UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

AKTUARSKO RAČUNANJE AGREGATNIH ODŠKODNIN IN OPTIMALNIH PARAMETROV POZAVAROVANJA

LJUBLJANA, JUNIJ 2004 **JANEZ KOMELJ**

IZJAVA

Študent Janez Komelj izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom prof. dr. Mihaela Permana, in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 7. 6. 2004

Podpis: Janez Komelj

Kazalo

Priloge

Tabele

Slike

Algoritmi

Uvod

Zavarovalnice so pri svojem poslovanju izpostavljene mnogim tveganjem, ki jih mednarodno združenje zavarovalnih nadzornikov IAIS (International Association of Insurance Supervisors) v dokumentu On Solvency, Solvency Asessments and Actuarial Issues (2000, str. 9) razvršča v tri skupine. Tehnična tveganja so tveganja, ki so neposredno ali posredno povezana z zavarovalno-tehničnimi oziroma aktuarskimi izračuni zavarovalnih premij in zavarovalno-tehničnih rezervacij, oziroma s tveganji, povezanimi s prehitro oziroma nenadzorovano rastjo operativnih stroškov. Naložbena tveganja so tveganja, ki so neposredno ali posredno povezana z upravljanjem premoženja. Netehnična tveganja pa so vsa ostala tveganja, ki jih ne moremo razvrstiti v prvi dve skupini. V omenjenem dokumentu je navedenih 26 različnih posameznih tveganj[1], kar pa je le ena od možnih razvrstitev. Enotne in splošno sprejete klasifikacije tveganj, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, še ni (Report of Solvency Working Party, 2002, str. 12). Celo posamezni nacionalni nadzorniki zavarovalnic uporabljajo svoje razvrstitve tveganj. Za primerjavo navedimo še predlog delovne skupine mednarodne aktuarske zveze IAA (International Actuarial Association), ki tveganja razvršča v naslednje skupine: tveganja zaradi v zavarovanje sprejetih rizikov, kreditna tveganja, tržna tveganja, operativna tveganja, likvidnostna tveganja in tveganja zaradi zunanjih dogodkov, ki imajo pomemben negativen vpliv na poslovanje zavarovalnic (Report of Solvency Working Party, 2002, str. 20).

Obvladovanje tveganj, ki so jim izpostavljene zavarovalnice, je izredno pomembno zaradi zagotavljanja in nadzorovanja solventnosti zavarovalnic. Tako bi morale zavarovalnice same, še bolj pa zavarovalni nadzorniki, zgodaj ugotavljati probleme in s pravočasnim ukrepanjem preprečevati nesolventnost. Problematika nadzorovanja solventnosti zavarovalnic je že dolgo aktualna, zato je bilo razvitih kar nekaj metod za preverjanje solventnosti (glej npr. Kastelijn, Remmerswaal, 1986). Finska se s problematiko solventnosti zavarovalnic intenzivno ukvarja že od 50. let prejšnjega stoletja, Evropska zveza pa je način izračuna minimalnega kapitala za zavarovalnice, ki se ukvarjajo s premoženjskimi zavarovanji, predpisala leta 1973 (Evropska smernica 73/239/EEC, 1973), za življenjska zavarovanja pa leta 1979 (Evropska smernica 79/267/EEC, 1979). V obeh primerih so pri izračunavanju minimalnega kapitala praktično upoštevana le tveganja zaradi v zavarovanje sprejetih rizikov (t. i. "underwriting risks"), kar velja tudi za najnovejši način izračuna minimalnih kapitalskih zahtev, ki ga za premoženjska zavarovanja predpisuje Evropska smernica 2002/13/EC (2002), za življenjska zavarovanja pa Evropska smernica 2002/83/EC (2002). Odgovor na vprašanje, kako pri preverjanju kapitalske ustreznosti upoštevati tudi ostala tveganja, naj bi dobili s projektom Solventnost II, katerega prva faza že teče. Kot lahko razberemo iz prej omenjenih dokumentov, je problematika zelo obsežna. Zaradi primerljivosti in težnje po poenotenju je tudi zelo aktualna, saj so med državami Evropske zveze velike razlike, kar je razvidno npr. iz dokumenta Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision (2002).

Zavarovalnice, ki se ukvarjajo s premoženjskimi zavarovanji, najbolj ogrožajo tveganja zaradi v zavarovanje sprejetih rizikov. Tovrstna tveganja so bila v ZDA v letih od 1969 do 1998 vzrok za kar 41 odstotkov primerov nesolventnosti (Solvency of non-life insurers, 2000, str. 6). Da je podobno tudi drugje, lahko vidimo iz kratkih povzetkov nekaterih študij o vzrokih

[1]Ta tveganja so sistematično našteta v dokumentu Discussion Note to the Members of the IC Solvency Subcommittee (2002, str. 18).

nesolventnosti zavarovalnic, ki jih najdemo npr. v dokumentu Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision (2002, str. 31).

V tem delu bomo obravnavali predvsem skupne (agregatne) zavarovalnine oziroma odškodnine[2], ki lahko resno ogrozijo solventnost zavarovalnice, če so prevelike. Vzroki za prevelike agregatne odškodnine so lahko napačne odločitve pri sprejemu konkretnih rizikov v zavarovanje, npr. neustrezno določena zavarovalna premija, aktuarsko napačno izračunane premije oziroma premijske stopnje v premijskih cenikih, izredno neugoden naključni škodni proces, spremembe ekonomskega okolja, neustrezno pozavarovanje itd. Vsakega od naštetih vzrokov bi lahko obravnavali kot posebno tveganje iz skupine tveganj zaradi v zavarovanje sprejetih rizikov.

Aktuarji lahko vplivajo predvsem na pravilno določanje zavarovalne premije za različna zavarovanja in na pravilno oblikovanje zavarovalno-tehničnih rezervacij, kar sta njihovi osnovni nalogi. Zaradi naključnosti škodnega procesa pravilno določanje zavarovalne premije ni enostavno opravilo, kljub temu pa ga v praksi mnogokrat poenostavimo, kar pa je v tržnem gospodarstvu lahko zelo nevarno. Previsoka zavarovalna premija zavarovalnico lahko izloči s trga, prenizka pa lahko resno ogrozi njeno solventnost. Za pravilno določanje zavarovalne premije so ključnega pomena pravilno napovedane agregatne odškodnine, ki se nanašajo na določeno obdobje. Taka napoved, ki je odvisna od predvidenega števila zavarovanj, pogostosti nastanka škod in porazdelitve njihove višine, pa je tudi ob vseh znanih parametrih in kljub hitrim računalnikom težak problem.

V 1. poglavju si bomo ogledali sestavo zavarovalne premije in poenostavljen način njenega določanja. Prehod v osrednji del magistrskega dela je 2. poglavje, v katerem bomo obravnavali porazdelitvene funkcije višine posameznih odškodnin, dobljene z mešanjem različnih porazdelitev, in kombinirani vpliv porazdelitve števila in višine posameznih odškodnin na porazdelitev agregatnih odškodnin. Jedro razprave sta 3. in 4. poglavje, v katerih bomo obravnavali načine za praktično izračunavanje agregatnih odškodnin in določanje optimalnega pozavarovanja. V 5. poglavju pa bomo po metodah iz osrednjih dveh poglavij obdelali konkreten primer. Z različnimi metodami bomo izračunali agregatne odškodnine in parametre pozavarovanja ter rezultate med seboj primerjali.

Magistrsko delo je zasnovano na predpostavki, da poznamo osnovne pojme, povezane z zavarovanjem in pozavarovanjem, prav tako pa tudi metode za določanje porazdelitve števila in višine odškodnin, ki so izhodišče za izračun agregatnih odškodnin. Za morebitne bralce, ki omenjene problematike ne poznajo dovolj, so dodane priloge. Zanje bi med uvodom in sklepom prišel v poštev naslednji vrstni red poglavij in prilog: 1, P1, P2, P3, 2, 3, 4 in 5. V prilogi P1 navajamo osnovne pojme in oznake ter obravnavamo nekatere metode za določanje konkretnih parametrov modelov porazdelitve števila in višine odškodnin, v prilogah P2 in P3 pa predstavljamo nekatere pomembne porazdelitve števila in višine odškodnin.

[2] V nadaljevanju bomo namesto izrazov zavarovalnina in odškodnina kot sinonim za obe vrsti dajatve zavarovalnice, ki ju predvideva Obligacijski zakonik (2001), uporabljali le izraz odškodnina. Izraz zavarovalnina je sicer nevtralnejši in bi lahko pomenil tudi odškodnine, ki se nanašajo le na odgovornostna zavarovanja, vendar bomo kljub temu raje uporabljali izraz odškodnina v smislu nadomestila za škodo, kot ga pojmuje Boncelj (1983, str. 20).

Poznavanje oziroma napovedovanje agregatnih odškodnin nam pomaga odgovoriti na nekaj zelo pomembnih vprašanj, kot so npr.:

- Kolikšna mora biti zavarovalna premija za posamezno zavarovanje, da bo agregatna premija vsaj s predpisano minimalno verjetnostjo zadoščala za kritje agregatnih odškodnin in obratovalnih stroškov v določenem obdobju?
- Koliko pozavarovanja potrebuje zavarovalnica?
- Kakšna je verjetnost, da bo prišlo do nesolventnosti zavarovalnice, ker bodo ob koncu poslovnega leta skupne obveznosti za izplačilo odškodnin presegale seštevek kritnega premoženja in kapitala?

V 5. poglavju bomo na primeru odgovorili na prvi dve vprašanji in delno na tretje vprašanje. Za popoln odgovor na tretje vprašanje bi se morali razen z agregatnimi odškodninami ukvarjati tudi z naložbenimi in ostalimi tveganji, kar pa presega okvir zastavljene teme.

Problem optimalnega oziroma primernega (varnega) pozavarovanja smo izbrali, ker je aktualen, saj zelo verjetno vse slovenske zavarovalnice parametre pozavarovanja določajo predvsem izkustveno. Sklep o podrobnejši vsebini poročila pooblaščenega aktuarja (2001), ki ga je izdala Agencija za zavarovalni nadzor, določa, da morajo pooblaščeni aktuarji v svojem poročilu navesti, ali aktuarsko pregledana zavarovalnica lastne deleže škod določa v skladu z načeli, opredeljenimi v sklepu Agencije za zavarovalni nadzor o metodologiji za izračun lastnih deležev zavarovalnice v tabelah maksimalnega kritja in metodologiji za ugotavljanje največje verjetne škode. Takega sklepa pa sploh ni, saj za omenjeno tematiko obstaja le Sklep o predpisanih usmeritvah za izračun lastnih deležev zavarovalnice v tabelah maksimalnega kritja in določanje največje verjetne škode (2001), ki pa je zelo splošen in brez konkretne metodologije. Kriteriji iz 4. člena omenjenega sklepa omogočajo kvečjemu kvalitativno določanje tabel maksimalnega kritja po vzorcu sklepa, da več kapitala dopušča večje maksimalno kritje, ne omogočajo pa kvantifikacije. Formalno gledano, aktuarji v vlogi pooblaščenega aktuarja niso zavezani dati izjave na podlagi sklepa, ki ga ni, po drugi strani pa so večinoma v vlogi aktuarja konkretne zavarovalnice, ko bi po službeni dolžnosti morali skrbeti tudi za primernost pozavarovanja. Zato poskušamo s to razpravo prispevati k lažjemu napovedovanju agregatnih odškodnin, s tem pa tudi k eksaktnejšemu določanju parametrov primernega pozavarovanja, ki je s stališča varnosti zavarovalnic izredno pomembno.

1 Sestava in določanje zavarovalne premije

V magistrskem delu se bomo osredotočili le na tehnično premijo, ki je bistvena sestavina zavarovalne premije. Zaradi celovitejšega pogleda na obravnavano problematiko in zato, da bi se izognili nesporazumom zaradi še vedno pogoste uporabe starejše terminologije v praksi, si bomo v tem poglavju ogledali, iz česa vse je zavarovalna premija sestavljena in kako jo v poenostavljenih razmerah izračunamo.

Po zakonu (Obligacijski zakonik, 2001, 921. člen) se z zavarovalno pogodbo zavarovalec[3] zavezuje, da bo zavarovalnici plačal zavarovalno premijo ali prispevek, zavarovalnica pa se zavezuje,

[3] Zavarovalec oziroma sklenitelj zavarovanja je oseba, ki sklene zavarovalno pogodbo.

da bo, če se zgodi dogodek, ki pomeni zavarovalni primer[4], izplačala zavarovancu[5] ali nekomu tretjemu zavarovalnino ali odškodnino ali storila kaj drugega. Zavarovalec praviloma vnaprej plača zavarovalnici kosmato zavarovalno premijo in davek od prometa zavarovalnih poslov, ki nas v nadaljevanju ne bo zanimal. Slovenski računovodski standardi (2001) v SRS 32.61 (2002) kosmato zavarovalno premijo opredeljujejo kot celoten znesek zavarovalne premije, ki je sestavljen iz funkcionalne premije in obratovalnega dodatka. Funkcionalna premija je sestavljena iz stroškov preventivne dejavnosti in tehnične premije. Obratovalni dodatek je del kosmate zavarovalne premije, ki je vračunan za pokrivanje obratovalnih stroškov in za morebitni vračunani dobiček (na primer v delniški družbi). Tehnična premija je namenjena za nadomeščanje škod in je izračunana z aktuarskimi postopki.

Delitvi zavarovalne premije, kot je opredeljena v SRS 32.61 (2002), za naše namene manjka še en nivo, ki bi obravnaval delitev tehnične premije. Zato si oglejmo še starejšo, vendar podrobnejšo delitev (Boncelj, 1983, str. 19). Kosmata zavarovalna premija se deli na:

- obratovalni dodatek (sinonimi so režijski dodatek, stroškovni dodatek, poslovni dodatek),
- funkcionalno premijo, ki se deli na:
  - tehnično premijo, ki se deli na:
    - nevarnostno premijo,
    - hranilno premijo, ki se deli na:
      - dodatek za varnostno rezervo,
      - dodatek za matematično rezervo,
  - dodatek za prevencijo in represijo.

Boncljeva knjiga je v Sloveniji še vedno temeljno delo o zavarovalstvu. Da je še vedno aktualna, lahko sklepamo tudi iz dejstva, da je v letu 1999 izšel Oris dr. Boncljeve teorije zavarovanja (Flis, 1999). Nekaj težav je le s terminologijo. Boncljevo izrazoslovje je še iz časa sistemskega zakona iz leta 1976 (Zakon o temeljih sistema zavarovanja premoženja in oseb, 1976), ki mu je sledil zakon, po katerem so se zavarovalnice lahko preoblikovale v delniške družbe (Zakon o temeljih sistema premoženjskega in osebnega zavarovanja, 1990), nato pa sta velike spremembe prinesla še Zakon o zavarovalnicah (1994) in Zakon o zavarovalništvu (2000). Tako je po izidu Boncljeve knjige slovensko zavarovalstvo doživelo pomembne vsebinske, s tem pa tudi terminološke spremembe. Omenimo le nekaj tistih, ki se nanašajo na zavarovalno premijo.

Po Bonclju je čista premija sinonim za funkcionalno premijo, po SRS 32.61 (2002) pa je čista zavarovalna premija razlika med obračunano kosmato zavarovalno premijo in obračunano pozavarovalno premijo. Pripomnimo, da je Boncljev pomen za čisto premijo bližje pomenu izraza "pure premium" (Foundations of Casualty Actuarial Science, 1996, str. 31) oziroma "pure risk premium" (Daykin, Pentikäinen, Pesonen, 1994, str. 15), ki oba vsebinsko pomenita nevarnostno premijo[6], oziroma je kar enak pomenu izraza "risk premium net of expenses" (Daykin, Pentikäinen, Pesonen, 1994, str. 313). Namesto izraza matematična rezerva je Zakon

[4]Dogodek, glede na katerega se sklene zavarovanje (zavarovalni primer), mora biti bodoč, negotov in neodvisen od izključne volje pogodbenikov.

[5]Zavarovanec je oseba, katere premoženje in/ali premoženjski interes je zavarovan. Zavarovalec in zavarovanec je ista oseba, razen pri zavarovanju na tuj račun.

[6]V slovenski strokovni literaturi zasledimo tudi izraz riziko premija.

o zavarovalnicah (1994) vpeljal izraz matematične rezervacije, v okviru zavarovalno-tehničnih rezervacij pa je uzakonil izravnalne rezervacije, ki jih v prejšnjem zakonu še ni bilo. S 1. januarjem 1995 so se zaradi uskladitve knjigovodskih evidenc sredstva varnostne rezerve prelila v izravnalne rezervacije, kar pa še ne pomeni, da od takrat naprej dodatek za varnostno rezervo v smislu Boncljeve delitve kosmate zavarovalne premije ne bi bil več potreben. Trenutno veljavni Zakon o zavarovalništvu (2000) varnostno rezervo, ki je po SRS 32.40 (2002) sestavina rezerv iz dobička v okviru kapitala, zahteva le za zavarovalnice, ki so organizirane kot družbe za vzajemno zavarovanje. Vendar je zaradi osnovnih aktuarskih spoznanj in strogih zakonskih varnostnih zahtev aktuarjem jasno, da mora dodatek za varnostno rezervo kot del tehnične premije implicitno obstajati tudi pri zavarovalnih delniških družbah, če naj le-te poslujejo varno in tako, da bodo ohranile delniški kapital. Zato bomo dodatku za varnostno rezervo raje rekli varnostni dodatek[7], saj večinoma ni več neposredno povezan z varnostno rezervo.

V nadaljevanju nas bodo zanimala izključno zavarovanja, kjer dodatek za matematično rezervacijo ni potreben, kar velja za večino zavarovalnih vrst iz skupine premoženjskih zavarovanj[8]. Zaradi te omejitve v Boncljevi delitvi kosmate zavarovalne premije vmesnega nivoja hranilne premije ne potrebujemo več in lahko rečemo, da je tehnična premija sestavljena iz nevarnostne premije in varnostnega dodatka. Nevarnostna premija in varnostni dodatek sta s stališča aktuarskega določanja premije ključni sestavini kosmate zavarovalne premije, namenjeni za tekoče in prihodnje nadomeščanje škod v obliki izplačil odškodnin. Ostale sestavine kosmate zavarovalne premije so v Sloveniji običajno določene kar v odstotku kosmate zavarovalne premije. Nekateri odstotki, npr. za stroške preventivne dejavnosti, so določeni s poslovno politiko zavarovalnice, ali pa so predpisani (požarna taksa), nekateri pa so izračunani na podlagi podatkov iz stroškovnega računovodstva, npr. obratovalni dodatek.

Le informativno in zaradi primerjave si oglejmo, kako iz znane nevarnostne premije na enoto izpostavljenosti (definirali jo bomo v nadaljevanju) izračunamo kosmato zavarovalno premijo po dveh priznanih aktuarskih knjigah. Po prikazani metodi v knjigi Foundations of Casualty Actuarial Science (1996, str. 31) najprej od kosmate zavarovalne premije na enoto izpostavljenosti R (rate per unit of exposure) odštejemo variabilne stroške $R \times V$ (V - variable expense factor) in del za vkalkulirani dobiček ter varnostno rezervo $R \times Q$ (Q - profit and contingencies factor), ostanek pa mora zadoščati za nevarnostno premijo P (pure premium) in fiksne stroške na enoto izpostavljenosti F (fixed expense per exposure). Zapisano z enačbo $R\,(1 - V - Q) = P + F$ oziroma

$$R \;=\; \frac{P \,+\, F}{1 \,-\, V \,-\, Q}.$$

Daykin, Pentikäinen, Pesonen (1994, str. 312) obravnavo stroškov poenostavijo. Kosmata zavarovalna premija B (gross premium) je sestavljena iz nevarnostne premije P (pure risk premium),

[7] V slovenski strokovni literaturi zasledimo tudi izraz varnostna premija.

[8] Zavarovalne vrste v 2. členu določa Zakon o zavarovalništvu (2000). V skupino premoženjskih zavarovanj sodijo: nezgodno zavarovanje, zdravstveno zavarovanje, zavarovanje kopenskih motornih vozil, zavarovanje tirnih vozil, letalsko zavarovanje, zavarovanje plovil, zavarovanje prevoza blaga, zavarovanje požara in elementarnih nesreč, drugo škodno zavarovanje, zavarovanje odgovornosti pri uporabi motornih vozil, zavarovanje odgovornosti pri uporabi zrakoplovov, zavarovanje odgovornosti pri uporabi plovil, splošno zavarovanje odgovornosti, kreditno zavarovanje, kavcijsko zavarovanje, zavarovanje različnih finančnih izgub, zavarovanje stroškov postopka in zavarovanje pomoči. V skupino življenjskih zavarovanj sodijo: življenjsko zavarovanje, zavarovanje za primer poroke oziroma rojstva, življenjsko zavarovanje, vezano na enote investicijskih skladov, tontine, zavarovanje s kapitalizacijo plačil.

dela za stroške E (loading for expenses) in dela za varnostno rezervo Λ (safety loading), tako da je $B = P + E + \Lambda$. Če definiramo varnostni koeficient δ (safety loading coefficient[9]) z $\delta = \frac{\Lambda}{P}$ in delež stroškov e (expense ratio) kot $e = \frac{E}{B}$, potem je $B = P + e\,B + \delta\,P$ in od tu

$$B \;=\; P\,\frac{1\,+\,\delta}{1\,-\,e}.$$

O razvoju ekonomskih pogledov na posamezne sestavine kosmate zavarovalne premije marsikaj zvemo iz knjig Boncljevega naslednika (Flis, 1995, 1995a, 1995b, 1999), v nadaljevanju pa se bomo osredotočili predvsem na aktuarski vidik in tehnično premijo. Zato si oglejmo, na kakšen način izračunamo nevarnostno premijo in varnostni dodatek.

Prvo vprašanje, na katero moramo odgovoriti, je: na podlagi česa bomo premijo sploh določali? Pričakovali bi, da v odvisnosti od dejavnikov tveganja, ki vplivajo na število in višino bodočih odškodnin. Vendar včasih niti ne vemo, kateri so dejavniki tveganja, če pa že vemo, jih težko merimo. Zato si večkrat pomagamo z nadomestki. Tako vemo, da je število prevoženih kilometrov eden od dejavnikov tveganja pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti in samoumevno bi bilo, da bi za mero izpostavljenosti zavarovanim nevarnostim upoštevali prevožene kilometre. Kljub temu premijo obračunamo glede na trajanje zavarovanja, ki je s številom prevoženih kilometrov le pozitivno korelirano, za enoto izpostavljenosti pa upoštevamo kar vozila $\times$ leta. Ker je običajno dejavnikov tveganja več, podobne nevarnostne objekte združujemo v homogene nevarnostne skupine, npr. pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti osebne avtomobile, tovorna vozila, avtobuse itd., znotraj nevarnostne skupine pa še na podskupine, npr. po moči ali prostornini motorja, nosilnosti ipd. Za celotno nevarnostno (pod)skupino določimo enotno premijo (na različne sisteme bonusa/malusa lahko gledamo kot na podrobnejšo delitev znotraj nevarnostne (pod)skupine), nato pa z raznimi doplačili in popusti opravimo še dodatno diferenciacijo rizikov. Prav na omenjenem področju v Sloveniji sistem diferenciacije še zdaleč ni tako prefinjen kot v državah z razvitejšim zavarovalniškim trgom, kjer upoštevajo mnogo več sit, s katerimi nevarnostne objekte razsejejo v različne nevarnostne skupine. V tem konkretnem primeru je ključno spoznanje, da je glavni dejavnik tveganja voznik in ne avto. Kot primer navedimo Veliko Britanijo, kjer zavarovalnice upoštevajo tudi spol, starost, vozniški staž in kraj stalnega prebivališča sklenitelja zavarovanja, znamko, tip, starost in namen uporabe avtomobila, dodatne voznike (partner, otroci, kdorkoli), pa še marsikak, na videz nepomemben dejavnik.

Kakorkoli že oblikujemo nevarnostne skupine, za katere je zaželeno, da so dovolj velike, zanje za izbrano obdobje izračunamo skupno izpostavljenost kot seštevek izpostavljenosti po posameznih zavarovalnih policah. Pri tem je pomembno, da pri izračunu izpostavljenosti za posamezno zavarovalno polico upoštevamo le tisti del izpostavljenosti, ki se nanaša na presek izbranega obdobja, npr. koledarskega leta, in zavarovalnega obdobja, ki običajno ne sovpada s koledarskim letom. Ko seštejemo tudi odškodnine za nadomestilo škod, nastalih v izbranem obdobju, izračunamo nevarnostno premijo kot kvocient med skupnimi odškodninami in skupno izpostavljenostjo. Običajno kvocient razcepimo na produkt

$$\frac{skupne\ odškodnine}{skupna\ izpostavljenost} \;=\; \frac{število\ škod}{skupna\ izpostavljenost} \times \frac{skupne\ odškodnine}{število\ škod},$$

ker v praksi laže obravnavamo vsakega od faktorjev posebej. Če definiramo škodno pogostost kot razmerje med številom škod, nastalih v izbranem časovnem obdobju, in skupno izpostavljenostjo v istem obdobju, kot povprečno odškodnino pa razmerje med skupnimi odškodninami in

[9] V izvirniku je uporabljena oznaka λ.

številom škod[10], za nevarnostno premijo na enoto izpostavljenosti velja naslednja enačba

$$nevarnostna\,premija \quad = \quad škodna\,pogostost \;\times\; povprečna\,odškodnina. \qquad (1.1)$$

Varnostni dodatek je odvisen od pričakovanega števila odškodnin. Po eni od metod ga izračunamo kot $k\,\sigma_S$ oziroma $k\,\sigma_S^2$, kjer je k primerna konstanta in σ_S standardni odklon ocenjene povprečne odškodnine. Varnostni koeficient δ dobimo, če varnostni dodatek delimo z nevarnostno premijo. Varnostni koeficient ima pomembno vlogo pri omogočanju ekonomije obsega. Ključni mehanizem, zaradi katerega zavarovalstvo sploh deluje, je izravnavanje nevarnosti, ki temelji na centralnem limitnem izreku. Ob nespremenjeni škodni pogostosti se z večanjem števila zavarovanj sorazmerno veča tudi število pričakovanih odškodnin, standardni odklon ocenjene povprečne odškodnine pa se manjša in limitira k 0, ko gre število zavarovanj v neskončno[11]. Pri isti stopnji tveganja, da bi zaradi prevelikih skupnih odškodnin prišlo do finančnega zloma zavarovalnice, potrebuje manjša zavarovalnica večji varnostni koeficient kot večja zavarovalnica, ki ima več istovrstnih zavarovanj. Ker so pri večjem obsegu poslovanja tudi obratovalni stroški na enoto izpostavljenosti manjši, ima večja zavarovalnica pomembno konkurenčno prednost pred manjšo. S primerno premijsko politiko lahko hkrati doseže nižjo premijo in večjo varnost, s tem pa tudi večje zaupanje strank.

Iz doslej navedenega bi lahko sklepali, da je za korekten izračun tehnične premije dovolj poznati škodno pogostost, povprečno odškodnino, standardni odklon odškodnin in predvideno število zavarovanj, vendar se v praksi izkazuje, da je potrebno upoštevati še marsikaj. Pri tem pa ne mislimo na tržni vidik, ki je brez dvoma tudi zelo pomemben, ampak na razne anomalije, ki jih mora upoštevati aktuar.

Pri nekritičnem računanju škodne pogostosti in povprečne odškodnine za škode, nastale v obdobju, za katero smo izračunali izpostavljenost, lahko pride do napak zaradi časovnih zamikov med datumi nastankov škod in datumi prijave odškodninskih zahtevkov. Tudi postopek reševanja odškodninskega zahtevka lahko zelo dolgo traja, do zaključka pa ne vemo, kakšna bo višina odškodnine. To je pogosto, kadar so v škodnem dogodku poškodovane osebe, ker je za oceno posledic poškodbe potrebno počakati na zaključek zdravljenja, ki je lahko dolgotrajno. Še izrazitejši pa je primer, ko se oškodovanec in zavarovalnica ne moreta sporazumeti o višini odškodnine, oziroma o tem, ali je zavarovalnica po zavarovalnih pogojih sploh dolžna izplačati odškodnino, in odločitev prepustita sodišču.

Iz navedenih razlogov mora zavarovalnica ob koncu poslovnega leta oblikovati škodne rezervacije za bodoča izplačila odškodnin za škodne dogodke, ki so že nastali do konca poslovnega leta, vendar odškodninski zahtevki zanje iz kakršnih koli razlogov niso bili rešeni do konca poslovnega leta. Ker enostavne prijavljene škodne primere lahko hitro zaključimo, se težji primeri bolj pogosto znajdejo v škodni rezervaciji. Zato je računanje povprečne odškodnine za škodne dogodke, ki so nastali v nekem časovno ne preveč oddaljenem obdobju, pristransko, če ne upoštevamo škodnih rezervacij. Pri računanju skupnih odškodnin za škode, ki so nastale v

[10] V praksi za vsako škodo ne pripada tudi odškodnina. Zato je število dejanskih odškodnin praviloma manjše od števila škod. Izraz povprečna odškodnina lahko upravičimo s privzetkom, da je v takem primeru odškodnina pač 0.

[11] Če so predpostavke centralnega limitnega izreka izpolnjene in pričakovano število odškodnin n dovolj veliko, lahko za standardni odklon ocenjene povprečne odškodnine uporabimo aproksimacijo $\sigma_S \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, kjer je σ standardni odklon odškodnin.

določenem časovnem obdobju, moramo poleg odškodnin za že zaključene primere upoštevati tudi razliko med škodnimi rezervacijami na koncu in začetku obdobja. Prav tako moramo pri številu odškodnin upoštevati število odškodnin za že zaključene primere in razliko med številom primerov v škodni rezervaciji na koncu in začetku obdobja.

Upoštevanje škodnih rezervacij pri izračunu povprečne odškodnine sicer odpravlja eno napako, zato pa povzroča drugo. Škodne rezervacije pomenijo le oceno bodočih izplačil odškodnin in se od kasnejših dejanskih izplačil lahko zelo razlikujejo, zlasti še, če delamo pri ocenjevanju sistematične napake. Poseben problem so škode, ki so nastale v obračunskem obdobju, vendar zavarovalnica zanje sploh ne ve, ker ji še niso bile prijavljene. Zavarovalnica mora tudi za take škode, imenovane IBNR (Incurred But Not Reported) škode, oblikovati škodne rezervacije. S posebnimi aktuarskimi metodami število nastalih neprijavljenih škod lahko ocenimo, prav tako pa tudi potrebni znesek škodne rezervacije, vendar mnogokrat kasneje ugotovimo, da so bile ocene napačne - običajno prenizke.

Podobnih objektivnih težav je še mnogo, a za obravnavano temo niso bistvene. Vsekakor je za aktuarsko delo potrebno podrobno poznavanje škodnega procesa, predvsem pa poznavanje porazdelitve števila in višine odškodnin.

2 Mešanje in sestavljanje porazdelitev

V tem poglavju predpostavljamo, da že poznamo porazdelitev števila in višine odškodnin. Kako jih v splošnem primeru lahko določimo, je razvidno iz priloge P1, za nekatere pomembne porazdelitve pa so podrobnosti navedene v prilogah P2 in P3. Včasih se sklicujemo na enačbe iz prilog, ki so označene z začetnico P.

Iz znanih porazdelitvenih funkcij lahko s transformacijo neodvisne spremenljivke dobimo nove porazdelitvene funkcije. Med porazdelitvenimi funkcijami iz priloge P3 srečamo kar nekaj na tak način povezanih parov, npr. normalno in logaritemsko normalno porazdelitev ali Paretovo in Burrovo porazdelitev. Ker lahko na osnovi analogije enostavno pridemo do novih porazdelitvenih funkcij, se s transformacijo neodvisne spremenljivke tu ne bomo ukvarjali. Ogledali pa si bomo, kako do novih porazdelitvenih funkcij pridemo z mešanjem, predvsem pa s sestavljanjem, ki je ključnega pomena za izračun agregatnih odškodnin.

2.1 Mešanje porazdelitev

V zavarovalniški praksi večkrat nehomogene nevarnostne skupine neodvisnih rizikov iz praktičnih razlogov obravnavamo kot homogene. Nevarnostno premijo na enoto izpostavljenosti izračunamo iz povprečne škodne pogostosti (povprečne verjetnostne funkcije števila škod) in povprečne višine odškodnine (povprečne porazdelitvene funkcije višine odškodnin) ter jo obračunamo vsem enako oziroma sorazmerno z izpostavljenostjo. Razlike v dejansko obračunani zavarovalni premiji naj bi bile odraz različne izpostavljenosti, ki pa je le redko objektivno določena. Tako npr. pri avtomobilskem kasko zavarovanju upoštevamo vrednost avtomobila, ne pa tudi rizičnosti voznika. Korekcije premije za posameznike, ki pomenijo manjši ali večji riziko od povprečja, so v konkurenčnih razmerah opravljene na različne načine, npr. z bonus/malus sistemi, kar pa nas tu ne bo zanimalo. Radi bi našli le interpretacijo, ki bi opravičevala obravnavo nehomogenih nevarnostnih skupin, kot da so homogene.

Predpostavimo, da je za vse člane nevarnostne skupine porazdelitev števila škod N, ki se nanašajo na posameznega člana in določeno obdobje, istega tipa. Verjetnostna funkcija naj bo $P(N=k|\Theta=\theta)$, $k=0,1,2,\ldots$, kjer je neznani individualni parameter θ realizacija mešalne slučajne spremenljivke Θ z gostoto verjetnosti $f_\Theta(x)$. Povprečno verjetnostno funkcijo nevarnostne skupine izračunamo kot

$$p_k \quad = \quad P(N=k) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(N=k|\Theta=\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Kot primer predpostavimo, da je $N|(\Theta=\theta) \sim \mathrm{Po}(\theta)$ in $\Theta \sim \Gamma(\alpha,\beta)$. Tedaj je

$$p_k \quad = \quad \int_0^{\infty} \frac{\theta^k\, e^{-\theta}}{k\,!}\, \frac{\beta^\alpha\, \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}\, d\theta \quad = \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\, k\,!} \int_0^{\infty} \theta^{\alpha+k-1}\, e^{-(\beta+1)\theta}\, d\theta$$

za $k=0,1,2,\ldots$ Z novo spremenljivko $t=(\beta+1)\,\theta$ dobimo

$$\begin{aligned} p_k \quad &= \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\, k\,!\,(\beta\,+\,1)^{\alpha+k}} \int_0^{\infty} t^{\alpha+k-1}\, e^{-t}\, dt \quad = \\ &= \quad \frac{\beta^\alpha\, \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\, k\,!\,(\beta\,+\,1)^{\alpha+k}} \quad = \quad \frac{\beta^\alpha\, \alpha_{(k)}}{k\,!\,(\beta\,+\,1)^{\alpha+k}} \qquad (k=0,1,2,\ldots), \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $N \sim \mathrm{NB}(\alpha,p)$, kjer je $p=\frac{\beta}{\beta+1}$. Navedeni primer je izjema, ker smo dobili znano porazdelitveno funkcijo, sicer pa z mešanjem na opisani način lahko ustvarimo množico novih diskretnih porazdelitev. To velja zlasti, če začnemo z večparametrsko verjetnostno funkcijo in variramo porazdelitev vsakega parametra posebej.

Na število škod dovolj velike nevarnostne skupine n neodvisnih rizikov lahko gledamo kot na seštevek n neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. V konkretnem opisanem modelu je skupno število škod nevarnostne skupine porazdeljeno po porazdelitvenem zakonu $\mathrm{NB}(n\alpha,p)$. Model nam včasih omogoča globlji vpogled v (ne)homogenost nevarnostne skupine. Če iz vzorca sklepamo, da je $N \sim \mathrm{NB}(\hat\alpha,\hat p)$, po naravi problema pa je za posamezni riziko primerna Poissonova porazdelitev, iz dejstva, da je negativna binomska porazdelitev mešanica Poissonove in gama porazdelitve, lahko ocenimo stopnjo heterogenosti nevarnostne skupine. Ker je $\hat\beta=\frac{\hat p}{1-\hat p}$, $E[N]=\frac{\hat\alpha}{\hat\beta}$ ter $\mathrm{var}[N]=\frac{\hat\alpha\,(\hat\beta+1)}{\hat\beta^2}$, je koeficient variacije $\varrho=\sqrt{\frac{\hat\beta+1}{\hat\alpha}}$. Varianco in koeficient variacije moramo primerjati z varianco in koeficientom variacije, ki bi ju dobili za Poissonovo porazdelitev s parametrom $\hat\lambda$, izračunanim iz istega vzorca. Če za obe porazdelitvi uporabimo metodo največjega verjetja, je $\hat\lambda=\frac{\hat\alpha}{\hat\beta}=\overline{n}$, razmerje med obema variancama je $\frac{\hat\beta+1}{\hat\beta}$, med koeficientoma variacije pa $\sqrt{\frac{\hat\beta+1}{\hat\beta}}$. Obe vrednosti imamo lahko za relativno merilo stopnje nehomogenosti, kot absolutno merilo pa upoštevamo kar varianco mešalne slučajne spremenljivke Θ, ki je v našem primeru $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

Predpostavimo zdaj, da je za vse člane nevarnostne skupine porazdelitev višine odškodnin X, ki se nanašajo na posameznega člana, istega tipa. Gostota verjetnosti naj bo $f_{X|(\Theta\,=\,\theta)}(x)$, kjer je individualni parameter θ realizacija mešalne slučajne spremenljivke Θ z gostoto verjetnosti $f_\Theta(x)$, ki je v splošnem različna od mešalne spremenljivke za število škod. Povprečno gostoto verjetnosti za nevarnostno skupino izračunamo kot

$$f_X(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|(\Theta\,=\,\theta)}(x)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta.$$

Kot primer predpostavimo, da je $X|(\Theta = \theta) \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ in $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Tedaj je

$$f_X(x) \quad = \quad \int_0^\infty \theta\, e^{-\theta}\, \frac{\lambda^\alpha\, \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}\, d\theta \quad = \quad \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^\alpha\, e^{-\theta(\lambda+x)}\, d\theta.$$

Z novo spremenljivko $t = \theta\,(\lambda + 1)$ in upoštevanjem, da je $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$, dobimo

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\,(\lambda+x)^{\alpha+1}} \int_0^\infty t^\alpha\, e^{-t}\, dt \quad = \quad \frac{\lambda^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\,(\lambda+x)^{\alpha+1}} \quad = \quad \frac{\alpha\, \lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}},$$

kar pomeni, da je $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$. Spet smo dobili že znano porazdelitev, kar se zgodi le izjemoma.

Ugotovili smo, da v nekaterih primerih istovrstne rizike z različnimi individualnimi značilnostmi (parametri), ki dejansko tvorijo nehomogeno nevarnostno skupino, lahko gledamo tudi kot vsoto neodvisnih rizikov z isto porazdelitvijo števila škod in višine odškodnin, torej kot homogeno skupino rizikov.

Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitvenimi funkcijami $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \ldots, F_{X_n}(x)$, gostotami verjetnosti $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \ldots, f_{X_n}(x)$ in karakterističnimi funkcijami $\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(t), \ldots, \varphi_{X_n}(t)$. Vsaka konveksna linearna kombinacija

$$F_X(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^n a_i\, F_{X_i}(x) \qquad (a_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^n a_i = 1)$$

je tudi porazdelitvena funkcija neke slučajne spremenljivke X, ki ima gostoto verjetnosti

$$f_X(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^n a_i\, f_{X_i}(x).$$

Ker je

$$E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \sum_{i=1}^n a_i\, f_{X_i}(x)\, dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_{-\infty}^\infty e^{itx}\, f_{X_i}(x)\, dx,$$

je

$$\varphi_X(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^n a_i\, \varphi_{X_i}(t).$$

Na enak način ugotovimo, da je $M_X(t) = \sum_{i=1}^n a_i\, M_{X_i}(t)$, če le obstajajo momentno rodovne funkcije $M_{X_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Za diskretne neodvisne slučajne spremenljivke velja analogno. Vsaka konveksna linearna kombinacija verjetnostnih funkcij slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ je verjetnostna funkcija neke slučajne spremenljivke N. Rodovna funkcija $G_N(s)$ in karakteristična funkcija $\varphi_N(t)$ sta konveksni linearni kombinaciji rodovnih oziroma karakterističnih funkcij slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$. Če obstajajo momentno rodovne funkcije slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$, je $M_N(t)$ njihova konveksna linearna kombinacija.

Uporaba konveksne linearne kombinacije verjetnostnih oziroma porazdelitvenih funkcij pride v poštev v primerih, ko je z zavarovanjem kritih več različnih neodvisnih nevarnosti, ki povzročajo škode z različno verjetnostjo nastanka in z različno pričakovano višino. Tak primer je npr. požarno zavarovanje, ki krije škodo zaradi uničenja ali poškodovanja zavarovanih stvari zaradi naslednjih temeljnih nevarnosti: požara, strele, eksplozije, viharja, toče, udarca zavarovančevega motornega vozila, padca letala, manifestacije in demonstracije. Po posebnem dogovoru lahko dodamo še kritje škode zaradi ene ali več dodatnih nevarnosti, npr.: poplave, izliva vode, zemeljskega plazu, snežnega plazu, udarca motornega vozila, ki ni last zavarovanca, izteka, samovžiga ter izliva žareče mase. Relativna razmerja verjetnosti nastanka škode zaradi posamezne nevarnosti se odražajo v koeficientih $a_1, a_2, \ldots, a_n$, razlike v porazdelitvi višine škod zaradi različnih nevarnosti pa v porazdelitvenih funkcijah $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \ldots, F_{X_n}(x)$. Seveda pa tak diferencirani model zahteva mnogo več parametrov kot model, pri katerem vse nevarnosti obravnavamo skupaj, zato pa omogoča sestavljanje zavarovalne ponudbe, pisane na kožo posameznega zavarovanca.

2.2 Sestavljanje porazdelitev

Škode, ki nastanejo v določenem časovnem obdobju in se nanašajo na neko izbrano množico zavarovalnih polic in izbrano časovno obdobje, nastajajo naključno. Pri tem sta naključna njihovo število in višina. Za izračun agregatnih odškodnin, ki se nanašajo na izbrano množico zavarovalnih polic in izbrano časovno obdobje, ni dovolj, da obvladamo le vsote znanega števila slučajnih spremenljivk, temveč moramo obvladati tudi vsote naključnega števila naključno visokih odškodnin. Kako to storimo v splošnem primeru in v določenih zelo pomembnih posebnih primerih, si bomo ogledali v nadaljevanju.

2.2.1 Karakteristične in rodovne funkcije sestavljenih porazdelitev

Naj bo N slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$ in rodovno funkcijo $G_N(s)$, ki je neodvisna od slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$ Le-te naj bodo neodvisne in enako porazdeljene ter imajo karakteristično funkcijo $\varphi_X(t)$ in momentno rodovno funkcijo $M_X(t)$, če so diskretne z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$, pa še rodovno funkcijo $G_X(s)$.

Izračunajmo karakteristično, momentno rodovno in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i & \text{za } N > 0 \\ 0 & \text{za } N = 0 \end{cases}$$

Zaradi

$$\begin{aligned} E[e^{itS}|N=n] &= (\varphi_X(t))^n \quad \Rightarrow \quad E[e^{itS}|N] &= (\varphi_X(t))^N , \\ E[e^{tS}|N=n] &= (M_X(t))^n \quad \Rightarrow \quad E[e^{tS}|N] &= (M_X(t))^N , \\ E[s^S|N=n] &= (G_X(s))^n \quad \Rightarrow \quad E[s^N|N] &= (G_X(s))^N \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= E\left[e^{itS}\right] = E\left[E\left[e^{itS}|N\right]\right] = E\left[(\varphi_X(t))^N\right] = G_N(\varphi_X(t)), \\ M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] = E\left[E\left[e^{tS}|N\right]\right] = E\left[(M_X(t))^N\right] = G_N(M_X(t)), \\ G_S(s) &= E\left[s^S\right] = E\left[E\left[s^S|N\right]\right] = E\left[(G_X(s))^N\right] = G_N(G_X(s)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zanima nas, kako se momenti slučajne spremenljivke S izražajo z momenti slučajnih spremenljivk N in X_1. Izračunali bomo le prve tri, za kar potrebujemo prve tri odvode

$$\begin{aligned}
M_S'(t) &= G_N'(M_X(t))\, M_X'(t), \\
M_S''(t) &= G_N''(M_X(t))\, M_X'^2(t) \;+\; G_N'(M_X(t))\, M_X''(t), \\
M_S'''(t) &= G_N'''(M_X(t))\, M_X'^3(t) \;+\; 3\, G_N''(M_X(t))\, M_X'(t)\, M_X''(t) \;+\; G_N'(M_X(t))\, M_X'''(t).
\end{aligned}$$

Ker je $M_X(0) = 1$, z uporabo enačb (P1.10a), (P1.10b) in (P1.10c) ter enačbe (P1.7) dobimo

$$\begin{aligned}
m_1[S] &= m_1[N]\, m_1[X_1], \\
m_2[S] &= (m_2[N] \;-\; m_1[N])\, m_1^2[X_1] \;+\; m_1[N]\, m_2[X_1], \\
m_3[S] &= (m_3[N] \;-\; 3\, m_2[N] \;+\; 2\, m_1[N])\, m_1^3[X_1] \;+ \\
&\quad +\; 3\, (m_2[N] \;-\; m_1[N])\, m_1[X_1]\, m_2[X_1] \;+\; m_1[N]\, m_3[X_1].
\end{aligned}$$

Če prvo enačbo le drugače zapišemo, drugi dve pa z upoštevanjem zvez (P1.6a) in (P1.6b) med centralnimi in začetnimi momenti predelamo, dobimo

$$E[S] = E[N]\, E[X_1], \tag{2.2a}$$
$$\mathrm{var}[S] = E[N]\, \mathrm{var}[X_1] \;+\; \mathrm{var}[N]\, E^2[X_1], \tag{2.2b}$$
$$\mu_3[S] = E[N]\, \mu_3[X_1] \;+\; 3\, \mathrm{var}[N]\, E[X_1]\, \mathrm{var}[X_1] \;+\; \mu_3[N]\, E^3[X_1]. \tag{2.2c}$$

Če potrebujemo momente višjega reda, jih lahko izračunamo z nadaljnjim odvajanjem momentno rodovne funkcije. Obstaja pa tudi alternativna pot v obliki rekurzivne enačbe, po kateri iz znanih momentov obeh sestavin sestavljene porazdelitve izračunamo momente sestavljene porazdelitve. Glej npr. (Kaas, Goovaerts, 1986a, str. 381) in (Hesselager, 1994, str. 25).

2.2.2 Sestavljena Poissonova porazdelitev

V vseh primerih, ko je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots$ pa imajo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in karakteristično funkcijo $\varphi_X(t)$, je slučajna spremenljivka $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ porazdeljena sestavljeno Poissonovo. Njena karakteristična funkcija je

$$\varphi_S(t) \;=\; G_N(\varphi_X(t)) \;=\; e^{\lambda(\varphi_X(t)-1)}\,, \tag{2.3}$$

momentno rodovna funkcija pa

$$M_S(t) \;=\; G_N(M_X(t)) \;=\; e^{\lambda(M_X(t)-1)}\,, \tag{2.4}$$

če le obstaja $M_X(t)$. Če obstajajo začetni momenti m_j, $j = 1, 2, \ldots$, slučajne spremenljivke X_1, obstajajo tudi ustrezni začetni in centralni momenti slučajne spremenljivke S. Ker je $E[N] = \mathrm{var}[N] = \mu_3[N] = \lambda$, z upoštevanjem enačb (P1.6a) in (P1.6b) iz enačb (2.2a) do (2.2c) dobimo

$$E[S] = \lambda\, m_1, \tag{2.5a}$$
$$\mathrm{var}[S] = \lambda\, (m_2 \;-\; m_1^2) \;+\; \lambda\, m_1^2 \;=\; \lambda\, m_2, \tag{2.5b}$$
$$\mu_3[S] = \lambda\, (m_3 \;-\; 3\, m_2\, m_1 \;+\; 2\, m_1^3) \;+\; 3\, \lambda\, m_1\, (m_2 \;-\; m_1^3) \;+\; \lambda\, m_1^3 = \lambda\, m_3. \tag{2.5c}$$

Ker so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_N$ nenegativne, je $m_3 > 0$. Zato je koeficient asimetrije $\gamma_S = \frac{\lambda\, m_3}{(\lambda\, m_2)^{3/2}} = \frac{m_3}{\lambda^{1/2} m_2^{3/2}}$ vedno pozitiven. Ker je $E[N] = \lambda$, gre γ_S k 0, ko gre $\overline{N}$ proti neskončnosti. Velja tudi neke vrste centralni limitni izrek (Anscombov izrek). Porazdelitvena funkcija standardizirane slučajne spremenljivke $\frac{S\ -\ E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}} = \frac{S\ -\ \lambda\, m_1}{\sqrt{\lambda\, m_2}}$ konvergira k porazdelitveni funkciji standardizirane normalne porazdelitve, ko gre $\overline{N}$ proti neskončnosti (Bowers et al., 1997, str. 386).

Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne in sestavljeno Poissonovo porazdeljene slučajne spremenljivke. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ naj bo $N_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$ in $Y_i = \sum_{k=1}^{N_i} X_{ik}$, kjer so X_{ik}, $k = 1, 2, \ldots$, od N_i in med seboj neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo $F_{X_i}(x)$ in karakteristično funkcijo $\varphi_{X_i}(t)$. Tedaj je $\varphi_{Y_i}(t) = G_{N_i}(\varphi_{X_i}(t)) = e^{\lambda_i(\varphi_{X_i}(t)-1)}$.

Naj bo $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $N = \sum_{i=1}^n N_i$ in $S = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{N_i} X_{ik}$. Tedaj je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in

$$\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(\varphi_{X_i}(t)-1)} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(\varphi_{X_i}(t)-1)} = e^{\lambda(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_{X_i}(t)-1)} = G_N(\varphi(t)),$$

kjer je $\varphi(t) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i\, \varphi_{X_i}(t)$. To pomeni, da je slučajna spremenljivka S porazdeljena sestavljeno Poissonovo. Lahko jo interpretiramo tudi kot seštevek neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, s karakteristično funkcijo $\varphi(t)$, ki je konveksna linearna kombinacija karakterističnih funkcij $\varphi_{X_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Karakteristična funkcija enolično določa porazdelitev in ker smo ugotovili v razdelku 2.1, da je $\varphi(t)$ karakteristična funkcija slučajnih spremenljivk s porazdelitveno funkcijo $\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i\, F_{X_i}(x)$, je to tudi porazdelitvena funkcija slučajnih spremenljivk S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Če momenti $m_j[X_{i1}]$ obstajajo, je $m_j[S_1] = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i\, m_j[X_{i1}]$. Zato poleg enačb $E[S] = \sum_{i=1}^n E[Y_i]$ in $\mathrm{var}[S] = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}[Y_i]$ velja tudi

$$\mu_3[S] \;=\; \lambda\, m_3[S_1] \;=\; \sum_{i=1}^n \lambda_i\, m_3[X_{i1}] \;=\; \sum_{i=1}^n \mu_3[Y_i].$$

To pa je tudi vse, kar je mogoče za zdaj povedati o sestavljeni Poissonovi porazdelitvi. Z znano karakteristično funkcijo je teoretično sicer vse jasno, praktično pa bi potrebovali porazdelitveno funkcijo v taki obliki, da bi vrednosti v posameznih točkah lahko enostavno izračunali.

2.2.3 Sestavljena negativna binomska porazdelitev

V vseh primerih, ko je $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$, neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots$ pa imajo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in karakteristično funkcijo $\varphi_X(t)$, je slučajna spremenljivka $S = \sum_{i=1}^N X_i$ porazdeljena po sestavljeni negativni binomski porazdelitvi. Njena karakteristična funkcija je

$$\varphi_S(t) \;=\; G_N(\varphi_X(t)) \;=\; \left(\frac{p}{1\ -\ q\, \varphi_X(t)}\right)^\alpha,$$

kjer je $q = 1-p$. Naj bo $\lambda = E[N] = \frac{\alpha\, q}{p}$. Hitro se lahko prepričamo, da lahko rodovno funkcijo negativne binomske porazdelitve zapišemo tudi kot $G_N(s) = (1\ -\ \frac{\lambda}{\alpha}\,(s\ -\ 1))^{-\alpha}$ in z njo

$$\varphi_S(t) \;=\; \left(1\ -\ \frac{\lambda}{\alpha}\,(\varphi_X(t)\ -\ 1)\right)^{-\alpha}. \tag{2.6}$$

Če obstajajo začetni momenti m_j, $j = 1, 2, \ldots$, slučajne spremenljivke X_1, obstajajo tudi ustrezni začetni in centralni momenti slučajne spremenljivke S. Ker je $E[N] = \frac{\alpha\, q}{p}$, $\mathrm{var}[N] = \frac{\alpha\, q}{p^2}$ in $\mu_3[N] = \frac{\alpha\,(2-p)\, q}{p^3}$, z upoštevanjem enačb (P1.6a) in (P1.6b) iz enačb (2.2a) do (2.2c) dobimo

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{\alpha\, q}{p}\, m_1, \\ \mathrm{var}[S] &= \frac{\alpha\, q}{p}\, m_2 + \frac{\alpha\, q^2}{p^2}\, m_1^2, \\ \mu_3[S] &= \frac{3\,\alpha\, p^2\, m_1\, m_2}{q^2} + \frac{2\,\alpha\, p^3\, m_1^3}{q^3} + \frac{\alpha\, p\, m_3}{q}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ker so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_N$ nenegativne, so vsi začetni momenti, ki obstajajo, pozitivni. Tudi parametra α in p sta pozitivna, zato je koeficient asimetrije $\gamma_S = \frac{\mu_3[S]}{\mathrm{var}[S]^{\frac{3}{2}}}$ vedno pozitiven. Fiksirajmo p. Ker je $\overline{N} = \alpha\, p\, q$, je $\gamma_S \propto \overline{N}^{-\frac{1}{2}}$ in gre k 0, ko gre $\overline{N}$ proti neskončnosti. Velja pa še več. Porazdelitvena funkcija standardizirane slučajne spremenljivke $\frac{S\,-\,E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}}$ konvergira k porazdelitveni funkciji standardizirane normalne porazdelitve, ko gre α in z njim vred $\overline{N}$ proti neskončnosti (Bowers et al., 1997, str. 386).

2.2.4 Sestavljena binomska porazdelitev

V vseh primerih, ko je $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, neodvisne in enako porazdeljene nenegativne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots$ pa imajo porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ in karakteristično funkcijo $\varphi_X(t)$, je slučajna spremenljivka $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ porazdeljena po sestavljeni binomski porazdelitvi. Njena karakteristična funkcija je

$$\varphi_S(t) \;=\; G_N(\varphi_X(t)) \;=\; (p\,\varphi_X(t) + q)^n,$$

kjer je $q = 1 - p$. Naj bo $\lambda = E[N] = n\, p$ in $\alpha = -n$. Hitro se lahko prepričamo, da lahko rodovno funkcijo binomske porazdelitve zapišemo tudi kot $G_N(s) = (1 - \frac{\lambda}{\alpha}\,(s - 1))^{-\alpha}$ in z njo

$$\varphi_S(t) \;=\; \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\,(\varphi_X(t) - 1)\right)^{-\alpha}. \tag{2.8}$$

Če obstajajo začetni momenti m_j, $j = 1, 2, \ldots$, slučajne spremenljivke X_1, obstajajo tudi ustrezni začetni in centralni momenti slučajne spremenljivke S. Ker je $E[N] = n\, p$, $\mathrm{var}[N] = n\, p\, q$ in $\mu_3[N] = n\, p\, q\,(q - p)$, z upoštevanjem enačb (P1.6a) in (P1.6b) iz enačb (2.2a) do (2.2c) dobimo

$$\begin{aligned} E[S] &= n\, p\, m_1, \\ \mathrm{var}[S] &= n\, p\, m_2 - n\, p^2\, m_1^2, \\ \mu_3[S] &= n\, p\, m_3 - 3\, n\, p^2\, m_2\, m_1 + 2\, n\, p^3\, m_1^3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Koeficient asimetrije $\gamma_S = \frac{\mu_3[S]}{\mathrm{var}[S]^{\frac{3}{2}}}$ lahko zavzame negativne in pozitivne vrednosti. Fiksirajmo p. Ker je $\overline{N} = n\, p$ in $\gamma_S \propto \overline{N}^{-\frac{1}{2}}$, gre γ_S k 0, ko gre $\overline{N}$ proti neskončnosti. Porazdelitvena funkcija standardizirane slučajne spremenljivke $\frac{S\,-\,E[S]}{\sqrt{\mathrm{var}[S]}}$ konvergira k porazdelitveni funkciji standardizirane normalne porazdelitve, ko gre n in z njim vred $\overline{N}$ proti neskončnosti.

Karakteristični funkciji (2.6) in (2.8) sta formalno enaki. Bistvena razlika je le v predznaku konstante α, ki je pri sestavljeni negativni binomski porazdelitvi pozitivna, pri sestavljeni binomski pa negativna. Če pošljemo $\alpha \to \infty$ tako, da ostane λ konstanten, karakteristični funkciji sestavljene negativne binomske in sestavljene binomske porazdelitve konvergirata h karakteristični funkciji (2.3) sestavljene Poissonove porazdelitve. Seveda k varianci $\lambda\, m_2$ sestavljene Poissonove porazdelitve konvergirata tudi varianci sestavljene negativne binomske porazdelitve in sestavljene binomske porazdelitve, ki znašata $\lambda\, m_2 + \frac{\lambda^2}{\alpha}\, m_1^2$. Tako so sorodstvo med Poissonovo, negativno binomsko in binomsko porazdelitvijo podedovale tudi z njimi tvorjene sestavljene porazdelitve.

3 Računanje agregatnih odškodnin

Predpostavimo portfelj zavarovalnih polic, ki jih razvrstimo v homogene nevarnostne skupine. Pri tem kot homogeno nevarnostno skupino lahko upoštevamo tudi dejansko nehomogeno skupino, ki jo zaradi mešanja, kot smo videli v razdelku 2.1, lahko interpretiramo kot skupino neodvisnih rizikov z isto porazdelitvijo števila škod in višine odškodnin. V takem primeru lahko enostavno izračunamo, kakšne agregatne odškodnine za vse police iz portfelja lahko pričakujemo v opazovanem obdobju, npr. enem letu. Pričakovanim odškodninam primerno je potrebno določiti zavarovalno premijo. Za izračun nevarnostne premije za posamezno nevarnostno skupino zadošča poznavanje škodne pogostosti in povprečne odškodnine oziroma poznavanje na osnovi vzorca določene porazdelitve števila škod in višine odškodnin, ki se nanašajo na eno zavarovalno polico iz nevarnostne skupine. S poznavanjem porazdelitve agregatnih odškodnin za predvideno velikost portfelja pa lahko izračunamo potrebni varnostni dodatek oziroma varnostni koeficient, ki bo zagotavljal, da bo zbrana tehnična premija z dovolj veliko verjetnostjo presegala agregatne odškodnine.

V realni situaciji imamo več zavarovalnih vrst, za vsako od njih pa več različnih zavarovalnih produktov. Vsak od produktov je običajno primeren za različne nevarnostne skupine rizikov. Tako nas lahko zanimajo agregatne odškodnine za posamezno nevarnostno skupino znotraj produkta, za celoten produkt in tudi za celotno zavarovalno vrsto. Če pa gledamo zavarovalnico kot celoto, nas poleg že omenjenih treh nivojev zanimajo tudi agregatne odškodnine za skupino zavarovalnih vrst, ki jih štejemo med premoženjska zavarovanja, za skupino zavarovalnih vrst, ki jih štejemo med življenjska zavarovanja, in končno tudi agregatne odškodnine za vse skupaj. Tako imamo celo hierarhijo agregatnih odškodnin, šele s poznavanjem nižjih nivojev pa lahko gradimo višje. Šele najvišji nivo pa nam omogoča odgovoriti na vprašanje, kolikšna je verjetnost, da bo zavarovalnica po preteku določenega obdobja nesolventna zaradi izjemno visokih agregatnih odškodnin.

