UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

AKTUARSKA ANALIZA VREDNOSTI RENTNEGA ZAVAROVANJA OB PODMENI SOODVISNOSTI TVEGANJ SMRTNOSTI RENTNIH UPRAVIČENCEV

Ljubljana, september 2010 LEO KNEZ

IZJAVA

Študent Leo Knez izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal v soglasju s svetovalcem doc. dr. Alešom Ahčanom, in da v skladu s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim njegovo objavo na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 22. septembra 2010 Podpis: Leo Knez

KAZALO

KAZALO TABEL

KAZALO SLIK

UVOD

Rentno zavarovanje, vezano na dve življenji, zavarovanci običajno poiščejo sami. Njihov interes je, da se s tovrstno obliko zavarovanja zaščitijo pred življenjsko situacijo preživetja lastnih finančnih virov. Ker zavarovance skrbi, da bi v pozni starosti doživeli izčrpanost privarčevanih denarnih sredstev, so pripravljeni kupiti finančno varnost, zanjo odšteti premijo in presežek tveganja dolgoživosti prenesti na zavarovalnico. Naloga aktuarja je, da v skladu s pravili aktuarske stroke premijo izračuna v višini, ki odraža tveganja, ki jih zavarovalnica prevzema.

Predpostavka medsebojne neodvisnosti preostalih življenjskih dob rentnih upravičencev je pri zavarovanjih, ki so vezana na več kot eno življenje, vseskozi šibek del aktuarskih postopkov premijskih izračunov. Zdi se, da gre razloge za njeno sprejemanje iskati v računski elegantnosti, ki jo omogoča, čeprav je že od vsega začetka empirično sporna. Partnerja sta namreč v svojem življenjskem okolju izpostavljena skupnim dejavnikom tveganja. Parkes, Benjamin in Fitzgerald (1969) so že leta nazaj proučevali t. i. učinek »strtega srca«, ki označuje dogodek, ko smrti prvega partnerja kaj hitro sledi tudi smrt drugega. Ugotovili so, da se je stopnja umrljivosti vdovcev v prvih mesecih po smrti žena povečala za 40 odstotkov. Povečano stopnjo umrljivosti med vdovci je potrdil tudi Ward (1976). Jagger in Sutton (1991) sta izračunala, da se je tveganje smrtnosti vdov v prvih šestih mesecih po smrti partnerja značilno povečalo. Rezultati omenjenih študij dokazujejo, da je *ex-ante* profil smrtnosti posameznika drugačen od njegovega *ex-post* profila, ki sledi dogodku smrti. Preostali življenjski dobi partnerjev sta v takšnih okoliščinah očitno medsebojno odvisni. To ima za posledico določene finančne implikacije, ki se odrazijo v precenjenosti ali podcenjenosti neto premije rentnega zavarovanja, vezanega na več kot eno življenje.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones in Nesbitt (1997) so izdali aktuarski učbenik in na tej ravni prvič eksplicitno predstavili model skupnega eksogenega dejavnika ter model kopule, v okviru katerih sta preostali življenjski dobi dveh posameznikov odvisni slučajni spremenljivki. Aktuarji so se omenjenega področja analize intenzivno lotevali že vrsto let prej. Tako sta Carrière in Chan (1986) preučevala možnost uporabe Fréchetovih mej za vrednotenje življenjske rente hkratnih življenj in rente zadnjega življenja. Frees, Carrière in Valdez (1996) so analizirali portfelj življenjskih rent, vezanih na dve življenji, in ugotovili, da je čas smrti partnerjev tesno povezan. Zgoraj omenjena dela kot osnovni gradnik modeliranja medsebojne povezanosti preostalih življenjskih dob posameznikov uporabijo teorijo kopul, ki jim služi za vzpostavitev dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij preživetja. Frees in Valdez (1998) sta v tej povezavi napisala članek, ki aktuarjem na intuitivno privlačen način približa koncept kopule ter njene prednosti pri merjenju in razumevanju povezanosti med različnimi tveganji. Prav tako velja opozoriti na model Marshalla in Olkina (1988), ki pojasnjuje medsebojno odvisnost preostalih življenjskih dob posameznikov kot posledico učinkov skupnega šoka. Za instrumentalizacijo soodvisnosti se uporablja tudi Markovski verižni model, ki ga je v proučevani smeri prvi predstavil Norberg (1989). Z vidika obravnavanega problema v tem delu pa so posebnega pomena analitični prispevki avtorjev Dhaene, Vanneste in Wolthuis (2000). Ti so analizo merjenja potencialnega vpliva soodvisnosti preostalih življenjskih dob posameznikov na določanje premije osnovali na konceptu parcialnega korelacijskega reda ob privzetih robnih porazdelitvenih funkcijah opredeljenih slučajnih spremenljivk. Njihovo zanimanje je osredotočeno na korelacijo znotraj posameznih elementov množice bivariatno porazdeljenih slučajnih spremenljivk preostale življenjske dobe posameznikov. Pokazali so, da je tako zasnovan analitičen sistem razumevanja soodvisnosti konsistenten in s tem primeren za analizo vrednosti rentnega zavarovanja hkratnih življenj in zadnjega življenja. V tej zvezi so uporabne ugotovitve študije avtorjev Kaas, Dhaene in Gooaverts (2000), ki je pokazala, da lahko konveksne spodnje in zgornje meje multivariatnih porazdelitvenih funkcij vsebujejo relevantne informacije o prisotnih potencialih odvisnih tveganj. S povezavo rezultatov ene in druge študije tako vzpostavimo analitičen okvir, ki nam bo z uporabo Fréchet-Hoeffdingove spodnje in zgornje meje omogočal oceniti potencialno precenjenost oziroma podcenjenost vrednosti enkratne neto premije rentnega zavarovanja ob predpostavljeni neodvisnosti preostalih življenjskih dob posameznikov.

Namen magistrskega dela je ekspozicija in praktična uporaba novodobnih aktuarskih konceptov, ki v svojih izhodiščih opuščajo predpostavko neodvisnosti ter pri tem poskušajo razumeti in izmeriti potencialen vpliv soodvisnosti preostalih življenjskih dob zavarovancev na aktuarske izračune sedanje vrednosti iz dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij. Temeljni hipotezi magistrskega dela, ki ju bomo postavili na preizkušnjo, sta:

H1: Zakonski stan spreminja profil umrljivosti posameznika v smeri PQD soodvisnosti.

H2: Predpostavka medsebojne neodvisnosti preostale življenjske dobe rentnih upravičencev ima za posledico precenjenost ali podcenjenost enkratne neto premije.

V teoretično-analitičnem delu magistrskega dela bodo uporabljene deskriptivna, primerjalna in induktivna metoda. Deskriptivna metoda nam bo služila pri opisovanju korakov izpeljav ter osnovnih značilnosti posameznih formul in modelov. S primerjalno metodo bodo soočene karakteristike različnih modelov odvisnosti in formul vrednotenja, medtem ko bomo z induktivno metodo sklepanja presojali o njihovi praktični uporabnosti z vidika predpostavk, na katerih slonijo. V empiričnem delu bodo uporabljene ustaljene aktuarske in statistične metode. Uporabljena bo modularna informacijska rešitev. Metoda programske rešitve predstavlja logično implementacijo aktuarskih izhodišč, predpostavk in potrjenih hipotez v okviru programske kode, ki bo služila izvedbi izračuna premij v realnem času z zahtevano natančnostjo.

V prvem poglavju magistrskega dela je podana osvetlitev aktuarskih izhodišč, ki bodo uporabljena pri delu in izračunih v nadaljevanju. Ta obsegajo model preživetja, dvorazsežne porazdelitvene funkcije, različne relacije med njimi in matematično formulacijo življenjskih rent, vezanih na dve življenji. V naslednjem poglavju je osvetljena relevantnost odvisnosti tveganj smrtnosti posameznikov z analizo umrljivosti prebivalcev Republike Slovenije v odvisnosti od zakonskega stanu za obdobje od leta 2000 do 2007. V tretjem poglavju so predstavljeni in opredeljeni relevantni modeli odvisnosti, ki jih lahko uporabimo za merjenje učinkov soodvisnosti slučajnih spremenljivk v kontekstu izpostavljenega aktuarskega problema. Opisani so model skupnega šoka, Markovski verižni model za dve življenji in model kopule. Pretežni del pozornosti v poglavju bo namenjen dvorazsežnim kopulam, ki so v aktuarski znanosti v zadnjem desetletju pridobile izjemen pomen. Razloge gre iskati v vse bolj prepletenih in povezanih tveganjih, pri katerih horizontalni prerez večrazsežne porazdelitvene funkcije nima eliptične oblike. V zadnjem delu naloge so povezane vse glavne ugotovitve ter na njihovi podlagi vzpostavljene formule za izračun enkratne neto premije rentnega zavarovanja s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo. Za ta namen je izdelana informacijska rešitev, ki uporabniku preko vnosne maske omogoča priročno računanje s poljubnimi parametri zavarovanja. Proti koncu se pomudimo ob vprašanju aktualnosti in izzivu obravnavanih rentnih zavarovanj za zavarovalnice. Delo se konča s sklepno obravnavo postavljenih hipotez ter z zaključnimi mislimi.

1 AKTUARSKA IZHODIŠČA

Z aktuarskimi modeli opisujemo in ocenjujemo sedanjo vrednost implikacij prihodnjih slučajnih dogodkov iz porazdelitvenih funkcij. Ti dogodki so nam vnaprej neznani – tako po nastanku kot svoji finančni razsežnosti – izplačila na osnovi zavarovalnih pogodb, prejeta plačila premij, razdelitev ustvarjenega rezultata (dobiček/izguba) med zavarovanci ipd. Z aktuarskimi modeli poskušamo opisati prihodnost s porazdelitvenimi funkcijami, ki jih skonstruiramo na podlagi preteklih spoznanj.

Za samo razumevanje koncepta aktuarskega pristopa k analizi je pomembno razlikovanje med determinističnimi in stohastičnimi procesi ter posledično determinističnimi in stohastičnimi modeli. Izraz stohastičnost pomeni, da se v modelu pojavijo slučajne spremenljivke, kar predstavlja nasprotje determinističnim modelom, ki izločajo slučajne vplive in dajejo točno določene rezultate. Stohastični modeli temeljijo na zakonu velikih števil in jih lahko rešujemo analitično in numerično. Pri stohastičnem vrednotenju nas vselej zanima aktuarska sedanja vrednost slučajnih dogodkov. Tako proučujemo in natančno analiziramo učinke sprememb vrednosti vhodnih slučajnih spremenljivk. Možnosti, da se pričakovanja ne uresničijo, pravimo tveganje, ki ga je potrebno ločiti od negotovosti. Vedno, ko govorimo o tveganju, imamo v mislih določeno verjetnostno porazdelitev možnih izidov slučajne spremenljivke, medtem ko v primeru negotovosti verjetnostne porazdelitve ne poznamo. To je tudi ena temeljnih premis v aktuarski analizi vrednosti. Prednosti takšnega modelskega pristopa so predvsem v analizi dolgoročnih procesov v realnem času, analizi učinkov sprememb vrednosti slučajnih spremenljivk pred njihovo uresničitvijo ter predstavitev kompleksnejših procesov z jasnimi in s preglednimi modeli. Če izidi realnosti ne ustrezajo našim ocenam, potem je največkrat potrebna redefinicija predpostavk in ponovna kalibracija modela. S takšnim sistematičnim in doslednim pristopom se matematična orodja v aktuarski znanosti razvijajo in preverjajo že vrsto desetletij.

Poseben pomen za aktuarsko analizo imata identifikacija in jasna opredelitev slučajnih spremenljivk. Čeprav bomo uporabljali izraze, ki namigujejo na to, da z rentnim zavarovanjem zavarujemo življenjski standard rentnih upravičencev pred nepredvidenim odlogom smrti, je vendarle dobro biti s poudarki nekoliko bolj precizen. Smrt je neizogiben, gotov dogodek, saj vsi vemo, da bomo nekoč umrli. Tisto, kar je zavarovalnici neznano, je čas smrti, do katerega mora zagotavljati izplačilo rente. To bo osrednja slučajna spremenljivka naše analize, in sicer preostala življenjska doba oseb določene starosti.

1.1 Model pričakovane življenjske dobe

Model preostale življenjske dobe osebe (Gerber, 1997, str. 15) predstavlja temeljno izhodišče aktuarskega modeliranja preživetja. Ta temelji na predpostavki, da je preostala življenjska doba x let stare osebe zvezna slučajna spremenljivka in nam vnaprej neznana vrednost. Označimo jo s T(x)[1] in definiramo na zveznem intervalu [0, ω] ob pogoju 0 < ω < ∞, pri čemer ω predstavlja največjo doseženo starost. Pri tem x + T(x) predstavlja starost, pri kateri bo ta oseba umrla.

Zvezni slučajni spremenljivki T(x) priredimo kumulativno porazdelitveno funkcijo $G_x(t)$:

$$G_x(t) = \int_0^t g_x(s)ds = P(T(x) \leq t), t \geq 0, \tag{1.1}$$

pri čemer $g_x(s)$ označuje verjetnostno gostoto, medtem ko diferencial funkcije $g_x(s)ds$ označuje verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v starosti med x + s in x + s + ds. Za vsak poljubno izbran t > 0 porazdelitvena funkcija $G_x(t)$ določa verjetnost, da bo oseba umrla v naslednjih t letih. Verjetnost nasprotnega dogodka, tj. da bo oseba preživela naslednjih t let, predstavlja kumulativna porazdelitvena funkcija preživetja $S_x(t)$:

$$S_x(t) = 1 - G_x(t) = P(T(x) > t), t \geq 0, 0 < x < \omega. \tag{1.2}$$

Obe funkciji $G_x(t)$ in $S_x(t)$ predstavljata kumulativni porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke T(x), pri čemer se funkcija preživetja uporablja v aktuarstvu, medtem ko se v teoriji verjetnosti in statistiki praviloma uporablja porazdelitvena funkcija $G_x(t)$.

[1] V nadaljevanju dela jo bomo ponekod, zaradi preglednosti izrazov, označevali s T_x.

V nadaljevanju privzamemo, da je kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke T(x) znana in zvezna z gostoto verjetnosti $g_x(t) = G'_x(t)$. Potemtakem lahko zapišemo:

$$g_x(t)dt = P(t < T(x) < t + dt), \tag{1.3}$$

pri čemer enačba določa verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v infinitezimalnem časovnem intervalu med t in t + dt oziroma v starosti med x + t in x + t + dt let. Z uporabo funkcij $G_x(t)$ in $g_x(t)$ lahko izrazimo poljubne verjetnosti, momente in druge vrednosti, ki nas zanimajo. V aktuarski praksi se je ustalila notacija, ki jo bomo privzeli in uporabljali v nadaljevanju. Tako s ${}_tq_x$ označimo verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v naslednjih t letih, medtem ko s ${}_tp_x$ označimo verjetnost nasprotnega dogodka, tj. da bo oseba stara x let živela vsaj t let. Dobili smo relaciji, ki jih zapišemo z enačbama (1.4) in (1.5):

$${}_tq_x = G_x(t) = P(T(x) \leq t), \tag{1.4}$$

$${}_tp_x = 1 - G_x(t) = S_x(t) = P(T(x) \geq t). \tag{1.5}$$

Pomembni enakosti, ki jih dobimo s pomočjo povezav ${}_tq_x,\ {}_tp_x,\ G_x(t),\ S_x(t)$, sta:

$${}_{s+t}p_x = S_x(s+t) = \left(1 - G_x(t)\right)\frac{1-G_x(s+t)}{1-G_x(t)} = {}_sp_x\ {}_tp_{x+s.} \tag{1.6}$$

$${}_{s|t}q_x = G_x(s+t) - G_x(s) = {}_{s+t}\ q_x - {}_sq_x = {}_sp_x\ {}_tq_{x+s.} \tag{1.7}$$

Enačba (1.6) nam pove, da je verjetnost, da bo x let stara oseba preživela s + t let, enaka zmnožku verjetnosti, da bo x let stara oseba preživela s let, in verjetnosti, da bo opazovana oseba, stara x + s let, preživela nadaljnjih t let. Enačba (1.7) predstavlja verjetnost, da bo oseba starosti x preživela naslednjih s let in umrla v času t, ki sledi.

Za izračun matematičnega upanja slučajne spremenljivke T(x) potrebujemo dvoje: [a] zalogo vrednosti slučajne spremenljivke in [b] porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke. Zalogo vrednosti slučajne spremenljivke predstavljajo vrednosti, ki jih T(x) lahko zavzame, medtem ko nam porazdelitveni zakon posreduje informacijo o tem, kakšna je verjetnost, da T(x) zavzame določeno vrednost ali vrednost iz določenega intervala. Pričakovano preostalo življenjsko dobo osebe, stare x let, označimo z $E(T_x)$ in po zgoraj opisani definiciji izračunamo:

$$E(T_x) = \int_0^{\infty} tg_x(t)dt. \tag{1.8}$$

Pri čemer t predstavlja zvezni čas, tj. zalogo vrednosti slučajne spremenljivke T(x), $g_x(t)dt$ pa pripadajočo verjetnost, da T(x) zavzame vrednost t. Z vsoto produkta dobimo pričakovano preostalo življenjsko dobo osebe, stare x let. Do računanju bolj prijazne oblike enačbe matematičnega upanja slučajne spremenljivke T(x) pridemo z uporabo kumulativne porazdelitvene funkcije in integracije *per partes*, pri čemer upoštevamo $u = t,\ du = dt$, $dv = G_x'(t),\ v = G_x(t)$ in izpeljemo:[2]

$$E(T_x) = \int_0^\infty t dG_x(t) = tG_x(t) - \int_0^\infty G_x(t)dt =$$

$$tG_x(t) - \int_0^\infty dt + \int_0^\infty {}_t p_x dt = \lim_{b\to\infty} [tG_x(t) - t]_0^b + \int_0^\infty {}_t p_x dt$$

$$= \int_0^\infty {}_t p_x dt. \tag{1.9}$$

1.2 Jakost smrtnosti in koncept analitičnih zakonov smrtnosti

Pri zavarovalniških produktih, ki so vezani na življenje zavarovancev, je osrednjega pomena proces umiranja zavarovancev v odvisnosti od njihove starosti. Tako ima jakost smrtnosti v modelu pričakovane življenjske dobe izjemno pomembno vlogo, saj predstavlja relativno hitrost umiranja oseb v določenem časovnem intervalu. Analitično jakost smrtnosti definiramo z naslednjim izrazom, pri čemer predpostavimo obstoj limite:

$$\mu_x = \lim_{s\to 0} \frac{P(T(x) \le x + s | T(x) > x)}{s}, \tag{1.10}$$

Za majhne vrednosti s zapišemo:

$${}_s q_x \approx s\mu_{x,} \tag{1.11}$$

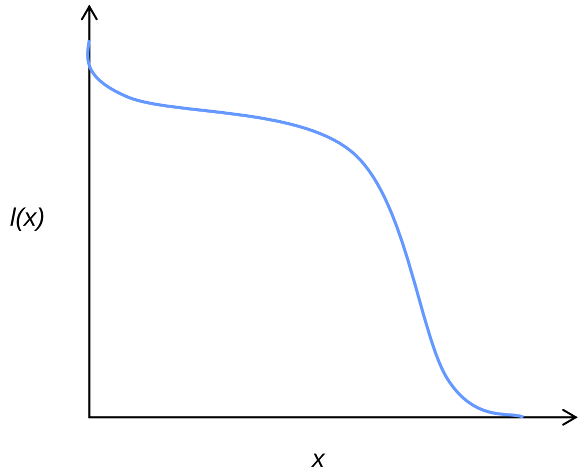
kjer izraz predstavlja verjetnost, da bo x let stara oseba umrla v zelo kratkem času s. Za bolj nazorno predstavitev koncepta jakosti smrtnosti si pomagamo s Sliko 1, kjer modra krivulja predstavlja število živih oseb l(x)[3] v odvisnosti od njihove starosti x.

---

[2] Ob tem upoštevamo: $\lim_{t\to\infty} t\ {}_t p_x = 0$, s čimer zagotovimo obstoj prvega momenta porazdelitvene funkcije T(x).

[3] Odnos med funkcijo preživetja $S_X(x)$ ter funkcijo števila živih oseb l(x) pri starosti x je opredeljen z enačbo (Bowers et al., 1997, str. 58): $l(x) = l(0)\ S_X(x)$, pri čemer l(0) predstavlja izhodiščno vrednost funkcije l(x), tj. začetno velikost populacije novorojenih oseb.

Slika 1: Graf funkcije l(x) v odvisnosti od starosti x



Iz Slike 1 je razvidno, da je funkcija števila živih oseb nenegativna in padajoča. Oblika krivulje ustreza empiričnemu zaporedju števila oseb iz neke začetne populacije ob različnih doseženih starostnih ravneh. Prvi odvod funkcije predstavlja velikost zmanjšanja števila živih oseb ob infinitezimalni spremembi starosti x. Jakost smrtnosti, tj. vpliv stopnje zmanjševanja vrednosti funkcije l(x) na vrednost te funkcije pri starosti x, analitično zapišemo:[4]

$$\mu_x = -\frac{dl(x)}{l(x)dx}. \tag{1.12}$$

Za koristno se izkaže jakost smrtnosti izraziti s pomočjo kumulativne porazdelitvene funkcije preostale življenjske dobe T(x): [5]

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(T(x) \le x + \Delta x | T(x) > x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x(1 - G(x)}$$

$$= \frac{dG(x)/dx}{1 - G(x)} = -\frac{d\left[\ln\left(1 - G(x)\right)\right]}{dx} = -\frac{dln({}_x p_0)}{dx}. \tag{1.13}$$

[4] Osnovna značilnost krivulje l(x) in s tem tudi tablic umrljivosti je, da stopnja umrljivosti s starostjo, razen takoj po rojstvu, narašča. »Naravno« visoka stopnja umrljivosti v času rojstva in takoj po njem je predvsem posledica prezgodnjih rojstev, poškodb in zapletov pri rojstvu ter prirojenih napak. Novorojene osebe so tudi bolj dovzetne za razne okužbe in poškodbe v primerjavi s starejšimi. Zato umrljivost v prvih letih življenja strmo pade z relativno visoke stopnje ob rojstvu.

[5] Pri izpeljavi upoštevamo enakost: $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = ln|g(x)| + C$.

Jakost smrtnosti x let stare osebe v starosti x + t določimo kot:

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} = -\frac{dln(1 - G_x(t))}{dt} = -\frac{dln({}_t p_x)}{dt}. \tag{1.14}$$

Z integracijo izraza (1.14), pri čemer upoštevamo robni pogoj ${}_0 p_x = 1$, dobimo enačbo, ki povezuje verjetnost preživetja, osebe stare x let, s časom t:

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. \tag{1.15}$$

Jakost smrtnosti oseb se je v aktuarski znanosti poskušala bolj ali manj uspešno opisati v različnih analitičnih 'zakonih smrtnosti'. Najbolj pripravno je, če verjetnost smrti lahko izrazimo v odvisnosti od starosti, pri čemer je funkcijska oblika polinom, eksponentna funkcija ali kakšna druga elementarna gladka funkcija. Dobljeni rezultati so tako natančni, izglajenost pa brezhibna.

V preteklosti je bilo več poskusov izdelave splošnega analitičnega zakona umrljivosti, ki bi, podobno kot zakoni v naravoslovju, temeljil na nekaj osnovnih naravnih premisah. Tako je nastalo več zakonov, med katerimi sta najbolj uveljavljena Gompertzev in Makehamov, ki namesto verjetnosti smrti opisujejo spreminjanje števila živih oseb s starostjo, ali kar je še bolj običajno, spreminjanje jakosti smrtnosti s starostjo.

Abraham de Moivre je leta 1724 kot prvi predpostavljal obstoj maksimalne starosti ω za vse osebe in enakomerno porazdelitev vrednosti T_x med 0 in ω – x. Funkcijo l(x) je zapisal v obliki premice (Zhu, 2007, str. 25):

$$l(x) = l(0)\frac{(\omega - x)}{\omega}, l(0) > 0, \tag{1.16}$$

kjer je število živih oseb padajoča funkcija starosti. De Moivrejevi nasledniki so se namesto s funkcijo l(x) ukvarjali z jakostjo smrtnosti μ_x, kar je ob predpostavki, da poznamo l(0), pravzaprav enako, saj lahko iz funkcije μ_x preko integriranja izraza (1.13) zapišemo funkcijo l(x):

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x \mu_t dt}. \tag{1.17}$$

Za izračun jakosti smrtnosti μ_x potrebujemo odvod funkcije števila živih l(x) po spremenljivki x, kar pomeni, da mora biti funkcija l(x) zvezna. O zveznosti pa je smiselno govoriti tedaj, ko imamo na voljo veliko število opazovanj, tako da razpolagamo z zalogo vrednosti funkcije za praktično vsak infinitezimalno deljiv trenutek.

Gompertz je predpostavil, da jakost smrtnosti sledi eksponentni funkciji (Gerber, 1997, str. 18):

$$\mu_x = Bc^x, B > 0\ in\ c > 0. \tag{1.18}$$

Ta funkcija že bolje od de Moivrejeve ponazarja proces staranja in pri tem ne potrebuje predpostavke o maksimalni starosti ω. Gompretzov zakon je posplošil Makeham (Dickson, Hardy & Waters, 2009, str. 35), ki je predlagal:

$$\mu_x = A + Bc^x, A > 0, B > 0, c > 1. \tag{1.19}$$

Aditivna konstanta A predstavlja jakost smrtnosti neodvisno od starosti x. To lahko pojasnimo s smrtnimi nesrečami, ki so neodvisne od starosti. Posebno obliko zakona umrljivosti dobimo, če izberemo B = 0. S tem dobimo eksponentni zakon smrtnosti, kar pomeni, da je jakost smrtnosti enaka za vse x, torej neodvisna od starosti osebe.

Ostali pomembnejši zakoni porazdelitve slučajne spremenljivke T(x) so še: dvojni geometrijski, drugi Makehamov, Perkov ter potenčni Weibullov, vendar po dosedanjih dognanjih nobena znana funkcija spreminjanja števila živih ter jakosti smrtnosti s starostjo ne opiše povsem dobro. Bolj natančno funkcijo lahko dobimo zgolj z zlepkom več različnih funkcij. Pri tem se je izkazalo, da v nekaterih zavarovalnicah v Veliki Britaniji, kjer uporabljajo analitične zakone, izračuni niso nič bolj natančni. V naši analizi vrednosti rentnega zavarovanja bomo uporabili najnovejše nemške tablice umrljivosti[6] rentnih upravičencev.

1.3 Tablice umrljivosti rentnih upravičencev

Vemo, da je smrt neizbežna, vendar trenutka, ko nastopi, vnaprej ne poznamo. Procesa umrljivosti ne opisuje deterministična funkcija, saj s svojo zasnovo izključuje slučajne dejavnike, ki so nedeljivi del omenjenega procesa. Zato dogodki v prihodnosti niso določljivi, lahko pa jih bolj ali manj uspešno napovedujemo. Praviloma se nam pri napovedovanju obeta večji uspeh, če upoštevamo pričakovano stopnjo smrtnosti oziroma če izračunamo verjetnost smrti in nato na podlagi le-te ocenjujemo razvoj dogajanja v prihodnosti.

V zavarovalništvu je najboljša osnova za sklepanje o dogajanju v prihodnosti poznavanje dogajanja v preteklosti. Pri ocenjevanju verjetnosti smrti se običajno zanašamo na smrtnost, ki jo je izkusila določena skupina oseb. Osebe, za katere nas zanima verjetnost smrti, pripadajo različnim skupinam, zato obstaja tudi več vrst tablic umrljivosti, saj morajo odražati specifične značilnosti skupine, za katero so izdelane. Zato pravimo, da so tablice umrljivosti pravzaprav razširjen zapis krivulje smrtnosti. Na podlagi površnega pregleda bi dejali, da so tablice umrljivosti rentnih upravičencev enake populacijskim –

[6] Tablicam umrljivosti pravimo tudi življenjske tablice (angl. *life table*).

stopnje umrljivosti po starostnih skupinah so si podobne, prav tako njihovo spreminjanje s starostjo, smrtnost je pri ženskah nižja ... Toda natančna primerjava razkrije, da so stopnje umrljivosti rentnih upravičencev nižje od populacijskih. Navedena značilnost ima svoje pojasnilo.

Rentni upravičenci predstavljajo podskupino celotne populacije, za katere veljajo, zaradi učinka samoselekcije pri sklenitvi zavarovanja, drugačne, tj. nižje stopnje smrtnosti od populacijskih. Osebe, ki so sprejete, so v povprečju bolj zdrave od povprečja celotne populacije.[7] V kolikor zavarovalnica tega učinka samoselekcije ne bi upoštevala, bi bili ljudje, ki vedo, da je njihova verjetnost smrti nižja od povprečne, bolj naklonjeni nakupu rentnega zavarovanja, saj bi do njega prišli po nižji premiji, kot bi bilo aktuarsko pravično. Zavarovalnica bi posledično med svojimi zavarovanci zaznala nižjo smrtnost od pričakovane, s tem pa potencialno velike izgube iz naslova zagotavljanja rente za daljše obdobje od predvidenega. V takšni nevarnostni skupini zavarovancev, v kateri je vsak član visoko tvegan, zavarovanje ne more opravljati svoje osnovne naloge, ki je zagotavljanje varnosti z izravnavanjem nevarnosti.

Prav bi bilo, da bi vsaka zavarovalnica uporabljala tablice umrljivosti, ki natančno opisujejo proces umiranja skupine zavarovancev v preteklosti. Toda postopek oblikovanja lastnih tablic je izvedljiv šele takrat, ko je zavarovalnica dovolj dolgo prisotna na trgu zavarovanj in ima potreben obseg podatkov za lastne izračune. V Sloveniji je področje rentnih zavarovanj v primerjavi z razvitim zahodnim svetom slabo razvito. Ker je tovrstnih zavarovanj malo, tudi ni dovolj podatkov, ki bi omogočili izdelavo ustreznih tablic. Zaradi tega bomo v magistrskem delu s pridom uporabili tablice umrljivosti rentnih upravičencev 'DAV 2004-R', ki jih je izdelala delovna skupina strokovnjakov nemškega aktuarskega društva (nem. *Deutschen Aktuarvereinigung – DAV*) v sodelovanju z več kot dvajsetimi življenjskimi zavarovalnicami, ki so prispevale svoje podatke o rentnih zavarovanjih (Pasdika & Wolff, 2005, str. 3). V Nemčiji se od 1. januarja 2005 uporabljajo pri vrednotenju rentnih zavarovanj.

Tablice 'DAV 2004-R' so sestavljene iz stopenj smrtnosti prvega reda (angl. *1st order mortality*) in stopenj smrtnosti drugega reda (angl. *2nd order mortality*). Stopnje smrtnosti prvega reda so dobljene na podlagi najboljše ocene (angl. *best estimate*) z vključenim varnostnim dodatkom (angl. *safety loading*). Stopnje smrtnosti drugega reda varnostnega dodatka ne vsebujejo in so zato višje. Za nemške zavarovalnice velja zakonska prepoved uporabe stopenj, ki so izračunane ob predpostavkah metode najboljše ocene. Za vrednotenje zavarovalniških produktov so dolžne uporabljati preudarne stopnje (angl. *prudent rates*), ki omogočajo varnejše poslovanje. Stopnje smrtnosti prvega reda so tako za varnostni del zmanjšane stopnje drugega reda (pri moških za ≈ 15,6 %, medtem ko pri

[7] Raziskave, ki jih navajajo Kainhofer, Predota in Schmock (2005), so pokazale, da ima življenjski standard zavarovancev močan vpliv na njihove stopnje smrtnosti. Ljudje, ki prejemajo višje plače (*»beli ovratniki«),* imajo nižje stopnje smrtnosti v primerjavi s tistimi, ki prejemajo nižje plače *(»modri ovratniki«).*

ženskah za ≈ 16,5 %), kot oblika zaščite pred neugodnimi nihanji (angl. *volatility risk*) ter nepričakovanimi odkloni od predpostavk, na podlagi katerih temeljijo najboljše ocene (Pasdika & Wolff, 2005, str. 2). Ker se za zavarovalnice priporoča uporaba stopenj smrtnosti prvega reda, bomo v nadaljevanju osredotočeni le na te. Stopnje smrtnosti se nadalje delijo v agregatne in selektivne tablice. V agregatnih tablicah so le-te odvisne zgolj od starosti oseb, medtem ko je v realnosti veliko dejavnikov, ki pomembno vplivajo na profil umrljivosti posameznika, in sicer (Promislow, 2009, str. 42): spol, premoženje, življenjski stil, zdravstveno stanje, poklic ipd.

V selektivnih tablicah umrljivosti so verjetnosti razdeljene na podlagi dveh kriterijev:

[1] starosti pri sprejemu v zavarovanje ter
[2] časa, ki je pretekel od sprejema v zavarovanje.

Oseba, ki sklene rentno zavarovanje danes, doseže ugodnejše pogoje kot oseba, ki ga je kupila pred leti ob danes enaki starosti. Prav ta učinek upoštevajo selektivne tablice. Seveda selekcijski učinek ne traja večno. V trenutku, ko se selekcijsko obdobje konča, selekcijske tablice preidejo v agregatne, čemur pravimo ultimativne tablice umrljivosti.

Višine stopenj smrtnosti v nemških agregatnih tablicah so izračunane na podlagi razpoložljivih podatkov rentnih zavarovanj iz obdobja akumulacije premij (angl. *accumulation phase*) in obdobja prejemanja rente (angl. *annuitization phase*). Stopnje smrtnosti v selektivnih tablicah pa so izračunane na podlagi podatkov obdobja koriščenja pravic iz rentnega zavarovanja. Zato selektivnih tablic ne uporabljamo za obdobje pred pričetkom izplačil. Uporabljamo jih pri izračunu premij neodloženih rentnih zavarovanj. V selektivnih tablicah so navedene stopnje smrtnosti ultimativne in te bodo vhodni parametri naših izračunov. Tablice 'DAV 2004-R', ki jih bomo uporabljali pri aktuarskih izračunih premij, podajamo v Prilogi 2.

Uporabljamo ustaljeno aktuarsko notacijo:

$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$; verjetnost, da bo oseba moškega spola, stara x let, umrla v roku enega leta, tj. preden bi doživela starost x + 1 leto.

$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$; verjetnost, da bo oseba moškega spola, stara x let, doživela starost x + 1 leto.

Z oznako y označujemo starost osebe ženskega spola, pri čemer je razlaga za q_y in p_y identična.

1.4 Dvorazsežna porazdelitvena funkcija preostale življenjske dobe dveh oseb

Do sedaj smo obravnavali aktuarska orodja enodimenzionalne analize. Zamislili smo si osebo in odgovorili na vprašanje, kako modelirati njeno preostalo življenjsko dobo, ki ima značaj stohastične spremenljivke. Definirali smo model preživetja in prišli do porazdelitve slučajne spremenljivke T(x). V splošnem pa slučajno spremenljivko preostale življenjske dobe lahko obravnavamo v širšem smislu, tako da razširimo model. Z vidika zavarovanj, ki so vezana na več kot eno življenje, ocenjevanje enorazsežne porazdelitve ne bo več zadoščalo. Predmet našega zanimanja bodo tako dvorazsežne (dvodimenzionalne) porazdelitvene funkcije preostale življenjske dobe x in y let stare osebe. Kar želimo, je matematično opisati porazdelitveni zakon obnašanja para slučajnih spremenljivk [T(x),T(y)] v prostoru.

Preostali življenjski dobi dveh oseb sta lahko medsebojno odvisni ali pa tudi ne. V splošni obliki dvorazsežno kumulativno porazdelitveno funkcijo preostale življenjske dobe oseb, starih x in y let, zapišemo takole (Zhu, 2007, str. 223):

$$G_{T(x),T(y)}(t_x,t_y) = P(T(x) \leq t_x, T(y) \leq t_y) = \int_0^{t_x}\int_0^{t_y} g(t_x,t_y)dt_x dt_y, \quad (1.20)$$

pri čemer je nabor vrednosti slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) določen z intervalom ($0 < t_x, t_y < \infty$). Obnašanje porazdelitve parov T(x) in T(y) je determinirano s porazdelitveno funkcijo $G(t_x,t_y)$, neodvisno od tega, ali je zaloga vrednosti slučajnih spremenljivk zveznih bodisi diskretnih vrednosti. Na podlagi dvorazsežne porazdelitvene funkcije $G(t_x,t_y)$ lahko izračunamo verjetnost, da točka [T(x), T(y)] leži v podmnožici vseh izidov, ki jo določata neenačbi $T(x) \leq t_x, T(y) \leq t_y$. Če so nam poznane vse vrednosti parov T(x) in T(y) ter njihove verjetnosti, smo s tem že opisali dvorazsežno porazdelitev.

Običajno najlažje opišemo porazdelitev z gostoto verjetnosti. S parcialnim odvajanjem funkcije $G(t_x,t_y)$ po t_x in t_y dobimo dvorazsežno funkcijo gostote:

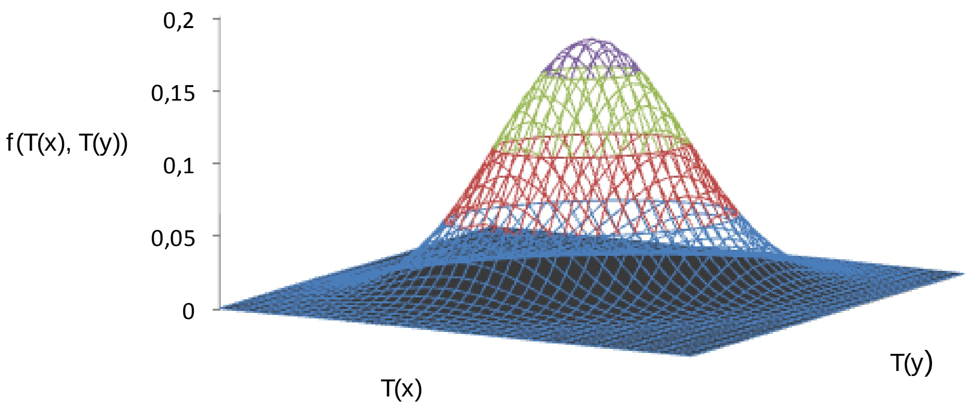
$$g_{T(x),T(y)}(t_x,t_y) = \frac{d^2G(t_x,t_y)}{dt_x dt_y}, \quad (1.21)$$

kar velja povsod tam, kjer je porazdelitvena funkcija odvedljiva. Verjetnost, da točka [T(x),T(y)] leži v bližnji okolici (t_x, t_y), je sorazmerna vrednosti funkcije $g(t_x,t_y)$, kar z diferencialno enačbo zapišemo:

$$P(t_x \leq T(x) \leq t_x + dt_x, t_y \leq T(y) \leq t_y + dt_y) = g(t_x,t_y)dt_x dt_y. \quad (1.22)$$

Za lažjo predstavo o povedanem Slika 2 prikazuje dvorazsežno normalno porazdelitveno funkcijo gostote. Pri tem smo predpostavili, da sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) porazdeljeni normalno, kar seveda nima empirične osnove, a je za ponazoritev koristna. Recimo, da je korelacijski koeficient med T(x) in T(y) enak 0,4.

Slika 2: Dvorazsežna normalna porazdelitvena funkcija gostote slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) [ρ = 0,4]



Ker sta robni porazdelitveni funkciji spremenljivk T(x) in T(y) normalni, je tudi dvorazsežna porazdelitvena funkcija zvonaste oblike. Elipse, ki jih lahko opazimo na sliki, predstavljajo verjetnostno gostoto vseh možnih parov T(x) in T(y).

V primeru medsebojne odvisnosti slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) poznavanje njunih robnih porazdelitvenih funkcij ne zadošča za konstrukcijo njune skupne porazdelitve, medtem ko lahko iz dvorazsežnih porazdelitev razmeroma preprosto in brezpogojno izpeljemo robne. Poglejmo si, kako.

Za porazdelitveno funkcijo $G(t_x, t_y)$ slučajnega para spremenljivk [T(x),T(y)] je $lim_{t_x \to -\infty} G(t_x, t_y) = 0$ in $lim_{t_y \to -\infty} G(t_x, t_y) = 0$. Ko eno od spremenljivk pošljemo v pozitivno neskončnost, dobimo robno kumulativno porazdelitveno funkcijo druge spremenljivke (Larsen & Marx, 2001, str. 162–163), kar zapišemo kot:

$$G_{T(x)}(t_x) = P(T(x) \leq t_x) = \lim_{t_y \to \infty} G(t_x, t_y)$$

$$= \int_0^{t_x} \int_0^{\infty} g(u, t_y) dt_y du. \qquad (1.23)$$

Od tod sledi, da je robna porazdelitvena funkcija gostote slučajne spremenljivke T(x) enaka:

$$\frac{dG_{T(x)}(t_x)}{dt_x} = g_{T(x)}(t_x) = \int_0^{\infty} g(t_x, t_y) dt_y. \qquad (1.24)$$

Povsem enako kot velja za robni porazdelitveni funkciji spremenljivke T(x) velja tudi za T(y). Na tem mestu bomo navedli zgolj izraz za robno porazdelitveno funkcijo gostote T(y):

$$g_{T(y)}(t_y) = \int_0^{\infty} g(t_x, t_y) dt_x. \qquad (1.25)$$

V primeru dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij je zveza med porazdelitveno funkcijo in funkcijo preživetja bolj zapletena kot v enorazsežnem, saj je:

$$\begin{aligned} S(t_x, t_y) &= P(T(x) > t_x, T(y) > t_y) \\ &= 1 - G_{T(x)}(t_x) - G_{T(y)}(t_y) + G(t_x, t_y). \qquad (1.26) \end{aligned}$$

V enorazsežnem kontekstu je funkcijski zapis manj zapleten (glej enačbo 1.2). V dvodimenzionalni strukturi je potrebno dodatno proučiti in upoštevati povezanost slučajnih spremenljivk. Kovarianco T(x) in T(y) izračunamo z naslednjo enačbo:

$$Cov(T(x), T(y)) = E\left[\left(T(x) - E(T(x))\right)\left(T(y) - E(T(y))\right)\right],$$

pri čemer posamezne člene zgornjega izraza izračunamo:[8]

$$E[T(x)T(y)] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t_x t_y g(t_x, t_y) dt_x dt_y. \qquad (1.27)$$

$$E[T(x)] = \int_0^{\infty} t_x g_{T(x)}(t_x) dt_x. \qquad (1.28)$$

$$E[T(y)] = \int_0^{\infty} t_y g_{T(y)}(t_y) dt_y. \qquad (1.29)$$

Če sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) neodvisni, potem velja enakost:[9]

---

[8] Stopnjo linerane povezanosti spremenljivk T(x) in T(y) dobimo s korelacijskim koeficientom: $\rho(T(x), T(y)) = \frac{Cov[T(x),T(y)]}{\sqrt{Var[T(x)]Var[T(y)]}}$ (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä & Meester, 2005, str. 142).

[9] Iz osnov teorije verjetnosti vemo (Ash, 2008, str. 27), da sta dogodka $A = T(x) \leq t_x$ in $B = T(y) \leq t_y$ neodvisna natanko takrat, ko velja: $P(A) = P(A|B)$. Od tod sledi, da je verjetnost nastanka enega in drugega dogodka hkrati enaka: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$G(t_x, t_y) = P(T(x) \leq t_x)P(T(y) \leq t_y) = G_{T(x)}(t_x)G_{T(y)}(t_y)$$

$$= \left({}_{t_x}q_x\right)\left({}_{t_y}q_y\right), \qquad (1.30)$$

pri čemer je $Cov(T(x), T(y)) = 0$. Dvorazsežno funkcijo gostote sedaj zapišemo kot:

$$g(t_x, t_y) = g_{T(x)}(t_x)g_{T(y)}(t_y). \qquad (1.31)$$

Ko govorimo o odvisnoti med slučajnima spremenljivkama T(x) in T(y), naj opomnimo, da v primeru neodvisnosti spremenljivk enakost $E[T(x)T(y)] = E[T(x)]E[T(y)]$ ni reverzibilna v smislu, da bi sklep veljal tudi v nasprotni smeri branja enačbe (tj. z desne proti levi). Če sta dve spremenljivki medsebojno odvisni, ni nujno, da bomo s kovarianco to tudi prepoznali in ustrezno izmerili (Dhaene et al., 2000, str. 25). Kot bomo videli v tretjem poglavju, obstaja vrsta razlogov, zakaj je temu tako.

1.4.1 Stanje hkratnih življenj

Pri zavarovanjih, kjer so izplačila zavarovalnice pogojena s stanjem več življenj,[10] je za oceno finančne obveznosti zavarovalnice pomembno, ali se izplačila končajo s prenehanjem prvega ali zadnjega življenja. Ta trenutek v časovnem razvoju določi čas trajanja izplačil zavarovalnice. Seveda vnaprej tega trenutka ne poznamo, vendar pa znamo z dosedaj zbranim znanjem definirati porazdelitveno funkcijo preostale življenjske dobe več življenj v odvisnosti od stanja le-teh.

Stanje hkratnih življenj – xy (angl. *joint-life status*), kot ga poznamo v aktuarski literaturi, označuje koncept sočasnih življenj. Takoj ko ugasne eno izmed življenj v skupini zavarovancev, na katero se zavarovanje nanaša, preneha tudi 'stanje' in s tem izplačila zavarovalnice. V primeru dveh oseb je stanje hkratnih življenj aktivno vse dotlej, dokler sta obe osebi živi. Če smo prej obravnavali dve osebi, od katerih je bila prva stara x let, druga y let, si sedaj zamislimo 'osebo', ki je stara xy, s preostalo življenjsko dobo T_{xy}.[11] Z uvedbo te nove spremenljivke smo dvodimenzionalno porazdelitev T(x) in T(y) pretvorili v enodimenzionalno, pri čemer je obnašanje porazdelitve slučajne spremenljivke T_{xy} pogojeno s sočasnim življenjem oseb, starih x in y let. Slučajno spremenljivko T_{xy} določimo kot (Zhu, 2007, str. 226):

$$T_{xy} = \min[T(x), T(y)]. \qquad (1.32)$$

[10] Pojem stanje življenja ima v okviru naše obravnave dva pomena: (1) oseba je živa ali (2) oseba je mrtva.

[11] Lahko bi dejali, da nas zanima preostala življenjska doba zavarovanja oziroma funkcija preživetja rentnega zavarovanja.

