_CBD_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#Renshaw-Habermanov model:
plot(c(2003:2014),qx_RH_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0054,0.0102),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="t",
ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="RH",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_RH_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_RH_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#APC-model:
plot(c(2003:2014),qx_APC_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0054,0.0102),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="t"
,ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="APC",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_APC_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_APC_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#M7-model:
plot(c(2003:2014),qx_M7_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0055,0.015),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="t",y
lab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="M7",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_M7_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_M7_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#Platov model:
plot(c(2003:2014),qx_PLAT_F_mean_backtest["65",],type="l",ylim=c(0.0065,0.0115),col="black",lwd=1.8,lty=2,xlab="
t",ylab=as.expression(bquote(paste(q[x], "(t)"))),main="PLAT",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,cex.main=1.5)
lines(c(2003:2014),qx_PLAT_F_lower_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
lines(c(2003:2014), qx_PLAT_F_upper_backtest["65",],type="l",col="red",lwd=1.8)
points(c(2003:2014),qx_F[66,22:33],pch=8,col="black")
#IZRAČUN BEL0 in SCR0long:
#Netvegana obrestna mera:
r= read.table("RFR.txt",header=TRUE,sep="t", quote = "\"",dec = ",",row.names=1)

```

```

r<-cbind.data.frame(r,matrix(0,nrow=nrow(r),ncol=3))
colnames(r)<-c("spot","forward","disc_t0","disc_t1")
for (a in (1:nrow(r))){
  if(a==1){
    r[a,"forward"]<- r[a,"spot"]
    r[a,"disc_t1"]<-1
  }
  else{
    r[a,"forward"]<-(((1+r[a,"spot"])^a)/ ((1+r[a-1,"spot"])^(a-1)))-1
    r[a,"disc_t1"]<- r[a-1,"disc_t1"]/(1+ r[a,"forward"])
  }
  r[a,"disc_t0"]<-1/((1+r[a,"spot"])^a)
}

```

#Nediskontirani denarni tokovi:

#Podatki o testnem portfelju:

```

A<-2400          #letna renta
E<-30            #letni obratovalni stroški
infl<-0.01       #letna stopnja inflacije
x<-65            #starost v času t=0
npol<-1000       #število polic
omega<-130

```

#Izračun nediskontiranih denarnih tokov:

```

CF<-matrix(0,nrow= omega+1,ncol=1)
colnames(CF)<-c("cf")
for (i in (1:(omega+1))){
  CF[i,"cf"]<- (A+E*((1+infl)^i))
}

```

#Stohastični modeli umrljivosti:

#Funkcija za izračun BEL0 za eno simulacijo:

```

BEL0_STOCH<-function(npol,x,omega,CF,r,qxt,shock){
  BEL<-0
  kpx<-npol
  for (j in (1:h)){
    if (x+j-1>omega){
      cf<-0
    }
    else{
      kqx<-qxt[x+j,j]
      kpx<-kpx*(1-kqx*(1+shock))
      cf<- kpx*CF[j,"cf"]*r[j,"disc_t0"]
    }
    BEL<-BEL+ cf
  }
  return(BEL)
}

```

#Funkcija za izračun BEL1 za eno simulacijo:

```

BEL1_STOCH<-function(npol,x,omega,CF,r,qxt,kpx){
  BEL<-0
  kpx<-npol*kpx
  for (j in (2:h)){
    if (x+j-1>omega){
      cf<-0
    }
    else{
      kqx<-qxt[x+j,j-1]
      kpx<-kpx*(1-kqx)
    }
  }
}

```

```

        cf<- kpx*CF[j,"cf"]*r[j,"disc_t1"]
        BEL<-BEL+ cf
    }
    return(BEL)
}

#Poisson Lee-Cartter model:
set.seed(NULL)
nsim<-500
h<-130
omega<-130

#Izračun BEL0-deterministični pristop:
PLC_F_for<-forecast(PLC_F,nsim = nsim,h=h)
qx_PLC_F_for<- 1-exp(-PLC_F_for$rate)
PLC_F_for_DG<- DG(qx_PLC_F_for,omega,60,85)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_for_DG,0)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_for_DG,-0.2)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_for_DG,-0.2)- BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_for_DG,0)