Zorni kot lahko tudi obrnemo in se vprašamo, koliko kapitala mora imeti zavarovalnica, da bo po preteku določenega obdobja zaradi izjemno visokih agregatnih odškodnin nesolventna z verjetnostjo, ki je manjša od neke mejne, še sprejemljive verjetnosti. S poznavanjem porazdelitve agregatnih odškodnin, ki jo izračunamo iz porazdelitve števila škod in višine odškodnin za posamezno polico, lahko odgovorimo tudi na to vprašanje.

Če razmišljamo o nesolventnosti zavarovalnice, ki je posledica previsokih čistih agregatnih odškodnin, lahko odpremo nov problem: Kakšno pozavarovalno zaščito mora pridobiti zavarovalnica, da bodo čiste agregatne odškodnine v mejah, ki jih določimo v odvisnosti od višine kapitala in še sprejemljive stopnje tveganja? Seveda bi lahko mislili tudi na kosmate odškodnine, saj zavarovalnica lahko postane nesolventna, če je preveč odvisna od pozavarovalnice, ki postane nesolventna. To tveganje, ki sodi med kreditna tveganja, puščamo ob strani. Omenimo le, da je za obdobje od leta 1980 do junija 2003 znanih le 24 bankrotov pozavarovalnic (Reinsurance - a systematic risk, 2003, str. 32), iz česar lahko sklepamo, da to tveganje v splošnem primeru ni prav veliko, se pa povečuje, kar lahko sklepamo iz trenda padanja bonitetnih ocen v zavarovalništvu (Insurance company ratings, 2003, str. 13) in tudi v pozavarovalništvu, kjer so se celo najbolj kredibilnim in največjim pozavarovalnicam znižale bonitetne ocene (European Reinsurance - The Markets Take Their Bite, 2003, str. 6).

Natančen izračun porazdelitve agregatnih odškodnin je pri predpostavki, da so zavarovalne police oziroma škode neodvisne, teoretično enostaven, praktično pa zelo zahteven. V nadaljevanju si najprej oglejmo dva modela rizikov, nato pa nekaj metod določanja agregatnih odškodnin.

3.1 Kolektivni model rizikov

Pri kolektivnem modelu rizikov obravnavamo kolektiv rizikov, ki ga lahko predstavljajo riziki, kriti z eno samo zavarovalno polico, skupino polic ali celotnim portfeljem istovrstnih polic. Izhajamo iz števila škod N, ki nastanejo v posameznem časovnem obdobju in se nanašajo na kolektiv, ter iz odškodnin $X_1, X_2, \ldots, X_N$. N in $X_1, X_2, X_3, \ldots$ so slučajne spremenljivke, za katere predpostavljamo, da so neodvisne, za $X_1, X_2, X_3, \ldots$ pa še, da so nenegativne in enako porazdeljene. Pri kolektivnem modelu rizikov indeks i slučajne spremenljivke X_i ni povezan s konkretnim rizikom iz kolektiva rizikov, ampak običajno pomeni le zaporedno številko odškodnine v opazovanem časovnem obdobju.

O razvoju modela lahko več zvemo npr. iz (Philipson, 1971), o obsežni literaturi, povezani z njim, pa iz (Philipson, 1971a).

V nadaljevanju privzemimo, da verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N in porazdelitveno funkcijo slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$ poznamo. V praksi ju lahko ocenimo npr. z metodami iz priloge P1. Običajno je za kvalitetno oceno dovolj odškodnin, medtem ko bi na dovolj opazovanih vrednosti letnega števila škod morali zelo dolgo čakati. Zato običajno najprej ocenimo porazdelitev števila škod, ki v enem letu nastanejo in se nanašajo na eno polico, nato pa z upoštevanjem znanega oziroma pričakovanega števila polic izračunamo oceno verjetnostne funkcije slučajne spremenljivke N. To za Poissonovo, negativno binomsko in binomsko porazdelitev, ki so predstavljene v prilogi P2, ni problematično. Zanje enostavno določimo porazdelitev seštevka neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, saj seštevanje takih slučajnih spremenljivk tip ohranja, eden od parametrov pa se pomnoži s številom seštevancev. Če izhajamo iz podatkov zadnjih let, moramo dodatno predpostaviti, da so škode prijavljene kmalu po nastanku, ali pa pri oceni upoštevati tudi nastale, vendar še neprijavljene škode (IBNR škode). Število le-teh lahko dokaj dobro ocenimo z metodo trikotnikov (glej npr. Foundations of Casualty Actuarial Science, 1996, str. 180), zato smemo privzeti, da poznamo število škod, ki so nastale v preteklih letih.

Agregatne odškodnine S, ki se nanašajo na škode, nastale v določenem časovnem obdobju, in na vse istovrstne police iz homogene nevarnostne skupine oziroma na vse police iz portfelja istovrstnih polic, lahko zapišemo kot vsoto naključnega števila naključno velikih odškodnin

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

pri čemer bomo vedno razumeli, da je $S = 0$, če je $N = 0$. Naša glavna naloga bo, kako izračunati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke S, če poznamo verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N in porazdelitveno funkcijo neodvisnih ter enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$

Osnovne lastnosti treh pomembnih porazdelitev, sestavljene Poissonove, sestavljene negativne binomske in sestavljene binomske, ki so zelo primerne za kolektivni model rizikov, smo že spoznali. Če se nobena od predstavljenih treh porazdelitev za modeliranje števila škod ne ujema dovolj dobro z naključnim vzorcem, lahko uporabimo kakšno drugo verjetnostno funkcijo za število škod, lahko tudi empirično, in z njo po vzorcu, predstavljenem v razdelku 2.2, sestavimo primeren model za konkreten problem.

V praksi moramo škodni proces vedno uravnotežiti s procesom zbiranja in akumuliranja zavarovalne premije. Kolektivni model rizikov je primeren za množična zavarovanja, ki jih sklepamo za kratko obdobje, večinoma za eno leto. Pri takih zavarovanjih obresti, ki se natečejo od plačila premije do izplačila odškodnine, ne upoštevamo pri izračunu tehnične premije. Lahko jih zanemarimo ali pa upoštevamo pri nadgradnji tehnične premije, tako da jih za aktuarske namene obravnavamo npr. kot delno zmanjšanje obratovalnih stroškov. Model je uporaben tudi za nekatera dolgoročna zavarovanja. Pravzaprav sama ročnost zavarovalne police ni pomembna, pomembno pa je, kako obračunavamo zavarovalno premijo. Če jo ob sklenitvi zavarovanja obračunamo le za prvo zavarovalno leto, nato pa vsako leto ob zapadlosti premije (ob skadenci) za naslednje zavarovalno leto, vsakokrat na osnovi dejansko prevzetega rizika v naslednjem letu, potem na dolgoročno zavarovalno polico lahko gledamo kot na enoletno zavarovalno polico za vsako zavarovalno leto posebej. Večina premoženjskih zavarovanj sodi v opisani okvir. Vanj pa ne sodijo npr. mešana življenjska zavarovanja, ki krijejo riziko smrti in doživetje, pa tudi ne dolgoročna življenjska zavarovanja s konstantno letno premijo, ki krijejo le riziko smrti. Pri takih zavarovanjih je zaradi manjše umrljivosti v prvih letih zavarovanja tehnična premija večja od dejansko potrebne tehnične premije, iz presežka (hranilnega dela premije) pa se oblikuje matematična rezervacija, ki nadomesti primanjkljaj tehnične premije v kasnejših letih. Pri takih zavarovanjih je potrebno upoštevati obresti in časovno razporeditev stroškov, ki v zavarovalnem obdobju niso enakomerno razporejeni. Pri tovrstnih zavarovanjih običajno predpostavke kolektivnega modela niso izpolnjene, npr. višine škod niso enako porazdeljene, in je zanje bolj primeren individualni model rizikov.

Če se omejimo na premoženjska zavarovanja, je možno, da s kolektivnim modelom rizikov sežemo prav do vrha, torej do agregatnih odškodnin za premoženjska zavarovanja. Če je za najnižje nivoje primerna sestavljena Poissonova porazdelitev, potem je tudi za najvišji nivo, če so le izpolnjeni ustrezni pogoji glede neodvisnosti, saj je tedaj seštevek sestavljeno Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk spet sestavljeno Poissonovo porazdeljen.

3.2 Individualni model rizikov

Pri individualnem modelu rizikov sicer obravnavamo kolektiv rizikov, ki ga predstavljajo riziki, kriti s skupino zavarovalnih polic ali celotnim portfeljem istovrstnih polic, vendar spremljamo vsak riziko posebej. Vsakemu od n rizikov pripada natanko ena od neodvisnih diskretnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pri individualnem modelu ni nujno, da bi bile slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ enako porazdeljene, zato pa zahtevamo, da ima slučajna spremenljivka X_i verjetnostno funkcijo

$$P(X_i = x) \quad = \quad \begin{cases} 1 - p_i & \text{za } x = 0 \\ p_i & \text{za } x = b_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kjer so b_i poljubne pozitivne konstante. Naj bo $q_i = 1 - p_i$. $E[X_i] = p_i\, b_i$, $\mathrm{var}[X_i] = p_i\, q_i\, b_i^2$, $G_{X_i}(s) = E[s^{X_i}] = q_i \,+\, p_i\, s^{b_i}$, $\varphi_{X_i}(t) = E[e^{itX_i}] = q_i \,+\, p_i\, e^{itb_i}$ in $M_{X_i}(t) = E[e^{tX_i}] = q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i}$.

Spet naj bo $S = \sum_{i=1}^n X_i$ slučajna spremenljivka, ki predstavlja agregatne odškodnine v opazovanem obdobju. Potem je

$$E[S] \quad = \quad \sum_{i=1}^n p_i\, b_i, \tag{3.1a}$$

$$\mathrm{var}[S] \quad = \quad \sum_{i=1}^n p_i\, q_i\, b_i^2. \tag{3.1b}$$

Izračunajmo še rodovno, karakteristično in momentno rodovno funkcijo

$$G_S(s) = \prod_{i=1}^n (q_i \,+\, p_i\, s^{b_i}), \quad \varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n (q_i \,+\, p_i\, e^{itb_i}), \quad M_S(t) = \prod_{i=1}^n (q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i}).$$

Pri nekaterih metodah za aproksimacijo porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ bomo potrebovali koeficient asimetrije γ_S, zato s pomočjo enačbe (P1.8c) izračunajmo še $\mu_3[S]$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\log M_S(t) \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \log(q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i})\,, \\
\frac{d \log M_S(t)}{dt} \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \frac{p_i\, b_i\, e^{tb_i}}{q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i}}\,, \\
\frac{d^2 \log M_S(t)}{dt^2} \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \frac{p_i\, q_i\, b_i^2\, e^{tb_i}}{(q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i})^2}\,, \\
\frac{d^3 \log M_S(t)}{dt^3} \quad &= \quad \sum_{i=1}^n \frac{p_i\, q_i\, b_i^3\, e^{tb_i}\,(q_i \,-\, p_i\, e^{tb_i})}{(q_i \,+\, p_i\, e^{tb_i})^3}\,.
\end{aligned}$$

Ko v zadnjo enačbo vstavimo $t = 0$, dobimo

$$\mu_3[S] \quad = \quad \sum_{i=1}^n p_i\, q_i\, (q_i \,-\, p_i)\, b_i^3. \tag{3.2}$$

Moment $\mu_3[S]$, z njim vred pa tudi koeficient asimetrije γ_S, bi sicer lahko bil negativen, kar pa je praktično malo verjetno. Rizikov, kjer bi bil pogoj $q_i - p_i < 0$ oziroma $p_i > 0{,}5$ izpolnjen, običajno ne zavarujemo.

V posebnem primeru, ko je $p_i = p$ in $b_i = 1$ ter $q = 1 - p$, je $G_S(s) = (q + p\,s)^n$, kar pomeni, da je tedaj $S \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Za razliko od kolektivnega modela rizikov je pri individualnem modelu rizikov indeks i slučajne spremenljivke X_i povezan s konkretnim rizikom iz kolektiva, zahtevana oblika verjetnostne funkcije pa pomeni, da se škoda v obravnavanem časovnem obdobju lahko zgodi največ enkrat. Če do škode ne pride, je ustrezna slučajna spremenljivka X_i pač 0. Individualni model rizikov je primeren npr. za skupinska življenjska zavarovanja za riziko smrti. Če je zavarovalno obdobje eno leto, je v tem primeru p_i kar letna stopnja umrljivosti za i-to zavarovano osebo, b_i pa je zavarovalna vsota. Če v (pod)kolektiv rizikov združimo vse osebe iste starosti in spola, za katere predpostavljamo isto verjetnost smrti, so izpolnjeni vsi pogoji za binomsko porazdelitev, če so vse osebe zavarovane za isto zavarovalno vsoto, ki jo proglasimo za denarno enoto.

Zaradi omejitve na premoženjska zavarovanja se z individualnim modelom ne bomo več ukvarjali. Omenimo le, da zanj agregatne odškodnine lahko izračunamo aproksimativno (glej Kornya, 1983; Mc Intosh, 1983; Hipp, 1986), z rekurzijsko formulo pa tudi eksaktno (glej De Pril, 1986; Waldmann, 1994). Če individualni model aproksimiramo s kolektivnim modelom (glej npr. Kuon, 1993), pa agregatne odškodnine lahko izračunamo po metodah, ki jih bomo predstavili v nadaljevanju. Za primerjavo različnih pristopov glej npr. (Kuon, 1987).

3.3 Eksaktna porazdelitvena funkcija agregatnih odškodnin

Naj bo $F(x) = P(X_1 \le x)$ porazdelitvena funkcija neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$, $f(x)$ njihova gostota verjetnosti, $\varphi_X(t)$ njihova karakteristična funkcija, $P(N = n) = p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke N, ki je neodvisna od $X_1, X_2, X_3, \ldots$ in ima rodovno funkcijo $G_N(s)$. $F_S(x) = P(S \le x)$ naj bo neznana porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, $f_S(x)$ njena gostota verjetnosti in $\varphi_S(t)$ njena karakteristična funkcija. Tedaj je

$$F_S(x) \quad = \quad P(S \le x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n)\, P(S \le x | N = n).$$

Pri danem n je verjetnost $P(S \le x | N = n)$ enaka n-kratni konvoluciji $F^{*n}(x)$, zato zgornjo enačbo lahko zapišemo kot

$$F_S(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, F^{*n}(x). \tag{3.3}$$

Konvolucijo $F^{*n}(x)$, ki je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $\sum_{i=1}^{n} X_i$, izračunamo rekurzivno z

$$F^{*0}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0 \\ 1 & \text{za } x \ge 0 \end{cases}$$

in

$$F^{*n}(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(x - z)\, f(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Od tu vidimo, da tudi v primeru, ko je $F(x)$ zvezna funkcija, $F_S(x)$ v točki $x = 0$ ni zvezna, če je $p_0 > 0$.

Ker smo privzeli, da so odškodnine nenegativne, je $F(x) = 0$ za $x < 0$. Zato je za $x < 0$ tudi $F^{*n}(x) = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $f(z) = 0$ za $z < 0$ in $F^{*(n-1)}(x - z) = 0$ za $z > x \geq 0$, se zgornji integral poenostavi v

$$F^{*n}(x) \quad = \quad \int_0^x F^{*(n-1)}(x - z)\, f(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Z odvajanjem zgornjega izraza in z matematično indukcijo ugotovimo, da je

$$\frac{d\, F^{*n}(x)}{dx} \quad = \quad f^{*n}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

kjer je $f^{*1}(x) = f(x)$ in

$$f^{*n}(x) \quad = \quad \int_0^x f^{*(n-1)}(x - z)\, f(z)\, dz \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Definirajmo še

$$f^{*0}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } x \neq 0 \\ 1 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

in gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke S zapišimo kot

$$f_S(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, f^{*n}(x). \tag{3.4}$$

Če je $p_0 = 0$, je $F_S'(x) = f_S(x)$ za vsak x, če pa je $p_0 > 0$, porazdelitvena funkcija $F_S(x)$ zaradi $F^{*0}(x)$ v točki 0 ni odvedljiva, ker ima v njej skok za p_0.

Slučajna spremenljivka $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ima gostoto verjetnosti $f^{*n}(x)$ in zaradi enačbe (P1.9) karakteristično funkcijo $(\varphi_X(t))^n$. Zato zaradi enačbe (3.4) velja

$$\varphi_S(t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, (\varphi_X(t))^n \quad = \quad G_N(\varphi_X(t)).$$

Oglejmo si še primer, ko so slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_N$ diskretne in imajo pri danem $h > 0$ verjetnostno funkcijo $P(X_1 = kh) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Pri danem n verjetnosti $P(S = kh | N = n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, izračunamo kot n-kratno diskretno konvolucijo verjetnostne funkcije f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, same s seboj. Konvolucijo f_k^{*n}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ki je verjetnostna funkcija slučajne spremenljivke $\sum_{i=1}^{n} X_i$, izračunamo rekurzivno

$$f_k^{*0} \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{za } k = 0 \\ 0 & \text{za } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.5a}$$

$$f_k^{*n} \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}^{*(n-1)}\, f_j \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.5b}$$

Naj bo $g_k = P(S = kh)$. Verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke S izračunamo z

$$g_k \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, f_k^{*n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.6}$$

Teoretično smo problem izračuna porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ slučajne spremenljivke S in njene gostote verjetnosti $f_S(x)$, oziroma verjetnostne funkcije g_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, rešili. Vendar v praksi računanje po enačbah (3.3), (3.4) in (3.6) tudi z uporabo računalnikov ni enostavno, v skrajnih primerih pa sploh ni izvedljivo v razumnem času, ker je število potrebnih računskih operacij preveliko.

Recimo, da računamo z diskretno porazdelitvijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, in nas zanimajo verjetnosti g_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Če je $f_0 > 0$, potem bi v splošnem primeru teoretično morali izračunati vrednosti f_k^{*n}, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, za vsak $n \geq 0$, kar pomeni neskončno operacij, seveda pa bi v praksi vsoto računali le do nekega dovolj velikega n. Če pa je $f_0 = 0$, potem je $f_0^{*n} = 0$ za vsak $n \geq 1$, seštevek več kot m slučajnih spremenljivk pa je vedno večji od mh, zaradi česar je $f_k^{*n} = 0$ za $k \leq m$ in $n > m$. Zato zadošča, da izračunamo f_k^{*n} za $n, k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Pri danem n in k za racionalen izračun po enačbi (3.5b), ko že vnaprej vemo, da za $j = 0$ in $j = k$ dobimo 0, zadošča $k - 1$ množenj, seštevanja pa kar zanemarimo. Pri danem n preteče k vrednosti od 1 do m, zato potrebujemo $\sum_{k=1}^{m} (k - 1) = \frac{m\,(m-1)}{2}$ množenj. Ker n teče od 1 do m, je za izračune po enačbi (3.5b) skupaj potrebnih $\frac{m^2\,(m-1)}{2}$ oziroma $O(m^3)$ množenj, za izračun po enačbi (3.6) pa potrebujemo še $O(m^2)$ množenj. Tako je skupna časovna kompleksnost postopka $O(m^3)$.

Vzemimo še primer, ko je $f_k = 0$ za $k > r$. V takem primeru običajno računamo z $m = s\,r$, kjer je s odvisen od $E[N]$ in $E[X_1]$. Če je $f_0 > 0$, bi tudi tokrat teoretično morali izračunati vrednosti f_k^{*n}, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, za vsak $n \geq 0$, kar pomeni neskončno operacij. Če je $f_0 = 0$, pa z racionalnim računanjem lahko prihranimo nekaj operacij. Tako je pri danem n dovolj, če k teče od 1 do $\min\{nr, m\} = r\ \min\{n, s\}$, v enačbi (3.5b) pa je dovolj, če j teče od 1 do $\min\{k-1, r\}$. S podrobnejšo analizo ugotovimo, da je tokrat dovolj $O(s^2\,r^3)$ oziroma $O(m^2\,r)$ operacij.

V naslednjih razdelkih je predstavljenih nekaj aproksimacijskih metod na osnovi znanih momentov porazdelitve agregatnih odškodnin, metoda za izračun gostote verjetnosti iz znane karakteristične funkcije, rekurzijska metoda in metoda simulacije. Kot pomožni postopek pa si najprej oglejmo enega od načinov za konstrukcijo verjetnostne funkcije iz porazdelitvene funkcije.

3.4 Ekvidistantna diskretizacija porazdelitvene funkcije odškodnin

Nekatere od metod za izračun agregatnih odškodnin, ki so predstavljene v nadaljevanju, zahtevajo, da so vse odškodnine mnogokratnik neke najmanjše odškodnine h. Če za h vzamemo denarno enoto ali njen del, je zahtevani pogoj avtomatično izpolnjen, vendar je potem število potrebnih računskih operacij tako veliko, da izračun agregatnih odškodnin praktično ni izvedljiv. Zato moramo izbrati primerno velik korak h in izračunati verjetnostno funkcijo višine odškodnin. Običajno empirične podatke o porazdelitvi odškodnin najprej zgladimo, s tem da poiščemo dobro prilegajočo se porazdelitveno funkcijo $F(x)$, ki jo nato ekvidistantno diskretiziramo. Tu opisano metodo pa lahko uporabimo tudi na empirični porazdelitveni funkciji, kadar razmiki med skoki niso enakomerni, ne da bi jo prej zgladili.

Gostoto verjetnosti $f(x)$ zvezne nenegativne slučajne spremenljivke X s primerno izbranim korakom h nadomestimo z verjetnostno funkcijo $f_k = P(X = kh)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r$. Vrednosti f_k lahko izračunamo na več načinov. Seštevek gostote verjetnosti s posameznega lokalnega intervala dolžine h lahko prestavimo v eno od krajišč intervala, ga po določenem pravilu razdelimo na obe krajišči, lahko pa tudi na več točk mreže s korakom h. Tu si bomo ogledali tako razdelitev na obe krajišči intervala, ki ohranja prispevek intervala k $E[X]$. Zaradi omejitve na končni interval dolžine rh bo matematično upanje po diskretizaciji z opisano metodo v splošnem primeru vedno manjše od $E[X]$, vendar poljubno blizu $E[X]$, če bo le r dovolj velik in $E[X] < \infty$.

Predpostavimo, da smo izbrali dovolj velik x_{max}, za katerega je $F(x_{max})$ dovolj blizu 1. Interval $(0, x_{max}]$ razdelimo na r intervalov $I_k = (kh, (k+1)h]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, dolžine $h = \frac{x_{max}}{r}$. Verjetnost z intervala I_k bomo prestavili v levo in desno mejno točko. Tako bomo v vsako točko kh, $k = 0, 1, 2, \ldots, r$, dobili a_k z leve in b_k z desne, pri čemer je za skrajno levo točko $a_0 = F(0)$ in za skrajno desno $b_r = 1 - F(rh)$. Interval I_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, na katerem je verjetnost $F((k+1)h) - F(kh)$, prispeva k levi točki b_k, k desni pa a_{k+1}. Prispevek intervala I_k k matematičnemu upanju v višini $\int_{kh}^{(k+1)h} x\, f(x)\, dx$ smo tako nadomestili s prispevkom $kh\, b_k$ leve točke in prispevkom $(k+1)h\, a_{k+1}$ desne točke. Naj bo

$$\begin{aligned} d_k &= F((k+1)h) - F(kh) \\ e_k &= \frac{1}{h}\int_{kh}^{(k+1)h} x\, f(x)\, dx \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

Privzeli smo že, da je $a_0 = F(0)$, iz enačbe $d_k = b_k + a_{k+1}$ pa dobimo

$$a_{k+1} = d_k - b_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

Zaradi ohranjanja prispevka intervala I_k k matematičnemu upanju je

$$e_k = k\, b_k + (k+1)\, a_{k+1} = k\, b_k + (k+1)\,(d_k - b_k) = (k+1)\, d_k - b_k,$$

od koder dobimo

$$b_k = (k+1)\, d_k - e_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$

že na začetku pa smo privzeli $b_r = 1 - F(rh)$. Ker je za $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$

$$\frac{1}{h}\int_{kh}^{(k+1)h} kh\, f(x)\, dx \le \frac{1}{h}\int_{kh}^{(k+1)h} x\, f(x)\, dx \le \frac{1}{h}\int_{kh}^{(k+1)h} (k+1)h\, f(x)\, dx,$$

je $k\, d_k \le e_k \le (k+1)\, d_k$ ter $0 \le (k+1)\, d_k - e_k \le (k+1)d_k - kd_k = d_k$ oziroma $0 \le b_k \le d_k$. Zato je $0 \le d_k - b_k \le d_k$ oziroma $0 \le a_{k+1} \le d_k$. Če upoštevamo še $a_0 = F(0) \ge 0$ in $b_r = 1 - F(rh) \ge 0$, je $f_k = a_k + b_k \ge 0$ za $k = 0, 1, 2, \ldots, r$ in

$$\sum_{k=0}^{r} f_k = \sum_{k=0}^{r} (a_k + b_k) = a_0 + \sum_{k=0}^{r-1} (a_{k+1} + b_k) + b_r = F(0) + \sum_{k=0}^{r-1} d_k + 1 - F(rh) = 1.$$

Pri matematičnem upanju ekvidistantno diskretizirane porazdelitve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r} f_k\, kh &= \sum_{k=0}^{r} (a_k + b_k)kh = h\sum_{k=0}^{r-1} (b_k\, k + a_{k+1}\,(k+1)) + b_r\, rh = \\ &= h\sum_{k=0}^{r-1} e_k + (1 - F(rh))\, rh \end{aligned}$$

smo na račun v točko rh prestavljene verjetnosti $1-F(rh)$ od točke $x_{max} = rh$ do neskončnosti ustvarili primanjkljaj v matematičnem upanju v višini

$$\int_{rh}^{\infty} x\,f(x)\,dx \;-\; rh\,(1-F(rh)) \quad = \quad E[X] \;-\; \int_{0}^{rh} x\,f(x)\,dx \;-\; rh\,(1-F(rh)),$$

kar pa ni nič drugega kot $E[X] - E[X; rh]$.

Za vse porazdelitve, ki jih obravnavamo v prilogi P3, obstaja eksplicitni izraz za $E[X; M]$ (glej npr. Hogg, Klugman, 1984), zato predpostavimo, da $E[X; M]$ znamo izračunati. Potem lahko zapišemo postopek, po katerem iskane verjetnosti $f_k = a_k + b_k$ izračunamo rekurzivno, ne da bi morali vnaprej določiti x_{max}. Dinamično bomo dodajali po en interval in se ustavili, ko nam bo dosežena natančnost zadoščala, oziroma takrat, ko bo število intervalov (iteracij) doseglo neko dovolj veliko zgornjo mejo. Če pa nas bodo zaradi škodno presežkovnega pozavarovanja zanimale čiste agregatne odškodnine, bomo x_{max} izenačili s prioriteto in odstopili od dinamičnega ustavljanja. V takem primeru ni potrebno, da je $F(x_{max})$ dovolj blizu 1, diskretizacija pa je smiselna tudi v izjemnih primerih, ko matematično upanje kosmatih odškodnin sploh ne obstaja. Matematično upanje čistih odškodnin, računano iz diskretizirane porazdelitve, bo enako matematičnemu upanju, računanemu iz zvezne porazdelitve.

Algoritem 1: Ekvidistantna diskretizacija porazdelitvene funkcije odškodnin

---

Algoritem diskretizacija
begin (* Diskretizacija *)
    $h :=$ *korak*;
    $x_{max} :=$ *dovolj velika vrednost, ki je mnogokratnik* h;
    if želimo dinamično ustavljanje **then begin**
        $\epsilon := E[X] \times$ *dopustna relativna nenatančnost*;
        $k_{max} :=$ *primerno veliko število korakov*;
    end
    else begin
        $\epsilon := 0$;
        $k_{max} := \frac{x_{max}}{h}$;
    end;
    $a := F(0)$;
    $k := 0$;
    repeat
        $d := F((k+1)\,h) - F(k\,h)$;
        $e := \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} x\,f(x)\,dx$;
        $b := (k\;+\;1)\,d\;-\;e$;
        $f_k := a\;+\;b$;
        $a := d\;-\;b$;
        $k := k\;+\;1$;
    until $(E[X] - E[X; kh] < \epsilon)$ **or** $(k = k_{max})$;
    $f_k := a\;+\;1\;-\;F(kh)$;
    $r := k$;
end. (* Diskretizacija *)

V algoritmu 1, ki je zapisan v psevdokodu, smo izpustili nepotrebno indeksiranje pomožnih spremenljivk.

Postopek je uporaben tudi v primeru, ko namesto porazdelitvene funkcije $F(x)$ oziroma njene gostote $f(x)$, ki smo ju določili po metodah iz priloge P1, uporabimo kar vzorčno stopničasto porazdelitveno funkcijo. Iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jo sestavimo kot $F(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_k \leq x} 1$. V tem primeru je $e_k = \frac{1}{nh} \sum_{kh < x_k \leq (k+1)h} x_k$.

Pri danem x_{max} je izbira koraka h običajno kompromis med natančnostjo in številom računskih operacij algoritma, s katerim bomo dobljeno diskretno verjetnostno funkcijo naprej obdelovali, zato konkretnih napotkov na tem mestu ni mogoče dati.

Ekvidistantno diskretizacijo je mogoče narediti tudi tako, da ohranimo vrednost več kot enega momenta, kar je opisano npr. v (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 314). Tam je tudi opomba, da natančnost, dobljena z izenačitvijo prvih dveh momentov, običajno zadošča, izenačitev tretjega momenta pa natančnost le nepomembno izboljša. Glede na dejstvo, da predstavljena diskretizacija poveča originalno varianco (Daykin, Pentikäinen, Pesonen, 1994, str. 505), smo z uporabo opisane metode oziroma bolj tvegane porazdelitvene funkcije na varni strani.

3.5 Aproksimacije na osnovi znanih momentov porazdelitve agregatnih odškodnin

V tem razdelku predstavljamo nekaj enostavnih metod za aproksimiranje porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ agregatnih odškodnin S. Predpostavili bomo, da poznamo matematično upanje $\mu_S = E[S]$, varianco $\sigma_S^2 = \mathrm{var}[S]$ in koeficient asimetrije $\gamma_S = \frac{\mu_3[S]}{\sigma_S^3}$. Za kolektivni model rizikov vse tri potrebne parametre lahko izračunamo z enačbami (2.2a), (2.2b) in (2.2c), za individualni model pa z enačbami (3.1a), (3.1b) in (3.2).

Predstavljene metode so bile zlasti pomembne v času, ko ni bilo niti dovolj hitrih računalnikov niti boljših metod za izračun. Danes so svoj prvotni izjemno velik pomen izgubile, še vedno pa so uporabne zaradi enostavnosti in s tem povezane hitrosti izračuna. Njihova velika slabost je, da ne obstajajo analitične ocene napak, zaradi česar je pri reševanju delikatnih problemov potrebna velika previdnost. Izvirni greh vseh tovrstnih metod je očitno dejstvo, da dobimo isto porazdelitveno funkcijo za vse primere, ki se ujemajo v nekaj začetnih momentih. V splošnem primeru porazdelitvena funkcija celo z vsemi momenti ni enolično določena (Gnedenko, 1976, str. 189), kaj šele s prvimi tremi. Do kakšnih razlik lahko pride zaradi t. i. problema momentov, glej npr. (Kaas, Goovaerts, 1986, str. 79) in (Pentikäinen, 1987, str. 18).

3.5.1 Normalna aproksimacija

Porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ najlaže aproksimiramo tako, da predpostavimo normalno porazdelitev, torej $S \sim \mathrm{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$.

Normalna porazdelitev ima koeficient asimetrije $\gamma = 0$ in vse centralne momente lihega reda 0. Njena gostota verjetnosti je simetrična. Zato v splošnem ni ravno najboljša aproksimacija za porazdelitev agregatnih odškodnin, če $\gamma_S \neq 0$. Relativno natančna je le pri aproksimaciji agregatnih odškodnin s koeficientom asimetrije, ki je zelo blizu 0. Normalna aproksimacija temelji na centralnem limitnem izreku, zato je primerna takrat, ko za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots$ zaporedje porazdelitvenih funkcij slučajnih spremenljivk $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \,-\, n\mu[X_1]}{\sigma[X_1]\sqrt{n}}$ dovolj hitro konvergira k $\Phi(x)$. To pa je predvsem pri množičnih zavarovalnih vrstah, kjer je tudi škod veliko, pri tem pa višine odškodnin niso preveč heterogene. Previdnost pri aproksimiranju z normalno porazdelitvijo je potrebna zlasti v primerih, kadar je porazdelitev višine odškodnin precej pozitivno asimetrična, portfelj pa je majhen, in takrat, ko je portfelj sicer velik, vendar je v njem poleg velikega števila standardnih polic tudi majhno število polic, s katerimi pa so kriti nestandardni oziroma mnogo večji riziki. Lep ilustrativen primer navajajo Hossack, Pollard, Zehnwirth (1999, str. 256).

Kljub mnogim pomanjkljivostim je normalna aproksimacija uporabna za hitro oceno intervala, na katerem lahko pričakujemo agregatne odškodnine. Pri predpostavki $S \sim \mathrm{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$ je $F_S(x) = \Phi(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S})$ ter pri danem ΔS

$$P(|S \,-\, \mu_S| \leq \Delta S) \;=\; P\left(\left|\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}\right| \leq \frac{\Delta S}{\sigma_S}\right) \;=\; 2\,\Phi\left(\frac{\Delta S}{\sigma_S}\right) \,-\, 1.$$

Če predpišemo stopnjo tveganja ϵ, npr. 1 odstotek, bodo agregatne odškodnine z verjetnostjo $1-\epsilon$ na intervalu $[\mu - \Delta S, \mu + \Delta S]$, pri čemer iz $1 - \epsilon = 2\,\Phi\left(\frac{\Delta S}{\sigma_S}\right) - 1$ izračunamo

$$\Delta S \;=\; \sigma_S\,\Phi^{-1}\left(1 \,-\, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Iz varnostnih razlogov nas običajno še bolj kot interval, na katerem lahko pričakujemo agregatne odškodnine, zanima ocena kritične višine agregatnih odškodnin x_ϵ, za katero je pri dani stopnji tveganja ϵ

$$P(S > x_\epsilon) \;=\; \epsilon.$$

Pri še sprejemljivem ϵ, npr. 1 odstotek za "enkrat na 100 let", kritično višino agregatnih odškodnin x_ϵ dobimo z rešitvijo enačbe

$$1 \,-\, \epsilon \;=\; F_S(x_\epsilon) \;=\; \Phi\left(\frac{x_\epsilon - \mu_S}{\sigma_S}\right),$$

ki je

$$x_\epsilon \;=\; \mu_S \,+\, \sigma_S\,\Phi^{-1}(1 \,-\, \epsilon).$$

Za hiter in v tem primeru tudi dovolj natančen izračun vrednosti $\Phi(x)$ in $\Phi^{-1}(x)$ glej npr. (Abramowitz, Stegun, 1972, str. 932, enačba 26.2.17, in str. 933, enačba 26.2.23).

Zadnji primer uporabe normalne aproksimacije nam ilustrira ključno vprašanje, na katero bi radi znali odgovoriti. Prav zaradi odgovora na to in na podobna vprašanja je potrebno čim bolj natančno poznati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, da bi jo lahko uporabili namesto $\Phi(x)$.

3.5.2 NP-aproksimacija

Slabost normalne aproksimacije izvira iz dejstva, da upošteva le matematično upanje μ_S in varianco σ_S^2, zanemarja pa koeficient asimetrije γ_S. To slabost želimo z NP-aproksimacijo (Normal Power) s postopkom simetrizacije odpraviti. Poiskati želimo tako transformacijo $Y = h(S)$

slučajne spremenljivke S, da bo gostota verjetnosti slučajne spremenljivke Y čim bolj simetrična oziroma čim bliže gostoti verjetnosti standardizirane normalne porazdelitve. Na ta način bomo porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ slučajne spremenljivke $S = h^{-1}(Y)$ lahko relativno dobro aproksimirali s $F_S(x) \approx \Phi(h(x))$.

Naj bo $Z = \frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ standardizirana slučajna spremenljivka, za katero je $E[Z] = 0$ in $\mathrm{var}[Z] = 1$. Standardizacija ohranja koeficient asimetrije, zato je $\gamma_Z = \gamma_S = \gamma$, in tudi koeficient sploščenosti $\gamma_2[S] = \frac{\mu_4[S]}{\sigma_S^4} - 3 = \frac{\mu_4[Z]}{\sigma_Z^4} - 3 = \gamma_2[Z] = \gamma_2$. Porazdelitveno funkcijo $F_Z(x)$ standardizirane slučajne spremenljivke Z lahko formalno razvijemo v Edgeworthovo vrsto, ki se začne s

$$F_Z(x) \quad = \quad \Phi(x) \,-\, \frac{\gamma}{6}\,\Phi^{(3)}(x) \,+\, \frac{\gamma_2}{24}\,\Phi^{(4)}(x) \,-\, \ldots,$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$F_Z(x) \quad = \quad \Phi(x) \,-\, \frac{\gamma}{6}\,H_2(x)\,\phi(x) \,-\, \frac{\gamma_2[S]}{24}\,H_3(x)\,\phi(x) \,-\, \ldots$$

Tu je $\phi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $H_2(x) = x^2 - 1$ in $H_3(x) = x^3 - 3\,x$ pa sta dva od Hermitovih polinomov, ki so za $n = 0, 1, 2, \ldots$ definirani z enačbo $\frac{d^n\phi(x)}{dx^n} = (-1)^n\,H_n(x)\,\phi(x)$. Teoretično ozadje razvoja v Edgeworthovo vrsto si lahko ogledamo npr. v (Kendall, Stuart, 1977, str. 169) ali (Gerber, 1979, str. 60), začetek vrste za porazdelitveno funkcijo z več členi, kot jih navajamo tu, pa v (Abramowitz, Stegun, 1972, str. 935, enačba 26.2.48).

Kritično vrednost x_ϵ, ki reši enačbo $F_Z(x) = 1 - \epsilon$, izračunamo z obratom Edgeworthove vrste oziroma s Cornish-Fisherjevo vrsto (glej Abramowitz, Stegun, 1972, str. 935, enačba 26.2.49)

$$F_Z^{-1}(1-\epsilon) \quad = \quad y_\epsilon \,+\, \frac{\gamma}{6}\,(y_\epsilon^2 - 1) \,+\, \frac{\gamma_2}{24}\,(y_\epsilon^3 - 3\,y_\epsilon) \,-\, \frac{\gamma^2}{36}\,(2\,y_\epsilon^3 - 5\,y_\epsilon) \,+\, \ldots,$$

kjer je $y_\epsilon = \Phi^{-1}(1 - \epsilon)$. Na osnovi te vrste bomo izbrali transformacijo $S = h^{-1}(Y)$ ter z obratom dobili $Y = h(S)$.

Če zahtevamo, da je inverzna funkcija $h^{-1}(Y)$ polinom in se zadovoljimo s prvo stopnjo, potem dobimo $Z = Y$, s tem pa normalno aproksimacijo, ki jo lahko imamo za NP1-aproksimacijo. Če naj bo $h^{-1}(Y)$ polinom druge stopnje, dobimo NP2-aproksimacijo, za katero vzamemo

$$Z \quad = \quad Y \,+\, \frac{\gamma}{6}\,(Y^2 - 1).$$

Z obratom, pri čemer upoštevamo večjega od obeh korenov kvadratne enačbe, dobimo

$$Y \quad = \quad -\,\frac{3}{\gamma} \,+\, \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6}{\gamma}\,Z}\,,$$

pri čemer mora biti $Z > 0$, če naj bo aproksimacija dobra.

Če naj bo $h^{-1}(Y)$ polinom tretje stopnje, dobimo NP3-aproksimacijo, za katero vzamemo

$$Z \quad = \quad Y \,+\, \frac{\gamma}{6}\,(Y^2 - 1) \,+\, \frac{\gamma_2}{24}\,(Y^3 - 3\,Y) \,-\, \frac{\gamma^2}{36}\,(2\,Y^3 - 5\,Y).$$

Ta aproksimacija pa ni več tako enostavna, saj je treba za izračun Y rešiti enačbo tretje stopnje. Povrhu pa se tudi natančnosti ne izboljša, razen za majhne x nekje do $\mu_S + 2\sigma_S$ (Berger, 1972, str. 92). Zato bomo pod NP-aproksimacijo v nadaljevanju razumeli NP2-aproksimacijo.

Če se vrnemo k slučajni spremenljivki S, potem je za $S > \mu_S$

$$\begin{aligned} S &= h^{-1}(Y) = \mu_S + \sigma_S \left(Y + \frac{\gamma}{6}(Y^2 - 1)\right), \\ Y &= h(S) = -\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6}{\gamma} \cdot \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}}. \end{aligned}$$

Z navedeno transformacijo slučajno spremenljivko Y dobro približamo standardizirani normalni porazdelitvi, vendar le za $S > \mu_S$. Zaradi te omejitve je NP-aproksimacija uporabna le za desni del porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin, ki nas pravzaprav edini res zanima. Če naj bo aproksimacija dobra, je še dodatna zahteva, naj koeficient γ ne presega 1. Če pa se zadovoljimo z manjšo natančnostjo, je še sprejemljiva meja 2 (Pentikäinen, 1977, str. 285), Sundt (1993, str. 146) pa navaja celo 3. Porazdelitve agregatnih odškodnin imajo običajno pozitiven koeficient asimetrije, zato ga navzdol ni potrebno omejevati.

Če nas za dani $x > \mu_S$ zanima $P(S \leq x)$, izračunamo

$$P(S \leq x) = F_S(x) \approx \Phi(h(x)).$$

Kritično višino agregatnih odškodnin x_ϵ pri dani stopnji tveganja ϵ dobimo z rešitvijo enačbe

$$1 - \epsilon \approx \Phi(h(x_\epsilon)),$$

ki je $x_\epsilon \approx h^{-1}(\Phi^{-1}(1 - \epsilon))$. Izračunamo jo v dveh korakih

$$\begin{aligned} y_\epsilon &= \Phi^{-1}(1 - \epsilon), \\ x_\epsilon &\approx \mu_S + \sigma_S \left(y_\epsilon + \frac{\gamma}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

NP-aproksimacija je z razvojem natančnejših metod, ki pa zahtevajo zmogljive računalnike, svoj nekdanji pomen izgubila, vendar je še vedno primerna za hitro ocenjevanje. Je enostavna in za majhne γ dovolj natančna (glej npr. Kauppi, Ojantakanen, 1969; Pentikäinen, 1977), omogoča pa tudi analitične izračune (glej Berger, 1972). Zanimivo je, da sicer teži k izenačitvi prvih treh momentov slučajne spremenljivke S in $h^{-1}(Y)$, kjer je $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$, vendar ne temelji na dejanski izenačitvi. Če primerjamo prve tri začetne momente slučajne spremenljivke $Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$, ki so 0, 1 in γ, s prvimi tremi začetnimi momenti slučajne spremenljivke $Y + \frac{\gamma}{6}(Y^2 - 1)$, $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$, ki so 0, $1 + \frac{\gamma^2}{18}$ in $\gamma + \frac{\gamma^3}{27}$, vidimo, da se ne ujemajo, razlika pa raste z γ. Mogoče je najti taka koeficienta a in b, da prve tri momente slučajnih spremenljivk Z in $aY + b(Y^2 - 1)$, $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$, izenačimo. Vendar v izračun vložimo več truda, aproksimacije pa ne izboljšamo (Ramsay, 1991, str. 150).

3.5.3 Aproksimacija s premaknjeno gama porazdelitvijo

V splošnem primeru slučajne spremenljivke S ne moremo aproksimirati s slučajno spremenljivko $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ tako, da bi se S in X ujemali v matematičnem upanju, varianci in koeficientu asimetrije. Če izenačimo $\mu_S = \mu_X = \frac{\alpha}{\lambda}$ in $\sigma_S^2 = \sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$, dobimo $\alpha = \frac{\mu_S^2}{\sigma_S^2}$ in $\lambda = \frac{\mu_S}{\sigma_S^2}$, s tem pa je določen tudi koeficient asimetrije $\gamma_X = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\,\sigma_S}{\mu_S}$, ki se v splošnem primeru ne ujema z γ_S. Če pa izenačimo $\gamma_S = \gamma_X = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ in $\sigma_S^2 = \sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$, dobimo $\alpha = \frac{4}{\gamma_S^2}$ in $\lambda = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sigma_S}$, s tem pa je določen $\mu_X = \frac{\alpha}{\lambda} = \sigma_S\,\sqrt{\alpha} = \frac{2\,\sigma_S}{\gamma_S}$, ki se v splošnem primeru ne ujema z μ_S. Drugi pristop ima prednost pred prvim, ker varianca in koeficient asimetrije nista občutljiva na premik. Zato ima slučajna spremenljivka $Y = S + d$ enako varianco in koeficient asimetrije kot S in X. Če izberemo $d = \sigma_S\,\sqrt{\alpha} - \mu_S$, se Y in X ujemata tudi v matematičnem upanju. Zato je smiselno $F_Y(x)$ aproksimirati s $F_X(x)$.

Zaradi lažjega računanja slučajno spremenljivko S standardizirajmo. $Z = \frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$, $E[Z] = 0$, $\mathrm{var}[Z] = 1$. Koeficient asimetrije tudi na razteg ni občutljiv, zato je $\gamma_Z = \gamma_S$. Sedaj so parametri $\alpha = \frac{4}{\gamma_S^2}$, $\lambda = \sqrt{\alpha}$ in $d = \sqrt{\alpha}$. Naj bo $Y = Z + \sqrt{\alpha}$ in predpostavimo, da je $F_Y(x) \approx F_X(x)$. Z upoštevanjem $F_Y(x) = \Gamma(\alpha; \lambda\, x) = \Gamma(\alpha; \sqrt{\alpha}\, x)$ zaradi

$$F_Z(x) \quad = \quad P(Z \le x) \quad = \quad P(Z + \sqrt{\alpha} \le x + \sqrt{\alpha}\,) \quad = \quad P(Y \le x + \sqrt{\alpha}\,)$$

lahko $F_Z(x)$ aproksimiramo z 0 za $x \le\, -\sqrt{\alpha}$, sicer pa z

$$F_Z(x) \quad \approx \quad \Gamma(\alpha; \alpha + x\,\sqrt{\alpha}\,) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\alpha + x\,\sqrt{\alpha}} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Kritično višino agregatnih odškodnin x_ϵ pri dani stopnji tveganja ϵ dobimo z rešitvijo enačbe

$$1\,-\,\epsilon \quad = \quad \Gamma(\alpha; \alpha + z_\epsilon\,\sqrt{\alpha}\,) \quad = \quad \Gamma(\alpha; u_\epsilon).$$

Najprej izračunamo $u_\epsilon = \Gamma^{-1}(\alpha; 1-\epsilon)$, nato pa še

$$\begin{aligned} z_\epsilon &\quad = \quad \frac{u_\epsilon\,-\,\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \\ x_\epsilon &\quad = \quad \mu_S\,+\,\sigma_S\, z_\epsilon. \end{aligned}$$

Aproksimacija ima to lepo lastnost, da je za razne praktične uporabe porazdelitvene funkcije z njo relativno lahko operirati, ker je funkcija $\Gamma(x)$ s svojimi izpeljankami vred teoretično dobro obdelana. Primer uporabe je razviden npr. iz (Seal, 1978), v (Seal, 1978a, str. 54) oziroma v (Seal, 1977) pa je na osnovi primerjave izraženo mnenje, da je aproksimacija s premaknjeno gama porazdelitvijo boljša od NP-aproksimacije. Mnenja o tem pa so deljena. Primerjave, ki jih navaja Pentikäinen (1977), ne kažejo bistvene prednosti ene aproksimacije pred drugo.

Aproksimacija, ki pod določenimi pogoji konvergira k normalni porazdelitvi (Bowers et al., 1997, str. 337), pa ima tudi pomanjkljivosti. Iz $Z >\,-\sqrt{\alpha}$ namreč sledi $S > \mu_S\,-\,\frac{2\,\sigma_S}{\gamma_S}$, kar pomeni, da v primeru, ko je $\mu_S\,-\,\frac{2\,\sigma_S}{\gamma_S} < 0$, dopušča tudi negativne agregatne odškodnine, kar pa dejansko ni mogoče.

3.5.4 Aproksimacija s transformirano gama porazdelitvijo

Najprej si pripravimo teren in za slučajno spremenljivko $X \sim \mathrm{T}\Gamma(\alpha, \lambda, \tau)$ s pomočjo prvih treh začetnih momentov

$$m_1 \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{\tau})}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}\,, \qquad m_2 \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha + \frac{2}{\tau})}{\lambda^2\,\Gamma(\alpha)}\,, \qquad m_3 \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha + \frac{3}{\tau})}{\lambda^3\,\Gamma(\alpha)}$$

izračunajmo varianco

$$\sigma^2 \;=\; m_2 \,-\, m_1^2 \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau}) \,-\, \Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^2}{\lambda^2\,\Gamma(\alpha)^2},$$

centralni moment $\mu_3 = m_3 \,-\, 3\,m_2\,m_1 \,+\, 2\,m_1^3$

$$\mu_3 \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)^2\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{\tau}) \,-\, 3\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau}) \,+\, 2\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^3}{\lambda^3\,\Gamma(\alpha)^3},$$

koeficient asimetrije

$$\gamma \;=\; \frac{\mu_3}{\sigma^3} \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)^2\,\Gamma(\alpha+\frac{3}{\tau}) \,-\, 3\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau}) \,+\, 2\,\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^3}{\left(\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau}) \,-\, \Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ter kvadrat koeficienta variacije

$$\varrho^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{m_1^2} \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^2} \,-\, 1.$$

Koeficienta variacije in asimetrije nista odvisna od parametra λ, kar bomo izkoristili in parametra α ter τ povezali s sistemom dveh enačb, od katerih prvo že imamo, drugo pa lahko z malo truda preverimo

$$\varrho^2 \,+\, 1 \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\frac{2}{\tau})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^2},$$

$$\gamma\,\varrho^3 \,+\, 3\,\varrho^2 \,+\, 1 \;=\; \frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{\tau})\,\Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})^3}.$$

V zgornji enačbi vstavimo γ_S za γ in $\varrho_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$ za ϱ, nato pa enačbi rešimo. Za reševanje lahko uporabimo npr. Newton-Raphsonovo metodo, opisano v razdelku P3.8. Z znanima parametroma α in τ izračunamo še $\lambda = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{\tau})}{\mu_S\,\Gamma(\alpha)}$. S tem izenačimo matematično upanje, posredno pa tudi varianco, saj je $\sigma_S^2 = (\mu_S\,\varrho_S)^2$.

Zgornji sistem enačb ni vedno rešljiv, kar naj bi bilo odvisno od razmerij med momenti. Tako npr. pri zelo majhnem koeficientu variacije in velikem koeficientu asimetrije ni rešljiv (Venter, 1983, str. 192). Prav tako naj bi bil $\gamma_S > \varrho$ potrebni pogoj za rešljivost, če je $\varrho > 1{,}25$ (Venter, 1983, str. 165), kar pa v praksi ni videti pomembna omejitev (Linden, Klinker, 1984, str. 27). Če zgornji sistem enačb ni rešljiv, aproksimacija s transformirano gama porazdelitvijo pač ni ustrezna metoda za izračun agregatnih odškodnin. Izbrati je potrebno kakšen drug model.

Kritično višino agregatnih odškodnin x_ϵ pri dani stopnji tveganja ϵ dobimo z rešitvijo enačbe

$$1 \,-\, \epsilon \;=\; \Gamma(\alpha; (\lambda\,x_\epsilon)^\tau) \;=\; \Gamma(\alpha; u_\epsilon).$$

Najprej izračunamo $u_\epsilon = \Gamma^{-1}(\alpha; 1-\epsilon)$, nato pa še

$$x_\epsilon \;=\; \frac{u_\epsilon^{\frac{1}{\tau}}}{\lambda}.$$

3.6 Izračuni na osnovi inverzne Fourierove transformacije

Problema, kako izračunati porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, se lahko lotimo tudi tako, da iz znane karakteristične funkcije $\varphi_S(t)$, ki enolično določa $f_S(x)$, najprej izračunamo $f_S(x)$, nato pa z integriranjem še $F_S(x)$. Zato si oglejmo, kako v splošnem primeru iz karakteristične funkcije diskretne slučajne spremenljivke izračunamo njeno verjetnostno funkcijo oziroma iz karakteristične funkcije zvezne slučajne spremenljivke njeno gostoto verjetnosti in porazdelitveno funkcijo.

Za diskretno slučajno spremenljivko N je karakteristična funkcija $\varphi_N(t)$ Fourier-Stieltjesova transformiranka verjetnostne funkcije p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Le-to iz znane karakteristične funkcije izračunamo z inverzno Fourier-Stieltjesovo transformacijo po enačbi

$$p_k = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{-itx_k}\, \varphi_N(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ki se za slučajno spremenljivko N z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$ poenostavi v

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\, \varphi_N(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Za zvezno slučajno spremenljivko X s porazdelitveno funkcijo $F(x)$ je karakteristična funkcija $\varphi_X(t)$ Fourierova transformiranka gostote verjetnosti $f(x)$. Le-to iz znane karakteristične funkcije izračunamo z inverzno Fourierovo transformacijo. Če je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, potem je $F(x)$ absolutno zvezna, $f(x)$ pa zvezna. Izračunamo jo po enačbi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\, \varphi_X(t)\, dt.$$

Če integral razbijemo na integral od $-\infty$ do 0 in od 0 do ∞ ter v prvem integralu vpeljemo novo spremenljivko, ki se od prvotne razlikuje le v predznaku, dobimo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \left(e^{itx}\, \varphi_X(-t) + e^{-itx}\, \varphi_X(t)\right) dt.$$

$\varphi_X(t)$ je v splošnem kompleksna funkcija realne spremenljivke t, za katero pa vedno velja $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$. Zato lahko zgornji integral zapišemo tudi kot

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}[e^{-itx}\, \varphi_X(t)]\, dt.$$

V splošnem primeru velja, da je za točko x, v kateri je funkcija $F(x)$ zvezna,

$$F(x) = \lim_{y\to-\infty} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{i\,t}\, \varphi_X(t)\, dt.$$

Če je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$, potem je tudi funkcija pod integralom absolutno integrabilna na vsej realni osi in zgornjo enačbo z malo truda lahko predelamo v

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{itx}\, \varphi_X(-t) - e^{-itx}\, \varphi_X(t)}{i\,t}\, dt,$$

če pa upoštevamo še $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, dobimo

$$F(x) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}[e^{-itx}\,\varphi_X(t)]}{t}\,dt. \tag{3.8}$$

Vrnimo se k slučajni spremenljivki S, ki je zvezna, kadar je $P(N=0) = p_0 = 0$, sicer pa je mešana. V obeh primerih jo lahko zapišemo kot $S = (1-p_0)\,S_1 + p_0\,S_2$, kjer je S_1 zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo

$$F_{S_1}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0 \\ \frac{F_S(x)\,-\,p_0}{1\,-\,p_0} & \text{za } x \geq 0 \end{cases}$$

ter S_2 od S_1 neodvisna diskretna slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $P(S_2 = 0) = 1$. Ker je $\varphi_S(t) = E[e^{it((1-p_0)S_1 + p_0 S_2)}] = E[e^{it(1-p_0)S_1}]\,E[e^{itp_0 S2}] = \varphi_{S_1}((1-p_0)\,t)\,\varphi_{S_2}(p_0\,t)$ in je $\varphi_{S_2}(t) \equiv 1$, je $\varphi_S(t) = \varphi_{S_1}((1-p_0)\,t)$ oziroma $\varphi_{S_1}(t) = \varphi_S(\frac{t}{1-p_0})$. Iz absolutne integrabilnosti $\varphi_{S_1}(t)$ na realni osi sledi absolutna integrabilnost $\varphi_S(t)$ in obratno. Tako ni nobene potrebe, da bi $\varphi_S(t)$ računali po ovinku, tako da bi po enačbi (3.8) izračunali $F_{S_1}(x)$, nato pa $F_S(x) = p_0 + (1-p_0)\,F_{S_1}(x)$ za $x \geq 0$.

V splošnem primeru je računanje $F_S(x)$ po enačbi (3.8) zahtevno, v določenih posebnih primerih pa je enačba dobro izhodišče za praktične izračune, kar si bomo ogledali v naslednjem podrazdelku. Pri tem bomo naredili še en korak, ki je v praksi večkrat nujen. Upoštevali bomo dejstvo, da jamstvo zavarovalnice običajno ni neomejeno. Zato ima porazdelitvena funkcija $F(x)$, za katero smo do tu predpostavljali zveznost, v neki točki skok na končno vrednost 1. Analogno je v primerih, ko je jamstvo zavarovalnice neomejeno oziroma tako visoko, da je potrebno škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M, zanimajo pa nas le čiste agregatne odškodnine, ki bremenijo zavarovalnico.

Kadar je X mešana slučajna spremenljivka, ker ima $F(x)$ skok v točki M, porazdelitvena funkcija agregatnih odškodnin nima skoka le v točki 0, če je $p_0 > 0$, ampak tudi v vseh mnogokratnikih M. Tudi v takih primerih pa je enačba (3.8) uporabna.

3.6.1 Heckman-Meyersova metoda

Naj bo N slučajna spremenljivka z rodovno funkcijo $G_N(s)$, ki modelira število odškodnin, in X slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F(x)$, ki modelira višino posameznih odškodnin, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_r$, $I_k = (x_k, x_{k+1}]$ in $P(x \in I_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. Intervali I_k so lahko različnih dolžin. Število intervalov in meje določimo tako, da lahko $F(x)$ dobro aproksimiramo z odsekoma linearno funkcijo. Če so odškodnine navzgor neomejene, določimo x_r tako, da bo $f_r = 1 - F(x_r) \approx 0$, sicer pa naj bo x_r enak maksimalni zavarovalni vsoti. V tem primeru bo v splošnem $f_r > 0$. Analogno ravnamo, če želimo ugotavljati vpliv škodno presežkovnega pozavarovanja na agregatne odškodnine. V tem primeru x_r izenačimo s prioriteto.

Porazdelitveno funkcijo $F(x)$ aproksimirajmo z odsekoma linearno funkcijo $F_X(x)$, ki se na točkah x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, ujema s $F(x)$, v x_r, kjer ima $F(x)$ skok za f_r, če je $f_r > 0$, pa se ujemata levi limiti. Tako je na I_k gostota verjetnosti $d_k = \frac{f_k}{x_{k+1}-x_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. Izračunajmo karakteristično funkcijo

$$\varphi_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{r-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} d_k\, e^{itx}\, dx \;+\; f_r\, e^{itx_r} \;=\; \sum_{k=0}^{r-1} d_k\, \frac{e^{itx_{k+1}} \;-\; e^{itx_k}}{i\,t} \;+\; f_r\, e^{itx_r},$$

ki jo razcepimo na realni in imaginarni del

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathrm{Re}[\varphi_X(t)] = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{r-1} d_k\,(\sin(t\,x_{k+1}) \;-\; \sin(t\,x_k)) \;+\; f_r\,\cos(t\,x_r), \\ B(t) &= \mathrm{Im}[\varphi_X(t)] = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{r-1} d_k\,(\cos(t\,x_k) \;-\; \cos(t\,x_{k+1})) \;+\; f_r\,\sin(t\,x_r). \end{aligned}$$

Poiščimo še karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $\frac{S}{\sigma_S}$, pri kateri kot enoto za velikost agregatnih odškodnin upoštevamo standardni odklon σ_S agregatnih odškodnin. Iz definicije karakteristične funkcije vidimo, da je iskana funkcija kar $\varphi_S(\frac{t}{\sigma_S})$. Zapišimo jo v polarnih koordinatah

$$\varphi_S\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;=\; G_N\left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma_S}\right)\right) \;=\; G_N\left(A\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;+\; i\,B\left(\frac{t}{\sigma_S}\right)\right) \;=\; r(t)\,e^{i\theta(t)}.$$

Po enačbi (3.8) izračunajmo še $F_S(x)$. Če vpeljemo novo spremenljivko $u = t\,\sigma_S$, dobimo

$$F_S(x) = \frac{1}{2} \;-\; \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}[e^{-iux/\sigma_S}\,\varphi_X(u/\sigma_S)]}{u}\,du \;=\frac{1}{2} \;-\; \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}[r(u)e^{-i(ux/\sigma_S-\theta(u))}]}{u}\,du.$$

Upoštevajmo Eulerjevo formulo $e^{ix} = \;\cos x + i\,\sin x$ ter namesto u spet pišimo t, pa dobimo

$$F_S(x) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{r(t)}{t}\,\sin(tx/\sigma_S - \theta(t))\,dt. \tag{3.9}$$

Za praktično uporabo zgornje enačbe, ki velja le za tiste x, kjer je $F(x)$ zvezna, pride v poštev le numerično integriranje, kar pa zahteva izračun funkcij $r(t)$ in $\theta(t)$ v določenih točkah.