Kumulativno porazdelitveno funkcijo v splošni obliki, tj. neodvisno od tega, ali sta T(x) in T(y) medsebojno odvisni ali ne, z aktuarskimi simboli zapišemo:

$$ {}_tq_{xy} = P\left(T_{xy} \leq t\right) = 1 - {}_tp_{xy}, \tag{1.33}$$

pri čemer je funkcija preživetja T_{xy}:[12]

$$\begin{aligned} {}_tp_{xy} &= P\left(T_{xy} > t\right) = P[\min(T(x), T(y)) > t] \\ &= P[T(x) > t, T(y) > t]. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Odvajanje enačbe (1.33) po spremenljivki t_{xy} nam da porazdelitveno funkcijo gostote slučajne spremenljivke T_{xy}:

$$ g_{T_{xy}}(t) = \frac{d({}_tq_{xy})}{dt} = -\frac{d({}_tp_{xy})}{dt}. \tag{1.35}$$

Pri izpeljavanju opazimo, da smo si s premislekom in z opredelitvijo stanja hkratnih življenj v vlogi novega subjekta, starega xy let, prihranili nekaj nepotrebnega izpeljevanja. Vse funkcije in relacije, ki veljajo za x in T(x), veljajo tudi za odnos med xy in T_{xy} (Zhu, 2007, str. 226). Že alternativni zapis funkcije preživetja potrdi povedano:

$$ {}_tp_{xy} = e^{-\int_0^t \mu_{xy+s}(s)ds}, \tag{1.36}$$

kar je pravzaprav analogno izrazu (1.15), ki smo ga že izpeljali. Izraza (1.8) in (1.9) nekoliko prilagodimo in dobimo enačbo za matematično upanje slučajne spremenljivke T_{xy}:

$$ E\left(T_{xy}\right) = \int_0^\infty t g_{T_{xy}}(t)dt = \int_0^\infty {}_tp_{xy}dt. \tag{1.37}$$

Z izrazi (1.32) do (1.37) smo prikazali razmerja med T_{xy} in xy, ki so neobčutljiva na medsebojne odnose spremenljivk T(x) in T(y). Enačbe v primeru neodvisnosti dobijo poenostavljene oblike. Poglejmo si najprej, kako predpostavka medsebojne neodvisnosti T(x) in T(y) ob predpostavki, da poznamo njuni robni porazdelitveni funkciji, vpliva na obliko funkcije preživetja:

$$ {}_tp_{xy} = P\left(T_{xy} > t\right) = P(T(x) > t, T(y) > t)$$

[12] Zaradi ustaljene aktuarske notacije bomo namesto t_{xy} pisali t.

$$= P(T(x) > t)P(T(y) > t)$$

$$= {}_tp_x\,{}_tp_y. \tag{1.38}$$

Rezultat (1.38) si velja zapomniti, saj nam bo prišel prav pri računanju enkratne neto premije rentnega zavarovanja na hkratni življenji, ko bomo predpostavili neodvisnost preostalih življenjskih dob rentnih upravičencev. To je tudi predpostavka, za katero menimo, da je sporna, saj ima lahko ob prisotni odvisnosti T(x) in T(y) potencialne finančne posledice za zavarovalnico. Kumulativna porazdelitvena funkcija gostote dobi s pomočjo enačbe (1.38) obliko:

$${}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy} = 1 - {}_tp_x\,{}_tp_y$$

$$= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x\,{}_tq_x. \tag{1.39}$$

Izraz (1.39) odvajamo po spremenljivki t, s čimer dobimo porazdelitveno funkcijo gostote spremenljivke T_{xy}:

$$g_{T_{xy}}(t) = -\frac{d(\,{}_tp_{xy})}{dt} = {}_tp_x g_{T(y)}(t) + {}_tp_y g_{T(x)}(t). \tag{1.40}$$

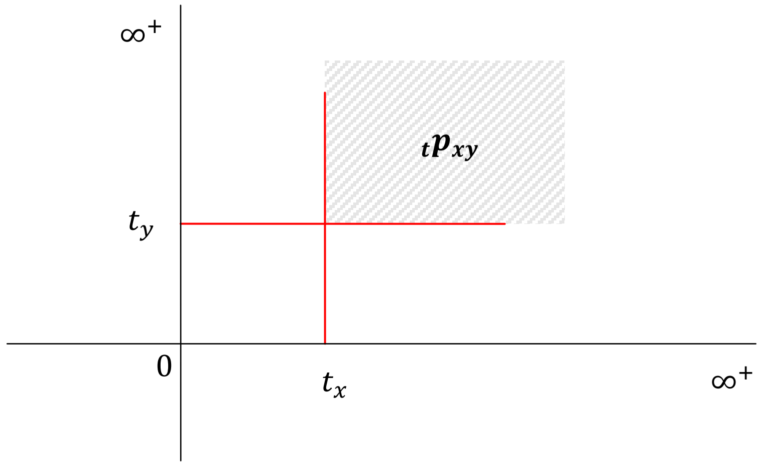
Če sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) medsebojno odvisni, postane izraz za funkcijo preživetja manj neposreden. Ob dani dvorazsežni porazdelitveni funkciji gostote $g(t_x, t_y)$ verjetnost preživetja izračunamo takole (Zhu, 2007, str. 227):

$${}_tp_{xy} = P(T_{xy} > t) = P(T(x) > t, T(y) > t)$$

$$= \int_{t_x}^{\infty}\int_{t_y}^{\infty} g_{T(x),T(y)}(t_x, t_y)\,dt_x\,dt_y. \tag{1.41}$$

Pozoren bralec bo opazil, da sedaj, za razliko od enačbe (1.20), integriramo odprti kvadrat od t_x in t_y proti neskončnosti, kar prikazuje Slika 3. Rezultat predstavlja natanko rezidual do polne verjetnosti, kar lahko zapišemo: $1 - G_{T(x),T(y)}(t_x, t_y)$. Dokler se slučajna spremenljivka T_{xy} nahaja v osenčenem polju, toliko časa bo zavarovalnica obvezana izplačevati rento rentnim upravičencem. Takoj, ko se spremenljivka T_{xy} pojavi na prostoru, ki je definiran z verjetnostno gostoto $P(0 < T(x) \leq t_x,\ 0 < T(y) \leq t_y)$, izplačila zavarovalnice prenehajo.

Slika 3: Področje verjetnostne gostote $P(T(x) > t_x,\ T(y) > t_y)$



1.4.2 Stanje zadnjega življenja

Z izrazom 'stanje zadnjega življenja' – $\overline{xy}$ (angl. *last-survivor status*) označujemo stanje življenja zadnjega rentnega upravičenca. Takoj ko to ugasne, preneha tudi zavarovanje in s tem obveznost zavarovalnice. Pojem po vsebini sedaj drugače definira funkcijo preživetja zavarovanja. Za njeno lažjo izpeljavo si zamislimo 'osebo', staro $\overline{xy}$, s preostalo življenjsko dobo $T_{\overline{xy}}$, kar formalizirano zapišemo kot Zhu (2007, str. 230):[13]

$$T_{\overline{xy}} = \max[T(x), T(y)], \tag{1.42}$$

pri čemer kumulativno porazdelitveno funkcijo zapišemo:

$${}_tq_{\overline{xy}} = P\left(T_{\overline{xy}} \leq t\right) = P(max[T(x), T(y)] < t), \tag{1.43}$$

medtem ko funkcijo preživetja $T_{\overline{xy}}$, kot rezidual do totalne verjetnosti, definiramo:[14]

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{xy}} &= P\left(T_{\overline{xy}} > t\right) = P[\max(T(x), T(y)) > t] \\ &= P[T(x) > t, T(y) > t] = 1 - {}_tq_{\overline{xy}}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Z odvajanjem enačbe (1.43) po spremenljivki $t_{\overline{xy}}$ dobimo porazdelitveno funkcijo gostote slučajne spremenljivke $T_{\overline{xy}}$:

[13] Tudi tokrat, če smo povsem precizni, slučajna spremenljivka $T_{\overline{xy}}$ simbolizira preostalo življenjsko dobo rentnega zavarovanja na zadnje življenje rentnega upravičenca.

[14] Zaradi uveljavljene aktuarske notacije namesto $t_{\overline{xy}}$ pišemo t.

$$g_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d(\,_tq_{\overline{xy}})}{dt} = -\frac{d(\,_tp_{\overline{xy}})}{dt}. \qquad (1.45)$$

Ponovno ugotovimo, da smo si z opredelitvijo stanja zadnjega življenja v vlogi $\overline{xy}$ starega subjekta prihranili nekaj dela pri izpeljevanju. Vse funkcije in relacije med x in T(x) veljajo tudi med $\overline{xy}$ in $T_{\overline{xy}}$. Izraza (1.8) in (1.9) prilagodimo novim okoliščinam in pridemo do enačbe matematičnega upanja slučajne spremenljivke $T_{\overline{xy}}$:

$$E(T_{\overline{xy}}) = \int_0^\infty \,_tg_{T_{\overline{xy}}}(t)dt = \int_0^\infty \,_tp_{\overline{xy}}dt. \qquad (1.46)$$

Z izrazi od (1.42) do (1.46) smo prikazali odnose, ki veljajo med $T_{\overline{xy}}$ in $\overline{xy}$ v splošno veljavni obliki, ki ni občutljiva na medsebojna razmerja med T(x) in T(y). Sedaj si poglejmo, kako predpostavljena neodvisnost med T(x) in T(y) ob tem, da poznamo njuni robni kumulativni porazdelitveni funkciji, spremeni porazdelitveno funkcijo spremenljivke $T_{\overline{xy}}$:

$$\begin{aligned} \,_tq_{\overline{xy}} &= P(T_{\overline{xy}} \le t) = P(T(x) \le t, T(y) \le t) \\ &= P(T(x) \le t)P(T(y) \le t) \\ &= \,_tq_x \,_tq_y. \end{aligned} \qquad (1.47)$$

Funkcijo preživetja oziroma rezultat, ki ga bomo potrebovali kasneje pri analizi vrednosti rentnega zavarovanja, lahko na podlagi enačbe (1.47) zapišemo:

$$\begin{aligned} \,_tp_{\overline{xy}} &= 1 - \,_tq_{\overline{xy}} = 1 - \,_tq_x \,_tq_y \\ &= \,_tp_x + \,_tp_y - \,_tp_x \,_tp_x. \end{aligned} \qquad (1.48)$$

Porazdelitveno funkcijo gostote spremenljivke $T_{\overline{xy}}$ dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije (1.47) po spremenljivki t, kar nam da:

$$g_{T_{\overline{xy}}}(t) = \,_tq_x g_{T(y)}(t) + \,_tq_y g_{T(x)}(t). \qquad (1.49)$$

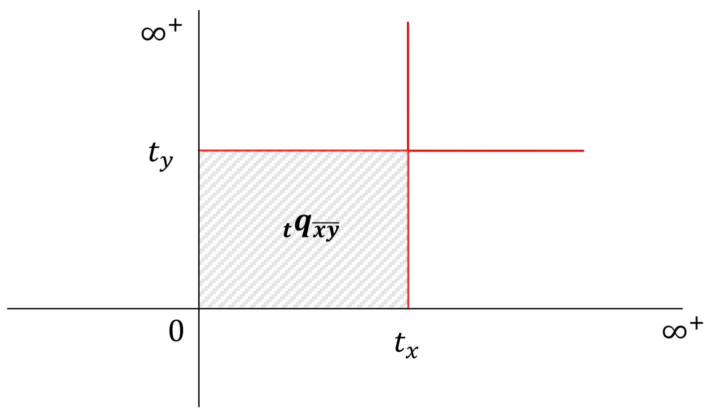
Če sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) medsebojno odvisni, potem dobimo računanju manj prijazno obliko kumulativne porazdelitvene funkcije. Ob znani dvorazsežni porazdelitveni funkciji gostote $g(t_x, t_y)$, verjetnosti iz kumulativne porazdelitvene funkcije $T_{\overline{xy}}$ izračunamo kot Zhu (2007, str. 231):

$$ {}_tq_{\overline{xy}} = P\big(T_{\overline{xy}} \le t\big) = P\big(T(x) \le t_x, T(y) \le t_y\big) $$

$$ = \int_0^{t_x}\int_0^{t_y} g_{T(x),T(y)}\big(t_x, t_y\big)dt_x dt_y. \tag{1.50} $$

Kumulativna porazdelitvena funkcija spremenljivke $T_{\overline{xy}}$ je razumljivo identična enačbi (1.20), saj nas tudi v tem primeru zanima verjetnost, da bosta rentna upravičenca umrla pred časom t_x in t_y. To verjetnostno gostoto prikazuje osenčen kvadrat na Sliki 4. Dokler se slučajna spremenljivka $T_{\overline{xy}}$ nahaja izven osenčenega polja, toliko časa bo zavarovalnica dolžna izplačevati rento preživelim upravičencem. Takoj ko se slučajna spremenljivka $T_{\overline{xy}}$ pojavi na prostoru, ki je definiran z verjetnostno gostoto $P(0 < T(x) \le t_x, 0 < T(y) \le t_y)$, obveznost izplačil zavarovalnice preneha, saj rentnih upravičencev ni več med živimi.

Slika 4: Področje verjetnostne gostote $P(0 < T(x) \le t_x, 0 < T(y) \le t_y)$



1.4.3 Relacije med T(x), T(y), T_{xy} in $T_{\overline{xy}}$

Imamo dve osebi, stari x in y let, pri čemer predpostavimo, da ne umreta sočasno. Tedaj bodo med slučajnimi spremenljivkami T(x), T(y), T_{xy} in $T_{\overline{xy}}$ vedno veljale naslednje relacije (Zhu, 2007, str. 233–234):

$$ T(x) + T(y) = T_{xy} + T_{\overline{xy}}, \tag{1.51} $$

$$ T(x)T(y) = T_{xy}T_{\overline{xy}}, \tag{1.52} $$

$$ E[T(x)T(y)] = E\big[T_{xy}T_{\overline{xy}}\big], \tag{1.53} $$

o čemer se lahko v vsakem trenutku prepričamo s pomočjo enačb (1.32) in (1.42) ter ob upoštevanju navedene predpostavke.

1.5 Življenjske rente, vezane na dve življenji

Osnovna ideja rentnega zavarovanja (angl. *annuity contract*) je zagotavljanje finančne varnosti zavarovancem v času, ki sledi, z izravnavanjem nevarnosti, vezanih na negotovo dolžino življenja. Čas lahko pri tem definiramo zvezno ali diskretno, zato bomo tudi modele razvili v zveznem in diskretnem času. Zaradi časovnega zamika med vplačilom premije in izplačili zavarovalnice, se srečamo z osnovnimi pojmi finančne matematike kot so: nominalna obrestna mera, efektivna obrestna mera, jakost obrestne mere, obdobje kapitalizacije ... Na matematičnih osnovah, ki se skrivajo v ozadju pojmov, ter funkcijah preživetja slučajnih spremenljivk T_{xy} in $T_{\overline{xy}}$ nato izpeljemo modele za vrednotenje različnih življenjskih rent, vezanih na dve življenji.

Obrestna mera se vedno navezuje na čas, v katerem velja, in na kapitalizacijsko obdobje, na koncu katerega se obresti pripišejo. Pri tem ločimo nominalno in efektivno obrestno mero. Efektivna obrestna mera je tista, pri kateri sta časovna enota, na katero se nanaša obrestna mera, in kapitalizacijsko obdobje enaka. Če z r^{ef} označimo efektivno obrestno mero, potem imamo v primeru, da na bančni račun položimo 1 evro, ob koncu kapitalizacijskega obdobja $1 + r^{ef}$ sredstev (inverzno vrednost obrestnega faktorja predstavlja diskontni faktor: $v = 1/(1 + r^{ef})$. Tedaj ko kapitalizacijsko obdobje in časovna enota, na katero se navezuje obrestna mera, ne sovpadata, obrestni meri pravimo nominalna. Če z $r^{(i)}$ označimo nominalne obresti, ki se pripisujejo i-krat letno, potem je efektivna letna obrestna mera enaka:

$$r^{ef} = \left(1 + \frac{r^{(i)}}{i}\right)^{i} - 1. \tag{1.54}$$

V primeru zveznega obrestovanja, ko je čas infinitezimalno deljiv ($\Delta t \rightarrow dt$) in ko se tudi obresti pripisujejo v vsakem neskončno deljivem časovnem trenutku, dobimo ***jakost obrestne mere δ***, ki je enaka $r^{(i)}$. Vpeljemo novo spremenljivko $\Xi = \left(1 + r^{(i)}/i\right)^{i}$, izraz logaritmiramo ter poiščemo limito, ko gre i proti neskončno:

$$\lim_{i\to\infty} \ln(\Xi) = \lim_{i\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{r^{(i)}}{i})}{1/i},$$

pri čemer si sedaj pomagamo z Bernoulli-l'Hospitalovim pravilom, ko hkrati števec in imenovalec odvajamo po spremenljivki i in dobimo:[15]

---

15 $\frac{dln(1+r^{(i)}/i)}{di} = \frac{dln((i+r^{(i)})/i)}{di} = \frac{d(ln(i+r^{(i)})-\ln(i))}{di} = \frac{r^{(i)}}{1+r^{(i)}/i}$.

$$\lim_{i\to\infty} \ln(\Xi) = \lim_{i\to\infty} \frac{r^{(i)}}{1+\frac{r^{(i)}}{i}} = \delta. \quad (1.55)$$

Zapis izraza (1.55) preuredimo ter upoštevamo $\Xi = \left(1 + r^{(i)}/i\right)^{i}$. Dobimo obrestni faktor v zveznem času obrestovanja:

$$\lim_{i\to\infty} (1+\frac{r^{(i)}}{i})^{i} = e^{\delta},$$

medtem ko diskontni faktor za enako obdobje dobimo z inverzom $(\cdot)^{-1}$:

$$\lim_{i\to\infty} (1+\frac{r^{(i)}}{i})^{-i} = e^{-\delta}. \quad (1.56)$$

Za izhodiščno formulacijo koncepta življenjske rente bomo obravnavali preostalo življenjsko dobo ene osebe, kar bomo kasneje lahko posplošili na rente, vezane na dve življenji, in sicer ob upoštevanju funkcije preživetja dveh oseb za stanje hkratnih in zadnjega življenja, ki smo jih izpeljali v prejšnjem razdelku.

Sedanja vrednost prenumerandne življenjske rente je slučajna spremenljivka, saj je odvisna od preostale življenjske dobe x let stare osebe. Označimo jo z Y, enkratno neto premijo zanjo pa dobimo z E(Y). Splošni zapis rente (Dickson et al., 2009, str. 96–97), ki predvideva plačila v višini ene denarne enote na začetku diskretnih časovnih trenutkov 0, 1, 2 ... K(x), je:[16]

$$Y = \sum_{k=0}^{\omega} v^{k} I_{[K(x)\geq k]}, \quad (1.57)$$

pri čemer smo z $I_{[K(x)\geq k]}$ označili funkcijo indikacije slučajnega dogodka. Funkcija I ima vrednost 1, če je $K(x) \geq k$ in vrednost 0, ko je $K(x) < k$. Sedaj pa si predstavljajmo, da zavarovalnice tovrstna zavarovanja množično prodajajo različnim ljudem, starim x let. Nekateri od njih bodo živeli dolgo, nekateri bodo umrli prej. Izplačila zavarovalnice se bodo zaradi tega razumljivo precej razlikovala, vendar bo zavarovalnica v povprečju izplačevala približno toliko, kot je vrednost matematičnega upanja izraza (1.57). Več zavarovanj bodo prodali, bolj zanesljiva bo izračunana vrednost matematičnega upanja, saj se varianca zaradi učinka zakona velikih števil s številom zavarovanj zmanjšuje.

[16] Slučajna spremenljivka K(x) predstavlja število dopolnjenih let, ki jih bo preživela x let stara oseba (angl. *curtate-future lifetime*). Z njo označujemo celoštevilsko zalogo vrednosti zvezne slučajne spremenljivke T(x), kar zapišemo (Dickson et al., 2009, str. 32): $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke Y ob upoštevanju funkcije preživetja K(x) izračunamo:[17] [18]

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\omega} v^k \; {}_k p_x . \tag{1.58}$$

Nadaljnja posplošitev rente gre v smeri drobljenja časovnih intervalov ($\Delta k \to 0$) in na koncu pridemo do normalizirane vrednosti enkratne neto premije prenumerandne rente, ki se izplačuje v zveznem času:

$$\ddot{a}_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \; {}_t p_x dt. \tag{1.59}$$

Preden bomo prešli k analitičnim modelom življenjskih rent, vezanih na dve življenji, predstavimo intuitiven Markovski verižni model štirih stanj, ki nam bo v pomoč pri izpeljavi enačb za vrednotenje. Naša naloga je oceniti verjetnosti preživetja/smrti dveh oseb, ki sta v določenem razmerju (npr. zakonskem, zunajzakonskem, poslovnem ...). Zaradi izpeljave splošnega modela konkretnega razmerja ne navajamo, vendar imejmo v mislih, da v ozadju določena relacija obstaja. Markovski verižni model za dve življenji, ki ga prikazuje Slika 5, je osnovan na naslednji predpostavki in notaciji:

[1] Jakost umrljivosti prve (druge) osebe je pogojena s tem, ali je druga (prva) živa. Če je druga živa, potem je jakost umrljivosti prve primarno odvisna od njene starosti, prav tako pa tudi od starosti druge osebe. Pojasnimo: $\mu^{01}_{x+t:y+t}$ predstavlja jakost umrljivosti druge osebe, ko je ta stara y + t let, ob pogoju, da je prva oseba, ki je stara x + t let, še živa. V primeru, da je ta mrtva, je jakost umrljivosti druge osebe odvisna od njene starosti in dejstva, da je prva oseba mrtva, ne pa od časa, ki je pretekel od trenutka njene smrti. Zato starost prve osebe ne vpliva na prehodno jakost umrljivosti druge osebe na poti iz stanja 2 v 3, ki jo označujemo z: μ^{23}_{y+t}.

[2] Verjetnosti posameznih stanj modela bomo označevali na naslednji način: imamo štiri stanja, kar zapišemo: s = (0, 1, 2, 3) in ${}_t p^{0s}_{xy}$, ki označuje verjetnost, da je v času t stohastičen proces v stanju s, ob predpostavki, da sta prva in druga oseba, starosti

---

17 Za aktuarsko vrednotenje življenjskih rent ima pomembne posledice Jensnova neenakost (Milevsky, 2006, str. 116): $\int_0^{E(T_x)} e^{-\delta t} dt > E\left[\int_0^{T_x} e^{-\delta t} dt\right]$. Problem, ki ga neenakost implicira, je, da bi zgolj upoštevanje pričakovane življenjske dobe osebe namesto njene celotne funkcije preživetja vodilo do napačne vrednosti enkratne neto premije življenjske rente. Zato aktuarski modeli vrednotenja uporabljajo verjetnosti preživetja osebe, stare x let, na celotnem pasu (x, ω-x) namesto njene pričakovane življenjske dobe.

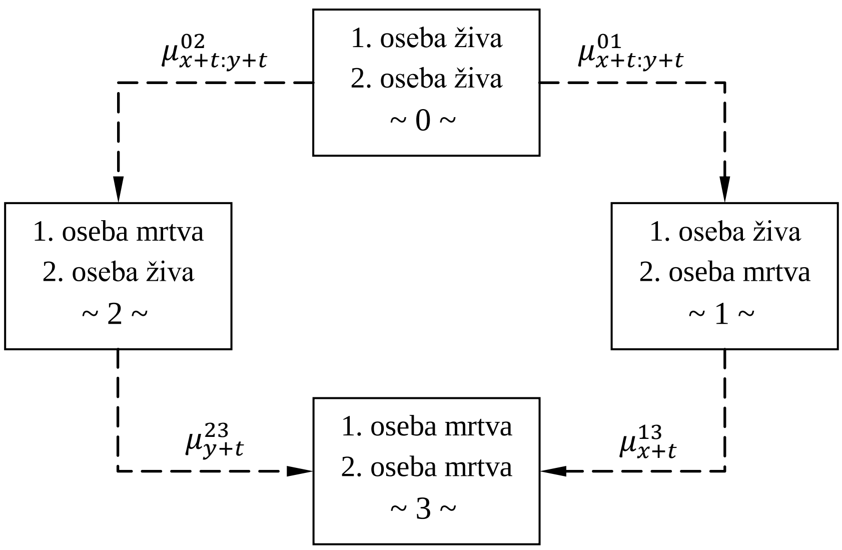
18 Postnumerandno življenjsko rento v diskretnem času bi dobili, če bi v enačbi (1.58) spremenljivko k inicializirali na 1. Izpeljemo lahko tudi enakost, ki sicer velja le v diskretnem času: $\bar{a}_x = \ddot{a}_x - 1$, pri čemer upoštevamo robni pogoj ${}_0 p_x = 1$.

x in y let, v tem trenutku živi. Razložimo: ${}_{t}p_{x+u}^{13}$ predstavlja verjetnost, da bo prva oseba, ki je sedaj stara x + u let, pri čemer je druga oseba že preminula, umrla v času t oziroma še preden bo dočakala starost x + u + t let. V tej zvezi je starost, pri kateri je umrla druga oseba, irelevantna in zato ne vpliva na verjetnost.

Funkcije preživetja slučajnih spremenljivk T_{xy} in $T_{\overline{xy}}$, na podlagi vzpostavljenega modela, definiramo kot:

$$
\begin{aligned}
{}_{t}p_{xy} &= P[T(x) > t, T(y) > t] = {}_{t}p_{xy}^{00}.\\
{}_{t}q_{xy} &= P[T(x) \leq t, T(y) \leq t] = 1 - {}_{t}p_{xy} = {}_{t}p_{xy}^{01} + {}_{t}p_{xy}^{02} + {}_{t}p_{xy}^{03}.\\
{}_{t}p_{\overline{xy}} &= P[T(x) > t, T(y) > t] = {}_{t}p_{xy}^{00} + {}_{t}p_{xy}^{01} + {}_{t}p_{xy}^{02}.\\
{}_{t}q_{\overline{xy}} &= P[T(x) \leq t, T(y) \leq t] = 1 - {}_{t}p_{\overline{xy}} = {}_{t}p_{xy}^{03}.
\end{aligned}
$$

Slika 5: Markovski verižni model za dve življenji



Tako v teoriji kot praksi (glej Cannon & Tonks, 2008; Weisman, 2009; Williamson, 1999) se uporabljajo različne vrste življenjskih rent, od katerih bomo v okviru magistrskega dela obravnavali in analizirali najbolj aktualne:[19]

[1] dosmrtna renta (angl. *whole-life annuity*);
[2] renta z omejenim obdobjem izplačevanja (angl. *term annuity*);
[3] odložena dosmrtna renta (angl. *deffered whole-life annuity*) in
[4] vdovska renta (angl. *reversionary annuity*).

[19] Bralce opozarjamo na razlikovanje finančnih (angl. *annuities-certain*) in življenjskih rent (angl. *life annuities*). Izplačila finančne rente so vezana na vnaprej določeno obdobje in so neodvisna od preživetja, medtem ko so izplačila pri življenjskih rentah vezana na preživetje zavarovancev (Richardson & Miller, 1946; Gerber, 1996).

Za vse omenjene rente obstaja nadaljnja delitev glede na trenutek njihovega izplačevanja. Če gre za izplačevanje na koncu dogovorjenih časovnih intervalov (Dickson et al., 2009, str. 109–113), jim pravimo postnumerandne rente (angl. *annuities-immediate*), medtem ko se prenumerandne rente izplačujejo na začetku časovnih intervalov (angl. *annuities-due*).

Spoznali in osvetlili smo vsa potrebna aktuarska orodja, ki jih potrebujemo za konstrukcijo enačb življenjskih rent, vezanih na dve življenji. Vse enačbe bomo zapisali v zveznem in diskretnem času. Privzeli bomo, da sta osebi, stari x in y let, v času t = 0, živi. Zaradi posplošitve uporabnosti izrazov vrednost življenjskih rent v časovnih točkah t = (1, 2, 3 ... ∞) normaliziramo na eno denarno enoto. S tem bomo dobili sedanje vrednosti normaliziranih enkratnih neto premij, preko katerih bomo izračunali vrednost rentnega zavarovanja za poljubne vrednosti življenjskih rent.

1.5.1 Življenjska renta na hkratni življenji

[1] Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije dosmrtne postnumerandne rente v zveznem in diskretnem času je enaka:

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \; {}_tp_{xy}^{00} dt. \tag{1.60}$$

$$\bar{a}_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \; {}_kp_{xy}. \tag{1.61}$$

Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije dosmrtne prenumerandne rente v zveznem in diskretnem času je enaka:[20]

$$\ddot{a}_{xy} = \bar{a}_{xy}. \tag{1.62}$$

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_kp_{xy} = 1 + \bar{a}_{xy}. \tag{1.63}$$

[2] Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije zvezne in diskretne postnumerandne rente z omejeno dobo izplačevanja n let je enaka:21

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \; {}_tp_{xy}^{00} dt. \tag{1.64}$$

[20] Pri zveznih življenjskih rentah zaradi infinitezimalnosti časovnih intervalov (Δt→dt) ne razlikujemo med postnumerandnimi in prenumerandnimi rentami. Formule za ene in druge so v zvezni analizi identične.

[21] Pri življenjski renti z omejeno dobo izplačevanja n let upravičenec prejema rento največ n let oziroma do smrti, če ta nastopi pred letom n.

$$\bar{a}_{xy:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \ {}_kp_{xy}. \tag{1.65}$$

Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije za zvezno in diskretno prenumerandno rento z omejeno dobo izplačevanja n let:

$$\ddot{a}_{xy:n\rceil} = \bar{a}_{xy:n\rceil}. \tag{1.66}$$

$$\ddot{a}_{xy:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_{xy.} \tag{1.67}$$

[3] Sedanjo normalizirano vrednost enkratne neto premije za u let odloženo postnumerandno dosmrtno rento v zveznem in diskretnem času izračunamo:

$$_{u|}\bar{a}_{xy} = \bar{a}_{xy} - \bar{a}_{xy:u\rceil},^{22} \tag{1.68}$$

medtem ko sedanjo normalizirano vrednost enkratne neto premije za u let odloženo prenumerandno dosmrtno rento dobimo kot:

$$_{u|}\ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_{xy} - \ddot{a}_{xy:u\rceil}. \tag{1.69}$$

1.5.2 Življenjska renta na zadnje življenje

[1] Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije dosmrtne postnumerandne rente je v zveznem in diskretnem času enaka:

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left({}_tp_{\overline{xy}}^{00} + {}_tp_{\overline{xy}}^{01} + {}_tp_{\overline{xy}}^{02} \right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left(1 - {}_tp_{\overline{xy}}^{03}\right) dt. \tag{1.70}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \ {}_kp_{\overline{xy}}. \tag{1.71}$$

Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije dosmrtne prenumerandne rente je v zveznem in diskretnem času enaka:

[22] Enačbo lahko zapišemo tudi drugače, in sicer: $_{u|}\bar{a}_{xy} = {}_up_{xy}\bar{a}_{x+u,y+u}e^{-\delta u}$.

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_{\overline{xy}}. \tag{1.72}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_k p_{\overline{xy}} = 1 + \bar{a}_{\overline{xy}}. \tag{1.73}$$

[2] Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije postnumerandne rente z omejeno dobo izplačevanja n let je v zveznem in diskretnem času enaka:

$$\bar{a}_{\overline{xy}:n\rceil} = \int_0^n e^{-\delta t} \left(1 - \; {}_t p_{\overline{xy}}^{03}\right) dt. \tag{1.74}$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \; {}_k p_{\overline{xy}}. \tag{1.75}$$

Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije je za zvezno in diskretno prenumerandno rento z omejenim obdobjem izplačevanja n let enaka:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:n\rceil} = \bar{a}_{\overline{xy}:n\rceil}. \tag{1.76}$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \; {}_k p_{\overline{xy}.} \tag{1.77}$$

[3] Sedanjo normalizirano vrednost enkratne neto premije za u let odloženo postnumerandno dosmrtno rento v zveznem in diskretnem času izračunamo:

$$_{u|}\bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_{\overline{xy}} - \bar{a}_{\overline{xy}:u\rceil}, \tag{1.78}$$

medtem ko sedanjo normalizirano vrednost enkratne neto premije za u let odloženo prenumerandno dosmrtno rento v zveznem in diskretnem času dobimo z enačbo:

$$_{u|}\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{\overline{xy}:u\rceil}. \tag{1.79}$$

1.5.3 Vdovska renta

Pri izpeljavi enačbe vdovske življenjske rente privzemimo, da obravnavamo moža, starega x let (1. oseba), ter njegovo ženo, staro y let (2. oseba). V primeru moževe smrti se prične ženi izplačevati renta. Če bi vlogi zakoncev obrnili, bi dobili rento, ki bi jo prejemal mož. V tem primeru bi bilo pričakovati precej manj izplačil, saj v povprečju ženske živijo dlje od moških.[23] Zaradi tega empiričnega dejstva je tovrstna oblika rente tržno nezanimiva, vendar pa je s teoretičnega vidika povsem ekvivalentna vdovski renti in kot tako jo bomo tudi obravnavali. Sedanjo normalizirano vrednost enkratne neto premije postnumerandne vdovske rente v zveznem in diskretnem času izračunamo:

$$\bar{a}_{x|y} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_{xy}^{02} dt.^{24} \tag{1.80}$$

$$\bar{a}_{x|y} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\ {}_kp_{xy}^{02}. \tag{1.81}$$

Sedanja normalizirana vrednost enkratne neto premije prenumerandne zvezne in diskretne vdovske rente:

$$\ddot{a}_{x|y} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\ {}_tp_{xy}^{02} dt.^{25} \tag{1.82}$$

$$\ddot{a}_{x|y} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_{xy}^{02}. \tag{1.83}$$

2 RELEVANTNOST ODVISNOSTI TVEGANJ SMRTNOSTI

Že uvodoma smo izpostavili empirične študije, ki so jasno pokazale, da so preostale življenjske dobe zakoncev medsebojno odvisne. Njihove ugotovitve nasprotujejo tradicionalni predpostavki, ki jo privzema teorija pogojenosti izplačil s stanjem več življenj (angl. *multiple life contingencies theory*). Ta nekritično predpostavlja medsebojno neodvisnost preostalih življenjskih dob zavarovancev. Ob tej predpostavki aktuarji pogosto tudi računajo premije za zavarovalniške produkte, ki so vezani na stanje več življenj. V tem primeru verjetnost skupnega preživetja dobimo s preprostim množenjem verjetnosti preživetja posameznih oseb. S tem je potreba po ocenjevanju večrazsežne porazdelitvene funkcije odpravljena, pri čemer se matematični postopek poenostavi do nivoja ocenjevanja preostale življenjske dobe ene osebe. To omogoča pripravnost te predpostavke, saj je matematika ob upoštevanju soodvisnosti tveganj bistveno manj elegantna in težje razumljiva. Preproste rešitve se praviloma veliko hitreje in lažje ustalijo prav zaradi svoje preglednosti in nazornosti, kar na koncu omogoča lažje sprejemanje odločitev. Poleg tega

[23] V tem primeru je aktuarska notacija vdovčeve rente enaka: $\bar{a}_{y|x}$.

[24] Izpeljava vdovske rente da tudi drugačno formulacijo: $\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$, kar je rezultat produkta: ${}_tp_y(1 - {}_tp_x)$.

[25] Prenumerandno vdovsko rento lahko izračunamo tudi kot: $\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

vsebujejo podatki zavarovalnic običajno le informacije o robnih porazdelitvah tveganj, ne pa tudi o večrazsežnih.

Tveganja oseb ne morejo biti medsebojno neodvisna, če na njih vplivajo dejavniki, katerih vir so skupno okolje in socialne razmere. Po obilnem deževju vodotoki rek narastejo in povzročajo poplave, ki predstavljajo skupni vir tveganja osebam, ki prebivajo na ogroženem področju. Enako velja za udeležence prometa v slabih vremenskih razmerah – verjetnost prometnih nesreč se bo za vse udeležence povečala. Ljudje, ki prebivajo v večstanovanjskih objektih, so izpostavljeni več skupnim tveganjem osebne varnosti v primerjavi s tistimi, ki živijo v svojih hišah. V kolikor smo ljudje izpostavljeni istemu viru tveganj, je nerazumno pričakovati, da bodo naša tveganja medsebojno neodvisna.

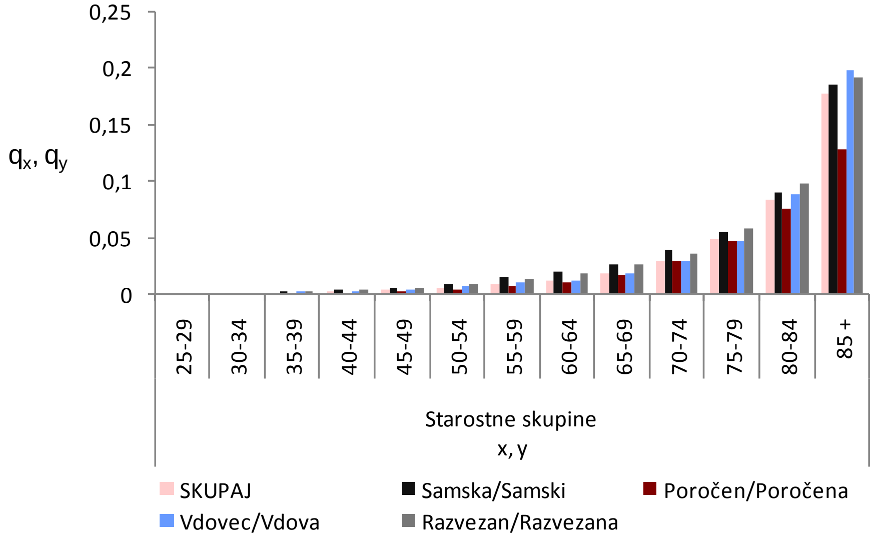
Podatki v svetu kažejo, da je trajanje življenja zakoncev pozitivno povezano. Zakonski par si namreč deli skupno okolje prebivanja, ima enak življenjski standard, življenjski slog, najbrž pa pri obeh obstaja izoblikovan selekcijski mehanizem, ki ju je povezal. V tej zvezi Parkes, Benjamin in Fitzgerald (1969) že leta nazaj ugotavljajo povečano stopnjo umrljivosti oseb, ki so izgubile partnerja. Kasneje enako ugotavljajo Ward (1976), Jagger in Sutton (1991). Da bi preverili ali lahko ugotovitve tujih študij privzamemo oziroma posplošimo na Slovenijo, bomo izvedli lastno analizo umrljivosti prebivalcev po starostnih skupinah v odvisnosti od zakonskega stanu. Na podlagi dobljenih rezultatov se bomo odločili, ali prvo hipotezo magistrskega dela sprejeti ali zavrniti. Razpoložljive podatke o umrlih in živih osebah po starostnih skupinah za obdobje 2000–2007 glede na zakonski stan[26] prikazujemo v Prilogi 10 in Prilogi 11.

2.1 Empirična analiza umrljivosti prebivalcev v Sloveniji glede na zakonski stan

Slika 6 prikazuje povprečne stopnje umrljivosti moških in žensk v trinajstih starostnih razredih v odvisnosti od zakonskega stanu. Stopnje umrljivosti oseb iz posameznih starostnih razredov za posamezno leto dobimo z deljenjem števila umrlih v tem letu d_x (d_y) s številom živih oseb na začetku obdobja l_x (l_y).[27] [28] Povprečno stopnjo umrljivosti q_x (q_y) nato dobimo z izračunom srednje vrednosti letnih stopenj smrtnosti po posameznih razredih. Na Sliki 6 lahko opazimo, da dosegajo samske in ovdovele osebe v vseh starostnih razredih relativno visoke stopnje umrljivosti, medtem ko poročene osebe najnižje.

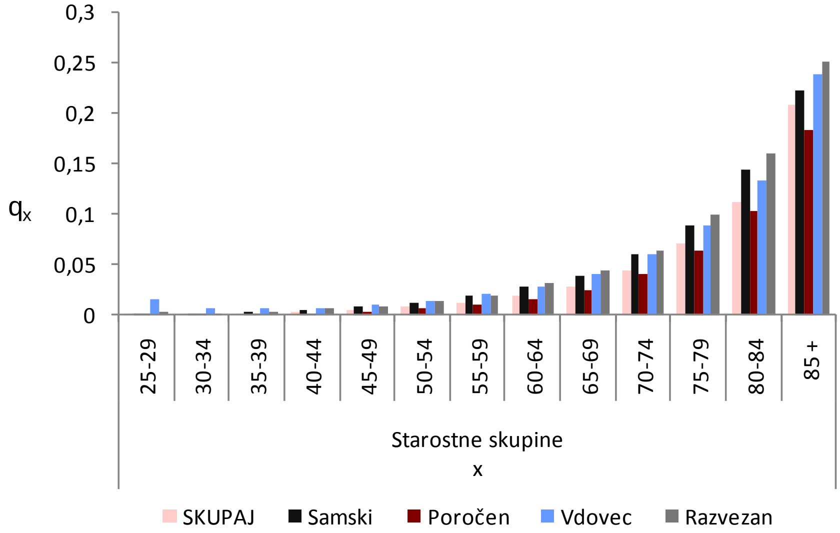
[26] Zakonski stan je pravno stanje, ki opredeljuje položaj osebe do drugih oseb. Glede na to je lahko samska, poročena, ovdovela ali razvezana.
[27] $d_x = l_x - l_{x+1} = l_x(1 - p_x) = l_x q_x$: število umrlih v opazovanem obdobju pri določeni starosti, tj. od x let do x + 1 let.
[28] l_x: število oseb od vseh novorojenih v neki generaciji (l_0), ki so doživele starost x let.

Slika 6: Povprečna stopnja umrljivosti moških in žensk v Sloveniji v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan



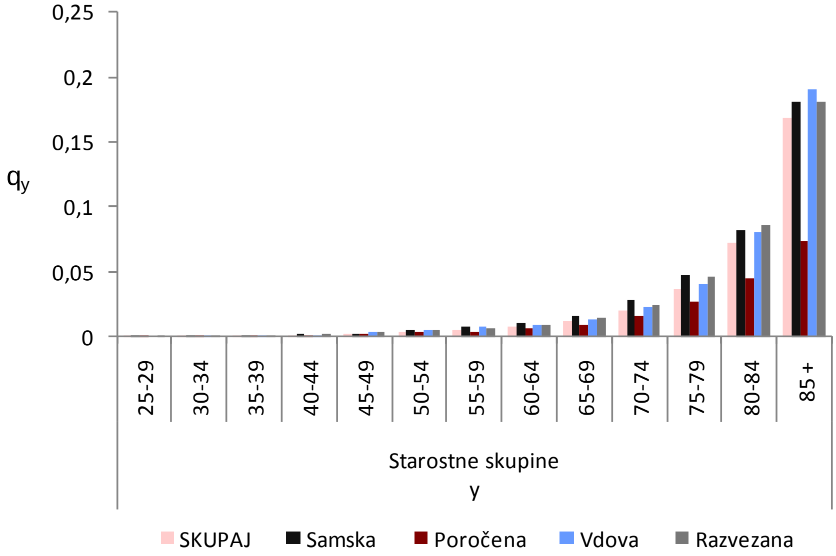
Iz Slike 7 je razvidno, da največje stopnje smrtnosti v vseh starostnih kategorijah dosegajo vdovci, razvezani in samski moški, ki presegajo povprečne stopnje smrtnosti moške populacije v vseh starostnih razredih. Najnižje stopnje smrtnosti dosegajo poročeni moški.

Slika 7: Povprečna stopnja umrljivosti moških v Sloveniji v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan



Pri osebah ženskega spola ugotavljamo (glej Sliko 8), da najvišje stopnje umrljivosti dosegajo vdove in samske ženske. Te stopnje presegajo povprečne stopnje umrljivosti ženske populacije v vseh starostnih kategorijah. Najnižje stopnje smrtnosti opažamo pri poročenih ženskah. Zanimivo je tudi to, da so stopnje smrtnosti vdov, razvezanih in samskih žensk po starostnih skupinah bližje skupaj kot pri moških. Poleg tega je opaziti, da so stopnje umrljivosti vdovcev večje od vdovskih, kar je posledica tega, da so tudi stopnje umrljivosti moških v splošnem večje od ženskih.

Slika 8: Povprečna stopnja umrljivosti žensk v Sloveniji v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan



V Tabeli 1 vrednostno prikazujemo povprečne stopnje smrtnosti moških in žensk po starostnih skupinah, s čimer omogočimo njihovo bolj natančno primerjavo v odvisnosti od zakonskega stanu.

Tabela 1: Povprečne stopnje umrljivosti moških in žensk v Sloveniji po starostnih skupinah glede na zakonski stan v obdobju 2000–2007

Starostni razred	SKUPAJ		POROČENI		SAMSKI		VDOVELI		RAZVEZANI	
	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske
25-29	0,001162	0,000282	0,000531	0,000179	0,001319	0,000339	0,015625	0,000000	0,002616	0,000166
30-34	0,001242	0,000438	0,000617	0,000321	0,001786	0,000569	0,005876	0,000394	0,001618	0,000961
35-39	0,001782	0,000682	0,001017	0,000524	0,002927	0,001002	0,006372	0,001301	0,003784	0,001116
40-44	0,002953	0,001194	0,001806	0,000969	0,005194	0,001637	0,005988	0,001269	0,005696	0,001919
45-49	0,004984	0,002158	0,003646	0,001916	0,007713	0,002355	0,009224	0,003588	0,008757	0,003059
50-54	0,007975	0,003589	0,006436	0,003096	0,011565	0,004724	0,013652	0,005681	0,013615	0,004575
55-59	0,012189	0,004985	0,010154	0,004123	0,019694	0,007635	0,021277	0,007154	0,019754	0,006979
60-64	0,018151	0,007121	0,015804	0,005936	0,028082	0,010385	0,027468	0,009333	0,031708	0,009292
65-69	0,027654	0,011408	0,024801	0,009163	0,039453	0,015973	0,040716	0,013961	0,043041	0,015301
70-74	0,044461	0,020503	0,040654	0,016364	0,060466	0,028787	0,059214	0,023062	0,063167	0,024213
75-79	0,069967	0,037202	0,064008	0,027181	0,087895	0,047327	0,088286	0,040917	0,099429	0,046763
80-84	0,112396	0,072827	0,102162	0,045187	0,142976	0,082576	0,133103	0,081226	0,160185	0,085669
85 +	0,207598	0,168774	0,183422	0,073135	0,223153	0,181187	0,238476	0,190735	0,250820	0,180847

Iz Tabele 1 so opazne razlike med smrtnostjo moškega in ženskega dela populacije. Za ta pojav obstaja več razlogov:

[1] Izkazalo se je, da so fantje za nevarnosti ob rojstvu, različne okužbe in nesreče v zgodnjih otroških letih bolj dovzetni od deklet.
[2] Med fanti je prisotno več mladostniškega nasilja. Prav tako so v povprečju bolj naklonjeni tveganju v povezavi z načinom preživljanja prostega časa (npr. tvegane športne dejavnosti, prestopniško obnašanje ...), kar ima za posledico višje povprečne stopnje umrljivosti.
[3] Odrasli moški so glede zdravja bolj občutljivi od žensk.

Zaradi teh razlik je potrebno uporabljati ločene tablice umrljivosti za moške in ženske vsaj po starosti, če že nimamo tablic za bolj homogene podskupine.

2.1.1 Povprečna starost moških in žensk ob smrti

V Tabeli 2 prikazujemo povprečne vrednosti, standardne odklone in koeficiente variabilnosti starosti umrlih moških ter žensk glede na zakonski stan. Ker je zadnji starostni razred odprt (glej Prilogo 10), smo pri njem upoštevali srednjo vrednost 95 let. Povprečno starost umrlih oseb, v odvisnosti od zakonskega stanu, izračunamo na podlagi podatkov za starosti oseb višje od 25 let, s čimer dobimo medsebojno primerljivost rezultatov. Izračun in primerjava sta namreč smiselna na podatkih, ko je določena vrsta zakonskega stanu osebi že dosegljiva (npr. osebe, ki so mlajše od 15 let, se ne morejo poročiti in zato tudi ne ovdoveti ali se razvezati). Povprečno starost umrlih oseb glede na zakonski stan, na podlagi frekvenčne porazdelitve podatkov izračunamo:

$$E[X] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{13} f_k w_k, \tag{2.1}$$

pri čemer z w_k označujemo srednjo starost k-tega starostnega razreda, s f_k število oseb v k-tem starostnem razredu, medtem ko z N število vseh oseb: $N = \sum_{k=1}^{13} f_k$.