#Izračun BEL0- stohastični pristop:
nsim<-500
PLC_F_sim<-simulate(PLC_F,nsim = nsim,h=h)
BEL0_PLC_F<-matrix(numeric(0),nrow=1,ncol= nsim)
rownames(BEL0_PLC_F)=c("BEL0")
for (k in (1:nsim)){
    qx_PLC_F_sim<- 1-exp(-PLC_F_sim$rate[,k])
    PLC_F_sim_DG<- DG(qx_PLC_F_sim,omega,60,85)
    BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_sim_DG,0)
    BEL0_PLC_F[1,k]<-BEL0
}

#Grafčni prikaz porazdelitve BEL0:
BEL0_PLC_F<-as.vector(BEL0_PLC_F)
hist(BEL0_PLC_F,breaks=40,col="grey",main="PLC",xlab=as.expression(bquote(BEL[0])),ylab="verjetnost",freq=FAL
SE,cex.main=1.5,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
curve(dnorm(x, mean=mean(BEL0_PLC_F), sd=sd(BEL0_PLC_F)), add=TRUE, col="red", lwd=2)

#Analiza BEL0:
mean(BEL0_PLC_F)
sd(BEL0_PLC_F)/ mean(BEL0_PLC_F)*100
BEL0_PLC_F<-sort(BEL0_PLC_F)
BEL0_PLC_F [ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(BEL0_PLC_F)))] # VaR_99,5%

#Izračun SCR:
nsim<-100
nsim1<-nsim
ages.fit<-0:100
Ex_2015=read.table("Ex_2015.txt",header=TRUE,sep="\t",quote="",dec=",",row.names=1)
PLC_F_sim<-simulate(PLC_F,nsim = nsim,h=h)
PLC_F_result<-matrix(0,nrow=nsim*nsim,ncol=5)
colnames(PLC_F_result)=c("sim0","sim1","BEL0","CF1","BEL1")
for (k in (1:nsim)){
    qx_PLC_F_sim<- 1-exp(-PLC_F_sim$rate[,k])
    PLC_F_sim_DG<- DG(qx_PLC_F_sim,omega,60,85)
    BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_sim_DG,0)
    PLC_F_mx_1<-PLC_F_sim$rate[,1,k]
    PLC_F_dx_1<- PLC_F_mx_1*Ex_2015[, "F"]
    PLC_F_dx_1<-cbind.data.frame(dx_F, PLC_F_dx_1)
    colnames(PLC_F_dx_1)<-c(1982:2015)
    PLC_F_Ex_1<-cbind.data.frame(Ex_F,Ex_2015[, "F"])
    colnames(PLC_F_Ex_1)<-c(1982:2015)
}

```