Če je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, so agregatne odškodnine porazdeljene sestavljeno Poissonovo. Tedaj je po enačbi (2.5b) $\sigma_S^2 = \lambda\,m_2$ in zaradi enačbe (2.3)

$$\varphi_S\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;=\; e^{\lambda(A(t/\sigma_S)+iB(t/\sigma_S)-1)} \;=\; r(t)\,e^{i\theta(t)},$$

pri čemer je $r(t) = e^{\lambda(A(t/\sigma_S)-1)}$ in $\theta(t) = \lambda\,B(\frac{t}{\sigma_S})$. Če je $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$, so agregatne odškodnine porazdeljene sestavljeno negativno binomsko. Po enačbi (2.7) je $\sigma_S^2 = \lambda\,m_2 \;+\; \frac{\lambda^2}{\alpha}\,m_1^2$, kjer je $\lambda = \frac{\alpha\,q}{p}$. Zaradi enačbe (2.6) dobimo

$$\varphi_S\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;=\; \left(1 \;-\; \frac{\lambda}{\alpha}\left(A\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;+\; i\,B\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;-\; 1\right)\right)^{-\alpha} \;=\; r(t)\,e^{i\theta(t)}$$

in

$$r(t) \;=\; \left(\left(1 \;-\; \frac{\lambda}{\alpha}\left(A\left(\frac{t}{\sigma_S}\right) \;-\; 1\right)\right)^2 \;+\; \left(\frac{\lambda}{\alpha}\,B\left(\frac{t}{\sigma_S}\right)\right)^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

$\theta(t)$ dobimo tako, da najprej izračunamo $a(t) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha}\,(A(t/\sigma_S) - 1)$ in $b(t) = \frac{\lambda}{\alpha}\,B(t/\sigma_S)$ ter

$$\vartheta(t) \;=\; \begin{cases} \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| & \text{za } a(t) > 0 \text{ in } b(t) \geq 0 \\ 2\,\pi \;-\; \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| & \text{za } a(t) > 0 \text{ in } b(t) < 0 \\ \pi \;-\; \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| & \text{za } a(t) < 0 \text{ in } b(t) \geq 0 \\ \pi \;+\; \operatorname{arctg}\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right| & \text{za } a(t) < 0 \text{ in } b(t) < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{za } a(\text{t}) = 0 \text{ in } b(t) > 0 \\ 0 & \text{za } a(\text{t}) = 0 \text{ in } b(t) = 0 \\ \frac{3\,\pi}{2} & \text{za } a(\text{t}) = 0 \text{ in } b(t) < 0 \end{cases}$$

nato pa iz $\vartheta(t) \in [0, 2\,\pi)$ izračunamo še

$$\theta(t) \;=\; 2\,\pi\left(\frac{-\alpha\,\vartheta(t)}{2\,\pi} \bmod 1\right) \;-\; \pi.$$

Če je implementacija funkcije $x \bmod 1$ taka, da leži rezultat na intervalu $[0,1)$ tudi za negativne x, je $\theta(t) \in [-\pi, \pi)$.

Če je $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, so agregatne odškodnine porazdeljene sestavljeno binomsko, po enačbi (2.9) pa je $\sigma_S^2 = \lambda\,m_2 \,+\, \frac{\lambda^2}{\alpha}\,m_1^2$, kjer je $\lambda = np$ in $\alpha = \;-\,n$. Ker je enačba (2.8) identična enačbi (2.6), dobimo za $r(t)$ in $\theta(t)$ isti rezultat kot v prejšnjem primeru, le z različnima λ in α, pri čemer je ključen predznak parametra α.

Heckman-Meyersova metoda je praktično zelo uporabna, zato si malo podrobneje oglejmo, kako se pri danem x lahko numerično lotimo integrala (3.9). Sledili bomo avtorjema metode (glej Heckman, Meyers, 1983, 1984; Venter, 1983a), čeprav nam danes ni več treba tako zelo paziti na število izračunov funkcijskih vrednosti $r(t)$ in $\theta(t)$, kar zahteva največ elementarnih računskih operacij.

Za osnovno dolžino intervala vzemimo $h = \frac{2\,\pi\,\sigma_S}{x_{max}}$, kjer je x_{max} maksimalna agregatna odškodnina, za katero nas zanima vrednost funkcije $F_S(x)$. Taka izbira nam zagotavlja kvečjemu eno oscilacijo integranda na posameznem intervalu. Celotno integracijsko območje razdelimo na intervale $[0, \frac{h}{16})$, $[\frac{h}{16}, \frac{h}{8})$, $[\frac{h}{8}, \frac{h}{4})$, $[\frac{h}{4}, \frac{h}{2})$, $[\frac{h}{2}, h)$, $[h, 2\,h)$, $[2\,h, 3\,h)$,… S krajšimi intervali začnemo zato, ker se na začetku integrand najhitreje spreminja. Število intervalov dinamično določimo naknadno.

Naj bo $g(t) = \frac{r(t)}{t}\,\sin(tx/\sigma_S - \theta(t))$. Na vsakem od intervalov $[a,b)$ integral izračunamo z Gaussovo kvadraturno formulo $\int_{-1}^{1} g(u)\,du \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\,g(u_i)$, za katero uteži w_i in vozle u_i za različne n najdemo v (Abramowitz, Stegun, 1972, str. 916, tabela 25.4). Naj bo $u = 2\,\frac{t-a}{b-a} - 1$. Tedaj je $t = \frac{u\,(b-a)+(b+a)}{2}$ in

$$\int_a^b g(t)\,dt \;=\; \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{u\,(b-a)+(b+a)}{2}\right)du \;\approx\; \approx\; \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\,g\left(\frac{u_i\,(b-a)+(b+a)}{2}\right).$$

Ustavili se bomo po integriranju na intervalu dolžine h, na katerem bo $g\left(\frac{u_i\,(b-a)+(b+a)}{2}\right) < \epsilon$ za vseh n vozlov u_i, oziroma po nekem vnaprej določenem maksimalnem številu intervalov.

Ko seštevek vseh upoštevanih posameznih integralov delimo s π in prištejemo $\frac{1}{2}$, dobimo $F_S(x)$. Izjema so primeri, ko je $f_r > 0$ in je $x = k\,x_r$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. V tem primeru $F_S(x)$ v točki x ni zvezna. Če je $k = 0$, je $F_S(0) = p_0$, za $k \geq 1$ pa ima $F_S(x)$ v točki $x = k\,x_r$ skok, ki je enak verjetnosti, da so agregatne odškodnine sestavljene iz natanko k odškodnin velikosti x_r. Ta verjetnost je enaka $p_k\,f_r^k$. Z integriranjem izračunani vrednosti moramo prišteti polovico skoka, še najbolj enostavno pa je, če $F_S(x)$ izračunamo v točki, ki je za malenkost večja od $k\,x_r$.

V praksi napako zaradi aproksimacije porazdelitvene funkcije z odsekoma linearno funkcijo in zaokrožitvene napake lahko poljubno omejimo, težko pa ocenimo napako zaradi integriranja po končnem intervalu namesto po neskončnem. V integrandu nastopa funkcija $\frac{1}{t}$, vendar se je v praktičnih primerih izkazalo, da integrand teži k 0 hitreje kot $\frac{1}{t}$, ko gre t v neskončnost (Heckman, Meyers, 1983). Uporabljene so bile kvadraturne formule za $n = 5$, pri že opisanem pravilu za ustavitev integriranja pa je bil upoštevan $\epsilon = 0,00002$ oziroma največ 256 integriranj. Napaka zaradi integriranja po končnem intervalu je bila nepomembna, vendar se izkušnje avtorjev nanašajo na malenkostno modifikacijo zgoraj opisane metode. V razdelku 2.1 smo iz Poissonove porazdelitve z mešanjem z gama porazdelitvijo dobili negativno binomsko porazdelitev z večjo varianco. Tako lahko eksplicitno uporabo negativne binomske porazdelitve interpretiramo tudi kot implicitno uporabo Poissonove porazdelitve, vendar z upoštevanjem nezanesljivosti parametra λ. Avtorja sta eksplicitno upoštevala tudi nezanesljivost parametrov porazdelitvene funkcije odškodnin, kar za malenkost spremeni enačbo (3.9). Podrobnosti so razvidne iz njunega članka, več o sami metodi upoštevanja nezanesljivosti parametrov pa si lahko ogledamo npr. v (Meyers, Schenker, 1983) in (Venter, 1983).

Heckman-Meyersova metoda ima pred nekaterimi drugimi metodami eno veliko prednost. Zelo enostavno jo lahko uporabimo tudi za izračun porazdelitve agregata agregatnih odškodnin, pri čemer število nivojev agregiranja ni omejeno. Kot primer si oglejmo le dva nivoja. Privzemimo, da imamo n zavarovalnih vrst in da so vse škode, s tem pa tudi odškodnine, med seboj neodvisne, čeprav v praksi ponavadi niso. Za vsako zavarovalno vrsto i, $i = 1, 2, \ldots, n$, poznamo standardni odklon σ_i in karakteristično funkcijo $\varphi_i(t)$. Iz enačbe $\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ izračunajmo σ_S in v polarnih koordinatah zapišimo $\varphi_i(\frac{t}{\sigma_S}) = r_i(t)\,e^{\theta_i(t)}$. Od tu dobimo $\varphi_S(t) = r(t)\,e^{\theta(t)}$, kjer je $r(t) = \prod_{i=1}^n r_i(t)$ in $\theta(t) = \sum_{i=1}^n \theta_i(t)$, ter nadaljujemo z integriranjem na že opisani način.

3.6.2 Uporaba hitre Fourierove transformacije

Naj bo $\{f_k\} = \langle \ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ neskončno periodično zaporedje kompleksnih števil s periodo n, za katero je $f_k = f_{k \bmod n}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Vrednosti f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, natanko določajo zaporedje $\{f_k\}$ in periodično funkcijo $f : k \mapsto f_k$ iz $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{C}$. Zaporedje $\{f_k\}$ preslikajmo z diskretno Fourierovo transformacijo

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{3.10}$$

v zaporedje $\{\tilde{f}_k\} = \langle \ldots, \tilde{f}_{-2}, \tilde{f}_{-1}, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots \rangle$. Tudi to zaporedje, ki ga lahko interpretiramo kot funkcijo $\tilde{f} : k \mapsto \tilde{f}_k$ iz $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{C}$, je očitno periodično s periodo n in zato natanko določeno z vrednostmi $\tilde{f}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Za poljubna $m, k \in \mathbb{Z}$ naj bo $\omega_{mk} = e^{\frac{2\pi i}{n}(m-k)}$. Očitno je ω_{mk} n-ti koren enote, zato je

$$0 \quad = \quad \omega_{mk}^n - 1 \quad = \quad (\omega_{mk} - 1)\,(\omega_{mk}^{n-1} + \omega_{mk}^{n-2} + \ldots + \omega_{mk} + 1) \quad = \quad (\omega_{mk} - 1)\sum_{j=0}^{n-1} \omega_{mk}^j.$$

Če $m \not\equiv k \pmod n$, je $\omega_{mk} \neq 1$ in mora biti $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_{mk}^j = 0$, če pa je $m = k \pmod n$, je $\omega_{mk} = 1$ ter $\sum_{j=0}^{n-1} \omega_{mk}^j = n$. Za poljuben $k \in \mathbb{Z}$ Izračunajmo

$$\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j\, e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} f_m\, e^{\frac{2\pi i}{n} mj}\, e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} = \sum_{m=0}^{n-1} f_m \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n}(m-k)j} = \sum_{m=0}^{n-1} f_m \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{mk}^j.$$

Za vse m, za katere je $m \not\equiv k \pmod n$, je vsota po j na desni strani zgornje enačbe 0, za $m = k \pmod n$ pa je n, zato je skupni rezultat $n f_{k \bmod n}$. Tako smo našli inverzno diskretno Fourierovo transformacijo

$$f_k \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_j\, e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \qquad (k \in \mathbb{Z}), \tag{3.11}$$

s katero preslikamo $\{\tilde{f}_k\}$ nazaj v $\{f_k\}$. Z enačbama (3.10) in (3.11) sta definirani preslikavi, ki ju simbolično zapišemo kot $\{\tilde{f}_k\} = \mathrm{DFT}\,\{f_k\}$ in $\{f_k\} = \mathrm{DFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k\}$, za kateri zaradi periodičnosti zadošča računanje le za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Naj bo $\{f_k\}$ za m zamaknjeno zaporedje $\{g_k\}$, torej $f_k = g_{k-m}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_k \quad &= \quad \sum_{j=0}^{n-1} f_j\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1} g_{j-m}\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \quad = \quad \sum_{l=-m}^{n-1-m} g_l\, e^{\frac{2\pi i}{n}(l+m)k} \quad = \\
&= \quad e^{\frac{2\pi i}{n} mk} \left(\sum_{l=-m}^{-1} g_l\, e^{\frac{2\pi i}{n} lk} \; + \sum_{l=0}^{n-1-m} g_l\, e^{\frac{2\pi i}{n} lk} \right) \quad = \\
&= \quad e^{\frac{2\pi i}{n} mk} \left(\sum_{l=n-m}^{n-1} g_l\, e^{\frac{2\pi i}{n} lk} \; + \sum_{l=0}^{n-1-m} g_l\, e^{\frac{2\pi i}{n} lk} \right) \quad = \\
&= \quad e^{\frac{2\pi i}{n} mk} \sum_{j=0}^{n-1} g_j\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \quad = \quad e^{\frac{2\pi i}{n} mk}\, \tilde{g}_k.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

V predzadnji vrstici zgornje enačbe smo v prvi vsoti meje seštevanja smeli premakniti za n zaradi periodičnosti seštevancev.

Naj bosta $\{f_k\}$ in $\{g_k\}$ poljubni neskončni kompleksni periodični zaporedji s periodo n. Definirajmo ciklično diskretno konvolucijo zaporedij $\{f_k\}$ in $\{g_k\}$ z enačbo

$$(f * g)_k \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1} f_j\, g_{k-j} \qquad (k \in \mathbb{Z}), \tag{3.13}$$

ki je natanko določena s $(f * g)_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Če je $\{h_k\} = \{(f * g)_k\}$, potem je

$$\tilde{h}_k \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1} (f * g)_j\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \quad = \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} f_m\, g_{j-m}\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} \quad = \quad \sum_{m=0}^{n-1} f_m \sum_{j=0}^{n-1} g_{j-m}\, e^{\frac{2\pi i}{n} jk}.$$

Vsota po j na desni strani zgornje enačbe je zaradi enačbe (3.12) enaka $e^{\frac{2\pi i}{n}mk}\,\tilde{g}_k$, tako da je

$$\tilde{h}_k \quad = \quad \sum_{m=0}^{n-1} f_m\, e^{\frac{2\pi i}{n}mk}\,\tilde{g}_k \quad = \quad \tilde{f}_k\,\tilde{g}_k.$$

Ugotovili smo, da diskretna Fourierova transformacija ciklično diskretno konvolucijo zaporedij preslika v zaporedje, katerega komponente so produkti istoležnih komponent transformacij obeh zaporedij. Zato ciklično diskretno konvolucijo zaporedij $\{f_k\}$ in $\{g_k\}$ lahko izračunamo po enačbi $\{(f * g)_k\} = \mathrm{DFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k\,\tilde{g}_k\}$.

Metoda za izračun agregatnih odškodnin, ki jo bomo opisali v nadaljevanju, temelji na diskretni Fourierovi transformaciji. Uporabna je v tistih primerih, ko je porazdelitev odškodnin podana z verjetnostno funkcijo $P(X = kh) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, kjer je h primerno izbrani korak. Zahtevano obliko verjetnostne funkcije dobimo npr. z metodo, opisano v razdelku 3.4, pri čemer je tukajšnji r za eno večji od tamkajšnjega.

Za verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, ki smo jo dobili s postopkom ekvidistantne diskretizacije, velja $\sum_{k=0}^{r-1} f_k = 1$, zato je $f_k = 0$ za $k \geq r$. Kot bomo videli kasneje, je pomembno, da računamo raje z ekvivalentno verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, kjer je $n = 2\,r$ in $f_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2}$. Na tako definirano verjetnostno funkcijo lahko gledamo kot na podzaporedje periodičnega zaporedja $\{f_k\} = \langle \ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots\rangle$ s periodo n, za katerega je $f_k = f_{k \bmod n}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$.

Naj bo Y od X neodvisna slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $g_k = P(Y = kh)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ki določa zaporedje $\{g_k\} = \langle \ldots, g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2, \ldots\rangle$ s periodo n, in $g_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2}$. Vse možne vrednosti slučajne spremenljivke $Z = X + Y$ so mnogokratniki koraka h, največja možna vrednost pa je $2\,(r-1)\,h = (n-2)\,h$. Zato je $P(Z = k\,h) = 0$ za $k \geq n-1$. Preostale verjetnosti izračunamo z diskretno konvolucijo

$$P(Z = k\,h) \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} f_j\, g_{k-j} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3.14}$$

Da enačba velja tudi za $k = n-1$, ko je $P(Z = k\,h) = 0$, smo zapisali zato, ker je $f_j = 0$ za $j \geq \frac{n}{2}$ in $g_{n-1-j} = 0$ za $j \leq \frac{n}{2} - 1$, tako da je vsota 0. Če na verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke Z gledamo kot na podzaporedje cikličnega zaporedja s periodo n, enačba (3.14) velja za vsak $k \in \mathbb{Z}$ in se od enačbe (3.13) razlikuje le po meji, do katere seštevamo. Trdimo, da sta v našem primeru, ko na verjetnostni funkciji f_k in g_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, gledamo kot na podzaporedji dolžine r, dopolnjeni z r ničlami do dolžine $n = 2\,r$, enačbi (3.13) in (3.14) ekvivalentni. V ta namen moramo dokazati, da je $\sum_{j=k+1}^{n-1} f_j\, g_{k-j} = 0$.

Če je $k \geq \frac{n}{2} - 1$, je $j \geq \frac{n}{2}$ in zato $f_j = 0$. Če je $k \leq \frac{n}{2} - 2$ in $j \geq \frac{n}{2}$, je $f_j = 0$. Če pa je $k \leq \frac{n}{2} - 2$ in $j \leq \frac{n}{2} - 1$, je $0 - (\frac{n}{2} - 1) \leq k - j \leq k - (k-1)$ oziroma $-\frac{n}{2} + 1 \leq k - j \leq -1$. Zaradi periodičnosti indeksom lahko prištejemo n in dobimo $\frac{n}{2} + 1 \leq (k - j) \bmod n \leq n - 1$, zaradi česar je $g_{k-j} = 0$. Vedno je $f_j\, g_{k-j} = 0$ in zato tudi $\sum_{j=k+1}^{n-1} f_j\, g_{k-j} = 0$.

Ugotovili smo, da v primeru, ko je izpolnjen pogoj $f_k = g_k = 0$ za $k \geq \frac{n}{2}$, verjetnostno funkcijo vsote $Z = X + Y$ namesto z diskretno konvolucijo lahko izračunamo tudi s ciklično diskretno konvolucijo. Zato lahko uporabimo enačbo

$$\{(f * g)_k\} \quad = \quad \mathrm{DFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k\,\tilde{g}_k\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Računanje diskretne Fourierove transformacije po enačbi (3.10) in inverzne Fourierove transformacije po enačbi (3.11) zahteva $O(n^2)$ operacij, kar pa se da zmanjšati. Enačbo (3.10) za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ preoblikujmo v

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j \, e^{\frac{2\pi i}{n} jk} = \sum_{j=0}^{r-1} f_{2j} \, e^{\frac{2\pi i}{n} 2jk} + \sum_{j=0}^{r-1} f_{2j+1} \, e^{\frac{2\pi i}{n}(2j+1)k} = \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} f_{2j} \, e^{\frac{2\pi i}{r} jk} + e^{\frac{2\pi i}{n} k} \sum_{j=0}^{r-1} f_{2j+1} \, e^{\frac{2\pi i}{r} jk} = \tilde{f}_k^S + e^{\frac{2\pi i}{n} k} \, \tilde{f}_k^L, \end{aligned} \tag{3.15}$$

kjer je $\{\tilde{f}_k^S\}$ diskretna Fourierova transformiranka zaporedja, ki vsebuje vse sode komponente zaporedja $\{f_k\}$, $\{\tilde{f}_k^L\}$ pa diskretna Fourierova transformiranka zaporedja, ki vsebuje vse lihe komponente zaporedja $\{f_k\}$.

Privzemimo, da je r, s tem pa tudi $n = 2\,r$, potenca števila 2, kar z dodajanjem ničel na koncu originalnega podzaporedja $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ in popravkom vrednosti r vedno lahko dosežemo. Prvi korak, s katerim smo iz enega zaporedja dolžine n dobili 2 zaporedji dolžine $r = \frac{n}{2}$, smo že naredili. Na drugem koraku za $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$ dobimo

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k^S &= \tilde{f}_k^{SS} + e^{\frac{2\pi i}{r} k} \, \tilde{f}_k^{SL}, \\ \tilde{f}_k^L &= \tilde{f}_k^{LS} + e^{\frac{2\pi i}{r} k} \, \tilde{f}_k^{LL}. \end{aligned}$$

Z razpolavljanjem nadaljujemo, dokler ne pridemo do n zaporedij dolžine 1, za katere je diskretna Fourierova transformacija identična preslikava. Pri vsakem razpolavljanju dobimo povezovalne enačbe, analogne enačbi (3.15), po katerih nato najprej sestavimo $\frac{n}{2}$ zaporedij dolžine 2, nato $\frac{n}{4}$ zaporedij dolžine 4 in tako naprej, dokler ne pridemo do $\tilde{f}_k^S$ in $\tilde{f}_k^L$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, iz katerih po enačbi (3.15) izračunamo $\tilde{f}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Na opisani način za izračun diskretne Fourierove transformiranke namesto prvotnih $O(n^2)$ zadošča $O(n \log_2 n)$ operacij. Za velike n je skicirani postopek neprimerno hitrejši od računanja po enačbi (3.10), zaradi česar je dobil ime hitra Fourierova transformacija. Uporablja se predvsem v procesiranju signalov in je po mnenju mnogih eden najpomembnejših algoritmov sploh. Tako npr. po reviji Computing in Science & Engineering sodi med 10 najpomembnejših algoritmov $20.$ stoletja (glej Rockmore, 2000).

S podrobnostmi algoritma, ki ga je mogoče opraviti v originalni kompleksni tabeli, v kateri je shranjen izhodiščni vektor $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \rangle$, se tu ne bomo ukvarjali, saj je zaradi svoje pomembnosti teoretično dobro obdelan, zaradi enostavnosti pa je v praksi tudi dovolj programskih implementacij. Tako je v (Press et al., 1992) cela paleta algoritmov, ki so prilagojeni posebnim primerom, kot je npr. naš, ko namesto kompleksnega transformiramo realen vektor. Odslej bomo namesto operatorja DFT uporabljali operator FFT (Fast Fourier Transform), pod pojmom karakteristična funkcija diskretne slučajne spremenljivke z zalogo vrednosti $\{0, h, 2h, \ldots, (n-1)\,h\}$ in verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, pa lahko razumemo tudi vektor $\langle \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_{n-1} \rangle$. Omenimo le še, da iz enačbe (3.10) lahko vidimo, da je operator FFT linearen v tem smislu, da za neskončni periodični zaporedji $\{a_k\}$ in $\{b_k\}$ kompleksnih števil s periodo n ter $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ velja $\mathrm{FFT}\,\{\alpha\,\{a_k\} + \beta\,\{b_k\}\} = \alpha\,\mathrm{FFT}\,\{a_k\} + \beta\,\mathrm{FFT}\,\{b_k\}$.

Naj bo N slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $P(N = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, in rodovno funkcijo $G_N(s)$. Naj bodo $X_1, X_2, X_3, \ldots$ od N in med seboj neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. Naj bo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Verjetnostno funkcijo $P(S = kh) = g_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, lahko izračunamo po enačbi (3.6), ki se v našem primeru glasi

$$g_k \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j \, f_k^{*j} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Če na zaporedje $\{g_k\}$ uporabimo operator FFT, dobimo

$$\mathrm{FFT}\,\{g_k\} \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j \,\mathrm{FFT}\,\{f_k^{*j}\} \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j \,\{\tilde{f}_k^{j}\} \quad = \quad \{G_N(\tilde{f}_k)\}$$

in od tu

$$\{g_k\} \quad = \quad \mathrm{FFT}^{-1}\,\{G_N(\tilde{f}_k)\}.$$

Pri računanju po zgornji enačbi o številu n nismo še nič rekli. Če je n premajhen, zaradi cikličnosti dobimo izkrivljene rezultate. Če bi računali verjetnostno funkcijo za $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ po enačbi $\{f_k^{*j}\} = \mathrm{DFT}^{-1}\,\{\tilde{f}_k^{j}\}$, bi morali podzaporedje $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{r-1}$ dopolniti z ničlami do dolžine n, ki je večja ali enaka jr in je potenca števila 2. V našem primeru j teče v neskončnost, zato bi morali analizirati velikosti elementov $p_j\,\tilde{f}_k^{j}$ oziroma hitrost konvergence neskončne vrste. Enostavneje in dovolj natančno pa je, če izračunamo $E[S]$ in σ_S ter z normalno aproksimacijo določimo tak $n = 2^m$, da bo $F_S(nh) \approx 1$.

S hitro Fourierovo transformacijo lahko zelo enostavno izračunamo porazdelitveno funkcijo agregata agregatnih odškodnin za posamezne zavarovalne vrste. Verjetnostne funkcije moramo diskretizirati z istim korakom h, za vsako od njih izračunati karakteristično funkcijo, dobljeno s hitro Fourierovo transformacijo, karakteristične funkcije po komponentah zmnožiti in izračunati inverzno hitro Fourierovo transformacijo.

Robertson (1992) podrobno opisuje uporabo hitre Fourierove transformacije za izračun agregatnih odškodnin, vključno s podrobno predstavitvijo algoritmov in obravnavo nezanesljivosti parametrov. Tako kot pri Heckman-Meyersovi metodi je v Robertsonovi metodi uporabljena odsekoma konstantna gostota verjetnosti, le da morajo biti odseki enako dolgi. Pri Heckman-Meyersovi metodi je razlog za delo z odsekoma konstantno gostoto verjetnosti enostaven izračun Fourierove transformiranke, Robertson pa meni, da z odsekoma konstantno gostoto verjetnosti in vektorji dolžine n, ki jih je treba transformirati s FFT, dosežemo večjo natančnost kot z diskretno porazdelitvijo in vektorji dolžine $2\,n$. V dodatne podrobnosti, ki algoritem zapletejo, prostorsko in časovno kompleksnost pa praktično zmanjšajo kvečjemu za konstanten faktor, se tu ne bomo spuščali.

3.7 Izračuni na osnovi rekurzije

Naj bo N slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $P(N = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, in $X_1, X_2, X_3, \ldots$ od N in med seboj neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Rekurzivne metode za izračun agregatnih odškodnin zahtevajo, da je porazdelitev odškodnin podana z verjetnostno funkcijo $P(X_1 = kh) = f_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r$, kjer je h primerno izbrani korak. Zahtevano obliko verjetnostne funkcije dobimo npr. z metodo, opisano v razdelku 3.4.

Naj bo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in $P(S = kh) = g_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, njena neznana verjetnostna funkcija, ki jo bomo izračunali rekurzivno. Omejili se bomo le na Panjerjevo rekurzijo in na njej temelječo Waldmannovo rekurzijo, ki sta primerni le v primeru, ko je slučajna spremenljivka N porazdeljena po Poissonovi, negativni binomski ali binomski porazdelitvi, ki so obravnavane v prilogi P2. Sicer pa so rekurzivni izračuni možni tudi za precej drugih verjetnostnih funkcij slučajne spremenljivke N (glej npr. Sundt, Jewell, 1981; Willmot, 1988; Sundt, 1992; Hesselager, 1994; Wang, 1994).

3.7.1 Panjerjeva rekurzija

Izhodišče za rekurzivno računanje verjetnostne funkcije slučajne spremenljivke S je dejstvo, da verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke N, ki je porazdeljena Poissonovo, negativno binomsko ali binomsko, iz znane vrednosti p_0 lahko izračunamo rekurzivno po enačbi

$$p_n \;=\; \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3.16}$$

kjer sta a in b konstanti. Hitro se lahko prepričamo, da je $a = 0$ in $b = \lambda$, če je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $a = q$ in $b = (\alpha - 1)\, q$, če je $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$ in $q = 1 - p$, ter $a = -\frac{p}{q}$ in $b = \frac{(n+1)\,p}{q}$, če je $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Poleg naštetih treh možnosti izpolni enačbo (3.16) le še trivialna porazdelitev $p_0 = 1$, ki ji ustrezata $a = b = 0$ (Sundt, Jewell, 1981, str. 128). Tako je Panjerjeva rekurzivna metoda, predstavljena v (Panjer, 1981) oziroma za poseben primer v (Panjer, 1980; Bühlmann, 1980), uporabna le za računanje agregatnih odškodnin, ki so porazdeljene sestavljeno Poissonovo, sestavljeno negativno binomsko ali sestavljeno binomsko.

Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Ker so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene, je zaradi simetrije $E[X_1|S_n = kh] = E[X_2|S_n = kh] = \ldots = E[X_n|S_n = kh] = \frac{kh}{n}$. Po drugi strani je

$$\frac{kh}{n} = E[X_1|S_n = kh] = \frac{\sum_{j=0}^{k} jh\, P[X_1 = jh]\, P[S_{n-1} = (k-j)\,h]}{P[S_n = kh]} = \frac{\sum_{j=0}^{k} jh\, f_j\, f_{k-j}^{*(n-1)}}{f_k^{*n}}$$

in od tu

$$f_k^{*n} \;=\; \frac{n}{k} \sum_{j=1}^{k} j\, f_{k-j}^{*(n-1)}\, f_j. \tag{3.17}$$

Z upoštevanjem enačbe (3.6) in (3.16) dobimo

$$g_k \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, f_k^{*n} \;=\; p_0\, f_k^{*0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\, f_k^{*n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

od tu pa z upoštevanjem (3.5a), (3.5b) in (3.17) za $k > 0$

$$
\begin{aligned}
g_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\, f_k^{*n} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a\, p_{n-1} \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}^{*(n-1)}\, f_j + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{k}\, p_{n-1} \sum_{j=1}^{k} j\, f_{k-j}^{*(n-1)}\, f_j = \\
&= a\, f_0 \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\, f_k^{*(n-1)} + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{j\, b}{k}\right) f_j \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\, f_{k-j}^{*(n-1)} = \\
&= a\, f_0\, g_k + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{j\, b}{k}\right) f_j\, g_{k-j}.
\end{aligned}
$$

Od tu dobimo Panjerjevo rekurzijsko enačbo

$$
g_k = \frac{1}{1 - a\, f_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{j\, b}{k}\right) f_j\, g_{k-j} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.18}
$$

Začetne vrednosti izračunamo iz rodovne funkcije. Tako kot je $G_N(0) = p_0$ in $G_{X_1}(0) = f_0$, je zaradi enačbe (2.1) $g_0 = G_S(0) = G_N(G_{X_1}(0)) = G_N(f_0)$. Zato je

$$
g_0 = \begin{cases}
e^{\lambda(f_0 - 1)} & \text{za } N \sim \mathrm{Po}(\lambda) \qquad (3.19a) \\[2ex]
\left(\dfrac{p}{1 - q\, f_0}\right)^{\alpha} & \text{za } N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p) \qquad (3.19b) \\[2ex]
(p\, f_0 + q)^n & \text{za } N \sim \mathrm{Bin}(n, p) \qquad (3.19c)
\end{cases}
$$

V primeru, ko je $f_0 = 0$, se zgornja enačba poenostavi v $g_0 = p_0$.

Če želimo izračunati g_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, z dobro organizacijo dela po enačbi (3.18), ko konstanto pred vsoto izračunamo vnaprej, prav tako pa $\frac{b}{k}$ pri danem k, za poljuben k zadošča $3\,k + 2$ množenj (sem štejemo tudi deljenja), za vse k skupaj pa $\frac{3\,m\,(m+1)}{2} + 2\,m + 2$ oziroma $O(m^2)$ množenj. To pa je v primerjavi z $O(m^3)$ množenji, kolikor jih potrebujemo za izračun po enačbi (3.6), za velike m bistveno manj. Če upoštevamo tudi konstanto $\frac{3}{2}$ pred m^2 oziroma $\frac{1}{2}$ pred m^3, je za velike m število množenj za Panjerjevo rekurzijo enako številu množenj, ki je potrebno za izračun po enačbi (3.6), pomnoženo s $\frac{3}{m}$. Pri $m = 1000$ to pomeni le $0{,}3$ odstotka časa, ki je potreben za izračun po enačbi (3.6).

Če je $f_k = 0$ za $k > r$, potem je v enačbi (3.18) dovolj, če j teče od 1 do $\min\{k, r\}$. Podrobnejša analiza odkrije, da je potrebnih $m\,(3\,r + 2) - \frac{3}{2}\,r\,(r - 1) + 2$ množenj, kar za $m \geq r$ pomeni $O(m\,r)$ množenj. Za velike m tudi v tem primeru med številom množenj za izračun po enačbi (3.18) in (3.6) velja isto razmerje kot prej. Poudarimo, da smo za izračun po enačbi (3.6) obakrat upoštevali ugodnejšo možnost, ko je $f_0 = 0$, saj je pri $f_0 > 0$ za teoretičen izračun potrebnih neskončno operacij. Panjerjeva rekurzija v tem pogledu ni občutljiva, saj z vnaprejšnjim védenjem, da je $f_0 = 0$, ne prihranimo mnogo.

Panjerjeva rekurzija je v praksi zelo pomembna, zato si oglejmo še nekaj tehničnih podrobnosti. Prvo in zelo pomembno vprašanje, kadar računamo z rekurzijskimi enačbami, je vprašanje širjenja oziroma akumuliranja zaokrožitvenih napak[12]. Ta tematika je podrobno obdelana v (Panjer, Wang, 1993) in v (Panjer, Wang, 1995), kjer je obdelana tudi ena od posplošitev Panjerjeve rekurzije. Glavna ugotovitev je, da je izračun po enačbi (3.18) za sestavljeno Poissonovo in negativno binomsko porazdelitev strogo stabilen, za sestavljeno binomsko porazdelitev pa je nestabilen. Stroga stabilnost pomeni, da relativna napaka s k raste kvečjemu linearno, pri tem pa je koeficient rasti največ 1. Če relativna napaka s k raste linearno, vendar s koeficientom, večjim od 1, govorimo o stabilnosti, če pa raste hitreje kot linearno, govorimo o nestabilnosti. Praktična uporaba stroge stabilnosti je npr. naslednja: če smo pri diskretizaciji porazdelitvene funkcije odškodnin prvotno izbrali prevelik korak h oziroma premajhen r, lahko korak nadomestimo s korakom $\frac{h}{10}$ in r z $10\,r$. S tem z 10 pomnožimo tudi m, do katerega bomo računali, število operacij pa z 10^2. Povečajo se tudi relativne napake rezultatov, vendar največ za faktor 10, kar lahko izravnamo že s tem, da računamo na eno decimalno mesto več. S tem povezan in praktično uporaben je tudi rezultat, da je pri računanju s plavajočo vejico na d decimalnih mest relativna napaka izračunanega g_k manjša od $10^{-\eta(k)}$, kjer je

$$\eta(k) \quad \geq \quad \begin{cases} d \;+\; [\log_{10} 2 \;-\; \log_{10}(k+1)], & \text{če zaokrožujemo,} \\ d \;+\; [-\log_{10}(k+1)], & \text{če režemo.} \end{cases}$$

Če zaokrožujemo, lahko z 99-odstotno verjetnostjo pričakujemo (Panjer, Wang, 1993, str. 248), da bo

$$\eta(k) \quad \geq \quad d \;+\; \left[\log_{10}\frac{4}{3} \;-\; \frac{1}{2}\log_{10}(k+1)\right].$$

Če bi lahko računali do $m = 10^9$, kar bi v skrajnem primeru zahtevalo praktično nedosegljivih $1{,}5 \cdot 10^{18}$ množenj, bi pri računanju z relativno natančnostjo 10^{-16} še vedno dobili rezultate z relativno natančnostjo 10^{-7}. Zato sestavljena Poissonova in sestavljena negativna binomska porazdelitev s stališča numerične stabilnosti nista problematični.

Izračun za sestavljeno binomsko porazdelitev je nestabilen. Mogoče je, da relativna napaka s k raste hitreje kot linearno, ni pa nujno. To je posledica dejstva, da sta a in b različno predznačena, zaradi česar se v enačbi (3.18) lahko pojavljajo negativni in pozitivni sumandi. Če se med seboj skoraj izničijo, absolutne zaokrožitvene napake pa se kopičijo, lahko pride do velikih relativnih napak in nesmiselnih rezultatov. Večkrat se izkaže, da iz nestabilne rekurzije dobimo stabilno, če obrnemo smer računanja. V našem primeru je to mogoče, če delamo z verjetnostno funkcijo f_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r$. Ker je $f_k = 0$ za $k > r$, zadošča, če vsoto v enačbi (3.18) računamo do $\min\{k, r\}$, kar lahko poenostavimo v

$$g_k \quad = \quad \frac{1}{1 \;-\; a\,f_0} \sum_{j=1}^{r} \left(a \;+\; \frac{j\,b}{k}\right) f_j\, g_{k-j} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3.20}$$

če definiramo še $g_{-(r-1)} = g_{-(r-2)} = \;\ldots\; = g_{-1} = 0$. Ko iz zgornje enačbe izrazimo člen g_{k-r}, ki ustreza indeksu $j = r$, v preostali vsoti od 1 do $r-1$ indeks j zamenjamo z $r - j$, nato pa še

[12] Praktične probleme numerične narave obravnavamo pri rekurzijskih metodah le zato, ker nanje zelo hitro naletimo. Tovrstni problemi niso v jedru obravnavane problematike, zato jih drugje ne omenjamo, kar pa še ne pomeni, da jih ni.

k zamenjamo s $k + r$, dobimo

$$g_k = \frac{(1 - a\,f_0)\,g_{k+r} - \sum_{j=1}^{r-1}\left(a + \frac{(r-j)\,b}{k+r}\right) f_{r-j}\,g_{k+j}}{\left(a + \frac{r\,b}{k+r}\right) f_r}. \tag{3.21}$$

Za izračun po zgornji enačbi potrebujemo še r začetnih vrednosti, ki jih za sestavljeno binomsko porazdelitev enostavno izračunamo. Če je $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, je največja možna agregatna odškodnina $n\,r\,h$, kadar nastane n največjih škod. Zato vzemimo $m = n\,r$, pa je $g_m = p^n\,f_m^n$ in $g_{m+j} = 0$ za $j = 1, 2, 3, \ldots r-1$. Sedaj lahko rekurzivno računamo elemente g_k za $k = m-1, m-2, \ldots, 0$. Z računanjem po enačbi (3.20) dobimo strogo stabilne rezultate za k na intervalu $[0, n+1]$ in nestabilne na intervalu $[m-n-1, m]$, z računanjem po enačbi (3.21) pa obratno. Če je $r > 2$, za vmesni interval $[n+2, m-n-2]$ vnaprej ne moremo nič reči z gotovostjo. Če dvomimo o pravilnosti izračuna, ker npr. $\sum_{k=0}^{m} g_k$ preveč odstopa od 1, je najbolje, če računamo po obeh enačbah in vrednosti na kritičnem intervalu med seboj primerjamo. Če so razlike prevelike, moramo povečati število decimalnih mest, s katerim računamo.

Računanje verjetnostne funkcije agregatnih odškodnin S po enačbi (3.18) oziroma (3.20) je učinkovito. Lahko je celo hitrejše od računanja s hitro Fourierovo transformacijo, kar pa je odvisno od razmerja med m in r, saj primerjamo metodi s časovno kompleksnostjo $O(m\,r)$ in $O(m \log_2 m)$. Ker ni treba delati s kompleksno aritmetiko, je videti tudi elegantno in enostavno. Vendar v praksi lahko povzroča zelo velike težave, ki jih brez poznavanja aritmetike v plavajoči vejici težko razumemo in še teže odpravimo. Tako ni nič neobičajnega, če je npr. za Poissonovo porazdelitev števila škod $E[N] = \lambda = 15000$. Če je $f_0 = 0$, je po enačbi (3.19a) $g_0 = e^{-15000}$, kar je reda velikosti 10^{-6514}. To pa je za večino standardne programske opreme tako majhno število, da bo prišlo do t. i. pogoja underflow. Program se bo prekinil ali pa bo g_0 aproksimiral z 0. V tem primeru je iz enačbe (3.18) jasno, da bo $g_k = 0$ za vsak k. Opisani problem, ki v praksi zelo hitro nastopi, lahko obidemo tako, da začnemo s fiktivnim $\tilde{g}_0$, ki je ravno dovolj velik, da ga program ne postavi na 0, nato pa po enačbi (3.18) izračunamo $\tilde{g}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Pri tem se pogosto zgodi, da pride do prekoračitve obsega oziroma t. i. pogoja overflow, kar praviloma pomeni prekinitev izvajanja programa. Razmerja $\frac{g_k}{g_0} = \frac{\tilde{g}_k}{\tilde{g}_0}$ so v okolici modusa, kjer dosežemo maksimum, pogosto pa že mnogo prej, večja od razmerja med največjim in najmanjšim pozitivnim številom, ki ju program še lahko zapiše. To razmerje npr. pri Turbo Pascalu 6.0 za tip double znaša $\frac{1{,}7\,10^{308}}{5{,}0\,10^{-324}} = 3,4 \cdot 10^{634}$, za tip extended pa $\frac{1{,}1\,10^{4932}}{3{,}4\,10^{-4932}} \approx 3,2 \cdot 10^{9863}$, kar je ogromno, a še vedno premalo. Problemu s prekoračitvijo obsega se lahko izognemo, če že izračunane $\tilde{g}_k$ občasno normiramo. Takoj ko $\tilde{g}_k$ preseže primerno izbrani y_{max}, vse že izračunane $\tilde{g}_k$ delimo z y_{max}. V tem primeru moramo voditi evidenco, kolikokrat smo že delili z y_{max}, da na koncu normiramo le še za toliko, kot zahteva enačba $g_k = \tilde{g}_k / \frac{\tilde{g}_0}{g_0}$. Do prekoračitve obsega lahko pride tudi pri zapisu $\frac{\tilde{g}_0}{g_0}$. Tudi zato si moramo pri normiranju večkrat pomagati z logaritmi. Če je $\log g_k$ premajhen, oziroma če pri normiranju pride do pogoja underflow, brez škode privzamemo $g_k = 0$.

Težavam s pogojema underflow in overflow se večkrat lahko izognemo, če nas ne zanima celoten interval možnih agregatnih odškodnin. V takem primeru zadošča, če začnemo računati toliko levo od $E[S]$, da so ustrezne vrednosti g_k praktično zanemarljive, vključno z njihovim seštevkom. S takim postopkom tudi prihranimo veliko računskih operacij. Za primer izhajajmo iz dejstva, da bi z uporabo normalne aproksimacijo dobili $P(S \leq E[S] - 6\,\sigma_S) \approx 10^{-9}$, zaradi običajne pozitivne asimetričnosti pa pričakujemo, da je dejanska verjetnost za agregatne odškodnine, manjše od $E[S] - 6\,\sigma_S$, še manjša od 10^{-9}. Naj bo $j = \left[\frac{E[S]-6\,\sigma_S}{h}\right]$. Natančnih začetnih vrednosti (oziroma razmerij med njimi) ne poznamo, vendar se običajno izkaže, da lahko začnemo z $g_j = 1$ in $g_{j-1} = g_{j-2} = \ldots = g_{j-(r-1)} = 0$, nato pa po enačbi (3.20) izračunamo g_k za $k = j+1, j+2, j+3, \ldots$ Ustavimo se, ko je $g_k < \epsilon$ za primerno izbrani $\epsilon \ll 1$. Na koncu le še vse izračunane vrednosti normiramo z deljenjem z njihovim seštevkom. Če pa nas skrbi, da odmik za $6\,\sigma_S$ levo od $E[S]$ ni dovolj velik, lahko izračun ponovimo z začetnimi vrednostmi $g_j = g_{j-1} = g_{j-2} = \ldots = g_{j-(r-1)} = \frac{1}{r}$ in primerjamo rezultate. Metoda očitno deluje zato, ker začetne napake izzvenijo.

V praksi pri uporabi Panjerjeve rekurzije pride do napake metode, ki pa je posledica enakomerne diskretizacije izhodiščne gostote verjetnosti. Velikost napake je odvisna od načina in koraka diskretizacije. Če so izpolnjeni določeni pogoji, lahko natančnost izboljšamo podobno, kot to storimo z Rombergovo metodo pri numeričnem integriranju. Tako lahko napako, ki je pri danem $h = \frac{x_{max}}{r}$ reda velikosti $O(\frac{1}{r^2})$, zmanjšamo na $O(\frac{1}{r^4})$, za kar pa moramo Panjerjevo rekurzijo ponoviti s korakom $\frac{h}{2}$ in rezultate obeh rekurzijskih postopkov primerno kombinirati (glej Grübel, Hermesmeier, 2000).

3.7.2 Waldmannova rekurzija

Tehnične težave, na katere naletimo pri računanju po Panjerjevi rekurzijski enačbi, izvirajo predvsem iz dejstva, da so posamezne vrednosti g_k zelo blizu ničle, razmerja med njimi pa so lahko ogromna. Delno si težave olajšamo, če računamo z rekurzijsko enačbo za porazdelitveno funkcijo, ki jo bomo izpeljali v nadaljevanju. Računali bomo predvsem z rodovnimi funkcijami $G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k$, $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, s^k$ in $G_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\, s^k$.

Naj bo $G_k = \sum_{j=0}^{k} g_j$ porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke S ter $\hat{G}_k = \sum_{j=0}^{k} G_j$, $C(s) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k\, s^k$ in $\hat{C}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_k\, s^k$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
C(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k\, s^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} g_j\, s^k = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} g_j\, s^k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j\, s^j \sum_{k=j}^{\infty} s^{k-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} g_j\, s^j \sum_{k=0}^{\infty} s^k = \sum_{j=0}^{\infty} g_j\, s^j\, \frac{1}{1-s} = \frac{G_S(s)}{1-s}\,.
\end{aligned}
$$

Od tu z upoštevanjem enačbe (2.1) dobimo

$$
(1-s)\, C(s) = G_S(s) = G_N(G_X(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, G_X(s)^n. \tag{3.22}
$$

Iz definicij G_k, $\hat{G}_k$, $C(s)$ in $\hat{C}(s)$ vidimo, da sta $\hat{C}(s)$ in $C(s)$ v takem razmerju kot $C(s)$ in $G_S(s)$, zato z analogno izpeljavo kot zgoraj dobimo

$$
\hat{C}(s) = \frac{C(s)}{1-s}\,. \tag{3.23}
$$

Enačbo (3.22) na obeh straneh odvajajmo

$$
\begin{aligned}
(1-s)\,C'(s)\;-\;C(s) \quad &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\,p_n\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s) \quad = \\
= \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n\,\left(a\;+\;\frac{b}{n}\right)\,p_{n-1}\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s) \quad = \\
= \quad & a\,\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_{n-1}\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s)\;+\;b\,\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s) \quad = \\
= \quad & a\,\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,p_{n-1}\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s)\;+\;(a+b)\,\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s) \quad = \\
= \quad & a\,\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n\,G_X(s)^n\,G_X'(s)\;+\;(a+b)\sum_{n=0}^{\infty} p_n\,G_X(s)^n\,G_X'(s) \quad = \\
= \quad & a\,G_X(s)\,\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n\,G_X(s)^{n-1}\,G_X'(s)\;+\;(a+b)\,G_X'(s)\sum_{n=0}^{\infty} p_n\,G_X(s)^n \quad = \\
= \quad & a\,G_X(s)\,((1-s)\,C'(s)\;-\;C(s))\;+\;(a+b)\,G_X'(s)\,(1-s)\,C(s).
\end{aligned}
$$

Ko enačbo na obeh straneh pomnožimo s $\frac{s}{1-s}$ in upoštevamo (3.23), dobimo

$$
s\,C'(s) \quad = \quad s\,\hat{C}(s)\;+\;a\,G_X(s)\,(s\,C'(s)\;-\;s\,\hat{C}(s))\;+\;(a+b)\,s\,G_X'(s)\,C(s). \tag{3.24}
$$

Izraze, ki nastopajo v zgornji enačbi, zapišimo kot potenčne vrste

$$
\begin{aligned}
s\,C'(s) \quad &= \quad s\left(\sum_{k=0}^{\infty} G_k\,s^k\right)' \quad = \quad s\sum_{k=0}^{\infty} k\,G_k\,s^{k-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} k\,G_k\,s^k, \\
s\,G_X'(s) \quad &= \quad s\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,s^k\right)' \quad = \quad s\sum_{k=0}^{\infty} k\,f_k\,s^{k-1} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} k\,f_k\,s^k, \\
s\,\hat{C}(s) \quad &= \quad s\sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_k\,s^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_k\,s^{k+1}, \\
G_X(s)\,s\,C'(s) \quad &= \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,s^k\right)\,\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\,G_k\,s^k\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\,(k-j)\,G_{k-j}\right)s^k, \\
G_X(s)\,s\,\hat{C}(s) \quad &= \quad s\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,s^k\right)\,\left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_k\,s^k\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\,\hat{G}_{k-j}\right)s^{k+1}, \\
s\,G_X'(s)\,C(s) \quad &= \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\,f_k\,s^k\right)\,\left(\sum_{k=0}^{\infty} G_k\,s^k\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} j\,f_j\,G_{k-j}\right)s^k.
\end{aligned}
$$

Če dobljene pomožne izraze vstavimo v enačbo (3.24), dobimo

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k\,G_k\,s^k \quad = \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_k\,s^{k+1}\;+\;a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\,(k-j)\,G_{k-j}\right)s^k\;- \\
& -\;a\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} f_j\,\hat{G}_{k-j}\right)s^{k+1}\;+\;(a+b)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} j\,f_j\,G_{k-j}\right)s^k.
\end{aligned}
$$

Na obeh straneh primerjajmo člene pri s^k. Za $k = 0$ obakrat dobimo 0, za $k = 1, 2, 3, \ldots$ pa

$$k\,G_k \;=\; \hat{G}_{k-1} \,+\, a\sum_{j=0}^{k}(k-j)\,f_j\,G_{k-j} \,-\, a\sum_{j=0}^{k-1} f_j\,\hat{G}_{k-1-j} \,+\, (a+b)\sum_{j=0}^{k} j\,f_j\,G_{k-j}. \tag{3.25}$$

Naj bo $r_0 = 0$ in $r_k = \hat{G}_{k-1}$ za $k = 1, 2, 3, \ldots$ Iz $r_k = \sum_{j=0}^{k-1} G_j = \sum_{j=0}^{k-2} G_j + G_{k-1} = r_{k-1} + G_{k-1}$ za $k \geq 2$ in $r_1 = \hat{G}_0 = G_0 = r_0 + G_0$ sledi $r_k = r_{k-1} + G_{k-1}$ za $k = 1, 2, 3, \ldots$ Naj bo $q_k = k\,G_k - r_k$ oziroma $G_k = \frac{r_k + q_k}{k}$ za $k = 1, 2, 3, \ldots$ Sedaj enačbo (3.25) lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned}
q_k \;&=\; a\left(\sum_{j=0}^{k}(k-j)\,f_j\,G_{k-j} - \sum_{j=0}^{k-1} f_j\,\hat{G}_{k-j-1}\right) \,+\, (a+b)\sum_{j=0}^{k} j\,f_j\,G_{k-j} \;=\\
&=\; a\sum_{j=0}^{k-1} f_j\,((k-j)\,G_{k-j} \,-\, r_{k-j}) \,+\, (a+b)\sum_{j=1}^{k} j\,f_j\,G_{k-j} \;=\\
&=\; a\sum_{j=0}^{k-1} f_j\,q_{k-j} \,+\, (a+b)\sum_{j=1}^{k} j\,f_j\,G_{k-j} \;=\\
&=\; a\,f_0\,q_k \,+\, a\sum_{j=1}^{k-1} f_j\,q_{k-j} \,+\, (a+b)\sum_{j=1}^{k} j\,f_j\,G_{k-j} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}$$

Vse dosedanje ugotovitve lahko strnemo v naslednji rekurzivni postopek: $r_0 = 0$ in $G_0 = g_0$, kjer je g_0 definiran z enačbami (3.19a), (3.19b) in (3.19c). Za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$r_k \;=\; r_{k-1} \,+\, G_{k-1}, \tag{3.26a}$$

$$q_k \;=\; \frac{1}{1 \,-\, a\,f_0}\left(a\sum_{j=1}^{k-1} f_j\,q_{k-j} \,+\, (a+b)\sum_{j=1}^{k} j\,f_j\,G_{k-j}\right), \tag{3.26b}$$

$$G_k \;=\; \frac{r_k \,+\, q_k}{k}. \tag{3.26c}$$

Če želimo izračunati G_k za $k \leq m$, v splošnem primeru potrebujemo $O(m^2)$ množenj. Če pa je $f_k = 0$ za $k > r$, je v enačbi (3.26b) dovolj, da j teče od 1 do $\min\{k-1, r\}$ oziroma do $\min\{k, r\}$. V tem primeru za $m \geq r$ zadošča $O(m\,r)$ množenj.

V enačbi (3.26b) za sestavljeno binomsko porazdelitev zaradi $a < 0$ in $a + b > 0$ nastopajo pozitivni in negativni členi, za sestavljeno Poissonovo in sestavljeno negativno binomsko porazdelitev pa samo pozitivni, saj je $a \geq 0$ in $a + b > 0$. Izračun porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke S po enačbah (3.26a), (3.26b) in (3.26c) je za sestavljeno Poissonovo in sestavljeno negativno binomsko porazdelitev strogo stabilen. Waldmann, ki je izpeljal enačbe (3.26a), (3.26b) in (3.26c) (Waldmann, 1996, str. 215), vendar le za primer, ko je $f_0 = 0$, ugotavlja, da se v praksi izkaže, da tudi s sestavljeno binomsko porazdelitvijo ni težav s stabilnostjo. Ker neposredno računamo porazdelitveno funkcijo, stabilnost postopka lahko enostavno nadziramo. Iz definicije G_k sledi, da je $0 \leq G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots$ Očitno je tudi $0 = r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots$ Ker je $q_1 = G_1 - r_1 = G_1 - G_0 \geq 0$ in je za $k \geq 2$

$$\begin{aligned}
q_k \;&=\; k\,G_k \,-\, r_k \;=\; k\,G_k \,-\, (r_{k-1} \,+\, G_{k-1}) \;=\\
&=\; k\,G_k \,-\, ((k-1)\,G_{k-1} \,-\, q_{k-1} \,+\, G_{k-1}) \;=\\
&=\; k\,(G_k \,-\, G_{k-1}) \,+\, q_{k-1} \;\geq\; q_{k-1},
\end{aligned}$$

je $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \ldots$ Ker je $G_k \leq 1$ za vsak k, je tudi rast r_k in q_k umirjena, saj je $r_k + q_k \leq k$.

Pri premajhnem g_0 se tudi tu pogoju underflow izognemo, če začnemo računati s fiktivnim $\tilde{g}_0$, ki je ravno dovolj majhen, da ga program ne postavi na 0. Če pri nekem k z G_k presežemo neko dovolj veliko mejo, zaradi česar obstaja nevarnost, da bi prišlo do prekoračitve obsega, vse do tedaj izračunane G_k normiramo z deljenjem z $\frac{\tilde{g}_0}{g_0}$, sicer pa to storimo na koncu. Do prekoračitve obsega lahko pride tudi pri zapisu $\frac{\tilde{g}_0}{g_0}$. Zato si moramo pri normiranju večkrat pomagati z logaritmi. Če je $\log G_k$ premajhen, oziroma če pri normiranju pride do pogoja underflow, brez škode privzamemo $G_k = 0$. Učinkovita realizacija teh napotkov je za primer, ko je $f_0 = 0$, obdelana v (Waldmann, 1996, str. 218), brez težav pa se jo da prirediti tudi za primer, ko je $f_0 > 0$.

Alternativna možnost za izognitev pogoju underflow je rekurzivno računanje vrednosti H_k, kjer je $H_k = \frac{G_k - G_0}{G_0}$, k = 0,1,2,... Očitno je $H_0 = 0$. Naj bo še $\tilde{s}_0 = 0$ in $\tilde{r}_0 = 0$. Tedaj za $k = 1, 2, 3, \ldots$ velja

$$\tilde{s}_k = \tilde{s}_{k-1} + k\, f_k, \tag{3.27a}$$

$$\tilde{r}_k = \tilde{r}_{k-1} + H_{k-1}, \tag{3.27b}$$

$$\tilde{q}_k = \frac{1}{1 - a\, f_0} \left((a+b)\tilde{s}_k + a \sum_{j=1}^{k-1} f_j\, \tilde{q}_{k-j} + (a+b) \sum_{j=1}^{k-1} j\, f_j\, H_{k-j} \right), \tag{3.27c}$$

$$H_k = \frac{\tilde{r}_k + \tilde{q}_k}{k}. \tag{3.27d}$$

Zgornje enačbe navajamo brez izpeljave oziroma dokaza, ki je enostaven in analogen dokazu iz (Waldmann, 1996, str. 217) za poseben primer, ko je $f_0 = 0$. Opozorimo le še na dejstvo, da je $\lim_{k\to\infty} H_k = \frac{1-g_0}{g_0}$. Če je g_0 tako majhen, da povzroči pogoj underflow, bo zelo verjetno za dovolj velike k pri izračunu H_k prišlo do prekoračitve obsega oziroma pogoja overflow. Zato moramo pri izračunu po enačbah (3.27a) do (3.27d) pri dovolj velikem H_k preiti na izračun po enačbah (3.26a) do (3.26c). Za prehod upoštevamo zveze $G_k = g_0\,(1 + H_k)$, $r_k = g_0\,(k + \tilde{r}_k)$ in $q_k = g_0\,\tilde{q}_k$.

Za poseben primer, ko je $f_0 = 0$, je Waldmann (1996, str. 218) izpeljal tudi rekurzivno enačbo za $\tilde{H}_k$, kjer je $\tilde{H}_k = H_k\, e^{-(\alpha+\beta k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Če sta konstanti α in $\beta \geq 0$ primerno izbrani, lahko $\tilde{H}_k$ računamo brez skrbi, da bi prišlo do prekoračitve obsega. Rekurzijo, ki je tu ne navajamo, se da brez težav posplošiti za primer, ko je $f_0 > 0$.

3.8 Izračuni na osnovi simulacije

Z metodo simulacije vsaj načeloma lahko razmeroma enostavno izračunamo letne kosmate in čiste agregatne odškodnine na različnih nivojih, vključno z najvišjim. Ustrezni postopki so preprosti, zato pa so pri velikem portfelju lahko dolgotrajni, kar je njihova največja slabost. V nadaljevanju si najprej oglejmo, kako naključno simuliramo število in višino odškodnin, nato pa še dva primera konkretnih algoritmov.

3.8.1 Generiranje ustrezno porazdeljenih naključnih števil

Ključni korak obeh v nadaljevanju predstavljenih algoritmov je tak naključni izbor števila in višine odškodnin, ki upošteva verjetnostno oziroma porazdelitveno funkcijo ustreznih slučajnih spremenljivk. Za tovrstna opravila kot osnovno orodje potrebujemo generator naključnih števil, ki so enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1)$. Naključnih števil ne smemo generirati z naključno izbranimi metodami (Knuth, 1981, str. 5), zato generatorji naključnih števil običajno iz neke začetne vrednosti (semena) po natanko določenem postopku generirajo zaporedje psevdonaključnih števil. Tako dobljena števila sicer niso naključna, vendar jih z različnimi statističnimi testi ne moremo razločiti od dejansko naključnih števil, če je le generator dober. Med teste, s katerimi presojamo kvaliteto generatorjev naključnih števil, sodita tudi χ^2-test in test Kolmogorov-Smirnova, pa še mnogi drugi, ki so podrobno obdelani npr. v (Knuth, 1981).