Standardni odklon starosti umrlih oseb določenega zakonskega stanu, iz frekvenčno porazdeljenih podatkov, izračunamo s formulo (Arh, 2001, str. 64):

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\sum_{k=1}^{13} f_k w_k^2 - \frac{\left[\sum_{k=1}^{13} f_k w_k\right]^2}{N}\right]}, \tag{2.2}$$

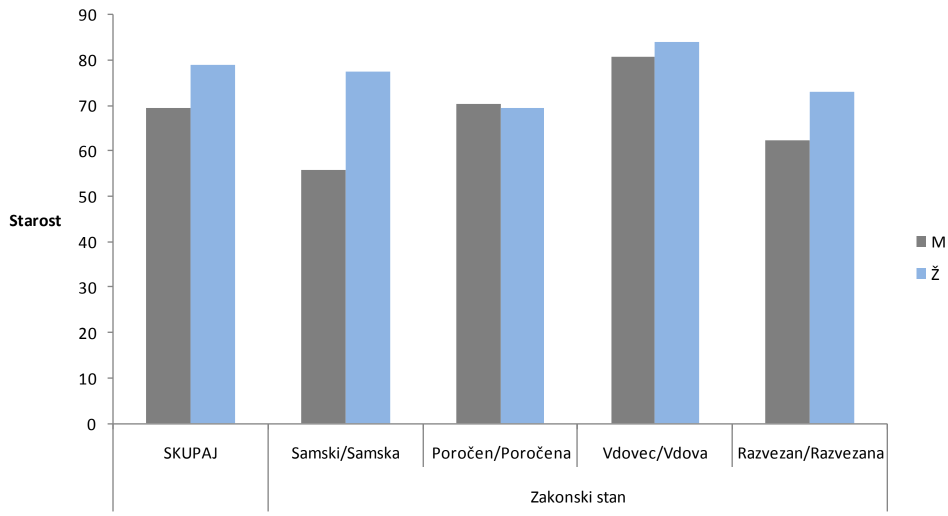
pri čemer so definicije oznak spremenljivk enake kot pri enačbi (2.1). Relativno mero variabilnosti, tj. koeficient variacije oziroma variabilnosti, izračunamo s kvocientom enačb (2.2) in (2.1). Kadar je koeficient variabilnosti večji od 0.2, že lahko govorimo o občutnih razlikah med opazovanimi enotami. Tedaj je srednja vrednost manj zanesljiv predstavnik vrednosti enot opazovanja.

Tabela 2: Opisne statistike starosti ob smrti za moške in ženske v Sloveniji v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan

Starost ob smrti	SKUPAJ		POROČENI		SAMSKI		OVDOVELI		RAZVEZANI	
	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske	Moški	Ženske
Povprečna vrednost	69,48	78,93	70,39	69,40	55,90	77,48	80,75	84,10	62,38	73,03
Standardni odklon	15,10	14,21	12,81	13,80	16,62	16,89	11,59	10,59	13,06	15,20
Koeficient variabilnosti	0,22	0,18	0,18	0,20	0,30	0,22	0,14	0,13	0,21	0,21

Slika 9 grafično ponazarja povprečno starost umrlih moških in žensk v Sloveniji v odvisnosti od zakonskega stanu. Poročeni moški v povprečju umirajo starejši od poročenih žensk, medtem ko je v vseh ostalih primerih nasprotno. Razlika je relativno majhna in na prvi pogled presenetljiva.[29] Podatki namreč kažejo, da je povprečna starost v kateri umirajo poročene ženske za več kot 9 let nižja v primerjavi s povprečjem ženske populacije skupaj. Prav nasprotno pa je starost v kateri v povprečju umirajo poročeni moški višja od povprečja moške populacije skupaj.

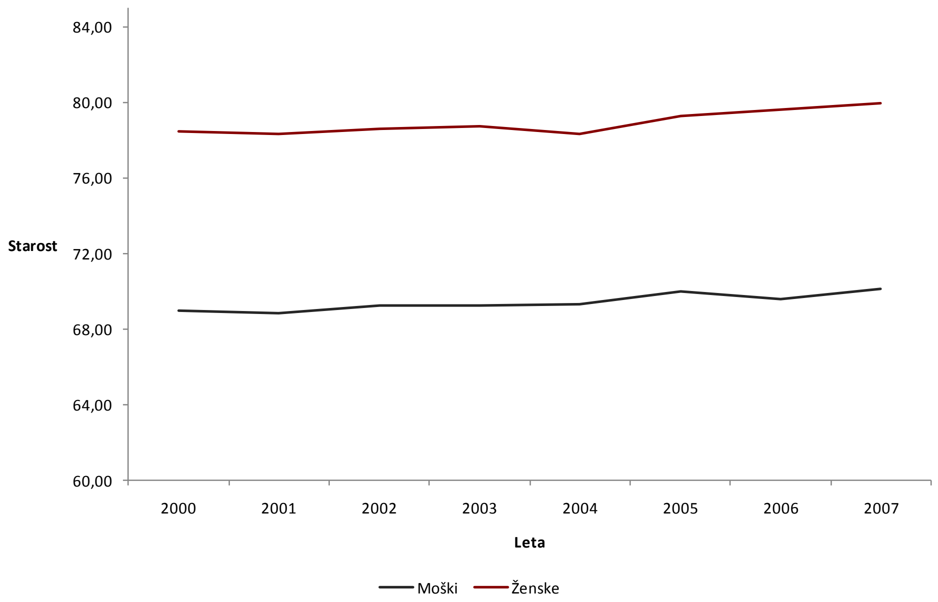
Slika 9: Povprečna starost umrlih moških in žensk v Sloveniji v obdobju 2000–2007glede na zakonski stan



Na Sliki 10 vidimo, kako se je gibala povprečna starost umrlih Slovencev in Slovenk v letih od 2000 do 2007. Opaziti je rahel trend v zviševanju povprečne starosti ob smrti pri obeh spolih, pri čemer razlika med spoloma ne kaže trenda zmanjševanja.

[29] Podrobna analiza podatkov o umrlih poročenih moških in ženskah razkrije (glej Prilogo 10), da število smrti žensk v starostnih skupinah nad 55 let manj variira v primerjavi z moškimi. Zato so podatki po starostnih skupinah bolj enakomerno obteženi, kar privede do relativno nizke povprečne starosti v kateri umirajo poročene ženske.

Slika 10: Gibanje povprečne starosti moških in žensk ob smrti v Sloveniji v obdobju 2000–2007



Rast pričakovane življenjske dobe oseb v aktuarski literaturi ni neopažen in je pravzaprav že vrsto let predmet matematičnega modeliranja. Modeliranje dolgoživosti oseb (angl. *longevity modelling*) je v zadnjih letih postalo 'modno' področje raziskovanja v aktuarski znanosti (Pitacco et al., 2009; Luciano, Spreeuw & Vigna, 2008).

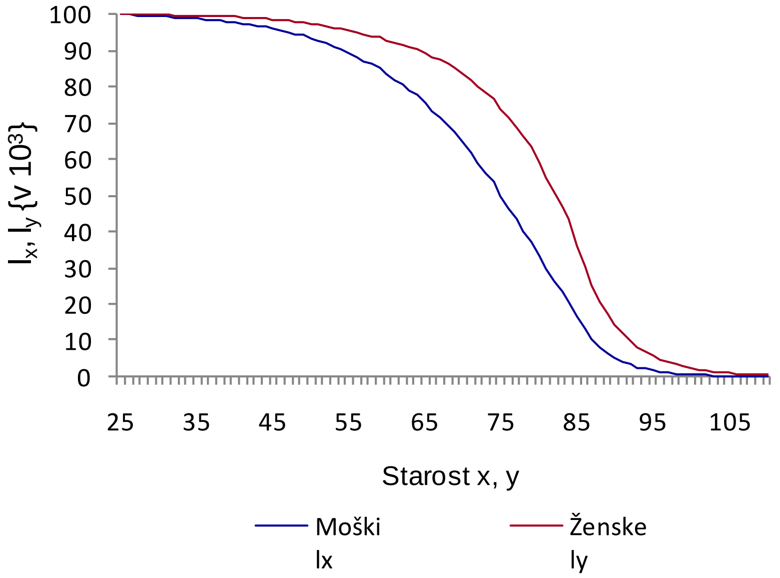
Norberg (2009) ideji stohastičnega modeliranja stopenj umrljivosti (angl. *forward rate mortality modelling*), ki je bila s finančnega področja analize prenešena v aktuarstvo, ne napoveduje prihodnosti. Meni, da je že v osnovni definiciji vgrajena arbitrarnost, ki ne omogoča posplošitve koncepta v bolj kompleksnih modelih. Med drugim navaja, da je pojem 'stohastičnost' redundanten, saj je že v klasičnem modelu preživetja preostala življenjska doba osebe slučajna spremenljivka. Stohastično modeliranje, v kontekstu življenjskega cikla posameznika, pa je omejeno že s tem, ker v ustrezni meri ne upošteva dejavnikov umrljivosti, ki so se v preteklosti izkazali za relevantne.

Do sedaj smo predstavili izračunane stopnje umrljivosti in povprečne starosti umrlih moških in žensk v odvisnosti od zakonskega stanu. Rezultati nakazujejo, da bi bilo smiselno zaradi večje nazornosti izsledkov analize vpliv zakonskega stanu na stopnje umrljivosti moških in žensk proučiti ter prikazati v časovnem razvoju s funkcijo števila živih oseb l(x). Zato v nadaljevanju natančneje prikazujemo gibanje jakosti umrljivosti moških in žensk s starostjo v odvisnosti od zakonskega stanu.

2.1.2 Jakost umrljivosti moških in žensk

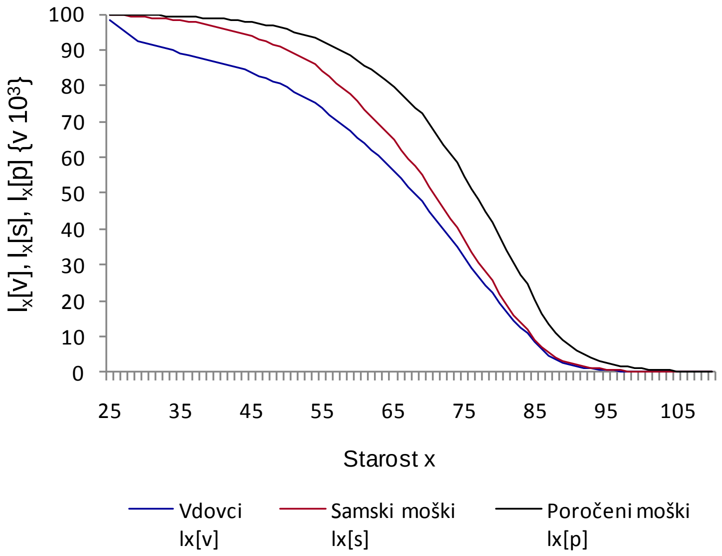
Že v prvem poglavju razdelka 1.2 smo izpeljali in ilustrirali koncept funkcije števila živih oseb v odvisnosti od starosti (glej Sliko 1). Prvi odvod te funkcije nam pri poljubno izbrani starosti x zagotavlja informacijo o intenziteti umiranja. Ta proces umiranja moških in žensk prikazuje Slika 11. Ob tem velja poudariti, da je število l(0) = 100.000, ki predstavlja izhodiščno vrednost funkcije l(x) na ordinatni osi, skonstruirano na teoretični osnovi. Zato vrednosti funkcije l(x) oziroma l(y) razlagamo v obliki razmerja z verjetnostjo p, da bo neka opazovana oseba živela od starosti x do starosti x + 1, če je $l_{x+1}/l_x = p_x$. Slika 11 tako prikazuje, da je proces umiranja moških intenzivnejši. Ta ugotovitev je skladna z našo prejšnjo, ko smo izračunali, da je povprečna starost moških ob smrti nižja od ženske.

Slika 11: Funkciji l(x) moških in l(y) žensk v odvisnosti od starosti



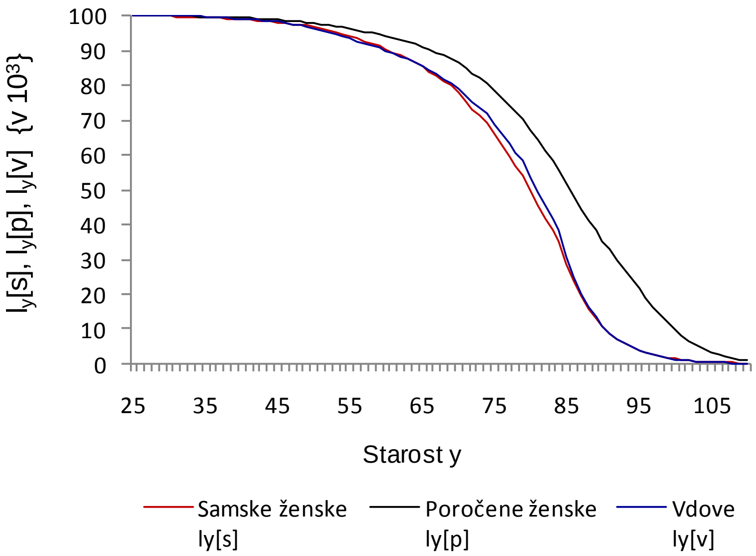
Slika 12 prikazuje, da ovdoveli moški hitreje umirajo v primerjavi s samskimi in poročenimi. Ovdovele moške izguba življenjske sopotnice prizadene in pogosto poslabša njihove življenjske razmere, zaradi česar se soočajo z najvišjimi stopnjami smrtnosti. Razloge, da je intenzivnost umiranja samskih moških relativno nižja, gre verjetno iskati v tem, da so le-ti že vajeni samostojnega življenja. Jakost umrljivosti poročenih moških je najnižja, kar je najverjetneje posledica ustaljenega načina življenja.

Slika 12: Funkcije l(x) ovdovelih, samskih in poročenih moških v odvisnosti od starosti



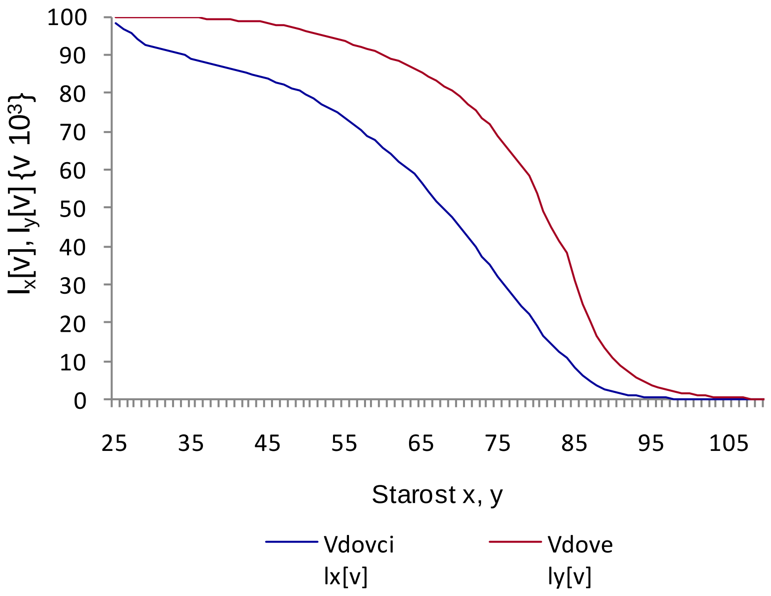
Iz Slike 13 je razvidno, da je jakost umrljivosti samskih in ovdovelih žensk malone enaka. Rdeča in modra krivulja se pretežno prekrivata. Kot kažejo rezultati, izgubo partnerja ženske bolje prenašajo kot moški (za primerjavo glej Sliko 12). To ne preseneča, saj so običajno prav ženske tiste, ki so doma bolj samostojne. Prav tako lahko opazimo, kar velja tudi za moške, da ovdovele ženske umirajo hitreje v primerjavi s poročenimi.

Slika 13: Funkcije l(y) samskih, poročenih in ovdovelih žensk v odvisnosti od starosti



Zanimivo, a ne presenetljivo ugotovitev ilustrira Slika 14, ki prikazuje, da je jakost umrljivosti ovdovelih moških večja od ženske. Resda moški tudi sicer umirajo hitreje, a krivulji še podrobneje razkrijeta, da nenadno samostojno življenje moški slabše prenašajo od žensk. Čeprav se profil umrljivosti žensk po izgubi partnerja ne spremeni občutno, to za moške ne moremo trditi.

Slika 14: Funkciji l(x) ovdovelih moških in l(y) ovdovelih žensk v odvisnosti od starosti



Na podlagi rezultatov analize umrljivosti moških in žensk v Sloveniji za obdobje 2000–2007, lahko sklenemo, da zakonski stan spreminja profil umrljivosti oseb, pri čemer je ta vpliv pri moških bistveno bolj izražen kot pri ženskah.

2.2 Pomen implikacij soodvisnosti stopenj smrtnosti za aktuarske izračune

Na podlagi tujih empiričnih študij ter rezultatov lastne empirične analize umrljivosti Slovencev ugotovimo, da je predpostavka neodvisnosti preostalih življenjskih dob povezanih oseb oddaljena od realnosti. Pri tem se postavlja vprašanje: ali so zavarovalnice finančno ogrožene, ko prodajajo zavarovalniške produkte, vezane na več življenj, po premijah, izračunanih ob predpostavki neodvisnosti tveganj smrtnosti? Odgovor, kot ugotavljajo avtorji Denuit et al. (2001), je pritrdilen. Enako tudi Frees, Carriere in Valdez (1997). Ti pokažejo, da ima odvisnost stopenj smrtnosti potencialno močan vpliv na vrednost rent in zavarovanj, ki so vezana na več življenj.

Empirično dejstvo je, da poročeni moški in ženske živijo dlje, medtem ko prav zaradi te okoliščine v primeru izgube partnerja v povprečju umirajo mlajši. V prvem primeru so posledice predpostavke neodvisnosti za zavarovalnico negativne – premija, ki jo zaračuna zakonskemu paru, je prenizka, saj predpostavka neodvisnosti v tem primeru podcenjuje preostalo življenjsko dobo poročenih zavarovancev. V drugem primeru pa bodo ovdoveli zavarovanci na slabšem, medtem ko bo zavarovalnica na boljšem, saj predpostavka neodvisnosti precenjuje pričakovano življenjsko dobo vezanih življenj – ovdovele osebe umirajo prej kot predpostavlja zavarovalnica v svojih izračunih.

Če zavarovanci vedo, da se njihov profil umrljivosti spreminja pod vplivom preostale življenjske dobe partnerja, potem rentnega zavarovanja po ceni, ki tega ne upošteva, ne bodo pripravljeni kupiti.[30] Tako izračunana premija zavarovalnici ne more dolgo služiti, saj je enkrat pod pritiskom neugodnega finančnega rezultata, medtem ko je drugič neprivlačna in nekonkurenčna v očeh zavarovancev in posledično ne more izravnavati nevarnosti. Zato je s poslovnega in strokovnega vidika merjenje ter obvladovanje finančnih učinkov ustaljenih aktuarskih izračunov premij za zavarovalnico izjemnega pomena.

3 MODELI ODVISNOSTI

V prvem poglavju smo izpeljali klasičen model preživetja, ki smo ga v nadaljevanju razvili v model preživetja dveh oseb. Nato smo poleg spoznanj tujih empiričnih študij izvedli lastno analizo umrljivosti oseb v Sloveniji v odvisnosti od zakonskega stanu. Statistika umrljivosti je pokazala, da zakonski stan spreminja profil umrljivosti oseb v smeri pozitivne medsebojne odvisnosti preostalih življenjskih dob – poročene osebe v povprečju živijo dlje, medtem ko ovdovele v povprečju umirajo pri nižjih starostih. Ustaljena predpostavka neodvisnosti, pri vrednotenju življenjskih rent, vezanih na več življenj, navedenih ugotovitev ne upošteva. Če želimo ta učinek medsebojne odvisnosti v izračunih upoštevati, imamo dve možnosti:

[1] skonstruirati moramo večdimenzionalne tablice umrljivosti, v katerih bodo stopnje umrljivosti upoštevale tudi zakonski stan in ne zgolj pristopno starost osebe;

[2] izbrati ali izdelati moramo ustrezen matematični model, ki bo empirično ugotovljeno soodvisnost med preostalimi življenjskimi dobami zavarovancev ustrezno repliciral.

Ker namen našega dela ni izdelava rentnih tablic umrljivosti, bomo k problematiki pristopili modelsko. V nadaljevanju bomo predstavili osnovne modele odvisnosti, ki so relevantni za področje vrednotenja rentnih zavarovanj, vezanih na več življenj. Še prej pa velja spoznati temeljne analitične koncepte pozitivne soodvisnosti med slučajnimi spremenljivkami. Ker korelacijski koeficient predstavlja mero linearne povezanosti med slučajnimi spremenljivkami, je preprosto premalo natančen za potrebe naše analize, kar bomo predstavili nekoliko kasneje.

Obstaja več konceptov pozitivne povezanosti med pari slučajnih spremenljivk. Predstavili bomo dva. Imamo osebi, stari x in y let, s preostalo življenjsko dobo $T(x)$ in $T(y)$.

[30] Glej: Brown in Poterba (2000), ki sta proučevala odzivnost povpraševanja poročenih parov na aktuarsko pravično ovrednoteno ponudbo rentnih zavarovanj na hkratni življenji.

PQD – soodvisnost, ponazorjena s prvim kvadrantom koordinatnega sistema (angl. *positive quadrant dependent*)

Če sta T(x) in T(y) PQD soodvisni, potem je njun odnos definiran (Norberg, 1989, str. 243):

$$P\left[T(x) > t_x, T(y) > t_y\right] \geq P[T(x) > t_x]P\left[T(y) > t_y\right], \tag{3.1}$$

pri čemer zasedajo slučajne spremenljivke realne vrednosti na intervalu: $0 < t_x, t_y < \infty$. Ta definicija je glede spremenljivk simetrična, zato velja PQD[T(x),T(y)] = PQD [T(y),T(x)]. PQD soodvisnost lahko definiramo tudi drugače:

$$P\left[T(x) > t_x | T(y) > t_y\right] \geq P[T(x) > t_x]. \tag{3.2}$$

Interpretacija je na dlani. Daljša preostala življenjska doba žene izboljšuje obete za moževo preživetje – večje vrednosti T(x) so povezane z večjimi vrednostmi T(y) in nasprotno.

Dhaene et al. (2000, str. 27–28) izpeljejo v okviru PQD nekatere, za našo analizo pomembne, relacije. Ob privzetku, da sta robni porazdelitveni funkciji T(x) in T(y) dani, so izpeljali relacijo med PQD [T(x),T(y)] in [T^{ind}(x),T^{ind}(y)], ki označuje medsebojno neodvisnost med T(x) in T(y). Če imata dvorazsežni preostali življenjski dobi [T(x),T(y)] in [T^{ind}(x),T^{ind}(y)] enaki robni porazdelitveni funkciji in če sta [T(x),T(y)] PQD in [T^{ind}(x),T^{ind}(y)] medsebojno neodvisni, potem veljajo naslednje neenačbe za vsako nepadajočo funkcijo *f* :

$$E\left[f\{T_{xy}^{ind}\}\right] \leq E\left[f\{T_{xy}\}\right], \tag{3.3}$$

$$E\left[f\{T_{\overline{xy}}\}\right] \leq E\left[f\{T_{\overline{xy}}^{ind}\}\right], \tag{3.4}$$

pri čemer T_{xy}^{ind} označuje medsebojno neodvisnost T(x) in T(y) pri stanju hkratnih življenj, medtem ko $T_{\overline{xy}}^{ind}$ predstavlja neodvisnost T(x) in T(y) pri stanju zadnjega življenja.

Njihove ugotovitve imajo za nas pomembne posledice: PQD soodvisnost med T(x) in T(y) pomeni, da obstaja večja verjetnost, da obe spremenljivki dosežeta večji vrednosti kot v primeru, ko sta le-ti medsebojno neodvisni. Če je funkcija *f* nenaraščajoča, potem veljajo ravno obrnjene neenačbe (Dhaene et al., 2000, str. 28):

$$E\left[f\{T_{xy}^{ind}\}\right] \geq E\left[f\{T_{xy}\}\right], \tag{3.5}$$

$$E\left[f\{T_{\overline{xy}}\}\right] \geq E\left[f\{T_{\overline{xy}}^{ind}\}\right]. \tag{3.6}$$

Pravi aktuarski problem, ki ga neenačbe razkrivajo, je, da je višina premije rentnega zavarovanja na hkratni življenji nižja v primerjavi z vrednostjo, ki jo dobimo ob predpostavki neodvisnosti (glej neenačbo 3.5). Pri rentnem zavarovanju na zadnje življenje pa je premija ob predpostavki neodvisnosti podcenjena (glej neenačbo 3.6).

Podobno je v primeru PQD [T(x),T(y)], ko je premija tovrstnega zavarovanja ob predpostavki neodvisnosti podcenjena (glej neenačbo 3.3), medtem ko je pri rentnem zavarovanju na zadnje življenje precenjena (glej neenačbo 3.4). To pa je tudi osrednji problem, ki ga obravnavamo v magistrskem delu.

AS: povezanost (angl. *association*)

Spremenljivki T(x) in T(y) sta povezani AS[T(x),T(y)] natanko takrat, ko velja (Norberg, 1989, str. 244):

$$Cov[g\{T(x),T(y)\},h\{T(x),T(y)\}] \geq 0, \tag{3.7}$$

za realne vrednosti funkcij g in h z naraščajočimi vrednostmi argumentov T(x) in T(y). Prav tako je tudi definicija AS simetrična glede spremenljivk. Velja: AS[T(y),T(x)].

Pokažimo sedaj, da AS implicira PQD: $AS[T(x),T(y)] \Rightarrow PQD[T(x),T(y)]$. Če funkciji g in h zapišemo v obliki, ko ima funkcija indikacije slučajnega dogodka vrednost 1: $g[T(x),T(y)] = 1_{(t_x,\infty)}T(x) = 1[T(x) > t_x]$ in $h[T(x),T(y)] = 1_{(t_y,\infty)}T(y) = 1[T(y) > t_y]$, potem lahko izraz (3.7) zapišemo kot: $Cov[1(T(x) > t_x), 1(T(y) > t_y)] \geq 0$, kar pa je pravzaprav le nekoliko drugače zapisana neenačba (3.1).

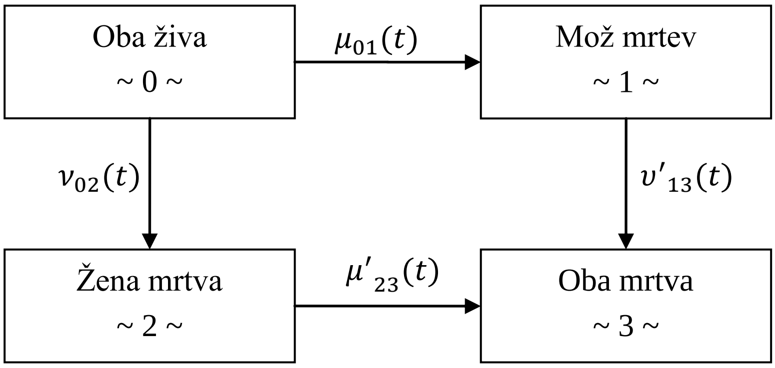
3.1 Markovski verižni model za zakonski par

Markovski verižni model štirih stanj smo v splošni različici že razvili v razdelku 1.5, s katerim smo si pomagali pri izpeljavi enačb za vrednotenje življenjskih rent. V kontekstu zakoncev pa ga je prvi predstavil Norberg (1989). Z njim je želel sistematično opisati vpliv zakonskega stanu na prehodne jakosti umrljivosti moža in žene, ki se v času premikata med stanji tega stohastičnega procesa. Prikažimo model za zakonski par v njegovi izvirni različici.

Privzemimo, da je jakost umrljivosti moža pri starosti x + t let, ko je ta še poročen, enaka $\mu_{01}(t)$ in μ'_{23}(t), ko je ta vdovec. Podobno storimo za ženo: njena jakost umrljivosti pri strosti y + t je enaka $\nu_{02}(t)$, če je poročena in υ'_{13}(t), ko je vdova. V okviru teh dveh predpostavk je prihodnji razvoj zakonskega stanu x in y let starih zakoncev Markovski verižni stohastični proces s stanji ter z jakostjo prehoda med njimi, kot jih prikazuje Slika 15.[31]

[31] Pri tem možnosti za ločitvene postopke med zakonci zanemarimo.

Slika 15: Markovski verižni model za življenji zakonskega para



Vir: R. Norberg, Actuarial Analysis of Dependent Lives, 1989, str. 246.

V kontekstu proučevanja soodvisnosti preostalih življenjskih dob v odvisnosti od zakonskega stanu si je včasih lažje postaviti nasprotno vprašanje, in sicer v katerih primerih bi bile te v Markovskem modelu neodvisne, tj. ko verjetnosti prehodov med stanji ne bi bile pogojene z zakonskim stanom. Norberg (1989, str. 247–248) dokaže, da tedaj veljata naslednji identični enakosti:

$$\mu_{01}(t) \equiv \mu'_{23}(t) \equiv \mu_{x+t}. \tag{3.8}$$

$$\nu_{02}(t) \equiv \upsilon'_{13}(t) \equiv \nu_{y+t}. \tag{3.9}$$

Prav tako je očitno, da sta spremenljivki T(x) in T(y) PQD soodvisni natanko takrat, ko so stopnje umrljivosti odvisne od zakonskega stanu. Tedaj bodo veljale naslednje neenačbe:

$$\mu_{01}(t) \leq \mu'_{23}(t). \tag{3.10}$$

$$\nu_{02}(t) \leq \upsilon'_{13}(t). \tag{3.11}$$

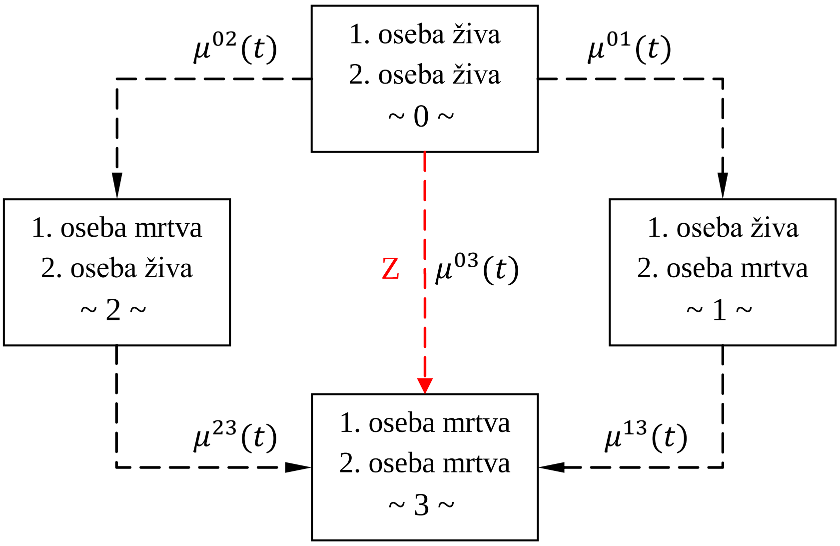
Implikacije zgornjega modela lahko ponazorimo na primeru vdovske rente, za katero se tudi uporablja. Njena značilnost je ta, da se v primeru moževe smrti ženi prične izplačevati renta. Iz Slike 15 je razvidno, da do tovrstnih izplačil prihaja v stanju 1. Tedaj bi vztrajanje pri predpostavki medsebojne neodvisnosti preostalih življenjskih dob zakoncev vodilo do precenjenosti enkratne neto premije. Ob upoštevanju soodvisnosti bi dobili nižjo enkratno neto premijo. To je razumljivo, saj je ob predpostavki soodvisnosti zavarovalna polica dalj časa v stanju 0, tj. daljši čas, ko ni izplačil, in krajši čas v stanju 1, ko je manj potrebnih izplačil.

Prednost Markovskega modela je ta, da omogoča izračun natančne vrednosti premije. Ta vrednost lahko nato služi aktuarjem oziroma odločitvenim organom zavarovalnice kot referenca za oblikovanje premijskih diskontov ali ovrednotenje prihrankov predpostavke neodvisnosti s testom dobičkonosnosti (Denuit et al., 2001, str. 29).

3.2 Model skupnega šoka

Model skupnega šoka (angl. *common shock model*) je klasičen model povezanih življenj. Ti modeli predpostavljajo, da je soodvisnost življenj oseb pogojena z zunanjim šokom, ki je lahko naravnega izvora ali nesreče. Ključno je, da ta šok povzroči sočasno smrt oseb. Tipični primeri, na katerih bi lahko aplicirali model so: potres, avtomobilska ali letalska nesreča, smrtonosne pandemije itn. Model skupnega šoka lahko predstavimo kot Markovski verižni stohastični proces z eno pomembno modifikacijo, ki jo prikazuje Slika 16. Na njej je, za razliko od Slike 5, vrisan dodaten prehod iz stanja 0 v stanje 3, kar označuje učinek zunanjega šoka (Z), ki povzroči smrt obeh oseb sočasno.

Slika 16: Markovski verižni model skupnega šoka



Še preden predstavimo modela skupnega šoka v matematični obliki, najprej definirajmo nekaj novih spremenljivk. T*(x) označuje čas naravne smrti osebe, stare x let, T*(y) čas naravne smrti osebe, stare y let, slučajna spremenljivka Z pa čas nastanaka skupnega šoka. Privzemimo, da sta spremenljivki T*(x) in T*(y) v času pred realizacijo spremenljivke Z medsebojno neodvisni. Njuno dvorazsežno funkcijo preživetja definiramo:

$$s_{T^*(x)T^*(y)}\left(t_x, t_y\right) = P\left[T^*(x) > t_x \cap T^*(y) > t_y\right] = s_{T^*(x)}(t_x) s_{T^*(y)}(t_y), \quad (3.12)$$

pri čemer upoštevamo, da je verjetnost nastanka dveh medsebojno neodvisnih dogodkov enaka produktu verjetnosti prvega in drugega. Slučajna spremenljivka skupnega šoka Z, ki ima potencialen vpliv na dvorazsežno porazdelitev [T(x),T(y)], je neodvisna od [T*(x), T*(y)] in sledi eksponentni porazdelitvi, kot jo podajo Bowers et al. (1997, str. 275):

$$s_Z(z) = e^{-\lambda z}, \tag{3.13}$$

pri čemer je z > 0 in λ ≥ 0. Slučajni spremenljivki, za kateri nas v kontekstu rentnih zavarovanj zanima funkcija preživetja, sta dve, ki ju določimo: T(x) = min[T*(x), Z] in T(y) = min[T*(y),Z].[32] Funkcijo preživetja slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) sedaj zapišemo kot:

$$\begin{aligned} s_{T(x)T(y)}(t_x, t_y) &= P\left[min\{T^*(x), Z\} > t_x \cap min\{T^*(y), Z\} > t_y\right] \\ &= P\left[T^*(x) > t_x \cap T^*(y) > t_y \cap Z > \max(t_x, t_y)\right] \\ &= s_{T^*(x)}(t_x) s_{T^*(y)}(t_y) e^{-\lambda(max\{t_x, t_y\})}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

V členu enačbe $e^{-\lambda(max\{t_x, t_y\})}$ pišemo $max\{t_x, t_y\}$, ker nas zanima učinek šoka na dvorazsežno porazdelitev, ko ga še ni prekinila smrt ene ali druge osebe, saj je drugače njegova vloga v modelu redundantna, ker ne more več povzročiti smrti obeh oseb. Zapis enačbe (3.14) je neposredna posledica neodvisnosti T*(x), T*(y) in Z. Če sedaj funkcijo preživetja (3.14) parcialno odvajamo po t_x in t_y, razen v časovni točki $t_x = t_y$, dobimo prva dva dela mešane porazdelitvene funkcije gostote slučajnih spremenljivk T(x) in T(y). Računamo:[33]

$$f_{T(x)T(y)}(t_x, t_y) = \frac{\partial^2}{\partial t_x \partial t_y} s_{T^*(x)}(t_x) s_{T^*(y)}(t_y) e^{-\lambda(max\{t_x, t_y\})}$$

in ob pogoju $0 < t_y < t_x$ dobimo:

$$= e^{-\lambda t_x} \left[\frac{\partial s_{T^*(x)}(t_x)}{\partial t_x} \frac{\partial s_{T^*(y)}(t_y)}{\partial t_y} - \lambda s_{T^*(x)}(t_x) \frac{\partial s_{T^*(y)}(t_y)}{\partial t_y} \right] \tag{3.15a}$$

ter pri pogoju $0 < t_x < t_y$:

$$= e^{-\lambda t_y} \left[\frac{\partial s_{T^*(x)}(t_x)}{\partial t_x} \frac{\partial s_{T^*(y)}(t_y)}{\partial t_y} - \lambda s_{T^*(y)}(t_y) \frac{\partial s_{T^*(x)}(t_x)}{\partial t_x} \right]. \tag{3.15b}$$

Še vedno pa nimamo celotne porazdelitvene funkcije gostote. Potrebujemo jo namreč tudi v časovni točki, ki smo jo prej izpustili: $t_x = t_y$, ko sta realizaciji slučajnih spremenljivk

[32] V okviru modela lahko lahko oseba umre bodisi naravne smrti ali pa njeno smrt povzroči šok (Zhu, 2007, str. 240).

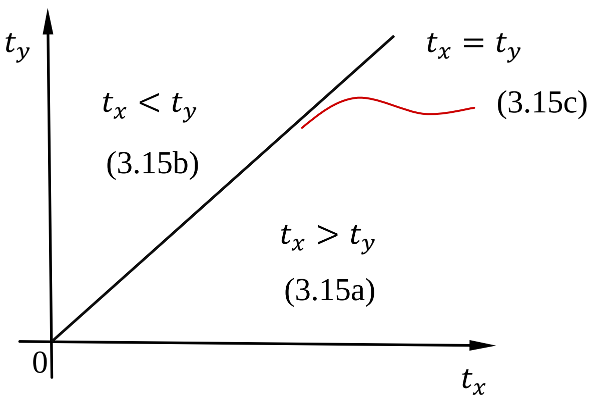
[33] Pri tem upoštevamo pravilo odvajanja: $\frac{\partial^2 f}{\partial t_x \partial t_y} = \frac{\partial}{\partial t_y}\left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)$.

T(x) in T(y) sočasni kot posledica skupnega šoka. Tokrat porazdelitvene funkcije gostote ne dobimo s parcialnim odvajanjem, temveč iz funkcije preživetja. Ker velja $t_x = t_y$, je vseeno, po kateri spremenljivki odvajamo. Zapišemo: $\bar{s}_{T(y)}(t_y) = 1 - e^{-\lambda t_y}$, ko je $T(y) > t_y$. Izraz odvajamo po t_y in dobimo: $\lambda e^{-\lambda t_y}$. Prispevek slučajne spremenljivke Z (Bowers et al., 1997, str. 276) k dvorazsežni porazdelitveni funkciji gostote je:

$$f_{T(x)T(y)}(t_y, t_y) = s_{T^*(x)}(t_y) s_{T^*(y)}(t_y) \lambda e^{-\lambda t_y}, \qquad (3.15c)$$

pri čemer je $t_y \geq 0$. Domeno sestavljene porazdelitvene funkcije gostote (3.15a), (3.15b) in (3.15c) ponazarja Slika 17, na kateri krivulja gostote verjetnosti, ki jo vidimo vzdolž premice $t_x = t_y$, ponazarja prispevek skupnega šoka.

Slika 17: Domena porazdelitvene funkcije gostote skupnega šoka

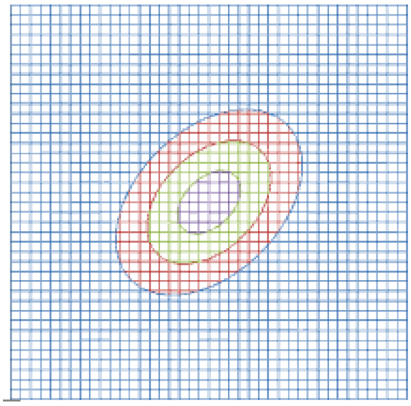


Vir: Prirejeno po N. Bowers et al., Actuarial Mathematics, 1997, str. 275.

3.3 Model kopule

Preden se poglobimo v obrazložitev, kaj kopula je in zakaj jo potrebujemo, naj najprej osvetlimo nekaj težav, ki so povezane s Pearsonovim korelacijskim koeficientom ρ. Recimo, da se slučajni spremenljivki X_1 in X_2 porazdeljujeta normalno. V tem primeru bo izbira korelacijskega koeficienta kot mere njune medsebojne povezanosti ustrezna. Če pogledamo horizontalni prerez te dvorazsežne porazdelitvene funkcije, ugotovimo, da so izohipse, ki predstavljajo gostoto verjetnosti, eliptične oblike, kar prikazuje Slika 18. Obliko dvorazsežne porazdelitvene funkcije gostote s spremenljivkama, ki se porazdeljujeta normalno, smo že prikazali s Sliko 2.

Slika 18: Horizontalni prerez dvorazsežne normalne porazdelitvene funkcije gostote
$X_1 \sim N(0,1), \quad X_2 \sim N(0,1); \; \rho = 0,4$



Glavna pomanjkljivost korelacijskega koeficienta se kaže v tem, da meri stopnjo linearne povezanosti, medtem ko so lahko povezave med slučajnimi spremenljivkami potencialno različnih funkcijskih oblik. Če je v regresijski analizi poudarek na pojasnjevanju ene spremenljivke z drugo, je pri korelaciji poudarek na stopnji, do katere lahko linearni model opiše odnos med dvema spremenljivkama (Freedman, Pisani & Purves, 2007, str. 128). Le pri večrazsežnih normalnih porazdelitvah je mogoče nizek korelacijski koeficient konsistentno pojasniti kot posledico neodvisnosti slučajnih spremenljivk – v ostalih primerih interpretacija neodvisnosti ni tako neposredna in preprosta. V normalnem porazdelitvenem scenariju (Bodie et al., 2008) je Markowitzev variančno-kovariančni pristop k optimizaciji premoženja upravičen in smiseln. Tudi mera tveganja VaR (angl. *value at risk*) daje v primerih eliptičnih porazdelitev konsistentne in zanesljive rezultate.

Velika večina tveganj, s katerimi se aktuarji srečujejo danes, nima večrazsežnih porazdelitev eliptične oblike, s tem pa je tudi koncept korelacijskega koeficienta praktično neuporaben. Pogoste težave, povezane z njim, so (Dhaene et al., 2005; Frees & Valdez, 1997; Nelsen, 2006):

[1] $\rho = 1$ ali $\rho = -1$: nujno ne pomenita popolne pozitivne oziroma negativne povezanosti.

[2] $\rho = 0$; slučajne spremenljivke so medsebojno neodvisne le v primeru, ko je njihova večrazsežna porazdelitvena funkcija normalna.

[3] Njegove vrednosti so pogojene z robnimi porazdelitvenimi funkcijami slučajnih spremenljivk. Vse vrednosti na intervalu [-1, 1] niso nujno dosegljive.

[4] Ni mersko invariantna mera povezanosti v primeru transformacije slučajnih spremenljivk. Stopnja korelacije med X_1 in X_2 v splošnem ni enaka korelaciji med $\log(X_1)$ in $\log(X_2)$.

[5] Definiran je le za končne vrednosti variance. Pri porazdelitvah z dolgimi repi je varianca lahko tudi neskončna.

Zaradi zgoraj navedenih pomanjkljivosti potrebujemo novo orodje za proučevanje in merjenje soodvisnosti slučajnih spremenljivk – funkcijo kopule.

Funkcija kopule je eno najbolj koristnih orodij v statistični analizi večrazsežnih porazdelitvenih funkcij. Predvsem v zadnjih letih so doživele razcvet z uporabo v ekonomiji in financah (Rice, 2007, str. 79). Tveganja so namreč vse bolj prepletena, soodvisnosti med njimi pa različnih nelinearnih funkcijskih oblik. Koncept kopule ni nov. Uporabljal se je v kontekstu metričnih verjetnostnih prostorov, kjer razdalje niso definirane z realnimi pozitivnimi števili, temveč s porazdelitvenimi funkcijami. V matematiko in statistiko jo je prvi vpeljal Abe Sklar (Nelsen, 2006, str. 2).

Beseda 'copula' je latinskega izvora in pomeni 'vez'. V slovnici se uporablja kot del sestavljenega povedka. V statistiki pa kopula združuje enodimenzionalne robne porazdelitvene funkcije v večrazsežne (Frees & Valdez, 1997, str. 2). S pomočjo kopule proučujemo odnose med elementi (rezultati) večrazsežne porazdelitvene funkcije. Kopula torej razkriva strukturo soodvisnosti. Temeljna ideja, ki se skriva v ozadju, je, da lahko večrazsežno porazdelitev, njene robne porazdelitve in strukturo soodvisnosti, ki jo opisuje kopula, obravnavamo ločeno.

V okviru našega dela bomo obravnavali dvodimenzionalne kopule $C(u_1, u_2)$ slučajnega vektorja[34] $(U_1, U_2) = (F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$, pri čemer bomo imeli v mislih, da sta slučajni spremenljivki X_1 in X_2 definirani kot: $X_1 = T(x)$ in $X_2 = T(y)$.

Dvorazsežna porazdelitvena funkcija $C(u_1, u_2)$, ki je definirana na enotnem kvadratu $[0,1]^2$ in ima za obe robni porazdelitvi enakomerno porazdelitev na intervalu [0,1], se imenuje dvorazsežna kopula. Dvorazsežna kopula C je funkcija, za katero velja, da povezuje enotni kvadrat z intervalom [0,1]: $C: [0,1]^2 \to [0,1]$ in izpolnjuje naslednje pogoje (Denuit et al., 2005, str. 194):

[1] $C(u_1, u_2)$ je naraščajoča in zvezna funkcija spremenljivke $u_i, i = 1, 2$;

[2] $\lim_{u_i \to 0} C(u_1, u_2) = 0 \; za \; i = 1, 2$;

[3] $\lim_{u_1 \to 1} C(u_1, u_2) = u_2 \; in \; \lim_{u_2 \to 1} C(u_1, u_2) = u_1$;

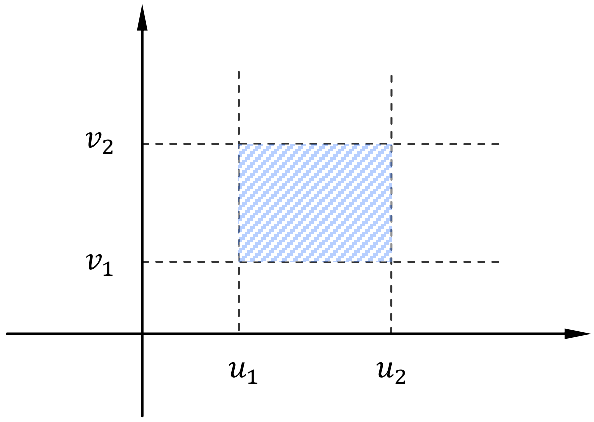
[4] C je supermodularna, kar pomeni, da je za poljubne $u_1, u_2, v_1, v_2 \epsilon [0,1]$, za katere je $u_1 \leq v_1 \; in \; u_2 \leq v_2$, $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$.

Geometrično razlago kopule ponazarja Slika 19.

---

[34] Slučajni vektor se porazdeljuje v takšnem številu dimenzij, kot je slučajnih spremenljivk, ki jih vsebuje: $X_1, X_2 \ldots n: \mathbb{R}^n$.

Slika 19: Geometrična razlaga kopule, ki ima za obe robni porazdelitvi enakomerno porazdelitev



Če sta X_1 in X_2 slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama $F_{X_1}(x_1)$ in $F_{X_2}(x_2)$ ter skupno dvorazsežno porazdelitveno funkcijo $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$, potem obstaja takšna dvorazsežna kopula $C(u_1,u_2)$, da velja:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\big(F_{X_1}(x_1),\ F_{X_2}(x_2)\big), \tag{3.16}$$

za vsak $(x_1,x_2)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2$. Če sta X_1 in X_2 zvezni slučajni spremenljivki, je kopula enolično določena (Nelsen, 2006, str. 18; Komelj, 2009, str. 209).[35] Velja tudi obratno: če je $C(u_1,u_2)$ kopula in sta $F_{X_1}(x_1)$ in $F_{X_2}(x_2)$ porazdelitveni funkciji, potem je funkcija $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ definirana z enačbo (3.16) kot dvorazsežna porazdelitvena funkcija z robnima porazdelitvenima funkcijama $F_{X_1}(x_1)$ in $F_{X_2}(x_2)$.