```

years=c(1982:2015)
PLC_F_1 <- fit(LC, Dxt = PLC_F_dx_1, Ext = PLC_F_Ex_1, ages = ages, years = years, ages.fit = ages.fit)
PLC_F_sim_1<-simulate(PLC_F_1,nsim = nsim,h=h)
for (a in (1:nsim1)){
  PLC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim0"]<-k
  PLC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim1"]<-a
  PLC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL0"]<-BEL0
  pxt <-1-PLC_F_sim_DG[x+1,1]
  PLC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"CF1"]<- -pxt *CF[1,"cf"]
  PLC_F_sim_DG_1<- DG(tt(PLC_F_sim_1$rate[,a]),130,60,85)
  BEL1<-BEL1_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLC_F_sim_DG_1, pxt)
  PLC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL1"]<-BEL1
}
}
SCR_PLC_F_stoch<-(PLC_F_result["BEL1"]-npol*PLC_F_result["CF1"])*r[1,"disc_t0"]-PLC_F_result["BEL0"]
SCR_PLC_F_stoch<-sort(SCR_PLC_F_stoch)
SCR_PLC_F_stoch[ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(SCR_PLC_F_stoch)))] #VaR_99,5%
#Renshaw-Habermanov model:
#Izračun BEL0-deterministični pristop:
RH_F_for<-forecast(RH_F,nsim = nsim,h=h)
qx_RH_F_for<- 1-exp(-RH_F_for$rates)
RH_F_for_DG<- DG(qx_RH_F_for,omega,60,85)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_for_DG,0)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_for_DG,-0.2)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_for_DG,-0.2)- BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_for_DG,0)
#Izračun BEL0- stohastični pristop:
nsim<-500
RH_F_sim<-simulate(RH_F,nsim=nsim,h=h,gc.order=c(1, 1, 0))
BEL0_RH_F<-matrix(numeric(0),nrow=1,ncol= nsim)
rownames(BEL0_RH_F)=c("BEL0")
for (k in (1:nsim)){
  qx_RH_F_sim<- 1-exp(-RH_F_sim$rate[,k])
  RH_F_sim_DG<- DG(qx_RH_F_sim,omega,60,85)
  BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_sim_DG,0)
  BEL0_RH_F[1,k]<-BEL0
}
#Grafični prikaz porazdelitve BEL0:
BEL0_RH_F<-as.vector(BEL0_RH_F)
hist(BEL0_RH_F,breaks=40,col="grey",main="RH",xlab=as.expression(bquote(BEL[0])),ylab="verjetnost",freq=FALS
E,cex.main=1.5,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
curve(dnorm(x, mean=mean(BEL0_RH_F), sd=sd(BEL0_RH_F)), add=TRUE, col="red", lwd=2)
#Analiza BEL0:
mean(BEL0_RH_F)
sd(BEL0_RH_F)/ mean(BEL0_RH_F)*100
BEL0_RH_F<-sort(BEL0_RH_F)
BEL0_RH_F [ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(BEL0_RH_F)))] # VaR_99,5%
#Izračun SCR-stohastični pristop:
nsim<-100
nsim1<-nsim
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
Ex_2015=read.table("Ex_2015.txt",header=TRUE,sep="\t",quote="",dec=",",row.names=1)
RH_F_sim<-simulate(RH_F,nsim = nsim,h=h,gc.order=c(1, 1, 0))
RH_F_result<-matrix(0,nrow=nsim*nsim,ncol=5)
colnames(RH_F_result)=c("sim0","sim1","BEL0","CF1","BEL1")
for (k in (1:nsim)){

```