Čeprav se sliši protislovno, je pomembna lepa lastnost psevdonaključnih števil, ki jih v nadaljevanju ne bomo več razlikovali od naključnih števil, prav njihova determinističnost. Če z istim semenom simulacijo ponavljamo, vedno dobimo iste rezultate. To je v praksi zelo pomembno v fazi ustvarjanja ali spreminjanja simulacijskega postopka, ker z gotovostjo vemo, da morebitne razlike v rezultatih niso posledica naključja. Zato je preverjanje pravilnosti delovanja simulacijskega postopka in odpravljanje morebitnih napak zelo olajšano.

Mnogokrat so v programskih jezikih oziroma paketih vgrajeni nekvalitetni generatorji naključnih števil, pri katerih se cikel naključnih števil začne prehitro ponavljati ali pa ima vzorec kakšne druge pomanjkljivosti. Zato je za zaupanje v rezultate simulacije potrebno preveriti, ali je bil uporabljen kvaliteten generator naključnih števil. Za simulacije, navedene v nadaljevanju razprave, smo uporabili program Ran3 (glej Press et al., 1992, str. 221), prirejen za delo s celoštevilskimi spremenljivkami tipa longint, ki za slučajno spremenljivko U s porazdelitveno funkcijo

$$F_U(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0 \\ x & \text{za } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{za } x > 1 \end{cases}$$

kot naključna števila z intervala $[0, 1)$ vrača mnogokratnike števila 10^{-9}.

Če znamo naključno izbrati vrednost slučajne spremenljivke U, je do naključno izbrane vrednosti zvezne slučajne spremenljivke X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ le še korak. Naj bo $Y = F_X^{-1}(U)$. Ker je

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x),$$

vidimo, da je slučajna spremenljivka Y porazdeljena tako kot X. Zato iz naključno izbrane vrednosti u slučajne spremenljivke U izračunamo naključno vrednost $x = F_X^{-1}(u)$ slučajne spremenljivke X. Ta splošna metoda je izredno enostavna, kadar je mogoče funkcijo $F_X^{-1}(x)$ analitično izraziti. Za porazdelitvene funkcije iz priloge P3 je to mogoče storiti za eksponentno, Weibullovo, Burrovo in Paretovo porazdelitev. Za tiste porazdelitve, za katere funkcije $F_X^{-1}(x)$ ne znamo analitično izraziti, pa vrednost $x = F_X^{-1}(u)$ poiščemo z numeričnim reševanjem enačbe $F_X(x) - u = 0$. Zaradi velikega števila iskanj ničel je zelo pomembno, da ničle iščemo učinkovito. Funkcija $F_X(x) - u$ je strogo naraščajoča, zato njeno ničlo običajno brez večjih težav lahko poiščemo z Newton-Raphsonovo metodo. Za začetni približek lahko izberemo

$x_0 = E[X]$, nato pa računamo zaporedne približke z rekurzivno enačbo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F_X(x_k) - u}{F'(x_k)} = x_k - \frac{F_X(x_k) - u}{f_X(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ustavimo se, ko sta dva zaporedna približka dovolj blizu.

Včasih pri opisanem postopku naletimo na težave. Ker je tangenta na funkcijo $F_X(x) - u$ blizu izhodišča in za dovolj velike x lahko zelo položna, lahko majhnemu približku x_k sledi velik približek x_{k+1}, temu pa negativen x_{k+2}. Potem pa ni več nadaljevanja, ker je $f_X(x_{k+2}) = 0$. Lahko naletimo tudi na eno izmed treh znanih slabosti metode (glej npr. Hamming, 1986, str. 69), ko pademo v neskončno zanko, ker se približka x_k in x_{k+1} začneta ponavljati. To se lahko zgodi v okolici ničle, če ima $f_X(x)$ tam dovolj izrazit maksimum, kadar je izpolnjen pogoj $x_{k+2} - x_{k+1} = -(x_{k+1} - x_k) \neq 0$ oziroma $-\frac{F_X(x_{k+1}) - u}{f_X(x_{k+1})} = \frac{F_X(x_k) - u}{f_X(x_k)} \neq 0$. V takih izjemnih primerih si lahko pomagamo z bisekcijo, ki jo predvidimo kot izhod v sili.

Za nekatere porazdelitve, za katere funkcije $F_X^{-1}(x)$ ne znamo analitično izraziti, obstajajo posebni generatorji naključnih števil. Tudi ti temeljijo na generatorjih enakomerno porazdeljenih naključnih števil na intervalu $[0, 1)$, vendar pogosto s primerno transformacijo zaobidejo reševanje enačbe $F_X(x) - u = 0$, zaradi česar so tudi hitrejši. Za standardizirano normalno porazdelitev obstaja več dobrih metod, npr. Box-Mullerjeva (polarna metoda), ki jo najdemo v (Press et al., 1992, str. 224) ali (Knuth, 1981, str. 117), ter metoda razmerja (Knuth, 1981, str. 125). Iz naključnega števila x za $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ lahko izračunamo tudi naključna števila za $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ in $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$. Ker za $Y = \mu + \sigma X$ dobimo $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\frac{x-\mu}{\sigma}) = F_X(\frac{x-\mu}{\sigma})$, kar je porazdelitvena funkcija za $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, je $y = \mu + \sigma x$ naključno število za $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Analogno za $Y = e^{\mu + \sigma X}$ ugotovimo, da je $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ ter $y = e^{\mu + \sigma x}$ ustrezno naključno število.

Za gama porazdelitev za $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ in $\lambda = 1$ generator naključnih števil najdemo v (Press et al., 1992, str. 228), za $0 < \alpha < 1$ in $\lambda = 1$ pa so v (Knuth, 1981, str. 135, naloga 16) navedeni ključni podatki za izdelavo generatorja, ki temelji na generiranju naključnih točk med abscisno osjo in grafom funkcije $f_X(x)$ (glej metodo zavračanja, Press et al., 1992, str. 226). Ker iz $X_1 \sim \Gamma([\alpha], 1)$ in $X_2 \sim \Gamma(\alpha - [\alpha], 1)$ sledi $X = X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha, 1)$, lahko za poljuben $\alpha > 0$ generiramo naključno število x za slučajno spremenljivko $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ kot seštevek naključnih števil x_1 za X_1 in x_2 za X_2. Naključno število x je dobro izhodišče za nadaljevanje. Za $Y = \frac{X}{\lambda}$ dobimo $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq \lambda x) = \Gamma(\alpha; \lambda x)$, kar je porazdelitvena funkcija za $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Zato je $y = \frac{x}{\lambda}$ naključna vrednost za $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Analogno za $Y = \frac{X^{\frac{1}{\tau}}}{\lambda}$ dobimo $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq (\lambda x)^\tau) = F_X((\lambda x)^\tau) = \Gamma(\alpha; (\lambda x)^\tau)$, kar je porazdelitvena funkcija za $Y \sim \mathrm{T}\Gamma(\alpha, \lambda, \tau)$, $y = \frac{x^{\frac{1}{\tau}}}{\lambda}$ pa je ustrezno naključno število. Za $Y = e^{\frac{X}{\lambda}}$ dobimo $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq \lambda \log x) = F_X(\lambda \log x) = \Gamma(\alpha; \lambda \log x)$, kar je porazdelitvena funkcija za $\mathrm{L}\Gamma(\alpha, \lambda)$, $y = e^{\frac{x}{\lambda}}$ pa je ustrezno naključno število. Tako smo za vse porazdelitvene funkcije iz priloge P3 navedli načine generiranja naključnih števil, pri katerih ni potrebno precej zamudno numerično reševanje enačbe $F_X(x) - u = 0$, kar je za praktično delo zelo pomembno.

Načeloma za celoštevilsko slučajno spremenljivko N z verjetnostno funkcijo $P(N = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, naključno vrednost n generiramo analogno kot pri zveznih slučajnih spremenljivkah. Najprej sestavimo stopničasto porazdelitveno funkcijo $F_N(x) = \sum_{k \leq x} p_k$, nato pa za enakomerno porazdeljeno slučajno spremenljivko U na intervalu $[0, 1)$ generiramo naključno vrednost u in rešimo enačbo $n = \min\{x|F_N(x) \geq u\}$. Ker ima $F_N(x)$ skoke v celih številih, je tako dobljeni n celo število. Tovrstno računanje pa je lahko zamudno, če je $E[N]$ veliko število. Zato si včasih pomagamo z zveznimi slučajnimi spremenljivkami. Tako verjetnosti $P(N = k) = p_k$ razmažemo na interval $[k, k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, in najprej za zvezno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti $f_X(x) = p_k$ za $k \leq x < k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, po eni od metod poiščemo naključno število x, nato pa izračunamo $n = [x]$. Za $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ in $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ naključno vrednost slučajne spremenljivke X oziroma N lahko poiščemo z metodo zavračanja. Algoritma najdemo v (Press et al., 1992, str. 230 in 232).

Za generiranje naključne vrednosti slučajne spremenljivke $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$ si pomagamo z mešanjem slučajnih spremenljivk. V razdelku 2.1 smo ugotovili, da dobimo negativno binomsko porazdeljeno slučajno spremenljivko z mešanjem gama in Poissonove porazdelitve. Če najprej za slučajno spremenljivko $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, kjer je $\beta = \frac{p}{1-p}$, naključno izberemo vrednost λ, nato pa za slučajno spremenljivko $M \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ naključno izberemo vrednost n, potem je n naključno izbrana vrednost za slučajno spremenljivko $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$. S tem so izčrpani vsi primeri generiranja naključnih vrednosti celoštevilskih slučajnih spremenljivk s porazdelitvami iz priloge P2.

3.8.2 Večnivojsko simuliranje agregatnih odškodnin

Brez izgube splošnosti lahko realno situacijo poenostavimo in predpostavimo, da imamo le tri hierarhično urejene nivoje: skupino premoženjskih zavarovanj, zavarovalne vrste in zavarovalne podvrste. Za skupino premoženjskih zavarovanj zadošča, da vemo, katere zavarovalne vrste jo sestavljajo. Prav tako za zavarovalne vrste zadošča, da vemo, katere zavarovalne podvrste jo sestavljajo. Za zavarovalno podvrsto pa moramo poznati verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke, ki predstavlja letno število odškodnin, in porazdelitveno funkcijo neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo posamezne kosmate odškodnine. Oboje lahko ugotovimo npr. z metodami iz prilog P1, P2 in P3. Za vsako zavarovalno podvrsto moramo poznati tudi pozavarovalno obliko, da lahko iz kosmate odškodnine izračunamo čisto odškodnino. Od tu naprej je postopek razviden iz algoritma 2 na strani 50, ki je zapisan v psevdokodu.

Algoritem 2 je sicer zelo enostaven, zato pa je časovno nadvse potraten. Čas izvajanja je odvisen od izbranega števila ponovitev l, ki mora biti dovolj veliko, od števila zavarovalnih vrst v skupini, števila zavarovalnih podvrst v zavarovalnih vrstah, predvsem pa od porazdelitve slučajnih spremenljivk N_{jk} in X_{jk}. Najbolj notranja zanka se pri k-ti zavarovalni podvrsti j-te zavarovalne vrste za i-to leto zavrti okrog $E[N_{jk}]$-krat, čas izvajanja ukazov v tej zanki pa je v glavnem določen s časom, ki je potreben za naključni izbor vrednosti slučajne spremenljivke X_{jk}, na kar pomembno vpliva njena porazdelitvena funkcija. Predvsem velika časovne zahtevnosti nam v praksi preprečuje, da bi problem agregatnih odškodnin na nivoju skupine premoženjskih zavarovanj z algoritmom 2 izračunali v enem koraku. Zato si oglejmo še algoritem 3 na strani 51, ki nam omogoča problem razbiti na več manjših podproblemov. Skupni čas reševanja prvotnega problema se sicer ne zmanjša, zato pa si delo lahko porazdelimo na daljše časovno obdobje. Z algoritmom 3 prav tako laže rešujemo nekatere posebne podprobleme, npr. iskanje primernih parametrov pozavarovanja, ki predstavljajo smiselno celoto, za rešitev pa potrebujejo večkratno izvajanje algoritma.

Algoritem 2: Večnivojska simulacija agregatnih odškodnin

Algoritem večnivojska simulacija
begin (* Večnivojska simulacija *)
    $l :=$ *dovolj veliko naravno število*;   (* število let, za katero želimo simulirati *)
    for $i := 1$ **to** l **do begin**
        $s_i^k := 0$;   (* letne kosmate agregatne odškodnine za skupino za i-to leto *)
        $s_i^c := 0$;   (* letne čiste agregatne odškodnine za skupino za i-to leto   *)
        for $j := 1$ **to** število zavarovalnih vrst v zavarovalni skupini **do begin**
            $s_{ij}^k := 0$;   (* letne kosmate agregatne odškodnine za j-to vrsto za i-to leto *)
            $s_{ij}^c := 0$;   (* letne čiste agregatne odškodnine za j-to vrsto za i-to leto   *)
            for $k := 1$ **to** število zavarovalnih podvrst v j-ti zavarovalni vrsti **do begin**
                $s_{ijk}^k := 0$;   (* letne kosmate agr. odšk. za k-to podvrsto j-te vrste za i-to leto *)
                $s_{ijk}^c := 0$;   (* letne čiste agr. odšk. za k-to podvrsto j-te vrste za i-to leto   *)
                (* N_{jk} je sl. sprem., ki modelira število odškodnin v k-ti podvrsti j-te vrste *)
                (* X_{jk} je sl. sprem., ki modelira višino odškodnin v k-ti podvrsti j-te vrste *)
                $n :=$ *naključno izbrana vrednost slučajne spremenljivke* N_{jk};
                for $m := 1$ **to** n **do begin**
                    $x :=$ *naključno izbrana vrednost slučajne spremenljivke* X_{jk};
                    $s_{ijk}^k := s_{ijk}^k + x$;   (* seštevamo kosmate odškodnine *)
                    $s_{ijk}^c := s_{ijk}^c +$ lastni delež od x;   (* seštevamo čiste odškodnine *)
                end;
                (* Čiste agregatne odškodnine s_{ijk}^c korigiramo zaradi morebitnega pozava- *)
                (* rovanja, ki učinkuje le na agregatne odškodnine podvrste, ter agregatne *)
                (* odškodnine podvrste prištejemo k agregatnim odškodninam vrste.   *)
                $s_{ij}^c := s_{ij}^c \; - \;$ pozavarovalni del od s_{ij}^c;
                $s_{ij}^k := s_{ij}^k \; + \; s_{ijk}^k$;
                $s_{ij}^c := s_{ij}^c \; + \; s_{ijk}^c$;
            end;
            (* Agregatne odškodnine vrste prištejemo k agregatnim odškodninam skupine. *)
            $s_i^k := s_i^k \; + \; s_{ij}^k$;
            $s_i^c := s_i^c \; + \; s_{ij}^c$;
        end;
    end;
    (* Vzorec agregatnih odškodnin $s_1^k, s_2^k, \ldots, s_l^k$ oziroma $s_1^c, s_2^c, \ldots, s_l^c$ lahko dodatno *)
    (* obdelamo, npr. sestavimo vzorčno porazdelitveno funkcijo, izračunamo vzorčne *)
    (* momente, kritične točke ali intervale zaupanja, ter izpišemo rezultate.   *)
end. (* Večnivojska simulacija *)

Začnimo z zavarovalno podvrsto, za katero slučajna spremenljivka N modelira število odškodnin, neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_N$ s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ pa predstavljajo posamezne kosmate odškodnine. Algoritem 3 je treba pognati posebej za kosmate in posebej za čiste agregatne odškodnine, vanj pa smo vgradili tudi računanje vzorčnega povprečja agregatnih odškodnin, standardnega odklona in koeficienta asimetrije.

Vzorec $s_1, s_2, \ldots, s_l$ letnih kosmatih agregatnih odškodnin za l let, ki smo ga dobili s simulacijo za posamezno zavarovalno podvrsto, nam že omogoča določanje oziroma preverjanje primernosti višine zavarovalne premije, za kar nam zadoščajo iz vzorca določene kritične točke oziroma intervali zaupanja za primerno izbrane verjetnosti, npr. 95 ali 99 odstotkov. Če pa računamo čiste agregatne odškodnine, nam vzorec omogoča tudi določanje primernih (optimalnih) parametrov pozavarovanja, za kar pa je treba algoritem pognati večkrat z različnimi možnimi izračuni lastnega deleža od x.

Algoritem 3: Enonivojska simulacija agregatnih odškodnin

Algoritem enonivojska simulacija
begin (* Enonivojska simulacija *)
  $l :=$ *dovolj veliko naravno število*; (* število let, za katero želimo simulirati *)
  $m_1 := 0$; (* 1. začetni vzorčni moment *)
  $m_2 := 0$; (* 2. začetni vzorčni moment *)
  $m_3 := 0$; (* 3. začetni vzorčni moment *)
  for $i := 1$ **to** l **do begin**
    if računamo za zavarovalno podvrsto **then**
      $n :=$ *naključno izbrana vrednost slučajne spremenljivke* N*, ki šteje odškodnine*
    else
      $n :=$ *število zavarovalnih podvrst v zavarovalni vrsti oziroma število vrst v skupini*;
    $s_i := 0$; (* letne agregatne odškodnine za i-to leto *)
    for $k := 1$ **to** n **do begin**
      $x :=$ *naključno izbrana vrednost slučajne spremenljivke* X_k;
      if računamo letne čiste agregatne odškodnine za zavarovalno podvrsto **then**
        $s_i := s_i+$ lastni delež od x (* seštevamo čiste odškodnine *)
      else
        $s_i := s_i + x$; (* seštevamo kosmate ali čiste odškodnine, odvisno od X_k *)
    end;
    (* Če računamo letne čiste agregatne odškodnine za zavarovalno podvrsto, tu s_i *)
    (* korigiramo zaradi morebitnega pozavarovanja, ki učinkuje le na agregatne *)
    (* odškodnine. *)
    $m_1 := m_1 + s_i$;
    $m_2 := m_2 + s_i^2$;
    $m_3 := m_3 + s_i^3$;
  end;
  $m_1 := \frac{m_1}{l}$; (* povprečne letne agregatne odškodnine *)
  $m_2 := \frac{m_2}{l}$;
  $m_3 := \frac{m_3}{l}$;
  $\sigma := \sqrt{m_2 - m_1^2}$; (* vzorčni standardni odklon letnih agregatnih odškodnin *)
  $\gamma := \frac{m_3 \; - \; 3\,m_2\,m_1 \; + \; 2\,m_1^3}{\sigma^3}$; (* vzorčni koeficient asimetrije letnih agregatnih odškodnin *)
  (* Vzorec agregatnih odškodnin $s_1, s_2, \ldots, s_l$ lahko dodatno obdelamo, npr. *)
  (* sestavimo vzorčno porazdelitveno funkcijo in izračunamo kritične točke *)
  (* ali intervale zaupanja, ter izpišemo rezultate. *)
end. (* Enonivojska simulacija *)

Na vzorec $s_1, s_2, \ldots, s_l$ letnih agregatnih odškodnin za posamezno zavarovalno podvrsto lahko gledamo tudi tako, kot gledamo na letni vzorec posameznih odškodnin za zavarovalno podvrsto. Z metodami iz prilog P1 in P3 lahko iz vzorca $s_1, s_2, \ldots, s_l$ poiščemo porazdelitveno funkcijo letnih agregatnih odškodnin za posamezno zavarovalno podvrsto. Tak postopek nam omogoča izračun kritičnih letnih agregatnih odškodnin in intervalov zaupanja iz analitično izražene porazdelitvene funkcije letnih agregatnih odškodnin za posamezno zavarovalno podvrsto, pomembneje pa je, da nam omogoča prehod na višji nivo. Zato predpostavimo, da smo za vse zavarovalne podvrste določili porazdelitveno funkcijo letnih kosmatih agregatnih in letnih čistih agregatnih odškodnin.

Zavarovalna vrsta naj bo sestavljena iz n zavarovalnih podvrst. Tokrat naj neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ predstavljajo letne kosmate oziroma čiste agregatne odškodnine za posamezne zavarovalne podvrste, ki sodijo v zavarovalno vrsto. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naj imajo različne porazdelitvene funkcije $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \ldots, F_{X_n}(x)$, ki jih že poznamo. Izračun letnih agregatnih odškodnin za zavarovalno vrsto se od izračuna za zavarovalno podvrsto razlikuje v tem, da slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niso enako porazdeljene, ter pri upoštevanju pozavarovanja. Pri zavarovalnih podvrstah smo za izračun čistih agregatnih odškodnin izhajali iz kosmatih odškodnin in smo zato posebej upoštevali pozavarovanje, pri zavarovalnih vrstah pa izhajamo iz letnih čistih agregatnih odškodnin za posamezne zavarovalne podvrste, zaradi česar posebna obravnava pozavarovanja pri posameznih naključno izbranih vrednostih letnih agregatnih odškodnin za zavarovalne podvrste ni potrebna.

Iz vzorcev letnih kosmatih ali čistih agregatnih odškodnin za zavarovalne vrste določimo porazdelitvene funkcije in analogno kot s podvrst na vrste preidemo z zavarovalnih vrst na skupino premoženjskih zavarovanj.

Zaradi kombiniranja različnih pozavarovalnih oblik, ki učinkujejo po vnaprej dogovorjenem vrstnem redu, je izraz čiste odškodnine včasih dvoumen. Pomeni lahko čiste odškodnine, ki jih dobimo po upoštevanju prve, druge in morebitnih naslednjih pozavarovalnih oblik. V algoritmih 2 in 3 seveda mislimo na čiste odškodnine, ki jih dobimo po upoštevanju vseh pozavarovalnih oblik. Kadar kombinacija različnih pozavarovalnih oblik deluje na posamezno odškodnino, to upoštevamo že pri določanju lastnega deleža od posamezne kosmate odškodnine, kot novost pa v obeh algoritmih omenjamo korekcijo letnih čistih agregatnih odškodnin zaradi morebitnega pozavarovanja, ki učinkuje le na agregatne odškodnine. Pozavarovalni obliki, ki učinkujeta na agregatne odškodnine, sta npr. škodno presežkovno pozavarovanje katastrofalnih rizikov in pozavarovanje letnega presežka škod. Pri prvem pozavarovalnica kot eno škodo šteje vse škode, ki so zaradi enega katastrofalnega dogodka, npr. poplave, viharja ali toče, nastale v največ 72-urnem obdobju. Na pozavarovalnico odpade morebitna pozitivna razlika med skupnimi odškodninami zaradi katastrofe in samopridržajem oziroma prioriteto zavarovalnice. Pri pozavarovanju letnega presežka škod pa pozavarovalnica zavarovalnici izplača morebitno pozitivno razliko (ali njen del) med letnimi agregatnimi odškodninami in samopridržajem oziroma prioriteto zavarovalnice. Tovrstno pozavarovanje je najbolj pogosto pri zavarovanju posevkov, ko je npr. dogovorjeno, da pozavarovalnica izplača morebitni del agregatnih odškodnin, ki leži v pasu letnih agregatnih odškodnin od 110 do 160 odstotkov, računano od letne tehnične premije. Upoštevanje škodno presežkovnega pozavarovanja katastrofalnih rizikov bi v naš model težko vgradili, pozavarovanje letnega presežka škod za posamezno zavarovalno podvrsto pa bi brez večjih težav lahko upoštevali tako, da bi ustrezno prilagodili letne čiste agregatne odškodnine za zavarovalno podvrsto, ki jih dobimo s seštevanjem lastnih deležev od kosmatih odškodnin, kar pa nam da le vmesni nivo čistih agregatnih odškodnin.

4 Določanje parametrov optimalnega pozavarovanja

Tudi zavarovalnica, tako kot vsaka druga finančna ustanova, lahko postane nesolventna, kadar obveznosti zavarovalnice, katerih glavnino predstavljajo odškodnine, postanejo prevelike. Kadar letne agregatne odškodnine presežejo letno agregatno tehnično premijo, so pravo jamstvo za izplačilo odškodnin le sredstva zavarovalnice, ki so prosta vseh trenutnih in bodočih predvidljivih obveznosti. Zavarovalnica, ki je organizirana kot delniška družba, za poravnavo svojih obveznosti jamči s kapitalom, ki pa mora biti dovolj velik. Zato je zaradi varnosti zavarovancev običajno predpisan minimalni znesek kapitala, ki ga mora imeti zavarovalnica, prav tako pa tudi, kaj vse se šteje za razpoložljivi kapital, ki ga zavarovalni nadzorniki upoštevajo pri ugotavljanju kapitalske ustreznosti zavarovalnice.

V Evropski zvezi že dolgo veljajo predpisi, ki določajo, kako se preverja kapitalska ustreznost zavarovalnice. Za premoženjska zavarovanja Evropska smernica 73/239/EEC (1973) predpisuje, da se pri izračunu minimalnega kapitala upošteva večji od zneskov, ki ju izračunamo s premijskim oziroma škodnim količnikom. Pri izračunu s premijskim količnikom se kosmata zavarovalna premija preteklega leta do višine 10 milijonov EUR pomnoži z $0{,}18$, presežek pa z $0{,}16$. Seštevek se pomnoži z razmerjem med čistimi in kosmatimi odškodninami v preteklem letu, vendar ne z manj kot $0{,}5$. Pri izračunu s škodnim količnikom se povprečje letnih kosmatih odškodnin za zadnja tri leta do višine 7 milijonov EUR pomnoži z $0{,}26$, presežek pa z $0{,}23$. Seštevek se pomnoži z razmerjem med čistimi in kosmatimi odškodninami v preteklem poslovnem letu, vendar ne z manj kot $0{,}5$. Množenje z najmanj $0{,}5$ je predpisano zato, da zmanjšuje odvisnost solventnosti zavarovalnice od solventnosti pozavarovalnic, pri katerih ima pozavarovane svoje rizike. Kapitalsko šibke zavarovalnice ne morejo povečati obsega poslovanja čez razumne meje in se izogniti povečanju kapitala s prenosom večine tveganja na pozavarovalnice.

Poleg načina izračuna minimalnega kapitala je natančno predpisano, kaj upoštevamo kot razpoložljivi kapital, ki ga primerjamo z minimalnim kapitalom. Zavarovalnica je kapitalsko ustrezna, če je razpoložljivi kapital najmanj enak minimalnemu kapitalu in najmanj enak zajamčenemu kapitalu. Drugi pogoj pride v poštev le pri zavarovalnicah z majhnim obsegom poslovanja, saj je zajamčeni kapital definiran kot ena tretjina minimalnega kapitala, vendar ne manj od absolutno določenega zneska, ki je odvisen le od zavarovalnih vrst, s katerimi se zavarovalnica ukvarja. Zakon o zavarovalništvu (2000) je usklajen z navedeno evropsko smernico, pričakujemo pa uskladitev z novo smernico (Evropska smernica 2002/13/EC, 2002), ki je mejna zneska 10 oziroma 7 milijonov EUR povečala na 50 oziroma 35 milijonov EUR, hkrati pa uvedla še nekaj novosti, ki zmanjšujejo verjetnost nastanka nesolventnosti.

Tu smo navedli le bistvene in poenostavljene določbe o ugotavljanju kapitalske ustreznosti. Zato nismo z računovodsko natančnostjo definirali, kaj natančno pomeni npr. "povprečje letnih kosmatih odškodnin za zadnja tri leta", kjer je potrebno upoštevati tudi spremembe kosmatih škodnih rezervacij, prav tako pa nismo navedli nekaterih drugih izjem, ki za naš namen niso pomembne. Podrobnosti so razvidne iz zakona in sklepa o minimalnem kapitalu (Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnic, 2001), kjer je predpisano, kako izračunamo minimalni kapital, po drugi strani pa je v zakonu in sklepu o kapitalski ustreznosti (Sklep o načinu in obsegu upoštevanja posameznih postavk, podrobnejših lastnostih in vrstah postavk ter lastnostih podrejenih dolžniških instrumentov, ki se upoštevajo pri izračunu kapitala in kapitalske ustreznosti, in izkaz kapitalske ustreznosti zavarovalnice, 2001) predpisano, katere postavke se za ugotavljanje kapitalske ustreznosti zavarovalnice upoštevajo kot razpoložljivi kapital. Kratko primerjavo, kako določajo minimalni kapital v Evropski zvezi in nekaterih drugih delih sveta, pa si lahko ogledamo v dokumentu Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision - appendices (2002, str. 56).

Kapitala, s katerim bi zavarovalnica nadomestila morebitno negativno razliko med agregatno tehnično premijo in agregatnimi odškodninami, je le redko toliko, da bi zadostoval tudi v primeru izredno neugodnega škodnega dogajanja. Prav zato, po drugi strani pa tudi zato, ker želijo zavarovalnice skleniti več zavarovanj, kot jim dopušča kapital, je za varnost zavarovalnice izredno pomembno, da ima ustrezno pozavarovalno zaščito. Le-ta je lahko kombinacija različnih pozavarovalnih oblik. Običajno je kvotno, vsotno presežkovno ter škodno presežkovno pozavarovanje, bolj redko pa srečamo tudi pozavarovanje letnega presežka škod. Zavarovalnica mora za vsako zavarovalno vrsto oziroma produkt znotraj zavarovalne vrste oceniti, kakšen delež škod oziroma kako velike škode lahko krije sama. Če se odloči za kvotno pozavarovanje, mora določiti lastni delež α, pri vsotno presežkovnem in škodno presežkovnem pozavarovanju pa mora oceniti maksimalno škodo, ki jo lahko krije sama. Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju se ocena imenuje maksimalni samopridržaj, pri škodno presežkovnem pa maksimalni samopridržaj ali prioriteta. Maksimalni samopridržaji so za posamezne zavarovalne vrste navedeni v tablicah maksimalnega kritja. V zavarovalnih vrstah, za katere se zavarovalnica odloči za vsotno presežkovno pozavarovanje, mora pozavarovati tiste rizike, za katere je zavarovalna vsota večja od maksimalnega samopridržaja, če se razmerje med deležem zavarovalnice in pozavarovalnice določa na osnovi zavarovalne vsote, oziroma tiste rizike, za katere je ocenjena maksimalna pričakovana škoda EML večja od maksimalnega samopridržaja, če se razmerje med deležem zavarovalnice in pozavarovalnice določa na osnovi EML. V zavarovalnih vrstah, za katere se zavarovalnica odloči za škodno presežkovno pozavarovanje, so s sklenitvijo ustrezne pozavarovalne pogodbe pozavarovani vsi riziki.

Zavarovalnica s prenosom dela tveganja na pozavarovalnico prenaša tudi del dobička, če gledamo dolgoročno. Kot dobiček je tu mišljen le tisti del, ki izvira iz tehnične premije, predvsem iz varnostnega dodatka, ne pa morebitni del, ki izvira iz obratovalnega dodatka ali iz donosov naložb. Prav tako nas tu ne bo zanimalo, ali provizija, ki jo pozavarovalnica prizna zavarovalnici kot nadomestilo za stroške, zadošča za kritje dejanskih obratovalnih stroškov, ki se nanašajo na v pozavarovanje prevzeti del rizikov.

Zavarovalnica po eni strani teži k višjemu lastnemu deležu α oziroma k višjemu samopridržaju M, da ji ostane več dobička, po drugi strani pa bi morala za doseganje večje varnosti ravnati obratno. Kje med dvema skrajnostma je optimum, je težko vprašanje. Odgovor nanj je pomembno odvisen tudi od stopnje averzije vodstva zavarovalnice do rizika nesolventnosti.

Naj bo N slučajna spremenljivka, ki šteje odškodnine, za katero smo npr. po metodah iz prilog P1 in P2 ugotovili verjetnostno funkcijo. Naj bo $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ slučajna spremenljivka, ki predstavlja kosmate letne agregatne odškodnine. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots$, ki predstavljajo posamezne odškodnine, naj bodo med seboj in od N neodvisne in enako porazdeljene. Njihova porazdelitvena funkcija, ki jo lahko ugotovimo npr. po metodah iz prilog P1 in P3, naj bo $F_X(x)$, gostota verjetnosti $f_X(x)$, karakteristična funkcija $\varphi_X(t)$ in momentno rodovna funkcija $M_X(t)$. Privzemimo, da poznamo tudi $E[S]$, $\mathrm{var}[S]$ in $\mu_3(S)$, ki jih lahko izračunamo po enačbah (2.2a), (2.2b) in (2.2c).

Za vsako pozavarovalno obliko obstaja funkcija, s katero iz kosmatih odškodnin $X_1, X_2, \ldots, X_N$ izračunamo čiste odškodnine $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$. Naj bo $S_l = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ slučajna spremenljivka, ki predstavlja čiste letne agregatne odškodnine. Prav tako za vsak v zavarovanje prevzeti riziko obstaja funkcija, s katero iz kosmate zavarovalne (tehnične premije) izračunamo čisto zavarovalno (tehnično) premijo. Naj P_l predstavlja čisto letno agregatno tehnično premijo. V praksi je tudi P_l slučajna spremenljivka, ki pa jo ob znanih sklenjenih zavarovanjih lahko imamo za konstanto.

V nadaljevanju poglavja bomo najprej privzeli, da ima zavarovalnica posamezno zavarovalno vrsto, oziroma posamezen produkt znotraj zavarovalne vrste, pozavarovano le z eno obliko pozavarovanja. V praksi je pogosto kombiniranje različnih pozavarovalnih oblik, zato bomo na koncu poglavja za eno kombinacijo pokazali, kako lahko v takem primeru vsaj načeloma poiščemo optimum. Glede na prakso slovenskih in tudi tujih zavarovalnic, ki pozavarovalne parametre določajo predvsem izkustveno, bi marsikdaj dosegli napredek že z upoštevanjem napotkov za aproksimativni izračun optimalnih parametrov za posamezno pozavarovalno obliko.

4.1 Vpliv pozavarovanja na varianco lastnega deleža odškodnin

Slučajna spremenljivka X naj pomeni odškodnino, ki jo zavarovalnica izplača zavarovancu, Y del odškodnine, ki odpade na zavarovalnico, medtem ko $X - Y$ odpade na eno ali več pozavarovalnic. Bistvo zavarovanja je prenos tveganja z zavarovanca na zavarovalnico, prav tako pa je bistvo pozavarovanja v prenosu dela tveganja z zavarovalnice na pozavarovalnico. V obeh primerih lahko tveganje merimo z varianco škod oziroma odškodnin, zato si oglejmo, kako je varianca tistega dela odškodnin, ki bremenijo zavarovalnico, odvisna od pozavarovanja.

Za kvotno pozavarovanje z lastnim deležem α, $0 < \alpha < 1$, je izračun zelo enostaven. Ker je $Y = \alpha\, X$, je $E[Y] = \alpha\, E[X]$, $E[Y^2] = \alpha^2\, E[X^2]$, $\mathrm{var}[Y] = \alpha^2\, \mathrm{var}[X]$ in $\sigma_Y = \alpha\, \sigma_X$. Zaradi enačb (2.2a) in (2.2b) je tudi $E[S_l] = \alpha\, E[S]$ in $\mathrm{var}[S_l] = \alpha^2\, \mathrm{var}[S]$. Pri kvotnem pozavarovanju se varianca lastnega deleža odškodnin sicer zmanjša, vendar koeficient variacije ostane nespremenjen. Ker ugotovitev velja tudi za agregatne odškodnine, si zavarovalnica s kvotnim pozavarovanjem predvsem zagotavlja možnost sprejetja večjih in več rizikov v zavarovanje, kot ji dovoljuje kapital, s katerim jamči za izplačilo svojih obveznosti, za zmanjšanje koeficienta variacije agregatnih odškodnin pa mora uporabiti druge oblike pozavarovanja.

Za vsotno presežkovno pozavarovanje z maksimalnim samopridržajem M si oglejmo le primer, ko število pozavarovanih linij ni omejeno. Če mora zavarovalnica zavarovancu izplačati odškodnino X za riziko, za katerega je ob sklepanju zavarovanja ocenjena maksimalna pričakovana škoda EML, potem na zavarovalnico odpade

$$Y = \begin{cases} X & \text{za } EML \le M \\ \frac{M}{EML}\, X & \text{za } EML > M \end{cases}$$

V tem primeru začetne momente enostavno izračunamo

$$E[Y^j] = \begin{cases} E[X^j] & \text{za } EML \le M \\ \left(\frac{M}{EML}\right)^j\, E[X^j] & \text{za } EML > M \end{cases}$$

Na tiste rizike, za katere je $EML \leq M$, pozavarovanje ne vpliva (v pozavarovanje jih niti ne prijavimo), za tiste rizike, za katere je $EML > M$, pa je situacija analogna kot pri kvotnem pozavarovanju, le da vlogo parametra α igra razmerje $\frac{M}{EML}$. Ker pa je za različne rizike EML različen, moramo ugotoviti še vpliv vsotno presežkovnega pozavarovanja na agregatne odškodnine celotnega portfelja.

Naj bo Z slučajna spremenljivka, ki pomeni ocenjeno maksimalno pričakovano škodo EML za naključno izbrani riziko, $F_Z(x)$ njena porazdelitvena funkcija in $f_Z(x)$ gostota verjetnosti. Če bi predpostavili, da sta slučajni spremenljivki X in Z neodvisni, bi ugotovili, da je

$$E[Y^j] \quad = \quad E[X^j] \cdot \tilde{F}_{Z,j}(M) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

kjer je

$$\tilde{F}_{Z,j}(M) \quad = \quad F_Z(M) \; + \; \int_M^\infty \left(\frac{M}{z}\right)^j f_Z(z)\, dz \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

pri tem pa je $1 = \tilde{F}_{Z,0}(M) \geq \tilde{F}_{Z,1}(M) \geq \tilde{F}_{Z,2}(M) \geq \ \ldots$ Po enačbi (2.2b) bi že znali izračunati varianco agregatnih odškodnin, vendar bomo to storili kasneje. Izhodiščna predpostavka je namreč preveč nerealna. Pri pravilno določeni oceni maksimalne pričakovane škode EML bi morala biti skoraj vedno izpolnjena neenačba $X \leq Z$, zato slučajni spremenljivki X in Z nista neodvisni. Do realnejšega rezultata bomo prišli po drugi poti, za katero pa predpostavke v praksi tudi niso vedno izpolnjene.

Razumno je pričakovanje, da bodo morebitne škode, s tem pa tudi odškodnine, v nekem smislu sorazmerne z velikostjo rizika, ki jo merimo z zavarovalno vsoto oziroma v našem primeru z EML. Zato vpliv različnih EML lahko izločimo, če ugotovimo, da je porazdelitvena funkcija škodnega ulomka $V = \frac{X}{Z}$ neodvisna od EML oziroma Z. V praksi se za porazdelitev slučajne spremenljivke škodnega ulomka V večkrat izkaže primerna beta porazdelitev z gostoto verjetnosti

$$f(x) \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} \qquad (\alpha, \beta > 0)$$

za $0 < x < 1$. Zato privzemimo, da ima slučajna spremenljivka V porazdelitveno funkcijo $F_V(x)$, ki je neodvisna od Z, in gostoto verjetnosti $f_V(x)$. V takem primeru je pri danem $EML = z$

$$P(X \leq x) \quad = \quad P\left(\frac{X}{z} \leq \frac{x}{z}\right) \quad = \quad P\left(V \leq \frac{x}{z}\right) \quad = \quad F_V\left(\frac{x}{z}\right),$$

zato je

$$F_X(x) \quad = \quad \int_0^\infty F_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\, dz$$

in

$$f_X(x) \quad = \quad \int_0^\infty f_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\, \frac{dz}{z}\,.$$

Za $z \leq M$ je $P(Y \leq x) = P(X \leq x) = F_V\left(\frac{x}{z}\right)$, za $z > M$ pa je

$$P(Y \leq x) = P\left(\frac{M}{z} X \leq x\right) = P\left(\frac{X}{z} \leq \frac{x}{M}\right) = P\left(V \leq \frac{x}{M}\right) = F_V\left(\frac{x}{M}\right).$$

Od tu dobimo

$$F_Y(x) = \int_0^M F_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\,dz + \int_M^\infty F_V\left(\frac{x}{M}\right) f_Z(z)\,dz = \\ = \int_0^M F_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\,dz + F_V\left(\frac{x}{M}\right)(1 - F_Z(M)) \tag{4.1}$$

in

$$f_Y(x) = \int_0^M f_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\,\frac{dz}{z} + \frac{1}{M} f_V\left(\frac{x}{M}\right)(1 - F_Z(M)).$$

Izračunajmo še začetne momente slučajne spremenljivke Y

$$\begin{aligned} E[Y^j] &= \int_0^\infty x^j \left(\int_0^M f_V\left(\frac{x}{z}\right) f_Z(z)\,\frac{dz}{z}\right) dx + \\ &\quad + \int_0^\infty x^j f_V\left(\frac{x}{M}\right)(1 - F_Z(M))\,\frac{dx}{M} = \\ &= \int_0^M z^j \left(\int_0^\infty \left(\frac{x}{z}\right)^j f_V\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dx}{z}\right) f_Z(z)\,dz + \\ &\quad + M^j \int_0^\infty \left(\frac{x}{M}\right)^j f_V\left(\frac{x}{M}\right)(1 - F_Z(M))\,\frac{dx}{M}. \end{aligned}$$

Če v prvi integral vpeljemo novo spremenljivko $y = \frac{x}{z}$, v drugega pa $y = \frac{x}{M}$, dobimo

$$\begin{aligned} E[Y^j] &= \int_0^M z^j \left(\int_0^\infty y^j f_V(y)dy\right) f_Z(z)\,dz + M^j(1 - F_Z(M)) \int_0^\infty y^j f_V(y)\,dy = \\ &= E[V^j]\left(\int_0^M z^j f_Z(z)\,dz + M^j(1 - F_Z(M))\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Naj bo

$$E[Z^j; M] = \int_0^M z^j f_Z(z)\,dz + M^j(1 - F_Z(M)) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

in

$$F_{Z,j}(M) = \frac{E[Z^j; M]}{E[Z^j]} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Privzeli smo že, da sta slučajni spremenljivki V in Z neodvisni. Ker je $X = V \cdot Z$, lahko enačbo (4.2) za $j = 1, 2$ in 3 zapišemo kot

$$E[Y] = E[V] \cdot E[Z] \cdot F_{Z,1}(M) = E[X] \cdot F_{Z,1}(M), \tag{4.5a}$$
$$E[Y^2] = E[V^2] \cdot E[Z^2] \cdot F_{Z,2}(M) = E[X^2] \cdot F_{Z,2}(M), \tag{4.5b}$$
$$E[Y^3] = E[V^3] \cdot E[Z^3] \cdot F_{Z,3}(M) = E[X^3] \cdot F_{Z,3}(M). \tag{4.5c}$$

Kot navaja Straub (1988, str. 79), je tudi tokrat $1 = F_{Z,0}(M) \geq F_{Z,1}(M) \geq F_{Z,2}(M) \geq \ \ldots$

Oglejmo si še neomejeno škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M. Če mora zavarovalnica zavarovancu izplačati odškodnino X, potem nanjo odpade

$$Y = \begin{cases} X & \text{za } X < M \\ M & \text{za } X \geq M \end{cases}$$

V tem primeru je

$$E[Y] = E[X;M] = E[X] \cdot F_{X,1}(M), \tag{4.6a}$$
$$E[Y^2] = E[X^2;M] = E[X^2] \cdot F_{X,2}(M), \tag{4.6b}$$
$$E[Y^3] = E[X^3;M] = E[X^3] \cdot F_{X,3}(M). \tag{4.6c}$$

Enačbe (4.6a), (4.6b) in (4.6c) so analogne enačbam (4.5a), (4.5b) in (4.5c), le da namesto modifikacij porazdelitvene funkcije $F_Z(x)$ nastopajo modifikacije porazdelitvene funkcije $F_X(x)$. Seveda v obeh primerih po enačbah (P1.6a) in (P1.6b) lahko izračunamo tudi $\mathrm{var}[Y]$ in $\mu_3[Y]$, s tem pa po enačbah (2.2a), (2.2b) in (2.2c) tudi $E[S_l]$, $\mathrm{var}[S_l]$ in $\mu_3[S_l]$.

4.2 Aproksimativno določanje parametrov optimalnega pozavarovanja

Naj bo U_0 kapital v trenutku 0, od katerega začnemo meriti čas t v letih. Kumulativni priliv tehnične premije do trenutka t naj bo $P(t)$, kumulativne odškodnine $S(t)$ in presežek $U(t) = U_0 + P(t) - S(t)$, pri čemer je $P(0) = S(0) = 0$. Če je tehnična premija na enoto izpostavljenosti pravilno izračunana, pričakujemo, da bo na koncu leta $U(t) - U_0 = P(t) - S(t) \geq 0$, čeprav je za posamezne kratke intervale $[t_1, t_2]$ zaradi naključnih škod mogoče, da je priliv tehnične premije $P(t_2) - P(t_1)$ manjši od povečanja kumulativnih odškodnin $S(t_2) - S(t_1)$ v istem obdobju. Seveda pa bi morali vsa nihanja absorbirati s kapitalom U_0, tako da bi vedno veljalo $U(t) \geq 0$.

Če se za kakšen t zgodi, da je $U(t) < 0$, pravimo, da je prišlo do izgube tveganega kapitala[13]. Naj bo $\Psi(U_0, t)$ verjetnost, da bo na intervalu $[0, t]$ prišlo do izgube kapitala, ki na začetku znaša U_0 enot, ter $\Psi(U_0) = \lim_{t\to\infty} \Psi(U_0, t)$ verjetnost, da bo nekoč v prihodnosti prišlo do izgube tveganega kapitala U_0. Verjetnost $\Psi(U_0, t)$, ki jo izredno težko izračunamo, je pri danem U_0 naraščajoča funkcija spremenljivke t, pri danem t pa padajoča funkcija spremenljivke U_0. Zato nas v praksi večkrat zanima le verjetnost $\Psi_n(U_0)$, da bo do izgube tveganega kapitala U_0 prišlo vsaj v enem od trenutkov $t = h, 2h, \ldots, nh$, kjer je $h > 0$ izbrana konstanta, npr. $h = \frac{1}{4}$, če nas zanima stanje presežka $U(t)$ le ob koncu prvih n kvartalov. Naj bo še $\Psi_\infty(U_0)$ verjetnost, da bo do izgube tveganega kapitala U_0 prišlo vsaj v enem od trenutkov $t = h, 2h, \ldots$ Očitno je $\Psi_n(U_0) \leq \Psi(U_0, nh) \leq \Psi(U_0)$ in $\Psi_n(U_0) \leq \Psi_\infty(U_0) \leq \Psi(U_0)$.

Vse tu definirane verjetnosti izgube tveganega kapitala težko izračunamo, zato se v praksi zadovoljimo kar z zgornjo mejo za $\Psi(U_0)$ ali $\Psi_\infty(U_0)$. Za dani h lahko izračunamo zgornjo mejo

[13] Za uresničitev pogoja $U(t) < 0$ se v angleščini uporablja pojem "ruin", ki pa ga ne smemo razumeti dobesedno. Če se zgodi, da je $U(t) < 0$, še ne pomeni, da bo zavarovalnica propadla oziroma šla v stečaj. Kot bomo videli v nadaljevanju, predvsem v 5. poglavju, je teorija uporabna zlasti za primere, ko nočemo tvegati celotnega kapitala, ki ga mora imeti oziroma ga dejansko ima zavarovalnica, ampak le njegov del - tvegani kapital. Zato bomo dosledno uporabljali oznako "izguba tveganega kapitala", razen v primerih, ko bomo navajali izgubo konkretne višine kapitala.

za $\Psi_\infty(U_0)$ iz Cramèrjeve neenačbe (glej npr. Straub, 1988, str. 40)

$$\Psi_\infty(U_0) \quad \leq \quad e^{-RU_0}, \tag{4.7}$$

kjer je R rešitev enačbe

$$E[e^{-RW}] \quad = \quad 1 \tag{4.8}$$

in W slučajna spremenljivka, ki predstavlja spremembo presežka $U(t)$ v času od ih do $(i+1)h$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Izračunajmo spremembe presežkov v posameznih letih. V tem primeru je $h = 1$ in

$$\begin{aligned} W_i &= U(i) - U(i-1) = (U_0 + P(i) - S(i)) - (U_0 + P(i-1) - S(i-1)) = \\ &= (P(i) - P(i-1)) - (S(i) - S(i-1)) \qquad (i = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Slučajne spremenljivke $S = S_1 = S(1), S_2 = S(2) - S(1), S_3 = S(3) - S(2), \ldots$ predstavljajo agregatne odškodnine v posameznih letih. Predpostavimo, da so neodvisne in enako porazdeljene, in privzemimo, da tehnična premija s časom enakomerno priteka, torej $P(t) = c\,t$. Potem je $W_i = c - S_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Zato so slučajne spremenljivke $W = W_1, W_2, \ldots$, ki predstavljajo spremembe presežka $U(t)$ v enem letu, neodvisne in enako porazdeljene. Slučajna spremenljivka $W = c - S$ izpolnjuje potrebni pogoj za Cramèrjevo neenačbo. Vstavimo jo v enačbo (4.8). Dobimo $E[e^{-RW}] = E[e^{-R(c-S)}] = e^{-cR}\,E[e^{RS}] = 1$ oziroma $E[e^{RS}] = e^{cR}$, kar pa ni nič drugega kot $M_S(R) = e^{cR}$. Na obeh straneh logaritmirajmo in levo stran enačbe

$$\log M_S(R) \quad = \quad c\,R \tag{4.9}$$

aproksimirajmo z začetkom Taylorjeve vrste okrog 0. Ker je $\log M_S(0) = 0$, z upoštevanjem enačb (P1.8a) in (P1.8b) dobimo $\kappa_1\,R + \frac{1}{2}\,\kappa_2\,R^2 \approx c\,R$ oziroma $E[S]\,R + \frac{1}{2}\,\mathrm{var}[S]\,R^2 \approx c\,R$, od tu pa

$$R \quad \approx \quad \frac{2\,(c - E[S])}{\mathrm{var}[S]}. \tag{4.10}$$

Za praktično uporabo lahko v zgornji enačbi predpostavimo enačaj in neenačbo (4.7) nadomestimo z $\epsilon = \Psi_\infty(U_0) = e^{-RU_0}$. Od tu z logaritmiranjem dobimo $\log\epsilon = -\frac{2\,(c-E[S])}{\mathrm{var}[S]}\,U_0$ oziroma

$$\frac{-\log\epsilon}{2\,U_0} \quad = \quad \frac{c - E[S]}{\mathrm{var}[S]}.$$

Pri dani porazdelitvi slučajne spremenljivke kosmatih agregatnih odškodnin, danem kapitalu in danem pritoku tehnične premije v časovni enoti je verjetnost izgube tveganega kapitala ϵ določena. Če je prevelika, lahko zavarovalnica poveča kapital, poveča tehnično premijo na enoto izpostavljenosti ali pa s primernim pozavarovanjem spremeni povprečno čisto odškodnino in njeno varianco, seveda pa je možna tudi kombinacija naštetih ukrepov. Če nas dokapitalizacija ali prestrukturiranje naložb[14] ne zanima, zaradi konkurenčnih razlogov pa ne želimo podražiti zavarovanja, potem nam ostane le še pozavarovanje. Privzemimo, da smo pri danem U_0 in mejni še sprejemljivi verjetnosti izgube tveganega kapitala ϵ s primernim pozavarovanjem dosegli, da za čiste agregatne odškodnine S_l velja enačba $\frac{-\log\epsilon}{2\,U_0} = \frac{c_l - E[S_l]}{\mathrm{var}[S_l]}$, kjer je c_l pritok čiste tehnične premije v časovni enoti. Enačbo na obeh straneh pomnožimo z $\frac{\mathrm{var}[S]}{E[S]}$ in dobimo

$$r \quad = \quad \frac{\frac{-\log\epsilon}{2}\,\mathrm{var}[S]/E^2[S]}{U_0/E[S]} \quad = \quad \frac{(c_l - E[S_l])/E[S]}{\mathrm{var}[S_l]/\mathrm{var}[S]}. \tag{4.11}$$

[14]Nekatere naložbe predstavljajo odbitno postavko pri izračunu razpoložljivega kapitala.

Z levo enačbo smo definirali potrebno stopnjo pozavarovanja r, ki je premo sorazmerna z $\frac{-\log \epsilon}{2}$, kar lahko štejemo za merilo averzije vodstva zavarovalnice do rizika izgube kapitala U_0, premo sorazmerna s kvadratom koeficienta variacije kosmatih agregatnih odškodnin in obratno sorazmerna s kapitalom, izraženim v naravni enoti $E[S]$. Na desni strani enačbe (4.11) števec v naravni enoti meri razliko med čisto agregatno tehnično premijo in čistimi agregatnimi odškodninami, kar bomo v nadaljevanju imenovali čisti tehnični izid[15]. Bistvo zavarovanja in pozavarovanja je v zmanjšanju variabilnosti škod oziroma odškodnin, zato imamo imenovalec lahko za recipročno vrednost merila učinkovitosti pozavarovanja.

Zavarovalnica pri varnostnem koeficientu δ zbere $c = (1+\delta)\, E[S] = (1+\delta)\,(E[S_l] + E[S_p])$ tehnične premije. Pozavarovalnica upošteva svoj varnostni koeficient δ_p, zato nanjo odpade $c_p = (1+\delta_p)\, E[S_p]$ tehnične premije. Ker je $c_l = c - c_p$, je čisti tehnični izid zavarovalnice

$$\begin{aligned} c_l - E[S_l] &= (1+\delta)\,(E[S_l] + E[S_p]) - (1+\delta_p)\, E[S_p] - E[S_l] = \\ &= \delta\, E[S_l] + (\delta - \delta_p)\, E[S_p]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ker ima pozavarovalnica večji portfelj, bi pričakovali, da potrebuje manjši varnostni koeficient kot zavarovalnica, torej $\delta_p \leq \delta$. Iz zgornje enačbe pa bi lahko sklepali, da mora biti v praksi $\delta_p \geq \delta$. V nasprotnem primeru bi zavarovalnica s prenosom celotnega tveganja na pozavarovalnico v bistvu opravljala le delo posrednice in nekatere zavarovalne storitve, za kar bi ji pozavarovalnica priznala provizijo, hkrati pa bi brez tveganja ustvarila arbitražni dobiček v višini $(\delta - \delta_p)\, E[S]$. Sklep seveda velja le v primeru, ko je provizija primerno visoka, sicer pa bi morali upoštevati tudi primanjkljaj zaradi premajhnega prispevka pozavarovalnice za kritje stroškov pridobivanja zavarovanj in ostalih obratovalnih stroškov zavarovalnice. Proti prenosu celotnega tveganja na pozavarovalnico deluje tudi pravilo o izračunu minimalnega kapitala, saj bi zavarovalnica morala imeti toliko kapitala kot v primeru, ko bi sama obdržala polovico tveganja. Zato z donosi od naložb kapitala, povečanimi za arbitražni dobiček, verjetno ne bi dosegla povprečne panožne donosnosti na kapital. Pomembno je tudi vprašanje morebitnih špekulacij. Pozavarovalnica je v marsikaterem pogledu odvisna od zavarovalnice, npr. zaradi določanja višine premij in pogojev zavarovanja, prevzemanja rizikov v zavarovanje in reševanja odškodninskih zahtevkov. Zato razmerja med zavarovalnicami in pozavarovalnicami temeljijo predvsem na zaupanju, za varovalko pa pozavarovalnice vseeno zahtevajo, da vsaj minimalni del rizika nosi zavarovalnica, ki zato skrbneje opravlja prej našteta opravila. Zelo pomemben je tudi vpliv ponudbe in povpraševanja na pozavarovalnem trgu. Zaradi izrazitega cikličnega nihanja in ostalih prej navedenih razlogov ne moremo postaviti splošne relacije med δ_p in δ.

Pri kvotnem pozavarovanju z lastnim deležem α je $E[S_l] = \alpha\, E[S]$, $E[S_p] = (1-\alpha)\, E[S]$ in $\mathrm{var}[S_l] = \alpha^2\, \mathrm{var}[S]$, zato z upoštevanjem enačbe (4.12) iz enačbe (4.11) dobimo

$$r = \frac{\delta\,\alpha + (\delta - \delta_p)\,(1-\alpha)}{\alpha^2}. \tag{4.13}$$

Pri tej pozavarovalni obliki lahko predpostavimo, da je $\delta_p = \delta$, kar nam da $r = \frac{\delta}{\alpha}$, od tu pa dobimo $\alpha = \frac{\delta}{r}$ in z upoštevanjem leve enačbe (4.11)

$$\alpha = \delta\, U_0\, \frac{E[S]}{\mathrm{var}[S]} \left(-\frac{2}{\log \epsilon}\right). \tag{4.14}$$

[15]V praksi običajno pri izračunu čistega tehničnega izida upoštevamo tudi spremembe čistih zavarovalno-tehničnih rezervacij, razliko med čistim obratovalnim dodatkom in dejanskimi obratovalnimi stroški, zmanjšanimi za provizijo pozavarovalnice, itd., ne upoštevamo pa prihodkov in odhodkov od naložb.

Enačba z enostavno zvezo potrjuje pričakovanje, da je pri dani slučajni spremenljivki S optimalni lastni delež α naraščajoča funkcija varnostnega koeficienta, tveganega kapitala in stopnje sprejemljivosti rizika izgube tveganega kapitala, ki je definirana kot recipročna vrednost averzije do rizika izgube tveganega kapitala. Če je $\alpha \geq 1$, pozavarovanje ni potrebno, kar v konkurenčnih razmerah pomeni, da lahko zavarovalnica zmanjša svoj varnostni koeficient δ.

Za vsotno in škodno presežkovno pozavarovanje aproksimativno iskanje optimalnega samopridržaja oziroma prioritete M ni tako enostavno. Zato najprej preverimo, če je sploh potrebno. Brez pozavarovanja po enačbi (4.10) dobimo $R \approx \frac{2\,\delta\,E[S]}{\mathrm{var}[S]}$ in če je $e^{-RU_0} \leq \epsilon$, pozavarovanje ni potrebno. Če pa je potrebno, lahko kar z metodo bisekcije poiščemo tak M, pri katerem desno stran enačbe (4.11) izenačimo s potrebno stopnjo pozavarovanja r.

Pri izbranem M izračunamo $E[S_l]$ in $\mathrm{var}[S_l]$ analogno kot $E[S]$ in $\mathrm{var}[S]$. Najprej izračunamo $E[Y_1]$ in $E[Y_1^2]$. Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju uporabimo enačbi (4.5a) in (4.5b), pri škodno presežkovnem pozavarovanju pa (4.6a) in (4.6b). Nato po enačbah (2.2a) in (2.2b) z Y_1 namesto X_1 izračunamo še $E[S_l]$ in $\mathrm{var}[S_l]$. Ker je $E[S_p] = E[S] - E[S_l]$, imamo z upoštevanjem enačbe (4.12) vse potrebno za izračun desne strani enačbe (4.11). Če dobimo več od r, M zmanjšamo, če dobimo manj od r, ga povečamo. Tako lahko z metodo bisekcije poiščemo M, s katerim izpolnimo enačbo (4.11).