Naj kopula $C(u_1,u_2)$ z enačbo (3.16) povezuje dvorazsežno porazdelitveno funkcijo $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ slučajnega vektorja (X_1,X_2) z odvisnima komponentama in zveznima robnima porazdelitvenima funkcijama $F_{X_1}(x_1)$ in $F_{X_2}(x_2)$. Vemo, da sta slučajni spremenljivki $U_1 = F_{X_1}(x_1)$ in $U_2 = F_{X_2}(x_2)$ enakomerno porazdeljeni na intervalu $[0,1]$, kar na medsebojno odvisnost X_1 in X_2 ne vpliva. Seveda pa na soodvisnost slučajnih spremenljivk U_1 in U_2 vpliva, zato tudi pravimo, da je takšna transformacija mersko invariantna (angl. *scale invariant*). Kopula $C(u_1,u_2)$ je potemtakem porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(U_1,U_2) = \big(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\big)$.

Naj zapisano podrobneje pojasnimo. Vsaki slučajni spremenljivki, ki se porazdeljuje zvezno, lahko priredimo slučajno spremenljivko, ki je enakomerno porazdeljena na intervalu [0,1]. To velja natanko takrat, ko poznamo resnično porazdelitveno funkcijo spremenljivke, ki jo želimo transformirati. Če delamo na vzorčnih podatkih, potem

[35] Za dokaz enoličnosti glej: Carriere (1994, str. 53–54).

navedeno velja le za dovolj velike vzorce. Recimo, da so porazdelitvene funkcije slučajnega vektorja enake $X_i = F_{X_i}(x_i)$ za $i = 1,2,3 \dots n$. Tedaj pravimo, da so njene transformiranke $U_i = F_{X_i}(x_i)$ enakomerno porazdeljene na intervalu [0,1]. S tem se relacije med slučajnimi spremenljivkami niso spremenile – če so te že v osnovi medsebojno odvisne, potem bodo tudi po transformaciji in to zaradi merske invariantnosti kopule. To je tudi osnovna ideja kopule, saj se osredotoča na definiranje soodvisnosti preko večrazsežne porazdelitvene funkcije, ne pa na posebnosti, povezane z različnimi oblikami robnih porazdelitvenih funkcij slučajnih spremenljivk.

Zgornja ugotovitev je za nas bistvena, saj bomo privzeli robni porazdelitveni funkciji slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) kot dani, torej poznani, nakar bomo lahko s Fréchet-Hoeffdingovo kopulo izločili potenciale soodvisnosti dveh slučajnih spremenljivk, ki jih gnezdita spodnja in zgornja Fréchet-Hoeffdingova meja.

Nemški matematik Wassily Hoeffding in francoski Réne-Maurice Fréchet sta neodvisno drug od drugega odkrila, da je dvorazsežna porazdelitvena funkcija, kot smo jo spoznali v (3.16), omejena od spodaj in zgoraj. Od tedaj sta ti meji univerzalni in veljata za vse kopule poljubnih vrednosti u_1, u_2 na zveznem intervalu [0,1] (Nelsen et al., 2004, str. 349).

Fréchet-Hoeffdingova kopula bo naše osrednje matematično orodje za izračun potencialnega vpliva soodvisnosti, ki je, če seveda obstaja, vsebovana v parih slučajnega vektorja (X_1, X_2). V tej zvezi so Dhaene et al. (2000) v svojem prispevku predlagali uporabo Fréchet-Hoeffdingovih meja za ovrednotenje vpliva potencialno soodvisnih slučajnih spremenljivk na aktuarske izračune enkratnih neto premij rentnega zavarovanja na hkratni in na zadnje življenje.

Fréchet in Hoeffding sta razvila model dvorazsežne porazdelitvene funkcije z enim parametrom (α), ki ga v kontekst proučevane vsebine prevedemo in zapišemo:

$$F_{T(x)T(y)}\left(t_x, t_y\right) =$$

$$(1-\alpha)Min\left[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}(t_y)\right] + \alpha Max\left[0, F_{T(x)}(t_x) + F_{T(y)}\left(t_y\right) - 1\right], \quad (3.17)$$

s parametrom $0 \leq \alpha \leq 1$. Če je α = 1, dobimo spodnjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo, ko pa je α = 0, dobimo zgornjo. Obe meji sta kopuli. Robne porazdelitvene funkcije $F_{T(x)}(t_x)$ in $F_{T(y)}(t_y)$ slučajnih spremenljivk T(x) in T(y) so lahko izdvojene iz različnih dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij. Na podlagi tega Carriere in Chan (1986, str. 56) opredelita družino enoparametričnih dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij v njeni splošni obliki (H je funkcija kopule):

$$F_{T(x)T(y)}(t_x, t_y) = H[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}(t_y); \rho], \tag{3.18}$$

pri čemer je $-1 \leq \rho \leq 1$ in predstavlja Spearmanovo mero povezanosti med slučajnima spremenljivkama T(x) in T(y) – Spearmanov ρ uporabimo tedaj Nelsen (2006, str. 169), ko povezava med slučajnimi spremenljivkami ni linearne funkcijske oblike, je pa monotona.

Pri izpeljavi Fréchet-Hoeffdingovih meja si pomagamo z naslednjimi predpostavkami: naj bosta X = T(x) in Y = T(y) slučajni spremenljivki z dvorazsežno porazdelitveno funkcijo $F_{XY}(x, y)$ in robnima zveznima porazdelitvenima funkcijama $F_X(x)$ in $F_Y(y)$. Vpeljimo funkcijo $I(\cdot)$, ki je striktno naraščajoča, in funkcijo D(·), ki je striktno padajoča.

3.3.1 Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja

Pokazati moramo, da je $F_{XY}(x, y) = Max[0, F_X(x) + F_Y(y) - 1]$, ko je Y = D(X), kar pomeni, da je slučajna spremenljivka Y padajoča funkcija slučajne spremenljivke X. Če je Y = D(X), potem je $F_{XY}(x, y) = P[X \leq x, D(X) \leq y] = P[X \leq x, X \geq D^{-1}(y)]$. Če je sedaj $x \leq D^{-1}(y)$, potem je $F_{XY}(x, y) = 0$ in če je $x > D^{-1}(y)$, potem je $F_{XY}(x, y) = P[X \leq x] - P[X < D^{-1}(y)] = P[X \leq x] - P[D(X) > y] = F_X(x) - (1 - F_Y(y))$. Iz tega sledi, da je $F_{XY}(x, y) = Max[0, F_X(x) + F_Y(y) - 1]$.

Da je rezultat izpeljave res Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja mora biti parameter ρ, ki predstavlja Spearmanov koeficient povezanosti slučajnih spremenljivk X in Y, enak –1, saj Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja povezuje nasprotno monotone slučajne spremenljivke (Nelsen, 2006, str. 32). Za izračun Spearmanovega ρ najprej potrebujemo transformiranki slučajnih spremenljivk X in Y, ki jih dobimo z $M = F_X(x)$ in $W = F_Y(y)$, pri čemer sta ti enakomerno porazdeljeni na intervalu [0,1]. Spearmanov ρ je za par slučajnih spremenljivk X in Y identičen Pearsonovemu koeficientu povezanosti slučajnih spremenljivk M in W (Nelsen, 2006, str. 169). Dvorazsežno porazdelitveno funkcijo sedaj zapišemo kot: $F_{MW}(m, w) = Max[0, m + w - 1]$ ter izračunamo matematično upanje produkta slučajnih spremenljivk M in W: $E(MW) = \int_0^1 \int_{1-w}^1 (m + w - 1) dmdw = \int_0^1 \left[\int_{1-w}^1 mdm - \int_{1-w}^1 dm\right] dw = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - w - \frac{(1-w)^2}{2}\right] dw = \frac{1}{2}\int_0^1 dw - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-w)^2 dw - \int_0^1 wdw$. S substitucijo $u = 1 - w,\ dw = -du$, dobimo: $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Spearmanov ρ izračunamo: $\rho = E\left[\left(\frac{F_X(x) - E[F_X(x)]}{\sqrt{Var(F_X(x))}}\right)\left(\frac{F_Y(y) - E[F_Y(y)]}{\sqrt{Var(F_Y(y))}}\right)\right]$. Ker je verjetnostna gostota transformirank $M = F_X(x)$ in $W = F_Y(y)$ enakomerno porazdeljena na intervalu [0,1], velja: $E[F_X(x)] = E[F_Y(y)] = \frac{1}{2}$, medtem ko je $Var[F_X(x)] = Var[F_Y(y)] = \frac{1}{12}$.[36]

---

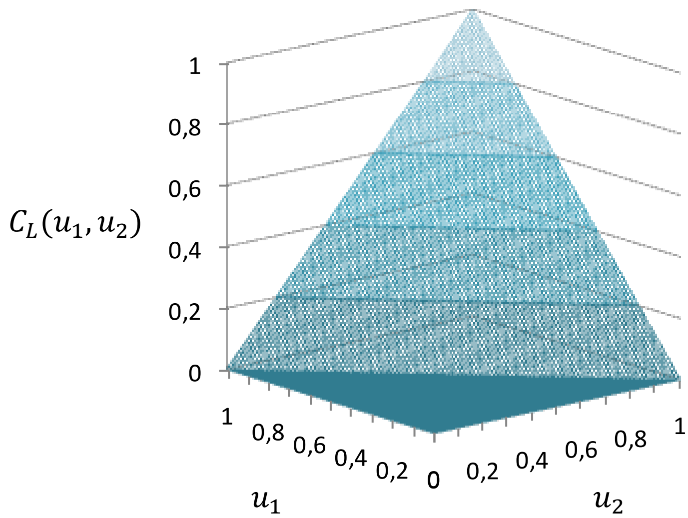
[36] Formuli za izračun matematičnega upanja in variance enakomerno porazdeljene slučajne spremenljivke sta: $E(x) = \frac{a+b}{2}$ in $\sigma_x = \frac{(b-a)^2}{12}$ (Dekking et al., 2005, str. 60).

Iz tega sledi, da je $\rho = 12E[F_X(x)F_Y(y)] - 3$. Ko sedaj vstavimo še izračunano vrednost matematičnega upanja v enačbo, dobimo: $\rho = -1$, pri čemer je $F_X(x) = 1 - F_Y(y)$. S tem je dokaz, da smo izpeljali Fréchet-Hoeffdingovo spodnjo mejo, zaključen. To v družini enoparametričnih dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij sedaj enolično določimo kot:

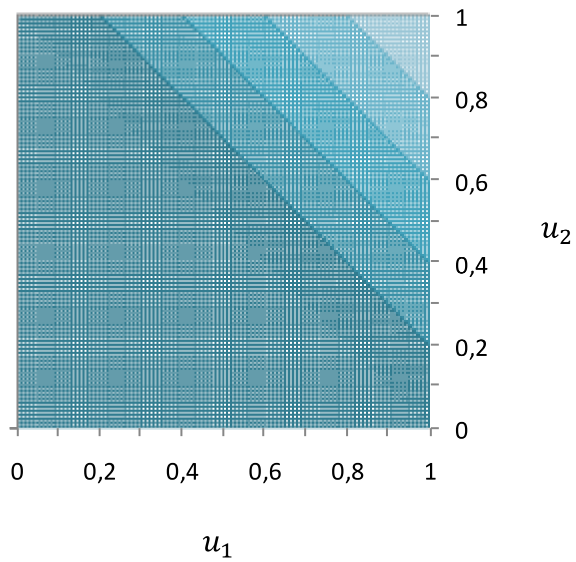
$$H\left[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}\left(t_y\right); -1\right] = L\left[t_x, t_y\right] = Max\left[0, F_{T(x)}(t_x) + F_{T(y)}\left(t_y\right) - 1\right]. \quad (3.19)$$

Dvorazsežno Fréchet-Hoeffdingovo spodnjo mejo s slučajnim vektorjem (U_1,U_2) prikazuje Slika 20, ki ji pripada gostota verjetnosti, ki je enakomerno razporejena na diagonali $u_1 = 1 - u_2$ enotnega kvadrata, kar prikazuje Slika 21.

Slika 20: Dvorazsežna Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja

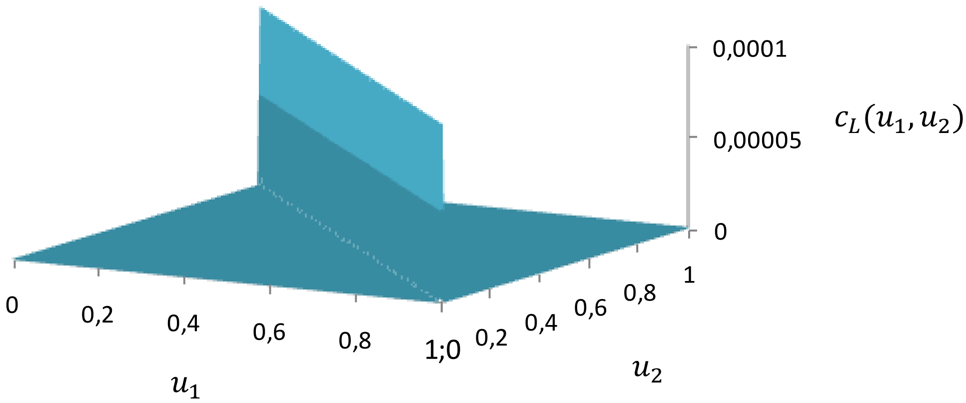


Slika 21: Horizontalni prerez dvorazsežne Fréchet-Hoeffdingove spodnje meje



Slika 22 prikazuje dvorazsežno porazdelitveno funkcijo gostote slučajnega vektorja (U_1,U_2). Razvidno je, da sta spremenljivki u_1 in u_2 nasprotno monotoni, saj ko vrednost ene narašča, vrednost druge pada – gostiščita se na diagonali $u_1 = 1 - u_2$.

Slika 22: Dvorazsežna porazdelitvena funkcija gostote Fréchet-Hoeffdingove spodnje meje



3.3.2 Fréchet-Hoeffdingova zgornja meja

Tokrat moramo dokazati, da je $F_{XY}(x,y) = Min[F_X(x), F_Y(y)]$, ko je Y = I(X), kar pomeni, da je Y naraščajoča funkcija slučajne spremenljivke X.

Ko je Y = I(X), potem je $F_{XY}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[X \leq x, I(X) \leq y] = P[X \leq x, X \leq I^{-1}(y)] = Min\big[P(X \leq x),\ P\big(X \leq I^{-1}(y)\big)\big] = Min\ [P(X \leq x),\ P(I(X) \leq y)] = Min[F_X(x), F_Y(y)]$.

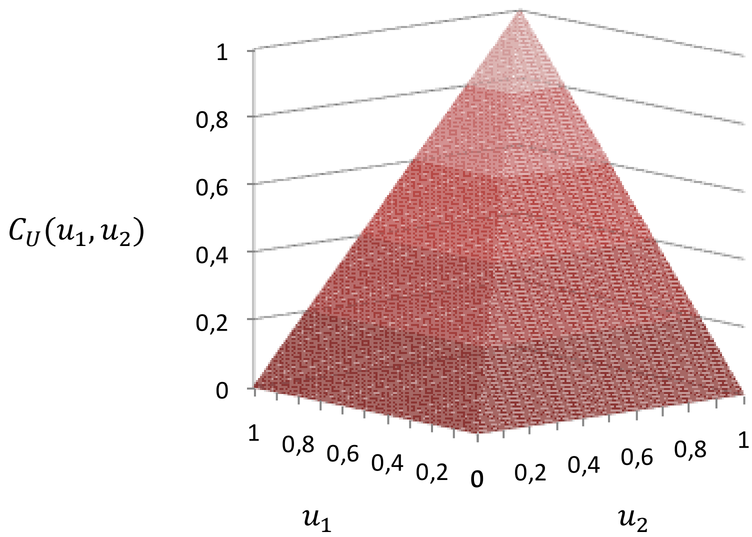
S tem smo prišli do Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje, ko je Spearmanov ρ, za par zveznih slučajnih spremenljivk X in Y, enak 1. Fréchet-Hoeffdingova zgornja meja namreč povezuje komonotone slučajne spremenljivke (Nelsen, 2006, str. 32), kar bomo v nadaljevanju tudi dokazali. Transformiranki zveznih slučajnih spremenljivk X in Y smo spoznali v razdelku 3.3.1 in jih zapisali: $M = F_X(x)$ in $W = F_Y(y)$. Dvorazsežno porazdelitveno funkcijo lahko sedaj zapišemo v obliki: $F_{MW}(m,w) = Min[m,w]$ ter izračunamo matematično upanje produkta slučajnih spremenljivk M in W: $E[MW] = \int_0^1 \int_0^1 F_{MW}(m,w)dmdw = \int_0^1 \int_0^w mdmdw + \int_0^1 \int_0^m wdwdm = \frac{1}{3}$.

Spearmanov ρ za par slučajnih spremenljivk X in Y izračunamo kot: $\rho = 12E[MW] - 3 = 12\frac{1}{3} - 3 = 1$, pri čemer je $F_X(x) = F_Y(y)$. S tem je dokaz, da imamo Fréchet-Hoeffdingovo zgornjo mejo, dokončen. V družini enoparametričnih dvorazsežnih porazdelitvenih funkcij jo enolično definiramo kot:

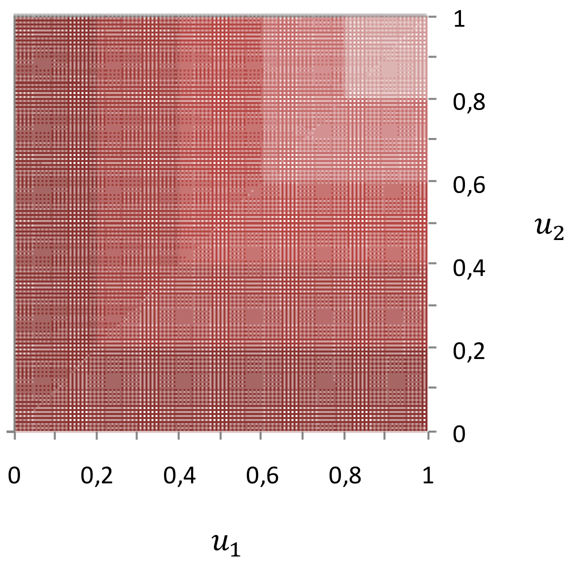
$$H\big[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}\big(t_y\big); 1\big] = U\big[t_x, t_y\big] = Min\big[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}\big(t_y\big)\big]. \quad (3.20)$$

Dvorazsežno Fréchet-Hoeffdingovo zgornjo mejo prikazuje Slika 23, ki ji pripada gostota verjetnosti, ki je enakomerno razporejena na diagonali $u_1 = u_2$ enotnega kvadrata, kar prikazuje Slika 24.

Slika 23: Dvorazsežna Fréchet-Hoeffdingova zgornja meja

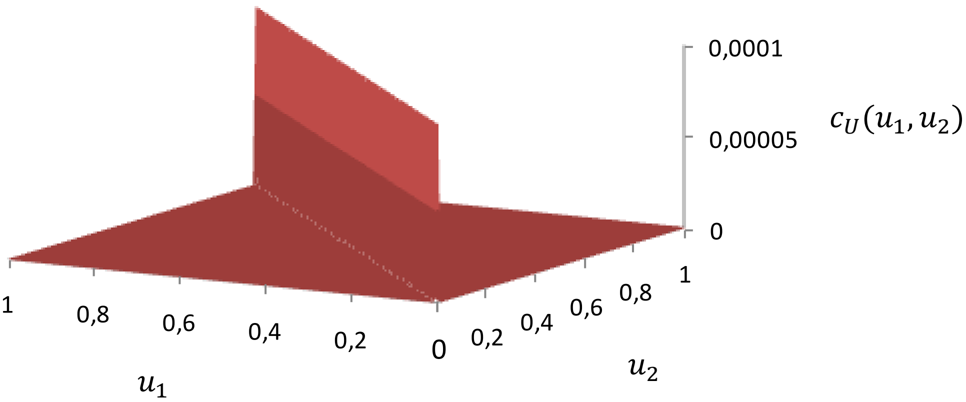


Slika 24: Horizontalni prerez dvorazsežne Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje



Dvorazsežno porazdelitveno funkcijo gostote slučajnega vektorja (U_1, U_2) prikazuje Slika 25. Spremenljivki u_1 in u_2 sta očitno komonotoni.

Slika 25: Dvorazsežna porazdelitvena funkcija gostote Fréchet-Hoeffdingove zgornje meje



Spodnji in zgornji Fréchet-Hoeffdingovi meji rečemo tudi mejni porazdelitvi, saj vsaka druga dvorazsežna porazdelitev ne more ležati drugje kot na intervalu:[37] [38]

$$L[t_x, t_y] \leq F_{T(x)T(y)}(t_x, t_y) \leq U[t_x, t_y]. \tag{3.21}$$

$$Max[0, F_{T(x)}(t_x) + F_{T(y)}(t_y) - 1] \leq F_{T(x)T(y)}(t_x, t_y)$$
$$\leq Min[F_{T(x)}(t_x), F_{T(y)}(t_y)]. \tag{3.22}$$

Z neenačbo (3.22), ki je z vidika aktuarske analize, ki sledi, za nas ključna, zaključujemo poglavje modelov odvisnosti. Ob upoštevanju, da sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) PQD soodvisni ter da poznamo njuni zvezni robni porazdelitveni funkciji, lahko neposredno uporabimo Fréchet-Hoeffdingovi meji in ovrednotimo potencialne učinke soodvisnosti preostalih življenjskih dob zavarovancev na vrednost rentnega zavarovanja.

---

[37] Ko je ρ = 0, sta slučajni spremenljivki T(x) in T(y) neodvisni, kar lahko zapišemo kot: $F_{T(x)T(y)}(t_x, t_y) = F_{T(x)}(t_x)F_{T(y)}(t_y)$.

[38] Enačbo (3.21) lahko potrdimo tudi s teorijo verjetnosti. Pokazati moramo, da velja neenačba: $Max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A)P(B) \leq Min(P(A), P(B))$.
Dokaz: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$. To pomeni, da je $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$. Vemo pa že, da je: $P(A \cap B) \geq 0$. Iz tega sledi, da je: $P(A \cap B) \geq Max(0, P(A) + P(B) - 1)$. Sedaj moramo dokazati še zgornjo mejo. Vemo: $P(A \cap B) \leq P(A)$ in $P(A \cap B) \leq P(B)$. Na podlagi zakona tranzitivnosti dobimo: $P(A \cap B) \leq \text{Min}(P(A), P(B))$.

4 AKTUARSKA ANALIZA VREDNOSTI RENTNEGA ZAVAROVANJA Z UPORABO FRÉCHET-HOEFFDINGOVE KOPULE

Vrednost premije rentnega zavarovanja je odvisna od razvoja vrednosti denarja v času in verjetnosti preživetja rentnih upravičencev. Model preživetja in koncept jakosti obrestne mere, ki navedeno instrumentalizirata, smo podrobno predstavili v prvem poglavju. Izbira ustrezne diskontne stopnje je v tej povezavi zaradi časovne dimenzije življenjskih rent posebnega pomena in bi zahtevala posebno obravnavo. Njena ocenjena višina je lahko posledica determinističnega ali stohastičnega pristopa. Lahko bi uporabili teorijo časovne strukture obrestne mere (angl. *term structure of interest rates*) s področja finančne ekonomije ali pa obrestno mero pripoznali kot stohastično spremenljivko. Za ta namen obstajajo različni modeli stohastičnih obrestnih mer: Vasičkov model, Cox-Ingersoll-Ross model, Ho-Leejev in Hull-Whitov. Ker pa se želimo pri našem delu osredotočiti izključno na merjenje učinkov potencialne soodvisnosti preostalih življenjskih dob zavarovancev na aktuarsko sedanjo vrednost, bomo tokrat diskontno obrestno stopnjo privzeli kot konstanto v višini 5,15 odstotkov.[39]

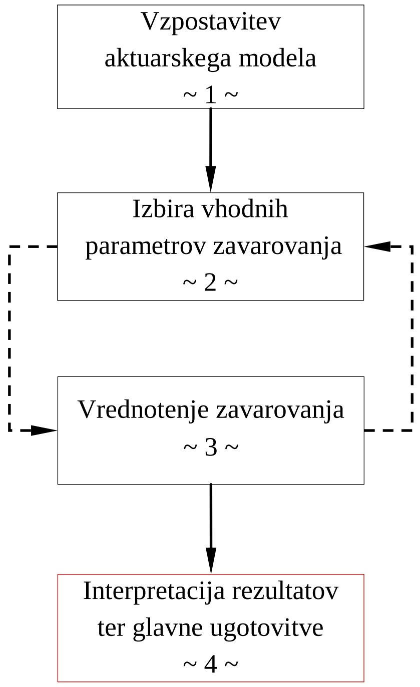
Vrednost netvegane nominalne letne obrestne mere v višini 5,15 odstotkov je sestavljena iz 4,125-odstotne realne obrestne stopnje desetletne neindeksirane obveznice RS67, ki je bila izdana v januarju 2010, ter nekaj več kot 1-odstotne pričakovane letne stopnje inflacije v evroobmočju za to obdobje. Kar zadeva karakteristike modela preživetja, ki ga tudi potrebujemo pri vrednotenju rentnega zavarovanja, bomo uporabljali že obrazložene nemške tablice umrljivosti za rentne upravičence – DAV 2004-R.

Vpeljali in predstavili smo model, kjer je funkcijo preživetja dveh posameznikov (npr. moža in žene) stohastičen Markovski proces. Če potemtakem ugotovimo, da sta preostali življenjski dobi zakoncev medsebojno odvisni, potem morajo obstajati skupni dejavniki tveganja, ki vplivajo na stohastičen proces. S tega vidika smo nato spoznali koncept komonotonih in nasprotno monotonih slučajnih spremenljivk, ki se lahko pod vplivom tretje gibljejo v isti ali nasprotni smeri. To nas je pripeljalo do Fréchet-Hoeffdingove kopule, ki ima za skrajni meji potenciale soodvisnosti dvorazsežno porazdeljenih slučajnih spremenljivk T(x) in T(y). Fréchet-Hoeffdingove meje sta na primeru različnih življenjskih rent prva uporabila Carriere in Chan (1986), vendar pa ne v kontekstu pozitivne kvadrantne soodvisnosti (PQD) ter brez meje neodvisnosti, ki jo potrebujemo za ugotavljanje precenjenosti in podcenjenosti aktuarske sedanje vrednosti. Ob teh dodatnih pogojih so nato Dhaene et al. (2000) in kasneje Denuit et al. (2001) predlagali uporabo Fréchet-Hoeffdingovih meja za kvantificiranje učinkov soodvisnosti na ustaljene aktuarske izračune.

[39] Matematično upanje Fisherjeve enačbe: $E(i) \approx E(r) + E(\pi) = 4{,}125 + 1{,}025 = 5{,}15$.

Vrednotenje vpliva soodvisnosti T(x) in T(y) na vrednost enkratne neto premije rentnega zavarovanja bomo izvajali v skladu s procesnim diagramom, ki ga prikazuje Slika 26.

Slika 26: Procesni diagram analize normalizirane vrednosti enkratne neto premije rentnega zavarovanja, vezanega na dve življenji



Najprej vzpostavimo aktuarski model življenjske rente s Fréchet-Hoeffdingovo spodnjo in zgornjo mejo, nato izberemo poljubne vhodne parametre zavarovanja ter ovrednotimo vpliv soodvisnosti T(x) in T(y) na vrednost premije glede na vhodne parametre in predpostavko neodvisnosti. Na koncu rezultate interpretiramo in strnemo v glavnih ugotovitvah.

4.1 Aktuarski model normalizirane enkratne neto premije na hkratni življenji

Na podlagi uporabe enačbe (3.22) in izpeljanih funkcij preživetja v prvem poglavju definiramo Fréchet-Hoeffdingovi meji kot:

$$Max\left(0,\ {}_tp_x + {}_tp_y - 1\right) \leq {}_tp_{xy} \leq Min\left({}_tp_x,\ {}_tp_y\right). \tag{4.1}$$

S tem smo Fréchet-Hoeffdingovi meji življenjskih rent, vezanih na dve življenji, definirali univerzalno. Ker bomo analizirali več vrst življenjskih rent, tj. dosmrtne rente, rente z omejenim obdobjem izplačevanja in odložene rente, bomo prikazali le enačbi za enkratno neto premijo dosmrtne rente. Vstavljanje meja (4.1) v ostale enačbe življenjskih rent iz prvega poglavja je enako, le oznake se spremenijo.

Enačbi normalizirane enkratne neto premije rentnega zavarovanja na hkratni življenji s spodnjo (4.2) in z zgornjo (4.3) Fréchet-Hoeffdingovo mejo določimo:

$$\bar{a}_{xy}^{min} = \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k Max(0,\ {}_kp_x +\ {}_kp_y - 1), \tag{4.2}$$

$$\bar{a}_{xy}^{max} = \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k Min(\ {}_kp_x,\ {}_kp_y). \tag{4.3}$$

Ob predpostavki neodvisnosti je enačba normalizirane enkratne neto premije enaka:

$$\bar{a}_{xy}^{neod} = \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k\ {}_kp_{xy}, \tag{4.4}$$

pri čemer je: ${}_kp_{xy} =\ {}_kp_x\ {}_kp_y$.[40] Velja neenačba:

$$\bar{a}_{xy}^{min} \leq \bar{a}_{xy}^{neod} \leq \bar{a}_{xy}^{max}. \tag{4.5}$$

Za prenumerandno življenjsko rento dobimo enačbe (4.2), (4.3) in (4.4), ko k teče od 0 ... min(ω-x,ω-y), medtem ko ima življenjska renta oznake: $\ddot{a}_{xy}^{min}$, $\ddot{a}_{xy}^{max}$ in $\ddot{a}_{xy}^{neod}$.

Na podoben način kot zgoraj dobimo enačbe za življenjsko rento z omejenim obdobjem izplačevanja: $\bar{a}_{xy:n]}^{min}$, $\bar{a}_{xy:n]}^{max}$ in $\bar{a}_{xy:n]}^{neod}$, ko k teče od 1 ... n. Meje u let odložene dosmrtne rente izračunamo z enačbami: $\bar{a}_{xy}^{min} - \bar{a}_{xy:u]}^{min} =\ {}_{u|}\bar{a}_{xy}^{min}$; $\bar{a}_{xy}^{max} - \bar{a}_{xy:u]}^{max} =\ {}_{u|}\bar{a}_{xy}^{max}$ in $\bar{a}_{xy}^{neod} - \bar{a}_{xy:u]}^{neod} =\ {}_{u|}\bar{a}_{xy}^{neod}$.

4.2 Aktuarski model normalizirane enkratne neto premije na zadnje življenje

Spodnjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo rentnega zavarovanja na zadnje življenje, ob upoštevanju ${}_tp_{\overline{xy}} = (1 -\ {}_tq_x\ {}_tq_y)$ in enačbe (3.22), dobimo z $1 - Min(\ {}_tq_x,\ {}_tq_y)$, medtem ko zgornjo mejo $1 - Max(0,\ {}_tq_x +\ {}_tq_y - 1)$, kar skupaj zapišemo kot:

$$1 - Min(\ {}_tq_x,\ {}_tq_y) \leq\ {}_tp_{\overline{xy}} \leq 1 - Max(0,\ {}_tq_x +\ {}_tq_y - 1). \tag{4.6}$$

[40] Oznaka $Min\{\omega - x, \omega - y\}$ pomeni, da se dosmrtna renta izplačuje do smrti prvega izmed rentnih upravičencev.

Ker bomo analizirali več vrst življenjskih rent, tj. dosmrtne rente, rente z omejenim obdobjem izplačevanja in odložene rente, bomo tokrat prikazali le enačbe za enkratno neto premijo rentnega zavarovanja z omejenim obdobjem izplačevanja n. Postopek vzstavljanja meja (4.6) v preostale enačbe življenjskih rent je enak, le notacija se spreminja.

Enačbi normalizirane enkratne neto premije rentnega zavarovanja na zadnje življenje s spodnjo (4.7) in z zgornjo (4.8) mejo zapišemo kot:

$$\bar{a}^{min}_{\overline{xy}:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \{1 - Min({}_kq_x, {}_kq_y)\}, \tag{4.7}$$

$$\bar{a}^{max}_{\overline{xy}:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \{1 - Max(0, {}_kq_x + {}_kq_y - 1)\}. \tag{4.8}$$

Ob predpostavki neodvisnosti je enačba normalizirane enkratne neto premije enaka:

$$\bar{a}^{neod}_{\overline{xy}:n\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k \ {}_kp_{\overline{xy}}, \tag{4.9}$$

pri čemer je: ${}_kp_{\overline{xy}} = (1 - {}_kq_x \ {}_kq_y)$. Velja neenačba:

$$\bar{a}^{min}_{\overline{xy}:n\rceil} \leq \bar{a}^{neod}_{\overline{xy}:n\rceil} \leq \bar{a}^{max}_{\overline{xy}:n\rceil}. \tag{4.10}$$

Za prenumerandno življenjsko rento dobimo enačbe (4.7), (4.8) in (4.9), ko k teče od 0 ... n-1, življenjsko rento pa označimo kot: $\ddot{a}^{min}_{\overline{xy}:n\rceil}$, $\ddot{a}^{max}_{\overline{xy}:n\rceil}$ in $\ddot{a}^{neod}_{\overline{xy}:n\rceil}$.

Na enak način dobimo enačbe za dosmrtno rento: $\bar{a}^{min}_{\overline{xy}}$, $\bar{a}^{max}_{\overline{xy}}$ in $\bar{a}^{neod}_{\overline{xy}}$, ko k teče od 1 ... max(ω-x,ω-y). Meje u let odložene dosmrtne rente izračunamo: $\bar{a}^{min}_{\overline{xy}} - \bar{a}^{min}_{\overline{xy}:u\rceil} = {}_{u|}\bar{a}^{min}_{\overline{xy}}$; $\bar{a}^{max}_{\overline{xy}} - \bar{a}^{max}_{\overline{xy}:u\rceil} = {}_{u|}\bar{a}^{max}_{\overline{xy}}$ in $\bar{a}^{neod}_{\overline{xy}} - \bar{a}^{neod}_{\overline{xy}:u\rceil} = {}_{u|}\bar{a}^{neod}_{\overline{xy}}$.

4.3 Aktuarski model normalizirane enkratne neto premije vdovske rente

Imamo moža in ženo, ki sta stara x in y let. Ko mož umre, se ženi prične izplačevati vdovska renta. Spomnimo se, da vdovsko rento izračunamo kot: $\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$, na podlagi česar lahko Fréchet-Hoeffdingovi meji določimo kot:[41]

$${}_tp_y - Min({}_tp_x, {}_tp_y) \leq {}_tp^{02}_{xy} \leq {}_tp_y - Max(0, {}_tp_x + {}_tp_y - 1), \tag{4.11}$$

[41] Pri izpeljavi upoštevamo neenačbo (4.1).

pri čemer je: ${}_tp_{xy}^{02} = {}_tp_y(1 - {}_tp_x)$.[42]

Enačbi normalizirane enkratne neto premije vdovske rente s spodnjo (4.12) in z zgornjo (4.13) Fréchet-Hoeffdingovo mejo določimo:

$$\bar{a}_{x|y}^{min} = \sum_{k=1}^{(\omega-y)} v^k \, {}_kp_y - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k \, Min({}_kp_x, {}_kp_y), \tag{4.12}$$

$$\bar{a}_{x|y}^{max} = \sum_{k=1}^{(\omega-y)} v^k \, {}_kp_y - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k \, Max(0, {}_kp_x + {}_kp_y - 1). \tag{4.13}$$

Ob predpostavki neodvisnosti je enačba normalizirane enkratne neto premije enaka:

$$\bar{a}_{x|y}^{neod} = \sum_{k=1}^{(\omega-y)} v^k \, {}_kp_y - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k \, {}_kp_y \, {}_kp_x. \tag{4.14}$$

Velja neenačba:

$$\bar{a}_{x|y}^{min} \leq \bar{a}_{x|y}^{neod} \leq \bar{a}_{x|y}^{max}. \tag{4.15}$$

Za prenumerandno vdovsko rento dobimo enačbe (4.12), (4.13) in (4.14), ko k teče od 0 ... (ω-y) ... min(ω-x,ω-y), medtem ko vdovsko rento označimo: $\ddot{a}_{x|y}^{min}$, $\ddot{a}_{x|y}^{max}$ in $\ddot{a}_{x|y}^{neod}$.

4.4 Aktuarski model normalizirane enkratne neto premije vdovčeve rente

Tokrat je mož tisti, ki po smrti žene prejema rento – recimo ji vdovčeva renta. To lahko izračunamo z enačbo: $\bar{a}_{y|x} = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}$. Fréchet-Hoeffdingovi meji za vdovčevo rento definiramo kot: [43]

$${}_tp_x - Min({}_tp_x, {}_tp_y) \leq {}_tp_{xy}^{01} \leq {}_tp_x - Max(0, {}_tp_x + {}_tp_y - 1), \tag{4.16}$$

[42] Glej Sliko 1.5 – pri tem smo predpostavili, da je prva oseba mož, druga žena.

[43] Pri izpeljavi upoštevamo neenačbo (4.1) ter si pomagamo s Sliko 1.5 – ob tem privzemimo, da prva oseba označuje moža, drugo ženo.

pri čemer je: ${}_tp_{xy}^{01} = {}_tp_x(1 - {}_tp_y)$.

Enačbi normalizirane enkratne neto premije vdovčeve rente s spodnjo (4.17) in z zgornjo (4.18) mejo zapišemo kot:

$$\bar{a}_{y|x}^{min} = \sum_{k=1}^{(\omega-x)} v^k\ {}_kp_x - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k\, Min(\ {}_kp_x,\ {}_kp_y), \tag{4.17}$$

$$\bar{a}_{y|x}^{max} = \sum_{k=1}^{(\omega-x)} v^k\ {}_kp_x - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k\, Max(0,\ {}_kp_x + {}_kp_y - 1). \tag{4.18}$$

Ob predpostavki neodvisnosti je enačba normalizirane enkratne neto premije enaka:

$$\bar{a}_{y|x}^{neod} = \sum_{k=1}^{(\omega-x)} v^k\ {}_kp_x - \sum_{k=1}^{Min\{\omega-x,\omega-y\}} v^k\ {}_kp_x\, {}_kp_y. \tag{4.19}$$

Velja neenačba:

$$\bar{a}_{y|x}^{min} \leq \bar{a}_{y|x}^{neod} \leq \bar{a}_{y|x}^{max}. \tag{4.20}$$

Za prenumerandno vdovsko rento dobimo enačbe (4.17), (4.18) in (4.19), ko k teče od 0 ... (ω-x) ... min(ω-x,ω-y), medtem ko rento označimo: $\ddot{a}_{y|x}^{min}$, $\ddot{a}_{y|x}^{max}$ in $\ddot{a}_{y|x}^{neod}$.

4.5 Vrednotenje vpliva soodvisnosti T(x) in T(y) na premijo rentnega zavarovanja

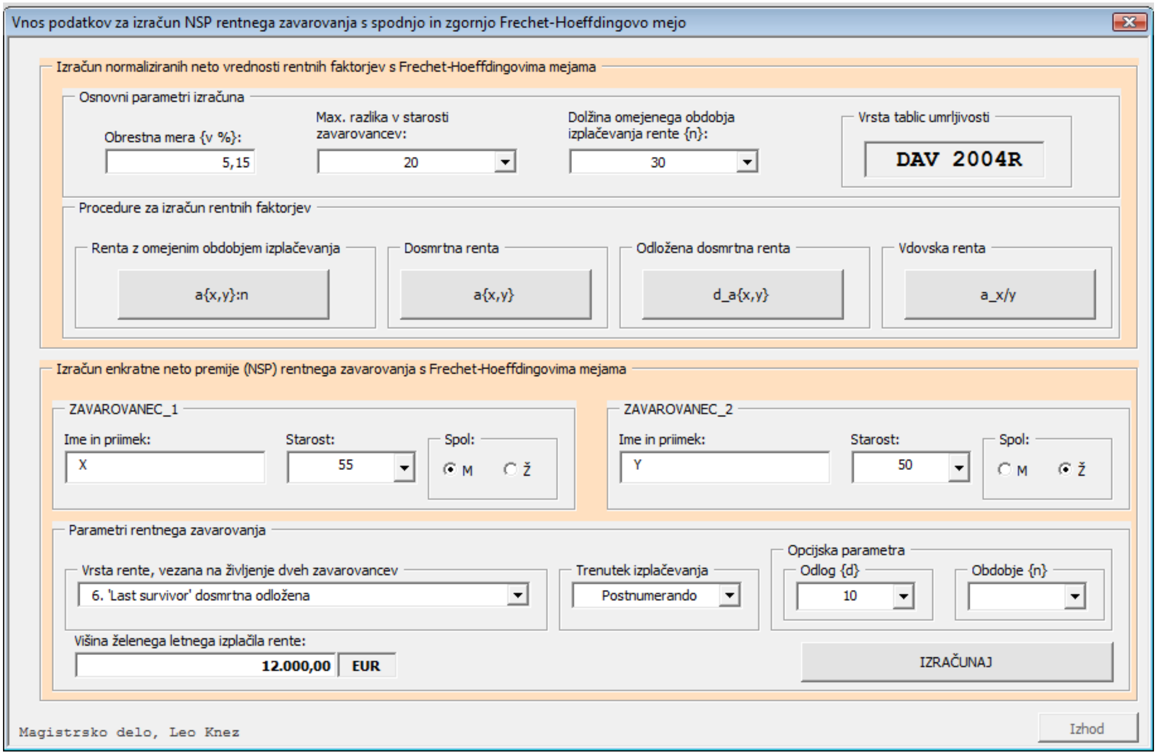
Matematične modele za analizo vrednosti rentnega zavarovanja smo izpeljali. Svojevrstna zadrega nastopi z vrsto opcijskih parametrov, ki jih imamo na razpolago, s tem pa veliko kombinacij, ki jih je zelo zamudno in težko natančno pokriti z ročnimi izračuni. Poleg tega vemo, da so napake pri ročnih posegih pogost pojav. Da bi se temu izognili in hkrati numerično obdelali kar največji obseg podatkov, vzpostavimo modularno informacijsko rešitev. Tako bomo najlažje odkrili zakonitosti obnašanja aktuarske vrednosti rentnega zavarovanja ob predpostavki odvisnosti tveganj smrtnosti rentnih upravičencev.

4.5.1 Informacijska rešitev

Različni programski paketi naprednemu uporabniku nudijo raznovrstno uporabo, medtem ko večina običajnih uporabnikov MS okolja nikoli ne bi povezala z orodji za razvoj hitrih informacijskih rešitev RAD (angl. *Rapid Application Development*). S skriptnim programskim jezikom VBa lahko MS *Office* uporabimo kot razvojno orodje za izdelavo lastnih informacijskih rešitev, ki se odlikujejo z visokimi predstavitvenimi zmožnostmi. Poleg tega lastna programska rešitev omogoča fleksibilnost in je v veliko pomoč pri doslednem razumevanju proučevanega predmeta analize. Prav zaradi tega smo se v tej razvojni fazi prototip aplikacije odločili izdelati v razvojnem okolju VBa in ne v okolju Visual Studio, ki bi bilo glede varnosti, hitrosti, odzivnosti in prenosljivosti informacijske rešitve bolj primerno.[44] Naša usmeritev se sicer za koristno izkaže tedaj, ko aplikacijo razvija en sam razvijalec in je namenjena omejeni skupini uporabnikov, ki jo uporabljajo v homogenem informacijskem okolju.

Na Sliki 27 prikazujemo zaslonsko masko aplikacije, kamor se vnašajo podatki za izračun enkratne neto premije rentnega zavarovanja s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo.

Slika 27: Vnos podatkov za izračun normaliziranih neto vrednosti rentnih faktorjev in enkratne neto premije rentnega zavarovanja s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo



[44] Aplikacija (angl. *application*) je računalniški program, namenjen končnemu uporabniku.

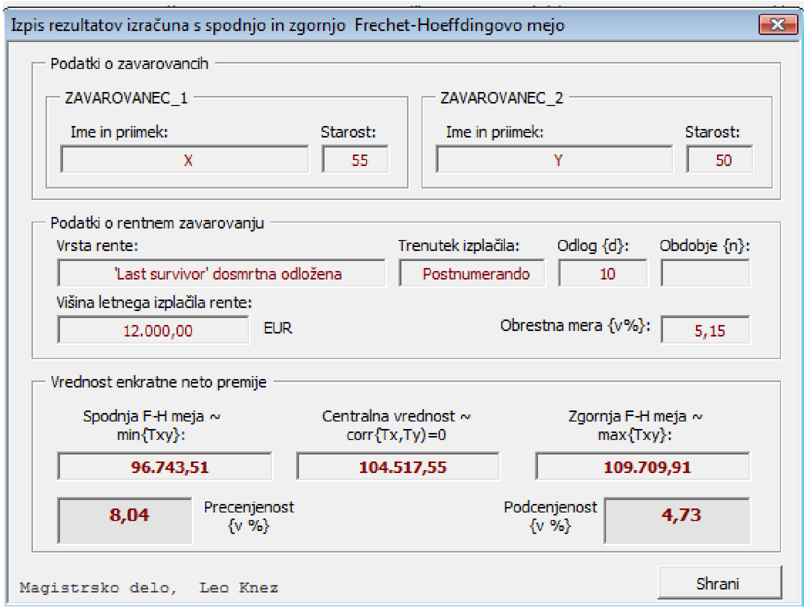
Procedure v ozadju informacijske rešitve lahko v grobem predstavimo v dveh delih:

[1] Izračun normaliziranih neto vrednosti rentnih faktorjev, s katerimi vzpostavimo bazo za vse poljubne kombinacije opcijskih parametrov zavarovanja, ki so: starost zavarovancev, spol, vrsta življenjske rente, trenutek izplačevanja, dolžina omejenega obdobja izplačevanja (n), želena višina življenjske rente, dolžina odloga življenjske rente (u). Ta podatkovna baza, ki vsebuje več kot 256.000 različnih kombinacij, nam bo služila pri numerični analizi v nadaljevanju.

[2] Izračun vrednosti enkratne neto premije rentnega zavarovanja ob poljubno izbranih parametrih rentnega zavarovanja. Izpis rezultatov izračuna s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo prikazuje Slika 28.

Rezultatov izpisa za zdaj ne bomo interpretirali, saj podrobnejša numerična analiza sledi v nadaljevanju. Tam se bomo tudi vrnili k primeru, ki ga prikazuje Slika 28.

Slika 28: Izpis vrednosti enkratne neto premije izbranega rentnega zavarovanja s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo



Programska koda informacijske rešitve se nahaja v Prilogi 12.

4.5.2 Numerični izračuni

Imamo dve osebi, stari x in y let, s preostalo življenjsko dobo T(x) in T(y). Predpostavimo, da gre za moža in ženo – posplošitev je možna tudi na druga partnerska razmerja, če uspemo medsebojno odvisnost okarakterizirati kot PQD. Ovrednotenje vpliva soodvisnosti T(x) in T(y) izvedemo v skladu s procesnim diagramom, ki ga prikazuje Slika 26, in sicer:

AKTUARSKI MODEL

[a] Dosmrtna renta na hkratni življenji - $\bar{a}_{xy}$
[b] Življenjska renta na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja - $\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$
[c] Odložena dosmrtna renta na zadnje življenje - ${}_{u|}\bar{a}_{\overline{xy}}$
[d] Življenjska renta na zadnje življenje z omejenim obdobjem izplačevanja - $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}$
[e] Vdovska renta - $\bar{a}_{x|y}$
[f] Vdovčeva renta - $\bar{a}_{y|x}$

VHODNI PARAMETRI ZAVAROVANJA

Tabela 3: Vhodni parametri vrednotenja rentnega zavarovanja

Starost Moški – x Ženska – y	Dolžina omejenega obdobja izplačevanja življenjske rente (n)	Dolžina odloga do izplačevanja življenjske rente (u)
$x = y$ * $x = y + 5$ * $x = y - 5$ *	$n \in \{1, 2 \dots 30\}$	$u \in \{1, 2 \dots 30\}$

Legenda: *$\mathrm{Min}\{x, y\} = 25$ let

Netvegana obrestna mera $\xi = 5{,}15\ \%$, T(x) in T(y) sta PQD soodvisni, uporabljamo tablice umrljivosti DAV 2004-R, življenjska renta se izplačuje postnumerandno.[45]

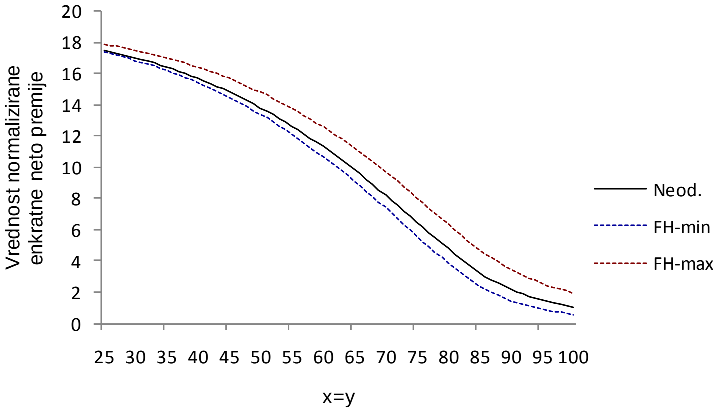
VREDNOST ZAVAROVANJA – REZULTATI

Za lažje sledenje grafičnim prikazom naj pojasnimo, da oznaka ENP predstavlja enkratno neto premijo (angl. *net single premium*), ENP_neod je izračunana vrednost enkratne neto premije ob predpostavki neodvisnosti, ENP_min je izračunana vrednost enkratne neto premije s spodnjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo in ENP_max je izračunana vrednost enkratne neto premije z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo. Numerične izračune, na podlagi katerih so nastali grafikoni (Slika 29 – Slika 42), podajamo v Prilogah 3–9.