```

qx_RH_F_sim<- 1-exp(-RH_F_sim$rate[,k])
RH_F_sim_DG<- DG(qx_RH_F_sim,omega,60,85)
BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_sim_DG,0)
RH_F_mx_1<-RH_F_sim$rate[,1,k]
RH_F_dx_1<- RH_F_mx_1*Ex_2015[, "F"]
RH_F_dx_1<-cbind.data.frame(dx_F, RH_F_dx_1)
colnames(RH_F_dx_1)<-c(1982:2015)
RH_F_Ex_1<-cbind.data.frame(Ex_F,Ex_2015[, "F"])
colnames(RH_F_Ex_1)<-c(1982:2015)
years=c(1982:2015)
RH_F_1 <- fit(RH, Dxt = RH_F_dx_1, Ext = RH_F_Ex_1, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit,wxt=wxt)
RH_F_sim_1<-simulate(RH_F_1,nsim = nsim, h=h,gc.order=c(1, 1, 0))
for (a in (1:nsim1)){
  RH_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim0"]<-k
  RH_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim1"]<-a
  RH_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL0"]<-BEL0
  pxt <-1-RH_F_sim_DG[x+1,1]
  RH_F_result[(k-1)*nsim1+a,"CF1"]<- -pxt *CF[1,"cf"]
  RH_F_sim_DG_1<- DG(t(t(RH_F_sim_1$rate[,a])),130,60,85)
  BEL1<-BEL1_STOCH(npol,x,omega,CF,r,RH_F_sim_DG_1, pxt)
  RH_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL1"]<-BEL1
}
}
SCR_RH_F_stoch<-(RH_F_result["BEL1"]-npol*RH_F_result["CF1"])*r[1,"disc_t0"]-RH_F_result["BEL0"]
SCR_RH_F_stoch<-sort(SCR_RH_F_stoch)
SCR_RH_F_stoch[ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(SCR_RH_F_stoch)))] #VaR_99,5%
#APC-model
#Izračun BEL0-deterministični pristop:
#Ženske:
APC_F_for<-forecast(APC_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
qx_APC_F_for<- 1-exp(-APC_F_for$rates)
APC_F_for_DG<- DG(qx_APC_F_for,omega,60,85)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_for_DG,0)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_for_DG,-0.2)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_for_DG,-0.2)- BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_for_DG,0)
#Moški:
APC_M_for<-forecast(APC_M,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
qx_APC_M_for<- 1-exp(-APC_M_for$rates)
APC_M_for_DG<- DG(qx_APC_M_for,omega,60,85)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_M_for_DG,0)
#Izračun BEL0- stohastični pristop:
APC_F_sim<-simulate(APC_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 1, 0))
BEL0_APC_F<-matrix(numeric(0),nrow=1,ncol= nsim)
rownames(BEL0_APC_F)=c("BEL0")
for (k in (1:nsim)){
  qx_APC_F_sim<- 1-exp(-APC_F_sim$rate[,k])
  APC_F_sim_DG<- DG(qx_APC_F_sim,omega,60,85)
  BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_sim_DG,0)
  BEL0_APC_F[1,k]<-BEL0
}
#Grafični prikaz porazdelitve BEL0:
BEL0_APC_F<-as.vector(BEL0_APC_F)
hist(BEL0_APC_F,breaks=40,col="grey",main="APC",xlab=as.expression(bquote(BEL[0])),ylab="verjetnost",freq=FALSE,
LSE,cex.main=1.5,cex.lab=1.5,cex.axis=1.5)
curve(dnorm(x, mean=mean(BEL0_APC_F), sd=sd(BEL0_APC_F)), add=TRUE, col="red", lwd=2)

```

#Analiza BEL0:

```
mean(BEL0_APC_F)
sd(BEL0_APC_F)/mean(BEL0_APC_F)*100
BEL0_APC_F<-sort(BEL0_APC_F)
BEL0_APC_F [ ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(BEL0_APC_F)))] # VaR_99,5%
```

#Izračun SCR-stohastični pristop:

```
nsim<-100
nsim1<-nsim
ages.fit<-0:100
wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
Ex_2015=read.table("Ex_2015.txt",header=TRUE,sep="t",quote="",dec=".",row.names=1)
APC_F_sim<-simulate(APC_F,nsim = nsim,h=h,gc.order=c(1, 1, 0))
APC_F_result<-matrix(0,nrow=nsim*nsim,ncol=5)
colnames(APC_F_result)=c("sim0","sim1","BEL0","CF1","BEL1")
for (k in (1:nsim)){
  qx_APC_F_sim<- 1-exp(-APC_F_sim$rate[,k])
  APC_F_sim_DG<- DG(qx_APC_F_sim,omega,60,85)
  BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_sim_DG,0)
  APC_F_mx_1<-APC_F_sim$rate[,1,k]
  APC_F_dx_1<- APC_F_mx_1*Ex_2015[, "F"]
  APC_F_dx_1<-cbind.data.frame(dx_F, APC_F_dx_1)
  colnames(APC_F_dx_1)<-c(1982:2015)
  APC_F_Ex_1<-cbind.data.frame(Ex_F,Ex_2015[, "F"])
  colnames(APC_F_Ex_1)<-c(1982:2015)
  years=c(1982:2015)
  APC_F_1 <- fit(APC, Dxt = APC_F_dx_1, Ext = APC_F_Ex_1, ages = ages, years = years, ages.fit =
ages.fit,wxt=wxt)
  APC_F_sim_1<-simulate(APC_F_1,nsim = nsim, h=h,gc.order=c(1, 1, 0))
  for (a in (1:nsim1)){
    APC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim0"]<-k
    APC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim1"]<-a
    APC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL0"]<-BEL0
    pxt <-1-APC_F_sim_DG[x+1,1]
    APC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"CF1"]<- -pxt *CF[1,"cf"]
    APC_F_sim_DG_1<- DG(t(t(APC_F_sim_1$rate[,a])),130,60,85)
    BEL1<-BEL1_STOCH(npol,x,omega,CF,r,APC_F_sim_DG_1, pxt)
    APC_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL1"]<-BEL1
  }
}
```

```
SCR_APC_F_stoch<-(APC_F_result["BEL1"]-npol*APC_F_result[, "CF1"])*r[1,"disc_t0"]-APC_F_result["BEL0"]
```

```
SCR_APC_F_stoch<-sort(SCR_APC_F_stoch)
```

```
SCR_APC_F_stoch[ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(SCR_APC_F_stoch)))] #VaR_99,5%
```

#Platov model**#Izračun BEL0-deterministični pristop:**

```
PLAT_F_for<-forecast(PLAT_F,nsim = nsim,h=h)
qx_PLAT_F_for<- 1-exp(-PLAT_F_for$rates)
PLAT_F_for_DG<- DG(qx_PLAT_F_for,omega,60,85)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_for_DG,0)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_for_DG,-0.2)
BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_for_DG,-0.2)- BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_for_DG,0)
```

#Izračun BEL0- stohastični pristop:

```
PLAT_F_sim<-simulate(PLAT_F,nsim = nsim,h=h, gc.order= c(1, 0, 0))
BEL0_PLAT_F<-matrix(numeric(0),nrow=1,ncol= nsim)
rownames(BEL0_PLAT_F)=c("BEL0")
for (k in (1:nsim)){
  qx_PLAT_F_sim<- 1-exp(-PLAT_F_sim$rate[,k])
```