V nadaljevanju predpostavimo, da je slučajna spremenljivka $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ porazdeljena sestavljeno Poissonovo, kjer je $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. V tem primeru je zaradi enačbe (2.5a) $E[S] = \lambda\,E[X_1]$ in zaradi enačbe (2.5b) $\mathrm{var}[S] = \lambda\,E[X_1^2]$. Z upoštevanjem enačb (4.5a) in (4.5b) je za vsotno presežkovno pozavarovanje $E[S_l] = \lambda\,E[X_1]\,F_{Z,1}(M)$, $E[S_p] = \lambda\,E[X_1]\,(1 - F_{Z,1}(M))$ in $\mathrm{var}[S_l] = \lambda\,E[X_1^2]\,F_{Z,2}(M)$. Iz enačbe (4.11) z upoštevanjem enačbe (4.12) dobimo

$$r \;=\; \frac{\delta\,F_{Z,1}(M) \;+\; (\delta \;-\; \delta_p)\,(1 \;-\; F_{Z,1}(M))}{F_{Z,2}(M)}.$$

Enačba je analogna enačbi (4.13) za kvotno pozavarovanje, pri čemer $F_{Z,1}(M)$ igra vlogo α, $F_{Z,2}(M)$ pa vlogo α^2. Če predpostavimo, da je $\delta_p = \delta$, dobimo

$$r \;=\; \frac{\delta\,F_{Z,1}(M)}{F_{Z,2}(M)} \;=\; \frac{\delta}{F_{Z,1}(M)}\,\frac{(F_{Z,1}(M))^2}{F_{Z,2}(M)}.$$

Napravimo še zadnjo poenostavitev in zanemarimo faktor $\frac{\left(F_{Z,1}(M)\right)^2}{F_{Z,2}(M)}$, ki je vsaj za velike M blizu 1 (Straub, 1988, str. 81). Iz $r = \frac{\delta}{F_{Z,1}(M)}$ dobimo $F_{Z,1}(M) = \frac{\delta}{r}$, kar je analogno izrazu $\alpha = \frac{\delta}{r}$ pri kvotnem pozavarovanju. Na enak način za škodno presežkovno pozavarovanje dobimo $F_{X,1}(M) = \frac{\delta}{r}$. Od tu sledi, da pri znanem α, ki ga izračunamo iz enačbe (4.14), maksimalni samopridržaj oziroma prioriteto M za vsotno presežkovno oziroma škodno presežkovno pozavarovanje dobimo z rešitvijo enačb

$$F_{Z,1}(M) \;=\; \frac{E[Z;M]}{E[Z]} \;=\; \alpha\,, \tag{4.15a}$$

$$F_{X,1}(M) \;=\; \frac{E[X_1;M]}{E[X_1]} \;=\; \alpha\,. \tag{4.15b}$$

Če je $\alpha \geq 1$, kakršno koli pozavarovanje ni potrebno, sicer pa za reševanje zgornjih enačb lahko uporabimo metodo bisekcije ali pa vnaprej pripravljene tabele oziroma grafe funkcije $F_{X,1}(x) = \frac{E[X;x]}{E[X]}$ za različne standardne porazdelitvene funkcije $F_X(x)$.

Enačbe (4.14), (4.15a) in (4.15b) nam dajo le približne rezultate, ki se od optimalnih lahko zelo razlikujejo, kar bomo za kvotno in škodno presežkovno pozavarovanje videli v poglavju 5. Enačbi (4.15a) in (4.15b) v bistvu pomenita izenačitev čiste nevarnostne premije pri vsotno presežkovnem oziroma škodno presežkovnem pozavarovanju s čisto nevarnostno premijo pri kvotnem pozavarovanju, s tem pa tudi izenačitev pozavarovalnega dela nevarnostne premije. Vsotno presežkovno in škodno presežkovno pozavarovanje pa sta od kvotnega pozavarovanja mnogo učinkovitejši pozavarovalni obliki, ker bistveno bolj zmanjšata varianco odškodnin. Zato za enako zmanjšanje variance odškodnin, kot ga zagotavlja kvotno pozavarovanje, zadošča manjša pozavarovalna nevarnostna premija, kar pomeni, da sta oceni, dobljeni z enačbama (4.15a) in (4.15b), premajhni.

V praksi se pri določanju parametrov pozavarovanja marsikje še vedno uporablja le izkustvena metoda. Zato velike pozavarovalnice s preprostimi publikacijami poskušajo pomagati svojim cedentom. Zaradi velike kompleksnosti problematike včasih le poljudno predstavijo teoretične rezultate (Friedlos, 1997), poenostavijo izpeljavo (Schmitter, 2001) ali pa navedejo le preprosta pravila za ocenjevanje čez palec (Schmutz, 1999, str. 9). Za v tem razdelku predstavljeno metodo, povzeto po (Straub, 1988), ena največjih svetovnih pozavarovalnic odkrito pove, da daje zelo konservativne ocene (Friedlos, 1997, str. 11). To sicer pomeni večjo varnost zavarovalnice, vendar tudi preveč vode na mlin pozavarovalnice.

Predstavili smo le eno od aproksimativnih metod za t. i. absolutno določanje optimalnih parametrov pozavarovanja, v razdelku 4.4 pa bomo za škodno presežkovno pozavarovanje predstavili še aproksimativni izračun optimalne prioritete M, ki temelji na NP-aproksimaciji. Tu si za ilustracijo oglejmo le še eno od možnosti za v praksi zelo aktualno t. i. relativno določanje parametrov pozavarovanja.

Imejmo n neodvisnih zavarovalnih vrst. S_i naj bodo kosmate agregatne odškodnine, δ_i pa varnostni koeficient zavarovalnice za i-to vrsto. Predpostavimo, da smo po enačbi (4.14) s podatki $E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[S_i]$, $\mathrm{var}[S] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[S_i]$ in $\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i \, E[S_i]}{E[S]}$ za vse zavarovalne vrste skupaj izračunali globalni lastni delež α, radi pa bi določili lastne deleže $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ki bodo zaradi specifičnosti posameznih zavarovalnih vrst bolj primerni od globalnega lastnega deleža. Neznane α_i bi sicer lahko za vsako zavarovalno vrsto določili iz enačbe (4.14), če bi kapital U_0 razdelili na dele, ki se nanašajo na posamezne zavarovalne vrste. To bi sicer lahko naredili enostavno in pravično, vendar bi s tem zanemarili sinergijski učinek, ko s pozitivnim tehničnim izidom v eni zavarovalni vrsti pokrijemo negativni tehnični izid v drugi. Zaradi tega bi (navidezno) potrebovali več pozavarovanja, kar bi povzročilo dodatni in nepotrebni odliv pričakovanega pozitivnega tehničnega izida k pozavarovalnici. Zato neznane α_i raje določimo tako, da bo pričakovani skupni čisti tehnični izid tak, kot bi bil, če bi uporabili optimalno globalno kvotno pozavarovanje z lastnim deležem α. S to zahtevo ob predpostavki, da so varnostni koeficienti pozavarovalnice enaki varnostnim koeficientom zavarovalnice, dobimo pogoj $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \delta_i \, E[S_i] = \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, E[S_i]$. Neznane lastne deleže α_i pa določimo tako, da bo varianca skupnih čistih odškodnin minimalna.

Poiskati moramo vezani ekstrem funkcije $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \mathrm{var}[S_i]$, kar bomo naredili po Lagrangeovi metodi tako, da bomo poiskali ekstrem funkcije

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \operatorname{var}[S_i] \,+\, 2\,\beta \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, E[S_i] \,-\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \delta_i\, E[S_i] \right).$$

Iz

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} \;=\; \alpha_i \operatorname{var}[S_i] \,-\, \beta\, \delta_i\, E[S_i] \;=\; 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dobimo $\alpha_i = \beta\, \frac{\delta_i\, E[S_i]}{\operatorname{var}[S_i]}$, kar vstavimo v enačbo

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial L}{\partial \beta} \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, E[S_i] \,-\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \delta_i\, E[S_i] \;=\; 0$$

in dobimo $\beta = \alpha \sum_{i=1}^{n} \delta_i\, E[S_i] / \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i^2\, E^2[S_i]}{\operatorname{var}[S_i]}$, s tem pa

$$\alpha_i \;=\; \alpha\, \frac{\delta_i\, E[S_i]}{\operatorname{var}[S_i]}\, \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i\, E[S_i]}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i^2\, E^2[S_i]}{\operatorname{var}[S_i]}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Če je $\alpha_i \geq 1$, za i-to zavarovalno vrsto pozavarovanje ni potrebno, sicer pa pri znanem α_i izračunamo maksimalni samopridržaj oziroma prioriteto M_i iz enačb (4.15a) oziroma (4.15b), če je vsotno oziroma škodno presežkovno pozavarovanje primernejše od kvotnega.

4.3 Lundbergova neenačba

V razdelku 4.2 smo izhodiščno Cramèrjevo neenačbo (4.7), ki velja za poljubno izbrani $h > 0$, uporabili le za izpeljavo enačb za primer, ko nas je zanimala verjetnost izgube tveganega kapitala periodično ob koncu vsakega leta, torej s $h = 1$. V praksi nas zanima verjetnost izgube tveganega kapitala kvečjemu bolj pogosto, zato naj bo $0 < h \leq 1$, čeprav enačbe iz razdelka 4.2 veljajo za vsak $h > 0$. Seveda je slučajne spremenljivke S, S_l in S_p, ki predstavljajo letne agregatne odškodnine, potrebno zamenjati s slučajnimi spremenljivkami, ki se nanašajo na obdobje h let, konstante c, c_l in c_p, ki pomenijo letni pritok tehnične premije, pa je treba nadomestiti s pritokom tehnične premije v h letih. Zaradi predpostavke o enakomernem pritoku tehnične premije zadošča, da jih pomnožimo s h.

Podrobneje si bomo ogledali primer, ko je slučajna spremenljivka S porazdeljena sestavljeno Poissonovo in se enačba (4.9) zaradi enačbe (2.4) poenostavi v

$$\lambda\,(M_X(R) \,-\, 1) \,-\, c\,R \;=\; 0. \tag{4.16}$$

Če je mogoče karakteristično funkcijo neke slučajne spremenljivke za vsak $n \in \mathbb{N}^+$ zapisati kot n-to potenco neke druge karakteristične funkcije, je po definiciji neomejeno deljiva, ustrezno slučajno spremenljivko pa je zaradi enačbe (P1.9) mogoče zapisati kot vsoto n neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Naj bo $h = \frac{1}{n}$ za poljubno izbrani $n \in \mathbb{N}^+$. Karakteristično funkcijo sestavljeno Poissonovo porazdeljene slučajne spremenljivke S zaradi enačbe (2.3) lahko zapišemo kot

$$\varphi_S(t) \;=\; \left(e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(t)-1)} \right)^n .$$

Ker je $e^{\frac{\lambda}{n}(\varphi_X(t)-1)}$ karakteristična funkcija sestavljeno Poissonovo porazdeljene slučajne spremenljivke $S_h = \sum_{i=1}^{N_h} X_i$ za $N_h \sim \mathrm{Po}(\frac{\lambda}{n})$, je sestavljena Poissonova porazdelitev neomejeno deljiva. Slučajno spremenljivko S, ki predstavlja letne agregatne odškodnine, lahko zapišemo kot seštevek n neodvisnih in enako sestavljeno Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk $S_{h1}, S_{h2}, \ldots, S_{hn}$. Verjetnost izgube tveganega kapitala $\Psi_\infty(U_0)$ v točkah $t = h, 2h, \ldots$ je navzgor omejena z e^{-RU_0}, kjer koeficient R izračunamo iz enačbe (4.16), prirejene za periodo $h = \frac{1}{n}$ let. To pa pomeni, da namesto parametra λ upoštevamo $\frac{\lambda}{n}$, namesto c pa $\frac{c}{n}$, zaradi česar se enačba (4.16) le pomnoži z $\frac{1}{n}$, kar ne vpliva na njene morebitne rešitve. Če bi n poslali v neskončnost, bi morebitno izgubo tveganega kapitala preverjali praktično vsak trenutek, verjetnost izgube tveganega kapitala pa bi bila še vedno navzgor omejena z e^{-RU_0}. Z drugimi besedami to pomeni znano Lundbergovo neenačbo

$$\Psi(U_0) \quad \leq \quad e^{-RU_0},$$

kjer je R najmanjši pozitivni koren enačbe

$$\lambda\,(M_X(t)) \;-\; 1) \;-\; c\,t \quad = \quad 0.$$

4.4 Določanje parametrov optimalnega pozavarovanja pri dani stopnji tveganja

Kriterijev za optimalnost pozavarovanja je več, večina pa jih je povezanih s čistim tehničnim izidom $P_l - S_l$ ali verjetnostjo izgube tveganega kapitala. Tako je klasičen cilj optimiziranja doseči minimalno varianco $\mathrm{var}[P_l - S_l]$ pri dani vrednosti $E[P_l - S_l]$. Za proporcionalna pozavarovanja je temu cilju ekvivalenten cilj najti maksimum od $E[P_l - S_l]$ pri dani varianci $\mathrm{var}[P_l - S_l]$ (Bühlmann, 1970, str. 114). Za cilj si lahko postavimo tudi maksimalni koeficient R, ki nastopa v Lundbergovi neenačbi, pri pogoju, da je $E[P_l - S_l]$ več ali enako določeni vrednosti (glej npr. Dickson, 1997). Tu bomo za kriterij optimalnosti pozavarovanja privzeli maksimalni pričakovani čisti tehnični izid ob koncu poslovnega leta, vendar ob dodatnem pogoju. Verjetnost, da bo čisti tehnični izid ob koncu leta manjši ali enak $-U_r$, kjer je U_r kapital, ki ga je zavarovalnica pripravljena tvegati, ne sme biti večja od ϵ. Tako želimo maksimizirati $E[P_l - S_l]$ ob pogoju $P(P_l - S_l < \; -U_r) \leq \epsilon$. Kapital U_r lahko predstavlja celotni razpoložljivi kapital U_0, ki je lahko nekajkrat večji od minimalnega kapitala zavarovalnice[16], lahko pa predstavlja le del minimalnega kapitala. Mogoče je tudi, da za različne U_r predpišemo različne stopnje tveganja ϵ in namesto enega zahtevamo izpolnitev več dodatnih analognih pogojev. V takem primeru se na koncu običajno izkaže, da je ključni omejitveni pogoj le eden izmed njih. Čeprav vnaprej ne vemo, kateri, lahko računamo le z enim pogojem. Izpolnjenost morebitnih ostalih pogojev po izračunu preverimo in ključni omejitveni pogoj zamenjamo, če je potrebno.

Mejna verjetnost ϵ je v splošnem odvisna od problema, ki ga rešujemo. Če gledamo le posamezno zavarovalno vrsto, lahko dopustimo večji ϵ, saj lahko pričakujemo, da se bo negativni tehnični izid v eni zavarovalni vrsti pokril s pozitivnim tehničnim izidom v drugi zavarovalni vrsti. Prav tako na ϵ vpliva morebitni obstoj in višina izravnalnih rezervacij. Zavarovalnice namreč za določene zavarovalne vrste v letih, ko so tehnični izidi boljši od povprečnih, polnijo izravnalne rezervacije, v letih, ko so tehnični izidi slabši od povprečja, pa jih praznijo. Ker izravnalne rezervacije sodijo med zavarovalno-tehnične rezervacije, zavarovalnice s tem ublažijo

[16] Ob koncu leta 1995 je v Evropski zvezi skupni razpoložljivi kapital za premoženjska zavarovanja predstavljal več kot 3-kratnik minimalnega kapitala (Report to the Insurance Committee, 1997, str. 4 in 17).

morebitna velika nihanja v škodnem dogajanju, ne da bi zmanjševale kapital. Glede na dejstvo, da se izravnalne rezervacije nanašajo na morebitne bodoče obveznosti, ki še niso nastale, bi jih lahko upoštevali tudi v U_r. Pravzaprav bi jih lahko upoštevali tudi pri ugotavljanju kapitalske ustreznosti zavarovalnice oziroma v U_0 (glej npr. Report of the working group on non-life technical provisions to the IC Solvency Subcommittee, 2002, str. 5).

Kadar gledamo na zavarovalnico kot celoto, torej vse zavarovalne vrste skupaj, je ϵ odvisen predvsem od stopnje averzije vodstva zavarovalnice do rizika nesolventnosti. Tako lahko za riziko nesolventnosti zavarovalnice v enem letu dopustimo npr. $\epsilon = 0{,}0001$, v desetih letih $\epsilon = 0{,}001$, za trajno poslovanje pa $\epsilon = 0{,}01$ (Beard, Pentikäinen, Pesonen, 1984, str. 317). Pri določanju časovnega obzorja pa je potrebno upoštevati tudi zavarovalne vrste, s katerimi se zavarovalnica ukvarja. Za dolgoročna življenjska zavarovanja običajno zavarovalne premije ne moremo sproti, npr. letno, prilagajati, kot to lahko storimo pri premoženjskih zavarovanjih. Kljub temu pa dejanska nesolventnost premoženjskih zavarovalnic ni tako redka, kot bi morebiti pričakovali. Tako je npr. v ZDA v letih od 1984 do 1993 število premoženjskih zavarovalnic, ki so postale nesolventne, redno predstavljalo vsaj 1 odstotek od vseh delujočih zavarovalnic, ki so se ukvarjale s premoženjskimi zavarovanji, v najbolj kritičnih letih pa več kot 2 odstotka (Solvency of non-life insurers, 2000, str. 5).

V normalnih razmerah zavarovalnica s pozavarovanjem na pozavarovalnico prenaša tudi del pozitivnega kosmatega tehničnega izida. Zato se optimiziranje po prej navedenem kriteriju optimalnosti reducira na iskanje spodnje meje potrebnega pozavarovanja, pri kateri se za $U_r \geq 0$ verjetnost, da bo čisti tehnični izid ob koncu leta manjši ali enak $-U_r$, izenači z ϵ. Tako moramo poiskati rešitev enačbe $P(P_l - S_l \leq -U_r) = \epsilon$ oziroma $P(S_l \geq P_l + U_r) = \epsilon$, kar nam da enačbo

$$F_{S_l}(P_l \; + \; U_r) \quad = \quad 1 \; - \; \epsilon. \tag{4.17}$$

Zgornjo enačbo lahko rešimo, če poznamo porazdelitveno funkcijo čistih agregatnih odškodnin $F_{S_l}(x)$, seveda pa moramo poznati tudi odvisnost čiste agregatne tehnične premije P_l od parametrov pozavarovanja.

Pri kvotnem pozavarovanju je $P_l = \alpha c = \alpha\,(1+\delta)\,E[S]$ in $S_l = \alpha S$. Ker je

$$F_{S_l}(x) \quad = \quad P(S_l \leq x) \quad = \quad P(\alpha S \leq x) \quad = \quad P\left(S \leq \frac{x}{\alpha}\right) \quad = \quad F_S\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

je $1 - \epsilon = F_{S_l}(P_l + U_r) = F_S(\frac{\alpha c + U_r}{\alpha}) = F_S(c + \frac{U_r}{\alpha})$ in od tu

$$\alpha \quad = \quad \frac{U_r}{F_S^{-1}(1-\epsilon) \; - \; c} \quad = \quad \frac{U_r}{F_S^{-1}(1-\epsilon) \; - \; (1+\delta)\,E[S]}\,. \tag{4.18}$$

Če je $\alpha < 0$ ali $\alpha \geq 1$, potem pri $U_r \geq 0$ pozavarovanje ni potrebno.

Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju z maksimalnim samopridržajem M je izračun precej bolj zapleten, saj se porazdelitvena funkcija $F_{S_l}(x)$ ne da enostavno izraziti s porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$. Prav tako čiste agregatne tehnične premije P_l ne moremo preprosto izraziti s kosmato agregatno tehnično premijo c. Vsotno presežkovno pozavarovanje je sicer proporcionalno pozavarovanje, vendar v nasprotju s kvotnim pozavarovanjem proporcionalnost velja le za vsak riziko posebej, za celoten portfelj pa le v idealiziranih razmerah, ki jih v praksi ni.

Pri kvotnem pozavarovanju so pozavarovani tudi majhni riziki, za katere pozavarovanje sploh ni potrebno, zanje pa velja isti lastni delež α, kot velja za velike rizike, za katere je skupni α morda premajhen. Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju pa pozavarujemo le rizike, ki preveč štrlijo iz povprečja, in za vsakega posebej določimo lastni delež. Tako v bistvu le porežemo rizične konice in s tem portfelj homogeniziramo. Razmerje med čistimi agregatnimi odškodninami in kosmatimi agregatnimi odškodninami ni enako razmerju med čisto agregatno tehnično premijo in kosmato agregatno tehnično premijo. Obe razmerji sta sicer obteženi povprečji lastnih deležev posameznih rizikov, vendar so v prvem primeru uteži skupne pričakovane kosmate odškodnine, ki se nanašajo na posamezne rizike, v drugem pa kosmata tehnična premija. Izenačitev obeh razmerij bi dosegli le v idealiziranih razmerah, ko bi bila razmerja med tehnično premijo in pričakovanimi odškodninami za vse rizike enaka. K temu v praksi s primerno določitvijo premijskih stopenj sicer težimo, vendar smo še daleč od cilja.

Prvo izboljšavo izračuna po metodi iz razdelka 4.2 naredimo že s tem, da optimalni lastni delež α za kvotno pozavarovanje izračunamo po enačbi (4.18) namesto po enačbi (4.14). Če je $\alpha \geq 1$, pozavarovanje ni potrebno, sicer pa rešimo enačbo (4.15a). Dobljeni M vzamemo za začetni približek.

V razdelku 4.1 smo ugotovili, da je pri vsotno presežkovnem pozavarovanju za tiste rizike, za katere je $EML > M$, lastni delež zavarovalnice $\frac{M}{EML}$, ostalih pa v pozavarovanje ne prijavimo. Zato je smiselno, da obravnavani portfelj razdelimo na del, ki za vsotno presežkovno pozavarovanje gotovo ne pride v poštev in za katerega je čista tehnična premija enaka kosmati tehnični premiji, in del, ki bi lahko prišel v poštev za pozavarovanje. Pogojnik je potreben zato, da pri izračunu ne bi izpadli riziki, ki še niso vsotno presežkovno pozavarovani, vendar bi pri manjšem maksimalnem samopridržaju od trenutno veljavnega morali biti. Če takih rizikov ne moremo identificirati, ali pa zanje nimamo zabeleženega podatka o EML, upoštevamo le tiste rizike, ki so že vsotno presežkovno pozavarovani. Zanje potrebne podatke gotovo imamo, ker moramo pozavarovalnici s t. i. borderoji sporočati podatke o premijah in odškodninah za posamezne pozavarovane rizike.

Za različne rizike je razmerje med EML in zavarovalno vsoto različno. EML lahko znaša le 20 odstotkov od zavarovalne vsote, lahko pa je enak zavarovalni vsoti. Pri požarnih zavarovanjih, kjer uporabljamo EML, je zavarovalna premija običajno odvisna od zavarovalne vsote. Zato za izračun čiste agregatne tehnične premije ni dovolj le poznavanje porazdelitvene funkcije ocenjenih maksimalnih škod EML za obravnavani portfelj, oziroma njene izpeljanke $F_{Z,1}(x)$, ki smo jo uporabili pri aproksimativnem izračunu v razdelku 4.2. Tam so se vse podrobnosti o izračunu premije izgubile oziroma so bile skupno upoštevane v konstanti c. Za natančen izračun pa moramo poznati vse elemente, ki vplivajo na izračun premije, npr. zavarovalno vsoto, premijsko stopnjo itd., oziroma že izračunano kosmato tehnično premijo. Del portfelja, ki pride v poštev za vsotno presežkovno pozavarovanje, običajno ni velik. Zato predpostavimo, da za vsakega od n rizikov, ki pridejo v poštev za vsotno presežkovno pozavarovanje, poznamo vse potrebne podatke. EML_i je ocenjena maksimalna pričakovana škoda, ki se nanaša na i-ti riziko, c_i kosmata tehnična premija, $\alpha_i = \min\{\frac{M}{EML_i}, 1\}$ pa lastni delež. Če je P_{l1} skupna kosmata tehnična premija za del portfelja, ki za vsotno presežkovno pozavarovanje ne pride v poštev, potem je $P_l = P_{l1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$.

V primeru, ko imamo vse potrebne podatke za vse rizike, nam portfelja ne bi bilo treba razbijati na dva dela, čisto agregatno tehnično premijo pa bi izračunali kot $P_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$, kjer se zdaj

n nanaša na vse rizike. Razbijanje portfelja na dva dela pa je smiselno tudi v takem primeru, ker sicer v iterativnem postopku za večji del portfelja izračun čiste tehnične premije po nepotrebnem ponavljamo. Ko namreč enkrat imamo začetni približek M, z njim po eni od eksaktnih metod, lahko pa tudi s simulacijo, izračunamo porazdelitveno funkcijo $F_{S_l}(x)$ za celoten obravnavani portfelj in izračunamo $F_{S_l}(P_l + U_r)$. Če dobimo več od $1 - \epsilon$, M povečamo, če dobimo manj, ga zmanjšamo. Tako lahko z metodo bisekcije poiščemo rešitev enačbe (4.17).

Tudi pri izračunu čistih agregatnih odškodnin je smiselno računanje za vsak del portfelja posebej. Seveda pa moramo tokrat pri izračunu čistih agregatnih odškodnin za (potencialno) vsotno presežkovno pozavarovani del portfelja namesto $F_X(x)$ upoštevati porazdelitveno funkcijo $F_Y(x)$, ki se nanaša na obravnavani del portfelja in je definirana z enačbo (4.1), oziroma njeno diskretno verzijo. Ves opisani postopek je precej zapleten in zamuden, ker pa zadošča, da maksimalni samopridržaj določimo le enkrat letno pred podpisom ustrezne pozavarovalne pogodbe, je sprejemljiv.

Pri škodno presežkovnem pozavarovanju s prioriteto M se porazdelitvena funkcija $F_{S_l}(x)$ ne da enostavno izraziti s porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$, vendar lahko na enak način kot $F_S(x)$ izračunamo tudi $F_{S_l}(x)$. Tokrat ni težav s tem, da je izračun čiste odškodnine iz kosmate odškodnine odvisen od lastnega deleže rizika, na katerega se odškodnina nanaša. V izračunu agregatnih odškodnin moramo le za $x \geq M$ namesto $F_X(x)$ upoštevati 1. To pa zlahka naredimo s tem, da pri ekvidistantni diskretizaciji porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ v algoritmu 1 na strani 23 za x_{max} vzamemo M in ne upoštevamo dinamičnega ustavljanja, pri simulaciji pa naključno generirane odškodnine, ki presegajo M, postavimo na M. Tudi čisto tehnično premijo P_l enostavno izračunamo. Ker je škodna pogostost neodvisna od prioritete M, je razmerje med čisto in kosmato nevarnostno premijo odvisno le od razmerja med pričakovano čisto in pričakovano kosmato odškodnino, ki je enako $\frac{E[X;M]}{E[X]}$. Razmerje med čisto in kosmato tehnično premijo pa je odvisno še od varnostnih koeficientov zavarovalnice in pozavarovalnice ter je

$$\frac{P_l(M)}{c} = \frac{E[X]\,(1+\delta) - (E[X] - E[X;M])\,(1+\delta_p)}{E[X]\,(1+\delta)} = \frac{E[X;M]\,(1+\delta_p) - (\delta_p - \delta)\,E[X]}{E[X]\,(1+\delta)}$$

Od tu dobimo

$$P_l(M) \quad = \quad c\left(\frac{1+\delta_p}{1+\delta}\,F_{X,1}(M) \; - \; \frac{\delta_p - \delta}{1+\delta}\right). \tag{4.19}$$

Začetni približek M izračunamo analogno kot pri vsotno presežkovnem pozavarovanju. Če je lastni delež α za kvotno pozavarovanje, izračunan iz enačbe (4.18), večji ali enak 1, pozavarovanje ni potrebno, sicer pa rešimo enačbo (4.15b). Z začetnim približkom M po eni od eksaktnih metod, lahko pa tudi s simulacijo, izračunamo porazdelitveno funkcijo $F_{S_l}(x)$ in izračunamo $F_{S_l}(P_l + U_r)$. Če dobimo več od $1 - \epsilon$, M povečamo, če dobimo manj, ga zmanjšamo. Tako lahko z metodo bisekcije poiščemo rešitev enačbe (4.17).

Opisani postopek zahteva razmeroma veliko časovno zahtevnih izračunov porazdelitvene funkcije $F_{S_l}(x)$. Zato je priporočljivo, da začetni približek izračunamo čim bolj natančno. Namesto enačbe (4.15b) lahko uporabimo tudi kakšno drugo aproksimativno metodo, ki ne zahteva preveč računanja. Tako si lahko za izhodišče po enačbah (4.3), (4.4), (4.6a), (4.6b) in (4.6c) naredimo tabelo razmerij med začetnimi momenti čistih in kosmatih agregatnih odškodnin za različne M (glej npr. Beard, Pentikäinen, Pesonen, 1984, str. 86), nato pa iz znanih prvih treh momentov kosmatih agregatnih odškodnin izračunamo prve tri momente čistih agregatnih odškodnin. Potem z eno od aproksimacijskih metod, ki temeljijo na prvih treh momentih, izračunamo aproksimativno vrednost za $F_{S_l}(P_l + U_r)$. Tako lahko dopolnimo celotno tabelo in poiščemo ustrezni M ali pa uporabimo metodo bisekcije in M povečamo oziroma zmanjšamo, če dobimo več oziroma manj od $1 - \epsilon$.

Kadar se odločimo za iskanje začetnega približka na osnovi NP-aproksimacije agregatnih odškodnin, je postopek relativno enostaven. Zaradi enačbe (3.7) enačba (4.17) preide v

$$P_l(M) + U_r \;=\; \mu_S(M) + \sigma_S(M)\left(y_\epsilon + \frac{\gamma_S(M)}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right), \tag{4.20}$$

kjer je $y_\epsilon = \Phi^{-1}(1-\epsilon)$, $\mu_S(M)$, $\sigma_S(M)$ in $\gamma_S(M)$ pa izračunamo s pomočjo enačb (2.2a), (2.2b) in (2.2c), v katerih namesto X_1 upoštevamo Y. Potrebne momente slučajne spremenljivke Y izračunamo po enačbah (4.6a), (4.6b) in (4.6c), še enostavneje pa kar neposredno z upoštevanjem ekvidistantno diskretizirane gostote verjetnosti slučajne spremenljivke X, ki jo korigiramo pri M. Za sestavljeno Poissonovo porazdelitev se enačba (4.20) zaradi enačb (2.5a), (2.5b) in (2.5c) poenostavi v

$$P_l(M) + U_r \;=\; \lambda\, E[Y] + (\lambda\, E[Y^2])^{\frac{1}{2}}\left(y_\epsilon + \frac{\lambda\, E[Y^3]}{6\,(\lambda\, E[Y^2])^{\frac{3}{2}}}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right).$$

Ker je $Y \le M$, se hitro prepričamo, da je $E[Y^2] \le M \cdot E[Y]$ oziroma $E[Y^2] = k^2(M) \cdot M \cdot E[Y]$, kjer je $0 \le k(M) \le 1$. Prav tako je $E[Y^3] \le M \cdot E[Y^2]$. Naj bo P_{ln} čista agregatna nevarnostna premija. Pri predpostavki $\delta_p = \delta$ je $P_l(M) = (1+\delta)\,\lambda\, E[Y] = (1+\delta)\,\lambda\, E[X; M] = (1+\delta)\, P_{ln}$, zgornjo enačbo za praktično zanimive $\epsilon \le 0{,}15$, ko je $y_\epsilon > 1$, pa lahko prepišemo v

$$U_r \;\le\; y_\epsilon\, k(M)\sqrt{M \cdot P_{ln}} - \delta\, P_{ln} + \frac{M}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right).$$

Običajno je prioriteta M majhna v primerjavi s čisto agregatno nevarnostno premijo P_{ln}, zato zadnji člen lahko zanemarimo, kar pa pomeni tudi prehod od NP-aproksimacije na normalno aproksimacijo. Ker je v zgornji neenačbi neenačaj izključna posledica navzgor ocenjenega zadnjega člena, ki je pozitiven, se po njegovi izpustitvi neenačaj obrne. Glede na relativno majhnost zanemarjenega člena lahko zapišemo enačbo

$$U_r \;\approx\; y_\epsilon\, k(M)\sqrt{M \cdot P_{ln}} - \delta\, P_{ln},$$

iz katere dobimo enačbo

$$M \;\approx\; \frac{(U_r + \delta\, P_{ln})^2}{y_\epsilon^2\, k^2(M)\, P_{ln}} \;=\; \frac{U_r\left(1 + \delta\,\frac{P_{ln}}{U_r}\right)^2}{y_\epsilon^2\, k^2(M)\,\frac{P_{ln}}{U_r}},$$

ki pa ima tudi desno stran odvisno od M. S pomožnima spremenljivkama $w = \frac{M}{U_r}$ in $z = \frac{U_r}{P_{ln}}$ zgornjo enačbo prepišimo v $w \approx \frac{(z + \delta)^2}{y_\epsilon^2\, k^2(M)\, z}$. Če privzamemo, da je $k(M)$ konstanta, iz $\frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{1}{y_\epsilon^2\, k^2(M)}\left(1 - \frac{\delta^2}{z^2}\right) = 0$ dobimo $z = \delta$ in $w \approx \frac{4\,\delta}{y_\epsilon^2\, k^2(M)}$ oziroma

$$M \;\approx\; \frac{4}{y_\epsilon^2\, k^2(M)}\,\delta\, U_r. \tag{4.21}$$

Ker je $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} > 0$ za $z > 0$, smo dobili minimum, kar pomeni, da smo na varni strani.

Za praktične primere velja ocena $0{,}5 \le k(M) \le 0{,}8$ (Beard, Pentikäinen, Pesonen, 1984, str. 140), kar nam na osnovi enačbe (4.21) omogoča določiti začetni približek z oceno čez palec. Tako je za $\epsilon = 0{,}01$ $y_\epsilon = 2{,}326$, kar nam da $M \approx 2{,}1\,\delta\,U_r$ za $k(M) = 0{,}6$ (Beard, Pentikäinen, Pesonen, 1984, str. 140 in 150), $M \approx 1{,}5\,\delta\,U_r$ za $k(M) = 0{,}7$ (Daykin, Pentikäinen, Pesonen, 1994, str. 175) oziroma $M \approx 1{,}1\,\delta\,U_r$ (Hart, Buchanan, Howe, 1996, str. 127). Z večanjem letnice izdaje knjige M pada, kar je verjetno posledica večje previdnosti. Tako je v (Hart, Buchanan, Howe, 1996) uporabljen $k(M) = \sqrt{0{,}6} \approx 0{,}775$, ki po naši formuli da $M \approx 1{,}2\,\delta\,U_r$. Razlika med $1{,}1$ in $1{,}2$ izvira iz vmesnega varnega zaokroževanja že na nivoju izhodiščne enačbe $U_r \approx 1{,}9\sqrt{M \cdot P_{ln}} - \delta\,P_{ln}$ (Hart, Buchanan, Howe, 1996, str. 126). V (Daykin, Pentikäinen, Pesonen, 1994, str. 160) je analogna enačba $U_r \approx 1{,}6\sqrt{M \cdot P_{ln}} - \delta\,P_{ln}$, v (Beard, Pentikäinen, Pesonen, 1984, str. 140) pa $U_r \approx 1{,}4\sqrt{M \cdot P_{ln}} - \delta\,P_{ln}$. Za $\epsilon = 0{,}05$ je $y_\epsilon = 1{,}645$. Ker je $\frac{2{,}326^2}{1{,}645^2} \approx 2$, za $\epsilon = 0{,}05$ po enačbi (4.21) dobimo 2-krat večje M kot za $\epsilon = 0{,}01$.

Zanimivo je, da z uporabo normalne in NP-aproksimacije tvegani kapital $U_r = U_r(M)$, s katerim pri dani prioriteti M dosežemo predpisano stopnjo tveganja ϵ, v splošnem primeru ni naraščajoča funkcija spremenljivke M, ker pri določenem pozitivnem M doseže minimum (glej Centeno, 1995).

V praksi večkrat kombiniramo več pozavarovalnih oblik, pri tem pa v pozavarovalnih pogodbah predpišemo vrstni red učinkovanja. Pogosta je kombinacija vsotno presežkovnega pozavarovanja, s katerim velikim rizikom porežemo vrhove, nato pa na (vmesnih) čistih odškodninah uporabimo še škodno presežkovno pozavarovanje. Podobna je kombinacija škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja, ko najprej porežemo velike odškodnine, nato pa na (vmesnih) čistih odškodninah uporabimo še kvotno pozavarovanje. V praksi se uporablja tudi kombinacija vsotno presežkovnega pozavarovanja z maksimalnim samopridržajem M in kvotnega pozavarovanja z lastnim deležem α, ki pa je spet proporcionalno pozavarovanje. Zato ta kombinacija ne prinese nič bistveno novega, saj bi jo za vsotno presežkovno pozavarovani del portfelja lahko nadomestili z vsotno presežkovnim pozavarovanjem z lastnim deležem αM. Bolj smiselna je kombinacija, ko kvotno pozavarovanje velja le za tisti del portfelja, ki ne pride v poštev za vsotno presežkovno pozavarovanje, ker je $EML \le M$. Vendar gre v tem primeru dejansko za dva podportfelja, od katerih je eden pozavarovan z vsotno presežkovnim, drugi pa s kvotnim pozavarovanjem.

Pogosto vsotno presežkovnemu ali škodno presežkovnemu pozavarovanju sledi škodno presežkovno pozavarovanje za primer katastrofe (t. i. zaščita samopridržaja). V tem primeru najprej upoštevamo primarno vsotno ali škodno presežkovno pozavarovanje, nato pa na skupne čiste odškodnine, ki so posledica istega katastrofalnega škodnega dogodka, uporabimo škodno presežkovno pozavarovanje za primer katastrofe.

Tu si oglejmo le kombinacijo škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja. Sedaj imamo dva nivoja čiste tehnične premije in čistih odškodnin, zato naj se $P_l(M)$ in $S_l(M)$ nanašata na vmesne vrednosti po učinkovanju škodno presežkovnega pozavarovanja s prioriteto M, končne čiste vrednosti po učinkovanju kvotnega pozavarovanja pa dobimo z množenjem z α. $P_l(M)$ in $S_l(M)$ s stališča kvotnega pozavarovanja prevzemata vlogo kosmatih vrednosti, $P_l(M)$ pa tudi vlogo konstante c, zato levo enačbo (4.18) lahko zapišemo kot

$$\alpha(M) \;=\; \frac{U_r}{F^{-1}_{S_l(M)}(1-\epsilon) \;-\; P_l(M)}. \tag{4.22}$$

Le v posebnem primeru, ko je $\delta_p = \delta$ in s tem $P_l(M) = (1+\delta)\, E[S_l(M)]$, bi enačbo (4.22) lahko dopolnili z enačbo, analogno desni enačbi (4.18). Če je $\delta_p > \delta$, je $P_l(M) < (1+\delta)\, E[S_l(M)]$, če pa je $\delta_p < \delta$, je $P_l(M) > (1+\delta)\, E[S_l(M)]$.

Naj bo M_0 optimalna prioriteta, ki izpolni enačbo (4.17). Tedaj je $F^{-1}_{S_l(M_0)}(1-\epsilon) = P_l(M_0)+U_r$ in po enačbi (4.22) dobimo $\alpha(M_0) = 1$, kar smo tudi pričakovali. Za $M < M_0$ po enačbi (4.22) dobimo $\alpha(M) > 1$, za $M > M_0$ pa $\alpha(M) < 1$. V drugem primeru je izpolnjen tudi pogoj (4.17). Če želimo najti optimalno kombinacijo škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja, moramo najti tak $M \geq M_0$, da bo izraz $\alpha(M)\, E[P_l(M) - S_l(M)]$ maksimalen. Tovrsten izračun brez velikih težav lahko vgradimo že v postopek, s katerim iščemo M_0. Vprašanje je le, ali bomo res dobili kaj novega ali pa se bo kot optimalna izkazala kombinacija $M = M_0$ in $\alpha = 1$, torej le škodno presežkovno pozavarovanje, kot se to lahko zgodi pri drugačnih kriterijih optimalnosti, o čemer glej npr. (Gerber, 1979, str. 129) ali (Sundt, 1993, str. 117). Teoretično bi se v skrajnem primeru, ko bi bil varnostni koeficient pozavarovalnice δ_p nesorazmerno večji od δ, kot optimalna lahko izkazala tudi kombinacija $M = \infty$ in z enačbo (4.18) določeni α, torej le kvotno pozavarovanje.

Vprašanje, kako je v splošnem primeru, pustimo odprto, oglejmo pa si primer, ko je $\delta_p = \delta$. Tedaj je $P_l(M) = (1+\delta)\, E[S_l(M)]$ in $E[P_l(M) - S_l(M)] = \delta\, E[S_l(M)]$. V tem primeru moramo maksimizirati izraz

$$\alpha(M)\, \delta\, E[S_l(M)] \quad = \quad \frac{U_r\, \delta\, E[S_l(M)]}{F^{-1}_{S_l(M)}(1-\epsilon) \;-\; (1+\delta)\, E[S_l(M)]} \quad = \quad \frac{U_r\, \delta}{\frac{F^{-1}_{S_l(M)}(1-\epsilon)}{E[S_l(M)]} \;-\; (1+\delta)}.$$

Desna stran je strogo padajoča funkcija spremenljivke $z(M) = \frac{F^{-1}_{S_l(M)}(1-\epsilon)}{E[S_l(M)]}$, zato maksimum dosežemo takrat, ko je $z(M)$ minimalen. Pri katerem M dosežemo minimum, ne bomo računali eksaktno. Omenimo pa, da po eni izmed metod določanja kosmate tehnične premije varnostni koeficient δ izračunamo iz enačbe $\frac{F^{-1}_S(1-\epsilon)}{E[S]} = 1+\delta$, kjer pa seveda ni nujno, da upoštevamo isti ϵ. Tako izkustveno vemo, da je $z(M)$ naraščajoča funkcija, kar je pravzaprav tudi eden od razlogov, da potrebujemo škodno presežkovno pozavarovanje, če nočemo varnostnega koeficienta povečati nad tržno sprejemljive vrednosti. Zato lahko izkustveno ugotovimo, da pri pogoju $M \geq M_0$ funkcija $z(M)$ doseže minimum pri $M = M_0$. To pa pomeni, da v tem posebnem primeru v optimalni kombinaciji škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja dejansko nastopa le škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M_0.

Kljub zgornji izkustveni ugotovitvi opisani postopek kombiniranja škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja včasih le ima smisel. Kadar je iskanje optimalnega škodno presežkovnega pozavarovanja zaradi pogostega numerično zahtevnega izračunavanja porazdelitvene funkcije $F_{S_l(M)}(x)$ časovno neizvedljivo, se lahko zadovoljimo s suboptimalno rešitvijo. V takem primeru zadošča, da najdemo dovolj velik M, za katerega je $F_{S_l(M)}(P_l(M)+U_r) < 1-\epsilon$, nato pa škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M kombiniramo s kvotnim pozavarovanjem z lastnim deležem α, izračunanim iz enačbe (4.22). Na ta način sicer ne najdemo optimuma, vendar pa poslujemo v okviru sprejemljivega tveganja, ker je izpolnjena enačba (4.17).

Za obratno kombinacijo, ko kvotnemu pozavarovanju sledi škodno presežkovno pozavarovanje, pri tem pa želimo doseči maksimalni koeficient R iz Lundbergove neenačbe, glej npr. (Centeno, 1991).

5 Praktičen primer

V tem poglavju si bomo na primeru ogledali, kako lahko uporabimo teorijo iz prejšnjih poglavij za reševanje nekaterih aktuarskih problemov. Ker ne želimo razkrivati poslovnih skrivnosti, ne bomo delali s konkretnimi podatki kakšne od slovenskih zavarovalnic. Do agregatnih odškodnin, ki so jedro problema, bi radi prišli hitro. Zato si bomo verjetnostno funkcijo števila odškodnin kar izbrali. Enako bomo naredili tudi za porazdelitveno funkcijo višine odškodnin, od tu pa bomo nadaljevali po kratkem ovinku. Za izbrano porazdelitveno funkcijo bomo generirali odškodnine, nato pa iz dobljenega vzorca ponovno ugotavljali tip porazdelitvene funkcije in njene parametre, ki se bodo od izhodiščnih razlikovali. Tako si bomo omogočili primerjavo agregatnih odškodnin, dobljenih z upoštevanjem dejanske porazdelitvene funkcije, in agregatnih odškodnin, dobljenih z upoštevanjem porazdelitvene funkcije, določene s pomočjo vzorca. Tovrstno primerjanje v praksi sicer ni mogoče, ker dejanske porazdelitvene funkcije ne poznamo, prav zato pa je zelo poučno. Omogoči nam pridobiti občutek za oceno neodstranljive napake, ki nastane zaradi naključja.

Jedro primera je primerjava rezultatov aproksimativnih in eksaktnih izračunov nekaterih parametrov pozavarovanja. Razlike so odvisne od metode in so velike. Tistim zavarovalnicam, ki maksimalne lastne deleže izkustveno določajo preveč previdno, bi se investicija v natančnejše izračune verjetno zelo hitro povrnila.

5.1 Izhodiščni podatki

Predpostavimo, da imamo 10.000 zavarovalnih polic, s katerimi so zavarovani riziki iz neke homogene nevarnostne skupine. Na osnovi števila škod oziroma odškodnin v preteklih letih smo ugotovili, da je letna škodna pogostost 5 odstotkov, število odškodnin pa je porazdeljeno po Poissonovem porazdelitvenem zakonu s parametrom $\lambda = 0{,}05$. Zaradi aditivnosti neodvisnih Poissonovo porazdeljenih slučajnih spremenljivk za število odškodnin za celotno nevarnostno skupino velja $N \sim \mathrm{Po}(500)$. Vzemimo še $E[N] = 500$ odškodnin, ki smo jih po metodi iz razdelka 3.8 naključno generirali za Paretovo porazdelitev s parametroma $\alpha = 1{,}6$ in $\lambda = 1.000$, pri tem pa smo za enoto vzeli 1.000 SIT. Naključno izbrane vrednosti so razvidne iz priloge P4. Odškodnine $x_1, x_2, \ldots, x_{500}$ so tako, kot so bile generirane, navedene v tabeli 11 na 40. strani prilog, po velikosti urejene odškodnine $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(500)}$ pa so razvidne iz tabele 12 na 43. strani prilog.

Razpon od najmanjše odškodnine v višini 2.148 SIT do največje v višini $51.975.626$ SIT je kar velik. Vzorčno povprečje je $1.560.089$ SIT, standardni odklon $4.484.658$ SIT, koeficient variacije 287 odstotkov, koeficient asimetrije pa $8{,}931$. Z upoštevanjem izhodiščnih parametrov bi dobili matematično upanje $1.666.667$ SIT, momenti višjega reda pa ne obstajajo.

V preteklosti so aktuarji naraščajoče urejene odškodnine združevali v razrede in sestavljali t. i. škodne tablice. Le-te so bile in so še vedno zelo uporabne za nekatere aktuarske naloge, npr. za določanje višine popustov za različne franšize ali za določanje višine zavarovalne premije v odvisnosti od zavarovalne vsote pri zavarovanju na prvi riziko. Zelo nazoren prikaz uporabe škodnih tablic je v (Flis, 1995b, str. 212). Ker pa škodne tablice ne omogočajo raznih analitičnih izračunov, bomo v našem primeru delali izključno z analitično izraženo porazdelitveno funkcijo odškodnin.

5.2 Porazdelitvena funkcija odškodnin in testiranje njene primernosti

Iz podatkov v tabeli 11 smo po metodi največjega verjetja poiskali parametre za vse porazdelitvene funkcije iz priloge P3 ter opravili χ^2-test in test Kolmogorov-Smirnova. Interval $(0, \infty)$ smo razdelili na 50 različno dolgih podintervalov $(0, c_1], (c_1, c_2], \ldots, (c_{48}, c_{49}], (c_{49}, \infty)$, kjer je $c_i = x_{(10i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 49$. Za porazdelitvene funkcije s tremi parametri imamo pri χ^2-testu tako $50 - 1 - 3 = 46$ prostostnih stopenj in kritični točki $h_{46,5\%} = 62{,}83$ ter $h_{46,1\%} = 71{,}22$, za tiste z dvema parametroma pa 47 prostostnih stopenj in kritični točki $h_{47,5\%} = 64{,}00$ ter $h_{47,1\%} = 72{,}46$. Za test Kolmogorov-Smirnova sta kritični točki $d_{500,5\%} = \frac{1{,}36}{\sqrt{500}} \approx 0{,}0608$ in $d_{500,1\%} = \frac{1{,}63}{\sqrt{500}} \approx 0{,}0729$. Pri stopnjah tveganja 5 odstotkov in 1 odstotek χ^2-test prestanejo tri, test Kolmogorov-Smirnova pa pet porazdelitvenih funkcij izmed devetih. Njihovi parametri so razvidni iz tabele 1, ki je urejena po naraščajočem negativnem logaritmu funkcije verjetja L oziroma po padajoči vrednosti funkcije verjetja. Poleg parametrov navajamo tudi obe vrednosti testnih statistik ter oceno RMS, ki jo kot merilo prileganja k vzorčni porazdelitveni funkciji uporabljamo pri metodi najmanjših kvadratov. Iz podatkov se vidi, da je v tem primeru χ^2-test strožji, saj ga prestanejo le prve tri porazdelitvene funkcije iz tabele 1, v vseh petih primerih pa so p-vrednosti manjše od tistih za test Kolmogorov-Smirnova.

Tabela 1: Parametri porazdelitev, dobljenih po metodi največjega verjetja

Porazdelitvena funkcija	Parametri	$-\log L$	$\hat{\chi}^2_{46}$ oz. $\hat{\chi}^2_{47}$ p-vrednost	D_{500} p-vrednost	RMS
$\mathrm{Burr}(\alpha, \lambda, \tau)$	$\alpha = 2,0534088 \cdot 10^0$ $\lambda = 8,9200014 \cdot 10^2$ $\tau = 9,3038942 \cdot 10^{-1}$	4.032,0065	56,49 13,82 %	0,0237 94,15 %	0,0081
$\mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$	$\alpha = 1,6751845 \cdot 10^0$ $\lambda = 1,0797284 \cdot 10^3$	4.032,7453	60,06 9,57 %	0,0320 68,52 %	0,0117
$\mathrm{T\Gamma}(\alpha, \lambda, \tau)$	$\alpha = 8,9941800 \cdot 10^0$ $\lambda = 4,4397215 \cdot 10^1$ $\tau = 2,1435283 \cdot 10^{-1}$	4.034,7303	58,80 9,75 %	0,0362 52,88 %	0,0150
$\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$	$\mu = 6,1901637 \cdot 10^0$ $\sigma = 1,6021423 \cdot 10^0$	4.040,2220	76,39 0,43 %	0,0586 6,45 %	0,0272
$\mathrm{W}(c, \tau)$	$c = 1,0120239 \cdot 10^{-2}$ $\tau = 6,5969090 \cdot 10^{-1}$	4.057,8855	75,30 0,55 %	0,0510 14,83 %	0,0296

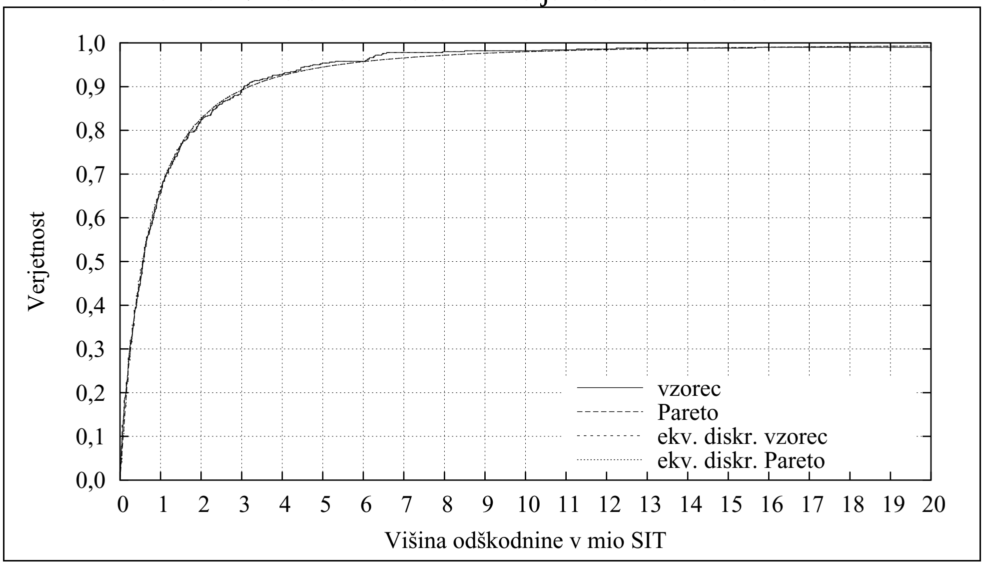
Iz tabele 1 se vidi, da je Burrova porazdelitev po vseh navedenih kriterijih najboljša, sledi pa ji Paretova porazdelitev, od katere pa bi bila transformirana gama porazdelitev boljša, če bi za kriterij vzeli p-vrednost za χ^2-test. Paretova porazdelitev v nobenem primeru ne bi mogla biti boljša od Burrove, saj je le njen poseben primer. Razlike med obema pa niso velike, zato s testiranjem razmerij verjetij, opisanim v podrazdelku P1.3.3, preverimo, če je dodatni parameter pri Burrovi porazdelitvi upravičen. Razlika v številu parametrov je 1, zato iz tabele 10 na 14. strani prilog prideta v poštev kritični točki $h_{1,5\%} = 3{,}84$ in $h_{1,1\%} = 6{,}63$. S podatki iz tabele 1 ugotovimo, da je $\hat{\chi}^2_1 = 2\,(\log L_{Burr} - \log L_{Pareto}) = 2\,(-4032{,}0065 + 4032{,}7453) = 1{,}4776 < 3{,}84$. Zato sklepamo, da dodatni parameter k povečanju vrednosti funkcije verjetja ne prispeva dovolj in po načelu ekonomičnosti kot modelno funkcijo za višino odškodnin privzamemo Paretovo porazdelitveno funkcijo s parametroma iz tabele 1. Zaradi primerjave povejmo še to, da bi z izhodiščnima parametroma $\alpha = 1{,}6$ in $\lambda = 1.000$ dobili $-\log L = 4032{,}8352$, $\chi^2_{47} = 60{,}10$ (p-vrednost je $9{,}51$ odstotka), $D_{500} = 0{,}0299$ (p-vrednost je $76{,}27$ odstotka) in $RMS = 0{,}0123$.

5.3 Ekvidistantna diskretizacija porazdelitvene funkcije odškodnin

Zaradi izračuna agregatnih odškodnin s Panjerjevo rekurzijo smo vzorčno verjetnostno funkcijo in modelno Paretovo porazdelitveno funkcijo oziroma njeno gostoto verjetnosti ekvidistantno diskretizirali z algoritmom 1 na strani 23. Za korak h smo vzeli 50 enot, kar predstavlja $3{,}2$ odstotka vzorčnega povprečja, za dopustno relativno napako matematičnega upanja, ki nastane zaradi prenosa gostote verjetnosti od desnega krajišča diskretizacijskega intervala do neskončnosti v desno krajišče, pa $\epsilon = 0{,}005$.

Za ekvidistantno diskretizacijo vzorčne verjetnostne funkcije, pri kateri se matematično upanje ohranja, je zadoščalo $r = 1.040$ korakov, kar je odvisno le od maksimalne vzorčne odškodnine. Z diskretizacijo se je standardni odklon povečal za $0{,}001$ odstotka, koeficient asimetrije pa se je zmanjšal za $0{,}003$ odstotka. Porazdelitveno funkcijo, izračunano s Panjerjevo rekurzijo z ekvidistantno diskretizirano vzorčno verjetnostno funkcijo, imamo lahko za eksaktno porazdelitveno funkcijo kosmatih agregatnih odškodnin, če predpostavimo, da se dejanska porazdelitvena funkcija odškodnin ujema z vzorčno. V tem primeru smo s Panjerjevo rekurzijo računali izključno zaradi možnosti ocenjevanja kvalitete preprostih aproksimacijskih metod, ki temeljijo na momentih agregatnih odškodnin, izračunanih iz vzorčnih momentov in momentov slučajne spremenljivke $N \sim \mathrm{Po}(500)$, ki modelira število odškodnin.

Slika 1: Porazdelitvena funkcija kosmatih odškodnin



Gostota verjetnosti Paretove porazdelitve počasi pada k nič. Zato je bilo za zahtevano natančnost za ekvidistantno diskretizacijo potrebnih $r = 55.231$ korakov, kar pomeni interval od 0 do več kot 53-kratnika maksimalne vzorčne odškodnine oziroma do več kot $3{,}5$-kratnika pričakovanih agregatnih odškodnin, razvidnih iz tabele 2 na strani 76. Zaradi diskretizacije se je matematično upanje Paretove porazdelitve s $1.599{,}160$ zmanjšalo za $0{,}5$ odstotka in po diskretizaciji znaša $1.591{,}165$. Ker je $\alpha < 2$, drugi moment in momenti višjega reda pred diskretizacijo niso obstajali, po njej pa obstajajo. Prav zato, ker to dejstvo lahko negativno vpliva na realnost rezultatov, dobljenih s Panjerjevo rekurzijo, smo namenoma z diskretizacijskim intervalom prekrili interval, na katerem smo z rekurzijo računali agregatne odškodnine. S tem verjetnost f_r, v kateri je zajeto tudi matematično upanje od desnega krajišča diskretizacijskega intervala do neskončnosti, v izračun po enačbi (3.20) sploh ne pride. Zato bi se ustrezna napaka v izračunanih agregatnih odškodninah pokazala šele kasneje. Standardni odklon ekvidistantno diskretizirane Paretove porazdelitve znaša $8.870{,}551$, koeficient variacije 557 odstotkov, koeficient asimetrije pa $5{,}684$.

Na sliki 1 lahko vidimo, da se vzorčna in ekvidistantno diskretizirana vzorčna porazdelitvena funkcija ter Paretova in ekvidistantno diskretizirana Paretova porazdelitvena funkcija zelo dobro ujemajo. Objektiven kriterij za ujemanje z vzorčno porazdelitveno funkcijo je D_{500} ali RMS, ki pa ju za ekvidistantno diskretizirano vzorčno in ekvidistantno diskretizirano Paretovo porazdelitveno funkcijo nismo izračunali.

5.4 EVC-test primernosti izbrane porazdelitvene funkcije odškodnin

Porazdelitveno funkcijo odškodnin $F_X(x)$ oziroma njeno izpeljanko $F_{X,1}(x) = \frac{E[X;x]}{E[X]}$ uporabljamo tudi za izračun razmerja med čisto in kosmato nevarnostno ter čisto in kosmato tehnično premijo za škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto M, kar smo si ogledali v razdelku 4.4, pogosto pa se pojavlja tudi pri drugih aktuarskih izračunih. Tako je pri mnogih zavarovanjih kosmata zavarovalna premija linearno odvisna od višine zavarovalne vsote, vedno pa ni tako. Pri raznih odgovornostnih zavarovanjih zavarovalnice običajno ponujajo standardno zavarovalno vsoto, za povišano zavarovalno vsoto pa je potrebno doplačilo. Ker lahko predpostavimo, da je škodna pogostost v takih primerih neodvisna od višine zavarovalne vsote, je razmerje med nevarnostnima premijama za zavarovalni vsoti V_1 in V_2 enako $\frac{E[X;V_1]}{E[X;V_2]} = \frac{E[X;V_1]}{E[X]} : \frac{E[X;V_2]}{E[X]}$, kar pa moramo izračunati z uporabo porazdelitvene funkcije škod.

Če je standardna zavarovalna vsota dovolj velika, škod, ki bi jo presegale, praktično ni. V takem primeru namesto porazdelitvene funkcije škod za izračun višine potrebnega povišanja lahko upoštevamo porazdelitveno funkcijo odškodnin. Kadar pa število škod, ki presegajo standardno zavarovalno vsoto, ni zanemarljivo, $F_X(x)$ lahko določimo iz vzorca odškodnin, ki smo jih ustrezno korigirali, upoštevajoč presežek škode nad odškodnino.

Nič neobičajnega ni, če doplačilo kosmate zavarovalne premije za podvojitev zavarovalne vsote znaša le 10 odstotkov. Po drugi strani pa so včasih potrebna kar velika doplačila, ki pa so le delno posledica povečanja nevarnostne premije. Glavni delež prispeva varnostni dodatek, ki mora biti precej večji od standardnega, če je nevarnostna skupina s podvojeno zavarovalno vsoto bistveno manjša od nevarnostne skupine s standardno zavarovalno vsoto.

Zaradi pogoste in zelo pomembne uporabe razmerja $\frac{E[X;x]}{E[X]}$, ki ga lahko izračunamo iz porazdelitvene funkcije $F_X(x)$, določene na osnovi vzorca, poleg v prilogi P1 obravnavanih testov v praksi pogosto opravimo tudi primerjavo pričakovanih vrednosti navzgor omejenih odškodnin oziroma EVC-test (expected value comparision test), pri katerem izračunamo

$$EVC = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \left| \frac{E[X;x_{(i)}] - \hat{E}[X;x_{(i)}]}{E[X;x_{(i)}]} \right| \right\},$$

kjer je $\hat{E}[X;x_{(i)}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\min\{x_{(k)},x_{(i)}\}$ omejeno vzorčno povprečje. Porazdelitvenega zakona slučajne spremenljivke EVC ne poznamo, zato presojamo kar po občutku. V našem primeru EVC znaša $5{,}14$ odstotka, kar ni najboljše, je pa še sprejemljivo.