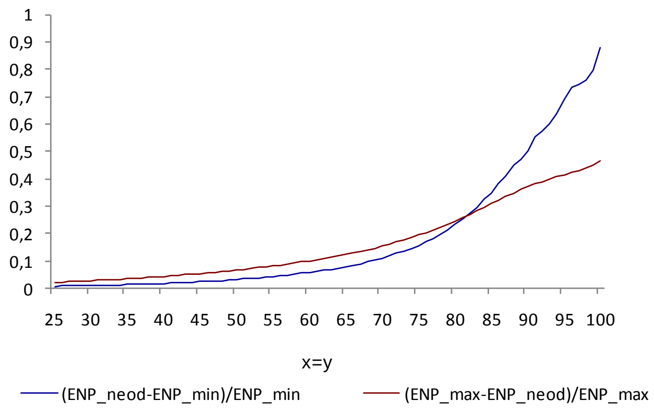
[45] Ker trenutek izplačevanja ne vpliva na zakonitosti, ki jih z analizo odkrivamo, smo zaradi omejenega obsega dela privzeli postnumerandni način izplačevanja življenjske rente.

[a] Dosmrtna renta na hkratni življenji - $\bar{a}_{xy}$

Slika 29: Vrednost normalizirane enkratne neto premije dosmrtne rente na hkratni življenji s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo

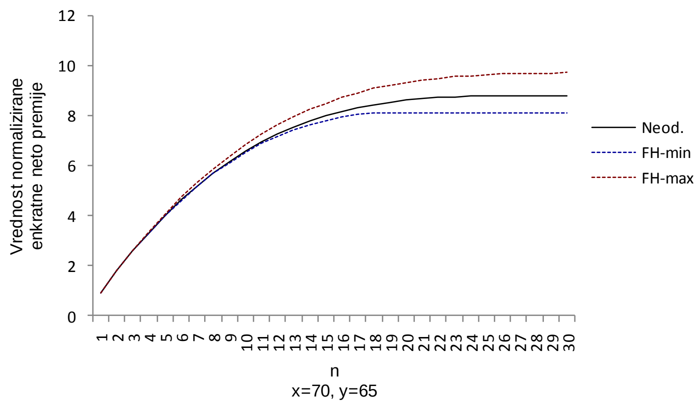


Slika 30: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije dosmrtne rente na hkratni življenji

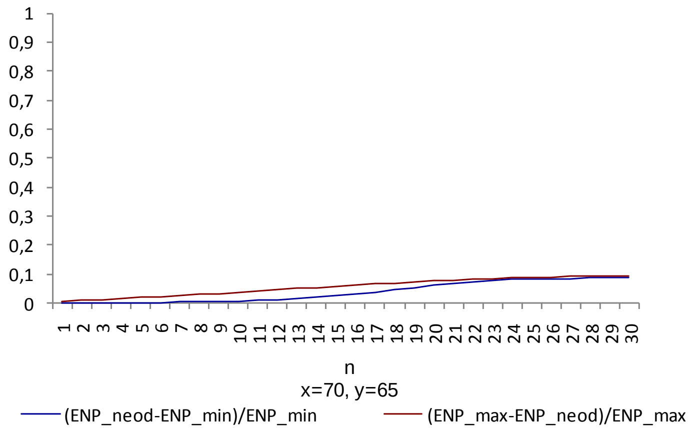


[b] Življenjska renta na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja - $\bar{a}_{xy:\overline{n}|}$

Slika 31: Vrednost normalizirane enkratne neto premije življenjske rente na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja s Fréchet-Hoeffdingovima mejama

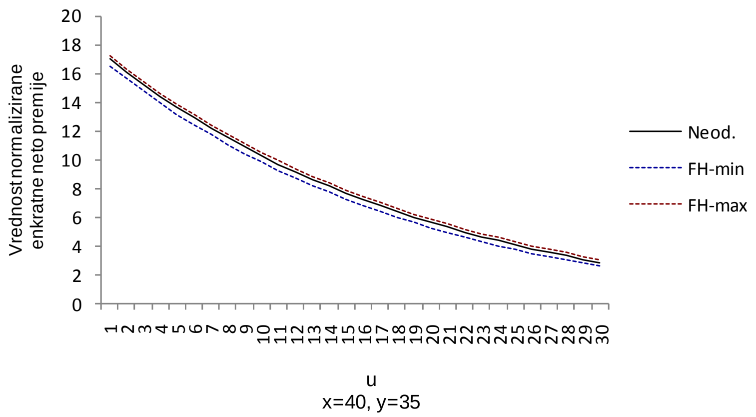


Slika 32: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije življenjske rente na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja

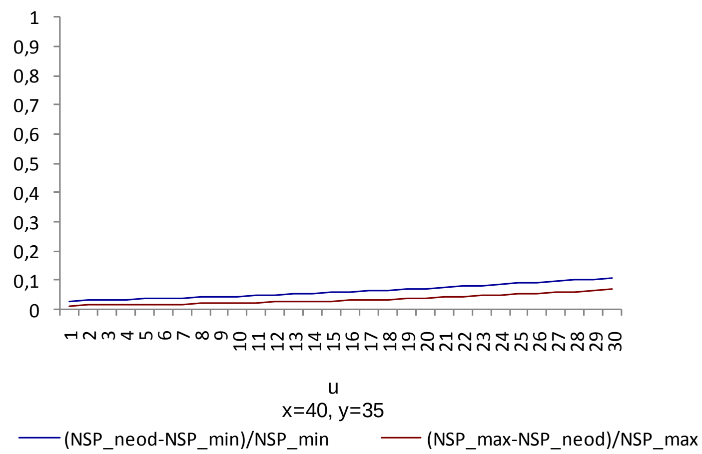


[c] Odložena dosmrtna renta na zadnje življenje - ${}_{u|}\bar{a}_{\overline{xy}}$

Slika 33: Vrednost normalizirane enkratne neto premije odložene dosmrtne rente na zadnje *življenje s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo*

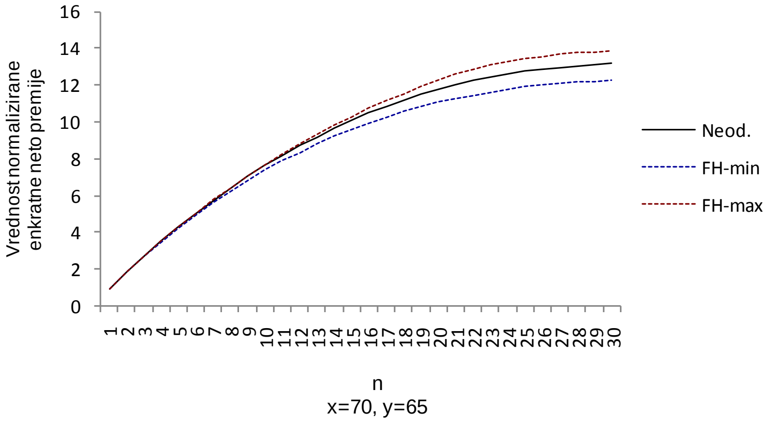


Slika 34: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije odložene dosmrtne rente na zadnje *življenje*

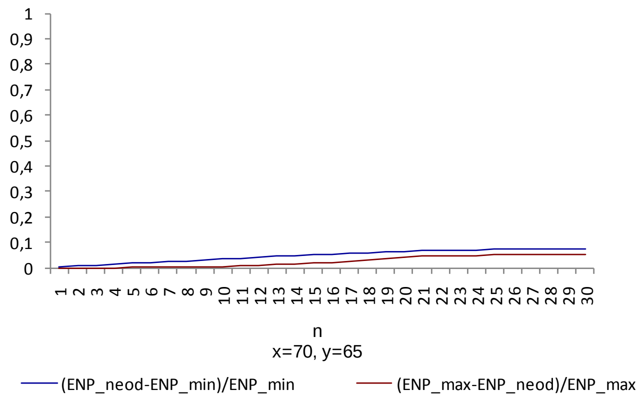


[d] Življenjska renta na zadnje življenje z omejenim obdobjem izplačevanja - $\bar{a}_{\overline{xy}:n]}$

Slika 35: Vrednost normalizirane enkratne neto premije življenjske rente na zadnje življenje z omejenim obdobjem izplačevanja s Fréchet-Hoeffdingovima mejama

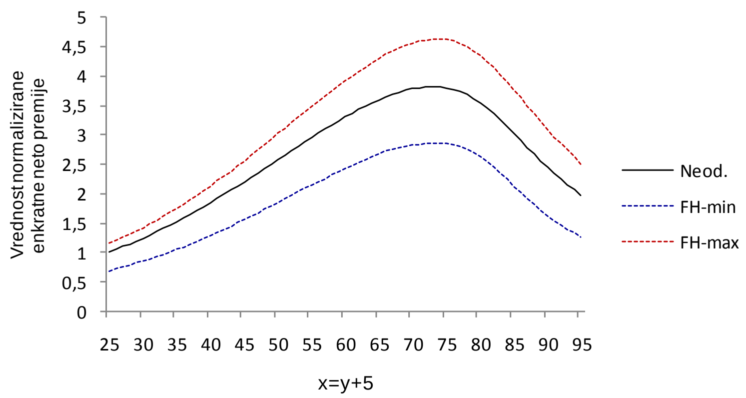


Slika 36: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije življenjske rente na zadnje življenje z omejenim obdobjem izplačevanja

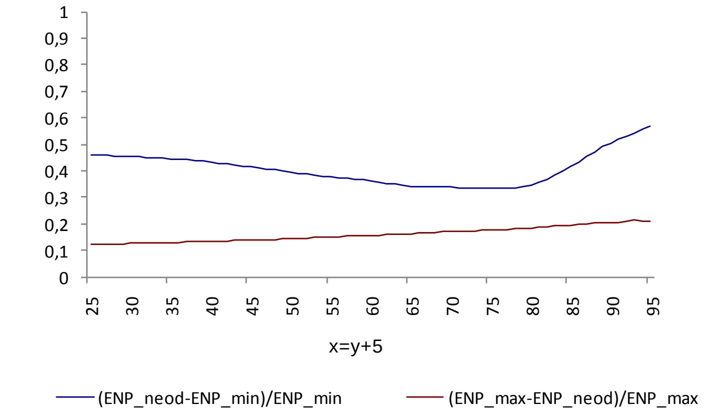


[e] Vdovska renta - $\bar{a}_{x|y}$

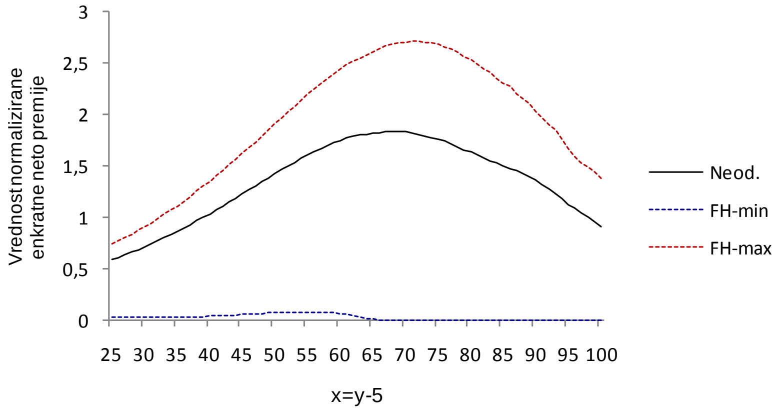
Slika 37: Vrednost normalizirane enkratne neto premije vdovske rente s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo



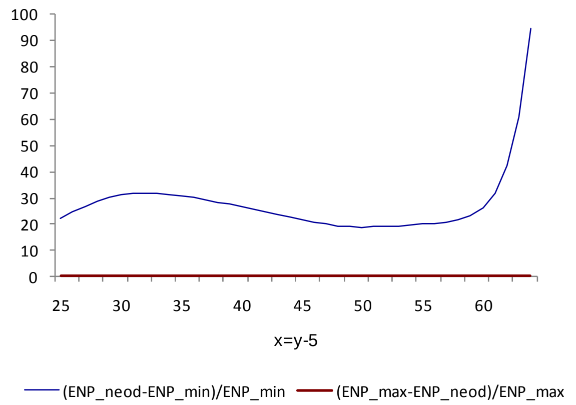
Slika 38: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije vdovske rente



Slika 39: Vrednost normalizirane enkratne neto premije vdovske rente s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo

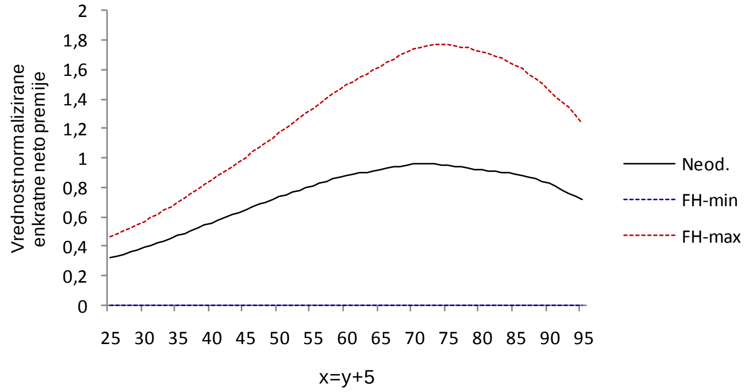


Slika 40: Gibanje potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije vdovske rente

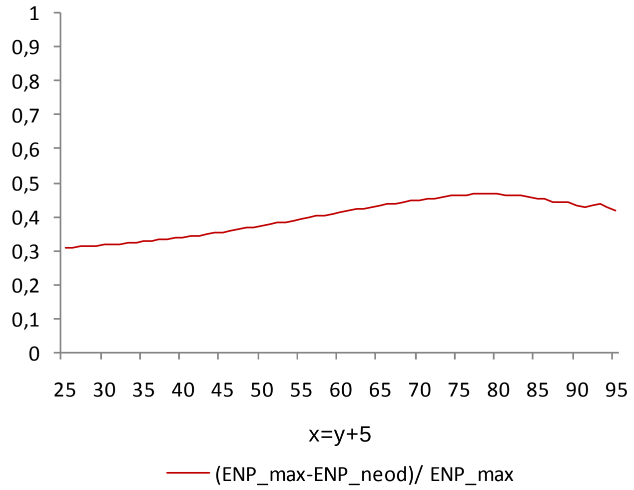


[f] Vdovčeva renta - $\bar{a}_{y|x}$

Slika 41: Vrednost normalizirane enkratne neto premije vdovčeve rente s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo



Slika 42: Gibanje potencialne stopnje podcenjenosti enkratne neto premije vdovčeve rente



*Stopnje precenjenosti gredo proti neskončno (deljenje z 0), zato krivulje ni mogoče vrisati.

INTERPRETACIJA IN GLAVNE UGOTOVITVE

Zaradi velikega obsega izračunanih podatkov in boljšega pregleda nad zakonitostjo obnašanja vrednosti rentnega zavarovanja v času, smo numerične rezultate analize prikazali grafično. Tako je bolj razvidna kvaliteta aproksimacije, ki jo bomo ocenjevali glede na absolutno in relativno bližino spodnje in zgornje meje krivulji izračunanih vrednosti ob predpostavki neodvisnosti (črna barva). Slabša kot je aproksimacija, večji je potencialni vpliv soodvisnosti na enkratno neto premijo rentnega zavarovanja. Na podlagi numeričnih izračunov in Slik 29–42 ugotavljamo naslednje:

[a] Pri dosmrtni renti na hkratni življenji je aproksimacija razmeroma dobra, čeprav je opaziti, da s starostjo pada (glej Sliko 29). To prikazuje Slika 30, kjer opazimo, da stopnje potencialne precenjenosti in podcenjenosti s starostjo hitro naraščajo. Poleg tega je opaziti, da po določenem času potencialne stopnje precenjenosti občutno presežejo potencialne stopnje podcenjenosti.

Sklep: vpliv potencialne soodvisnosti na enkratno neto premijo je razmeroma visok.

[b] Pri življenjski renti na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja n se razlike z dolžino obdobja n opazno povečujejo (glej Sliko 31). Ko gre $n \to \infty$ se krivulje ustalijo in posledično tudi razlike, kar prikazuje Slika 32. Za velike vrednosti n velja: $\bar{a}_{xy:n]} \approx \bar{a}_{xy}$. Prirasti vrednosti enkratne neto premije so zaradi učinka časovne vrednosti denarja ter vedno višjih stopenj umrljivosti čedalje manjši in konvergirajo proti 0.

Sklep: potencialni vpliv soodvisnosti na enkratno neto premijo je razmeroma visok in se povečuje tako s starostjo kot z dolžino omejenega obdobja izplačevanja rente.

[c] Aproksimacija pri odloženi dosmrtni renti na zadnje življenje je dobra, pri čemer potencialne stopnje precenjenosti in podcenjenosti s starostjo naraščajo, a zmerno (glej Sliko 34). Krivulje na Sliki 33 so značilne konveksne oblike zaradi učinka aktuarskega diskontiranja v času odloga.[46]

Vrnimo se k rezultatu izračuna, ki ga prikazuje sporočilo aplikacije s Sliko 28. Za letno izplačilo 10 let odložene dosmrtne postnumerandne rente v višini 12.000 evrov bi morali 55 in 50 let stari osebi plačati enkratno neto premijo v višini 104.517,55 evrov. Vidimo, da potencialna stopnja precenjenosti za 3,31 odstotnih točk presega potencialno stopnjo podcenjenosti, kar je razvidno tudi iz Slike 34. Absolutna razlika med zgornjo in spodnjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo presega 13.000 evrov.

Sklep: potencialni vpliv soodvisnosti na enkratno neto premijo je zmeren.

[d] Pri življenjski renti z omejenim obdobjem izplačevanja na zadnje življenje se ugotovitve ne razlikujejo od tistih, do katerih smo prišli v točki [b]. Tokrat velja približna enakost: $\bar{a}_{\overline{xy}:n]} \approx \bar{a}_{\overline{xy}}$, ko gre $n \to \infty$. Stanje zadnjega življenja nima vpliva

[46] V primeru, ko je starost rentnih upravičencev spremenljivka, odlog (u) pa v določeni višini izbrana konstanta, dobimo krivulje konkavne oblike. Zaradi učinka aktuarskega diskontiranja (relativno visokih stopenj preživetja oseb pri nizkih starostih) je nakup odložene dosmrtne rente bolj oportun v mlajših kot starejših letih. Za enako višino življenjske rente bi par pri 30-ih letih odštel sorazmerno malo več denarja v primerjavi s parom, ki ima recimo 40 let – razlika v premiji in starosti je zaradi konkavnosti značilno nesorazmerna v korist mlajšega para.

na zakonitosti obnašanja soodvisnosti in njenih posledic na vrednost enkratne neto premije.

Sklep: potencialni učinek soodvisnosti na enkratno neto premijo je visok.

[e] Aproksimacija spodnje in zgornje Fréchet-Hoeffdingove meje je pri vdovski renti, ko je moški 5 let starejši od žene (x = y + 5), slaba. To še posebno velja za spodnjo mejo, kjer je absolutna razlika do meje neodvisnosti večja, čeprav Slika 38 razkriva, da potencialne stopnje precenjenosti nekaj časa upadajo, medtem ko se potencialne stopnje podcenjenosti vseskozi povečujejo. Absolutne razlike med zgornjo in spodnjo mejo naraščajo. Vse tri krivulje so značilno izbočene (glej Sliko 37). Pojasnilo: stopnje umrljivosti moža so v skladu z zakonitostmi krivulje smrtnosti v začetnem obdobju relativno nizke, medtem ko s časom naraščajo vse hitreje v primerjavi s hitrostjo upadanja funkcije preživetja žene. Po določenem času začnejo stopnje verjetnosti preživetja žene hitreje upadati, kot naraščajo stopnje umrljivosti moškega in vrednosti enkratne neto premije se pričnejo zmanjševati. Slika 39 prikazuje primer, ko je ženska 5 let starejša od moža (x = y − 5). Tedaj postane spodnja meja neuporabna. Stopnje precenjenosti gredo proti neskončno (glej Sliko 40).

Sklep: potencialni vpliv soodvisnosti na enkratno neto premijo vdovske rente je visok – vpliv soodvisnosti je še toliko bolj izrazit tedaj, ko je žena starejša od moža.

[f] Aproksimacija je v primeru vdovčeve rente slabša kot pri vdovski. Ker je mož tudi tokrat 5 let starejši od žene (x = y + 5) je neposredna primerjava rezultatov iz Slik 37 in 41 omogočena in poučna. Spodnja meja je praktično neuporabna. Njena vrednost je enaka 0, zato krivulje precenjenosti ni mogoče vrisati v Sliko 42. Slika 41 potrjuje sklep, do katerega smo prišli v drugem poglavju. Ta pravi, da je jakost umrljivosti ovdovelih moških v vseh starostnih skupinah nadpovprečno visoka. Tudi zaradi tega je potencialni učinek precenjenosti vdovčeve rente bistveno drugačen (neskončen) od potencialnega učinka podcenjenosti. Rezultati so konsistentni z dosedanjimi ugotovitvami. Upoštevanje predpostavke neodvisnosti zato lahko privede do popolnoma napačne vrednosti enkratne neto premije.

Sklep: potencialni vpliv soodvisnosti na vrednost enkratne neto premije vdovčeve rente je zelo visok.

Poglejmo si sedaj, kakšne so praktične posledice naših zgornjih ugotovitev za zavarovanca, ki želita skleniti rentno zavarovanje, in zavarovalnico, ki v sklenitev ponuja osem vrst rentnih zavarovanj. Pustimo ob strani dejstvo, da ima vsaka vrsta življenjske rente svojo funkcijo in da jih je neodvisno od te težko primerjati. Kljub temu bomo naredili izjemo ter se osredotočili izključno na finančno sliko vsake izmed vrst ter ocenili, katera se potencialno najbolj izplača zavarovancema in katera zavarovalnici.

Imamo dve osebi. Mož je star 50 let (x = 50), njegova žena 48 let (y = 48). Življenjska renta se izplačuje prenumerandno na letni ravni v višini 16.500 evrov. Zanju še sprejemljiva dolžina odloga do začetka izplačevanja rente je 15 let, dolžina omejenega obdobja izplačevanja pa 30 let. Netvegano obrestno mero ocenjujemo na 5,15 odstotka, tveganja so PQD soodvisna in uporabljamo tablice umrljivosti DAV 2004-R. V Tabeli 4 so prikazane izračunane vrednosti enkratne neto premije s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo za osem vrst rentnih zavarovanj.

Tabela 4: Vrednosti enkratne neto premije rentnih zavarovanj s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo

X	Y	Letna renta (EUR)	Vrsta rente	(u)	(n)	ENP (neod.)	ENP FH_S	ENP FH_Z	Potencialna podcenjenost (v %)	Potencialna precenjenost (v %)
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{xy:n\rceil}$	-	30	235.557,56	234.025,76	243.554,79	3,28	0,65
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{xy}$	-	-	247.196,04	240.586,71	260.969,49	5,28	2,75
50	48	16.500,00	${}_u\ddot{a}_{xy}$	15	-	75.716,12	69.209,45	87.242,11	13,21	9,40
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{\overline{xy}:n\rceil}$	-	30	260.675,97	252.678,74	262.207,77	0,58	3,16
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{\overline{xy}}$	-	-	293.454,69	279.681,24	300.064,02	2,20	4,92
50	48	16.500,00	${}_u\ddot{a}_{\overline{xy}}$	15	-	115.284,95	103.758,96	121.791,62	5,34	11,11
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{x\|y}$	-	-	32.485,20	18.711,75	39.094,53	16,91	73,61
50	48	16.500,00	$\ddot{a}_{y\|x}$	-	-	13.773,45	0,00	20.382,78	32,43	∞

Na podlagi izračunanih vrednosti, prikazanih v Tabeli 4, je pričakovati, da za rentna upravičenca in zavarovalnico ne bodo sprejemljive tiste življenjske rente, ki potencialno obetajo največje stopnje precenjenosti in podcenjenosti enkratne neto premije. Očitno je, da je potrebno poiskati matematični presek interesov obeh strani. Ko to naredimo, opazimo, da za obe strani ostaneta zgolj dve najbolj sprejemljivi vrsti rentnega zavarovanja, in sicer:

[1] življenjska renta na hkratni življenji z omejeno dobo izplačevanja 30 let in
[2] življenjska renta na zadnje življenje z omejeno dobo izplačevanja 30 let.

Kaj na koncu izbereta zakonca, je odvisno od njunih preferenc oziroma funkcije koristnosti.[47] Z vidika vrednosti, ki jih vidimo, se zdi, da sta za zavarovalnico sprejemljivi obe obliki zavarovanja. Zaradi učinka negativne selekcije je za zavarovalnico zagotovo koristno, da postavi enkratno neto premijo v višini, ki najbolje odraža dejanska tveganja, ki jim je izpostavljena. Tovrstna analiza zavarovalnici omogoča prav to, da ponovno premisli o višini varnostnega dodatka, ki ga vgrajuje v premije.

Numerični izračuni so pokazali, da lahko drugo hipotezo magistrskega dela sprejmemo – soodvisnost preostalih življenjskih dob rentnih upravičencev potencialno vpliva na

[47] Področje se dotika vrednotenja življenjskih rent z vidika ekonomske teorije koristnosti, kar na rigorozen in poučen način obravnava Sheshinski (2008) v trinajstem poglavju.

aktuarsko sedanjo vrednost rentnega zavarovanja. Absolutne razlike in stopnje precenjenosti ter podcenjenosti so prevelike, da bi jih lahko opredelili kot slučajne.

4.6 Izzivi zavarovalnic, povezani z rentnim zavarovanjem

V Sloveniji znaša delež denarja, namenjenega zavarovanju, le dobro polovico povprečja Evropske unije. Gre za nekaj več kot 5,4 odstotkov bruto domačega proizvoda. S podrobnim pregledom podatkov ugotovimo, da se v najbolj razvitih evropskih državah veliko več denarja nameni življenjskim in rentnim zavarovanjem v primerjavi s premoženjskimi.[48] V Sloveniji je slika ravno obrnjena. V razvitih državah so rentna zavarovanja nekaj običajnega, ko se ljudje sami zavarujejo za čas po upokojitvi, medtem ko jih v Sloveniji skorajda ne poznamo. Zagotovo je povpraševanje po tovrstnih zavarovanjih pogojeno s stopnjo ekonomskega razvoja, a razlogi so tudi drugje.

V ekonomski teoriji že dalj časa obstaja dilema, povezana z rentnimi zavarovanji, ki še do danes ostaja nerazrešena (angl. *annuity puzzle*). Sproža jo empirično dejstvo, ki zavrača ekonomsko teorijo v delu, ki pravi, da je za posameznika z negotovo prihodnostjo najboljši način maksimizacije vseživljenjske potrošnje ta, da si priskrbi rentno zavarovanje in s tem stabilen vir dohodka v svoji starosti (Vidal-Melía & Lejárraga-García, 2006, str. 200; Cannon & Tonks, 2008, str. 140). Če bi bilo temu res tako, potem bi trg rentnih zavarovanj cvetel. Starejši ljudje, ki naj bi v skladu s teorijo trošili, varčujejo. Vendar pa razlogov ne gre iskati zgolj na strani povpraševanja. Znano je, da so tveganja, povezana z zagotavljanjem rednih izplačil v razmerah vse daljše življenjske dobe posameznika, velika. Kot kažejo izkušnje v razvitem svetu (Cannon & Tonks, 2008, str. 221), so bila rentna zavarovanja na hkratni življenji običajno podcenjena s predpostavko neodvisnosti, medtem ko so bila rentna zavarovanja na zadnje življenje precenjena, zato tudi manj privlačna naložba za zavarovalnice in zavarovance.

Z vidika zavarovalnice govorimo o eksogenih dejavnikih tveganja dolgoživosti, ki dokazano spreminjajo stopnje umrljivosti. Poleg vsesplošnega napredka in razvoja v medicini (Sheshinski, 2008, str. 54) je posebnega pomena tudi poklic, prehrana in izobrazba ljudi. Vse troje pozitivno vpliva na podaljševanje življenjske dobe. Enako pomemben dejavnik tveganja, ki smo ga izpostavili in proučevali v magistrskem delu, je medsebojna odvisnost preostalih življenjskih dob rentnih upravičencev. Videli smo, da predpostavka neodvisnosti, ob empirično prisotni odvisnosti tveganj, vodi do napačnega vrednotenja rentnega zavarovanja in sama po sebi predstavlja endogeni[49] dejavnik tveganja za zavarovalnico. In prav tukaj vidimo največji izziv za zavarovalnice in aktuarje, ki delajo

---

[48] V razvitih evropskih državah približno 60 odstotkov vseh premij odpade na življenjska zavarovanja, medtem ko v Sloveniji le okoli 30 odstotkov. Na področju avtomobilskih zavarovanj je Slovenija po pokritosti pri deležu vozil, za katera je sklenjeno zavarovanje, na prvem mestu v Evropi. Le okoli 0,7 odstotka vozil je nezavarovanih.

[49] Z izrazom označujemo dejavnik tveganja, ki je posledica (opuščanja) ravnanja zavarovalnice. Nanj ima vpliv, za razliko od eksogenih dejavnikov, ki jih aktuarji danes obvladujejo z modeliranjem dolgoživosti.

v njej – da se sistematično pristopi k zbiranju relevantnih podatkov, v matematični obliki prepozna soodvisnost in ovrednoti premijo v višini, ki bo aktuarsko pravična. Tržni prostor, ki je v Sloveniji nezaseden, je pri tem le še dodatna vzpodbuda.

SKLEP

V starejših državah članicah Evropske unije je rentno zavarovanje uveljavljen zavarovalniški produkt, s katerim se osebe zavarujejo za čas po upokojitvi. Za finančno gotovo prihodnost so pripravljene odšteti premijo ter tveganje dolgoživosti prenesti na zavarovalnico. Da bi bilo za zavarovalnico tveganje razumno, mora premijo za zavarovanje oblikovati vsaj v višini, ki bo zagotavljala redno kritje izplačil v času trajanja življenja rentnih upravičencev. To je odvisno od vrste dejavnikov, povezanih z ekonomskim razvojem, razvojem v medicini, izobrazbo, s poklicem zavarovancev, pa tudi od medsebojne odvisnosti preostalih življenjskih dob rentnih upravičencev. Slednjega tradicionalna predpostavka neodvisnosti ne upošteva, zato predstavlja potencialni – endogeni – vir tveganja za zavarovalnico, ki smo ga v magistrskem delu proučili in ovrednotili. Postavili smo dve hipotezi: na podlagi prve smo želeli preveriti obstoj in tip soodvisnosti med preostalima življenjskima dobama rentnih upravičencev, na podlagi druge pa ovrednotiti potencialni učinek vpliva soodvisnosti na višino enkratne neto premije.

V okviru aktuarskih izhodišč smo klasični model preživetja razširili v model preživetja dveh oseb. Izpeljali smo funkcije preživetja za dve življenji in razvili enačbe za aktuarsko vrednotenje rentnih zavarovanj. Ugotovili smo, da relacije, ki veljajo med starostjo in preostalo življenjsko dobo enega posameznika, veljajo tudi za zavarovanje na dve življenji. Funkcijo preživetja posameznika nadomestimo s funkcijo preživetja zavarovanja, ki jo za vrednotenje potrebujemo.

Z analizo umrljivosti moških in žensk v Sloveniji pridemo do odgovora na prvo hipotezo. Izkazalo se je, da zakonski stan spreminja lego in naklon funkcije preživetja posameznika. Jakost umrljivosti ovdovelih moških je v primerjavi s samskimi in poročenimi izrazito višja. Podoben učinek opazimo pri ženskah, ki pa ni tako izrazit. Sklenemo lahko, da zakonski stan spreminja profil umrljivosti v smeri PQD soodvisnosti, kar pomeni, da daljša pričakovana preostala življenjska doba žene povečuje obete preživetja moža in nasprotno.

Vpliv PQD soodvisnih slučajnih spremenljivk preostale življenjske dobe rentnih upravičencev na enkratno neto premijo, smo ovrednotili z uporabo Fréchet-Hoeffdingove kopule, za katero smo matematično dokazali, da v svojih skrajnih mejah vsebuje dvorazsežne potenciale soodvisnosti. Numerični izračuni so pokazali, da lahko drugo hipotezo magistrskega dela sprejmemo – vpliv soodvisnosti na vrednost enkratne neto premije se krepi s starostjo rentnih upravičencev, z odlogom izplačil in dolžino obdobja izplačevanja življenjske rente. Gibanje potencialnih stopenj precenjenosti in podcenjenosti kaže zakonitost v časovnem razvoju. Poleg tega so stopnje prevelike, da bi jih lahko označili kot slučajne.

Prednosti izvedene aktuarske analize vrednosti enkratne neto premije vidimo v tem, da se sistematično, na podlagi ocenjenih posledic odvisnih tveganj, presodi o ustrezni višini varnostnega dodatka, ki se vgrajuje v premije. To je tudi velik izziv, ki ga vidimo za zavarovalnice in aktuarsko pravično vrednotenje rentnega zavarovanja.

LITERATURA IN VIRI

1. Agencija za zavarovalni nadzor (2010). *Poročilo o stanju na področju zavarovalništva in o delu Agencije za zavarovalni nadzor za leto 2008.* Najdeno 15. marca 2010 na spletnem naslovu: http://www.a-zn.si/slo/client/default.asp?r=-1&n=169&s=-1&p=content
2. Arh, F. (2001). *Statistika 1. Obrazci in postopki*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
3. Ash, R. B. (2008). *Basic Probability Theory*. New York: Wiley.
4. Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, J., A. (2008). *Investments* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.
5. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (2nd ed.). Illinois: The Society of Actuaries, Itacsa.
6. Brown, J. R., & Poterba, J. M. (2000). Joint Life Annuities And Annuity Demand By Married Couples. *Journal of Risk and Insurance, 67*(4), 527–553.
7. Cannon, E., & Tonks, I. (2008). *Annuity Markets*. New York: Oxford University Press.
8. Carriere, J. F. (1994). Dependent Decrement Theory. *Transactions of Society of Actuaries*, *46*, 46–65.
9. Carriere, J. F., & Chan, L. K. (1986). The Bounds of Bivariate Distributions that Limit The Value of Last-Survivor Annuities. *Transactions of Society of Actuaries*. *38*, 51–74.
10. Dekking, F. M., Kraaikamp, I., Lopuhaä, H. P., & Meester, L. E. (2005). *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding Why and How*. London: Springer-Verlag.
11. Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks*. New York: John Wiley & Sons.
12. Denuit, M., Dhaene, J., Le Bailly de Tilleghem, C., & Teghem, S. (2001). Measuring the Impact of a Dependence among insured lifelenghts. *Belgian Actuarial Bulletin*, *1*(1), 18–39.
13. Dhaene, J., Vanneste, M., & Wolthuis, H. (2000). A Note on Dependencies in Multiple Life Statuses. *Mitteilungen der Schweiz Aktuarvereinigung, 1*, 19–34.
14. Dickson, D. C. M., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. New York: Cambrige University Press.
15. Formulae and Tables for Examinations of The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries (2002). London: Cambridge University Press.
16. Freedman, D., Pisani, R., & Purves, R. (2007). *Statistics* (4th ed.). New York: W. W. Norton & Company.
17. Frees, E. W., & Valdez, E. (1997). Understanding Relationship Using Copulas. *North America Actuarial Journal*, *2*(1), 1–25.
18. Frees, E. W., Carriere, J. F., & Valdez, E. (1997). Annuity Valuation with Dependent Mortality. *The Journal of Risk and Insurance*, *63*(2), 229–261.

19. Gerber, H. U. (1996). *Matematika življenjskih zavarovanj* (prevedel: Darko Medved). Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Zavarovalnica Triglav, d. d.
20. Gerber, H. U. (1997). *Life insurance mathematics* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.
21. Jagger, C., & Sutton, C. J. (1991). Death after marital bereavement – is the risk increased? *Statistics in Medicine, 10*(3), 395–404.
22. Kaas, R., Dhaene, J., & Goovaerts, M. (2000). Upper and lower bounds for sums of random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(3), 151–168.
23. Kainhofer, R., Predota, M., & Schmock, U. (2005). The New Austrian Annuity Valuation Table AVÖ 2005R. Najdeno 16. novembra 2009 na spletnem naslovu: http://www.avoe.at/pdf/mitteilungen/H13_w3.pdf
24. Komelj, J. (2009). Zapiski predavanj iz aktuarske matematike III. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
25. Larsen, R. J., & Marx, M. L. (2001). *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications* (3rd ed.). New York: Prentice Hall.
26. Luciano, E., Spreeuw, J., & Vigna, E. (2008). Modelling stochastic mortality for dependent lives. *Insurance: Mathematics and Economics, 43*(2), 234–244.
27. Marshall, A. W., & Olkin, I. (1988). Families of Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association, 83*(62), 834–841.
28. Milevsky, A. M. (2006). *The Calculus of Retirement Income: Financial Models for Pension Annuities and Life Insurance*. New York: Cambridge University Press.
29. Nelsen, B. R. (2006). *An Introduction to Copulas*. New York: Springer-Verlag.
30. Nelsen, B. R., Molina, Q. J. J., Lallena, R. A. J., & Flores, U. M. (2004). Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions. *Journal of Multivariate Analysis*, *90*(2), 348–358.
31. Norberg, R. (1989). Actuarial Analysis of Dependent Lives, *Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, 2*, 243–255.
32. Norberg, R. (2009). Forward mortality and other vital rates – are they the way forward?. Najdeno 27. novembra 2009 na spletnem naslovu: http://stats.lse.ac.uk/norberg/links/papers/FORW-MORT.pdf
33. Parkes, C. M., Benjamin, B., & Fitzgerald, R. G. (1969). Broken Heart: A Statistical Study of Increased Mortality Among Widowers. *British Medical Journal*, *1*, 740–743.
34. Pasdika, U., & Wolff, J. (2005). Coping with Longevity: The New German Annuity Valuation Table DAV 2004R. Najdeno 16. novembra 2009 na spletnem naslovu: http://ccp.ucr.ac.cr/creles/100m/m-rs05-1_xvi.pdf
35. Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., & Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business.* New York: Oxford University Press.
36. Promislow, D. S. (2009). *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. West Sussex: Wiley.

37. Rice, A. J. (2007). *Mathematical Statistics and Data Analysis* (3rd ed.). California: Thomson.
38. Richardson, C. H., & Miller I. L. (1946). *Financial Mathematics*. New York: D. Van Nostrand Company.
39. Sheshinski, E. (2008). *The Economic Theory of Annuities*. New Jersey: Princeton University Press.
40. Statistični urad (2009). *Podatki o prebivalstvu Slovenije po spolu, starosti in zakonskem stanu po stanjih na dan 31. december 2000–2007 (Podatki pridobljeni na posebno zaprosilo, dne 14. oktobra 2009, kontaktna oseba: Barica Razpotnik).*
41. Statistični urad (2009). *Podatki o umrlih prebivalcih Slovenije po spolu, starosti in zakonskem stanu v obdobju 2000–2007*. Najdeno 14. oktobra 2009 na spletnem naslovu: http://www.stat.si/pxweb/Dialog/varval.asp?ma=0554510S&ti=Umrli+po+starostnih+skupinah%2C+spolu+in+zakonskem+stanu%2C+Slovenija%2C+letno&path=../Database/Dem_soc/05_prebivalstvo/03_05155_nar_gib/02_05545_umrli/&lang=2
42. Stephens, R. (2008). *Visual Basic 2008: Programmer' s Reference*. Indiana: Wiley.
43. Vidal-Melía, C., & Lejárraga-García, A. (2006). Demand For Life Annuities From Married Couples With A Bequest Motive. *Journal of Pension Economics and Finance*, *5*(2), 197–229.
44. Ward, A. (1976). Mortality of Bereavement. *British Medical Journal*, *1*, 700–702.
45. Weisman, S. (2009). The Truth About Buying Annuities. New Jersey: Pearson Education.
46. Williamson, G. K. (1999). *Getting Started in Annuities*. New York: John Wiley & Sons.
47. Zhu, Y. (2007). *Actuarial Model: Life Insurance and Annuity*. Boston: International Press.