```

    PLAT_F_sim_DG<- DG(qx_PLAT_F_sim,omega,60,85)
    BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_sim_DG,0)
    BEL0_PLAT_F[1,k]<-BEL0
  }
#Grafični prikaz porazdelitve BEL0:
  BEL0_PLAT_F<-as.vector(BEL0_PLAT_F)
  hist(BEL0_PLAT_F,breaks=40,col="grey",main="PLAT",xlab=as.expression(bquote(BEL[0])),ylab="verjetnost",freq=F
  ALSE,cex.main=1.5,cex.lab=1.2,cex.axis=1.2)
  curve(dnorm(x, mean=mean(BEL0_PLAT_F), sd=sd(BEL0_PLAT_F)), add=TRUE, col="red", lwd=2)
#Analiza BEL0:
  mean(BEL0_PLAT_F)
  sd(BEL0_PLAT_F)/mean(BEL0_PLAT_F)*100
  BEL0_PLAT_F<-sort(BEL0_PLAT_F)
  BEL0_PLAT_F [ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(BEL0_PLAT_F)))] # VaR_99,5%
#Izračun SCR-stohastični pristop:
  nsim<-100
  nsim1<-nsim
  ages.fit<-0:100
  wxt <- genWeightMat(ages = ages.fit, years = years, clip = 0)
  Ex_2015=read.table("Ex_2015.txt",header=TRUE,sep="\t",quote="",dec=",",row.names=1)
  PLAT_F_sim<-simulate(PLAT_F,nsim = nsim,h=h,gc.order=c(1, 0, 0))
  PLAT_F_result<-matrix(0,nrow=nsim*nsim,ncol=5)
  colnames(PLAT_F_result)=c("sim0","sim1","BEL0","CF1","BEL1")
  for (k in (1:nsim)){
    qx_PLAT_F_sim<- 1-exp(-PLAT_F_sim$rate[,k])
    PLAT_F_sim_DG<- DG(qx_PLAT_F_sim,omega,60,85)
    BEL0<-BEL0_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_sim_DG,0)
    PLAT_F_mx_1<-PLAT_F_sim$rate[,1,k]
    PLAT_F_dx_1<- PLAT_F_mx_1*Ex_2015[,"F"]
    PLAT_F_dx_1<-cbind.data.frame(dx_F, PLAT_F_dx_1)
    colnames(PLAT_F_dx_1)<-c(1982:2015)
    PLAT_F_Ex_1<-cbind.data.frame(Ex_F,Ex_2015[,"F"])
    colnames(PLAT_F_Ex_1)<-c(1982:2015)
    years=c(1982:2015)
    PLAT_F_1 <- fit(PLAT, Dxt = PLAT_F_dx_1, Ext = PLAT_F_Ex_1, ages = ages, years = years, ages.fit =
    ages.fit,wxt=wxt)
    PLAT_F_sim_1<-simulate(PLAT_F_1,nsim = nsim, h=h,gc.order=c(1, 0, 0))
    for (a in (1:nsim1)){
      PLAT_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim0"]<-k
      PLAT_F_result[(k-1)*nsim1+a,"sim1"]<-a
      PLAT_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL0"]<-BEL0
      pxt <-1-PLAT_F_sim_DG[x+1,1]
      PLAT_F_result[(k-1)*nsim1+a,"CF1"]<- -pxt *CF[1,"cf"]
      PLAT_F_sim_DG_1<- DG(t(t(PLAT_F_sim_1$rate[,a])),130,60,85)
      BEL1<-BEL1_STOCH(npol,x,omega,CF,r,PLAT_F_sim_DG_1, pxt)
      PLAT_F_result[(k-1)*nsim1+a,"BEL1"]<-BEL1
    }
  }
  SCR_PLAT_F_stoch<-(PLAT_F_result[,"BEL1"]-npol*PLAT_F_result[,"CF1"])*r[1,"disc_t0"]-
  PLAT_F_result[,"BEL0"]
  SCR_PLAT_F_stoch<-sort(SCR_PLAT_F_stoch)
  SCR_PLAT_F_stoch[ceiling(99.5/100*nrow(as.data.frame(SCR_PLAT_F_stoch)))] #VaR_99,5%

```

PRILOGA 12: Seznam uporabljenih kratic

AIC	Akaike informacijski kriterij (angl. <i>Akaike Information Criterion</i>)
BEL	Najboljša ocena obveznosti (angl. <i>Best Estimate of Liabilities</i>)
BIC	Bayesov informacijski kriterij (angl. <i>Bayesian information criterion</i>)
CEIOPS	Odbor evropskih nadzornikov za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. <i>Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors</i>)
EIOPA	Evropski organ za zavarovanja in poklicne pokojnine (angl. <i>European Insurance and Occupational Pensions Authority</i>)
QIS	Kvantitativna študija učinkov (angl. <i>Quantitative Impact Study</i>)
RS	Republika Slovenija
SCR	Zahtevani solventnostni kapital (angl. <i>Solvency Capital Requirement</i>)
SSE	Vsota kvadratov napake (angl. <i>Sum of Squares Error</i>)
SST	Skupna vsota kvadratov (angl. <i>Sum of Squares Total</i>)
SURS	Statistični urad Republike Slovenije
VaR	Tvegana vrednost (angl. <i>Value at Risk</i>)