Za oceno primernosti modelne porazdelitvene funkcije lahko opravimo tudi primerjavo med $F_{X,1}(x) = \frac{E[X;x]}{E[X]}$ in analogno funkcijo $\hat{F}_{X,1}(x)$, izračunano iz vzorca in definirano z

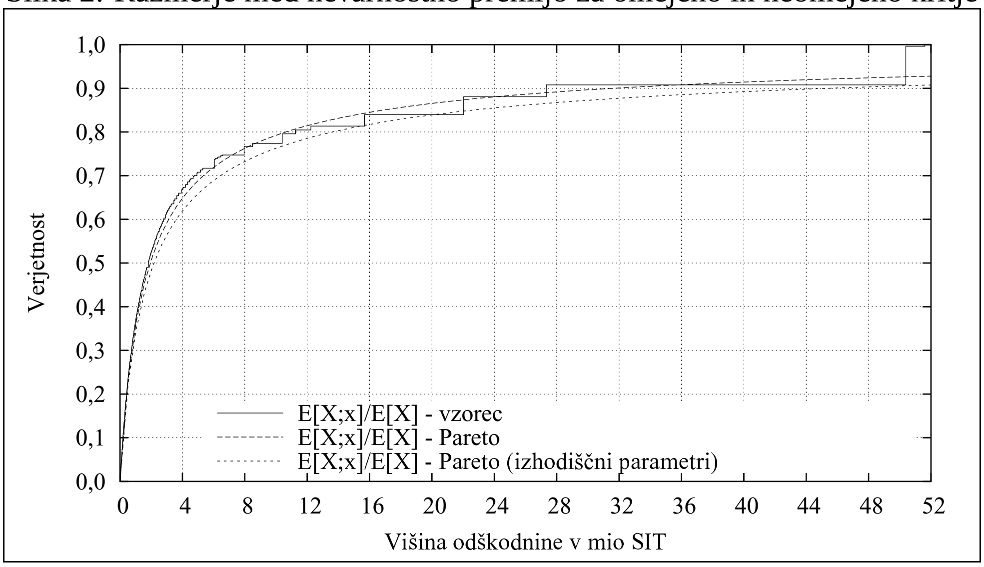
$$\hat{F}_{X,1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < x_{(1)} \\ \frac{\hat{E}[X;x_{(i)}]}{\overline{x}} & \text{za } x_{(i)} \le x < x_{(i+1)},\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1 & \text{za } x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

Kadar ne računamo z analitično porazdelitveno funkcijo, v praksi za vrednosti med vzorčnimi odškodninami, kjer ima funkcija $\hat{F}_{X,1}(x)$ skoke, pogosto uporabljamo linearno interpolacijo oziroma funkcijo

$$\hat{\hat{F}}_{X,1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < x_{(1)} \\ \frac{(x_{(i+1)}-x)\ \hat{E}[X;x_{(i)}]\ +\ (x-x_{(i)})\ \hat{E}[X;x_{(i+1)}]}{\overline{x}\ (x_{(i+1)}-x_{(i)})} & \text{za } x_{(i)} \le x < x_{(i+1)},\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1 & \text{za } x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

S slike 2 je razvidno, da se funkciji $\hat{F}_{X,1}(x)$ in $F_{X,1}(x)$ dobro ujemata, razen na koncu pri največji vzorčni odškodnini, kjer $\hat{F}_{X,1}(x)$ doseže končno vrednost 1, medtem ko $F_{X,1}(x)$ tam doseže šele $0{,}9279$. Če za kriterij ujemanja upoštevamo D_{500}, po testu Kolmogorov-Smirnova dobimo $d_{500,5\%} = 0{,}0608 < D_{500} = 0{,}0721 < 0{,}0729 = d_{500,1\%}$. Tako nam pri stopnji tveganja 1 odstotek ni treba zavrniti domneve, da se funkciji $\hat{F}_{X,1}(x)$ in $F_{X,1}(x)$ ujemata, medtem ko jo pri stopnji tveganja 5 odstotkov zavrnemo.

Slika 2: Razmerje med nevarnostno premijo za omejeno in neomejeno kritje



V našem primeru je p-vrednost $1{,}11$ odstotka, zato bi lahko sklepali, da je modelna funkcija $F_X(x)$ na meji sprejemljivosti. Verjetno pa je relativno slabo ujemanje $\hat{F}_{X,1}(x)$ in $F_{X,1}(x)$

pri največji odškodnini posledica nakljućja oziroma razmeroma majhnega vzorca. Funkcija $F_{X,1}(x)$ se počasi bliža končni vrednosti 1, zato se ji še ni uspelo dovolj povzpeti, medtem ko se je vrednost funkcije $\hat{F}_{X,1}(x)$ samo na račun največjih treh odškodnin, ki posamezno presegajo 50 milijonov SIT, povečala za več kot $0{,}09$. Da je razmeroma veliko neujemanje posledica naključja, lahko sklepamo tudi na osnovi slike 2, saj je razlika še večja, ko se $F_{X,1}(x)$ nanaša na Paretovo porazdelitveno funkcijo z izhodiščnimi parametri. V praksi osnove za podobno sklepanje seveda nimamo, saj dejanske porazdelitvene funkcije ne poznamo.

5.5 Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin

Slučajna spremenljivka S, ki predstavlja kosmate agregatne odškodnine, je sestavljeno Poissonovo porazdeljena. Iz prvih treh vzorčnih začetnih momentov, izračunanih s podatki iz tabele 11, in parametra $\lambda = 500$ s pomočjo enačb (2.5a), (2.5b) in (2.5c) lahko izračunamo $E[S]$ oziroma μ_S, $\mathrm{var}[S]$ in $\mu_3[S]$, nato pa še σ_S, $\varrho_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}$ in γ_S. To pa nam že zadošča za izračun vseh potrebnih parametrov za aproksimacijo porazdelitvene funkcije $F_S(x)$ z normalno aproksimacijo, NP-aproksimacijo, aproksimacijo s premaknjeno gama porazdelitvijo in aproksimacijo s transformirano gama porazdelitvijo. Dobimo

$$F_S(x) \;\approx\; \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-780045}{106174}\right) & \text{normalna aproksimacija} \\ \Phi(-7{,}9491 + \sqrt{-52{,}6136 + 0{,}0001497\, x}\,) & \text{NP-aproksimacija za } x > 780045 \\ \Gamma(28{,}0838\,;\; -10{,}8502 + 0{,}00004991\, x) & \text{premaknjena gama za } x > 217385 \\ \Gamma(958{,}7460\,;\; 38{,}0760\, x^{0{,}23790701}) & \text{transformirana gama} \end{cases}$$

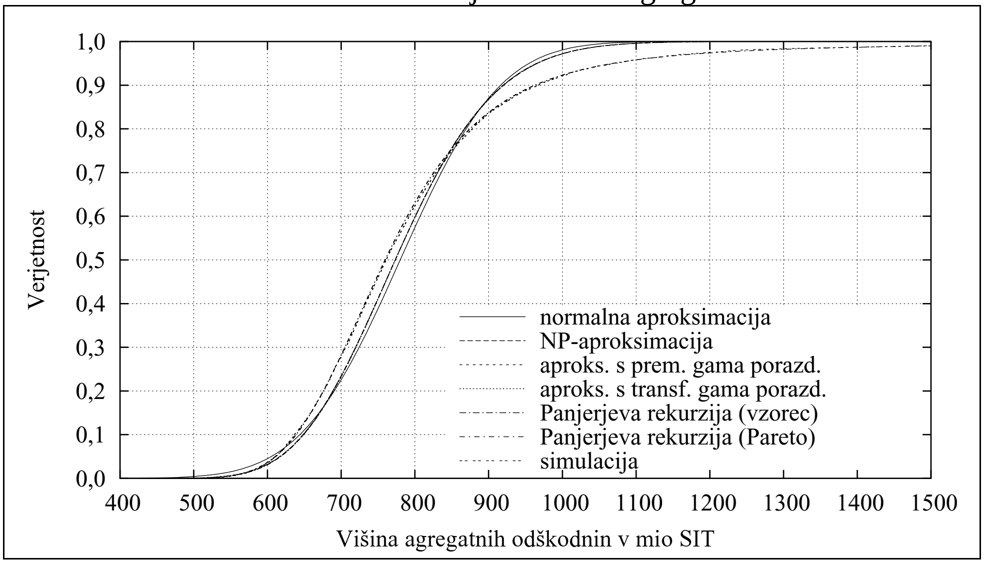
Porazdelitveno funkcijo $F_S(x)$ smo izračunali tudi s Panjerjevo rekurzijo, pri čemer smo uporabili ekvidistantno diskretizirano vzorčno verjetnostno funkcijo in ekvidistantno diskretizirano Paretovo porazdelitveno funkcijo, ter s simulacijo za 10.000 let. Za primerjavo v tabeli 2 navajamo nekaj ključnih podatkov. Med njimi ne naštevamo podatkov za NP-aproksimacijo, ker je uporabna le na intervalu $x > \mu_S$.

Tabela 2: Karakteristike kosmatih agregatnih odškodnin

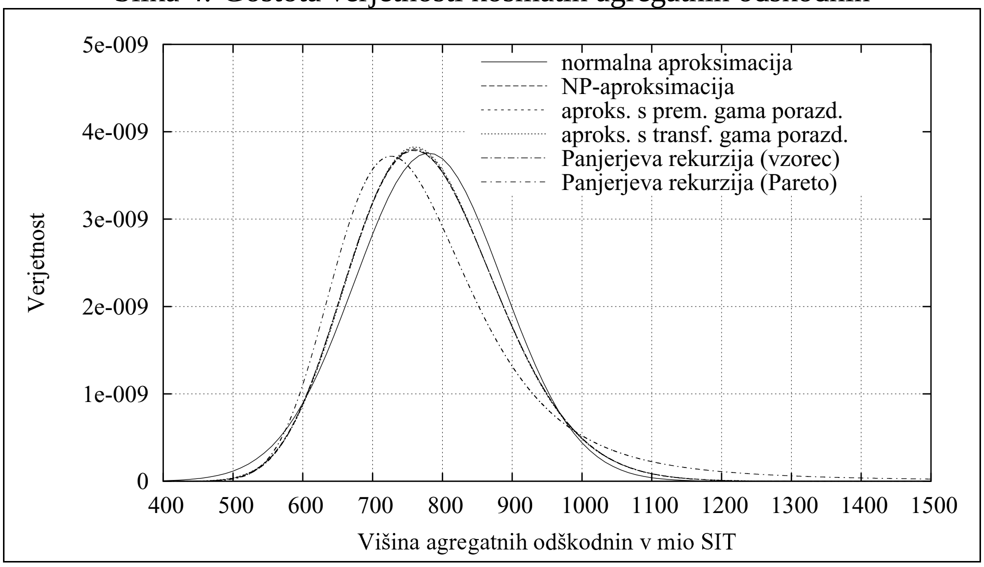
Način izračuna porazdelitve agregatnih odškodnin	μ_S	σ_S	γ_S
Normalna aproksimacija	780.045	106.174	0,0000
Aproksimacija s premaknjeno gama porazdelitvijo	780.045	106.174	0,3774
Aproksimacija s transformirano gama porazdelitvijo	780.045	106.174	0,3774
Panjerjeva rekurzija (ekvidistantno diskretizirani vzorec)	780.045	106.175	0,3774
Panjerjeva rekurzija (ekvidistantno diskretizirani Pareto)	795.582	201.517	5,6841
Iz vzorca agregatnih odškodnin, dobljenega s simulacijo	797.894	230.339	12,0514

Medsebojna razmerja med ocenami μ_S ne presegajo $1{,}023$ in so neposredna posledica različnih povprečnih odškodnin, npr. $1.560{,}089$ in $1.591{,}165$ enot pri vzorčni in ekvidistantno diskretizirani Paretovi porazdelitvi. Maksimalno razmerje med dvema ocenama standardnega odklona σ_S pa je zelo veliko, saj presega $2{,}16$. Tu izstopata simulacija in Panjerjeva rekurzija s Paretovo porazdelitvijo. Normalna aproksimacija in aproksimaciji s premaknjeno oziroma s transformirano gama porazdelitvijo temeljijo na izenačitvi momentov z momenti agregatnih odškodnin, ki jih izračunamo iz vzorčnih momentov za odškodnine in momentov slučajne spremenljivke N. Panjerjeva rekurzija z vzorčno porazdelitvijo pa izračuna eksaktno porazdelitveno funkcijo za porazdelitev odškodnin, porazdeljenih z ekvidistantno diskretizirano vzorčno porazdelitvijo. Zato se tudi v tem primeru momenti ujemajo, nepomembna razlika pri standardnem odklonu pa je posledica napake metode (ekvidistantne diskretizacije) in zaokrožitvenih napak. Velika razlika je tudi med standardnima odklonoma, dobljenima s simulacijo in Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo. Delno je posledica naključja, delno pa dejstva, da smo vrednost za Panjerjevo rekurzijo izračunali s pomočjo enačbe (2.5b), zaradi česar se pozna vpliv ekvidistantne diskretizacije, ki neobstoječi drugi moment modelne Paretove porazdelitve nadomesti s končno vrednostjo.

Slika 3: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin



Slika 4: Gostota verjetnosti kosmatih agregatnih odškodnin

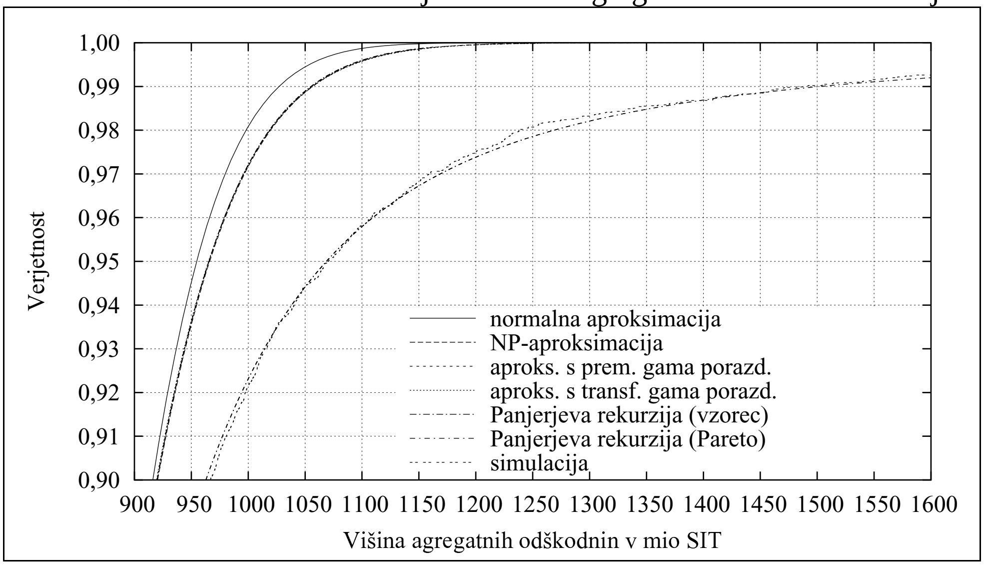


Grafe porazdelitvenih funkcij vseh uporabljenih aproksimacij vidimo na sliki 3, grafe njihovih gostot verjetnosti pa na sliki 4. Na sliki 5 so porazdelitvene funkcije prikazane še na kritičnem območju, ko dosežejo vrednost $0{,}90$ in več. Na vseh treh slikah krivulje težko identificiramo, ker se za NP-aproksimacijo, aproksimacijo s premaknjeno gama porazdelitvijo, aproksimacijo s transformirano gama porazdelitvijo in za Panjerjevo rekurzijo z vzorčno porazdelitvijo praktično prekrivajo. Od navedene skupine aproksimacij v eno smer manj značilno odstopa normalna aproksimacija, v drugo smer pa zelo značilno odstopata Panjerjeva rekurzija s Paretovo porazdelitvijo in simulacija, ki se tudi prekrivata.

S slike 5 lahko razberemo kritične točke, ki jih kosmate agregatne odškodnine s predpisano verjetnostjo ne bodo presegle. Za 95 in 99 odstotkov so natančne vrednosti navedene v tabeli 3 na strani 79, kjer sta razvidna tudi ustrezna intervala zaupanja. Za NP-aproksimacijo spodnja meja intervala zaupanja nima smisla.

S slik 3, 4 in 5 in iz tabele 3 lahko ugotovimo, da vse predstavljene izračune lahko uvrstimo v tri skupine. V prvi je normalna aproksimacija, v drugi so aproksimacije, ki kot izhodišče uporabljajo prve tri momente agregatnih odškodnin, izračunane iz vzorčnih momentov za odškodnine in momentov slučajne spremenljivke N, ter Panjerjeva rekurzija z vzorčno porazdelitvijo. V tretji skupini sta Panjerjeva rekurzija s Paretovo porazdelitvijo in simulacija.

Slika 5: Porazdelitvena funkcija kosmatih agregatnih odškodnin - detajl



Pri nadaljnjih izračunih aproksimacije iz druge skupine dajo skoraj identične rezultate. Glede na dejstvo, da je med njimi tudi eksaktna Panjerjeva rekurzija z vzorčno porazdelitvijo, lahko ugotovimo, da so v tem primeru aproksimacije, ki temeljijo na prvih treh momentih agregatnih odškodnin, zelo dobre. Seveda pa ugotovitev velja le ob predpostavki, da dejanska porazdelitvena funkcija odškodnin sovpada z vzorčno porazdelitveno funkcijo oziroma se od nje nepomembno razlikuje, kar pa v našem primeru ne drži. Kritične točke za aproksimacije iz prvih dveh skupin so precej manjše od kritičnih točk za izračuna iz tretje skupine, kar pa je v glavnem posledica različnih izhodišč.

Če bi za izračun parametrov za normalno aproksimacijo, NP-aproksimacijo in transformacijo s premaknjeno gama porazdelitvijo uporabili začetne momente kosmatih odškodnin, izračunane z momenti za ekvidistantno diskretizirano Paretovo porazdelitvijo namesto z vzorčnimi momenti, bi dobili vrednosti iz tabele 4. V tem primeru bi tudi za naštete aproksimacije veljalo $\mu_S = 795.582$, $\sigma_S = 201.517$ in $\gamma_S = 5{,}6841$ oziroma $\gamma_S = 0$ za normalno aproksimacijo. Zaradi ocene neodstranljive napake, ki je posledica naključja, navajamo še obljubljene podatke za izhodiščno Paretovo porazdelitveno funkcijo s parametroma $\alpha = 1{,}6$ in $\lambda = 1.000$. Po ekvidistantni diskretizaciji za izhodiščne kosmate agregatne odškodnine dobimo $\mu_S = 829.167$, $\sigma_S = 285.203$ in $\gamma_S = 10{,}7931$, ostali podatki, izračunani s Panjerjevo rekurzijo, pa so v zadnji vrstici tabele 4.

Tabela 3: Kritične točke in intervali zaupanja za kosmate agregatne odškodnine

Način izračuna agregatnih odškodnin	Interval zaupanja		Kritična	Interval zaupanja		Kritična
	$x_{2,5\%}$	$x_{97,5\%}$	t. $x_{95\%}$	$x_{0,5\%}$	$x_{99,5\%}$	t. $x_{99\%}$
Normalna aproksim.	571.947	988.143	954.686	506.557	1.053.532	1.027.043
NP-aproksimacija		1.007.120	966.077		1.091.166	1.056.509
Apr. s prem. gama p.	591.520	1.006.425	965.314	544.130	1.090.937	1.056.033
Apr. s trans. gama p.	591.070	1.006.468	965.106	542.528	1.092.052	1.056.607
Panjerjeva r. (vzorec)	592.072	1.006.262	965.485	546.347	1.089.504	1.055.223
Panjerjeva r. (Pareto)	587.942	1.211.028	1.068.707	546.811	1.853.972	1.502.463
Simulacija	589.006	1.200.112	1.070.639	551.280	1.814.615	1.490.179

Tabela 4: Alternativne kritične točke in intervali zaupanja za kosmate agregatne odškodnine

Način izračuna agregatnih odškodnin	Interval zaupanja		Kritična	Interval zaupanja		Kritična
	$x_{2,5\%}$	$x_{97,5\%}$	t. $x_{95\%}$	$x_{0,5\%}$	$x_{99,5\%}$	t. $x_{99\%}$
Normalna aproksim.	400.616	1.190.549	1.127.049	276.508	1.314.657	1.264.382
NP-aproksimacija		1.733.000	1.452.647		2.390.395	2.106.638
Apr. s prem. gama p.	724.676	1.370.432	1.127.629	724.676	2.032.572	1.734.582
Izhodiščna porazd.	595.975	1.324.976	1.144.627	552.716	2.173.809	1.705.231

V tem primeru NP-aproksimacija zaradi prevelikega koeficienta asimetrije ni uporabna. Premaknjena gama porazdelitvena funkcija je tokrat definirana za $x > 724.676$. To je tudi zaokrožena vrednost, ki jo pri obeh stopnjah tveganja dobimo za spodnjo mejo intervala zaupanja, ker funkcija na začetku zelo hitro raste. V tabeli 4 ni podatkov za transformirano gama porazdelitev, ker izenačitev momentov po metodi iz podrazdelka 3.5.4 ni uspela.

V nadaljevanju bomo uporabljali kvečjemu normalno aproksimacijo, NP-aproksimacijo, aproksimacijo s premaknjeno gama porazdelitvijo in aproksimacijo s transformirano gama porazdelitvijo, ki smo jo dobili z uporabo vzorčnih momentov, torej z vrednostmi iz tabel 2 in 3. Zaradi boljše preglednosti bomo na vseh kasnejših slikah od aproksimacij iz druge skupine prikazovali le aproksimacijo s premaknjeno gama porazdelitvijo. Glede na bolj pogosto uporabo v praksi bi verjetno za predstavnico skupine morali izbrati NP-aproksimacijo, česar pa nismo storili, ker je v splošnem primeru uporabna le na intervalu $x > \mu_S$. Če bomo v nadaljevanju uporabili izraz eksakten, npr. eksakten izračun, bo s tem mišljen izračun, narejen z uporabo ”eksaktne” porazdelitvene funkcije, dobljene s Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo.

5.6 Izračun višine zavarovalne premije in minimalnega kapitala

V tem razdelku predpostavimo, da rezultatov Panjerjeve rekurzije s Paretovo porazdelitvijo in rezultatov simulacije še ne poznamo, kar je v praksi običajno. Za ostale aproksimativne metode, za katere so izračuni mnogo bolj preprosti, pa ustrezne vrednosti iz tabele 2 na strani 76 in tabele 3 na strani 79 poznamo. Zanimala nas bo le agregatna premija, ki se nanaša na skupno izpostavljenost za vseh 10.000 polic. V praksi na podlagi preteklih podatkov določamo oziroma korigiramo premijske cenike za naslednja leta. Pri izračunih moramo upoštevati preteklo in bodočo inflacijo, morebitne spremembe zavarovalnega kritja, spremembe v škodnem procesu, tržne razmere, razne trende in še marsikaj, kar pa nas tu ne bo zanimalo. Zato predpostavimo, da se okoliščine niso in se ne bodo spremenile, zaradi česar ne bomo ločevali med premijo in predvideno oziroma načrtovano premijo.

Agregatna nevarnostna premija mora biti enaka pričakovanim agregatnim odškodninam 780.045 enot, za agregatno tehnično premijo pa vzemimo agregatne odškodnine pri kritični točki 95 odstotkov za NP-aproksimacijo, torej 966.077 enot. Tak pristop je seveda le eden od možnih, po katerem je v našem primeru varnostni koeficient δ enak $23{,}85$ odstotka. Privzemimo še, da v kosmati zavarovalni premiji delež stroškov predstavlja 25 odstotkov. Agregatna kosmata zavarovalna premija tako znaša $1.288.103$ enote. Ta podatek potrebujemo le zaradi izračuna potrebnega minimalnega kapitala, ki ga mora imeti zavarovalnica za tisti del poslovanja, ki ga obravnavamo v našem primeru.

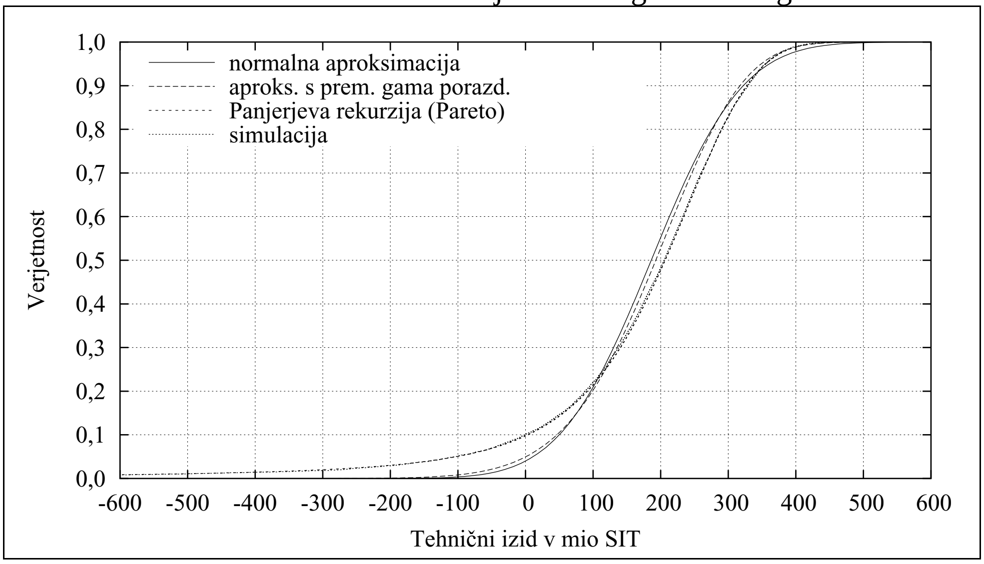
Za začetek predpostavimo, da pozavarovanja nimamo. Potem v našem primeru s premijskim količnikom $0{,}18$ iz kosmate zavarovalne premije dobimo 231.859 enot, s škodnim količnikom $0{,}26$ pa 202.812 enot, če upoštevamo, da smo imeli v preteklih treh letih povprečne odškodnine. Minimalni kapital tako znaša 231.859 enot oziroma 232 milijonov SIT, če zaokrožimo. Ob normalnem škodnem dogajanju je običajno, da je rezultat, dobljen s premijskim količnikom, večji. Razmerja med prelomnimi točkami (10 in 7 oziroma 50 in 35 milijonov EUR) in med količniki ($0{,}18$ in $0{,}26$ oziroma $0{,}16$ in $0{,}23$) so namreč izračunana pri predpostavki, da je mejno oziroma še sprejemljivo razmerje med kosmatimi odškodninami in kosmato zavarovalno premijo, t. i. škodni odstotek, 70 odstotkov, razlika do 100 odstotkov pa bi morala zadostovati za obratovalne stroške in dobiček. Prelomni škodni odstotek, do katerega dobimo s premijskim količnikom večji rezultat kot s škodnim količnikom, je malo manj kot 70 odstotkov. Zato mora pri enakem obsegu poslovanja zavarovalnica z neugodnim škodnim odstotkom, ki presega 70 odstotkov, imeti več kapitala kot zavarovalnica, ki dosega manjši škodni odstotek, kar je zaradi večje rizičnosti tudi logično.

5.7 Porazdelitvena funkcija kosmatega tehničnega izida

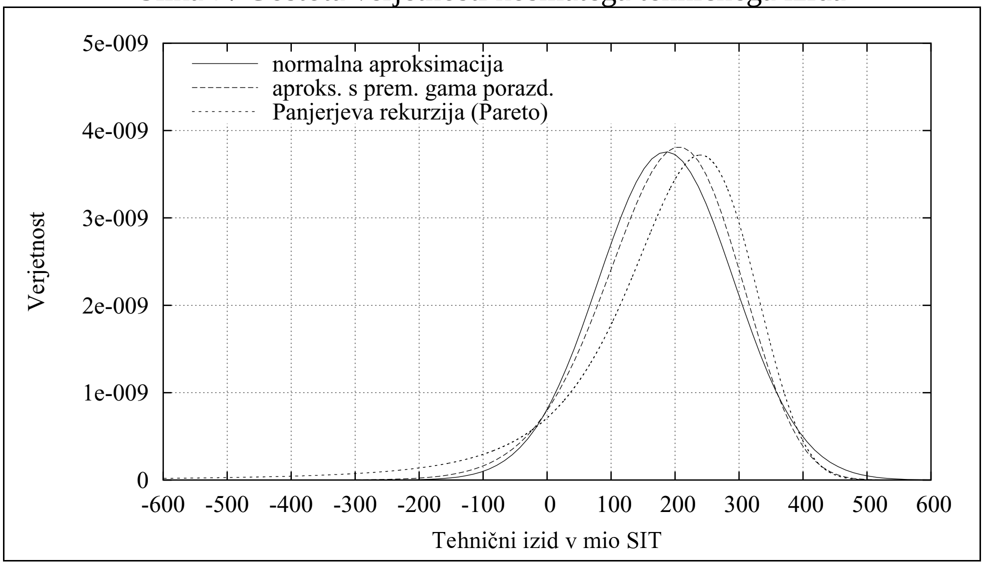
Porazdelitvena funkcija kosmatega tehničnega izida $W = c - S$, kjer je $c = 966.077$ tehnična premija, je enaka $F_W(x) = P(W \leq x) = P(c - S \leq x) = P(S \geq c - x) = 1 - F_S(c - x)$, gostota verjetnosti pa je $f_W(x) = f_S(c - x)$. Na sliki 6 vidimo graf porazdelitvene funkcije $F_W(x)$, na sliki 7 pa graf njene gostote verjetnosti $f_W(x)$.

S slike 6 razberemo, da je verjetnost, da bo kosmati tehnični izid vsaj 100 milijonov SIT, okrog 80 odstotkov. Nasploh pri pozitivnih tehničnih izidih pri različnih izračunih agregatnih odškodnin ni dramatičnih razlik. Drugače pa je na kritičnem območju, ko je tehnični izid negativen, kar je razvidno s slike 8 na strani 82. Tu pridejo do izraza razlike v standardnih odklonih iz tabele 2 oziroma razlike v kritičnih točkah iz tabele 3. Pri aproksimaciji s premaknjeno gama porazdelitvijo je verjetnost negativnega tehničnega izida 5 odstotkov, saj smo zaradi malenkostne razlike od NP-aproksimacije v bistvu na tej osnovi določili agregatno tehnično premijo, ter 10 odstotkov, če upoštevamo simulacijo ali Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo.

Slika 6: Porazdelitvena funkcija kosmatega tehničnega izida

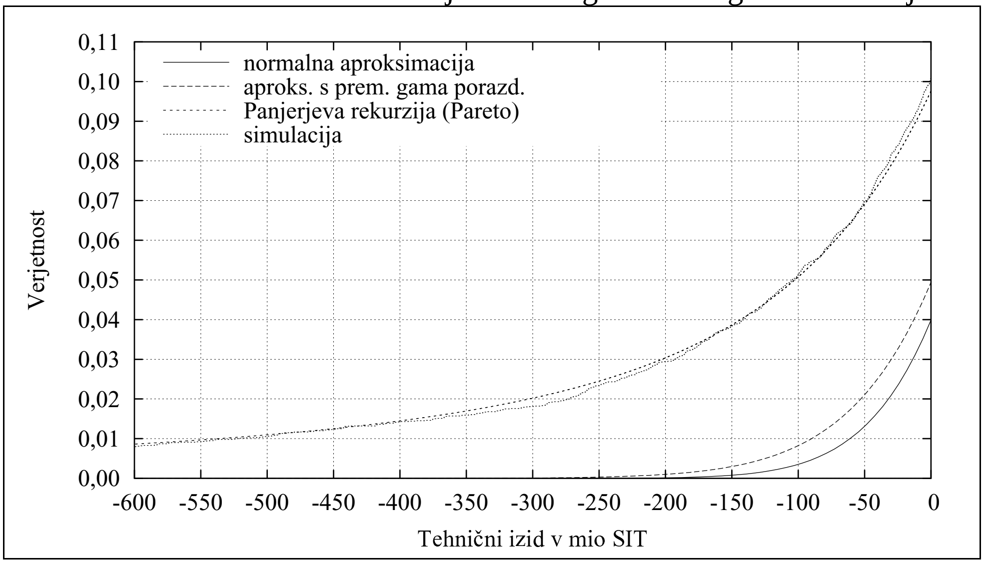


Slika 7: Gostota verjetnosti kosmatega tehničnega izida



Če zaupamo metodam, ki temeljijo na prvih dveh ali treh momentih agregatnih odškodnin, računanih iz vzorčnih momentov in momentov slučajne spremenljivke N, potem nas ne skrbi, da bi izgubili ves minimalni kapital, s katerim zavarovalnica jamči za izpolnitev svojih obveznosti za obravnavani portfelj. S slike 8 je namreč razvidno, da je verjetnost izgube minimalnega kapitala zanemarljiva, s podatki iz tabele 2 pa po enačbi (4.10) izračunamo $R \approx \frac{2\,(966077-780045)}{106174^2} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ (R je odvisen od monetarne enote, v kateri računamo) in zgornjo mejo $e^{-RU_0} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-4}$ za verjetnost izgube minimalnega kapitala. Vendar pa je tovrstno zaupanje varljivo. Če bi upoštevali podatke iz tabele 2 za Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo, bi dobili $R \approx 8{,}4 \cdot 10^{-6}$, za zgornjo mejo verjetnosti izgube minimalnega kapitala pa nekaj več kot 14 odstotkov. Tako velika zgornja meja pa svojo praktično vrednost že izgubi, saj dopušča, da je dejanska verjetnost izgube minimalnega kapitala nad tolerančnim pragom. S slike 8 za simulacijo ali izračun s Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo vidimo, da je verjetnost izgube minimalnega kapitala okrog $2{,}5$ odstotka, kar pa ni več zanemarljivo. Celo verjetnost, da bi prišlo do izgube 500 milijonov SIT, kar presega dvakratnik minimalnega kapitala, je večja kot 1 odstotek, medtem ko bi po Lundbergovi neenačbi dobili zgornjo mejo $1{,}5$ odstotka. Ker Lundbergova neenačba velja za neomejen čas poslovanja, je neznana natančna zgornja meja za verjetnost izgube 500 milijonov SIT v enem letu manjša od $1{,}5$ odstotka. Tudi če smo pripravljeni pri omejeni stopnji tveganja tvegati le del minimalnega kapitala, so razlike velike. Tako je npr. verjetnost za izgubo 100 milijonov SIT z upoštevanjem normalne aproksimacije manjša kot $0{,}5$ odstotka, z upoštevanjem aproksimacije s premaknjeno gama porazdelitvijo je malo manjša kot 1 odstotek, z upoštevanjem simulacije ali Panjerjeve rekurzije s Paretovo porazdelitvijo pa je malo večja od 5 odstotkov.

Slika 8: Porazdelitvena funkcija kosmatega tehničnega izida - detajl



Če bi pri določanju agregatne tehnične premije namesto NP-aproksimacije upoštevali Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo in kritično točko za verjetnost 95 odstotkov, bi bila agregatna tehnična premija za skoraj 103 milijone SIT večja. S tem bi se varnostni koeficient δ s $23{,}85$ odstotka povečal na $37{,}01$ odstotka. Kosmata zavarovalna premija bi se povečala za $10{,}6$ odstotka, za isti odstotek pa bi se povečal tudi minimalni kapital, ki bi znašal dobrih 256 milijonov SIT. S tako določeno premijo bi se verjetnost izgube minimalnega kapitala sicer zmanjšala, še vedno pa bi znašala več kot $1{,}5$ odstotka. To se da razbrati s slike 8, le da je treba gledati pri točki -359 milijonov SIT. S povečanjem tehnične premije za 103 milijone SIT se krivulje na slikah 6, 7 in 8 premaknjeno za prav toliko v desno, kar je isto, kot če oznake na x-osi povečamo za 103. Tudi po taki korekciji premije pa bi bila verjetnost, da bo kosmati tehnični izid manjši od -400 milijonov SIT, še vedno okrog 1 odstotek.

V naših izračunih smo upoštevali 10.000 polic, kar je lahko malo, a tudi veliko. Tudi povprečna vzorčna odškodnina $1{,}560$ milijona SIT ni posebno velika, največja vzorčna odškodnina, ki ne presega 52 milijonov SIT, pa je mnogo manjša od odškodnin za velike škode, ki so se v preteklosti zgodile v Sloveniji. Ker zelo velikih zavarovanih rizikov v Sloveniji še zdaleč ni

10.000, največje škode pa so presegle nekaj milijard SIT, si lahko predstavljamo, kakšne velike razlike bi lahko dobili z bolj ali manj natančnimi izračuni. Tehnične premije s povečevanjem varnostnega koeficienta v konkurenčnih razmerah ne moremo povečevati čez razumne meje, zato je razumljivo, da je rešitev le primerno pozavarovanje, s katerim zavarovalnica variabilnost agregatnih odškodnin, s tem pa tudi tehničnega izida, premakne v sprejemljive okvire.

5.8 Določanje parametrov optimalnega pozavarovanja

V tem razdelku bomo upoštevali le kvotno in škodno presežkovno pozavarovanje ter njuno kombinacijo. Vsotno presežkovnega pozavarovanja ne bomo upoštevali, ker bi za izračun morali poznati tudi podrobnosti o posameznih pozavarovanih rizikih, ki se nanašajo na obravnavanih 10.000 zavarovalnih polic. Čeprav večina od njih ne bi prišla v poštev za vsotno presežkovno pozavarovanje, pa bi za realen prikaz še vedno potrebovali preveč podrobnosti.

Tabela 5: Kvotno pozavarovanje pri stopnji tveganja $5\ \%$

U_r	Tip	α	P_l	$E[S_l]$	$E[W_l]$	σ_{W_l}	$\hat{\epsilon}$
250.000	A	2,7545	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
	B	0,7799	753.443	620.474	132.969	122.572	0,0188
	C	2,4359	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
200.000	A	2,2036	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
	B	0,6239	602.735	496.364	106.371	78.441	0,0188
	C	1,9487	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
150.000	A	1,6527	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
	B	0,4679	452.027	372.253	79.774	44.118	0,0188
	C	1,4616	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
100.000	A	1,1018	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0508
	B	0,3119	301.319	248.142	53.177	19.604	0,0188
	C	0,9744	941.345	775.215	166.130	191.331	0,0500
50.000	A	0,5509	532.212	438.286	93.926	61.159	0,0536
	B	0,1560	150.708	124.111	26.597	4.904	0,0188
	C	0,4872	470.673	387.608	83.065	47.833	0,0500

A - aproksimacija z enačbo (4.14) in $E[S] = 780.045$ ter $\mathrm{var}[S] = 106.174$
B - aproksimacija z enačbo (4.14) in $E[S] = 795.582$ ter $\mathrm{var}[S] = 201.517$
C - izračun z enačbo (4.18) in Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo

Za stopnjo tveganja smo predpostavili 5 odstotkov oziroma 1 odstotek, kar je sprejemljivo, ker obravnavamo le posamezno zavarovalno vrsto. Minimalni kapital 232 milijonov SIT, ki smo ga izračunali v razdelku 5.6, je le del minimalnega kapitala, ki ga mora imeti zavarovalnica za vse zavarovalne vrste. Pri izračunu nismo upoštevali pozavarovanja, zato moramo znesek 232 milijonov SIT pomnožiti še z razmerjem med čistimi in kosmatimi odškodninami v preteklem letu, vendar ne z manj kot $0{,}5$. Razmerje med čistimi in kosmatimi odškodninami se nanaša na vse zavarovalne vrste, zato dela minimalnega kapitala, ki se nanaša na obravnavano zavarovalno vrsto, ne moremo samostojno izračunati z rezultati iz nadaljevanja. Z gotovostjo vemo le, da mora znašati vsaj 161 milijonov SIT. Natančne vrednosti nam niti ni treba poznati, ker bomo v vseh izračunih obravnavali možnosti, ko je zavarovalnica pri dani stopnji tveganja pripravljena tvegati 50, 100, 150, 200 ali 250 milijonov SIT.

Tabela 6: Kvotno pozavarovanje pri stopnji tveganja $1\ \%$

U_r	Tip	α	P_l	$E[S_l]$	$E[W_l]$	σ_{W_l}	$\hat{\epsilon}$
250.000	A	1,7918	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
	B	0,5073	490.091	403.599	86.492	51.861	0,0112
	C	0,4661	450.288	370.821	79.467	43.779	0,0100
	D	2.7645	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0245
200.000	A	1,4335	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
	B	0,4058	392.034	322.847	69.187	33.185	0,0112
	C	0,3729	360.250	296.673	63.577	28.022	0,0100
	D	2.2116	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0304
150.000	A	1,0751	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
	B	0,3044	294.074	242.175	51.899	18.672	0,0112
	C	0,2796	270.115	222.445	47.670	15.754	0,0100
	D	1.6587	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0387
100.000	A	0,7167	692.387	570.194	122.193	103.511	0,0408
	B	0,2029	196.017	161.424	34.593	8.296	0,0112
	C	0,1864	180.077	148.296	31.781	7.002	0,0100
	D	1.1058	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0508
50.000	A	0,3584	346.242	285.137	61.105	25.885	0,0408
	B	0,1015	98.057	80.752	17.305	2.076	0,0112
	C	0,0932	90.038	74.148	15.890	1.750	0,0100
	D	0.5529	534.144	439.877	94.267	61.603	0.0537

A - aproksimacija z enačbo (4.14) in $E[S] = 780.045$ ter $\mathrm{var}[S] = 106.174$
B - aproksimacija z enačbo (4.14) in $E[S] = 795.582$ ter $\mathrm{var}[S] = 201.517$
C - izračun z enačbo (4.18) in Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo
D - izračun z enačbo (4.18) in NP-aproksimacijo

V tabelah 5 in 6 so pri stopnji tveganja 5 odstotkov oziroma 1 odstotek prikazani učinki kvotnega pozavarovanja. V vrsticah, označenih z A, je lastni delež α izračunan z aproksimativno metodo po enačbi (4.14), kjer smo za $E[S]$ in $\mathrm{var}[S]$ upoštevali vrednosti, izračunane z uporabo vzorčnih momentov. V vrsticah, označenih z B, je α izračunan na enak način, le da smo za $E[S]$ in $\mathrm{var}[S]$ upoštevali vrednosti, izračunane z uporabo momentov ekvidistantno diskretizirane Paretove porazdelitvene funkcije. V vrsticah, označenih s C, je optimalni α izračunan po enačbi (4.18). Za izračun potrebujemo kritično točko $F_S^{-1}(1-\epsilon)$, ki jo preberemo iz tabele 3 za Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo. Tako za $\epsilon = 0{,}05$ dobimo $\alpha = \frac{U_0}{1068707-966077} = \frac{U_0}{102630}$, za $\epsilon = 0{,}01$ pa $\alpha = \frac{U_0}{1502463-966077} = \frac{U_0}{536386}$. Pri stopnji tveganja 5 odstotkov pozavarovanje ni potrebno, če je zavarovalnica pripravljena tvegati vsaj 103 milijone SIT, kar je manj od minimalnega kapitala, ki ga mora imeti za obravnavana zavarovanja. Pri stopnji tveganja 1 odstotek pozavarovanje ni potrebno, če je zavarovalnica pripravljena tvegati vsaj 536 milijonov SIT, kar pa je znesek, ki je najmanj $2{,}3$-krat večji od minimalnega kapitala, ki se nanaša na obravnavana zavarovanja. V tabeli 6 so tudi vrstice, označene z D, v katerih je α izračunan po enačbi (4.18) s kritičnimi točkami iz tabele 3 za NP-aproksimacijo. Tehnično premijo smo določili tako, da je pri stopnji tveganja 5 odstotkov enaka ustrezni kritični točki za NP-aproksimacijo. Zato v tabeli 5 ni vrstic, označenih z D, saj bi z uporabo NP-aproksimacije za vsak $U_r \geq 0$ ugotovili, da pozavarovanje ni potrebno.

Poleg parametra α iz tabel 5 in 6 lahko preberemo čisto tehnično premijo, pričakovane čiste odškodnine, pričakovani čisti tehnični izid, standardni odklon pričakovanega čistega tehničnega izida in dejansko stopnjo tveganja $\hat{\epsilon}$. Pri danem α smo ostale vrednosti izračunali z upoštevanjem porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin, dobljene s Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo. Zato se dejanska stopnja tveganja v vrsticah, označenih z A, B in D, zaradi aproksimativnega izračuna α razlikuje od izhodiščne stopnje tveganja ϵ, v vrsticah, označenih s C, pa se z njo ujema, razen takrat, ko pozavarovanje ni potrebno, ker je $\alpha \geq 1$. Ker smo kosmato tehnično premijo obravnavali kot konstanto, je standardni odklon čistega tehničnega izida kar standardni odklon čistih odškodnin.

Iz tabele 5 je iz vrstic, označenih s C, razvidno, da je pozavarovanje pri stopnji tveganja 5 odstotkov potrebno pri tveganem kapitalu 100.000 in 50.000 enot. Kot vidimo iz vrstic, označenih z A, v tem primeru aproksimativna metoda daje zelo dobre rezultate, če kot merilo upoštevamo $\hat{\epsilon}$. S primerjavo lastnih deležev α pa ugotovimo, da aproksimativna metoda tveganje sistematično podcenjuje.

Če bi bila izvor podcenjevanja tveganja le premajhna upoštevana varianca kosmatih agregatnih odškodnin, bi morali biti rezultati iz vrstic, označenih z B, boljši. So pa še slabši, le da tveganje izrazito precenjujejo. Zato so izračunani lastni deleži premajhni, kar sicer povečuje varnost, vendar za ceno velikega in nepotrebnega zmanjšanja pričakovanega čistega tehničnega izida.

Iz tabele 6 je iz vrstic, označenih s C, razvidno, da je pozavarovanje pri stopnji tveganja 1 odstotek potrebno v vseh primerih. Kot vidimo iz vrstic, označenih z A in D, tokrat z ustreznima aproksimativnima metodama dobimo zelo slabe rezultate, ki nas odvračajo od nujno potrebnega pozavarovanja, kar je lahko zelo nevarno. Rezultati v vrsticah, označenih z B, so tokrat zelo dobri, zanimivo pa je tudi to, da smo pri obeh stopnjah tveganja dobili stopnje dejanskega tveganja, ki niso odvisne od višine tveganega kapitala.

Iz primera na osnovi podatkov iz tabel 5 in 6 lahko sklepamo, da aproksimativno izračunani lastni delež α ni zanesljiv. Če ga potrebujemo za izhodišče za aproksimativni izračun parametrov vsotno oziroma škodno presežkovnega pozavarovanja, je zelo priporočljivo α izračunati z uporabo eksaktne porazdelitvene funkcije kosmatih agregatnih odškodnin.

Če prioriteto M izračunamo iz enačbe (4.20) za NP-aproksimacijo porazdelitvene funkcije čistih agregatnih odškodnin, ki smo jo izračunali z upoštevanjem vzorčnih momentov, pri čemer vzorčne vrednosti navzgor omejimo z M, pri stopnji tveganja 1 odstotek in $U_r = 50.000$ dobimo $M = 38.606$, v vseh drugih primerih pa ugotovimo, da pozavarovanje ni potrebno. To je posledica dejstva, da so pri taki aproksimaciji ekvivalentne vse prioritete M, ki so večje ali enake maksimalni vzorčni odškodnini $51.975{,}626$ enot.

Oglejmo si še škodno presežkovno pozavarovanje. Za $U_r = 100.000$ in $\epsilon = 0{,}01$ prioriteto M aproksimativno izračunamo iz enačbe (4.15b). Za $\alpha = 0{,}7167$ s slike 2 na strani 75 lahko grobo ocenimo, da funkcija $F_{X,1}(x)$ doseže vrednost $y \approx 0{,}72$ nekje okrog 6 milijonov SIT. Za natančen izračun pa moramo rešiti enačbo $F_{X,1}(x) = y$, kar v našem primeru lahko naredimo s pomočjo enačbe (P3.18). Za Paretov parameter $\alpha > 1$ je $F_{X,1}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha-1}$, s tem pa dobimo

$$M \;=\; \lambda\, \frac{1 \,-\, (1-y)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

V našem primeru, ko je Paretov parameter $\alpha = 1{,}6751845$ in $\lambda = 1.079{,}7284$, je $M = 5.912$ enot oziroma $5{,}9$ milijona SIT.

Tabela 7: Škodno presežkovno pozavarovanje pri stopnji tveganja $5\ \%$

U_r	Tip	M	P_l	$E[S_l]$	$E[W_l]$	σ_{W_l}	$\hat{\epsilon}$
250.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
	B	9.081	751.019	623.224	127.795	49.921	< 0,0050
	C	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
	D	179.871	935.367	774.397	160.970	116.969	< 0.0050
	E	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0245
	F	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
200.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
	B	3.516	598.515	498.164	100.351	32.773	< 0,0050
	C	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
	D	143.897	930.404	770.327	160.077	111.236	< 0.0050
	E	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0304
	F	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
150.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
	B	1.669	444.813	372.121	72.692	21.411	< 0,0050
	C	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
	D	107.922	922.832	764.118	158.714	104.057	0.0062
	E	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0.0387
	F	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
100.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0508
	B	799	283.173	239.570	43.603	12.390	< 0,0050
	C	244.863	941.115	779.110	162.005	125.129	0,0374
	D	71.948	909.386	753.091	156.295	94.285	0.0082
	E	328.592	945.594	782.784	162.810	133.186	0.0481
	F	347.218	946.341	783.396	162.945	134.731	0,0500
50.000	A	2.454	527.856	440.221	87.635	27.087	< 0,0050
	B	308	139.787	121.987	17.800	5.845	< 0,0050
	C	1.824	463.304	387.285	76.019	22.599	< 0,0050
	D	35.974	876.446	726.079	150.367	78.475	0.0093
	E	161.213	933.026	772.477	160.549	114.141	0.0485
	F	167.962	933.923	773.213	160.710	115.196	0,0500

A,B,C - aproksimacija z enačbo (4.15b) in upoštevanjem α iz tabele 5
D - aproksimacija z enačbo (4.21) za $k(M) = 0{,}7$
E - izračun z enačbo (4.20) za NP-aproksimacijo
F - izračun z enačbo (4.17) in Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo

Rezultati aproksimativnih izračunov po enačbi (4.15b) za $\alpha < 1$ iz vrstic, ki so v tabelah 5 in 6 označene z A, B in C, so tudi v tabelah 7 in 8 enako označeni. V vrsticah, označenih z D, so rezultati, dobljeni z enačbo (4.21), kjer je upoštevan $k(M) = 0{,}7$. V vrsticah, označenih z E, so rezultati, dobljeni z rešitvijo enačbe (4.20) za NP-aproksimacijo porazdelitvene funkcije čistih agregatnih odškodnin. Pri tem pa je uporabljena NP-aproksimacija, izračunana z uporabo momentov ekvidistantno diskretizirane Paretove porazdelitvene funkcije, korigirane pri M. Analogna NP-aproksimacija za izračun kosmatih agregatnih odškodnin zaradi velikega koeficienta asimetrije ni primerna, kar se vidi tudi iz tabele 4 na strani 79, kjer so ustrezne kritične točke krepko prevelike. Tokrat pa so odškodnine navzgor omejene z M, kar koeficient asimetrije bistveno zmanjša. Tako za vse končne M iz vrstic, označenih z E, velja $0{,}27 < \gamma_S < 1{,}16$. Zato je NP-aproksimacija uporabna in kot lahko vidimo iz tabel 7 in 8, daje zelo dobre rezultate.

Tabela 8: Škodno presežkovno pozavarovanje pri stopnji tveganja $1\ \%$

U_r	Tip	M	P_l	$E[S_l]$	$E[W_l]$	σ_{W_l}	$\hat{\epsilon}$
250.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0245
	B	2.001	485.588	405.559	80.029	24.085	< 0,0050
	C	1.655	444.813	372.121	72.692	21.411	< 0,0050
	D	89.965	917.245	759.535	157.710	99.627	< 0.0050
	E	308.786	944.719	782.066	162.653	131.459	0.0096
	F	315.330	945.019	782.312	162.707	132.041	0,0100
200.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0304
	B	1.254	385.954	323.854	62.100	17.868	< 0,0050
	C	1.075	349.709	294.133	55.576	15.845	< 0,0050
	D	71.972	909.412	753.113	156.299	94.301	< 0.0050
	E	218.254	939.109	777.465	161.644	122.053	0.0098
	F	221.143	939.343	777.657	161.686	122.398	0,0100
150.000	A	∞	966.077	795.582	170.495	201.517	0,0387
	B	769	283.173	239.570	43.603	12.390	< 0,0050
	C	675	256.760	217.910	38.850	11.100	< 0,0050
	D	53.979	897.482	743.329	154.153	87.606	< 0.0050
	E	141.204	929.957	769.960	159.997	110.765	0.0098
	F	142.841	930.228	770.183	160.045	111.050	0,0100
100.000	A	5.912	689.528	572.798	116.730	41.889	< 0,0050
	B	431	177.916	153.255	24.661	7.484	< 0,0050
	C	386	159.410	138.079	21.331	6.680	< 0,0050
	D	35.986	876.446	726.079	150.367	78.475	< 0.0050
	E	80.340	913.406	756.388	157.018	96.905	0.0098
	F	81.099	913.732	756.655	157.077	97.127	0,0100
50.000	A	1.004	339.743	285.960	53.783	15.307	< 0,0050
	B	185	73.015	67.232	5.783	3.124	< 0,0050
	C	168	73.015	67.232	5.783	3.124	< 0,0050
	D	17.993	825.580	684.367	141.213	63.624	< 0.0050
	E	37.466	878.817	728.023	150.794	79.379	0.0099
	F	37.713	879.197	728.335	150.862	79.526	0,0100

A,B,C - aproksimacija z enačbo (4.15b) in upoštevanjem α iz tabele 6
D - aproksimacija z enačbo (4.21) za $k(M) = 0{,}7$
E - izračun z enačbo (4.20) za NP-aproksimacijo
F - izračun z enačbo (4.17) in Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo

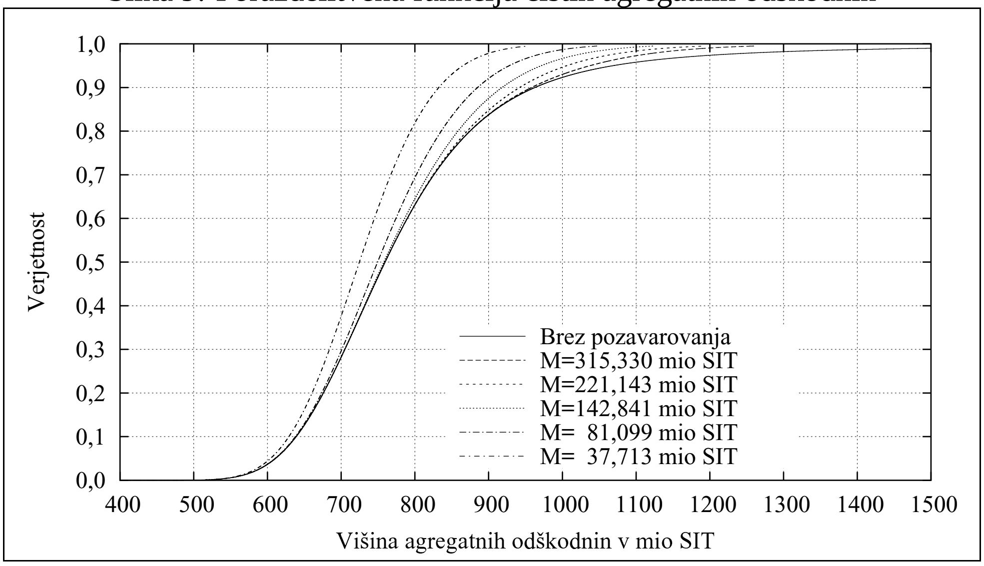
Uporabili smo jih za začetni približek za reševanje enačbe (4.17) za porazdelitveno funkcijo čistih agregatnih odškodnin, izračunano s Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo. Eksaktni optimalni rezultati so v vrsticah, označenih s F, in se od začetnih približkov nebistveno razlikujejo.

Pri iskanju optimalne prioritete M smo $P_l(M)$ računali po enačbi (4.19), pri tem pa smo za varnostni koeficient pozavarovalnice za škodno presežkovno pozavarovanje upoštevali $\delta_p = 25$ odstotkov, kar je več od varnostnega koeficienta zavarovalnice $\delta = 23{,}85$ odstotka. To pa vpliva le na rezultate v vrsticah, označenih z E in F. Enačbi (4.17) in (4.20) smo rešili z metodo bisekcije na diskretizacijski korak (50 enot) natančno, končno vrednost pa smo določili z linearno interpolacijo. Za vse tipe vrstic tabel 7 in 8 so pri danem M ostale vrednosti izračunane za $\hat{M} = 50\,[\frac{M}{50}]$ z uporabo porazdelitvene funkcije čistih agregatnih odškodnin, dobljene s Panjerjevo rekurzijo s Paretovo porazdelitvijo, korigirano pri $\hat{M}$.

Iz tabel 7 in 8 vidimo, da so rezultati, dobljeni z NP-aproksimacijo, zelo dobri, vse ostale aproksimativne metode pa dajo bistveno premajhne prioritete M. S stališča varnosti jim nimamo česa očitati, seveda pa je vsaj v tem primeru cena za večjo varnost izjemno visoka.

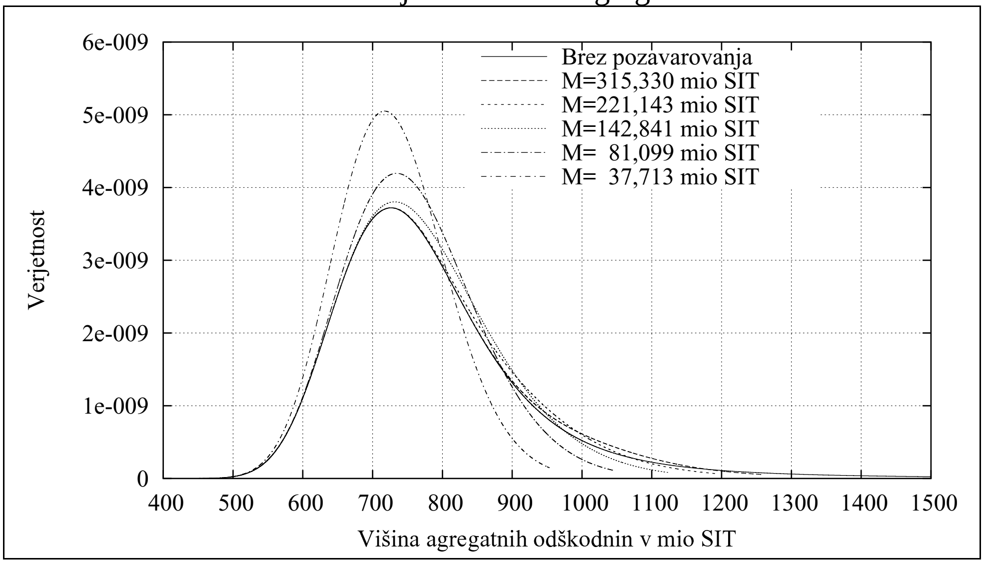
S primerjavo tabel 5 in 7 oziroma tabel 6 in 8 lahko ugotovimo, da je škodno presežkovno pozavarovanje bistveno učinkovitejše od kvotnega pozavarovanja. Tako za $\epsilon = 0{,}01$ pri optimalnem kvotnem pozavarovanju in $U_r = 250.000$ lahko pričakujemo čisti tehnični izid v višini 79.467 enot in koeficient variacije $55{,}1$ odstotka, pri petkrat manjšem tveganem kapitalu $U_r = 50.000$ in optimalnem škodno presežkovnem pozavarovanju pa kar 150.862 enot in koeficient variacije $52{,}7$ odstotka. V prvem primeru pozavarovalna tehnična premija predstavlja $53{,}39$ odstotka kosmate tehnične premije, v drugem primeru pa znaša $966.077 - 879.197 = 86.880$ enot oziroma le $8{,}99$ odstotka kosmate tehnične premije. Zato dobimo praktično enake rezultate, če računamo z $\delta_p = \delta = 23{,}85$ odstotka, saj se prioritete M povečajo od $0{,}12$ do $0{,}44$ odstotka. Prav tako ne bi dobili bistveno manjših prioritet, tudi če bi pri škodno presežkovnem pozavarovanju namesto $\delta_p = 25$ odstotkov upoštevali večji varnostni koeficient.