PRILOGE

KAZALO PRILOG

Priloga 1: Pregled slovenskih prevodov tujih izrazov

Actuarial present value	Aktuarska sedanja vrednost
Aggregate life table	Agregatne tablice umrljivosti
Annuitant	Rentni upravičenec
Annuity	Življenjska renta
Annuity certain	Finančna renta
Annuity contract	Rentno zavarovanje
Annuity puzzle	Dilema življenjske rente
Annuity-due	Prenumerandna renta
Annuity-immediate	Postnumerandna renta
Application	Aplikacija (računalniški program)
Bivariate copula	Dvorazsežna kopula
Bivariate distributions	Dvorazsežne porazdelitve
Common shock model	Model skupnega šoka
Comonotonicity	Komonotonost
Contingent Life Insurance	Zavarovanje na življenje
Curtate-future lifetime	Odrezana preostala življenjska doba
Deffered whole-life annuity	Odložena dosmrtna renta
Dependent models	Modeli odvisnosti
Force of interest rate	Jakost obrestne mere
Force of mortality	Jakost smrtnosti
Last-Survivor Status	Stanje zadnjega življenja
Life table	Tablice umrljivosti
Longevity modeling	Modeliranje dolgoživosti
Longevity risk	Tveganje dolgoživosti
Markov chain model	Markovski verižni model
Measures of association	Mere povezanosti
Net single premium	Enkratna neto premija
Rapid application development tools (RAD)	Orodja za razvoj hitrih informacijskih rešitev
Reversionary annuity	Vdovska renta *(vdovčeva renta)*
Risk free rate of interest	Netvegana obrestna mera
Safety loading	Varnostni dodatek
Scale invariant	Mersko invarianten *(neobčutljiv)*
Select life table	Selektivne tablice umrljivosti
Survival function	Funkcija preživetja
Survival models	Modeli preživetja
Term annuity	Življenjska renta z omejeno dobo izplačevanja
The Joint-Life Status	Stanje hratnih življenj
Whole-life annuity	Dosmrtna renta (vseživljenjska renta)

Priloga 2: Nemške tablice umrljivosti rentnih upravičencev DAV 2004-R

	1st Order mortality 'best estimate' + 'safety margin'				2nd Order mortality 'best estimate'			
	Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'		Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'	
	Males	Females	Males	Females	Males	Females	Males	Females
Age	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y
0	0,003439	0,002694	0,002546	0,002549	0,004076	0,003226	0,003018	0,003053
1	0,000317	0,000280	0,000234	0,000265	0,000375	0,000335	0,000278	0,000317
2	0,000214	0,000160	0,000158	0,000152	0,000253	0,000192	0,000187	0,000182
3	0,000158	0,000124	0,000117	0,000117	0,000187	0,000148	0,000139	0,000140
4	0,000122	0,000101	0,000090	0,000095	0,000145	0,000120	0,000107	0,000114
5	0,000108	0,000078	0,000080	0,000074	0,000128	0,000094	0,000095	0,000089
6	0,000102	0,000081	0,000076	0,000076	0,000121	0,000097	0,000090	0,000091
7	0,000087	0,000080	0,000065	0,000076	0,000104	0,000096	0,000077	0,000091
8	0,000099	0,000069	0,000073	0,000065	0,000117	0,000082	0,000087	0,000078
9	0,000084	0,000068	0,000062	0,000065	0,000100	0,000082	0,000074	0,000077
10	0,000083	0,000066	0,000061	0,000062	0,000098	0,000079	0,000073	0,000075
11	0,000098	0,000071	0,000073	0,000067	0,000117	0,000085	0,000086	0,000081
12	0,000104	0,000075	0,000077	0,000071	0,000123	0,000090	0,000091	0,000085
13	0,000114	0,000079	0,000084	0,000075	0,000135	0,000094	0,000100	0,000089
14	0,000140	0,000092	0,000103	0,000087	0,000165	0,000110	0,000122	0,000104
15	0,000192	0,000120	0,000142	0,000114	0,000228	0,000144	0,000169	0,000136
16	0,000276	0,000144	0,000205	0,000137	0,000328	0,000173	0,000243	0,000164
17	0,000364	0,000166	0,000270	0,000157	0,000432	0,000199	0,000320	0,000188
18	0,000596	0,000235	0,000442	0,000223	0,000707	0,000282	0,000523	0,000267
19	0,000630	0,000238	0,000467	0,000225	0,000747	0,000285	0,000553	0,000269
20	0,000627	0,000230	0,000464	0,000218	0,000743	0,000275	0,000550	0,000260
21	0,000636	0,000211	0,000471	0,000199	0,000754	0,000252	0,000558	0,000239
22	0,000625	0,000215	0,000463	0,000203	0,000741	0,000257	0,000548	0,000243
23	0,000642	0,000201	0,000475	0,000190	0,000761	0,000240	0,000563	0,000227
24	0,000622	0,000222	0,000460	0,000210	0,000737	0,000266	0,000546	0,000251
25	0,000617	0,000225	0,000457	0,000213	0,000731	0,000270	0,000541	0,000255
26	0,000616	0,000225	0,000456	0,000213	0,000730	0,000270	0,000540	0,000255
27	0,000627	0,000235	0,000471	0,000222	0,000743	0,000281	0,000558	0,000266
28	0,000613	0,000258	0,000485	0,000244	0,000726	0,000309	0,000574	0,000293
29	0,000603	0,000280	0,000502	0,000265	0,000715	0,000335	0,000595	0,000317
30	0,000598	0,000291	0,000515	0,000275	0,000709	0,000348	0,000610	0,000329
31	0,000605	0,000302	0,000546	0,000292	0,000717	0,000361	0,000647	0,000350
32	0,000626	0,000318	0,000568	0,000329	0,000742	0,000381	0,000674	0,000394
33	0,000663	0,000344	0,000601	0,000357	0,000786	0,000413	0,000712	0,000427
34	0,000713	0,000385	0,000653	0,000401	0,000845	0,000461	0,000774	0,000480
35	0,000775	0,000434	0,000697	0,000445	0,000918	0,000519	0,000826	0,000533
36	0,000850	0,000488	0,000751	0,000498	0,001008	0,000585	0,000890	0,000596
37	0,000944	0,000547	0,000821	0,000561	0,001119	0,000656	0,000973	0,000671
38	0,001047	0,000605	0,000878	0,000606	0,001242	0,000725	0,001041	0,000725
39	0,001153	0,000666	0,000968	0,000656	0,001367	0,000798	0,001148	0,000785
40	0,001261	0,000735	0,001083	0,000743	0,001495	0,000881	0,001284	0,000890
41	0,001372	0,000809	0,001169	0,000823	0,001626	0,000968	0,001386	0,000986
42	0,001483	0,000885	0,001288	0,000903	0,001758	0,001059	0,001527	0,001082
43	0,001603	0,000959	0,001403	0,001000	0,001900	0,001149	0,001663	0,001198
44	0,001732	0,001033	0,001532	0,001079	0,002053	0,001237	0,001815	0,001292
45	0,001871	0,001113	0,001719	0,001200	0,002217	0,001332	0,002038	0,001437
46	0,002025	0,001203	0,001872	0,001291	0,002400	0,001440	0,002219	0,001546
47	0,002194	0,001301	0,002074	0,001395	0,002601	0,001558	0,002458	0,001671
48	0,002373	0,001406	0,002268	0,001553	0,002813	0,001683	0,002688	0,001860
49	0,002563	0,001512	0,002526	0,001650	0,003038	0,001811	0,002994	0,001976

se nadaljuje

Age	1st Order mortality 'best estimate' + 'safety margin'				2nd Order mortality 'best estimate'			
	Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'		Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'	
	Males	Females	Males	Females	Males	Females	Males	Females
Age	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y
50	0,002762	0,001616	0,002838	0,001823	0,003274	0,001935	0,003364	0,002183
51	0,002981	0,001720	0,003029	0,001965	0,003534	0,002060	0,003591	0,002353
52	0,003212	0,001822	0,003358	0,002089	0,003807	0,002182	0,003980	0,002502
53	0,003449	0,001931	0,003684	0,002262	0,004088	0,002312	0,004366	0,002709
54	0,003684	0,002052	0,004054	0,002470	0,004367	0,002458	0,004805	0,002957
55	0,003911	0,002186	0,004419	0,002623	0,004636	0,002618	0,005238	0,003141
56	0,004134	0,002340	0,004872	0,002877	0,004901	0,002803	0,005775	0,003445
57	0,004370	0,002516	0,005388	0,003106	0,005179	0,003013	0,006387	0,003720
58	0,004627	0,002706	0,005888	0,003391	0,005485	0,003240	0,006980	0,004061
59	0,004932	0,002914	0,006541	0,003731	0,005846	0,003490	0,007753	0,004468
60	0,005299	0,003145	0,007226	0,004121	0,006281	0,003766	0,008565	0,004935
61	0,005777	0,003402	0,007922	0,004492	0,006848	0,004074	0,009390	0,005379
62	0,006383	0,003692	0,008590	0,004862	0,007566	0,004421	0,010182	0,005822
63	0,007119	0,004021	0,009229	0,005195	0,008438	0,004815	0,010939	0,006221
64	0,007963	0,004384	0,009933	0,005504	0,009439	0,005250	0,011774	0,006591
65	0,008886	0,004830	0,010714	0,005827	0,010533	0,005783	0,012699	0,006977
66	0,009938	0,005278	0,011662	0,006266	0,011779	0,006321	0,013823	0,007504
67	0,011253	0,005905	0,012834	0,006904	0,013339	0,007071	0,015212	0,008268
68	0,012687	0,006674	0,014099	0,007701	0,015038	0,007992	0,016712	0,009222
69	0,014231	0,007548	0,015456	0,008612	0,016869	0,009039	0,018321	0,010313
70	0,015887	0,008525	0,016920	0,009637	0,018832	0,010209	0,020056	0,011540
71	0,017663	0,009679	0,018547	0,010869	0,020937	0,011591	0,021984	0,013015
72	0,019598	0,010965	0,020408	0,012266	0,023230	0,013131	0,024190	0,014689
73	0,021698	0,012341	0,022511	0,013782	0,025719	0,014778	0,026683	0,016504
74	0,023990	0,013909	0,024873	0,015522	0,028436	0,016656	0,029483	0,018588
75	0,026610	0,015706	0,027614	0,017516	0,031542	0,018808	0,032731	0,020976
76	0,029533	0,017672	0,030689	0,019686	0,035006	0,021163	0,036376	0,023574
77	0,032873	0,019722	0,034200	0,021922	0,038965	0,023618	0,040539	0,026251
78	0,036696	0,022102	0,038203	0,024477	0,043496	0,026468	0,045283	0,029312
79	0,041106	0,024975	0,042787	0,027510	0,048724	0,029908	0,050717	0,032944
80	0,046239	0,028535	0,048081	0,031211	0,054808	0,034171	0,056992	0,037376
81	0,052094	0,032947	0,054068	0,035743	0,061748	0,039454	0,064088	0,042803
82	0,058742	0,038340	0,060821	0,041240	0,069628	0,045913	0,072092	0,049385
83	0,066209	0,044665	0,068363	0,047641	0,078479	0,053487	0,081033	0,057051
84	0,074583	0,051737	0,076782	0,054741	0,088405	0,061956	0,091012	0,065553
85	0,083899	0,059541	0,086113	0,062514	0,099447	0,071302	0,102071	0,074862
86	0,094103	0,068187	0,096295	0,071076	0,111543	0,081656	0,114141	0,085115
87	0,105171	0,077684	0,107306	0,080444	0,124661	0,093028	0,127192	0,096333
88	0,116929	0,087911	0,118973	0,090508	0,138599	0,105275	0,141021	0,108385
89	0,129206	0,098662	0,131124	0,101071	0,153150	0,118149	0,155425	0,121035
90	0,141850	0,109614	0,143616	0,111814	0,168138	0,131265	0,170231	0,133899
91	0,154860	0,120510	0,156454	0,122478	0,183559	0,144313	0,185449	0,146670
92	0,168157	0,131383	0,169564	0,133104	0,199321	0,157333	0,200989	0,159395
93	0,181737	0,142265	0,182946	0,143725	0,215417	0,170365	0,216850	0,172113
94	0,195567	0,153185	0,196568	0,154369	0,231810	0,183442	0,232997	0,184860
95	0,209614	0,164128	0,210397	0,165023	0,248460	0,196546	0,249388	0,197618
96	0,223854	0,175065	0,224411	0,175662	0,265339	0,209643	0,265999	0,210358
97	0,238280	0,185958	0,238604	0,186250	0,282439	0,222688	0,282823	0,223038
98	0,252858	0,196824	0,252947	0,196808	0,299718	0,235701	0,299824	0,235681
99	0,267526	0,207667	0,267377	0,207342	0,317104	0,248685	0,316929	0,248296
100	0,278816	0,229739	0,278816	0,229739	0,330487	0,275117	0,330487	0,275117
101	0,293701	0,243350	0,293701	0,243350	0,348131	0,291416	0,348131	0,291416
102	0,308850	0,257319	0,308850	0,257319	0,366086	0,308144	0,366086	0,308144

se nadaljuje

Age	1st Order mortality 'best estimate' + 'safety margin'				2nd Order mortality 'best estimate'			
	Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'		Aggregate Table		Selection Table Benefit Payment Period 'ultimate'	
	Males	Females	Males	Females	Males	Females	Males	Females
	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y	q_x	q_y
103	0,324261	0,271655	0,324261	0,271655	0,384354	0,325311	0,384354	0,325311
104	0,339936	0,286368	0,339936	0,286368	0,402934	0,342930	0,402934	0,342930
105	0,355873	0,301467	0,355873	0,301467	0,421824	0,361012	0,421824	0,361012
106	0,372069	0,316962	0,372069	0,316962	0,441023	0,379567	0,441023	0,379567
107	0,388523	0,332860	0,388523	0,332860	0,460525	0,398606	0,460525	0,398606
108	0,405229	0,349169	0,405229	0,349169	0,480327	0,418136	0,480327	0,418136
109	0,422180	0,365896	0,422180	0,365896	0,500419	0,438167	0,500419	0,438167
110	0,439368	0,383046	0,439368	0,383046	0,520793	0,458705	0,520793	0,458705
111	0,456782	0,400622	0,456782	0,400622	0,541435	0,479752	0,541435	0,479752
112	0,474411	0,418626	0,474411	0,418626	0,562330	0,501312	0,562330	0,501312
113	0,492237	0,437055	0,492237	0,437055	0,583459	0,523382	0,583459	0,523382
114	0,510241	0,455906	0,510241	0,455906	0,604801	0,545956	0,604801	0,545956
115	0,528401	0,475170	0,528401	0,475170	0,626326	0,569024	0,626326	0,569024
116	0,546689	0,494832	0,546689	0,494832	0,648003	0,592570	0,648003	0,592570
117	0,565074	0,514872	0,565074	0,514872	0,669795	0,616569	0,669795	0,616569
118	0,583517	0,535264	0,583517	0,535264	0,691657	0,640988	0,691657	0,640988
119	0,601976	0,555969	0,601976	0,555969	0,713536	0,665783	0,713536	0,665783
120	0,620400	0,576942	0,620400	0,576942	0,735375	0,690898	0,735375	0,690898
121	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Vir: U. Pasdika in J. Wolff, Coping with Longevity: The New German Annuity Valuation Table DAV 2004R, 2005;
R. Kainhofer, M. Predota in U. Schmock, The New Austrian Annuity Valuation Table AVÖ 2005R, 2005.

Priloga 3: Numerični izračuni dosmrtne rente na hkratni življenji* [a]

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
25	25	17,50050727	17,36517884	17,89844906	0,007793092	0,022233311
26	26	17,41411906	17,27207944	17,82882396	0,008223655	0,023260362
27	27	17,32320264	17,1741156	17,75556093	0,008680915	0,024350585
28	28	17,22797766	17,07150078	17,67877002	0,009165971	0,025499079
29	29	17,12843199	16,96421413	17,59824682	0,009680252	0,026696684
30	30	17,02436853	16,8520426	17,51385049	0,010225818	0,027948278
31	31	16,91527404	16,73444711	17,42530282	0,010805671	0,029269436
32	32	16,80132533	16,61159733	17,33271558	0,011421418	0,030658223
33	33	16,68245143	16,48341474	17,23570831	0,012074967	0,032099457
34	34	16,55841488	16,34964165	17,13424597	0,012769285	0,033607029
35	35	16,42953942	16,21060313	17,02843221	0,013505746	0,035170166
36	36	16,29540669	16,06585965	16,91788523	0,014287878	0,036794111
37	37	16,15604161	15,91542926	16,80252602	0,015118181	0,03847543
38	38	16,01157992	15,75944531	16,68237334	0,015998952	0,040209711
39	39	15,86118932	15,59703566	16,55693055	0,016936146	0,042021148
40	40	15,70515914	15,42848985	16,42648131	0,017932364	0,043912153
41	41	15,54417118	15,25452899	16,29117144	0,018987292	0,045853072
42	42	15,37730383	15,07427813	16,15021537	0,02010217	0,047857661
43	43	15,20472068	14,88782591	16,00385242	0,021285497	0,049933711
44	44	15,02625239	14,69500357	15,85169375	0,022541595	0,052072754
45	45	14,8414402	14,49532515	15,69363062	0,023877702	0,054301674
46	46	14,65142861	14,29000371	15,53026812	0,025292149	0,056588818
47	47	14,45482344	14,07757565	15,36070417	0,026797781	0,058973907
48	48	14,2521123	13,85855987	15,18534885	0,028397787	0,061456379
49	49	14,0435244	13,63323462	15,00369069	0,030094822	0,06399534
50	50	13,82862846	13,40112101	14,81633282	0,031900872	0,066663214
51	51	13,60881895	13,16373615	14,62371406	0,033811282	0,06940064
52	52	13,38140828	12,91825669	14,42355327	0,035852484	0,072253
53	53	13,14751306	12,66585384	14,21746652	0,038028168	0,075256267
54	54	12,90718622	12,40663075	14,00494426	0,040345803	0,078383606
55	55	12,66089319	12,14111869	13,78614191	0,042811088	0,081621728
56	56	12,4071872	11,86777124	13,56047094	0,04545217	0,08504747
57	57	12,14785579	11,58856561	13,32864435	0,048262244	0,088590297
58	58	11,88268025	11,30327049	13,0909918	0,051260364	0,092300993
59	59	11,61140774	11,01167661	12,84670729	0,054463199	0,0961569
60	60	11,3358076	10,71571173	12,59725234	0,057867912	0,100136498
61	61	11,0560426	10,41559003	12,34242319	0,061489802	0,104224314
62	62	10,7711368	10,11025372	12,08169114	0,065367606	0,108474411
63	63	10,47979713	9,798311608	11,81397024	0,069551322	0,112931815
64	64	10,18023435	9,477809821	11,53810386	0,074112537	0,117685673
65	65	9,87174924	9,147955573	11,25403555	0,079120811	0,122825835
66	66	9,55406014	8,809060646	10,96177686	0,084571957	0,128420486
67	67	9,228727407	8,464731409	10,66231427	0,090256378	0,134453631
68	68	8,898506525	8,116064206	10,35718153	0,09640662	0,140837061
69	69	8,564241627	7,764032246	10,04631842	0,10306621	0,14752437
70	70	8,226126419	7,408811733	9,729539582	0,110316568	0,154520484
71	71	7,884262643	7,050404011	9,406692101	0,118271042	0,161845359
72	72	7,539787031	6,689884254	9,07805442	0,127042972	0,169449016
73	73	7,193757808	6,328053095	8,744438728	0,136804274	0,177333385
74	74	6,846577809	5,967901619	8,406527668	0,147233692	0,185564114
75	75	6,499211947	5,614080659	8,064935996	0,157662731	0,194139674
76	76	6,15328936	5,262357781	7,721104787	0,169302738	0,203055841

se nadaljuje

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
77	77	5,809077374	4,911939144	7,375786186	0,182644411	0,21241245
78	78	5,466298468	4,560924537	7,030274565	0,198506668	0,222463018
79	79	5,126066217	4,222545167	6,685960453	0,213975461	0,233308924
80	80	4,79028255	3,891516761	6,344538171	0,230955138	0,244975376
81	81	4,461868166	3,563567601	6,008245331	0,252079002	0,257375836
82	82	4,143672314	3,251372605	5,678778142	0,274437851	0,270323261
83	83	3,838785836	2,962010158	5,357930934	0,296006979	0,283532042
84	84	3,549416959	2,67546506	5,047274182	0,3266542	0,296765575
85	85	3,27672389	2,430145209	4,748597625	0,348365471	0,309959666
86	86	3,021534827	2,183518579	4,463640913	0,383791673	0,323078427
87	87	2,784687385	1,978931062	4,193639982	0,407167455	0,335973666
88	88	2,567014923	1,77213601	3,939668511	0,448542837	0,34841855
89	89	2,368600967	1,608465801	3,70196877	0,472583977	0,360178026
90	90	2,188731755	1,455186706	3,480064084	0,504089988	0,371065675
91	91	2,025724264	1,304096299	3,272951602	0,553354813	0,381071122
92	92	1,877549634	1,19245609	3,079811427	0,574523079	0,390368638
93	93	1,742379392	1,090268645	2,899664412	0,598119326	0,399109985
94	94	1,618713445	0,988931739	2,731695982	0,636830309	0,407432798
95	95	1,505239382	0,888665752	2,575135575	0,693819504	0,415471792
96	96	1,400664924	0,8069071	2,429261359	0,735844095	0,42341942
97	97	1,303597343	0,748125529	2,293456095	0,742484772	0,431601352
98	98	1,212336329	0,689681038	2,167299387	0,757821749	0,440623508
99	99	1,124523837	0,625189793	2,05054033	0,798691934	0,451596333
100	100	1,036158338	0,550755395	1,943045956	0,881340333	0,466735033

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 4: Numerični izračuni življenjske rente na hkratni življenji z omejenim obdobjem izplačevanja n* [b]

X	Y	n	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
70	65	1	0,929483208	0,929389444	0,934931051	0,000100888	0,005827
70	65	2	1,791611559	1,79113447	1,807580489	0,000266361	0,008834423
70	65	3	2,58923721	2,587869613	2,620552823	0,000528465	0,011950002
70	65	4	3,325010924	3,321997412	3,376303192	0,000907139	0,015191843
70	65	5	4,001467355	3,995769606	4,077161576	0,001425945	0,018565421
70	65	6	4,620999233	4,611254706	4,725287948	0,002113205	0,022070341
70	65	7	5,18589892	5,170368435	5,322754445	0,003003748	0,025711411
70	65	8	5,698393483	5,674905068	5,87152586	0,004138997	0,029486778
70	65	9	6,16070672	6,126601965	6,373481829	0,005566667	0,033384438
70	65	10	6,575032212	6,52709834	6,830427885	0,007343826	0,037390875
70	65	11	6,943549494	6,877943646	7,244099433	0,009538585	0,041488931
70	65	12	7,268542268	7,180734938	7,616239381	0,012228182	0,045652073
70	65	13	7,55245593	7,437204716	7,948627421	0,015496577	0,049841497
70	65	14	7,797848414	7,649152397	8,243125753	0,019439542	0,054018021
70	65	15	8,007376085	7,818422005	8,501695569	0,024167803	0,058143635
70	65	16	8,183798518	7,946900911	8,726425567	0,029810062	0,062182052
70	65	17	8,330004121	8,036557894	8,919568338	0,036513919	0,066097842
70	65	18	8,449009684	8,089470766	9,083541131	0,044445295	0,069855075
70	65	19	8,543971256	8,107922421	9,22093006	0,053780588	0,073415458
70	65	20	8,618144494	8,107922421	9,334457347	0,06292883	0,076738564
70	65	21	8,674777719	8,107922421	9,426918548	0,069913755	0,079786499
70	65	22	8,716981462	8,107922421	9,501093798	0,075119002	0,082528639
70	65	23	8,74763115	8,107922421	9,559674681	0,078899217	0,084944683
70	65	24	8,769291547	8,107922421	9,605194172	0,081570727	0,087026104
70	65	25	8,784169105	8,107922421	9,639974786	0,083405668	0,088776755
70	65	26	8,794091924	8,107922421	9,666092596	0,08462951	0,090212323
70	65	27	8,800514592	8,107922421	9,685357157	0,085421657	0,091358796
70	65	28	8,804546251	8,107922421	9,699306714	0,085918907	0,09224994
70	65	29	8,806998921	8,107922421	9,709217374	0,08622141	0,092923911
70	65	30	8,808444	8,107922421	9,716122536	0,08639964	0,093419832

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 5: Numerični izračuni odložene dosmrtne rente na zadnje življenje* [c]

X	Y	u	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
40	35	1	16,99956672	16,52951862	17,22822972	0,02843689	0,013272577
40	35	2	16,09512513	15,6259278	16,32378621	0,030026846	0,014007846
40	35	3	15,23498372	14,76707483	15,46364022	0,031685956	0,014786719
40	35	4	14,41697416	13,95078143	14,64562216	0,033416962	0,015612037
40	35	5	13,63903459	13,17497742	13,86766871	0,035222616	0,016486846
40	35	6	12,89920464	12,43771866	13,12781758	0,037103747	0,017414391
40	35	7	12,19562018	11,73714616	12,42420263	0,039061797	0,018398159
40	35	8	11,52650884	11,07148767	11,75504908	0,041098466	0,019441879
40	35	9	10,89018551	10,43906464	11,11866911	0,043214683	0,020549545
40	35	10	10,28504808	9,838265161	10,51345752	0,045412775	0,021725435
40	35	11	9,709574009	9,267577078	9,937887785	0,047692825	0,022974075
40	35	12	9,162314902	8,725540631	9,3905081	0,050056987	0,02430041
40	35	13	8,641894527	8,210770963	8,869937786	0,052507075	0,02570968
40	35	14	8,147005298	7,721973786	8,374863783	0,055041823	0,027207426
40	35	15	7,676403666	7,257883762	7,904037342	0,057664178	0,028799671
40	35	16	7,22890865	6,817328375	7,456270874	0,060372664	0,030492753
40	35	17	6,803397894	6,399173649	7,030434955	0,063168194	0,032293459
40	35	18	6,398804803	6,002329901	6,62545548	0,066053501	0,034209071
40	35	19	6,014116455	5,625776322	6,240310948	0,069028719	0,036247311
40	35	20	5,648372291	5,268549987	5,874029891	0,072092379	0,038416148
40	35	21	5,300658847	4,929710872	5,525688419	0,07524741	0,04072426
40	35	22	4,970110583	4,608394395	5,194407894	0,078490719	0,043180535
40	35	23	4,655904518	4,303764373	4,879352712	0,081821428	0,045794638
40	35	24	4,357259922	4,01503682	4,579728192	0,085235358	0,048576741
40	35	25	4,073437306	3,741474947	4,294778577	0,088724999	0,051537295
40	35	26	3,80373666	3,482383625	4,023785125	0,092279619	0,054686932
40	35	27	3,547494714	3,237088823	3,766064296	0,095890446	0,058036604
40	35	28	3,304084323	3,004942197	3,520966027	0,099550044	0,061597216
40	35	29	3,072910165	2,785312501	3,287872096	0,10325508	0,06538026
40	35	30	2,85340722	2,577589387	3,066194559	0,107006117	0,069397859

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 6: Numerični izračuni življenjske rente na zadnje življenje z omejenim obdobjem izplačevanja n* [d]

X	Y	n	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
70	65	1	0,950928585	0,945480742	0,951022349	0,005761982	9,85928E-05
70	65	2	1,854988768	1,839019838	1,855465857	0,008683392	0,000257126
70	65	3	2,714244249	2,682928637	2,715611847	0,011672175	0,000503606
70	65	4	3,530616395	3,479324126	3,533629907	0,014742021	0,000852809
70	65	5	4,305885614	4,230191393	4,311583363	0,017893805	0,001321498
70	65	6	5,041689961	4,937401245	5,051434487	0,021122188	0,001929061
70	65	7	5,739518956	5,602663431	5,755049441	0,024426869	0,002698584
70	65	8	6,400714571	6,227582194	6,424202987	0,027800898	0,003656238
70	65	9	7,026478209	6,8137031	7,060582964	0,031227529	0,004830303
70	65	10	7,617860673	7,362465	7,665794545	0,034688881	0,006252955
70	65	11	8,175758435	7,875208496	8,241364284	0,038164061	0,007960557
70	65	12	8,700936639	8,353239526	8,788743969	0,041624224	0,009990885
70	65	13	9,194063069	8,797891578	9,309314283	0,045030277	0,012380204
70	65	14	9,65569227	9,21041493	9,804388286	0,048344982	0,015166272
70	65	15	10,08626065	9,591941164	10,27521473	0,051534874	0,018389307
70	65	16	10,48608359	9,94345654	10,7229812	0,05457127	0,022092514
70	65	17	10,85537089	10,26580667	11,14881711	0,057429897	0,02632084
70	65	18	11,19425767	10,55972622	11,55379659	0,060089763	0,031118682
70	65	19	11,50289229	10,82593348	11,93894112	0,062531218	0,036523242
70	65	20	11,78155666	11,06524381	12,29177873	0,064735388	0,041509214
70	65	21	12,03074658	11,27860575	12,59760187	0,066687394	0,04499708
70	65	22	12,25120789	11,46709555	12,86026693	0,068379332	0,047359751
70	65	23	12,44397686	11,63193333	13,08368559	0,06981157	0,048893618
70	65	24	12,61041194	11,77450931	13,27178106	0,070992566	0,049832733
70	65	25	12,75220342	11,89639774	13,42845011	0,07193822	0,050359251
70	65	26	12,87135571	11,99935504	13,55752521	0,072670628	0,050611708
70	65	27	12,9701199	12,08527733	13,66271207	0,073216571	0,050692144
70	65	28	13,05087536	12,15611489	13,74749919	0,073605792	0,050672768
70	65	29	13,11601897	12,21380051	13,81509547	0,073868773	0,050602365
70	65	30	13,16787063	12,2601921	13,86839221	0,07403461	0,050512097

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 7: Numerični izračuni vdovske rente* [e]

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
30	25	1,011040289	0,691764262	1,153074939	0,46153877	0,123179027
31	26	1,054017323	0,721979462	1,203060558	0,459899316	0,123886727
32	27	1,098714312	0,753217045	1,255107033	0,458695497	0,124605087
33	28	1,145400962	0,785872632	1,309495084	0,457489313	0,125310987
34	29	1,194009109	0,820071244	1,3661581	0,45598217	0,126009567
35	30	1,24431468	0,855536599	1,424882887	0,454426008	0,126724946
36	31	1,296549804	0,892280763	1,485930563	0,453073805	0,127449266
37	32	1,350666298	0,93033352	1,549260536	0,451808699	0,128186469
38	33	1,406534297	0,969865055	1,614734028	0,450237113	0,128937476
39	34	1,464482143	1,011026881	1,68270904	0,448509601	0,129687838
40	35	1,524107304	1,053636458	1,752770761	0,446521039	0,130458279
41	36	1,585114209	1,097355292	1,824629731	0,444485866	0,131268015
42	37	1,648120009	1,142930474	1,898917846	0,442012481	0,132074085
43	38	1,712743154	1,190097238	1,975243701	0,439162364	0,132895271
44	39	1,779156788	1,238707102	2,053819331	0,436301435	0,133732573
45	40	1,847292489	1,288722299	2,134580768	0,433429444	0,134587682
46	41	1,916447812	1,339953541	2,216766415	0,430234522	0,13547598
47	42	1,987290081	1,392945164	2,30107874	0,426682207	0,136365894
48	43	2,059225435	1,447035469	2,386916182	0,423064934	0,13728624
49	44	2,13257502	1,502767884	2,474590415	0,41909808	0,138210911
50	45	2,206508459	1,558956311	2,563282745	0,41537543	0,139186474
51	46	2,280478015	1,615589625	2,652367323	0,411545346	0,140210334
52	47	2,356370864	1,674147679	2,743845498	0,407504782	0,141215908
53	48	2,43243396	1,73291181	2,835894642	0,403668638	0,142269278
54	49	2,509042414	1,792965708	2,928812171	0,39938115	0,143324233
55	50	2,585646298	1,852814701	3,022145374	0,395523415	0,144433514
56	51	2,662738808	1,91392476	3,11627219	0,39124529	0,145537153
57	52	2,739298309	1,974718839	3,210200186	0,387183965	0,146689256
58	53	2,814684962	2,03418008	3,303313617	0,383695077	0,147920758
59	54	2,889508802	2,093467617	3,396163863	0,380250059	0,149184516
60	55	2,962206638	2,151240349	3,487077282	0,376976143	0,150518787
61	56	3,032508885	2,206401444	3,575907859	0,374413932	0,151961123
62	57	3,100907658	2,260537553	3,662993124	0,371756755	0,153449774
63	58	3,168028609	2,313870305	3,749069697	0,369147009	0,154982738
64	59	3,234803354	2,367866611	3,834177811	0,366125667	0,156324116
65	60	3,301138547	2,422851874	3,918085081	0,362501184	0,15746124
66	61	3,366865292	2,47898063	4,001159092	0,358165228	0,158527513
67	62	3,430679799	2,534413926	4,08212259	0,353638316	0,159584328
68	63	3,490826449	2,586974663	4,159210511	0,349385635	0,160699743
69	64	3,546879322	2,635539065	4,23215916	0,345788939	0,161922038
70	65	3,598557907	2,679235461	4,300852622	0,34312865	0,163291974
71	66	3,645683328	2,717610166	4,365224965	0,341503419	0,16483495
72	67	3,688069261	2,751036498	4,42502597	0,340610808	0,166542912
73	68	3,725387101	2,780321315	4,479767092	0,339912434	0,168397146
74	69	3,757314446	2,80580469	4,526236818	0,339121878	0,169881162
75	70	3,783447557	2,827246959	4,563296571	0,338209082	0,170895974
76	71	3,80266966	2,84347343	4,592622604	0,337332581	0,172004759
77	72	3,8148591	2,854934512	4,614342158	0,336233487	0,173260463
78	73	3,819278757	2,860919638	4,628338356	0,334982887	0,174805629
79	74	3,814949366	2,859974325	4,633885849	0,333910355	0,176727807
80	75	3,801053804	2,851271608	4,618584097	0,333108285	0,177008857
81	76	3,776436375	2,833537317	4,593259431	0,332763946	0,177830813

se nadaljuje

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
82	77	3,740112747	2,805055052	4,559213737	0,333347359	0,179658388
83	78	3,690611053	2,762763534	4,507728046	0,335840367	0,181270251
84	79	3,627653086	2,705887182	4,435370596	0,340652009	0,182108235
85	80	3,551396604	2,634469732	4,358139989	0,348049879	0,185111857
86	81	3,462727208	2,549760691	4,257250002	0,358059688	0,186628174
87	82	3,363447692	2,454312573	4,14720437	0,370423527	0,188984339
88	83	3,255788223	2,351334568	4,028052401	0,384655449	0,191721482
89	84	3,142176983	2,243930558	3,897277137	0,400300456	0,193750695
90	85	3,024665919	2,134115884	3,761504811	0,417292257	0,195889392
91	86	2,90543961	2,024006686	3,630799263	0,435489137	0,199779608
92	87	2,786737299	1,916106043	3,481291391	0,454375299	0,199510473
93	88	2,670786918	1,813100466	3,350699446	0,473049601	0,202916597
94	89	2,559195508	1,716919584	3,223491941	0,490573893	0,206079756
95	90	2,452831184	1,628522632	3,082601563	0,50616954	0,204298339
96	91	2,351536728	1,547338818	2,95818991	0,519729681	0,205075807
97	92	2,254331338	1,471547046	2,847889493	0,531946494	0,208420361
98	93	2,160165681	1,399454644	2,747508842	0,543576771	0,213772983
99	94	2,067823584	1,329409877	2,617981422	0,555444727	0,210145814
100	95	1,97578237	1,259753662	2,495092379	0,568387877	0,208132578

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 8: Numerični izračuni vdovske rente* [e]

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
25	30	0,588703495	0,025331736	0,744797338	22,23976158	0,209578949
26	31	0,610874927	0,023897119	0,774660611	24,5627013	0,211428956
27	32	0,634269645	0,022848669	0,806122026	26,75958772	0,213184078
28	33	0,658679059	0,022210547	0,838972828	28,65613891	0,214898222
29	34	0,684174743	0,021877735	0,873306881	30,27264987	0,216570076
30	35	0,710778133	0,021969414	0,909153486	31,35307587	0,218197869
31	36	0,738626241	0,022483159	0,946669917	31,85242273	0,219763692
32	37	0,767483453	0,02328953	0,985623731	31,95401205	0,221322063
33	38	0,7975807	0,024465386	1,026263354	31,60037244	0,222830381
34	39	0,828790412	0,025762293	1,068484513	31,17067719	0,224330908
35	40	0,860864848	0,027120306	1,112043953	30,74244558	0,225871562
36	41	0,894040052	0,028755604	1,157177441	30,09098467	0,227395885
37	42	0,928221544	0,03061952	1,203806656	29,31469896	0,228928051
38	43	0,963221718	0,032654749	1,251751384	28,4971408	0,230500776
39	44	0,999348236	0,035060652	1,30133476	27,50341246	0,232059063
40	45	1,036133421	0,0376032	1,352097076	26,55439509	0,233684149
41	46	1,073295469	0,040360825	1,403722975	25,59250563	0,235393673
42	47	1,111340998	0,043396915	1,456782167	24,60875569	0,237126165
43	48	1,149856427	0,046543259	1,510843597	23,7051121	0,238930866
44	49	1,189055423	0,050333291	1,566096238	22,6236374	0,240752009
45	50	1,228749731	0,054179321	1,622409828	21,67931224	0,242639122
46	51	1,268250652	0,058192422	1,678996837	20,79408598	0,244637855
47	52	1,308120081	0,062404194	1,736491886	19,9620541	0,246688055
48	53	1,347719239	0,06595378	1,794247816	19,43429872	0,248866725
49	54	1,387333744	0,069420364	1,852529546	18,98453581	0,251113837
50	55	1,426215471	0,072376699	1,910513267	18,70545054	0,253490936
51	56	1,46363577	0,07329405	1,967489876	18,96936671	0,256089809
52	57	1,501530052	0,075206729	2,025429269	18,96536841	0,258660831
53	58	1,538143863	0,075946316	2,082490744	19,25304101	0,261392221
54	59	1,573745478	0,076290839	2,138911167	19,6282365	0,264230557
55	60	1,608009294	0,076393533	2,194291527	20,04902368	0,267185206
56	61	1,641257492	0,07695352	2,248939125	20,32790656	0,270208129
57	62	1,672551659	0,076688827	2,301886864	20,80958733	0,273399712
58	63	1,701316165	0,07486739	2,352546385	21,72439541	0,27681929
59	64	1,727891037	0,071386443	2,400359813	23,20475036	0,280153322
60	65	1,750677246	0,064500902	2,443810086	26,14190313	0,283627948
61	66	1,76957731	0,054020136	2,483341353	31,75773538	0,287420834
62	67	1,784951599	0,04142032	2,519227329	42,09362154	0,291468626
63	68	1,797779887	0,029076318	2,552340867	60,82969461	0,295634878
64	69	1,809024103	0,018878575	2,583619823	94,82418662	0,299810256
65	70	1,818652421	0,010951375	2,612992736	165,0661254	0,303996373
66	71	1,826588487	0,005385044	2,640383641	338,1965598	0,308210951
67	72	1,832156762	0,002185968	2,665007155	837,1445415	0,31251338
68	73	1,834199423	0,000524881	2,685693984	3493,507073	0,317048244
69	74	1,832765984	0	2,70050542	∞	0,321324827
70	75	1,8282087	0	2,707216086	∞	0,324690515
71	76	1,820920865	0	2,710280994	∞	0,328143145
72	77	1,810836898	0	2,710139405	∞	0,331828874
73	78	1,797316643	0	2,706930534	∞	0,336031486
74	79	1,780332331	0	2,701561847	∞	0,340998862
75	80	1,760246089	0	2,680804217	∞	0,343388794
76	81	1,737217719	0	2,657131954	∞	0,346205703

se nadaljuje

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
77	82	1,712234572	0	2,633852451	∞	0,349912494
78	83	1,686172282	0	2,606913905	∞	0,353192187
79	84	1,659757083	0	2,567082551	∞	0,353446159
80	85	1,633181047	0	2,534878151	∞	0,355716153
81	86	1,606270245	0	2,492611433	∞	0,355587387
82	87	1,579434972	0	2,449002935	∞	0,3550702
83	88	1,553065726	0	2,406498182	∞	0,354636651
84	89	1,527502198	0	2,358859345	∞	0,352440322
85	90	1,502581938	0	2,309945397	∞	0,349516253
86	91	1,477553778	0	2,27117088	∞	0,349430819
87	92	1,45141217	0	2,207342158	∞	0,342461628
88	93	1,423161539	0	2,15692975	∞	0,340191057
89	94	1,392167414	0	2,112886211	∞	0,3411063
90	95	1,358079741	0	2,036207898	∞	0,333034833
91	96	1,320669186	0	1,966733149	∞	0,328495995
92	97	1,279418104	0	1,901846553	∞	0,327275851
93	98	1,233759286	0	1,845054268	∞	0,331315449
94	99	1,183171856	0	1,756122282	∞	0,326258844
95	100	1,127692806	0	1,666466921	∞	0,323303216

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 9: Numerični izračuni vdovčeve rente* [f]

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ ENP_max
30	25	0,319276027	0	0,461310676	∞	0,307893697
31	26	0,332037861	0	0,481081096	∞	0,309808962
32	27	0,345497267	0	0,501889988	∞	0,311607573
33	28	0,35952833	0	0,523622452	∞	0,313382516
34	29	0,373937865	0	0,546086856	∞	0,315241044
35	30	0,388778081	0	0,569346288	∞	0,317150055
36	31	0,404269041	0	0,5936498	∞	0,319010904
37	32	0,420332777	0	0,618927015	∞	0,320868589
38	33	0,436669242	0	0,644868973	∞	0,322855866
39	34	0,453455263	0	0,671682159	∞	0,324896074
40	35	0,470470846	0	0,699134302	∞	0,327066567
41	36	0,487758917	0	0,72727444	∞	0,329333068
42	37	0,505189535	0	0,755987372	∞	0,331748712
43	38	0,522645916	0	0,785146464	∞	0,334333223
44	39	0,540449686	0	0,815112229	∞	0,336962854
45	40	0,55857019	0	0,845858469	∞	0,339641074
46	41	0,576494271	0	0,876812873	∞	0,342511625
47	42	0,594344917	0	0,908133576	∞	0,345531393
48	43	0,612189965	0	0,939880713	∞	0,348651423
49	44	0,629807135	0	0,971822531	∞	0,351931947
50	45	0,647552149	0	1,004326435	∞	0,355237375
51	46	0,66488839	0	1,036777699	∞	0,358697249
52	47	0,682223184	0	1,069697818	∞	0,362228124
53	48	0,699522149	0	1,102982832	∞	0,365790537
54	49	0,716076706	0	1,135846464	∞	0,369565581
55	50	0,732831597	0	1,169330673	∞	0,373289683
56	51	0,748814048	0	1,202347429	∞	0,377206596
57	52	0,76457947	0	1,235481347	∞	0,381148512
58	53	0,780504883	0	1,269133538	∞	0,385009647
59	54	0,796041185	0	1,302696246	∞	0,388928012
60	55	0,810966289	0	1,335836933	∞	0,392915206
61	56	0,826107441	0	1,369506415	∞	0,396784541
62	57	0,840370105	0	1,402455571	∞	0,400786647
63	58	0,854158303	0	1,435199391	∞	0,404850428
64	59	0,866936743	0	1,466311199	∞	0,408763472
65	60	0,878286673	0	1,495233207	∞	0,412608903
66	61	0,887884662	0	1,522178463	∞	0,416701337
67	62	0,896265873	0	1,547708663	∞	0,420907892
68	63	0,903851786	0	1,572235848	∞	0,42511692
69	64	0,911340257	0	1,596620095	∞	0,429206572
70	65	0,919322447	0	1,621617161	∞	0,433082932
71	66	0,928073162	0	1,647614799	∞	0,436717149
72	67	0,937032763	0	1,673989472	∞	0,440239751
73	68	0,945065786	0	1,699445777	∞	0,443897653
74	69	0,951509756	0	1,720432128	∞	0,446935604
75	70	0,956200598	0	1,736049612	∞	0,449208945
76	71	0,95919623	0	1,749149174	∞	0,451621254
77	72	0,959924587	0	1,759407646	∞	0,454404675
78	73	0,958359119	0	1,767418718	∞	0,457763398
79	74	0,954975041	0	1,773911524	∞	0,461655766
80	75	0,949782196	0	1,767312489	∞	0,462583894
81	76	0,942899058	0	1,759722115	∞	0,464177298

se nadaljuje

X	Y	Neod.	FH-min	FH-max	(ENP_neod-ENP_min)/ENP_min	(ENP_max-ENP_neod)/ENP_max
82	77	0,935057695	0	1,754158685	∞	0,466948057
83	78	0,927847519	0	1,744964511	∞	0,46827141
84	79	0,921765904	0	1,729483414	∞	0,467028191
85	80	0,916926872	0	1,723670257	∞	0,468038119
86	81	0,912966517	0	1,707489311	∞	0,465316409
87	82	0,909135119	0	1,692891797	∞	0,462969151
88	83	0,904453655	0	1,676717833	∞	0,460580882
89	84	0,898246425	0	1,653346579	∞	0,456710144
90	85	0,890550035	0	1,627388926	∞	0,452773691
91	86	0,881432925	0	1,606792577	∞	0,451433285
92	87	0,870631256	0	1,565185348	∞	0,443751976
93	88	0,857686453	0	1,53759898	∞	0,442191063
94	89	0,842275924	0	1,506572356	∞	0,440932312
95	90	0,824308552	0	1,454078931	∞	0,433106048
96	91	0,80419791	0	1,410851093	∞	0,429990936
97	92	0,782784292	0	1,376342448	∞	0,43125761
98	93	0,760711037	0	1,348054198	∞	0,435696993
99	94	0,738413707	0	1,288571545	∞	0,42695172
100	95	0,716028709	0	1,235338718	∞	0,420378639

Legenda: *Vrednosti enkratne neto premije so normalizirane.

Priloga 10: Število umrlih oseb po starostnih skupinah v Sloveniji, v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan*

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2000	M&Ž	Pod 15	133	133	-	-	-
2000	M&Ž	15-19	74	74	-	-	-
2000	M&Ž	20-24	120	116	4	-	-
2000	M&Ž	25-29	101	79	20	-	2
2000	M&Ž	30-34	135	85	40	-	10
2000	M&Ž	35-39	226	102	90	2	32
2000	M&Ž	40-44	362	142	164	3	53
2000	M&Ž	45-49	656	177	365	14	100
2000	M&Ž	50-54	764	160	466	49	89
2000	M&Ž	55-59	992	144	654	81	113
2000	M&Ž	60-64	1.403	167	924	166	146
2000	M&Ž	65-69	2.055	197	1.305	414	139
2000	M&Ž	70-74	2.631	263	1.484	719	165
2000	M&Ž	75-79	2.842	320	1.240	1.123	159
2000	M&Ž	80-84	1.874	198	626	959	91
2000	M&Ž	85 +	4.220	531	861	2.713	115
2000	M	Pod 15	77	77	-	-	-
2000	M	15-19	50	50	-	-	-
2000	M	20-24	98	97	1	-	-
2000	M	25-29	73	62	9	-	2
2000	M	30-34	101	72	26	-	3
2000	M	35-39	162	80	56	1	25
2000	M	40-44	258	123	101	1	33
2000	M	45-49	455	145	234	4	72
2000	M	50-54	520	130	312	18	60
2000	M	55-59	714	115	481	32	86
2000	M	60-64	957	113	676	60	108
2000	M	65-69	1.340	123	996	135	86
2000	M	70-74	1.512	95	1.109	232	76
2000	M	75-79	1.276	66	897	265	48
2000	M	80-84	729	44	460	195	30
2000	M	85 +	1.235	64	581	559	31
2000	Ž	Pod 15	56	56	-	-	-
2000	Ž	15-19	24	24	-	-	-
2000	Ž	20-24	22	19	3	-	-
2000	Ž	25-29	28	17	11	-	-
2000	Ž	30-34	34	13	14	-	7
2000	Ž	35-39	64	22	34	1	7
2000	Ž	40-44	104	19	63	2	20
2000	Ž	45-49	201	32	131	10	28
2000	Ž	50-54	244	30	154	31	29
2000	Ž	55-59	278	29	173	49	27
2000	Ž	60-64	446	54	248	106	38
2000	Ž	65-69	715	74	309	279	53
2000	Ž	70-74	1.119	168	375	487	89
2000	Ž	75-79	1.566	254	343	858	111
2000	Ž	80-84	1.145	154	166	764	61
2000	Ž	85 +	2.985	467	280	2.154	84
2001	M&Ž	Pod 15	113	113	-	-	-
2001	M&Ž	15-19	87	87	-	-	-
2001	M&Ž	20-24	113	110	2	-	1
2001	M&Ž	25-29	119	101	16	-	2
2001	M&Ž	30-34	144	86	49	-	9
2001	M&Ž	35-39	222	106	91	3	22
2001	M&Ž	40-44	344	142	156	8	38
2001	M&Ž	45-49	641	203	327	26	85
2001	M&Ž	50-54	847	200	483	56	108
2001	M&Ž	55-59	994	200	605	85	104
2001	M&Ž	60-64	1.388	215	890	181	102
2001	M&Ž	65-69	1.967	196	1.244	414	113
2001	M&Ž	70-74	2.592	257	1.481	731	123
2001	M&Ž	75-79	2.825	278	1.311	1.106	130
2001	M&Ž	80-84	2.112	225	729	1.076	82
2001	M&Ž	85 +	4.000	471	909	2.514	106

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2001	M	Pod 15	71	71	-	-	-
2001	M	15-19	69	69	-	-	-
2001	M	20-24	95	94	-	-	1
2001	M	25-29	101	87	12	-	2
2001	M	30-34	110	77	29	-	4
2001	M	35-39	165	93	52	2	18
2001	M	40-44	246	116	100	3	27
2001	M	45-49	466	171	215	10	70
2001	M	50-54	583	167	313	20	83
2001	M	55-59	684	159	422	29	74
2001	M	60-64	980	163	667	71	79
2001	M	65-69	1.285	110	944	155	76
2001	M	70-74	1.478	100	1.079	245	54
2001	M	75-79	1.301	84	903	271	43
2001	M	80-84	800	46	508	225	21
2001	M	85 +	1.220	64	603	532	21
2001	Ž	Pod 15	42	42	-	-	-
2001	Ž	15-19	18	18	-	-	-
2001	Ž	20-24	18	16	2	-	-
2001	Ž	25-29	18	14	4	-	-
2001	Ž	30-34	34	9	20	-	5
2001	Ž	35-39	57	13	39	1	4
2001	Ž	40-44	98	26	56	5	11
2001	Ž	45-49	175	32	112	16	15
2001	Ž	50-54	264	33	170	36	25
2001	Ž	55-59	310	41	183	56	30
2001	Ž	60-64	408	52	223	110	23
2001	Ž	65-69	682	86	300	259	37
2001	Ž	70-74	1.114	157	402	486	69
2001	Ž	75-79	1.524	194	408	835	87
2001	Ž	80-84	1.312	179	221	851	61
2001	Ž	85 +	2.780	407	306	1.982	85
2002	M&Ž	Pod 15	115	115	-	-	-
2002	M&Ž	15-19	71	71	-	-	-
2002	M&Ž	20-24	114	112	2	-	-
2002	M&Ž	25-29	107	90	16	1	-
2002	M&Ž	30-34	138	85	43	2	8
2002	M&Ž	35-39	213	112	83	1	17
2002	M&Ž	40-44	326	152	132	8	34
2002	M&Ž	45-49	588	176	310	12	90
2002	M&Ž	50-54	863	219	473	46	125
2002	M&Ž	55-59	928	161	569	79	119
2002	M&Ž	60-64	1.397	196	908	166	127
2002	M&Ž	65-69	1.860	162	1.209	377	112
2002	M&Ž	70-74	2.652	255	1.539	733	125
2002	M&Ž	75-79	2.879	278	1.297	1.146	158
2002	M&Ž	80-84	2.510	235	901	1.267	107
2002	M&Ž	85 +	3.940	446	879	2.496	119
2002	M	Pod 15	74	74	-	-	-
2002	M	15-19	50	50	-	-	-
2002	M	20-24	93	93	-	-	-
2002	M	25-29	89	77	11	1	-
2002	M	30-34	105	68	30	1	6
2002	M	35-39	147	89	48	-	10
2002	M	40-44	238	125	83	3	27
2002	M	45-49	398	150	185	3	60
2002	M	50-54	615	170	330	15	100
2002	M	55-59	665	130	415	35	85
2002	M	60-64	996	148	675	69	104
2002	M	65-69	1.214	108	911	129	66
2002	M	70-74	1.583	122	1.152	239	70
2002	M	75-79	1.299	76	894	280	49
2002	M	80-84	948	41	606	275	26
2002	M	85 +	1.182	70	558	520	34
2002	Ž	Pod 15	41	41	-	-	-
2002	Ž	15-19	21	21	-	-	-
2002	Ž	20-24	21	19	2	-	-
2002	Ž	25-29	18	13	5	-	-
2002	Ž	30-34	33	17	13	1	2

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2002	Ž	35-39	66	23	35	1	7
2002	Ž	40-44	88	27	49	5	7
2002	Ž	45-49	190	26	125	9	30
2002	Ž	50-54	248	49	143	31	25
2002	Ž	55-59	263	31	154	44	34
2002	Ž	60-64	401	48	233	97	23
2002	Ž	65-69	646	54	298	248	46
2002	Ž	70-74	1.069	133	387	494	55
2002	Ž	75-79	1.580	202	403	866	109
2002	Ž	80-84	1.562	194	295	992	81
2002	Ž	85 +	2.758	376	321	1.976	85
2003	M&Ž	Pod 15	108	108	-	-	-
2003	M&Ž	15-19	69	69	-	-	-
2003	M&Ž	20-24	110	105	5	-	-
2003	M&Ž	25-29	107	98	8	-	1
2003	M&Ž	30-34	122	85	33	-	4
2003	M&Ž	35-39	211	115	74	2	20
2003	M&Ž	40-44	360	149	160	2	49
2003	M&Ž	45-49	613	210	293	20	90
2003	M&Ž	50-54	901	191	534	42	134
2003	M&Ž	55-59	971	170	604	84	113
2003	M&Ž	60-64	1.323	179	833	186	125
2003	M&Ž	65-69	1.908	186	1.217	340	165
2003	M&Ž	70-74	2.728	237	1.566	774	151
2003	M&Ž	75-79	3.066	295	1.339	1.277	155
2003	M&Ž	80-84	2.952	295	942	1.578	137
2003	M&Ž	85 +	3.902	461	634	2.677	130
2003	M	Pod 15	60	60	-	-	-
2003	M	15-19	47	47	-	-	-
2003	M	20-24	87	84	3	-	-
2003	M	25-29	87	81	5	-	1
2003	M	30-34	90	69	18	-	3
2003	M	35-39	159	93	50	-	16
2003	M	40-44	249	124	90	-	35
2003	M	45-49	457	187	201	5	64
2003	M	50-54	653	161	376	16	100
2003	M	55-59	684	140	433	32	79
2003	M	60-64	932	136	640	70	86
2003	M	65-69	1.267	115	928	123	101
2003	M	70-74	1.603	121	1.158	254	70
2003	M	75-79	1.420	86	965	311	58
2003	M	80-84	1.164	56	727	334	47
2003	M	85 +	1.116	42	504	544	26
2003	Ž	Pod 15	48	48	-	-	-
2003	Ž	15-19	22	22	-	-	-
2003	Ž	20-24	23	21	2	-	-
2003	Ž	25-29	20	17	3	-	-
2003	Ž	30-34	32	16	15	-	1
2003	Ž	35-39	52	22	24	2	4
2003	Ž	40-44	111	25	70	2	14
2003	Ž	45-49	156	23	92	15	26
2003	Ž	50-54	248	30	158	26	34
2003	Ž	55-59	287	30	171	52	34
2003	Ž	60-64	391	43	193	116	39
2003	Ž	65-69	641	71	289	217	64
2003	Ž	70-74	1.125	116	408	520	81
2003	Ž	75-79	1.646	209	374	966	97
2003	Ž	80-84	1.788	239	215	1.244	90
2003	Ž	85 +	2.786	419	130	2.133	104
2004	M&Ž	Pod 15	113	113	-	-	-
2004	M&Ž	15-19	60	60	-	-	-
2004	M&Ž	20-24	108	107	1	-	-
2004	M&Ž	25-29	106	98	8	-	-
2004	M&Ž	30-34	111	81	24	1	5
2004	M&Ž	35-39	192	98	73	1	20
2004	M&Ž	40-44	329	135	145	5	44
2004	M&Ž	45-49	591	169	300	18	104
2004	M&Ž	50-54	874	193	507	45	129
2004	M&Ž	55-59	950	160	597	73	120

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2004	M&Ž	60-64	1.259	130	850	156	123
2004	M&Ž	65-69	1.718	165	1.088	341	124
2004	M&Ž	70-74	2.506	216	1.465	680	145
2004	M&Ž	75-79	3.005	283	1.427	1.158	137
2004	M&Ž	80-84	3.138	319	1.039	1.648	132
2004	M&Ž	85 +	3.463	369	666	2.332	96
2004	M	Pod 15	61	61	-	-	-
2004	M	15-19	44	44	-	-	-
2004	M	20-24	84	83	1	-	-
2004	M	25-29	83	78	5	-	-
2004	M	30-34	78	64	11	1	2
2004	M	35-39	137	72	51	1	13
2004	M	40-44	237	116	93	4	24
2004	M	45-49	401	134	192	7	68
2004	M	50-54	589	161	322	15	91
2004	M	55-59	667	128	425	26	88
2004	M	60-64	878	102	620	68	88
2004	M	65-69	1.143	115	813	138	77
2004	M	70-74	1.496	106	1.096	222	72
2004	M	75-79	1.469	80	1.035	305	49
2004	M	80-84	1.159	65	725	338	31
2004	M	85 +	953	39	466	430	18
2004	Ž	Pod 15	52	52	-	-	-
2004	Ž	15-19	16	16	-	-	-
2004	Ž	20-24	24	24	-	-	-
2004	Ž	25-29	23	20	3	-	-
2004	Ž	30-34	33	17	13	-	3
2004	Ž	35-39	55	26	22	-	7
2004	Ž	40-44	92	19	52	1	20
2004	Ž	45-49	190	35	108	11	36
2004	Ž	50-54	285	32	185	30	38
2004	Ž	55-59	283	32	172	47	32
2004	Ž	60-64	381	28	230	88	35
2004	Ž	65-69	575	50	275	203	47
2004	Ž	70-74	1.010	110	369	458	73
2004	Ž	75-79	1.536	203	392	853	88
2004	Ž	80-84	1.979	254	314	1.310	101
2004	Ž	85 +	2.510	330	200	1.902	78
2005	M&Ž	Pod 15	120	120	-	-	-
2005	M&Ž	15-19	46	46	-	-	-
2005	M&Ž	20-24	101	99	2	-	-
2005	M&Ž	25-29	124	114	9	-	1
2005	M&Ž	30-34	124	94	27	-	3
2005	M&Ž	35-39	157	93	50	2	12
2005	M&Ž	40-44	302	141	113	1	47
2005	M&Ž	45-49	522	168	264	29	61
2005	M&Ž	50-54	805	184	466	29	126
2005	M&Ž	55-59	913	186	540	78	109
2005	M&Ž	60-64	1.216	151	789	143	133
2005	M&Ž	65-69	1.675	172	1.069	284	150
2005	M&Ž	70-74	2.432	210	1.412	665	145
2005	M&Ž	75-79	3.118	287	1.413	1.252	166
2005	M&Ž	80-84	3.221	317	961	1.784	159
2005	M&Ž	85 +	3.949	396	646	2.765	142
2005	M	Pod 15	63	63	-	-	-
2005	M	15-19	38	38	-	-	-
2005	M	20-24	77	76	1	-	-
2005	M	25-29	104	100	3	-	1
2005	M	30-34	84	71	12	-	1
2005	M	35-39	106	73	25	-	8
2005	M	40-44	214	103	80	-	31
2005	M	45-49	369	141	178	12	38
2005	M	50-54	566	151	313	10	92
2005	M	55-59	622	154	368	29	71
2005	M	60-64	842	120	569	56	97
2005	M	65-69	1.112	119	798	107	88
2005	M	70-74	1.432	100	1.017	229	86
2005	M	75-79	1.561	88	1.051	354	68
2005	M	80-84	1.157	73	704	338	42

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2005	M	85 +	1.066	42	512	485	27
2005	Ž	Pod 15	57	57	-	-	-
2005	Ž	15-19	8	8	-	-	-
2005	Ž	20-24	24	23	1	-	-
2005	Ž	25-29	20	14	6	-	-
2005	Ž	30-34	40	23	15	-	2
2005	Ž	35-39	51	20	25	2	4
2005	Ž	40-44	88	38	33	1	16
2005	Ž	45-49	153	27	86	17	23
2005	Ž	50-54	239	33	153	19	34
2005	Ž	55-59	291	32	172	49	38
2005	Ž	60-64	374	31	220	87	36
2005	Ž	65-69	563	53	271	177	62
2005	Ž	70-74	1.000	110	395	436	59
2005	Ž	75-79	1.557	199	362	898	98
2005	Ž	80-84	2.064	244	257	1.446	117
2005	Ž	85 +	2.883	354	134	2.280	115
2006	M&Ž	Pod 15	96	96	-	-	-
2006	M&Ž	15-19	53	53	-	-	-
2006	M&Ž	20-24	104	103	1	-	-
2006	M&Ž	25-29	105	94	9	-	2
2006	M&Ž	30-34	102	81	19	-	2
2006	M&Ž	35-39	144	75	53	1	15
2006	M&Ž	40-44	302	143	121	1	37
2006	M&Ž	45-49	478	165	230	11	72
2006	M&Ž	50-54	871	236	460	37	138
2006	M&Ž	55-59	1.052	217	608	74	153
2006	M&Ž	60-64	1.135	135	722	135	143
2006	M&Ž	65-69	1.557	164	958	296	139
2006	M&Ž	70-74	2.276	203	1.296	638	139
2006	M&Ž	75-79	2.938	239	1.329	1.195	175
2006	M&Ž	80-84	3.209	316	937	1.816	140
2006	M&Ž	85 +	3.758	364	571	2.671	152
2006	M	Pod 15	52	52	-	-	-
2006	M	15-19	38	38	-	-	-
2006	M	20-24	84	83	1	-	-
2006	M	25-29	87	78	7	-	2
2006	M	30-34	83	70	12	-	1
2006	M	35-39	111	67	34	-	10
2006	M	40-44	229	115	83	1	30
2006	M	45-49	358	144	154	5	55
2006	M	50-54	620	191	318	14	97
2006	M	55-59	770	180	436	44	110
2006	M	60-64	777	107	528	49	93
2006	M	65-69	1.040	109	721	117	93
2006	M	70-74	1.359	109	988	185	77
2006	M	75-79	1.493	82	1.014	329	68
2006	M	80-84	1.152	72	701	339	40
2006	M	85 +	1.017	33	479	483	22
2006	Ž	Pod 15	44	44	-	-	-
2006	Ž	15-19	15	15	-	-	-
2006	Ž	20-24	20	20	-	-	-
2006	Ž	25-29	18	16	2	-	-
2006	Ž	30-34	19	11	7	-	1
2006	Ž	35-39	33	8	19	1	5
2006	Ž	40-44	73	28	38	-	7
2006	Ž	45-49	120	21	76	6	17
2006	Ž	50-54	251	45	142	23	41
2006	Ž	55-59	282	37	172	30	43
2006	Ž	60-64	358	28	194	86	50
2006	Ž	65-69	517	55	237	179	46
2006	Ž	70-74	917	94	308	453	62
2006	Ž	75-79	1.445	157	315	866	107
2006	Ž	80-84	2.057	244	236	1.477	100
2006	Ž	85 +	2.741	331	92	2.188	130
2007	M&Ž	Pod 15	97	97	-	-	-
2007	M&Ž	15-19	51	51	-	-	-
2007	M&Ž	20-24	108	107	1	-	-
2007	M&Ž	25-29	113	108	4	-	1

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2007	M&Ž	30-34	118	94	22	-	2
2007	M&Ž	35-39	154	91	48	2	13
2007	M&Ž	40-44	279	125	107	3	44
2007	M&Ž	45-49	475	195	206	6	68
2007	M&Ž	50-54	794	234	396	36	128
2007	M&Ž	55-59	1.043	234	580	91	138
2007	M&Ž	60-64	1.145	156	718	139	132
2007	M&Ž	65-69	1.585	189	978	294	124
2007	M&Ž	70-74	2.252	217	1.325	579	131
2007	M&Ž	75-79	3.054	250	1.460	1.178	166
2007	M&Ž	80-84	3.238	286	1.066	1.743	143
2007	M&Ž	85 +	4.078	444	740	2.746	148
2007	M	Pod 15	46	46	-	-	-
2007	M	15-19	34	34	-	-	-
2007	M	20-24	88	87	1	-	-
2007	M	25-29	95	92	3	-	-
2007	M	30-34	92	77	14	-	1
2007	M	35-39	118	76	34	2	6
2007	M	40-44	204	103	68	2	31
2007	M	45-49	338	167	125	2	44
2007	M	50-54	564	194	266	15	89
2007	M	55-59	736	184	421	35	96
2007	M	60-64	810	122	544	54	90
2007	M	65-69	1.065	135	730	110	90
2007	M	70-74	1.359	123	978	178	80
2007	M	75-79	1.606	95	1.087	357	67
2007	M	80-84	1.220	48	759	376	37
2007	M	85 +	1.098	57	537	482	22
2007	Ž	Pod 15	51	51	-	-	-
2007	Ž	15-19	17	17	-	-	-
2007	Ž	20-24	20	20	-	-	-
2007	Ž	25-29	18	16	1	-	1
2007	Ž	30-34	26	17	8	-	1
2007	Ž	35-39	36	15	14	-	7
2007	Ž	40-44	75	22	39	1	13
2007	Ž	45-49	137	28	81	4	24
2007	Ž	50-54	230	40	130	21	39
2007	Ž	55-59	307	50	159	56	42
2007	Ž	60-64	335	34	174	85	42
2007	Ž	65-69	520	54	248	184	34
2007	Ž	70-74	893	94	347	401	51
2007	Ž	75-79	1.448	155	373	821	99
2007	Ž	80-84	2.018	238	307	1.367	106
2007	Ž	85 +	2.980	387	203	2.264	126

Legenda: * Vključene so tudi tiste osebe, ki niso navedle zakonskega stanu.

Vir: Statistični urad RS.

Priloga 11: Število živih oseb po starostnih skupinah v Sloveniji, v obdobju 2000–2007 glede na zakonski stan*

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2000	M&Ž	Pod 15	320.374	320.374	-	-	-
2000	M&Ž	15-19	140.869	139.690	213	-	1
2000	M&Ž	20-24	151.232	137.908	9651	15	188
2000	M&Ž	25-29	143.700	91.583	45673	118	1543
2000	M&Ž	30-34	151.398	56.398	83683	458	5088
2000	M&Ž	35-39	154.714	40.606	98656	1080	8773
2000	M&Ž	40-44	158.064	35.973	102305	2200	12296
2000	M&Ž	45-49	157.436	27.728	107638	3968	13850
2000	M&Ž	50-54	120.422	14.851	87876	5392	9674
2000	M&Ž	55-59	111.248	9.543	83642	8819	7460
2000	M&Ž	60-64	102.898	7.715	74673	13598	5702
2000	M&Ž	65-69	97.405	6.913	65068	19973	4661
2000	M&Ž	70-74	78.393	6.215	44658	23401	3513
2000	M&Ž	75-79	54.681	5.068	24660	22362	2250
2000	M&Ž	80-84	21.149	2.068	7891	10362	714
2000	M&Ž	85 +	23.772	2.680	6350	13946	630
2000	M	Pod 15	164.437	164.437	-	-	-
2000	M	15-19	72.046	71.590	19	-	-
2000	M	20-24	78.191	73.708	2037	1	40
2000	M	25-29	73.716	53.621	16454	13	455
2000	M	30-34	76.454	34.179	36224	61	1884
2000	M	35-39	78.303	23.766	46577	150	3549
2000	M	40-44	81.260	22.062	49334	363	5283
2000	M	45-49	81.703	17.961	52973	734	6551
2000	M	50-54	61.037	9.577	43761	1011	4603
2000	M	55-59	54.557	5.653	42540	1568	3415
2000	M	60-64	48.515	3.753	39153	2423	2388
2000	M	65-69	41.939	2.516	34309	3121	1581
2000	M	70-74	29.381	1.392	23295	3541	890
2000	M	75-79	16.893	787	12690	2848	432
2000	M	80-84	6.217	248	4308	1476	141
2000	M	85 +	6.163	277	3299	2434	116
2000	Ž	Pod 15	155.937	155.937	-	-	-
2000	Ž	15-19	68.823	68.100	194	-	1
2000	Ž	20-24	73.041	64.200	7614	14	148
2000	Ž	25-29	69.984	37.962	29219	105	1088
2000	Ž	30-34	74.944	22.219	47459	397	3204
2000	Ž	35-39	76.411	16.840	52079	930	5224
2000	Ž	40-44	76.804	13.911	52971	1837	7013
2000	Ž	45-49	75.733	9.767	54665	3234	7299
2000	Ž	50-54	59.385	5.274	44115	4381	5071
2000	Ž	55-59	56.691	3.890	41102	7251	4045
2000	Ž	60-64	54.383	3.962	35520	11175	3314
2000	Ž	65-69	55.466	4.397	30759	16852	3080
2000	Ž	70-74	49.012	4.823	21363	19860	2623
2000	Ž	75-79	37.788	4.281	11970	19514	1818
2000	Ž	80-84	14.932	1.820	3583	8886	573
2000	Ž	85 +	17.609	2.403	3051	11512	514
2001	M&Ž	Pod 15	313.406	309.988	-	-	-
2001	M&Ž	15-19	136.732	135.277	173	-	2
2001	M&Ž	20-24	151.770	139.685	8379	16	159
2001	M&Ž	25-29	146.284	96.484	43270	118	1427
2001	M&Ž	30-34	147.242	57.696	78905	389	4739
2001	M&Ž	35-39	155.944	41.905	98487	1037	8816
2001	M&Ž	40-44	156.124	36.140	100276	2114	12186
2001	M&Ž	45-49	158.889	29.406	106536	3988	14310
2001	M&Ž	50-54	133.505	17.539	95750	5828	11443
2001	M&Ž	55-59	105.266	9.331	78605	8240	7372
2001	M&Ž	60-64	103.526	8.007	74872	13406	5997
2001	M&Ž	65-69	96.038	6.643	64348	19659	4657
2001	M&Ž	70-74	81.154	6.194	46904	23858	3658
2001	M&Ž	75-79	57.214	5.151	25851	23485	2390
2001	M&Ž	80-84	23.802	2.248	8830	11772	829
2001	M&Ž	85 +	23.198	2.552	6135	13698	650

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2001	M	Pod 15	160.945	159.195	-	-	-
2001	M	15-19	70.022	69.303	12	-	-
2001	M	20-24	78.489	74.206	1812	2	29
2001	M	25-29	75.374	56.049	15443	10	402
2001	M	30-34	74.569	34.815	34016	52	1721
2001	M	35-39	78.861	24.781	45971	141	3620
2001	M	40-44	79.881	21.438	48559	337	5219
2001	M	45-49	82.395	18.981	52241	735	6615
2001	M	50-54	68.016	11.412	47643	1131	5494
2001	M	55-59	51.594	5.597	39792	1477	3371
2001	M	60-64	49.066	4.051	39227	2398	2550
2001	M	65-69	41.676	2.535	34015	3105	1630
2001	M	70-74	31.378	1.547	24911	3722	972
2001	M	75-79	17.623	820	13221	2986	453
2001	M	80-84	6.918	272	4780	1671	148
2001	M	85 +	5.935	254	3177	2353	113
2001	Ž	Pod 15	152.461	150.793	-	-	-
2001	Ž	15-19	66.710	65.974	161	-	2
2001	Ž	20-24	73.281	65.479	6567	14	130
2001	Ž	25-29	70.910	40.435	27827	108	1025
2001	Ž	30-34	72.673	22.881	44889	337	3018
2001	Ž	35-39	77.083	17.124	52516	896	5196
2001	Ž	40-44	76.243	14.702	51717	1777	6967
2001	Ž	45-49	76.494	10.425	54295	3253	7695
2001	Ž	50-54	65.489	6.127	48107	4697	5949
2001	Ž	55-59	53.672	3.734	38813	6763	4001
2001	Ž	60-64	54.460	3.956	35645	11008	3447
2001	Ž	65-69	54.362	4.108	30333	16554	3027
2001	Ž	70-74	49.776	4.647	21993	20136	2686
2001	Ž	75-79	39.591	4.331	12630	20499	1937
2001	Ž	80-84	16.884	1.976	4050	10101	681
2001	Ž	85 +	17.263	2.298	2958	11345	537
2002	M&Ž	Pod 15	306.721	304.596	-	-	-
2002	M&Ž	15-19	132.727	131.859	193	-	1
2002	M&Ž	20-24	150.938	141.086	7536	13	140
2002	M&Ž	25-29	148.818	102.773	40841	103	1391
2002	M&Ž	30-34	144.405	60.574	75047	369	4411
2002	M&Ž	35-39	156.470	44.043	98458	983	8840
2002	M&Ž	40-44	154.844	36.786	100255	2023	12070
2002	M&Ž	45-49	161.030	31.486	107203	3954	14938
2002	M&Ž	50-54	140.002	19.764	99456	6030	12653
2002	M&Ž	55-59	105.860	9.923	78690	8111	7944
2002	M&Ž	60-64	103.663	8.122	75378	13159	6287
2002	M&Ž	65-69	96.022	6.653	64991	19268	4881
2002	M&Ž	70-74	83.163	6.227	48770	24156	3826
2002	M&Ž	75-79	59.283	5.207	27106	24319	2513
2002	M&Ž	80-84	28.182	2.634	10353	14084	1053
2002	M&Ž	85 +	21.898	2.406	5775	13055	624
2002	M	Pod 15	157.651	156.543	-	-	-
2002	M	15-19	67.803	67.427	18	-	-
2002	M	20-24	78.051	74.786	1685	3	20
2002	M	25-29	76.626	59.058	14307	8	404
2002	M	30-34	73.292	36.445	32048	52	1615
2002	M	35-39	79.254	26.403	45659	132	3616
2002	M	40-44	78.831	21.310	48860	321	5138
2002	M	45-49	83.542	20.353	52545	714	6829
2002	M	50-54	71.709	12.892	49656	1186	6103
2002	M	55-59	51.836	6.017	39636	1487	3641
2002	M	60-64	49.393	4.230	39475	2337	2756
2002	M	65-69	42.202	2.723	34403	3153	1788
2002	M	70-74	32.943	1.715	26279	3812	1057
2002	M	75-79	18.411	855	13836	3178	485
2002	M	80-84	7.980	320	5552	1905	182
2002	M	85 +	5.478	243	2922	2197	106
2002	Ž	Pod 15	149.070	148.053	-	-	-
2002	Ž	15-19	64.924	64.432	175	-	1
2002	Ž	20-24	72.887	66.300	5851	10	120
2002	Ž	25-29	72.192	43.715	26534	95	987
2002	Ž	30-34	71.113	24.129	42999	317	2796

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2002	Ž	35-39	77.216	17.640	52799	851	5224
2002	Ž	40-44	76.013	15.476	51395	1702	6932
2002	Ž	45-49	77.488	11.133	54658	3240	8109
2002	Ž	50-54	68.293	6.872	49800	4844	6550
2002	Ž	55-59	54.024	3.906	39054	6624	4303
2002	Ž	60-64	54.270	3.892	35903	10822	3531
2002	Ž	65-69	53.820	3.930	30588	16115	3093
2002	Ž	70-74	50.220	4.512	22491	20344	2769
2002	Ž	75-79	40.872	4.352	13270	21141	2028
2002	Ž	80-84	20.202	2.314	4801	12179	871
2002	Ž	85 +	16.420	2.163	2853	10858	518
2003	M&Ž	Pod 15	299.119	297.336	-	-	-
2003	M&Ž	15-19	130.166	129.367	165	-	2
2003	M&Ž	20-24	149.233	140.804	6574	8	146
2003	M&Ž	25-29	149.799	108.192	36982	96	1384
2003	M&Ž	30-34	143.203	63.746	71318	361	4221
2003	M&Ž	35-39	155.721	45.803	96541	914	8753
2003	M&Ž	40-44	154.338	37.338	99498	1862	12106
2003	M&Ž	45-49	160.289	32.643	105375	3861	15197
2003	M&Ž	50-54	145.458	21.943	101587	6057	13734
2003	M&Ž	55-59	107.643	10.889	79068	7861	8539
2003	M&Ž	60-64	105.410	8.378	76584	12957	6745
2003	M&Ž	65-69	95.299	6.613	64489	18942	5024
2003	M&Ž	70-74	84.648	6.257	49999	24269	3957
2003	M&Ž	75-79	61.280	5.150	28519	24823	2649
2003	M&Ž	80-84	32.791	3.086	11833	16584	1223
2003	M&Ž	85 +	20.636	2.258	5271	12454	603
2003	M	Pod 15	153.846	152.912	-	-	-
2003	M	15-19	66.369	66.004	21	-	1
2003	M	20-24	77.089	74.383	1478	-	21
2003	M	25-29	77.210	61.596	12797	10	418
2003	M	30-34	73.142	38.341	30433	47	1567
2003	M	35-39	78.341	27.331	44272	125	3551
2003	M	40-44	78.782	21.600	48703	289	5163
2003	M	45-49	82.596	20.843	51295	690	6892
2003	M	50-54	74.765	14.336	50712	1181	6622
2003	M	55-59	53.136	6.738	39842	1438	3964
2003	M	60-64	50.233	4.522	39813	2307	2963
2003	M	65-69	42.463	2.863	34376	3158	1918
2003	M	70-74	33.795	1.845	26870	3866	1130
2003	M	75-79	19.691	879	14853	3381	520
2003	M	80-84	9.096	400	6248	2216	211
2003	M	85 +	5.033	216	2688	2024	91
2003	Ž	Pod 15	145.273	144.424	-	-	-
2003	Ž	15-19	63.797	63.363	144	-	1
2003	Ž	20-24	72.144	66.421	5096	8	125
2003	Ž	25-29	72.589	46.596	24185	86	966
2003	Ž	30-34	70.061	25.405	40885	314	2654
2003	Ž	35-39	77.380	18.472	52269	789	5202
2003	Ž	40-44	75.556	15.738	50795	1573	6943
2003	Ž	45-49	77.693	11.800	54080	3171	8305
2003	Ž	50-54	70.693	7.607	50875	4876	7112
2003	Ž	55-59	54.507	4.151	39226	6423	4575
2003	Ž	60-64	55.177	3.856	36771	10650	3782
2003	Ž	65-69	52.836	3.750	30113	15784	3106
2003	Ž	70-74	50.853	4.412	23129	20403	2827
2003	Ž	75-79	41.589	4.271	13666	21442	2129
2003	Ž	80-84	23.695	2.686	5585	14368	1012
2003	Ž	85 +	15.603	2.042	2583	10430	512
2004	M&Ž	Pod 15	291.510	291.510	-	-	-
2004	M&Ž	15-19	128.647	127.962	166	-	-
2004	M&Ž	20-24	146.481	139.007	5818	3	137
2004	M&Ž	25-29	151.240	113.234	33874	79	1281
2004	M&Ž	30-34	143.557	68.258	67691	325	4111
2004	M&Ž	35-39	154.034	47.785	93245	866	8660
2004	M&Ž	40-44	154.638	37.695	99536	1822	12250
2004	M&Ž	45-49	158.252	33.575	102708	3643	15214
2004	M&Ž	50-54	150.642	24.178	103314	6106	14841
2004	M&Ž	55-59	110.247	12.225	79693	7743	9299

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2004	M&Ž	60-64	107.030	8.543	77736	12871	7138
2004	M&Ž	65-69	95.024	6.726	64444	18400	5179
2004	M&Ž	70-74	85.292	6.176	50538	24386	4049
2004	M&Ž	75-79	62.833	5.069	29569	25255	2814
2004	M&Ž	80-84	37.386	3.435	13410	19032	1441
2004	M&Ž	85 +	19.620	2.079	5004	11900	575
2004	M	Pod 15	149.953	149.953	-	-	-
2004	M	15-19	65.746	65.431	21	-	-
2004	M	20-24	75.433	73.004	1326	-	19
2004	M	25-29	78.234	63.939	11747	10	372
2004	M	30-34	73.466	40.850	28552	36	1524
2004	M	35-39	77.660	28.599	42577	113	3509
2004	M	40-44	78.697	21.854	48451	289	5204
2004	M	45-49	81.295	21.023	50019	645	6833
2004	M	50-54	77.647	15.722	51646	1153	7129
2004	M	55-59	54.801	7.716	40083	1447	4414
2004	M	60-64	51.034	4.767	40191	2291	3148
2004	M	65-69	42.823	3.028	34447	3133	2028
2004	M	70-74	34.270	1.949	27217	3825	1208
2004	M	75-79	20.757	896	15604	3618	585
2004	M	80-84	10.313	460	7066	2533	228
2004	M	85 +	4.673	195	2493	1889	80
2004	Ž	Pod 15	141.557	141.557	-	-	-
2004	Ž	15-19	62.901	62.531	145	-	-
2004	Ž	20-24	71.048	66.003	4492	3	118
2004	Ž	25-29	73.006	49.295	22127	69	909
2004	Ž	30-34	70.091	27.408	39139	289	2587
2004	Ž	35-39	76.374	19.186	50668	753	5151
2004	Ž	40-44	75.941	15.841	51085	1533	7046
2004	Ž	45-49	76.957	12.552	52689	2998	8381
2004	Ž	50-54	72.995	8.456	51668	4953	7712
2004	Ž	55-59	55.446	4.509	39610	6296	4885
2004	Ž	60-64	55.996	3.776	37545	10580	3990
2004	Ž	65-69	52.201	3.698	29997	15267	3151
2004	Ž	70-74	51.022	4.227	23321	20561	2841
2004	Ž	75-79	42.076	4.173	13965	21637	2229
2004	Ž	80-84	27.073	2.975	6344	16499	1213
2004	Ž	85 +	14.947	1.884	2511	10011	495
2005	M&Ž	Pod 15	286.678	286.678	-	-	-
2005	M&Ž	15-19	125.713	124.970	191	-	1
2005	M&Ž	20-24	142.413	136.052	5206	3	104
2005	M&Ž	25-29	152.357	118.070	30788	59	1236
2005	M&Ž	30-34	144.376	72.495	64781	293	3959
2005	M&Ž	35-39	151.765	49.614	89659	799	8492
2005	M&Ž	40-44	154.864	38.365	99264	1775	12245
2005	M&Ž	45-49	156.702	34.274	100666	3521	15257
2005	M&Ž	50-54	154.043	26.164	103841	6073	15654
2005	M&Ž	55-59	116.497	13.879	82980	7943	10362
2005	M&Ž	60-64	105.698	8.705	76507	12329	7432
2005	M&Ž	65-69	95.415	6.941	64670	18070	5426
2005	M&Ž	70-74	86.000	5.952	51265	24500	4157
2005	M&Ž	75-79	64.610	5.014	30953	25638	2897
2005	M&Ž	80-84	39.836	3.621	14155	20379	1615
2005	M&Ž	85 +	20.623	2.133	5252	12567	634
2005	M	Pod 15	147.317	147.317	-	-	-
2005	M	15-19	64.435	64.106	19	-	-
2005	M	20-24	72.833	70.989	1149	-	19
2005	M	25-29	78.648	66.094	10498	7	353
2005	M	30-34	74.183	43.075	27367	34	1445
2005	M	35-39	76.652	29.800	40718	102	3418
2005	M	40-44	78.502	22.413	47857	273	5183
2005	M	45-49	80.375	20.999	49315	615	6812
2005	M	50-54	79.338	16.895	51737	1176	7424
2005	M	55-59	58.211	8.852	41719	1496	4952
2005	M	60-64	50.541	5.008	39403	2197	3312
2005	M	65-69	43.388	3.234	34615	3137	2183
2005	M	70-74	34.803	2.004	27621	3822	1289
2005	M	75-79	22.117	980	16609	3849	635
2005	M	80-84	10.864	499	7380	2702	258

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2005	M	85 +	4.845	192	2642	1911	94
2005	Ž	Pod 15	139.361	139.361	-	-	-
2005	Ž	15-19	61.278	60.864	172	-	1
2005	Ž	20-24	69.580	65.063	4057	3	85
2005	Ž	25-29	73.709	51.976	20290	52	883
2005	Ž	30-34	70.193	29.420	37414	259	2514
2005	Ž	35-39	75.113	19.814	48941	697	5074
2005	Ž	40-44	76.362	15.952	51407	1502	7062
2005	Ž	45-49	76.327	13.275	51351	2906	8445
2005	Ž	50-54	74.705	9.269	52104	4897	8230
2005	Ž	55-59	58.286	5.027	41261	6447	5410
2005	Ž	60-64	55.157	3.697	37104	10132	4120
2005	Ž	65-69	52.027	3.707	30055	14933	3243
2005	Ž	70-74	51.197	3.948	23644	20678	2868
2005	Ž	75-79	42.493	4.034	14344	21789	2262
2005	Ž	80-84	28.972	3.122	6775	17677	1357
2005	Ž	85 +	15.778	1.941	2610	10656	540
2006	M&Ž	Pod 15	283.221	282.135	-	-	-
2006	M&Ž	15-19	122.479	121.703	211	-	1
2006	M&Ž	20-24	139.164	133.314	4720	4	107
2006	M&Ž	25-29	153.401	122.055	28243	55	1158
2006	M&Ž	30-34	147.392	77.960	62471	250	4001
2006	M&Ž	35-39	148.245	51.222	85039	705	8148
2006	M&Ž	40-44	156.245	39.730	99213	1727	12436
2006	M&Ž	45-49	155.061	34.708	98762	3330	15254
2006	M&Ž	50-54	155.696	27.899	103068	5999	16287
2006	M&Ž	55-59	129.274	16.461	90492	8515	12312
2006	M&Ž	60-64	100.306	8.584	72074	11493	7381
2006	M&Ž	65-69	96.351	7.187	65352	17723	5714
2006	M&Ž	70-74	85.258	5.718	51148	24027	4229
2006	M&Ž	75-79	67.201	5.013	32858	26157	3058
2006	M&Ž	80-84	42.055	3.716	15020	21517	1728
2006	M&Ž	85 +	22.009	2.238	5650	13358	717
2006	M	Pod 15	145.642	145.082	-	-	-
2006	M	15-19	62.810	62.466	22	-	-
2006	M	20-24	71.487	69.654	1105	-	20
2006	M	25-29	79.212	67.800	9648	7	316
2006	M	30-34	76.028	46.109	26312	29	1459
2006	M	35-39	75.221	30.663	38584	95	3316
2006	M	40-44	79.160	23.484	47456	252	5281
2006	M	45-49	79.207	20.635	48616	557	6742
2006	M	50-54	80.107	17.963	51193	1132	7613
2006	M	55-59	65.007	10.619	45445	1668	5934
2006	M	60-64	48.046	5.023	36995	2062	3298
2006	M	65-69	44.075	3.465	34887	3102	2342
2006	M	70-74	34.958	2.034	27715	3771	1364
2006	M	75-79	23.837	1.110	17918	4063	701
2006	M	80-84	11.517	498	7843	2860	285
2006	M	85 +	5.151	207	2825	2014	96
2006	Ž	Pod 15	137.579	137.053	-	-	-
2006	Ž	15-19	59.669	59.237	189	-	1
2006	Ž	20-24	67.677	63.660	3615	4	87
2006	Ž	25-29	74.189	54.255	18595	48	842
2006	Ž	30-34	71.364	31.851	36159	221	2542
2006	Ž	35-39	73.024	20.559	46455	610	4832
2006	Ž	40-44	77.085	16.246	51757	1475	7155
2006	Ž	45-49	75.854	14.073	50146	2773	8512
2006	Ž	50-54	75.589	9.936	51875	4867	8674
2006	Ž	55-59	64.267	5.842	45047	6847	6378
2006	Ž	60-64	52.260	3.561	35079	9431	4083
2006	Ž	65-69	52.276	3.722	30465	14621	3372
2006	Ž	70-74	50.300	3.684	23433	20256	2865
2006	Ž	75-79	43.364	3.903	14940	22094	2357
2006	Ž	80-84	30.538	3.218	7177	18657	1443
2006	Ž	85 +	16.858	2.031	2825	11344	621
2007	M&Ž	Pod 15	281.079	279.954	3	-	-
2007	M&Ž	15-19	119.569	118.744	234	-	-
2007	M&Ž	20-24	135.712	130.092	4420	6	109
2007	M&Ž	25-29	153.171	124.055	26321	38	1043

se nadaljuje

Leto	Spol	Starostna skupina	SKUPAJ	Samska/Samski	Poročen/Poročena	Vdovec/Vdova	Razvezan/Razvezana
2007	M&Ž	30-34	150.054	83.617	59789	208	3881
2007	M&Ž	35-39	145.826	53.576	80902	665	7720
2007	M&Ž	40-44	156.963	41.403	98370	1600	12488
2007	M&Ž	45-49	154.131	35.093	97926	3165	15000
2007	M&Ž	50-54	157.864	29.850	102566	5969	16896
2007	M&Ž	55-59	135.402	18.388	93346	8689	13468
2007	M&Ž	60-64	100.975	9.114	71949	11163	7931
2007	M&Ž	65-69	96.660	7.281	65783	17186	5978
2007	M&Ž	70-74	85.833	5.733	52063	23501	4384
2007	M&Ž	75-79	69.113	5.017	34282	26510	3190
2007	M&Ž	80-84	43.781	3.745	15917	22190	1848
2007	M&Ž	85 +	24.244	2.404	6308	14665	815
2007	M	Pod 15	144.600	144.013	1	-	-
2007	M	15-19	61.489	61.091	44	-	-
2007	M	20-24	69.904	67.992	1071	-	21
2007	M	25-29	79.543	68.711	9181	6	290
2007	M	30-34	77.494	48.982	25012	24	1412
2007	M	35-39	74.455	32.105	36716	94	3126
2007	M	40-44	79.741	24.760	46788	220	5310
2007	M	45-49	78.471	20.329	48513	507	6541
2007	M	50-54	81.311	19.236	50843	1099	7814
2007	M	55-59	68.397	11.885	46979	1695	6480
2007	M	60-64	48.344	5.402	36642	2032	3563
2007	M	65-69	44.505	3.621	35044	2988	2518
2007	M	70-74	35.795	2.187	28233	3791	1497
2007	M	75-79	25.201	1.231	18972	4193	753
2007	M	80-84	12.128	495	8308	2986	303
2007	M	85 +	5.604	236	3109	2139	107
2007	Ž	Pod 15	136.479	135.941	2	-	-
2007	Ž	15-19	58.080	57.653	190	-	-
2007	Ž	20-24	65.808	62.100	3349	6	88
2007	Ž	25-29	73.628	55.344	17140	32	753
2007	Ž	30-34	72.560	34.635	34777	184	2469
2007	Ž	35-39	71.371	21.471	44186	571	4594
2007	Ž	40-44	77.222	16.643	51582	1380	7178
2007	Ž	45-49	75.660	14.764	49413	2658	8459
2007	Ž	50-54	76.553	10.614	51723	4870	9082
2007	Ž	55-59	67.005	6.503	46367	6994	6988
2007	Ž	60-64	52.631	3.712	35307	9131	4368
2007	Ž	65-69	52.155	3.660	30739	14198	3460
2007	Ž	70-74	50.038	3.546	23830	19710	2887
2007	Ž	75-79	43.912	3.786	15310	22317	2437
2007	Ž	80-84	31.653	3.250	7609	19204	1545
2007	Ž	85 +	18.640	2.168	3199	12526	708

Legenda: * Vključene so tudi tiste osebe, ki niso navedle zakonskega stanu.

Število živih oseb za določeno leto SURS evidentira na dan 31. 12. YYYY. Za potrebe naše analize, tj. za obdobje 2000–2007, smo morali podatke preurediti. Npr. število živih oseb na dan 31. 12. 1999 smo privzeli kot izhodiščno število živih oseb na začetku leta 2000. Na ta način smo uredili podatke za celotno obdobje 2000–2007.

Vir: Statistični urad RS.