Slika 9: Porazdelitvena funkcija čistih agregatnih odškodnin



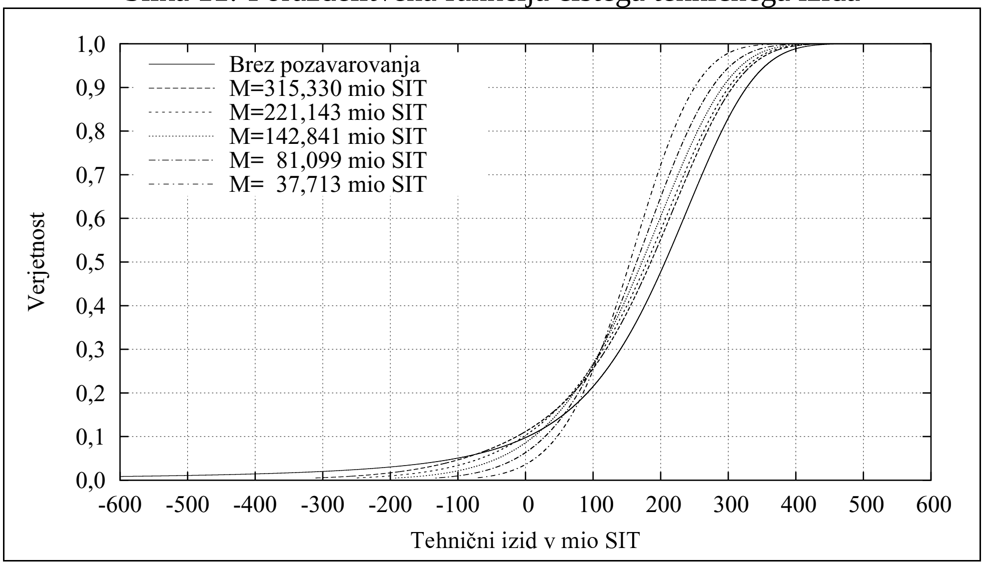
Na slikah 9 in 10 vidimo, kako škodno presežkovno pozavarovanje pri različnih prioritetah vpliva na porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti čistih agregatnih odškodnin. Za kvotno pozavarovanje slike niso potrebne, ker zadošča, da upoštevamo graf za primer, ko nimamo pozavarovanja, merilo na x-osi pa pomnožimo z α.

Slika 10: Gostota verjetnosti čistih agregatnih odškodnin



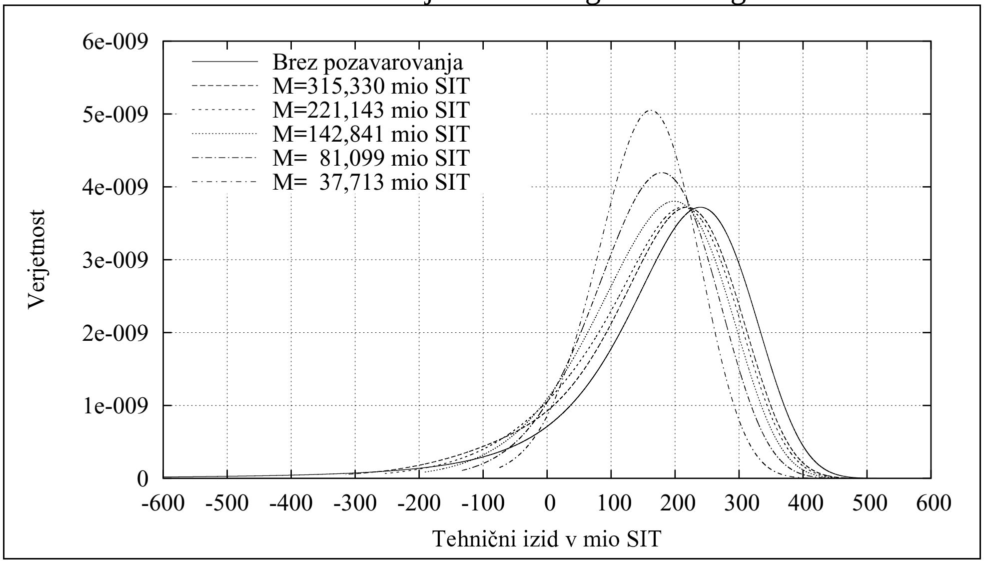
Na slikah 11, 12 in 13 vidimo porazdelitveno funkcijo in gostoto verjetnosti za čiste tehnične rezultate. Na sliki 13 se grafi ne spustijo pod $0{,}5$ odstotka le zato, ker smo s Panjerjevo rekurzijo vse porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin $F_{S_l}(x)$ izračunali le do prvega mnogokratnika koraka, za katerega je $F_{S_l}(x) \geq 0{,}995$.

Slika 11: Porazdelitvena funkcija čistega tehničnega izida

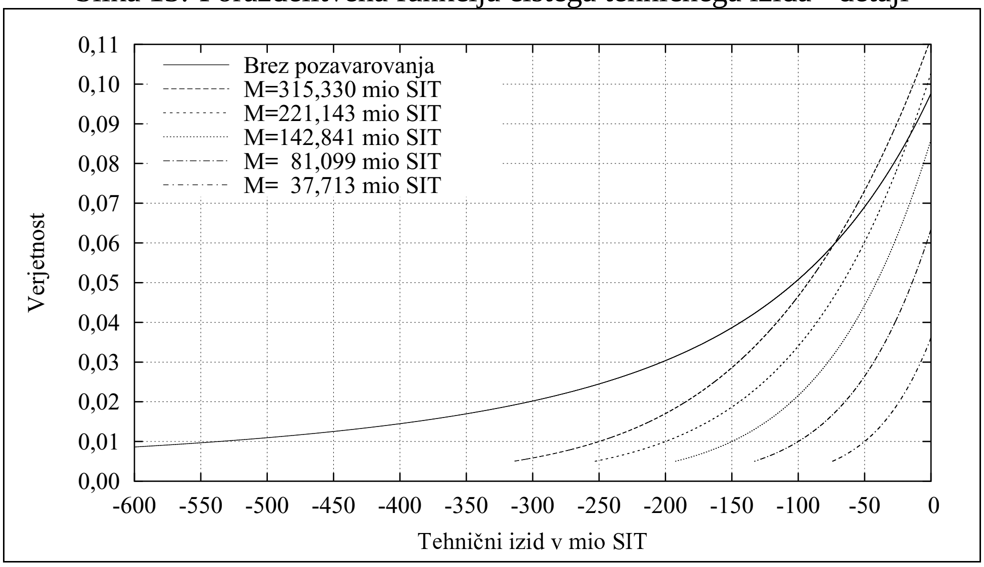


Slika 13 je zelo poučna, saj nam zelo nazorno prikaže izreden pomen primernega pozavarovanja. Tako v našem primeru s škodno presežkovnim pozavarovanjem s prioriteto $M = 37{,}713$ milijona SIT pri stopnji tveganja $\epsilon = 0{,}01$ tvegani kapital zmanjšamo skoraj za 500 milijonov SIT. Pozavarovalna tehnična premija v tem primeru predstavlja 9 odstotkov kosmate tehnične premije, na kar pa ne smemo gledati kot na ceno za večjo varnost, saj v zameno za pozavarovalno premijo dobimo pozavarovalni del odškodnin. Dejanska cena večje varnosti je zmanjšanje pričakovanega tehničnega izida, ki znaša $170.495 - 150.862 = 19.633$ enot oziroma 2 odstotka kosmate tehnične premije.

Slika 12: Gostota verjetnosti čistega tehničnega izida



Slika 13: Porazdelitvena funkcija čistega tehničnega izida - detajl



Zanimivo je, kot vidimo s slike 13, da nam škodno presežkovno pozavarovanje s prioriteto $M = 315{,}330$ milijona SIT oziroma z $M = 221{,}143$ milijona SIT sicer zmanjša verjetnost ekstremno negativnega tehničnega izida, hkrati pa nam poveča verjetnost negativnega tehničnega izida.

Za konec v tabeli 9 navajamo rezultate za eno od možnih kombinacij škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja. Ker je prioriteta večja od optimalne, dejanska stopnja tveganja po upoštevanju škodno presežkovnega pozavarovanja presega zahtevano stopnjo tveganja. S kvotnim pozavarovanjem, za katerega smo lastni delež α izračunali po enačbi (4.22), pa smo dejansko stopnjo tveganja izenačili z zahtevano.

Tabela 9: Škodno presežkovno in kvotno pozavarovanje pri stopnji tveganja $1\ \%$

U_r	Parametra pozav.	P_l	$E[S_l]$	$E[W_l]$	σ_{W_l}	$\hat{\epsilon}$
250.000	$M =$ 400.000	948.136	784.867	163.269	138.739	0,0152
	$\alpha =$ 0,8531	808.855	669.570	139.285	118.358	0,0100
200.000	$M =$ 300.000	944.302	781.724	162.578	130.665	0,0158
	$\alpha =$ 0,8256	779.616	645.391	134.225	107.877	0,0100
150.000	$M =$ 200.000	937.480	776.129	161.351	119.745	0,0164
	$\alpha =$ 0,8003	750.265	621.136	129.129	95.832	0,0100
100.000	$M =$ 150.000	931.391	771.136	160.255	112.299	0,0228
	$\alpha =$ 0,6451	600.840	497.460	103.380	72.444	0,0100
50.000	$M =$ 100.000	920.578	762.269	158.309	102.196	0,0326
	$\alpha =$ 0,4276	393.639	325.946	67.693	43.699	0,0100

Podcenjenost prioritet, izračunanih z enačbo (4.15b), je posledica velike razlike v učinkovitosti škodno presežkovnega in kvotnega pozavarovanja in dejstva, da enačba (4.15b) v bistvu temelji na izenačitvi pozavarovalnega dela nevarnostne premije za škodno presežkovno pozavarovanje s pozavarovalno nevarnostno premijo za kvotno pozavarovanje. V tabelah 5 in 7 ter 6 in 8 čiste nevarnostne premije sicer ne moremo primerjati, lahko pa v vrsticah, označenih s C, primerjamo čisto tehnično premijo. Pri škodno presežkovnem pozavarovanju je manjša, ker je varnostni koeficient δ_p večji od δ. Večji del razlike je posledica dejstva, da je pozavarovalni del tehnične premije povečan na račun čiste tehnične premije, manjši del razlike pa je posledica dejstva, da vrednosti v tabelah 7 in 8 niso izračunane za M, ampak za $\hat{M} = 50\,[\frac{M}{50}]$.

Sklep

V magistrskem delu smo teoretično in na praktičnem primeru prikazali, kako lahko iz podatkov o številu in višinah odškodnin za določeno homogeno nevarnostno skupino določimo porazdelitveno funkcijo agregatnih odškodnin. Z znano porazdelitveno funkcijo agregatnih odškodnin lahko korektno določimo zavarovalno premijo, hkrati pa laže ocenimo potrebne parametre pozavarovanja. Ugotovili smo, da je izračun optimalnih parametrov pozavarovanja težak problem, ki pa ga je vsaj do neke mere mogoče rešiti. S pravilnim pozavarovanjem lahko za sprejemljivo ceno verjetnost izgube tveganega kapitala zaradi prevelikih agregatnih odškodnin navzgor omejimo na vrednost, ki je za vodstvo zavarovalnice oziroma njene lastnike še sprejemljiva. Verjetnost nastanka nesolventnosti zavarovalnice zaradi prevelikih agregatnih odškodnin lahko s primernim pozavarovanjem bistveno zmanjšamo, celo toliko, kot z dokapitalizacijo v praktično sprejemljivih okvirih ni mogoče.

S pozavarovanjem tveganje zaradi v zavarovanje sprejetih rizikov pomembno zmanjšamo, zato pa povečamo kreditno tveganje, kamor uvrščamo tudi tveganje, da nam pozavarovalnica ne bo sposobna izplačati svojega dela odškodnin. To pa je že drug problem, ki se ga v tem delu nismo dotaknili.

Literatura

1. Abramowitz Milton, Stegun Irene A. (eds.): *Handbook of Mathematical Functions,* 9^{th} *ed.* New York: Dover Publications, Inc., 1972. 1046 str.

2. Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen M.: *Risk Theory,* 3^{rd} *ed.* London: Chapman and Hall, 1984. 408 str.

3. Berger Gottfried: Integration of the normal power approximation. *Astin Bulletin*, Leuven, 7(1972), 1, str. 90–95.

4. Boncelj Jože: *Zavarovalna ekonomika*. Maribor: Založba Obzorja, 1983. 351 str.

5. Bowers Newton L., Jr., et al.: *Actuarial Mathematics,* 2^{nd} *ed.* Schaumburg: The Society of Actuaries, 1997. 753 str.

6. Bühlmann Hans: *Mathematical Methods in Risk Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1970. 210 str.

7. Bühlmann Hans, Gerber Hans U.: The aggregate claims distribution and stop-loss reinsurance [discussion]. *Transactions of Society of Actuaries*, 32(1980a), str. 537–545.

8. Centeno Maria de Lourdes: The effect of the retention limit on the risk reserve. *Astin Bulletin*, Leuven, 25(1995), 1, str. 67–74.

9. Centeno Maria de Lourdes, Simões Onofre: Combining quota-share and excess of loss treaties on the reinsurance on n independent risks. *Astin Bulletin*, Leuven, 21(1991), 1, str. 41–55.

10. Chappell Claudia et al.: *Subject C2. Statistics. Core Reading*. B.k.: The Institute and Faculty of Actuaries, 1997. Brez enotnega številčenja strani.

11. Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M.: *Practical Risk Theory for Actuaries*. London: Chapman & Hall, 1994. 546 str.

12. De Pril Nelson: On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. *Astin Bulletin*, Leuven, 16(1986), 2, str. 109–112.

13. Dickson David C.M., Waters Howard R.: Relative reinsurance retention levels. *Astin Bulletin*, Leuven, 27(1997), 2, str. 207–227.

14. Feller William: *An Introduction to Probability Theory and Its Application, Vol. 1,* 3^{rd} *ed.* New York: John Wiley & Sons, 1968. 509 str.

15. Feller William: *An Introduction to Probability Theory and Its Application, Vol. 2,* 2^{nd} *ed.* New York: John Wiley & Sons, 1971. 669 str.

16. Flis Slavko: *Zbrani spisi o zavarovanju, I. knjiga*. Ljubljana: Pozavarovalnica Sava in Zavarovalnica Triglav, 1995. 311 str.

17. Flis Slavko: *Zbrani spisi o zavarovanju, II. knjiga*. Ljubljana: Pozavarovalnica Sava in Zavarovalnica Triglav, 1995a. 357 str.

18. Flis Slavko: *Zbrani spisi o zavarovanju, III. knjiga*. Ljubljana: Pozavarovalnica Sava in Zavarovalnica Triglav, 1995b. 416 str.

19. Flis Slavko: *Zbrani spisi o zavarovanju, IV. knjiga*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje, 1999. 606 str.

20. *Foundations of Casualty Actuarial Science,* 3^{rd} *ed.* Arlington: Casualty Actuarial Society, 1996. 596 str.

21. Friedlos Jürg, Schmitter Hans, Straub Erwin: *Setting retentions*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, 1997. 19 str.

22. Gerber Hans U.: *An Introduction to Mathematical Risk Rheory*. Philadelphia: Huebner Foundation for Insurance Education, 1979. 164 str.

23. Gnedenko B.V.: *The Theory of Probability*. Moskva: Mir publishers, 1976. 392 str.

24. Grübel Rudolf, Hermesmeier Renate: Computation of compound distributions II: discretization errors and Richardson extrapolation. *Astin Bulletin*, Leuven, 30(2000), 2, str. 309–331.

25. Hamming R.W.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers,* 2^{nd} *ed.* New York: Dover Publications, Inc., 1986. 721 str.

26. Hart D.G., Buchanan R.A., Howe B.A.: *The Actuarial Practice of General Insurance,* 5^{th} *ed.* Sydney: Institute of Actuaries of Australia, 1996. 591 str.

27. Heckman Philip E., Meyers Glenn G.: The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 70(1983), 133, str. 22–61.

28. Heckman Philip E., Meyers Glenn G.: The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions [addendum]. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 71(1984), 135, str. 49–66.

29. Hesselager Ole: A recursive procedure for calculation of some compound distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 24(1994), 1, str. 19–32.

30. Hipp Christian: Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. *Astin Bulletin*, Leuven, 16(1986), 2, str. 89–100.

31. Hogg Robert V., Klugman Stuart A.: *Loss Distributions*. New York: John Wiley & Sons, 1984. 235 str.

32. Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B.: *Introductory Statistics with Applications in General Insurance,* 2^{nd} *ed.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 281 str.

33. Jamnik Rajko: *Verjetnostni račun*. Ljubljana: Mladinska knjiga, 1971. 415 str.

34. Jamnik Rajko: *Matematična statistika*. Ljubljana: DZS, 1980. 408 str.

35. Kaas R., Goovaerts M.J.: Application of the problem of moments to various insurance problems in non-life v Goovaerts M., de Vylder F., Haezendonck J. (eds.): *Insurance and Risk Theory*, NATO ASI Series. Series C, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 171. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986. 487 str.

36. Kaas R., Goovaerts M.J.: Computing moments of compound distributions v Goovaerts M., de Vylder F., Haezendonck J. (eds.): *Insurance and Risk Theory*, NATO ASI Series. Series C, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 171. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986a. 487 str.

37. Kauppi Lauri, Ojantakanen Pertti: Approximations of the generalised Poisson function. *Astin Bulletin*, Leuven, 5(1969), 2, str. 213–226.

38. Kastelijn W.M., Remmerswaal J.C.M.: *Solvency*. Rotterdam: Nationale-Nederlanden N.V., 1986. 127 str.

39. Kendall Maurice, Stuart Alan: *The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1,* 4^{th} *ed.* London: Charles Griffin & Company Limited, 1977. 472 str.

40. Kendall Maurice, Stuart Alan: *The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2,* 4^{th} *ed.* London: Charles Griffin & Company Limited, 1979. 748 str.

41. Klugman Stuart A., Panjer Harry H., Willmot Gordon E.: *Loss Models: From Data to Decisions*. New York: John Wiley & Sons, 1998. 644 str.

42. Knuth Donald E.: *The Art of Computer Programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms,* 2^{nd} *ed.* Reading: Addison-Wesley, 1981. 688 str.

43. Kornya Peter S.: Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model. *Transactions of Society of Actuaries*, 35(1983), str. 823–836.

44. Kuon S., Reich A., Reimers L.: Panjer vs Kornya vs De Pril: a comparision from a practical point of view. *Astin Bulletin*, Leuven, 17(1987), 2, str. 183–191.

45. Kuon S., Radtke M., Reich A.: An appropriate way to switch from the individual risk model to the collective one. *Astin Bulletin*, Leuven, 23(1993), 1, str. 23–54.

46. Linden Orin M., Klinker Fred: Transformed beta and gamma distributions and agregate losses [discussion]. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 71(1984), 135, str. 26–48.

47. Mc Intosh David C.: Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model [discussion]. *Transactions of Society of Actuaries*, 35(1983), str. 837–858.

48. Meyers Glenn, Schenker Nathaniel: Parameter uncertainty in the collective risk model. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 70(1983), 133, str. 111–143.

49. Panjer Harry H.: The aggregate claims distribution and stop-loss reinsurance. *Transactions of Society of Actuaries*, 32(1980), str. 523–535.

50. Panjer Harry H.: Recursive evaluation of a family of compound distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 12(1981), 1, str. 22–26.

51. Panjer Harry H., Wang Shaun: On the stability of recursive formulas. *Astin Bulletin*, Leuven, 23(1993), 2, str. 227–258.

52. Panjer Harry H., Wang Shaun: Computational aspects of Sundt's generalized class. *Astin Bulletin*, Leuven, 25(1995), 1, str. 5–17.

53. Panjer Harry H., Willmot Gordon E.: Models for the distribution of aggregate claims in risk theory. *Transactions of Society of Actuaries*, 36(1984), str. 399–446.

54. Panjer Harry H., Willmot Gordon E.: *Insurance Risk Models*. Schaumburg: Society of Actuaries, 1992. 442 str.

55. Patrik Gary: Estimating casualty insurance loss amount distributions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 67(1980), 128, str. 57–109.

56. Pentikäinen T.: On the approximation of the total amount of claims. *Astin Bulletin*, Leuven, 9(1977), 3, str. 281–289.

57. Pentikäinen T.: Approximative evaluation of the distribution function of aggregate claims. *Astin Bulletin*, Leuven, 17(1987), 1, str. 15–39.

58. Philipson Carl: A review of the collective theory of risk. Part I. Comments on the development of the theory. *Astin Bulletin*, Leuven, 5S(1971), 1, str. 1–24.

59. Philipson Carl: A review of the collective theory of risk. Part II. List of literature on the theory of collective risk and related subjects. *Astin Bulletin*, Leuven, 5S(1971a), 2, str. 25–41.

60. Press William H. et al.: *Numerical Recipes in Pascal*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 759 str.

61. Ramsay Colin M.: A note on the normal power aproximation. *Astin Bulletin*, Leuven, 21(1991), 1, str. 147–150.

62. Robertson John. P.: The computation of aggregate loss distributions. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 79(1992), 150, str. 57–133.

63. Rockmore Daniel N.: The FFT: an algorithm the whole family can use. *Computing in Science & Engineering*, 2(2000), 1, str. 60–64.

64. Rytgaard Mette: Estimation in the Pareto distribution. *Astin Bulletin*, Leuven, 20(1990), 2, str. 201–216.

65. Schmitter Hans: *Setting optimal reinsurance retentions*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, 2001. 47 str.

66. Schmitter Hans, Bütikofer Peter: *Estimating property excess of loss risk premiums by means of the Pareto model*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, 1998. 49 str.

67. Schmutz Markus: *Designing property reinsurance programmes*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, 1999. 47 str.

68. Schmutz Markus, Doerr Richard R.: *The Pareto model in property reinsurance*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, 1998. 29 str.

69. Seal Hilary L.: Approximations to risk theory's F(x,t) by means of the gamma distribution. *Astin Bulletin*, Leuven, 9(1977), 1 in 2, str. 213–218.

70. Seal Hilary L.: From agregate claims distribution to probability of ruin. *Astin Bulletin*, Leuven, 10(1978), 1, str. 47–53.

71. Seal Hilary L.: *Survival Probabilities*. Chichester: John Willey & Sons, 1978a. 103 str.

72. Straub Erwin: *Non-Life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 136 str.

73. Sundt Bjørn: On some extensions of Panjer's class of counting distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 22(1992), 1, str. 61–80.

74. Sundt Bjørn: *Introduction to Non-Life Insurance Mathematics*, 3^{th} *ed.* Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft e.V., 1993. 215 str.

75. Sundt Bjørn, Jewell William S.: Further results on recursive evaluation of compound distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 12(1981), 1, str. 27–39.

76. Venter Gary: Transformed beta and gamma distributions and agregate losses. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 70(1983), 133, str. 156–193.

77. Venter Gary: The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions [discussion]. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 70(1983a), 133, str. 62–73.

78. Waldmann Karl-Heinz: On the exact calculation of the aggregate claims distribution in the individual life model. *Astin Bulletin*, Leuven, 24(1994), 1, str. 89–96.

79. Waldmann Karl-Heinz: Modified recursions for a class of compound distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 26(1996), 2, str. 213–224.

80. Wang Shaun: Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 24(1994), 2, str. 161–166.

81. Willmot Gordon: Sundt and Jeweel's family of discrete distributions. *Astin Bulletin*, Leuven, 18(1988), 1, str. 17–29.

Viri

1. 73/239/EEC: First Council Directive of 24 July 1973 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking-up and pursuit of the business of direct insurance other than life assurance. *Official Journal of the European Communities, No. L 228, 16. 8. 1973*.

2. Directive 2002/13/EC of the European Parliament and of the Council of 5 March 2002 amending Council Directive 73/239/EEC as regards the solvency margin requirements for non-life insurance undertakings. *Official Journal of the European Communities, No. L 77, 20. 3. 2002*.

3. Directive 2002/83/EC of the European Parliament and of the Council of 5 November 2002 concerning life assurance. *Official Journal of the European Communities, No. L 345, 19. 12. 2002*.

4. Discussion Note to the Members of the IC Solvency Subcommittee. [URL:http://www.actuaries.org/members/en/committees/INSREG/documents/2520-02-iais-iaa-en.pdf], 18. 9. 2002.

5. *European Reinsurance - The Market Take Their Bite*. Moody's Investors Service, report number 79005, september 2003. 30 str.

6. First Council Directive of 5 March 1979 on the coordination of laws, regulations and administrative provisions relating to the taking up and pursuit of the business of direct life assurance (79/267/EEC). *Official Journal of the European Communities, No. L 63, 13. 3. 1979*.

7. *Insurance company ratings*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, sigma 4/2003. 38 str.

8. Obligacijski zakonik. *Uradni list RS, št. 83/2001*.

9. On Solvency, Solvency Asessments and Actuarial Issues. An IAIS Issues Paper (Final Version). [URL:http://www.iaisweb.org/content/03pub/08151istansolv.pdf], 15. 3. 2000.

10. *Reinsurance - a systematic risk?* Zürich: Swiss Reinsurance Company, sigma 5/2003. 32 str.

11. Report of the working group on non-life technical provisions to the IC Solvency Subcommittee. [URL:http://europa.eu.int/comm/internal_market/en/finances/insur/markt-2529-02-non-life-report_en.pdf], september 2002.

12. Report of Solvency Working Party. [URL:http://www.actuaries.org/members/en/committees/INSREG/documents/Solvency_Report_en.pdf], 7. 2. 2002.

13. Report to the Insurance Committee on the need for further harmonisation of the solvency margin. [URL:http://europa.eu.int/comm/internal_market/en/finances/insur/solven.pdf], 24. 7. 1997.

14. Sklep o načinu in obsegu upoštevanja posameznih postavk, podrobnejših lastnostih in vrstah postavk ter lastnostih podrejenih dolžniških instrumentov, ki se upoštevajo pri izračunu kapitala in kapitalske ustreznosti, in izkaz kapitalske ustreznosti zavarovalnice. *Uradni list RS, št. 3/2001, 68/2001, 22/2002, 69/2002, 117/2002*.

15. Sklep o podrobnejši vsebini poročila pooblaščenega aktuarja. *Uradni list RS, št. 3/2001*.

16. Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnic. *Uradni list RS, št. 3/2001, 68/2001, 69/2002*.

17. Sklep o predpisanih usmeritvah za izračun lastnih deležev zavarovalnice v tabelah maksimalnega kritja in določanje največje verjetne škode. *Uradni list RS, št. 9/2001*.

18. Slovenski računovodski standardi. *Uradni list RS, št. 107/2001*.

19. *Solvency of non life insurers: Balancing security and profitability expectations*. Zürich: Swiss Reinsurance Company, sigma 1/2000. 38 str.

20. Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision. [URL:http://europa.eu.int-/comm/internal_market/en/finances/insur/solvency2-study-kpmg_en.pdf], maj 2002.

21. Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision - appendices. [URL:http://europa.eu.int-/comm/internal_market/en/finances/insur/solvency2-study-kpmg-annexes_en.pdf], maj 2002.

22. Zakon o temeljih sistema premoženjskega in osebnega zavarovanja. *Uradni list SFRJ, št. 17/1990, 82/1990*.

23. Zakon o temeljih sistema zavarovanja premoženja in oseb. *Uradni list SFRJ, št. 24/1976*.

24. Zakon o zavarovalnicah. *Uradni list RS, št. 64/1994, 35/1995*.

25. Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS, št. 13/2000, 91/2000, 21/2002, 50/2004*.

Priloge

P1 Modeliranje porazdelitve števila in višine odškodnin

Ko pride do škodnega primera, ki je krit z zavarovalno polico, nastane škoda, ki je lahko materialna ali nematerialna. Zavarovalnica kot nadomestilo za nastalo škodo zavarovancu oziroma oškodovancu izplača odškodnino, v nekaterih primerih pa lahko škodo povrne tudi v naturalni obliki, npr. pri zdravstvenem zavarovanju ali zavarovanju avtomobilske asistence. Tudi v takih primerih bomo velikost oziroma višino škode ali odškodnine merili v denarni enoti.

Ko zavarovanec zavarovalnici prijavi škodo, še ni rečeno, da bo ta izplačala odškodnino. Zavarovalnica lahko izplačilo odškodnine odkloni, če škoda po zavarovalnih pogojih ni krita, ali pa škodni spis iz drugih razlogov zaključi, ne da bi izplačala odškodnino. Zaradi pravilnejšega obravnavanja stroškov pa je pomembno, da v zavarovalniških statistikah kot škodne primere upoštevamo tudi škode, za katere izplačila odškodnine ni bilo. Če pri izračunu škodne pogostosti upoštevamo tudi take, t. i. ničelne škode, se pogostost škod poveča, zato pa se zmanjša povprečna odškodnina, saj upoštevamo tudi odškodnine, ki so 0. Če računamo nevarnostno premijo po enačbi (1.1), se oba vpliva izničita. Različno obravnavanje ničelnih škod vpliva na standardni odklon ocenjene povprečne odškodnine, s tem pa tudi na varnostni dodatek in obratovalni dodatek, če ga računamo v odstotku kosmate zavarovalne premije. Posledica različne obravnave ničelnih škod je lahko različna kosmata zavarovalna premija, vendar razlike običajno niso velike. To je popolnoma v skladu z dejstvom, da skupne odškodnine niso odvisne od različne obravnave podatkov, dela z reševanjem ničelnih škod pa tudi ni nič več in nič manj. Zavarovalnica ima v obeh primerih stroške tudi z obravnavanjem ničelnih škod, za katere je izrazito značilno, da razmerje med stroški obdelave škodnega primera in izplačano odškodnino ni usklajeno z razmerjem med obratovalnim dodatkom in tehnično premijo za ustrezno zavarovanje.

Na podobno značilnost, le manj izrazito, naletimo v primeru majhnih, t. i. bagatelnih škod, ki zaradi množičnosti zavarovalnici lahko povzročajo velike skupne stroške, čeprav skupne odškodnine niso velike. Da bi zmanjšale število prijav majhnih škod, so zavarovalnice vpeljale različne oblike soudeležbe zavarovanca pri škodi, npr. integralno ali odbitno franšizo. Če škoda ne presega franšize, je zavarovanec običajno niti ne prijavi, ker ve, da zavarovalnica odškodnine ni dolžna izplačati. Če pa škoda franšizo presega, lahko zavarovalnica z odškodnino nadomesti škodo v celoti (integralna franšiza) ali pa nadomesti le razliko med škodo in franšizo (odbitna franšiza). Pomemben učinek soudeležbe zavarovanca pri škodi je tudi v tem, da so zavarovanci bolj skrbni, ker vedo, da jih v vsakem primeru bremeni vsaj del škode. Iz tega razloga je soudeležba pri škodi večkrat določena kar z odstotkom škode[1]. Protiutež navedenim ukrepom so seveda nižje zavarovalne premije. Koliko nižje, pa se ne da izračunati samo s podatki, uporabljenimi v enačbi (1.1).

Poleg dogovora o najmanjši škodi, za katero bo zavarovalnica izplačala odškodnino, se zavarovalec in zavarovalnica lahko sporazumeta tudi o najvišji možni odškodnini (zavarovalni vsoti), saj včasih zavarovalnica noče prevzeti celotnega rizika, včasih pa zavarovalec ne želi previsoke zavarovalne premije. Zaradi naštetih in drugih možnosti višina odškodnine v splošnem primeru

[1] Natančneje: odstotkom odškodnine, kakršna bi bila, če soudeležbe ne bi bilo.

ni enaka višini škode, je pa njena funkcija. Nekatere pomembne primere razmerij med škodami in odškodninami si bomo ogledali v razdelku P1.4.

Iz navedenih razlogov je za aktuarja v splošnem primeru pomembno poznavanje porazdelitve števila in višine škod ter porazdelitve števila in višine dejanskih odškodnin, med katere ne štejemo tistih z višino 0. Pri tem pa moramo v okviru odškodnin, ki jih zavarovalnica izplača zavarovancu oziroma oškodovancu kot nadomestilo za škodo, upoštevati tudi nekatere stroške, povezane s škodnim primerom, npr. stroške odvetnikov, stroške raznih zunanjih strokovnjakov, ki so sodelovali pri ocenjevanju škode, zamudne obresti ipd. Seveda pa lahko analiziramo tudi posamezne vrste oziroma sestavine odškodnin, npr. odškodnine zaradi poškodovanja ali uničenja stvari, zaradi smrti, telesnih poškodb, zamudnih obresti, zunanjih cenilnih stroškov ipd. Metode za ugotavljanje neznanih porazdelitev so v vseh navedenih primerih iste, zato lahko v nadaljevanju te priloge izraz škoda razumemo kot splošen izraz za škodo, odškodnino ali celo del odškodnine.

Predpostavimo, da število izpostavljenih enot za različne zavarovalne vrste in znotraj njih za različne homogene nevarnostne skupine poznamo, ker to pri kvalitetnem računalniškem informacijskem sistemu ne bi smel biti problem. Za analizo škodne pogostosti potrebujemo le še podatke o porazdelitvi števila škod. Število škod v določenem obdobju bomo modelirali z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami z zalogo vrednosti $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Pri tem se bodo škode lahko nanašale na posamezno zavarovalno polico, nevarnostno skupino ali pa celoten portfelj istovrstnih polic.

Za škode lahko predpostavimo, da so nenegativne. Vedno jih lahko modeliramo z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$, če višine škod navajamo kot mnogokratnike denarne enote ali njenega dela. Kljub temu jih bomo zaradi večje fleksibilnosti pri ugotavljanju splošnih zakonitosti raje modelirali z zveznimi slučajnimi spremenljivkami.

Naj bo N diskretna slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ in verjetnostno funkcijo $P(N = x_k) = p_k$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ker bomo diskretne slučajne spremenljivke večinoma uporabljali za modeliranje števila škod v določenem obdobju, bo zaloga vrednosti večinoma kar $\mathbb{N}$ in $p_k = P(N = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$

Naj bo X slučajna spremenljivka in $F(x)$ njena porazdelitvena funkcija, definirana z enačbo $F(x) = P(X \leq x)$. Če je $F(x)$ absolutno zvezna, kar pomeni, da jo za neko nenegativno funkcijo $f(x)$ lahko zapišemo kot $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, potem je X zvezna slučajna spremenljivka. V točkah, kjer je $F(x)$ odvedljiva, je $F'(x) = f(x)$. V vseh primerih zveznih slučajnih spremenljivk, ki jih bomo srečali, bo $F(x)$ ne le absolutno zvezna, ampak tudi povsod odvedljiva, zato bo $F'(x) = f(x)$ za vsak x. Množico $\{x |\, f(x) > 0\}$ bomo imenovali nosilec slučajne spremenljivke X.

Izjemoma se bomo srečali z mešanimi slučajnimi spremenljivkami, ki imajo odsekoma zvezno in odsekoma odvedljivo porazdelitveno funkcijo $F(x)$ ter končno mnogo skokov $p_0, p_1, \ldots, p_\upsilon$ v točkah $x_0 < x_1 < \ \ldots\ < x_\upsilon$. Naj bo X taka slučajna spremenljivka. Vedno jo lahko zapišemo kot $X = (1 - p_d)\, X_1 \ + \ p_d\, X_2$, kjer je $p_d = \sum_{k=0}^{\upsilon} p_k$, X_1 zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo $F_{X_1}(x) = \frac{1}{1-p_d}\, (F(x) \ - \ \sum_{k, x_k \,\leq\, x} p_k)$ in X_2 diskretna slučajna spremenljivka z verjetnostno funkcijo $P(X_2 = x_k) = \frac{p_k}{p_d}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \upsilon$.

Naj bodo $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ neodvisne in enako porazdeljene diskretne slučajne spremenljivke, ki za posamezne istovrstne zavarovalne police predstavljajo število škod, ki so nastale v izbranem obdobju. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naj bodo neodvisne in enako porazdeljene zvezne slučajne spremenljivke s porazdelitveno funkcijo $F(x)$ in gostoto verjetnosti $f(x)$, ki predstavljajo višino škod, nastalih v izbranem obdobju. V praksi običajno tipa verjetnostne in porazdelitvene funkcije ne poznamo, še toliko manj pa njune parametre. Zato poskušamo iz opazovanih vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ in iz opazovanih vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_n$ izluščiti potrebne informacije.

Na podlagi opazovanih vrednosti lahko določimo empirično verjetnostno oziroma porazdelitveno funkcijo v tabelarični obliki, ki pa za analitično obravnavo ni najbolj primerna. Zato predpostavimo, da so opazovane vrednosti le naključni vzorec za različne tipe porazdelitev, za vsakega od predpostavljenih tipov pa ocenimo parametre. Končno s statističnimi testi s primerjavo teoretičnih verjetnostnih oziroma porazdelitvenih funkcij z empirično izberemo tisto porazdelitev, ki se v nekem smislu najbolj prilega dejanskim opaženim podatkom.

V nadaljevanju priloge bomo najprej definirali nekaj splošnih pojmov ter navedli tiste njihove lastnosti, ki jih bomo potrebovali kasneje. Nato si bomo na splošno ogledali štiri metode, s katerimi iz vzorca ocenjujemo parametre neznane verjetnostne oziroma porazdelitvene funkcije, ter dve metodi ugotavljanja (ne)primernosti izbrane funkcije. Na koncu bomo reševali dilemo pri izboru med dvema primernima funkcijama, od katerih je prva bolj verjetna, druga pa je zaradi manjšega števila parametrov enostavnejša.

P1.1 Splošne definicije

V tem razdelku bomo navedli nekaj osnovnih pojmov in njihovih lastnosti, ki jih uporabljamo v tem delu. O njih se lahko podrobneje poučimo npr. iz (Jamnik, 1971; Chappell et al., 1997; Feller, 1968, 1971).

Za diskretno slučajno spremenljivko N z zalogo vrednosti $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ in verjetnostno funkcijo $P(N = x_k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, začetni moment reda j definiramo z enačbo

$$m_j \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, x_k^j \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{P1.1}$$

centralni moment reda j pa z enačbo

$$\mu_j \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, (x_k \,-\, m_1)^j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{P1.2}$$

V posebnem primeru, ko je zaloga vrednosti $\mathbb{N}$, je $p_k = P(N = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$, enačbi (P1.1) in (P1.2) pa preideta v $m_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, k^j$ in $\mu_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, (k \,-\, m_1)^j$, $j = 1, 2, \ldots$

Če je zaloga vrednosti slučajne spremenljivke N končna, začetni in centralni moment obstajata za vsak $j \geq 1$, ker imata vsoti na desni strani enačb (P1.1) in (P1.2) le končno število členov. Za slučajne spremenljivke z neskončno zalogo vrednosti pa ni nujno, da obstaja kakšen moment. Vsote lahko presežejo vse meje.

Za zvezno slučajno spremenljivko X z zvezno odvedljivo porazdelitveno funkcijo $F(x)$ in gostoto verjetnosti $f(x)$ je začetni moment reda j definiran z enačbo

$$m_j \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^j \, f(x) \, dx \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{P1.3}$$

centralni moment reda j pa z enačbo

$$\mu_j \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x \, - \, m_1)^j \, f(x) \, dx \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{P1.4}$$

Za slučajno spremenljivko X, ki ima odsekoma zvezno porazdelitveno funkcijo $F(x)$ s končno mnogo skoki $p_0, p_1, \ldots, p_v$ v točkah $x_0 < x_1 < \ \ldots \ < x_v$, drugje pa zvezni odvod oziroma gostoto verjetnosti $f(x)$, je začetni moment reda j definiran z enačbo

$$m_j \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^j \, f(x) \, dx \; + \; \sum_{k=0}^{v} p_k \, x_k^j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

centralni moment reda j pa z enačbo

$$\mu_j \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x \, - \, m_1)^j \, f(x) \, dx \; + \; \sum_{k=0}^{v} p_k \, (x_k \, - \, m_1)^j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ker bomo modelirali nenegativne škode, bo $f(x) = 0$ za $x < 0$. Zato bomo v zgornjih dveh enačbah ter v enačbah (P1.3) in (P1.4) lahko začeli integrirati pri 0.

Možno je, da navedeni integrali, s tem pa tudi ustrezni momenti, ne obstajajo. Kadar pa obstaja začetni (centralni) moment) reda j, obstaja tudi centralni (začetni) moment reda j ter vsi začetni in centralni momenti nižjega reda, kar velja tudi za diskretne slučajne spremenljivke. Običajno začetne momente laže izračunamo kot centralne. Če enačbe (P1.1) do (P1.4) uporabimo tudi za $j = 0$, je $m_0 = \mu_0 = 1$, centralne momente pa lahko iz znanih začetnih momentov izračunamo z enačbo

$$\mu_j \quad = \quad \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} m_1^{j-k} \, m_k \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{P1.5}$$

Najbolj pogosto uporabljamo njena posebna primera

$$\mu_2 \quad = \quad m_2 \, - \, m_1^2, \tag{P1.6a}$$

$$\mu_3 \quad = \quad m_3 \, - \, 3 \, m_2 \, m_1 \; + \; 2 \, m_1^3. \tag{P1.6b}$$

Nekateri momenti ali njihove funkcije so tako pomembni, da imajo posebno ime in oznako. Tako je $E[Y] = m_1$ matematično upanje slučajne spremenljivke Y, $\mathrm{var}[Y] = \mu_2$ njena varianca, $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}[Y]}$ standardni odklon, $\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ koeficient asimetrije in $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ koeficient sploščenosti. Včasih bomo za matematično upanje namesto m_1 uporabili tudi simbol μ.

Če je slučajna spremenljivka $Y = g(N)$ funkcija diskretne slučajne spremenljivke N, njene začetne momente izračunamo z enačbo

$$m_j[Y] \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k \, g(x_k)^j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

kar za $j = 1$ pomeni $E[Y] = E[g(N)] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, g(x_k)$. Od tu za $g(N) = N^j$ dobimo

$$E[N^j] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, x_k^j \;=\; m_j[N] \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Centralne momente slučajne spremenljivke Y izračunamo z enačbo

$$\mu_j[Y] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, (g(x_k) \;-\; E[Y])^j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Če je slučajna spremenljivka $Y = g(X)$ funkcija zvezne slučajne spremenljivke X, njene začetne momente izračunamo z enačbo

$$m_j[Y] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^j\, f(x)\, dx \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

kar za $j = 1$ pomeni $E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$. Od tu za $g(X) = X^j$ dobimo

$$E[X^j] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^j\, f(x)\, dx \;=\; m_j[X] \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Centralne momente slučajne spremenljivke Y izračunamo z enačbo

$$\mu_j[Y] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) \;-\; E[Y])^j\, f(x)\, dx \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Računanje momentov si včasih lahko precej olajšamo. Za diskretno slučajno spremenljivko N z verjetnostno funkcijo $P(N = x_k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definirajmo momentno rodovno funkcijo z enačbo

$$M_N(t) \;=\; E[e^{tN}] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, e^{t x_k},$$

za zvezno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti $f(x)$ pa z enačbo

$$M_X(t) \;=\; E[e^{tX}] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx.$$

Momentno rodovna funkcija ne obstaja vedno, če pa obstaja, enolično določa porazdelitev. Ime je dobila, ker lahko s pomočjo njenih odvodov enostavno izračunamo začetne momente. Ker je

$$M_N^{(j)}(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, x_k^j\, e^{t x_k}$$

in

$$M_X^{(j)}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^j\, e^{tx}\, f(x)\, dx,$$

je za slučajno spremenljivko Y, ki je lahko diskretna ali zvezna,

$$\left. \frac{d^j M_Y(t)}{dt^j} \right|_{t\,=\,0} \;=\; m_j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{P1.7}$$

Teoretično je pomemben tudi naravni logaritem momentno rodovne funkcije. Njegovi odvodi v točki 0 se imenujejo kumulante. Navedimo le prve tri kumulante κ_1, κ_2 in κ_3, ki pa jih pod drugimi imeni že poznamo. Hitro lahko preverimo, da je

$$\kappa_1 = \left.\frac{d\log M_Y(t)}{dt}\right|_{t\,=\,0} = E[Y], \tag{P1.8a}$$

$$\kappa_2 = \left.\frac{d^2\log M_Y(t)}{dt^2}\right|_{t\,=\,0} = \mathrm{var}[Y], \tag{P1.8b}$$

$$\kappa_3 = \left.\frac{d^3\log M_Y(t)}{dt^3}\right|_{t\,=\,0} = \mu_3[Y], \tag{P1.8c}$$

dobljenega vzorca pa ne moremo posplošiti za izračun centralnega momenta stopnje 4 ali več v eni potezi.

Opisani način izračuna momentov pride zlasti prav, kadar moramo izračunati momente vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk. Če so $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z momentno rodovnimi funkcijami $M_{Y_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$, potem je

$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t\sum_{i=1}^n Y_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{tY_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{tY_i}\right] = \prod_{i=1}^n M_{Y_i}(t).$$

Za slučajno spremenljivko N z verjetnostno funkcijo $P(N = x_k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definirajmo karakteristično funkcijo z enačbo

$$\varphi_N(t) = E[e^{itN}] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, e^{itx_k},$$

kjer je i imaginarna enota, $i^2 = -1$, za zvezno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti $f(x)$ pa z enačbo

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f(x)\, dx.$$

Karakteristična funkcija vedno obstaja in enolično določa porazdelitev. Kako iz znane karakteristične funkcije izračunamo verjetnostno funkcijo oziroma gostoto verjetnosti, pa je razvidno iz razdelka 3.6.

Če so $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne slučajne spremenljivke s karakterističnimi funkcijami $\varphi_{Y_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$, potem je

$$\varphi_Y(t) = E\left[e^{itY}\right] = E\left[e^{it\sum_{i=1}^n Y_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{itY_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[e^{itY_i}\right] = \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i}(t). \tag{P1.9}$$

Za slučajno spremenljivko N z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$ in z verjetnostno funkcijo $P(N = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, definirajmo še rodovno funkcijo

$$G_N(s) = E[s^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k.$$

Ker je $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, rodovna funkcija vedno obstaja vsaj za $|s| \leq 1$ in enolično določa porazdelitveno funkcijo. Če je dovoljkrat odvedljiva, tudi z njeno pomočjo lahko izračunamo začetne momente. Tako je npr.

$$G'_N(1) = m_1, \tag{P1.10a}$$
$$G''_N(1) = m_2 - m_1, \tag{P1.10b}$$
$$G'''_N(1) = m_3 - 3\,m_2 + 2\,m_1, \tag{P1.10c}$$

če vrednosti odvodov v točki 1 obstajajo, sicer pa namesto njih v zgornjih enačbah upoštevamo limite k 1 z leve.

Če je $N = \sum_{i=1}^{\nu} N_i$ in so $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ neodvisne slučajne spremenljivke z rodovnimi funkcijami $G_{N_i}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, je

$$G_N(s) = E\left[s^N\right] = E\left[s^{\sum_{i=1}^{\nu} N_i}\right] = E\left[\prod_{i=1}^{\nu} s^{N_i}\right] = \prod_{i=1}^{\nu} E\left[s^{N_i}\right] = \prod_{i=1}^{\nu} G_{N_i}(s).$$

Definirajmo še nekaj funkcij, ki jih v tem delu večkrat uporabljamo.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

je porazdelitvena funkcija standardizirane normalne porazdelitve,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,dt$$

je gama funkcija,

$$\Gamma(\alpha; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,dt$$

je nepopolna gama funkcija in

$$\psi(x) = \frac{d\,\log\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

je logaritemski odvod gama funkcije, za katerega velja rekurzijska enačba

$$\psi(x + 1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$$

(glej Abramowitz, Stegun, 1972, str. 258, enačba 6.3.5). Za povprečne vrednosti funkcij komponent vektorja $n = \langle n_1, n_2, \ldots, n_\nu \rangle$ ali $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ bomo včasih uporabili krajši zapis, npr. $\overline{n^2}$ za $\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i^2$ ali $\overline{\log x}$ za $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$. V splošnem primeru naj pomeni

$$\overline{f(n)} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f(n_i)$$

ter

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\,x_i).$$

P1.2 Ocenjevanje parametrov

Neznane parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ verjetnostne funkcije p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ali porazdelitvene funkcije $F(x)$ ocenjujemo s pomočjo cenilk $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$, ki so pri dani velikosti vzorca ν oziroma n funkcije slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ oziroma $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Izbiro naključnega vzorca $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ oziroma $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lahko interpretiramo kot naključno realizacijo slučajnih spremenljivk $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(N_1, N_2, \ldots, N_\nu)$ oziroma $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, katere rezultat je ocena $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$ oziroma $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cenilke, označene z grškimi črkami, bomo od ustreznih ocen ločili le iz konteksta. Tako je npr. $\hat{\theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ cenilka za parameter θ_1, medtem ko je $\hat{\theta}_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ ocena parametra θ_1.

Zaželeno je, da parameter θ_j ocenjujemo z nepristransko cenilko $\hat{\theta}_j$, za katero je neodvisno od velikosti vzorca $E[\hat{\theta}_j] = \theta_j$. Če ta pogoj ni izpolnjen, vendar je $\lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}_j] = \theta_j$, je cenilka $\hat{\theta}_j$ asimptotično nepristranska[2]. Poleg nepristranskosti je zaželeno še, da je izraz MSE (mean squared error), definiran z $MSE = E[(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2]$, čim manjši. Če izračunamo matematično upanje izraza

$$\begin{aligned}(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 &= ((\hat{\theta}_j - E[\hat{\theta}_j]) + (E[\hat{\theta}_j] - \theta_j))^2 = \\ &= (\hat{\theta}_j - E[\hat{\theta}_j])^2 + (E[\hat{\theta}_j] - \theta_j)^2 + 2\,(\hat{\theta}_j - E[\hat{\theta}_j])\,(E[\hat{\theta}_j] - \theta_j),\end{aligned}$$

zadnji člen odpade in dobimo

$$MSE(\hat{\theta}_j) = E[(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2] = \mathrm{var}[\hat{\theta}_j] + (E[\hat{\theta}_j] - \theta_j)^2.$$

Za nepristranske cenilke je $MSE(\hat{\theta}_j) = \mathrm{var}[\hat{\theta}_j]$. Ker imamo velikokrat opravka vsaj z asimptotično nepristranskimi cenilkami, lahko kot merilo kvalitete cenilke $\hat{\theta}_j$ upoštevamo kar $\mathrm{var}[\hat{\theta}_j]$ ali pa $\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}[\hat{\theta}_j]$.

V nadaljevanju si bomo ogledali štiri konkretne metode, po katerih dobimo cenilke za ocenjevanje neznanih parametrov.

P1.2.1 Metoda momentov

Metodo momentov lahko uporabljamo za določanje neznanih parametrov za diskretne in zvezne porazdelitve. V diskretnem primeru naj bo zaloga vrednosti znana, predpostavljena verjetnostna funkcija $p_k = p_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, pa odvisna od neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. V zveznem primeru naj bo $f(x) = f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x)$. V obeh primerih mora obstajati vsaj prvih s momentov.

Ker so momenti odvisni od parametrov, je $m_j = m_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ in $\mu_j = \mu_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ za $j = 1, 2, \ldots, s$. Privzemimo, da je sistem enačb mogoče razrešiti, torej $\theta_j = \theta_j(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ oziroma $\theta_j = \theta_j(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ za $j = 1, 2, \ldots, s$. Če v prvi razrešeni sistem enačb namesto $m_1, m_2, \ldots, m_s$ vstavimo vzorčne začetne momente $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_s$ ali pa v drugi razrešeni sistem enačb namesto $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ vzorčne centralne momente $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \ldots, \hat{\mu}_s$, dobimo oceno $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. Z eksistenco funkcij $\theta_j = \theta_j(m_1, m_2, \ldots, m_s)$

[2] Za diskretne slučajne spremenljivke bi morali pisati $\lim_{\nu\to\infty} E[\hat{\theta}_j] = \theta_j$. Zaradi krajšega zapisa bomo v tem razdelku predpostavili, da je $\nu = n$, oziroma v podobnih primerih za velikost vzorca uporabljali le n.

in $\theta_j = \theta_j(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, se nismo ukvarjali, ne moremo pa zamolčati dejstva, da eksplicitni zapis ni vedno mogoč. Zato navajamo še konkretne enačbe, ki jih lahko rešujemo tudi numerično, kadar ne gre analitično.

Če delamo z začetnimi momenti, moramo rešiti sistem enačb $m_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \hat{m}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, kjer je

$$\hat{m}_j \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} n_i^j = \overline{n^j} & \text{za diskretne slučajne spremenljivke} \\ \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^j = \overline{x^j} & \text{za zvezne slučajne spremenljivke} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Če delamo s centralnimi momenti, najprej izračunamo prvi vzorčni začetni moment

$$\hat{m}_1 \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} n_i = \overline{n} & \text{za diskretne slučajne spremenljivke} \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x} & \text{za zvezne slučajne spremenljivke} \end{cases}$$

nato pa rešimo sistem enačb $\mu_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \hat{\mu}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, kjer je

$$\hat{\mu}_j \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} (n_i - \overline{n})^j & \text{za diskretne slučajne spremenljivke} \\ \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^j & \text{za zvezne slučajne spremenljivke} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Ker so začetni in centralni momenti povezani z enačbo (P1.5), lahko sistem s enačb, ki ga moramo rešiti, sestavimo tudi tako, da za vsak j, $j = 1, 2, \ldots, s$, vzamemo eno od enačb $m_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \hat{m}_j$ in $\mu_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \hat{\mu}_j$.

Kakorkoli že sestavimo in rešimo sistem enačb, rešitve $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ privzamemo za neznane parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ verjetnostne oziroma porazdelitvene funkcije.

P1.2.2 Metoda kvantilov

Za porazdelitveno funkcijo $F(x)$ in za poljuben p, $0 < p < 1$, je kvantil π_p vsako število, ki zadošča neenačbi $\lim_{\epsilon \to +0} F(\pi_p - \epsilon) \leq p \leq F(\pi_p)$. Neenačba ima natanko eno rešitev, če je $F(x)$ strogo naraščajoča funkcija. Če je poleg tega še zvezna, med p in π_p obstaja povratno enolična preslikava, saj je $p = F(\pi_p)$ in $\pi_p = F^{-1}(p)$.

Naj bo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ naključni vzorec za neodvisne in enako porazdeljene zvezne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s predpostavljeno porazdelitveno funkcijo $F(x)$ z neznanimi parametri. Vzorec $x_1, x_2, \ldots, x_n$ preuredimo v $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, da je $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$. Enačaji so možni, ker se vzorčne vrednosti lahko ponavljajo. Definirajmo vzorčno porazdelitveno funkcijo

$$\hat{F}(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } x < x_{(1)} \\ \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} \middle| x_{(i)} \leq x \right\} & \text{za } x_{(1)} \leq x \leq x_{(n)} \\ \\ 1 & \text{za } x > x_{(n)} \end{cases} \tag{P1.11}$$

Ker je $\hat{F}(x)$ stopničasta funkcija, pri danem p kvantil π_p ni vedno enolično določen, če pa je, se nanaša na cel interval različnih p. Temu problemu se izognemo, če odsekoma konstantno funkcijo $\hat{F}(x)$ nadomestimo z zvezno in odsekoma linearno funkcijo

$$\hat{\hat{F}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < x_{(1)} \\ \hat{F}(x) & \text{za } x = x_{(i)},\, i = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{(x_{(i+1)}-x)\,\hat{F}(x_{(i)})+(x-x_{(i)})\,\hat{F}(x_{(i+1)})}{x_{(i+1)}-x_{(i)}} & \text{za } x_{(i)} < x < x_{(i+1)},\, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{za } x > x_{(n)} \end{cases}$$

Na intervalu $(x_{(1)}, x_{(n)})$ je $\hat{\hat{F}}(x)$ strogo naraščajoča funkcija, zato je med vzorčnim kvantilom $\hat{\pi}_p = \hat{\hat{F}}^{-1}(p)$ in p povratno enolična preslikava za vsak $p \in (\max_{1 \le i \le n}\{\frac{i}{n} | x_{(i)} = x_{(1)}\}, 1)$.

Vzorčne kvantile $\hat{\pi}_p$ lahko definiramo tudi tako, da izračunamo $i = [(n+1)\,p]$, kjer $[x]$ pomeni celi del števila x (največje celo število, ki je manjše ali enako x), $h = (n+1)\,p - i$ in $\hat{\pi}_p = (1-h)\,x_{(i)} + h\,x_{(i+1)}$. Definicija je smiselna le za $\frac{1}{n+1} \le p \le \frac{n}{n+1}$, saj sicer indeks i ali pa $i+1$ pade zunaj dovoljenega obsega in $x_{(i)}$ ali $x_{(i+1)}$ ni definiran. To se zgodi tudi pri $p = \frac{n}{n+1}$, vendar ne moti, ker je takrat $h = 0$. Če so vse vrednosti vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ različne, med p in $\hat{\pi}_p$ obstaja povratno enolična preslikava, sicer pa je pri danem p kvantil $\hat{\pi}_p$ enolično določen, vendar za različne p lahko dobimo isti kvantil.

Metodo kvantilov uporabljamo le za določanje neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ porazdelitvene funkcije $F(x) = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x)$ zvezne slučajne spremenljivke X. Najprej primerno določimo s različnih vrednosti $p_1, p_2, \ldots, p_s$, nato pa vse poteka kot pri metodi momentov. Ker so kvantili porazdelitvene funkcije $F(x)$ odvisni od parametrov, je $\pi_{p_j} = \pi_{p_j}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Če je sistem enačb mogoče razrešiti, dobimo $\theta_j = \theta_j(\pi_{p_1}, \pi_{p_2}, \ldots, \pi_{p_s})$, kamor vstavimo vzorčne kvantile $\hat{\pi}_{p_1}, \hat{\pi}_{p_2}, \ldots, \hat{\pi}_{p_s}$ ter dobimo ocene $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. Ker običajno sistema enačb ne znamo rešiti analitično, ga v praksi rešujemo numerično.

P1.2.3 Metoda najmanjših kvadratov

Z metodo najmanjših kvadratov, ki je primerna za določanje neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ porazdelitvene funkcije $F(x) = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x)$ zvezne slučajne spremenljivke X, lahko odpravimo pomembno pomanjkljivost metode kvantilov. V praktičnih primerih običajno število neznanih parametrov ne presega tri, najbolj pogosto pa se zadovoljimo že z dvema. To pa pomeni, da z metodo kvantilov izenačimo porazdelitveno funkcijo $F(x)$ in vzorčno porazdelitveno funkcijo $\hat{F}(x)$, definirano z enačbo (P1.11), le v dveh ali treh točkah, morebitnih razlik med $F(x)$ in $\hat{F}(x)$ v vseh ostalih točkah pa sploh ne upoštevamo.

Pri metodi najmanjših kvadratov zahtevamo, da se funkciji $F(x)$ in $\hat{F}(x)$ v nekem smislu čim bolj ujemata na izbranih točkah $c_1 < c_2 < \ldots < c_r$. Običajno je $r > s$, točke c_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, pa naberemo kar med vzorčnimi vrednostmi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Če so vse vzorčne vrednosti različne, lahko vzamemo kar $r = n$ in $c_k = x_{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Razdaljo med $F(x)$ in

$\hat{F}(x)$, ki jo želimo minimizirati, merimo s

$$Q(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} w_k \, [\hat{F}(c_k) \; - \; F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, c_k)]^2.$$

Običajno za vse uteži w_k vzamemo 1, če pa stopnja skladnosti $F(x)$ s $\hat{F}(x)$ ni povsod enako pomembna, razmerja med utežmi spremenimo. Večje vrednosti priredimo utežem, ki se nanašajo na interval, kjer želimo boljše ujemanje. Povprečno odstopanje $F(x)$ od $\hat{F}(x)$ lahko merimo z RMS (root mean square), kjer je $RMS = \sqrt{\frac{Q(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)}{\sum_{k=1}^{r} w_k}}$. Manjši RMS pomeni boljše ujemanje.