Priloga 12: Programska koda informacijske rešitve za izračun normaliziranih neto premijskih faktorjev in enkratne neto premije izbranega rentnega zavarovanja s spodnjo in z zgornjo Fréchet-Hoeffdingovo mejo.

```
' ©LK 2009/2010
Option Explicit
Public i As Long, ii As Long, iii As Long, k As Integer
Public R As Double, z_n As Integer, RAZLIKA As Integer, odg As Variant
Public Nasel_par As Boolean, Nasel_iskano_vrsto_rente As Boolean
Const p As Integer = 10, z As Integer = 300, AGE As Integer = 20, j_z As Integer = 17
Const Z_v_izpisa As Integer = 300, j As Integer = 8, j_s As Integer = 12, VALUTA As String
= "EUR"
Const RAZLIKA_MAX As Integer = 20, TABLICE_DOLGOZIVOSTI As String = "DAV 2004R"
Private Sub Izracun_rente_za_n_obdobje_Click()
Dim Px As Double, Py As Double, a_xy As Double, min_a_xy As Double, max_a_xy As Double
Dim v As Double, Age_Mo_x(1 To 350) As Integer, Age_Ze_y(1 To 350) As Integer, Zacetek As
Boolean
Dim NIZ_vrst_MultiLives_rent As Variant, Value_tPx(1 To 350) As Double, Value_tPy(1 To 350)
As Double
Dim n As Integer, Vecji_tPx As Boolean, Pomozna_spremenljivka As Double
Dim i_IZPIS As Long, NIZ_lokacij_izpisov As Variant, Lokacija_izpisa As Variant, q As
Integer
Dim Vecja_pomozna_spremenljivka As Boolean
Dim Prvi_izracun_v_vrsti As Boolean, i_ML_renta As Variant, i_vMLrenta As Integer
Dim Value_tQx(1 To 350) As Double, Value_tQy(1 To 350) As Double, Vecji_tQx As Boolean
Dim inf As Variant, i_i As Integer, i_Razlika(1 To 200) As Integer
Const Z_AGE As Integer = 80
If TextBox1 = "" Or ComboBox1 = "" Or ComboBox2 = "" Then
    inf = MsgBox("Prosimo, določite osnovne parametre za izračun" _
    & " rentnih faktorjev!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
R = TextBox1.Value / 100
RAZLIKA = ComboBox1.Value
z_n = ComboBox2.Value
If R <= 0 Then
    ' preverimo ali je res vnešena prava obr. mera
    odg = MsgBox("Ali je vnešena obrestna mera pravilna?", vbYesNo, "POZOR!")
    If odg = vbYes Then
        ' nadaljujemo, saj je potrjena prava obr. mera
    Else
        Exit Sub
    End If
End If
If RAZLIKA < 0 Or RAZLIKA > RAZLIKA_MAX Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da izberete višino razlike v starosti z drsnega seznama
vrednosti.", vbCritical, "POZOR!")
    ComboBox1 = ""
    Exit Sub
End If
If z_n < 1 Or z_n > 30 Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da izberete dolžino omejenega obdobja izplačevanja življenjske
rente" _
        & " rente z drsnega seznama ponujenih vrednosti.", vbCritical, "POZOR!")
    ComboBox2 = ""
    Exit Sub
End If
NIZ_vrst_MultiLives_rent = Array("Joint life", "Last survivor")
NIZ_lokacij_izpisov = Array("RENTE_postnumerando", "RENTE_prenumerando")
' ****
' nastavimo spremenljivke razlik v starosti
For i_i = -RAZLIKA To RAZLIKA Step 1
```

```
    i_Razlika(i_i + RAZLIKA + 1) = i_i
Next i_i
' ****
With Sheets("DAV_2004R")
v = Round(1 / (1 + R), 10)  ' diskontni faktor
i_vMLrenta = 0
Application.Cursor = xlWait
Application.ScreenUpdating = False
' ****
' enolična oznaka vrste rente, ki je vezana na več življenj
' i_vMLrenta = 0: "joint life"
' i_vMLrenta = 1: "last survivor"
' ****
For Each i_ML_renta In NIZ_vrst_MultiLives_rent
    ' računamo za vsako posamezno vrsto rente, ki je
    ' vezana na dve življenji
    ' ===
    q = 0
    ' faktor, ki enolično določa trenutek izplačila rente
    ' prenumerando (q=1); postnumerandno renta (q=0)
    ' ===
    If StrComp(i_ML_renta, "Joint life", vbTextCompare) = 0 Then
        For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
            ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
            Call Brisi_staro_bazo_podatkov(Lokacija_izpisa)
            i_IZPIS = p
            For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
                For iii = AGE To Z_AGE
                    ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                    ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-15)
                    Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                    Value_tQy())
                    Zacetek = True
                    For i = p + iii To Z_v_izpisa
                        ' izračun tPx in tPy, ob izbrani starosti x in y,
                        ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                        ii = ii + 1
                        If Zacetek = True Then
                            Value_tPx(ii) = .Cells(i, 15)       ' Px za M
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)
                           ' Py za Z
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost M
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                          ' Starost Z
                            Zacetek = False
                        Else
                            Value_tPx(ii) = Value_tPx(ii - 1) * .Cells(i, 15)    ' Px za M
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)
                               - 1) _
                            * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)    ' Py za Z
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost M
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                            ' Starost Z
                        End If
                    Next i
                    For n = 1 To z_n
                        ' računamo vrednost rente za izbrana obodbja n
                        ' *******
                        ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
                        a_xy = 0
                        max_a_xy = 0
                        min_a_xy = 0
                        ' *******
                        Prvi_izracun_v_vrsti = True   ' potrebujemo zaradi računanja
```

```
 ' postnumerando in prenumerando rente
For i = iii + 1 - q To iii + n - q
    k = k + 1       ' potenca diskontnega faktorja
    ' ==========
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        a_xy = 1
    Else
        ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
        a_xy = a_xy + Value_tPx(i) * Value_tPy(i + i_Razlika(i_i))
             * (v ^ (k - q))
    End If
    ' ==========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        max_a_xy = 1
    Else
        Vecji_tPx = False
        If Value_tPx(i) >= Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) Then
            Vecji_tPx = True
        End If
        If Vecji_tPx = False Then
            max_a_xy = max_a_xy + Value_tPx(i) * (v ^ (k - q))
        Else
            max_a_xy = max_a_xy + Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) *
              (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
    ' =========
    ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    Vecja_pomozna_spremenljivka = False
    Pomozna_spremenljivka = 0
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        min_a_xy = 1
        Prvi_izracun_v_vrsti = False
    Else
        Pomozna_spremenljivka = Value_tPx(i) + Value_tPy(i +
       i_Razlika(i_i)) - 1
        If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
            Vecja_pomozna_spremenljivka = True
        End If
        If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
            min_a_xy = min_a_xy + Pomozna_spremenljivka * (v ^ (k -
             q))
        Else
            min_a_xy = min_a_xy + 0 * (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
Next i
If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1)
      <= 121) _
    And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii
      + 1) >= 25) Then
    ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
```

```
                        ' izpišemo izračunane vrednosti
                        Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
                         Age_Mo_x(iii + 1), _
                        Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa,
                         i_vMLrenta, 0, "")
                    End If
                    k = 0
                Next n
            Next iii
        Next i_i
        q = q + 1
        ' pričnemo z računanjem prenumerando rent
    Next
ElseIf StrComp(i_ML_renta, "Last survivor", vbTextCompare) = 0 Then
    i_vMLrenta = i_vMLrenta + 1
    ' pričnemo z računanjem rente druge vrste
    For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
        ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
        i_IZPIS = p
        For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
            For iii = AGE To Z_AGE
                ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-15)
                Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                Value_tQy())
                Zacetek = True
                For i = p + iii To Z_v_izpisa
                    ' izračun tQx in tQy, ob izbrani starosti x in y,
                    ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                    ii = ii + 1
                    If Zacetek = True Then
                        Value_tQx(ii) = (1 - .Cells(i, 15)) ' Qx za M
                        Value_tQy(ii + i_Razlika(i_i)) = (1 - .Cells(i +
                          i_Razlika(i_i), 16))   ' Qy za Z
                        Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)    ' Starost M
                        Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                        ' Starost Z
                        Zacetek = False
                    Else
                        Value_tQx(ii) = (1 - (1 - Value_tQx(ii - 1)) * .Cells(i, 15))
                       ' Qx za M
                        Value_tQy(ii + i_Razlika(i_i)) = (1 - (1 - Value_tQy(ii +
                        i_Razlika(i_i) - 1)) _
                        * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16))  ' Qy za Z
                        Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)            ' Starost M
                        Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                       ' Starost Z
                    End If
                Next i
                For n = 1 To z_n
                    ' računamo vrednost rente za izbrana obodbja n
                    ' *******
                    ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
                    a_xy = 0
                    max_a_xy = 0
                    min_a_xy = 0
                    ' *******
                    Prvi_izracun_v_vrsti = True   ' potrebujemo zaradi računanja
                    ' postnumerando in prenumerando rente
                    For i = iii + 1 - q To iii + n - q
                        k = k + 1       ' potenca diskontnega faktorja
                        ' ==========
                        If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
                            ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
```

```
        ' in prenumerando rento
        a_xy = 1
    Else
        ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
        a_xy = a_xy + (1 - Value_tQx(i) * Value_tQy(i +
       i_Razlika(i_i))) * (v ^ (k - q))
    End If
    ' ==========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        min_a_xy = 1
    Else
        Vecji_tQx = False
        If Value_tQx(i) >= Value_tQy(i + i_Razlika(i_i)) Then
            Vecji_tQx = True
        End If
        If Vecji_tQx = False Then
            min_a_xy = min_a_xy + (1 - Value_tQx(i)) * (v ^ (k -
              q))
        Else
            min_a_xy = min_a_xy + (1 - Value_tQy(i +
             i_Razlika(i_i))) * (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    Vecja_pomozna_spremenljivka = False
    Pomozna_spremenljivka = 0
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        max_a_xy = 1
        Prvi_izracun_v_vrsti = False
    Else
        Pomozna_spremenljivka = Value_tQx(i) + Value_tQy(i +
       i_Razlika(i_i)) - 1
        If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
            Vecja_pomozna_spremenljivka = True
        End If
        If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
            max_a_xy = max_a_xy + (1 - Pomozna_spremenljivka) * (v
              ^ (k - q))
        Else
            max_a_xy = max_a_xy + (1 - 0) * (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
Next i
If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1)
      <= 121) _
    And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii
      + 1) >= 25) Then
    ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
    ' izpišemo izračunane vrednosti
    Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
      Age_Mo_x(iii + 1), _
    Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa,
      i_vMLrenta, 0, "")
```

```
                        End If
                        k = 0
                    Next n
                Next iii
            Next i_i
            ' uredimo podatke, po x, y in n
            Call Uredi_podatke_1(Lokacija_izpisa)
            q = q + 1
            ' pričnemo z računanjem prenumerando rent
        Next
    End If
Next
End With
Application.ScreenUpdating = True
Sheets("Vnosna MASKA").Select
Application.Cursor = xlDefault
inf = MsgBox("Izračun rentnih faktorjev, za rente z omejenim obdobjem izplačevanja, so
zaključeni!", vbInformation, "Obvestilo!")
End Sub
Private Sub Izracun_dosmrtne_rente_Click()
Dim Px As Double, Py As Double, a_xy As Double, min_a_xy As Double, max_a_xy As Double
Dim v As Double, Age_Mo_x(1 To 350) As Integer, Age_Ze_y(1 To 350) As Integer, Zacetek As
Boolean
Dim NIZ_vrst_MultiLives_rent As Variant, Value_tPx(1 To 350) As Double, Value_tPy(1 To 350)
As Double
Dim n As Integer, Vecji_tPx As Boolean, Pomozna_spremenljivka As Double
Dim i_IZPIS As Long, NIZ_lokacij_izpisov As Variant, Lokacija_izpisa As Variant, q As
Integer
Dim Vecja_pomozna_spremenljivka As Boolean
Dim Prvi_izracun_v_vrsti As Boolean, i_ML_renta As Variant, i_vMLrenta As Integer
Dim Value_tQx(1 To 350) As Double, Value_tQy(1 To 350) As Double, Vecji_tQx As Boolean
Dim inf As Variant, Predcasno_koncaj As Boolean, i_i As Integer, i_Razlika(1 To 200) As
Integer
Const Z_AGE As Integer = 121, z_n As Integer = 120
If TextBox1 = "" Or ComboBox1 = "" Then
    inf = MsgBox("Prosimo, določite parametra za izračun" _
    & " rentnih faktorjev!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
R = TextBox1.Value / 100
RAZLIKA = ComboBox1.Value
If R <= 0 Then
    ' preverimo ali je res vnešena prava obr. mera
    odg = MsgBox("Ali je vnešena obrestna mera pravilna?", vbYesNo, "POZOR!")
    If odg = vbYes Then
        ' nadaljujemo, saj je potrjena prava obr. mera
    Else
        Exit Sub
    End If
End If
If RAZLIKA < 0 Or RAZLIKA > RAZLIKA_MAX Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da izberete višino razlike v starosti drsnega seznama
vrednosti.", vbCritical, "POZOR!")
    ComboBox1 = ""
    Exit Sub
End If
NIZ_vrst_MultiLives_rent = Array("Joint life", "Last survivor")
NIZ_lokacij_izpisov = Array("RENTE_postnumerando_D", "RENTE_prenumerando_D")
' ****
' nastavimo spremenljivke razlik v starosti
For i_i = -RAZLIKA To RAZLIKA Step 1
    i_Razlika(i_i + RAZLIKA + 1) = i_i ' i-ta razlika
Next i_i
' ****
```

```
With Sheets("DAV_2004R")
v = Round(1 / (1 + R), 10)  ' diskontni faktor
i_vMLrenta = 0
Application.Cursor = xlWait
Application.ScreenUpdating = False
' *****
' enolična oznaka vrste rente, ki je vezana na več življenj
' i_vMLrenta = 0: "joint life"
' i_vMLrenta = 1: "last survivor"
' *****
For Each i_ML_renta In NIZ_vrst_MultiLives_rent
    ' računamo za vsako posamezno vrsto rente, ki je
    ' vezana na dve življenji
    ' ****
    q = 0
    ' faktor, ki enolično določa trenutek izplačila rente
    ' prenumerando (q=1); postnumerandno renta (q=0)
    ' ****
    If StrComp(i_ML_renta, "Joint life", vbTextCompare) = 0 Then
        For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
            ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
            Call Brisi_staro_bazo_podatkov(Lokacija_izpisa)
            i_IZPIS = p
            For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
                For iii = AGE To Z_AGE
                    ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                    ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-15)
                    Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                    Value_tQy())
                    Zacetek = True
                    For i = p + iii To Z_v_izpisa
                        ' izračun tPx in tPy, ob izbrani starosti x in y,
                        ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                        ii = ii + 1
                        If Zacetek = True Then
                            Value_tPx(ii) = .Cells(i, 15)       ' Px za moške
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)
                              ' Py za ženske
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                          ' Starost ženske
                            Zacetek = False
                        Else
                            Value_tPx(ii) = Value_tPx(ii - 1) * .Cells(i, 15)
                              ' Px za moške
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)
                              - 1) _
                            * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)    ' Py za ženske
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                           ' Starost ženske
                        End If
                    Next i
                    For n = 1 To z_n
                        ' računamo rento po obdobjih n-->inf, dosmrtna renta
                        ' *******
                        ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
                        a_xy = 0
                        max_a_xy = 0
                        min_a_xy = 0
                        ' *******
                        Prvi_izracun_v_vrsti = True     ' potrebujemo zaradi računanja
                        ' postnumerando in prenumerando rente
                        Predcasno_koncaj = False
```

```
 ' potrebujemo zaradi hitrejše obdelave
For i = iii + 1 - q To iii + n - q
    k = k + 1   ' potenca diskontnega faktorja
    ' ==========
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        a_xy = 1
    Else
        ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
        a_xy = a_xy + Value_tPx(i) * Value_tPy(i + i_Razlika(i_i))
              * (v ^ (k - q))
    End If
    ' ==========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        max_a_xy = 1
    Else
        Vecji_tPx = False
        If Value_tPx(i) >= Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) Then
            Vecji_tPx = True
        End If
        If Vecji_tPx = False Then
            max_a_xy = max_a_xy + Value_tPx(i) * (v ^ (k - q))
        Else
            max_a_xy = max_a_xy + Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) *
             (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    Vecja_pomozna_spremenljivka = False
    Pomozna_spremenljivka = 0
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        min_a_xy = 1
        Prvi_izracun_v_vrsti = False
    Else
        Pomozna_spremenljivka = Value_tPx(i) + Value_tPy(i +
             i_Razlika(i_i)) - 1
        If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
            Vecja_pomozna_spremenljivka = True
        End If
        If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
            min_a_xy = min_a_xy + Pomozna_spremenljivka * (v ^ (k -
             q))
        Else
            min_a_xy = min_a_xy + 0 * (v ^ (k - q))
        End If
        If min_a_xy = 1 Then
            ' vrednost se ne spreminja, dobili smo končno
            ' vrednost dosmrtne rente
            Predcasno_koncaj = True
            Exit For
        End If
    End If
    ' =========
```

```
                    Next i
                    k = 0
                    If Predcasno_koncaj = True Then
                        ' zaključimo zanko, izpišemo vrednost
                        ' in nadaljujemo z naslednjim parom starosti
                        Exit For
                    End If
                Next n
                If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1) <=
                  121) _
                    And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii + 1)
                          >= 25) Then
                    ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
                    ' izpišemo izračunane vrednosti
                    Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
                         Age_Mo_x(iii + 1), _
                    Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa, i_vMLrenta, 0,
                         "")
                End If
            Next iii
        Next i_i
        q = q + 1
        ' pričnemo z računanjem prenumerando rent
    Next
ElseIf StrComp(i_ML_renta, "Last survivor", vbTextCompare) = 0 Then
    i_vMLrenta = i_vMLrenta + 1
    ' preklopimo na računanje rente <> vrste
    For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
        ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
        i_IZPIS = p
        For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
            For iii = AGE To Z_AGE
                ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-15)
                Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                   Value_tQy())
                Zacetek = True
                For i = p + iii To Z_v_izpisa
                    ' izračun tQx in tQy, ob izbrani starosti x in y,
                    ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                    ii = ii + 1
                    If Zacetek = True Then
                        Value_tQx(ii) = (1 - .Cells(i, 15)) ' Qx za M
                        Value_tQy(ii + i_Razlika(i_i)) = (1 - .Cells(i +
                          i_Razlika(i_i), 16))   ' Qy za Z
                        Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost M
                        Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                          ' Starost Z
                        Zacetek = False
                    Else
                        Value_tQx(ii) = (1 - (1 - Value_tQx(ii - 1)) * .Cells(i, 15))
                           ' Qx za M
                        Value_tQy(ii + i_Razlika(i_i)) = (1 - (1 - Value_tQy(ii +
                          i_Razlika(i_i) - 1)) _
                        * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16))   ' Qy za Z
                        Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost M
                        Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                           ' Starost Z
                    End If
                Next i
                For n = 1 To z_n
                    ' računamo rento po obdobjih n-->inf, dosmrtna renta
                    ' *******
                    ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
```

```
a_xy = 0
max_a_xy = 0
min_a_xy = 0
' *******
Prvi_izracun_v_vrsti = True   ' potrebujemo zaradi računanja
     ' postnumerando in prenumerando rente
Predcasno_koncaj = False
For i = iii + 1 - q To iii + n - q
    k = k + 1   ' potenca diskontnega faktorja
    ' ==========
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        a_xy = 1
    Else
        ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
        a_xy = a_xy + (1 - Value_tQx(i) * Value_tQy(i +
      i_Razlika(i_i))) * (v ^ (k - q))
    End If
    ' ==========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        min_a_xy = 1
    Else
        Vecji_tQx = False
        If Value_tQx(i) >= Value_tQy(i + i_Razlika(i_i)) Then
            Vecji_tQx = True
        End If
        If Vecji_tQx = False Then
            min_a_xy = min_a_xy + (1 - Value_tQx(i)) * (v ^ (k -
              q))
        Else
            min_a_xy = min_a_xy + (1 - Value_tQy(i +
             i_Razlika(i_i))) * (v ^ (k - q))
        End If
    End If
    ' =========
    ' ==========
    ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
    ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
    Vecja_pomozna_spremenljivka = False
    Pomozna_spremenljivka = 0
    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
        ' in prenumerando rento
        max_a_xy = 1
        Prvi_izracun_v_vrsti = False
    Else
        Pomozna_spremenljivka = Value_tQx(i) + Value_tQy(i +
             i_Razlika(i_i)) - 1
        If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
            Vecja_pomozna_spremenljivka = True
        End If
        If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
            max_a_xy = max_a_xy + (1 - Pomozna_spremenljivka) * (v
              ^ (k - q))
        Else
            max_a_xy = max_a_xy + (1 - 0) * (v ^ (k - q))
        End If
        If max_a_xy = 1 Then
```

```
                                    Predcasno_koncaj = True
                                    Exit For
                                End If
                            End If
                            ' =========
                        Next i
                        k = 0
                        If Predcasno_koncaj = True Then
                            Exit For
                        End If
                    Next n
                    If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1) <=
                            121) _
                        And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii + 1)
                            >= 25) Then
                        ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
                        ' izpišemo izračunane vrednosti
                        Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
                            Age_Mo_x(iii + 1), _
                        Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa, i_vMLrenta, 0,
                            "")
                    End If
                Next iii
            Next i_i
            ' uredimo podatke, po x, y in n
            Call Uredi_podatke_2(Lokacija_izpisa)
            q = q + 1
            ' pričnemo z računanjem prenumerando rent
        Next
    End If
Next
End With
Application.ScreenUpdating = True
Application.Cursor = xlDefault
Sheets("Vnosna MASKA").Select
inf = MsgBox("Izračun rentnih faktorjev, za dosmrtno rento, je zaključen!", vbInformation,
"Obvestilo!")
End Sub
Private Sub Izracun_dosmrtne_odlozene_rente_Click()
Dim NIZ_vrst_MultiLives_rent As Variant, NIZ_lokacij_izpisov  As Variant
Dim i_NIZ_lokacij As Variant, Podatki(1 To 4) As String, i_Podatki As Variant
Dim Podatki_vsi As Variant, STAROST_Mx As Integer, STAROST_Zy As Integer
Dim i_IZPIS As Long, Lokacija_izpisa(1 To 2) As String, inf As Variant
Dim Odlog_n As Integer, a_xy_n(j_s To j_z) As Double
Application.Cursor = xlWait
Application.ScreenUpdating = False
NIZ_lokacij_izpisov = Array("RENTE_postnumerando_D_odlozene",
 "RENTE_prenumerando_D_odlozene")
Podatki_vsi = Array(1, 3)
Call Inicializacija(Podatki)
Call Konstante(Podatki)
i = 0
For Each i_NIZ_lokacij In NIZ_lokacij_izpisov
    i = i + 1
    Lokacija_izpisa(i) = i_NIZ_lokacij
    Call Brisi_staro_bazo_podatkov(i_NIZ_lokacij)
Next
    i = 0
    For Each i_Podatki In Podatki_vsi
        i = i + 1
        i_IZPIS = p
        Sheets(Lokacija_izpisa(i)).Select
        With Sheets(Podatki(i_Podatki))
            ii = p + 1
```

```
            Do Until .Cells(ii, j) = ""
                Odlog_n = .Cells(ii, j + 3)
                STAROST_Mx = .Cells(ii, j)
                STAROST_Zy = .Cells(ii, j + 1)
                Call Najdi_rento_koncno_obdobje_a_xy_n(STAROST_Mx, STAROST_Zy,
                      Podatki(i_Podatki + 1), a_xy_n())
                If Nasel_par = True Then
                    i_IZPIS = i_IZPIS + 1
                    For k = j_s - 5 To j_z - 7
                        Cells(i_IZPIS, k) = .Cells(ii, k)
                    Next k
                    Cells(i_IZPIS, j + 3) = Odlog_n ' čas odloga: (d)
                    ' ====
                    ' izpišemo vrednost odložene rente
                    For k = j_s To j_z
                        ' Formula: a_xy - a_xy:d = d_a_xy
                        Cells(i_IZPIS, k) = a_xy_n(k) - .Cells(ii, k)
                    Next k
                    Cells(p - 9, p - 9) = i_IZPIS
                    ' ====
                End If
                ii = ii + 1
            Loop
        End With
    Next
Application.ScreenUpdating = True
Application.Cursor = xlDefault
Sheets("Vnosna MASKA").Select
inf = MsgBox("Izračun rentnih faktorjev, za odloženo rento, je zaključen!", vbInformation,
"Obvestilo!")
End Sub
Private Sub Izracun_vdovske_vdovceve_rente_Click()
Dim Px As Double, Py As Double, a_xy As Double, min_a_xy As Double, max_a_xy As Double
Dim v As Double, Age_Mo_x(1 To 350) As Integer, Age_Ze_y(1 To 350) As Integer, Zacetek As
Boolean
Dim NIZ_vrst_MultiLives_rent As Variant, Value_tPx(1 To 350) As Double, Value_tPy(1 To 350)
As Double
Dim n As Integer, Vecji_tPx As Boolean, Pomozna_spremenljivka As Double
Dim i_IZPIS As Long, NIZ_lokacij_izpisov As Variant, Lokacija_izpisa As Variant, q As
Integer
Dim Vecja_pomozna_spremenljivka As Boolean
Dim Prvi_izracun_v_vrsti As Boolean, i_ML_renta As Variant, i_vMLrenta As Integer
Dim Value_tQx(1 To 350) As Double, Value_tQy(1 To 350) As Double, Vecji_tQx As Boolean
Dim inf As Variant, Predcasno_koncaj As Boolean, i_i As Integer, i_Razlika(1 To 200) As
Integer
Dim a_y As Double, a_x As Double
Const Z_AGE As Integer = 121, z_n As Integer = 120
If TextBox1 = "" Or ComboBox1 = "" Then
    inf = MsgBox("Prosimo, določite parametra za izračun" _
    & " rentnih faktorjev!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
R = TextBox1.Value / 100
RAZLIKA = ComboBox1.Value
If R <= 0 Then
    ' preverimo ali je res vnešena prava obr. mera
    odg = MsgBox("Ali je vnešena obrestna mera pravilna?", vbYesNo, "POZOR!")
    If odg = vbYes Then
        ' nadaljujemo, saj je potrjena prava obr. mera
    Else
        Exit Sub
    End If
End If
If RAZLIKA < 0 Or RAZLIKA > RAZLIKA_MAX Then
```

```
    inf = MsgBox("Prosimo, da izberete višino razlike v starosti drsnega seznama
vrednosti.", vbCritical, "POZOR!")
    ComboBox1 = ""
    Exit Sub
End If
NIZ_vrst_MultiLives_rent = Array("Vdovska renta", "Vdovčeva renta")
NIZ_lokacij_izpisov = Array("RENTE_postnumerando_D_VDOVSKE",
"RENTE_prenumerando_D_VDOVSKE")
' ****
' nastavimo spremenljivke razlik v starosti
For i_i = -RAZLIKA To RAZLIKA Step 1
    i_Razlika(i_i + RAZLIKA + 1) = i_i ' i-ta razlika
Next i_i
' ****
With Sheets("DAV_2004R")
v = Round(1 / (1 + R), 10)  ' diskontni faktor
i_vMLrenta = 0
Application.Cursor = xlWait
Application.ScreenUpdating = False
' *****
' enolična oznaka vrste rente, ki je vezana na več življenj
' i_vMLrenta = 0: "Vdovska renta"
' *****
For Each i_ML_renta In NIZ_vrst_MultiLives_rent
    ' ****
    ' faktor, ki enolično določa trenutek izplačila rente
    ' prenumerando (q=1); postnumerandno renta (q=0)
    q = 0
    ' ****
    If StrComp(i_ML_renta, "Vdovska renta", vbTextCompare) = 0 Then
        For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
            ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
            Call Brisi_staro_bazo_podatkov(Lokacija_izpisa)
            i_IZPIS = p
            For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
                For iii = AGE To Z_AGE
                    ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                    ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-)
                    Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                      Value_tQy())
                    Zacetek = True
                    For i = p + iii To Z_v_izpisa
                        ' izračun tPx in tPy, ob izbrani starosti x in y,
                        ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                        ii = ii + 1
                        If Zacetek = True Then
                            Value_tPx(ii) = .Cells(i, 15)       ' Px za moške
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)
                               ' Py za ženske
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                                 ' Starost ženske
                            Zacetek = False
                        Else
                            Value_tPx(ii) = Value_tPx(ii - 1) * .Cells(i, 15)
                              ' Px za moške
                            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)
                              - 1) _
                            * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)    ' Py za ženske
                            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
                            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                               ' Starost ženske
                        End If
                    Next i
```

```
For n = 1 To z_n
    ' računamo rento po obdobjih n-->inf, vdovska renta
    ' *******
    ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
    a_xy = 0
    a_y = 0
    max_a_xy = 0
    min_a_xy = 0
    ' *******
    Prvi_izracun_v_vrsti = True     ' potrebujemo zaradi računanja
         ' postnumerando in prenumerando rente
    Predcasno_koncaj = False
   ' potrebujemo zaradi hitrejše obdelave
    For i = iii + 1 - q To iii + n - q
        k = k + 1   ' potenca diskontnega faktorja
        ' ==========
        If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
            ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
            ' in prenumerando rento
            a_xy = 1
            a_y = 1
        Else
            ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
            a_xy = a_xy + Value_tPx(i) * Value_tPy(i + i_Razlika(i_i))
                  * (v ^ (k - q))
            ' vrednost rente za žensko
            a_y = a_y + Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) * (v ^ (k - q))
        End If
        ' ==========
        ' ==========
        ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
        ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
        If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
            ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
            ' in prenumerando rento
            max_a_xy = 1
        Else
            Vecji_tPx = False
            If Value_tPx(i) >= Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) Then
                Vecji_tPx = True
            End If
            If Vecji_tPx = False Then
                max_a_xy = max_a_xy + Value_tPx(i) * (v ^ (k - q))
            Else
                max_a_xy = max_a_xy + Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) *
                 (v ^ (k - q))
            End If
        End If
        ' =========
        ' ==========
        ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
        ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
        Vecja_pomozna_spremenljivka = False
        Pomozna_spremenljivka = 0
        If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
            ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
            ' in prenumerando rento
            min_a_xy = 1
            Prvi_izracun_v_vrsti = False
        Else
            Pomozna_spremenljivka = Value_tPx(i) + Value_tPy(i +
                 i_Razlika(i_i)) - 1
            If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
                Vecja_pomozna_spremenljivka = True
```

```
                    End If
                    If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
                        min_a_xy = min_a_xy + Pomozna_spremenljivka * (v ^ (k -
                         q))
                    Else
                        min_a_xy = min_a_xy + 0 * (v ^ (k - q))
                    End If
                    If min_a_xy = 1 Then
                        ' vrednost se ne spreminja, dobili smo končno
                        ' vrednost dosmrtne rente
                        Predcasno_koncaj = True
                        Exit For
                    End If
                End If
                ' =========
            Next i
            k = 0
            If Predcasno_koncaj = True Then
                ' zaključimo zanko, izpišemo vrednost
                ' in nadaljujemo z naslednjim parom starosti
                Exit For
            End If
        Next n
        If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1) <=
                 121) _
            And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii + 1)
                  >= 25) Then
            ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
            ' izpišemo izračunane vrednosti
            Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
                  Age_Mo_x(iii + 1), _
            Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa, i_vMLrenta,
                 a_y, "vR")
        End If
    Next iii
Next i_i
q = q + 1
' pričnemo z računanjem prenumerando rent
Next
ElseIf StrComp(i_ML_renta, "Vdovčeva renta", vbTextCompare) = 0 Then
    i_vMLrenta = i_vMLrenta + 1
    ' pričnemo z računanjem rente druge vrste
    ' računamo za vdovčevo rento
    For Each Lokacija_izpisa In NIZ_lokacij_izpisov
        ' ločeno izpisujemo izračunane vrednosti prenumerando in postnumerando rent
        i_IZPIS = p
        For i_i = 1 To RAZLIKA * 2 + 1
            For iii = AGE To Z_AGE
                ' obdobje možne sklenitve rentnega zavarovanja
                ' z vidika moške starosti: x=AGE, y ~ variira (+-)
                Call Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx(), Value_tPy(), Value_tQx(),
                  Value_tQy())
                Zacetek = True
                For i = p + iii To Z_v_izpisa
                    ' izračun tPx in tPy, ob izbrani starosti x in y,
                    ' na podlagi izbranih tablic smrtnosti
                    ii = ii + 1
                    If Zacetek = True Then
                        Value_tPx(ii) = .Cells(i, 15)       ' Px za moške
                        Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)
                             ' Py za ženske
                        Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
                        Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
                             ' Starost ženske
```

```
            Zacetek = False
        Else
            Value_tPx(ii) = Value_tPx(ii - 1) * .Cells(i, 15)
               ' Px za moške
            Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)) = Value_tPy(ii + i_Razlika(i_i)
              - 1) _
            * .Cells(i + i_Razlika(i_i), 16)    ' Py za ženske
            Age_Mo_x(ii) = .Cells(i, 12)        ' Starost moškega
            Age_Ze_y(ii + i_Razlika(i_i)) = .Cells(i + i_Razlika(i_i), 12)
               ' Starost ženske
        End If
    Next i
    For n = 1 To z_n
        ' računamo rento po obdobjih n-->inf, vdovska renta
        ' *******
        ' inicializacija kumulativnih spremenljivk
        a_xy = 0
        a_x = 0
        max_a_xy = 0
        min_a_xy = 0
        ' *******
        Prvi_izracun_v_vrsti = True     ' potrebujemo zaradi računanja
             ' postnumerando in prenumerando rente
        Predcasno_koncaj = False
        ' potrebujemo zaradi hitrejše obdelave
        For i = iii + 1 - q To iii + n - q
            k = k + 1   ' potenca diskontnega faktorja
            ' ==========
            If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
                ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
                ' in prenumerando rento
                a_xy = 1
                a_x = 1
            Else
                ' vrednost rente ob neodvisnosti Txy
                a_xy = a_xy + Value_tPx(i) * Value_tPy(i + i_Razlika(i_i))
                     * (v ^ (k - q))
                ' vrednost rente za žensko
                a_x = a_x + Value_tPx(i) * (v ^ (k - q))
            End If
            ' ==========
            ' ==========
            ' računamo vrednost rente ob manj ugodnem vplivu odvisnosti
            ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
            If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
                ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
                ' in prenumerando rento
                max_a_xy = 1
            Else
                Vecji_tPx = False
                If Value_tPx(i) >= Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) Then
                    Vecji_tPx = True
                End If
                If Vecji_tPx = False Then
                    max_a_xy = max_a_xy + Value_tPx(i) * (v ^ (k - q))
                Else
                    max_a_xy = max_a_xy + Value_tPy(i + i_Razlika(i_i)) *
                      (v ^ (k - q))
                End If
            End If
            ' =========
            ' ==========
            ' računamo vrednost rente ob bolj ugodnem vplivu odvisnosti
            ' preostale življenjske dobe (Txy) med spoloma
```

```
                    Vecja_pomozna_spremenljivka = False
                    Pomozna_spremenljivka = 0
                    If Prvi_izracun_v_vrsti = True And q = 1 Then
                        ' POGOJ: gre za prvi izracun v vrsti
                        ' in prenumerando rento
                        min_a_xy = 1
                        Prvi_izracun_v_vrsti = False
                    Else
                        Pomozna_spremenljivka = Value_tPx(i) + Value_tPy(i +
                             i_Razlika(i_i)) - 1
                        If Pomozna_spremenljivka >= 0 Then
                            Vecja_pomozna_spremenljivka = True
                        End If
                        If Vecja_pomozna_spremenljivka = True Then
                            min_a_xy = min_a_xy + Pomozna_spremenljivka * (v ^ (k -
                             q))
                        Else
                            min_a_xy = min_a_xy + 0 * (v ^ (k - q))
                        End If
                        If min_a_xy = 1 Then
                            ' vrednost se ne spreminja, dobili smo končno
                            ' vrednost dosmrtne rente
                            Predcasno_koncaj = True
                            Exit For
                        End If
                    End If
                    ' =========
                Next i
                k = 0
                If Predcasno_koncaj = True Then
                    ' zaključimo zanko, izpišemo vrednost
                    ' in nadaljujemo z naslednjim parom starosti
                    Exit For
                End If
            Next n
            If (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) <= 121 And Age_Mo_x(iii + 1) <=
                     121) _
                And (Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1) >= 25 And Age_Mo_x(iii + 1)
                     >= 25) Then
                ' pogoj glede starosti: 25 =< x, y =< 121
                ' izpišemo izračunane vrednosti
                Call Izpisi_izracune(i_IZPIS, a_xy, max_a_xy, min_a_xy, n,
                      Age_Mo_x(iii + 1), _
                Age_Ze_y(iii + i_Razlika(i_i) + 1), Lokacija_izpisa, i_vMLrenta,
                     a_x, "vR")
            End If
        Next iii
    Next i_i
    ' uredimo podatke, po x, y in razliki v starosti
    Call Uredi_podatke_2(Lokacija_izpisa)
    q = q + 1
    ' pričnemo z računanjem prenumerando rent
Next
End If
Next
End With
Application.ScreenUpdating = True
Application.Cursor = xlDefault
Sheets("Vnosna MASKA").Select
inf = MsgBox("Izračun rentnih faktorjev, za vdovsko rento, je zaključen!", vbInformation,
"Obvestilo!")
End Sub
Private Sub Izracunaj_enkratno_neto_premijo_Click()
Dim Vrednost_rente As Double, AGE_M As Integer, AGE_Z As Integer
```

```
Dim Ime_in_Priimek_M As String, Ime_in_Priimek_Z As String, Vrsta_rente(1 To 8) As String
Dim Trenutek_izplacila As Integer, Odlog_d As Integer, Obdobje_n As Integer, Podatki_L(1 To
12) As String
Dim Niz_vrst_rent As Variant, i_Vrsta_rente As Variant, Niz_podatki_L As Variant,
i_Niz_podatki_L As Variant
Dim Nacin As Integer, NSPAF_vrednost(j_s To j_z) As Double, Avalue_F_H(j_s To j_z) As
Double, inf As Variant
Dim qq As Integer
Const ST_vrst_rent As Integer = 8
Application.ScreenUpdating = False
Niz_vrst_rent = Array("1. 'Joint lives' z omejenim obdobjem izplačevanja", "2. 'Joint
lives' dosmrtna", _
"3. 'Joint lives' dosmrtna odložena", "4. 'Last survivor' z omejenim obdobjem
izplačevanja", _
"5. 'Last survivor' dosmrtna", "6. 'Last survivor' dosmrtna odložena", "7. Vdovska renta",
"8. Vdovčeva renta")
Niz_podatki_L = Array("RENTE_postnumerando", "RENTE_prenumerando", "RENTE_postnumerando_D",
_
"RENTE_prenumerando_D", "RENTE_postnumerando_D_odlozene", "RENTE_prenumerando_D_odlozene",
_
"RENTE_postnumerando_D_VDOVSKE", "RENTE_prenumerando_D_VDOVSKE")
i = 0
For Each i_Vrsta_rente In Niz_vrst_rent
   i = i + 1
   Vrsta_rente(i) = i_Vrsta_rente
Next
i = 0
For Each i_Niz_podatki_L In Niz_podatki_L
    i = i + 1
    Podatki_L(i) = i_Niz_podatki_L
Next
If TextBox4 = "" Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da vpišete želeno višino letnega izplačila rente!", vbCritical,
"POZOR!")
    Exit Sub
End If
' ===
IME_Z1 = TextBox2.Text
IME_Z2 = TextBox3.Text
Vrednost_rente = TextBox4.Value
' ===
If StrComp(ComboBox5.Text, "", vbTextCompare) = 0 Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da izberete vrsto rente!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
' ====
If StrComp(ComboBox6.Text, "", vbTextCompare) = 0 Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da določite trenutek izplačevanja rente!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
' ====
If StrComp(ComboBox6.Text, "Postnumerando", vbTextCompare) = 0 Then
    Trenutek_izplacila = 0
Else
    Trenutek_izplacila = 1
End If
' ===
If OptionButton1 = False And OptionButton2 = False Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da določite spol zavarovancev!", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
' ===
If ComboBox3 = "" Or ComboBox4 = "" Then
    inf = MsgBox("Prosimo, da vpišete starost zavarovancev!", vbCritical, "POZOR!")
```

```
    Exit Sub
End If
If OptionButton1 = True Then
    AGE_M = ComboBox3.Value
    AGE_Z = ComboBox4.Value
Else
    AGE_Z = ComboBox3.Value
    AGE_M = ComboBox4.Value
End If
If Abs(AGE_Z - AGE_M) > RAZLIKA_MAX Then
    inf = MsgBox("Razlika v starosti med zavarovancema je večja od 20 let." _
        & " Zavarovanje ob takšni starostni razliki ni mogoče.", vbCritical, "POZOR!")
    Exit Sub
End If
If ComboBox7 = "" Then
    Odlog_d = 0
Else
    Odlog_d = ComboBox7.Value
End If
If ComboBox8 = "" Then
    Obdobje_n = 0
Else
    Obdobje_n = ComboBox8.Value
End If
If Odlog_d = 0 And Obdobje_n = 0 Then
    ' dosmrtna renta
    Nacin = 0
ElseIf Odlog_d > 0 And Obdobje_n = 0 Then
    ' dosmrtna odložena renta
    Nacin = 1
ElseIf Odlog_d = 0 And Obdobje_n > 0 Then
    ' življenjska renta z omejenim obdobjem izplačevanja
    Nacin = 2
End If
If StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "7", vbTextCompare) = 0 _
    Or StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "8", vbTextCompare) = 0 Then
    ' vdovska in vdovčeva renta renta
    Nacin = 3
End If
Application.Cursor = xlWait
' *****
' splošno deklarirane spremenljivke za objavo v novi formi
IME_Z1 = TextBox2.Text
AGE_MM = AGE_M
IME_Z2 = TextBox3.Text
AGE_ZZ = AGE_Z
Annuity_type = Mid(ComboBox5.Text, 3, Len(ComboBox5.Text) - 2)
T_izplacila = ComboBox6.Text
Odlog_dd = Odlog_d
Obdobje_nn = Obdobje_n
VREDNOST_letneR = Vrednost_rente
' *****
For i = 1 To ST_vrst_rent
    If StrComp(Vrsta_rente(i), ComboBox5.Text, vbTextCompare) = 0 Then
        ' =====
        If (i = 1 Or i = 4) And Obdobje_n = 0 Then
            inf = MsgBox("Prosimo, da določite dolžino omejenega obdobja izplačevanja
življenjske rente!", vbCritical, "POZOR!")
            Exit Sub
        End If
        If (i = 3 Or i = 6) And Odlog_d = 0 Then
            inf = MsgBox("Prosimo, da določite odlog izplačevanja rente!", vbCritical,
"POZOR!")
            Exit Sub
```

```
        End If
        Application.Cursor = xlWait
        ' =====
        If i <= 3 Or i = 7 Then
            ' joint lives ali vdovska renta
            qq = j_s
        Else
            ' last survivor ali vdovčeva renta
            qq = j_s + 3
        End If
        If i = 1 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = 0
        ElseIf i = 1 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 1
        ElseIf i = 2 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = 1
        ElseIf i = 2 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 2
        ElseIf i = 3 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = 2
        ElseIf i = 3 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 3
        ElseIf i = 4 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = -3
        ElseIf i = 4 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = -2
        ElseIf i = 5 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = -2
        ElseIf i = 5 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = -1
        ElseIf i = 6 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = -1
        ElseIf i = 6 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 0
        ElseIf i = 7 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = 0
        ElseIf i = 7 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 1
        ElseIf i = 8 And Trenutek_izplacila = 0 Then
            Trenutek_izplacila = -1
        ElseIf i = 8 And Trenutek_izplacila = 1 Then
            Trenutek_izplacila = 0
        End If

        Call   Najdi_izbrano_v_rente(Podatki_L(i   +   Trenutek_izplacila),   AGE_M,   AGE_Z,
Odlog_d, _
            Obdobje_n, TextBox4.Value, Nacin, NSPAF_vrednost(), Avalue_F_H())
        If Nasel_iskano_vrsto_rente Then
            ' ****
            ' splošno deklarirane spremenljivke za objavo vnovi formi
            Spodnja_FH_meja = Avalue_F_H(qq + 1)
            Centralna_wRente = Avalue_F_H(qq)
            Zgornja_FH_meja = Avalue_F_H(qq + 2)
            ' ****
            Application.Cursor = xlDefault
            UserForm2.Show
        Else
            ' ****
            ' splošno deklarirane spremenljivke za objavo v novi formi
            Spodnja_FH_meja = Avalue_F_H(qq + 1)
            Centralna_wRente = Avalue_F_H(qq)
            Zgornja_FH_meja = Avalue_F_H(qq + 2)
            ' ****
            Application.Cursor = xlDefault
```

```
            UserForm2.Show
            Exit Sub
        End If
    End If
Next i
End Sub
Function Najdi_izbrano_v_rente(Data_place As String, AGE_M As Integer, AGE_Z As Integer, _
    Odlog_d As Integer, Obdobje_n As Integer, Vrednost_rente As Double, Nacin As Integer, _
    NSPAF_vrednost() As Double, Avalue_F_H() As Double)
Dim inf As Variant
Nasel_iskano_vrsto_rente = False
iii = p + 1
For k = j_s To j_z
    ' inicializacija
    NSPAF_vrednost(k) = 0
    Avalue_F_H(k) = 0
Next k
k = 0
With Sheets(Data_place)
    Do Until .Cells(iii, 8) = ""
        If Nacin = 0 Then
            ' dosmrtna renta
            If .Cells(iii, 8) = AGE_M And .Cells(iii, 9) = AGE_Z Then
                For k = j_s To j_z
                    NSPAF_vrednost(k) = .Cells(iii, k)
                    Avalue_F_H(k) = Round(Vrednost_rente * NSPAF_vrednost(k), 2)
                    Nasel_iskano_vrsto_rente = True
                Next k
            End If
        ElseIf Nacin = 1 Then
            ' dosmrtna odložena renta
            If (.Cells(iii, 8) = AGE_M And .Cells(iii, 9) = AGE_Z And _
                Odlog_d = .Cells(iii, 11)) Then
                For k = j_s To j_z
                    NSPAF_vrednost(k) = .Cells(iii, k)
                    Avalue_F_H(k) = Round(Vrednost_rente * NSPAF_vrednost(k), 2)
                    Nasel_iskano_vrsto_rente = True
                Next k
            End If
        ElseIf Nacin = 2 Then
            ' življenjska renta z omejenim obdobjem izplačevanja
            If (.Cells(iii, 8) = AGE_M And .Cells(iii, 9) = AGE_Z And _
                Obdobje_n = .Cells(iii, 11)) Then
                For k = j_s To j_z
                    NSPAF_vrednost(k) = .Cells(iii, k)
                    Avalue_F_H(k) = Round(Vrednost_rente * NSPAF_vrednost(k), 2)
                    Nasel_iskano_vrsto_rente = True
                Next k
            End If
        ElseIf Nacin = 3 Then
            ' Vdovska ali vdovčeva renta
            If .Cells(iii, 8) = AGE_M And .Cells(iii, 9) = AGE_Z Then
                For k = j_s To j_z
                    NSPAF_vrednost(k) = .Cells(iii, k)
                    Avalue_F_H(k) = Round(Vrednost_rente * NSPAF_vrednost(k), 2)
                    Nasel_iskano_vrsto_rente = True
                Next k
            End If
        End If
        ' ****
        ' splošno deklarirana spremenljivka za objavo v novi formi
        Obr_m = .Cells(iii, j_s - 5)
        ' ****
        iii = iii + 1
```

```
    Loop
End With
End Function
Private Sub UserForm_Initialize()
Dim i_cbox1 As Integer, i_cbox2 As Integer, i_cbox3 As Integer
Dim i_cbox4 As Integer, i_cbox5 As Variant, Niz_cbox5 As Variant
Dim i_cbox6 As Variant, Niz_cbox6 As Variant, i_cbox7 As Integer
Dim i_cbox8 As Integer
Niz_cbox5 = Array("1. 'Joint lives' z določeno dolžino omejenega obdobja izplačevanja", "2.
'Joint lives' dosmrtna", _
"3. 'Joint lives' dosmrtna odložena", "4. 'Last survivor' z določeno dolžino omejenega
obdobja izplačevanja", _
"5. 'Last survivor' dosmrtna", "6. 'Last survivor' dosmrtna odložena", "7. Vdovska renta",
"8. Vdovčeva renta")
Niz_cbox6 = Array("Prenumerando", "Postnumerando")
    For i_cbox1 = 1 To RAZLIKA_MAX
        With ComboBox1
           .AddItem i_cbox1
        End With
    Next i_cbox1
    For i_cbox2 = 1 To 30
        With ComboBox2
           .AddItem i_cbox2
        End With
    Next i_cbox2
    For i_cbox3 = 25 To 80
        With ComboBox3
           .AddItem i_cbox3
        End With
    Next i_cbox3
    For i_cbox4 = 25 To 80
        With ComboBox4
           .AddItem i_cbox4
        End With
    Next i_cbox4
    For Each i_cbox5 In Niz_cbox5
        With ComboBox5
           .AddItem i_cbox5
        End With
    Next
    For Each i_cbox6 In Niz_cbox6
        With ComboBox6
           .AddItem i_cbox6
        End With
    Next
    For i_cbox7 = 1 To 30
        With ComboBox7
           .AddItem i_cbox7
        End With
    Next i_cbox7
    For i_cbox8 = 1 To 30
        With ComboBox8
           .AddItem i_cbox8
        End With
    Next i_cbox8
    TextBox5.Text = VALUTA
    TextBox6.Text = TABLICE_DOLGOZIVOSTI
End Sub
Private Sub OptionButton1_change()
    If OptionButton1.Value = True Then
        OptionButton4.Value = True
    End If
End Sub
Private Sub OptionButton2_change()
```

```
    If OptionButton2.Value = True Then
        OptionButton3.Value = True
    End If
End Sub
Private Sub OptionButton3_change()
    If OptionButton3.Value = True Then
        OptionButton2.Value = True
    End If
End Sub
Private Sub OptionButton4_change()
    If OptionButton4.Value = True Then
        OptionButton1.Value = True
    End If
End Sub
Private Sub ComboBox7_Change()
Dim inf As Variant
' kontrola vnosa v polje 'Odlog'
If StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "3", vbTextCompare) = 0 _
    Or StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "6", vbTextCompare) = 0 Then
    ' odlog je mogoč
Else
    If StrComp(ComboBox7.Text, "", vbTextCompare) <> 0 Then
        inf = MsgBox("Pri izbrani vrsti rentnega zavarovanja odlog ni mogoč!", vbCritical,
"Pozor!")
        ComboBox7 = ""
        Exit Sub
    Else
    End If
End If
End Sub
Private Sub ComboBox8_Change()
Dim inf As Variant
' kontrola vnosa v polje 'omejeno obdobje izplačevanja'
If StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "1", vbTextCompare) = 0 _
    Or StrComp(Mid(ComboBox5.Text, 1, 1), "4", vbTextCompare) = 0 Then
    ' vpis omejenega obdobja je dovoljen
Else
    If StrComp(ComboBox8.Text, "", vbTextCompare) <> 0 Then
        inf = MsgBox("Pri izbrani vrsti rentnega zavarovanja omejenega obdobja izplačevanja
rente ni!", vbCritical, "Pozor!")
        ComboBox8 = ""
        Exit Sub
    Else
    End If
End If
End Sub
Function Inicializacija_spremenljivk(Value_tPx() As Double, Value_tPy() As Double,
Value_tQx() As Double, Value_tQy() As Double)
For i = 1 To z
    Value_tPx(i) = 0
    Value_tPy(i) = 0
    Value_tQx(i) = 0
    Value_tQy(i) = 0
Next i
ii = iii    ' nastavimo števec na novo starost posameznika
k = 0
End Function
Function Izpisi_izracune(i_IZPIS As Long, a_xy As Double, max_a_xy As Double, _
min_a_xy As Double, n As Integer, Starost_M As Integer, Starost_Z As Integer, _
Lokacija_izpisa As Variant, i_vMLrenta As Integer, a_yx_vdovska As Double, Oznaka As
String)
' IZPIS izračunanih vrednosti
Sheets(Lokacija_izpisa).Select
i_IZPIS = i_IZPIS + 1
```

```
    Cells(i_IZPIS, 7) = R * 100 ' obr. mera
    Cells(i_IZPIS, 8) = Starost_M
    Cells(i_IZPIS, 9) = Starost_Z
    Cells(i_IZPIS, 10) = Abs(Starost_M - Starost_Z)
    If InStr(1, Lokacija_izpisa, "_D", vbTextCompare) > 0 Then
        Cells(i_IZPIS, 11) = "-"
    Else
        Cells(i_IZPIS, 11) = n
    End If
    If StrComp(Oznaka, "vR", vbTextCompare) = 0 Then
        ' izpis rentnih faktorjev za vdovsko rento
        Cells(i_IZPIS, 12 + i_vMLrenta * 3) = a_yx_vdovska - a_xy
        Cells(i_IZPIS, 13 + i_vMLrenta * 3) = a_yx_vdovska - max_a_xy
        Cells(i_IZPIS, 14 + i_vMLrenta * 3) = a_yx_vdovska - min_a_xy
        Cells(p - 9, p - 9) = i_IZPIS
    Else
        ' izpis za ostale vrste rent
        Cells(i_IZPIS, 12 + i_vMLrenta * 3) = a_xy
        Cells(i_IZPIS, 13 + i_vMLrenta * 3) = min_a_xy
        Cells(i_IZPIS, 14 + i_vMLrenta * 3) = max_a_xy
        Cells(p - 9, p - 9) = i_IZPIS
    End If
End Function
Function Uredi_podatke_1(Lokacija_izpisa As Variant)
' funkcija, s katero uredimo podatke po treh ključih
' x, y in n
Sheets(Lokacija_izpisa).Select
    Range(Cells(p + 1, p - 3), Cells(Cells(p - 9, p - 9), p + 7)).Select
    Selection.Sort _
        Key1:=Range(Cells(p + 1, p - 2), Cells(p + 1, p - 2)), Order1:=xlAscending, _
        Key2:=Range(Cells(p + 1, p - 1), Cells(p + 1, p - 1)), Order1:=xlAscending, _
        Key3:=Range(Cells(p + 1, p + 1), Cells(p + 1, p + 1)), Order1:=xlAscending, _
        Header:=xlNo, OrderCustom:=1, MatchCase:= _
        False, Orientation:=xlTopToBottom
End Function
Function Uredi_podatke_2(Lokacija_izpisa As Variant)
' funkcija, s katero uredimo podatke po treh ključih
' x, y in razlika v starosti
Sheets(Lokacija_izpisa).Select
    Range(Cells(p + 1, p - 3), Cells(Cells(p - 9, p - 9), p + 7)).Select
    Selection.Sort _
        Key1:=Range(Cells(p + 1, p - 2), Cells(p + 1, p - 2)), Order1:=xlAscending, _
        Key2:=Range(Cells(p + 1, p - 1), Cells(p + 1, p - 1)), Order1:=xlAscending, _
        Key3:=Range(Cells(p + 1, p), Cells(p + 1, p)), Order1:=xlAscending, _
        Header:=xlNo, OrderCustom:=1, MatchCase:= _
        False, Orientation:=xlTopToBottom
End Function
Function Brisi_staro_bazo_podatkov(Lokacija_izpisa As Variant)
    ' funkcija za brisanje stare baze podatkov po izbranih listih
    Sheets(Lokacija_izpisa).Select
    Range(Cells(p + 1, p - 3), Cells(Cells(p - 9, p - 9), p + 7)).Select
    Selection.Delete Shift:=xlUp
    Cells(p - 9, p - 9) = p
End Function
' =======
Private Sub TextBox1_Exit(ByVal Cancel As MSForms.ReturnBoolean)
    TextBox1.Text = Format(TextBox1, "#,##0.00")
End Sub
Private Sub TextBox4_Exit(ByVal Cancel As MSForms.ReturnBoolean)
    TextBox4.Text = Format(TextBox4, "#,##0.00")
End Sub
' ========
Private Sub Zapri_Click()
    ' zapremo vnosno masko
```

```
    Unload Me
End Sub
Function Konstante(Podatki() As String)
Dim Lokacije_podatkov As Variant, i_L As Variant
Lokacije_podatkov = Array("RENTE_postnumerando", "RENTE_postnumerando_D",
"RENTE_prenumerando", "RENTE_prenumerando_D")
    i = 0
    For Each i_L In Lokacije_podatkov
        i = i + 1
        Podatki(i) = i_L    ' lokacija podatkov
    Next i_L
End Function
Function Inicializacija(Podatki() As String)
For i = 1 To 4
    Podatki(i) = ""
Next i
End Function
Function Najdi_rento_koncno_obdobje_a_xy_n(STAROST_Mx As Integer, _
    STAROST_Zy As Integer, Podatki_a_xyn As String, a_xy_n() As Double)
Dim k As Integer
Nasel_par = False
For k = j_s To j_z
    a_xy_n(k) = 0   ' inicializacija vrednosti spremenljivke
Next k
    With Sheets(Podatki_a_xyn)
        For iii = p + 1 To .Cells(p - 9, p - 9)
            If .Cells(iii, j) = STAROST_Mx And .Cells(iii, j + 1) = STAROST_Zy Then
                For k = j_s To j_z
                    a_xy_n(k) = .Cells(iii, k)  ' zapomnimo si vrednost a_xy_n
                Next k
                Nasel_par = True
                Exit Function
            End If
        Next iii
    End With
End Function
```