Če hočemo minimizirati $Q(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, moramo rešiti sistem enačb

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} \quad = \quad \sum_{k=1}^{r} w_k \, [\hat{F}(c_k) \; - \; F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, c_k)] \, \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \quad = \quad 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Minimum funkcije $Q(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ lahko poiščemo s katero koli metodo za minimizacijo funkcij več spremenljivk. Za naš konkretni problem se v praksi dobro obnese Levenberg-Marquardtova metoda. Algoritem je opisan npr. v (Press et al., 1992, str. 574), kjer je zapisan tudi računalniški program. Omenjena metoda je vgrajena tudi v razne računalniške programe, npr. v program Gnuplot za risanje funkcij.

P1.2.4 Metoda največjega verjetja

Metodo največjega verjetja lahko uporabljamo za določanje neznanih parametrov za diskretne in zvezne porazdelitve. V diskretnem primeru naj bo zaloga vrednosti znana, verjetnostna funkcija $p_k = p_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, pa odvisna od neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$. V zveznem primeru naj bo $f(x) = f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x)$.

Po metodi največjega verjetja neznane parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ določimo tako, da je verjetnost pojava opazovanih vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ neodvisnih in enako porazdeljenih diskretnih slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ oziroma opazovanih vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neodvisnih in enako porazdeljenih zveznih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_n$ največja. Verjetnost, da se pojavijo dani $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ oziroma $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je določena s funkcijo verjetja

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \quad = \quad \begin{cases} \prod_{i=1}^{\nu} p_{n_i}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) & \text{za diskretne slučajne spremenljivke} \\ \prod_{i=1}^{n} f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x_i) & \text{za zvezne slučajne spremenljivke} \end{cases}$$

Pri tem naj za diskretne slučajne spremenljivke, če zaloga vrednosti ni $\mathbb{N}$, okrajšava p_{n_i} pomeni $P(N_i = n_i)$, četudi je za $n_i \in \mathbb{N}$ dvoumna.

Ker je $\log x$ strogo naraščajoča funkcija, ima funkcija verjetja ekstreme v istih točkah kot njen logaritem

$$l(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \log L = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\nu} \log p_{n_i}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) & \text{za diskr. sl. spr.} \quad \text{(P1.12a)} \\ \sum_{i=1}^{n} \log f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, x_i) & \text{za zvezne sl. spr.} \quad \text{(P1.12b)} \end{cases}$$

Potrebni pogoj za maksimum predstavlja sistem s nelinearnih enačb

$$0 = \frac{\partial l}{\partial \theta_j} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial \log p_{n_i}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s)}{\partial \theta_j} & \text{za diskretne sl. spr.} \quad \text{(P1.13a)} \\ & (j = 1, 2, \ldots, s). \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,x_i)}{\partial \theta_j} & \text{za zvezne sl. spr.} \quad \text{(P1.13b)} \end{cases}$$

V splošnem ni nujno, da sistem enačb (P1.13a) oziroma (P1.13b) ima rešitev, vendar pri dokaj milih pogojih verjetnost, da jo ima, z večanjem vzorca teži k 1 (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 62). Mogoče je tudi, da ima več rešitev. Če ne najdemo prave, lahko dosežemo le lokalni maksimum funkcije verjetja. V splošnem sistem tudi ni analitično rešljiv in ga moramo reševati numerično. Če rešitev $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$ najdemo, jo privzamemo za neznane parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ porazdelitve.

Če delamo z diskretnimi slučajnimi spremenljivkami $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ z zalogo vrednosti $\mathbb{N}$ (pa tudi v splošnem primeru), ni nujno, da poznamo vse posamezne vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$. Dovolj je že, da poznamo frekvence pojavljanja ν_k posameznih števil iz zaloge vrednosti. Naj bo $k_{max} = \max\{k|\, \nu_k \neq 0\}$. Tedaj je

$$\sum_{k=0}^{k_{max}} \nu_k = \nu \tag{P1.14}$$

in

$$\sum_{k=0}^{k_{max}} k\, \nu_k = \sum_{i=1}^{\nu} n_i = \nu\, \overline{n}. \tag{P1.15}$$

Enačba (P1.12a) preide v enačbo

$$l(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \sum_{k=0}^{k_{max}} \nu_k \, \log p_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s),$$

(P1.13a) pa v enačbo

$$\sum_{k=0}^{k_{max}} \nu_k \, \frac{\partial \log p_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{\partial \theta_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{P1.16}$$

Varianco cenilk $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s$, dobljenih po metodi največjega verjetja, pri milih pogojih za verjetnostno funkcijo p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma gostoto verjetnosti $f(x)$ lahko ocenimo. Naj bo $l_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ logaritem funkcije verjetja, definiran z enačbo (P1.12a) oziroma (P1.12b), pri čemer računamo, kot da bi bila velikost vzorca 1, namesto n_1 oziroma x_1 pa vstavimo N_1 oziroma X_1. Izračunajmo Fisherjevo informacijsko matriko $\mathbf{I}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ z elementi

$$I_{jk}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = -\, E\left[\frac{\partial^2 l_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)}{\partial \theta_j\, \partial \theta_k}\right] \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, s)$$

in njen obrat $\mathbf{\Sigma}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \mathbf{I}^{-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Varianco slučajne spremenljivke $\hat{\theta}_j$ ocenimo z $\frac{1}{n}\, \sigma_{jj}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, kovariance $\mathrm{cov}(\hat{\theta}_j, \hat{\theta}_k) = E[(\hat{\theta}_j - E[\hat{\theta}_j])\, (\hat{\theta}_k - E[\hat{\theta}_k])]$ pa z $\frac{1}{n}\, \sigma_{jk}$, $j \neq k$. Porazdelitvena funkcija vektorja $\sqrt{n}\, \langle \hat{\theta}_1 - \theta_1, \hat{\theta}_2 - \theta_2, \ldots, \hat{\theta}_s - \theta_s \rangle$ z večanjem vzorca pri ustreznih pogojih konvergira k porazdelitveni funkciji normalno porazdeljenega vektorja

$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Elementi kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}$ so v splošnem funkcije neznanih parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, zato jih aproksimiramo s $\hat{\sigma}_{jk} = \sigma_{jk}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$, kar nam včasih omogoča enostavno ocenitev napake. Če je parameter θ_j neodvisen od ostalih parametrov, za kar zadošča $\sigma_{jk} = 0$, $j \neq k$, bi za dovolj veliko število neodvisnih naključnih vzorcev velikosti n lahko pričakovali, da bi za 95 odstotkov ocen neznanega parametra θ_j veljalo $|\hat{\theta}_j - \theta_j| \leq \frac{1{,}96}{\sqrt{n}} \, \hat{\sigma}_{jj}$.

Cenilke, dobljene z metodo največjega verjetja, so asimptotično nepristranske in imajo med vsemi cenilkami z asimptotično normalno porazdelitvijo najmanjšo asimptotično varianco (so asimptotično učinkovite). Po kriteriju minimalne asimptotične variance je metoda največjega verjetja najboljša možna metoda.

Ocene neznanih parametrov so invariantne na transformacijo parametrov, saj je ocena vrednosti funkcije $g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ po metodi največjega verjetja kar enaka $g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$. Njena varianca je $(\nabla g)^T \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma}\right) \nabla g$, kjer je ∇g vektor stolpec $\langle \frac{\partial g}{\partial \theta_1}, \frac{\partial g}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \theta_s} \rangle^T$. Invariantnost nam včasih olajša delo zaradi pomanjkljivega dogovora o označevanju parametrov porazdelitvenih funkcij. Tako je npr. gostota verjetnosti eksponentne porazdelitve enkrat $f(x) = \lambda \, e^{-\lambda x}$, drugič pa $f(x) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}$, vendar če poznamo $\hat{\lambda}$, je $\hat{\theta} = 1/\hat{\lambda}$. Vpeljimo še nove parametre. Naj bo $\vartheta_j = g_j(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, in $\mathbf{D}$ Jacobijeva matrika z elementi $d_{jk} = \frac{\partial g_j}{\partial \theta_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, s$. Novo kovariančno matriko dobimo kot produkt $\mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \boldsymbol{\Sigma}\right) \mathbf{D}^T$, v katerem upoštevamo, da je $\theta_j = \theta_j(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_s)$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Kadar za neznano porazdelitveno funkcijo predpostavimo več različnih tipov porazdelitev in za vsakega od njih z metodo največjega verjetja določimo parametre, lahko kot enega od kriterijev za izbor konkretne porazdelitve upoštevamo vrednost funkcije verjetja $L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$ oziroma njenega negativnega logaritma $-\log L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) = -\, l(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$. Ker je $0 \leq L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) \leq 1$, je $-l(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s) \geq 0$. Manjši je izraz $-l(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_s)$, boljše je, ker tedaj funkcija verjetja doseže večjo vrednost.

P1.3 Ugotavljanje kvalitete aproksimacije

Ocene parametrov, tudi če so dobljene s cenilkami po metodi največjega verjetja, ki so v nekem smislu najboljše, v konkretnem primeru niso vedno dobre. Zato si bomo v nadaljevanju ogledali dva testa, pri čemer je prvi primeren za diskretne in zvezne, drugi pa za zvezne slučajne spremenljivke. Za podrobnejše informacije o obeh tu predstavljenih testih, pa tudi ostalih, obstaja precej literature (glej npr. Kendall, Stuart, 1979; Jamnik, 1980; Hogg, Klugman, 1984; Press et al., 1992; Klugman, Panjer, Willmot, 1998).

Naj bo $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ naključni vzorec za neodvisne in enako porazdeljene diskretne slučajne spremenljivke $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$. Verjetnostna funkcija p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, je neznana, znane pa so vzorčne frekvence ν_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, posameznih števil iz zaloge vrednosti, iz katerih sestavimo vzorčno verjetnostno funkcijo $\hat{p}_k = \frac{\nu_k}{\nu}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Naj bo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ naključni vzorec za neodvisne in enako porazdeljene zvezne slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z neznano porazdelitveno funkcijo $F(x)$. Iz vzorca sestavimo vzorčno porazdelitveno funkcijo $\hat{F}(x)$, definirano z enačbo (P1.11).

Predpostavimo, da smo za neznano verjetnostno oziroma porazdelitveno funkcijo privzeli verjetnostno funkcijo $\tilde{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma porazdelitveno funkcijo $\tilde{F}(x)$, za katero smo tip prosto izbrali. Tudi neznane parametre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ lahko prosto izberemo, bolj običajno pa je, da jih po eni od metod izračunamo iz vzorca $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ oziroma $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Funkciji $\tilde{p}_k$ in $\hat{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma $\tilde{F}(x)$ in $\hat{F}(x)$ se bolj ali manj ujemata. Če so razlike dovolj majhne, jih lahko pripišemo naključju, sicer pa je verjetno izbira tipa ali parametrov verjetnostne oziroma porazdelitvene funkcije napačna.

P1.3.1 χ^2-test

Zalogo vrednosti Z slučajnih spremenljivk $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ oziroma $X_1, X_2, \ldots, X_n$ razdelimo v r razredov Z_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, tako da je $Z = \bigcup_{j=1}^{r} Z_j$ in $Z_i \cap Z_k = \emptyset$ za $i \neq k$. Pri diskretnih slučajnih spremenljivkah je običajno $r = \max\{i|\, \nu_i \neq 0\} + 1$ in $Z_j = \{x_{j-1}\}$, kar se, če je zaloga vrednosti $\mathbb{N}$, poenostavi v $r = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_\nu\} + 1$ in $Z_j = \{j-1\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Pri zveznih slučajnih spremenljivkah razred Z_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, običajno določimo kot interval $[c_{j-1}, c_j)$, pri čemer točke c_j določimo tako, da je $c_0 < c_1 < \ldots < c_r$ ter $c_0 \leq x_{(1)}$ in $x_{(n)} < c_r$. V vsakem primeru naj bo pričakovano število elementov vzorca, ki padejo v Z_j, vsaj 5. Če ni, enostavno dva ali več sosednjih razredov združimo v enega. Naj bo $\tilde{q}_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, verjetnost, da bo naključno izbrana vrednost element množice Z_j. Če je predpostavka $p_k = \tilde{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma $F(x) \equiv \tilde{F}(x)$ pravilna, je v diskretnem primeru $\tilde{q}_j = \sum_{k \in Z_j} \tilde{p}_k$, v zveznem pa $\tilde{q}_j = \tilde{F}(c_j) - \tilde{F}(c_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Pričakovana frekvenca naključno izbranih vrednosti v razredu Z_j je $\nu \tilde{q}_j$ za diskretne oziroma $n \tilde{q}_j$ za zvezne slučajne spremenljivke. Dejanska frekvenca, realizirana na vzorcu, je za diskretne slučajne spremenljivke $\hat{\nu}_j = \sum_{k, x_k \in Z_j} \nu_k$ oziroma $\hat{\nu}_j = \sum_{k \in Z_j} \nu_k$, če je zaloga vrednosti $\mathbb{N}$, za zvezne pa $\hat{\nu}_j = n\left(\lim_{\epsilon \to +0} \hat{F}(c_j - \epsilon) - \hat{F}(c_{j-1})\right)$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Vrednosti neznanih parametrov verjetnostne funkcije $\tilde{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma porazdelitvene funkcije $\tilde{F}(x)$ lahko določimo neodvisno od vzorca, ali pa jih izračunamo iz vzorca. V prvem primeru je število prostostnih stopenj $d = r - 1$, v drugem pa $d = r - s - 1$, kjer je s število neznanih parametrov, izračunanih iz vzorca. Naj bo

$$\hat{\chi}_d^2 = \begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\hat{\nu}_j - \nu\, \tilde{q}_j)^2}{\nu\, \tilde{q}_j} & \text{za diskretne slučajne spremenljivke} \\ \sum_{j=1}^{r} \frac{(\hat{\nu}_j - n\, \tilde{q}_j)^2}{n\, \tilde{q}_j} & \text{za zvezne slučajne spremenljivke} \end{cases}$$

Če je predpostavka $p_k = \tilde{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma $F(x) \equiv \tilde{F}(x)$ pravilna, je velika vrednost $\hat{\chi}_d^2$ malo verjetna. $\hat{\chi}_d^2$ je slučajna spremenljivka. Z večanjem vzorca njena porazdelitev konvergira k porazdelitvenemu zakonu $\chi^2(d)$ z gostoto verjetnosti $f(x) = 0$ za $x \leq 0$ in $f(x) = \frac{1}{2^{d/2}\,\Gamma(\frac{d}{2})}\, x^{\frac{d}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$ za $x > 0$.

Tabela 10: Kritične vrednosti χ^2-porazdelitve

d	$h_{d,5\%}$	$h_{d,1\%}$	d	$h_{d,5\%}$	$h_{d,1\%}$	d	$h_{d,5\%}$	$h_{d,1\%}$
1	3,84	6,63	6	12,59	16,81	11	19,68	24,72
2	5,99	9,21	7	14,07	18,48	12	21,03	26,22
3	7,81	11,34	8	15,51	20,09	13	22,36	27,69
4	9,49	13,28	9	16,92	21,67	14	23,68	29,14
5	11,07	15,09	10	18,31	23,21	15	25,00	30,58

Vir: Abramowitz, Stegun (1972, str. 985, tabela 26.8)

V tabeli 10 so za prostostne stopnje d od 1 do 15 navedene kritične vrednosti $h_{d,5\%}$ in $h_{d,1\%}$, ki za $X \sim \chi^2(d)$ zadoščajo enačbi $P(X > h_{d,5\%}) = 0{,}05$ oziroma $P(X > h_{d,1\%}) = 0{,}01$.

Testirajmo domnevo $H_0: \; p_k = \tilde{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, oziroma domnevo $H_0: \; F(x) \equiv \tilde{F}(x)$. Če je $\hat{\chi}_d^2 > h_{d,5\%}$, domnevo zavrnemo. Verjetnost, da zavrnemo pravilno domnevo in s tem naredimo napako prve vrste, je 5-odstotna. Analogno ravnamo pri stopnji tveganja 1 odstotek.

Nič neobičajnega ni, da postavimo več različnih domnev o verjetnostni oziroma porazdelitveni funkciji, med njimi pa je več takih, ki jih pri dani stopnji tveganja ni treba zavreči. Če imajo ustrezne funkcije enako število neznanih parametrov s in smo testirali na istih razredih, je enako tudi število prostostnih stopenj d, zaradi česar lahko izberemo domnevo H_0 z najmanjšo vrednostjo $\hat{\chi}_d^2$. Če število prostostnih stopenj ni enako, izberemo domnevo, za katero je verjetnost $P(\chi_d^2 \leq \hat{\chi}_d^2)$ najmanjša oziroma t. i. p-vrednost $P(\chi_d^2 > \hat{\chi}_d^2)$ največja, pri čemer je slučajna spremenljivka χ_d^2 porazdeljena po porazdelitvenem zakonu $\chi^2(d)$. Če nimamo primerne programske podpore, za $d \leq 30$ lahko uporabimo tabele, za $d > 30$ pa si lahko pomagamo z aproksimacijsko enačbo $\hat{\chi}_d^2 = d\left(1 - \frac{2}{9\,d} + x\sqrt{\frac{2}{9\,d}}\right)^3$ (Abramowitz, Stegun, 1972, str. 941, enačba 26.4.17), iz katere najprej izračunamo x, nato pa $P(\chi_d^2 \leq \hat{\chi}_d^2) \approx \Phi(x)$ in p-vrednost $P(\chi_d^2 > \hat{\chi}_d^2) \approx 1 - \Phi(x)$. Kljub opisanemu postopku izbire pa še vedno lahko izberemo napačno domnevo in s tem naredimo napako druge vrste.

χ^2-test je zelo uporaben, ima pa tudi nekaj pomanjkljivosti. Tako se pri zelo majhnih vzorcih lahko zgodi, da ni mogoče definirati dovolj razredov, s katerimi bi ujemanje testirali na manjših razredih, na večjih pa se lokalna velika odstopanja lahko tudi izravnajo. Slabost je tudi odvisnost rezultata od tega, koliko in kako smo izbrali razrede Z_j, kar pride do izraza zlasti pri zveznih slučajnih spremenljivkah.

P1.3.2 Test Kolmogorov-Smirnova

S testom Kolmogorov-Smirnova preverjamo, kako se domnevna porazdelitvena funkcija zvezne slučajne spremenljivke prilega vzorčni porazdelitveni funkciji na celotnem definicijskem območju, kar ocenjujemo z

$$D_n \;=\; \sup_x |\hat{F}(x) \,-\, \tilde{F}(x)|.$$

Čeprav iz verjetnostnih funkcij $\tilde{p}_k$ in $\hat{p}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, lahko sestavimo stopničasti porazdelitveni funkciji $\tilde{F}(x) = \sum_{k, x_k \leq x} \tilde{p}_k$ in $\hat{F}(x) = \sum_{k, x_k \leq x} \hat{p}_k$ oziroma $\tilde{F}(x) = \sum_{k \leq x} \tilde{p}_k$ in $\hat{F}(x) = \sum_{k \leq x} \hat{p}_k$, kadar je zaloga vrednosti $\mathbb{N}$, test Kolmogorov-Smirnova za diskretne slučajne spremenljivke ni primeren (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 208).

Oglejmo si interval $I_i = [x_{(i)}, x_{(i+1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, na katerem ima $\hat{F}(x)$ konstantno vrednost $\hat{F}(x_{(i)})$. Ker je $\tilde{F}(x)$ nepadajoča funkcija, ko je $\hat{F}(x_{(i)}) > \tilde{F}(x)$ za vsak $x \in I_i$, na I_i izraz $|\hat{F}(x) \,-\, \tilde{F}(x)| = \hat{F}(x_{(i)}) \,-\, \tilde{F}(x)$ doseže maksimum v točki $x_{(i)}$. Ko je $\hat{F}(x_{(i)}) < \tilde{F}(x)$ za vsak $x \in I_i$, na I_i izraz $|\hat{F}(x) \,-\, \tilde{F}(x)| = \tilde{F}(x) \,-\, \hat{F}(x_{(i)})$ maksimuma ne doseže, njegovo najmanjšo zgornjo mejo pa izračunamo tik pred $x_{(i+1)}$. Pri tretji možnosti, ko $\tilde{F}(x)$ na intervalu I_i seka premico $y = \hat{F}(x_{(i)})$, ne dobimo nič novega. Zato je dovolj, da izraz $|\hat{F}(x) \,-\, \tilde{F}(x)|$ izračunamo v točkah x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, in tik pred njimi. Če je $\tilde{F}(x)$ zvezna funkcija, je $D_n = |\hat{F}(x_i) \,-\, \tilde{F}(x_i)|$ ali $D_n = \lim_{\epsilon \to +0} |\hat{F}(x_i - \epsilon) \,-\, \tilde{F}(x_i)|$ vsaj za enega od i.

D_n je slučajna spremenljivka. Če je $F(x) \equiv \tilde{F}(x)$, je za velike n

$$P\left(D_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \quad \approx \quad Q(x),$$

kjer je

$$Q(x) \quad = \quad 1 \; - \; 2\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\, e^{-2i^2x^2}.$$

Vrsta na desni strani enačbe zelo hitro konvergira. Zato lahko brez težav ugotovimo, da je $Q(1{,}36) \approx 0{,}95$ in $Q(1{,}63) \approx 0{,}99$, oziroma, če smo natančnejši, $Q^{-1}(0{,}95) = 1{,}36$ in $Q^{-1}(0{,}99) = 1{,}63$, zaokroženo na dve decimalni mesti. S tema dvema podatkoma iz enačbe

$$P(D_n > x) \quad \approx \quad 1 \; - \; Q(\sqrt{n}\, x)$$

lahko izračunamo kritično vrednost $d_{n,5\%}$, ki je rešitev enačbe $P(D_n > d_{n,5\%}) = 0{,}05$, in kritično vrednost $d_{n,1\%}$, ki je rešitev enačbe $P(D_n > d_{n,1\%}) = 0{,}01$.

Ostane nam še vprašanje, kako velik mora biti n, da lahko uporabimo izhodiščno predpostavko o porazdelitvi slučajne spremenljivke D_n. V praksi že za $n \geq 15$ lahko upoštevamo aproksimacijo

$$d_{n,5\%} \quad = \quad \frac{1{,}36}{\sqrt{n}} \qquad \text{in} \qquad d_{n,1\%} \quad = \quad \frac{1{,}63}{\sqrt{n}},$$

vendar le, kar velja tudi za velike n, kadar porazdelitveno funkcijo $\tilde{F}(x)$ iz ničelne domneve $H_0: \; F(x) \equiv \tilde{F}(x)$ predpostavimo neodvisno od vzorca (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 123). V praksi običajno najprej določimo tip funkcije $\tilde{F}(x)$, parametre ocenimo iz vzorca, šele nato pa postavimo ničelno domnevo. V takem primeru bi morali kritične vrednosti zmanjšati, za kar pa ni enostavnega pravila, analognega zmanjšanju števila prostostnih stopenj pri χ^2-testu. Zato v praksi kritičnih vrednosti največkrat ne zmanjšujemo[3], kar verjetnost napake prve vrste zmanjša, zato pa poveča verjetnost napake druge vrste. Ena od možnih korekcij je, da kritičnih vrednosti ne zmanjšujemo, s tem narejeno napako pa naj bi izravnali tako, da bi pri ocenjevanju neznanih parametrov upoštevali le polovico podatkov iz vzorca, pri testu pa vse (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 123).

Testirajmo domnevo $H_0: \; F(x) \equiv \tilde{F}(x)$. Če je $D_n > d_{n,5\%}$, domnevo zavrnemo, verjetnost, da zavrnemo pravilno domnevo, pa je 5-odstotna. Analogno ravnamo pri stopnji tveganja 1 odstotek oziroma stopnji zaupanja 99 odstotkov.

Test Kolmogorov-Smirnova za majhne vzorce ni dovolj selektiven, saj z njim le redko zavrnemo domnevo, pri velikih vzorcih pa je slabši od χ^2-testa (Klugman, Panjer, Willmot, 1998, str. 124). V starejši literaturi, npr. (Kendall, Stuart, 1979, str. 484) ali (Patrik, 1980, str. 67), pa je ravno nasprotno mnenje, da je test Kolmogorov-Smirnova za zvezne slučajne spremenljivke boljši od χ^2-testa. Karkoli je že res, test Kolmogorov-Smirnova ima brez dvoma tudi nekatere prednosti. Tako pri velikih vzorcih kritični vrednosti $d_{n,5\%}$ in $d_{n,1\%}$ lahko koristno uporabimo za določitev pasu okrog vzorčne porazdelitvene funkcije $\hat{F}(x)$, v katerem potekajo vse možne različne zvezne porazdelitvene funkcije $\tilde{F}(x)$, za katere domneve H_0 ne bi zavrnili.

[3]Tako smo delali tudi v 5. poglavju. Pri ocenjevanju parametrov in pri testu smo upoštevali vse podatke iz vzorca.

Če za eno izmed njih ničelna domneva velja, potem v istem pasu v celoti poteka tudi neznana porazdelitvena funkcija $F(x)$, sicer pa ne. Na žalost pravega odgovora ne moremo izvedeti.

Če na naš edini vzorec gledamo kot na naključno izbrani vzorec izmed dovolj velikega števila neodvisnih naključnih vzorcev velikosti n, lahko ocenimo napako $D = \sup_x |\hat{F}(x) - F(x)|$, ki je slučajna spremenljivka. Pri določanju ničelne domneve bi za porazdelitveno funkcijo $\tilde{F}(x)$ vsaj teoretično lahko izbrali dejansko porazdelitveno funkcijo $F(x)$, ki bi jo npr. uganili. Zato je smiselna predpostavka, da je napaka D porazdeljena tako kot D_n. Zato velja

$$\begin{aligned} P(\sup_x |\hat{F}(x) - F(x)| \leq d_{n,5\%}) &= 0{,}95\,, \\ P(\sup_x |\hat{F}(x) - F(x)| \leq d_{n,1\%}) &= 0{,}99\,. \end{aligned}$$

Za funkcijo $\hat{F}(x)$ bi z verjetnostjo $0{,}95$ pričakovali, da bo na celotnem definicijskem območju potekala znotraj pasu, ki ga določata funkciji $F(x) - d_{n,5\%}$ in $F(x) + d_{n,5\%}$. Ker je vedno $0 \leq \hat{F}(x) \leq 1$, bi za praktične potrebe za $n \geq 15$ za vsak x z verjetnostjo $0{,}95$ pričakovali

$$\max\left\{0, F(x) - \frac{1,36}{\sqrt{n}}\right\} \quad \leq \quad \hat{F}(x) \quad \leq \quad \min\left\{1, F(x) + \frac{1,36}{\sqrt{n}}\right\}$$

in z verjetnostjo 0,99

$$\max\left\{0, F(x) - \frac{1,63}{\sqrt{n}}\right\} \quad \leq \quad \hat{F}(x) \quad \leq \quad \min\left\{1, F(x) + \frac{1,63}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Ker je $0 \leq F(x) \leq 1$ in ker se izraz, s katerim je definirana napaka D, ne spremeni, če $\hat{F}(x)$ in $F(x)$ zamenjamo, ju lahko zamenjamo tudi v zgornjih dveh neenačbah.

Za $n \geq 15$ je pri stopnji zaupanja 95 odstotkov maksimalna širina pasu $\frac{2{,}72}{\sqrt{n}}$, pri stopnji zaupanja 99 odstotkov pa $\frac{3{,}26}{\sqrt{n}}$, kar je uporabno kvečjemu za velike n. Pričakovali bi, da bo vzorčna porazdelitvena funkcija $\hat{F}(x)$ z verjetnostjo 95 odstotkov potekala v pasu s središčnico $F(x)$ in absolutno širino $0{,}01$ pri $n \geq 73\,984$, z verjetnostjo 99 odstotkov pa pri $n \geq 106\,276$. To pa že za srednje velike zavarovalnice in množične zavarovalne vrste niso pretirano velike vrednosti, zlasti še, če analiziramo podatke o škodah za več preteklih let. Če bi znali korigirati kritično vrednost $\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$ oziroma $\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}$, kadar neznane parametre računamo iz vzorca, bi bil izhodiščni pas malo ožji, s tem pa tudi minimalno število škod, potrebno za širino pasu $0{,}01$.

Pri dani ničelni domnevi si manjšo vrednost D_n lahko razlagamo kot boljše prileganje vzorčne in neznane porazdelitvene funkcije, torej kot manjšo napako. Zato za kriterij izbire med različnimi porazdelitvenimi funkcijami, za katere domneve H_0 ne moremo zavreči, lahko upoštevamo najmanjši D_n.

Za dovolj veliko število naključnih neodvisnih vzorcev velikosti n, za katere bi izračunali konkreten D_n, bi lahko pričakovali, da je neenačba

$$\max\{0, \hat{F}(x) - D_n\} \quad \leq \quad F(x) \quad \leq \quad \min\{1, \hat{F}(x) + D_n\}$$

izpolnjena z verjetnostjo

$$P(D \leq D_n) \quad = \quad Q(\sqrt{n}\, D_n).$$

Od tu dobimo še p-vrednost $P(D > D_n) = 1 - Q(\sqrt{n}\, D_n)$. Z računanjem ni večjih težav, ker vrsta za $Q(x)$ zelo hitro konvergira.

P1.3.3 Test z razmerjem verjetij

Naj bo $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ množica vseh porazdelitvenih funkcij nekega tipa, ki ima $s \geq 2$ prostih parametrov, in $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ njena prava podmnožica, ki jo dobimo tako, da vnaprej določimo $d \leq s-1$ parametrov. Na porazdelitvene funkcije iz $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ lahko gledamo kot na porazdelitvene funkcije nekega novega tipa, ki ima le $s-d$ prostih parametrov. Kot primer navedimo gama in eksponentno porazdelitveno funkcijo, ki ju bomo podrobneje obravnavali v prilogi P3. Poljubno izberimo še kriterij za ugotavljanje skladnosti dveh porazdelitvenih funkcij in poiščimo $F_A(x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ ter $F_B(x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, ki se najbolj ujemata s porazdelitveno funkcijo $\hat{F}(x)$, sestavljeno iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ker je $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, se $F_A(x)$ z $\hat{F}(x)$ ujema vsaj tako dobro kot $F_B(x)$.

Predpostavimo, da smo $F_A(x)$ in $F_B(x)$ poiskali po metodi največjega verjetja, ustrezni vrednosti funkcije verjetja pa naj bosta L_A in L_B. Če sta obe funkciji pri stopnji tveganja α prestali ustrezno testiranje, bi eno ali drugo lahko privzeli za neznano porazdelitveno funkcijo. Glede na dejstvo, da je $L_B \leq L_A$, bi bilo bolje izbrati $F_A(x)$, vendar se takoj zastavi vprašanje, ali razlika verjetij odtehta večjo zapletenost zaradi večjega števila parametrov. Odgovor poiščemo na osnovi dejstva, da porazdelitveni zakon statistike $\hat{\chi}_d^2 = 2\left(\log L_A - \log L_B\right)$ konvergira k porazdelitvenemu zakonu $\chi^2(d)$, če gre velikost vzorca proti neskončno. Če je $\hat{\chi}_d^2 \leq h_{d,\alpha}$, za neznano porazdelitveno funkcijo izberimo $F_B(x)$, sicer pa $F_A(x)$.

V ozadju zgoraj opisanega postopka pri milih pogojih, ki so praktično vedno izpolnjeni, stoji stroga matematična podlaga. To pa v praksi včasih nadomestimo kar z načelom ekonomičnosti, po katerem pri določenih pogojih raje izberemo porazdelitveno funkcijo z manj parametri. Tako opisani postopek uporabljamo tudi v najbolj splošnem primeru, ko je $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \emptyset$. Če pri stopnji tveganja α funkciji $F_A(x)$ in $F_B(x)$ prestaneta ustrezne teste, za neznano porazdelitveno funkcijo lahko izberemo eno ali drugo. $F_A(x)$ naj ima d parametrov več kot $F_B(x)$. Kljub temu je možno, da je $L_B \geq L_A$. V tem primeru brez pomislekov izberemo $F_B(x)$. Če pa je $L_B < L_A$, izberemo $F_B(x)$, kadar je $\hat{\chi}_d^2 \leq h_{d,\alpha}$, sicer pa $F_A(x)$.

P1.4 Razmerja med višino škode in odškodnine

Pri uporabi opisanih metod za modeliranje višine škod je potrebno upoštevati, da v praksi obstaja več možnosti, zaradi katerih se višina škode in višina odškodnine lahko razlikujeta. V zavarovalnih pogojih je večkrat določena zgornja meja u, do katere bo zavarovalnica škodo plačala v celoti, za večje škode pa bo plačala le u. Če slučajna spremenljivka X pomeni škodo, Y pa odškodnino, med njima velja zveza

$$Y = \begin{cases} X & \text{za } X < u \\ u & \text{za } X \geq u \end{cases} \tag{P1.17}$$

Na podoben primer naletimo, kadar je dogovorjena odbitna franšiza v višini d. V tem primeru velja

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{za } X \leq d \\ X-d & \text{za } X > d \end{cases} \tag{P1.18}$$

Kadar nastopita obe možnosti, potem je

$$Y \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } X \le d \\ X - d & \text{za } d < X < u \\ u - d & \text{za } X \ge u \end{cases} \tag{P1.19}$$

V tem primeru je med porazdelitvenima funkcijama $F_Y(x)$ in $F_X(x)$ zveza

$$F_Y(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{za } x \le 0 \\ \frac{F_X(x+d) \; - \; F_X(d)}{1 \; - \; F_X(d)} & \text{za } 0 < x < u - d \\ 1 & \text{za } x \ge u - d \end{cases} \tag{P1.20}$$

porazdelitvena funkcija $F_Y(x)$ pa ima v točki $u - d$ skok za $\frac{1 - F_X(u)}{1 - F_X(d)}$.

Včasih zadošča, če iz vzorčnih podatkov o odškodninah določimo le $F_Y(x)$, najbolje pa je, če poznamo tudi $F_X(x)$. Za ugotavljanje učinkov morebitnih sprememb konstant u in d na višino zavarovalne premije, zlasti še, če upoštevamo tudi vpliv morebitne inflacije, je primernejša $F_X(x)$. Iz znane $F_Y(x)$ bi vsaj za interval (d, u) lahko izračunali $F_X(x)$, vendar dobljeni izraz za analitično delo ne bi bil najbolj primeren. Zato funkcijo $F_X(x)$ raje določimo iz modificiranih vzorčnih podatkov. Tako iz vzorčne vrednosti y_i, $0 < y_i < u - d$, izračunamo $x_i = y_i + d$. Za $y_i = u - d$ vsaj načeloma iz podatkov o prijavi oziroma cenitvi škode lahko ugotovimo dejansko višino škode x_i. Če pa bi bilo ugotavljanje prezamudno, ker v računalniškem zapisu o škodnem primeru shranjujemo višino odškodnine, ne pa tudi škode, postavimo $x_i = u$, zato pa moramo postopke določanja parametrov porazdelitvene funkcije $F_X(x)$ ustrezno korigirati. Tako npr. pri metodi največjega verjetja za vsak $x_i = u$ v funkciji verjetja namesto faktorja $f(x_i)$ upoštevamo $1 - F(u)$.

Poseben problem so škode, za katere je odškodnina 0. Če je $y_i = 0$ zato, ker je $x_i \le d$, potem zavarovalnica za tako škodo sploh ne ve, ker je zavarovanec ne prijavi, saj že vnaprej ve, da odškodnine ne bo dobil. Če pa je $y_i = 0$, ker je zavarovalnica izplačilo odškodnine odklonila zaradi kakšne v zavarovalnih pogojih navedene izključitve jamstva, imamo dve možnosti obravnavanja. Odškodnino $y_i = 0$ lahko prezremo, ker nas ne zanimajo škode, za katere ni jamstva, lahko pa jo upoštevamo in postavimo $x_i = 0$. V prvem primeru je škodna pogostost manjša in povprečna odškodnina večja, v drugem primeru pa je ravno nasprotno. Produkt škodne pogostosti in povprečne odškodnine je v obeh primerih enak. Drugi pristop ima smisel predvsem zaradi natančnejše analize obratovalnih stroškov, saj ima zavarovalnica stroške zaradi obdelave škodnega primera tudi takrat, ko do izplačila odškodnine ne pride zaradi odklonitve ali kakšnega drugega razloga. Zato bomo v nadaljevanju dopustili možnost, da je škoda 0, z njo vred pa tudi odškodnina.

Manjkajoči podatki o škodah, ki so manjše od franšize d, vplivajo na porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$, določeno iz korigiranega vzorca odškodnin. Ker pa so franšize majhne v primerjavi z možnimi škodami, je pri zavarovalnicah omenjeni vpliv običajno zanemarljiv. Tudi verjetnostno funkcijo števila škod lahko izračunamo iz korigiranega vzorca odškodnin, vsaj v nekaterih primerih pa jo lahko enostavno izračunamo kar iz verjetnostne funkcije števila odškodnin. Če za porazdelitveno funkcijo števila odškodnin privzamemo Poissonovo, negativno binomsko ali binomsko porazdelitev, ki jih bomo obravnavali v prilogi P3, moramo le korigirati parametre. Za Poissonovo porazdelitev namesto λ vzamemo $\frac{\lambda}{r}$, kjer je $r = 1 - F(d)$. Pri negativni binomski porazdelitvi se parameter α ohrani, namesto β pa vzamemo $r\beta$ (oziroma $\frac{rp}{1-(1-r)p}$ namesto p). Pri binomski porazdelitvi se parameter n ohrani, namesto p pa vzamemo $\frac{p}{r}$. Škodno pogostost pa iz pogostosti odškodnin tudi v splošnem primeru dobimo z deljenjem z r.

Oglejmo si še, kako vrednosti d in u vplivata na povprečno odškodnino. Če je Y definiran z enačbo (P1.17), je $E[Y] = E[X; u]$, kjer je omejeno matematično upanje $E[X; u]$ definirano z

$$E[X; u] \;=\; \int_0^u x\, f(x)\, dx \,+\, u \int_u^\infty f(x)\, dx \;=\; \int_0^u x\, f(x)\, dx \,+\, u\,(1 \,-\, F(u)),$$

od koder z integriranjem per partes dobimo

$$E[X; u] \;=\; \int_0^u (1 - F(x))\, dx.$$

Analogno ugotovimo, da je $E[Y] = E[X] - E[X; d]$, če je Y definiran z enačbo (P1.18), in $E[Y] = E[X; u] - E[X; d]$, če je definiran z enačbo (P1.19).

Na višino čiste odškodnine, ki bremeni zavarovalnico, pomembno vpliva pozavarovanje. Zavarovalnica in pozavarovalnica lahko skleneta obvezno pozavarovalno pogodbo, s katero se dogovorita, da mora zavarovalnica vse rizike, ki izpolnjujejo pogoje iz pogodbe, ponuditi v pozavarovanje, pozavarovalnica pa jih mora sprejeti. Za izjemne rizike, ki ne izpolnjujejo pogojev iz obvezne pozavarovalne pogodbe, pa se neobvezno posebej dogovorita o pogojih sprejema v pozavarovanje. V takih primerih govorimo o fakultativnem pozavarovanju.

Naj bo $Y = Y_l + Y_p$ kosmata odškodnina, Y_l čista odškodnina in Y_p del odškodnine, ki odpade na pozavarovalnico. Pri kvotnem pozavarovanju z lastnim deležem α, $0 < \alpha < 1$, je $Y_l = \alpha\, Y$ in $Y_p = (1 - \alpha)\, Y$, kar velja za vse zavarovane rizike, če pride do škode.

Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju obstajata dva pristopa, ki se razlikujeta le po merilu, na podlagi katerega med zavarovalnico in pozavarovalnico delimo premijo in odškodnine za posamezni riziko. Pri prvem pristopu upoštevamo zavarovalno vsoto, pri drugem pa ocenjeno maksimalno pričakovano škodo EML (estimated maximum loss). Pri nekaterih zavarovanjih, npr. požarnem ali strojelomnem, je za velike rizike popolna škoda, ko je odškodnina enaka zavarovalni vsoti, zelo malo verjetna. Pri takih zavarovanjih se je v praksi izkazalo, da je bolje upoštevati ocenjeno maksimalno pričakovano škodo EML, ki jo bomo uporabljali v nadaljevanju. Ker sta računsko oba načina ekvivalentna, lahko v nadaljevanju EML povsod nadomestimo z zavarovalno vsoto.

Pri vsotno presežkovnem pozavarovanju s samopridržajem M in m linijami nad samopridržajem zavarovalnica v pozavarovanje prijavi le tiste rizike, za katere je ob sklepanju zavarovanja ocenjena maksimalna pričakovana škoda EML večja od M. Za kosmato odškodnino Y, ki se nanaša na i-ti riziko z ocenjeno maksimalno pričakovano škodo EML_i, je $Y_l = \alpha_i\, Y$ in $Y_p = (1 - \alpha_i)\, Y$, kjer je

$$\alpha_i \;=\; \begin{cases} 1 & \text{za } EML_i \le M \\ \frac{M}{EML_i} & \text{za } M < EML_i < (m+1)\, M \\ 1 - \frac{m\, M}{EML_i} & \text{za } EML_i \ge (m+1)\, M \end{cases}$$

V praksi je ocenjevanje maksimalne pričakovane škode EML strokovno zelo zahteven problem. Zato se včasih zgodi, da je dejanska škoda večja od EML[4], kar pa ne spremeni lastnega deleža zavarovalnice. Zato pozavarovalnice iz previdnosti običajno zahtevajo, da ocenjena maksimalna pričakovana škoda EML ni manjša od določenega odstotka zavarovalne vsote, ki predstavlja teoretično maksimalno odškodnino, ki jo plača zavarovalnica.

Kvotno in vsotno presežkovno pozavarovanje sta proporcionalni pozavarovanji, ker si zavarovalnica in pozavarovalnica zavarovalno premijo in odškodnine delita v enakem razmerju, kot delno nadomestilo za stroške pa pozavarovalnica zavarovalnici prizna določeno provizijo. Škodno presežkovno pozavarovanje z m linijami nad maksimalnim samopridržajem M, ki ga v tem primeru imenujemo tudi prioriteta, je najpomembnejše neproporcionalno pozavarovanje. Čista odškodnina je določena z

$$Y_l = \begin{cases} Y & \text{za } Y \leq M \\ M & \text{za } M < Y < (m+1)\,M \\ Y - m\,M & \text{za } Y \geq (m+1)\,M \end{cases}$$

na pozavarovalnico pa odpade $Y_p = Y - Y_l$. V tem primeru pozavarovalnica na osnovi svojih izračunov določi pozavarovalno premijo. Ker je enačba

$$Y_p = \begin{cases} 0 & \text{za } Y \leq M \\ Y - M & \text{za } M < Y < (m+1)\,M \\ m\,M & \text{za } Y \geq (m+1)\,M \end{cases}$$

pravzaprav enačba (P1.19) z $d = M$ in $u = (m+1)\,M$, za prvi pozavarovani sloj med M in $(m+1)\,M$ mimogrede ugotovimo, da je

$$E[Y_p] = E[Y;(m+1)\,M] - E[Y;M], \tag{P1.21}$$

pri neomejenem kritju pa je $E[Y_p] = E[Y] - E[Y;M]$.

Kadar kritje pri vsotno presežkovnem ali škodno presežkovnem pozavarovanju ni neomejeno, lahko nad prvim določimo naslednje sloje in vsakega posebej pozavarujemo. Za celovito pozavarovalno zaščito običajno kombiniramo različne pozavarovalne oblike, za pravilno določanje čiste odškodnine Y_l iz Y pa moramo upoštevati pogodbeno dogovorjeni vrstni red upoštevanja posameznih pozavarovalnih oblik.

Pozavarovanje je v bistvu zavarovanje zavarovalnice pri pozavarovalnici. Odškodnina Y, ki jo zavarovalnica plača zavarovancu za škodo X, ima za pozavarovalnico vlogo škode. Pri kvotnem pozavarovanju ima lastni delež α vlogo odstotne soudeležbe zavarovanca pri škodi, pri škodno presežkovnem pozavarovanju pa ima prioriteta M vlogo odbitne franšize. V tem primeru pozavarovalnica iz svojega vzorca odškodnin ne more ugotoviti tistih škod, ki so manjše od M. Ker je običajno razmerje med zgornjo mejo $(m+1)\,M$ in spodnjo mejo M, gledano z vidika

[4]Okrajšava EML za *estimated (expected) maximum loss* je zato primernejša od bolj pogoste okrajšave PML za *probable (possible) maximum loss*. EML in PML sta v praksi sinonima.

pozavarovalnice, mnogo manjše od običajnega razmerja med u in d, gledano z vidika zavarovalnice, so manjkajoči podatki o škodah, ki so manjše od prioritete M, za pozavarovalnico lahko velik problem, ko hoče ugotoviti porazdelitveno funkcijo škod. Kako lahko pozavarovalnice ta problem rešijo, bomo videli v razdelku P3.9.

P2 Nekatere pomembne porazdelitve števila odškodnin

V zavarovalnih pogojih in zavarovalnih policah v okviru dogovorjenega časovnega obdobja število škodnih dogodkov, za katere bo zavarovalnica izplačala odškodnino, običajno ni omejeno. Le v izjemnih primerih je s plačilom premije krito le omejeno število škodnih dogodkov. Tako je lahko pri pozavarovanju katastrofalnih rizikov, ki bodo nastali npr. v enem letu, dogovorjeno, da pozavarovalnica krije le eno škodo, pri tem pa za eno škodo šteje vse škode, ki nastanejo zaradi enega katastrofalnega dogodka, vendar v največ 72-urnem obdobju po izbiri zavarovalnice. Po izplačilu odškodnine zaradi katastrofe, npr. poplave ali toče, je običajno s ponovnim plačilom pozavarovalne premije pozavarovalno kritje mogoče obnoviti.

Ker škodne pogostosti za ves portfelj ni težko izračunati, je poznavanje porazdelitve števila škod oziroma odškodnin, ki se v enem letu nanašajo na posamezno zavarovalno polico, pomembno predvsem za pravilno določitev raznih bonus/malus sistemov, pri katerih je višina zavarovalne premije v naslednjem letu odvisna od števila odškodnin v preteklem letu, določitev porazdelitvene funkcije agregatnih odškodnin, kar smo si ogledali v poglavju 3, itd.

Za zavarovalnice je smiselno prodajati predvsem take zavarovalne produkte, kjer je verjetnost posameznega škodnega dogodka majhna, zato pa so možne škode velike. To je usklajeno z obnašanjem večine skleniteljev zavarovanj, ki imajo do rizikov odpor. Pri malo verjetnih škodah, ki pa so lahko zelo velike, je razmerje med možno višino škode in zavarovalno premijo vsaj navidez ugodno. Zavarovanje praviloma ni igra s pričakovano ničelno vsoto, je pa smiselno zaradi prenosa velike variance škod, ki bi sicer bremenile zavarovanca, na zavarovalnico. Pri zavarovalnih produktih, kjer bi bila verjetnost škodnega dogodka relativno velika, škode pa relativno majhne, bi sklenitelj zavarovanja s premijo praktično že vnaprej pokril svoje pričakovane bodoče škode, zraven pa še stroške zavarovalnice. Razmerje med možno višino škode in zavarovalno premijo bi bilo izrazito neugodno. Zaradi navedenih razlogov je v zavarovalniški praksi verjetnost, da škode sploh ne bo, praviloma precej večja od verjetnosti, da škoda bo, število škodnih dogodkov pa je porazdeljeno podobno, kot so porazdeljeni kakšni drugi naključni dogodki.

V nadaljevanju priloge si bomo ogledali le tri zelo pomembne porazdelitve števila odškodnin, čeprav je porazdelitev, ki so uporabne v zavarovalništvu, zelo veliko (glej npr. Panjer, Willmot, 1984, 1992; Klugman, Panjer, Willmot, 1998).

P2.1 Poissonova porazdelitev

Slučajna spremenljivka N je porazdeljena po Poissonovi porazdelitvi s parametrom $\lambda > 0$, kar bomo označevali z $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, če je

$$p_k \quad = \quad \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k\,!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Karakteristike Poissonove porazdelitve so: $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $\varphi_N(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $E[N] = \lambda$, $\mathrm{var}[N] = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$ in $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Če sta $N_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1)$ in $N_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$G_{N_1+N_2}(s) \quad = \quad G_{N_1}(s)\, G_{N_2}(s) \quad = \quad e^{\lambda_1(s-1)}\, e^{\lambda_2(s-1)} \quad = \quad e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)},$$

iz česar sledi, da je $N_1 + N_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$. To je pomemben rezultat, ki ga lahko posplošimo za poljubno vsoto neodvisnih Poissonovih slučajnih spremenljivk.

Neznani parameter λ iz opazovanih vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ po metodi momentov izračunamo iz enačbe $m_1 = \hat{m}_1$, kar nam da oceno $\hat{\lambda} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} n_i = \overline{n}$. Po metodi največjega verjetja iz $\log p_{n_i} = n_i \log\lambda - \lambda - \log(n_i\,!)$ sledi $\frac{\partial \log p_{n_i}}{\partial\lambda} = \frac{n_i}{\lambda} - 1$, kar vstavimo v enačbo (P1.13a) in dobimo $\sum_{i=1}^{\nu} (\frac{n_i}{\lambda} - 1) = 0$. Od tu spet dobimo oceno $\hat{\lambda} = \overline{n}$ in privzamemo $N \sim \mathrm{Po}(\hat{\lambda})$.

Cenilka $\hat{\lambda} = \overline{N} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} N_i$ je nepristranska, saj je $E[\hat{\lambda}] = E[N] = \lambda$ in $\mathrm{var}[\hat{\lambda}] = \frac{\mathrm{var}[N]}{n} = \frac{\lambda}{n}$. Iz $l_1 = N_1 \log\lambda - \lambda - \log(N_1\,!)$ dobimo $\frac{\partial^2 l_1}{\partial\lambda^2} = -\frac{N_1}{\lambda^2}$ in $-E\left[\frac{\partial^2 l_1}{\partial\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda}$. Zato je $\mathbf{I}(\lambda) = \|\frac{1}{\lambda}\|$ in $\mathbf{\Sigma}(\lambda) = \|\lambda\|$, porazdelitev izraza $\sqrt{n}\,(\hat{\lambda} - \lambda)$ pa z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(0, \lambda)$, kjer za praktično uporabo upoštevamo $\hat{\lambda}$.

P2.2 Negativna binomska porazdelitev

Naj bo $\alpha, \beta > 0$, $\alpha_{(0)} = 1$ in $\alpha_{(k)} = \alpha\,(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)$. Slučajna spremenljivka N z verjetnostno funkcijo

$$p_k \quad = \quad \frac{\beta^\alpha\ \alpha_{(k)}}{k\,!\,(\beta + 1)^{\alpha+k}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ima naslednje karakteristike: $M_N(t) = \left(\frac{\beta}{\beta+1-e^t}\right)^\alpha$, $\varphi_N(t) = \left(\frac{\beta}{\beta+1-e^{it}}\right)^\alpha$, $G_N(s) = \left(\frac{\beta}{\beta+1-s}\right)^\alpha$, $E[N] = \frac{\alpha}{\beta}$, $\mathrm{var}[N] = \frac{\alpha\,(\beta + 1)}{\beta^2}$, $\sigma = \frac{\sqrt{\alpha\,(\beta + 1)}}{\beta}$ in $\gamma = \frac{\beta + 2}{\sqrt{\alpha\,(\beta + 1)}}$.

Če definiramo $p = \frac{\beta}{\beta + 1}$ in $q = 1 - p = \frac{1}{\beta + 1}$ ter upoštevamo $\frac{\alpha_{(k)}}{k\,!} = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)\,k\,!}$, lahko zapišemo

$$p_k \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)\,k\,!} \left(\frac{\beta}{\beta + 1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta + 1}\right)^k \quad = \quad \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)\,k\,!}\, p^\alpha\, q^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{P2.1}$$

To pa za $\alpha \in \mathbb{N}^+$ ni nič drugega kot eden od običajnejših zapisov za negativno binomsko porazdelitev

$$p_k \quad = \quad \binom{\alpha + k - 1}{k} p^\alpha\, q^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ki se v posebnem primeru, ko je $\alpha = 1$ in $p_k = p\,q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, imenujemo geometrijska porazdelitev.

$\beta > 0$ in p, $0 < p < 1$, sta povratno enolično povezana, saj je $p = \frac{\beta}{\beta + 1}$ in $\beta = \frac{p}{1 - p} = \frac{p}{q}$. Zato lahko kot osnovna parametra namesto α in β uporabljamo α in p ter oznako $N \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$.

Sedaj je $M_N(t) = (\frac{p}{1-qe^t})^\alpha$, $\varphi_N(t) = (\frac{p}{1-qe^{it}})^\alpha$, $G_N(s) = (\frac{p}{1-qs})^\alpha$, $E[N] = \frac{\alpha\, q}{p}$, $\mathrm{var}[N] = \frac{\alpha\, q}{p^2}$, $\sigma = \frac{\sqrt{\alpha\, q}}{p}$ in $\gamma = \frac{2\, -\, p}{\sqrt{\alpha\, q}}$.

Če sta $N_1 \sim \mathrm{NB}(\alpha_1, p)$ in $N_2 \sim \mathrm{NB}(\alpha_2, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$G_{N_1+N_2}(s) \;=\; G_{N_1}(s)\, G_{N_2}(s) \;=\; \left(\frac{p}{1-qs}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p}{1-qs}\right)^{\alpha_2} \;=\; \left(\frac{p}{1-qs}\right)^{\alpha_1+\alpha_2},$$

iz česar sledi, da je $N_1 + N_2 \sim \mathrm{NB}(\alpha_1 + \alpha_2, p)$. Rezultat lahko posplošimo za poljubno vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so negativno binomsko porazdeljene in imajo isti parameter p.

Kadar parametra α in p nista znana in ju ocenjujemo po metodi momentov iz opazovanih vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, izenačimo $m_1 = \hat{m}_1$ in $\mu_2 = \hat{\mu}_2$. Z upoštevanjem zveze $\hat{\mu}_2 = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$ med vzorčnimi momenti dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\, q}{p} &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i \;=\; \overline{n}, \\ \frac{\alpha\, q}{p^2} &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i^2 - \left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i\right)^2 \;=\; \overline{n^2} - \overline{n}^2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\overline{n}^2}{\overline{n^2}} - \overline{n}^2 - \overline{n}, \\ \hat{p} &= \frac{\overline{n}}{\overline{n^2}} - \overline{n}^2. \end{aligned}$$

Ocenimo parametra še po metodi največjega verjetja. Ker iz znanih $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ vedno lahko izračunamo frekvence ν_k števil k, $0 \le k \le n_{max} = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_\nu\}$, obratno pa ne, bomo namesto enačbe (P1.13a) raje uporabljali enačbo (P1.16). Iz enačbe (P2.1) dobimo

$$\log p_k \;=\; \log\Gamma(\alpha + k) - \log\Gamma(\alpha) - \log(k\,!) + \alpha\,\log p + k\,\log(1 - p), \tag{P2.2}$$

parcialno odvajamo po p, vstavimo v enačbo (P1.16), upoštevamo enačbi (P1.14) in (P1.15) ter dobimo

$$\sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k\, \frac{\partial \log p_k}{\partial p} \;=\; \sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{k}{1 - p}\right) \;=\; \nu \left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\overline{n}}{1 - p}\right) \;=\; 0,$$

od tu pa $p = \frac{\alpha}{\alpha + \overline{n}} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{n}}{\alpha}}$. Ker je metoda največjega verjetja invariantna na transformacijo parametrov, od tu sledi $\hat{\beta} = \frac{\hat{p}}{1-\hat{p}} = \frac{\hat{\alpha}}{\overline{n}}$ in $\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \overline{n}$, kar pomeni, da bo matematično upanje dobljene porazdelitve enako vzorčnemu povprečju.

Enačbo (P2.2) odvajajmo še po α

$$\frac{\partial \log p_k}{\partial \alpha} \;=\; \frac{\Gamma'(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha + k)} - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \log p \;=\; \psi(\alpha + k) - \psi(\alpha) + \log p$$

in vstavimo v enačbo (P1.16)

$$\sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \left(\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha) + \log \frac{1}{1 + \frac{\overline{n}}{\alpha}} \right) = 0.$$

Upoštevajmo še enačbo (P1.14) in vse skupaj za malenkost predelajmo

$$\sum_{k=1}^{n_{max}} \nu_k \, \psi(\alpha + k) - (\nu - \nu_0) \, \psi(\alpha) - \nu \log \left(1 + \frac{\overline{n}}{\alpha} \right) = 0. \tag{P2.3}$$

Z večkratno uporabo rekurzijske enačbe $\psi(x + 1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$ izpeljemo

$$\psi(\alpha + k) = \psi(\alpha) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha + j} \tag{P2.4}$$

in pomožni rezultat

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_{max}} \nu_k \, \psi(\alpha + k) &= \sum_{k=1}^{n_{max}} \nu_k \, \psi(\alpha) + \sum_{k=1}^{n_{max}} \left(\nu_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha + j} \right) = \\ &= (\nu - \nu_0) \, \psi(\alpha) + \sum_{j=0}^{n_{max}-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n_{max}} \nu_k \frac{1}{\alpha + j} \right), \end{aligned}$$

ki ga upoštevamo v enačbi (P2.3). Končno dobimo

$$\nu \log \left(1 + \frac{\overline{n}}{\alpha} \right) - \sum_{j=0}^{n_{max}-1} \frac{c_j}{\alpha + j} = 0, \tag{P2.5}$$

kjer je $c_j = \sum_{k=j+1}^{n_{max}} \nu_k$ za $j = 0, 1, \ldots, n_{max} - 1$.

Za negativno binomsko porazdelitev je značilno, da je varianca vedno večja od matematičnega upanja, saj je $\mathrm{var}[N] = E[N] \, \frac{\beta+1}{\beta} = \frac{E[N]}{p}$. Če je nepristranska cenilka za varianco $\frac{n}{n-1} \, (\overline{n^2} - \overline{n}^2)$ večja od $\overline{n}$, ima enačba (P2.5) enolično rešitev. Za začetni približek lahko vzamemo vrednost, dobljeno po metodi momentov, in enačbo numerično rešimo. Z rešitvijo $\hat{\alpha}$ izračunamo še $\hat{p} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \overline{n}}$ in privzamemo, da je $N \sim \mathrm{NB}(\hat{\alpha}, \hat{p})$. Če pa pogoj $\frac{n}{n-1} \, (\overline{n^2} - \overline{n}^2) > \overline{n}$ ni izpolnjen, je $\hat{\alpha} = \infty$. V takem primeru je zelo verjetno, da negativna binomska porazdelitev ni pravi model, v poštev pa prideta Poissonova, ki ima varianco vedno enako matematičnemu upanju, in binomska, ki ima varianco vedno manjšo od matematičnega upanja.

Izračunajmo še informacijsko in kovariančno matriko. Iz

$$l_1 = \log \Gamma(\alpha + N_1) - \log \Gamma(\alpha) - \log(N_1 \, !) + \alpha \log p + N_1 \log(1 - p)$$

z upoštevanjem odvoda enačbe (P2.4) po α dobimo

$$\begin{aligned} I_{11} &= -E \left[\frac{\partial^2 l_1}{\partial \alpha^2} \right] = -E \left[\psi'(\alpha + N_1) - \psi'(\alpha) \right] = \\ &= E \left[\sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{1}{(\alpha + j)^2} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(\alpha + j)^2} \end{aligned}$$

in ostale elemente informacijske matrike $\mathbf{I}(\alpha, p)$

$$I_{12} \;=\; I_{21} \;=\; -\,E\left[\frac{\partial^2 l_1}{\partial\alpha\partial p}\right] \;=\; -\,E\left[\frac{\partial^2 l_1}{\partial p\partial\alpha}\right] \;=\; -\,\frac{1}{p},$$
$$I_{22} \;=\; -\,E\left[\frac{\partial^2 l_1}{\partial^2 p}\right] \;=\; E\left[\frac{\alpha}{p^2} + \frac{N_1}{(1\,-\,p)^2}\right] \;=\; \frac{\alpha}{p^2\,(1\,-\,p)},$$

z njimi pa

$$\mathbf{\Sigma}(\alpha, p) \;=\; \mathbf{I}^{-1}(\alpha, p) \;=\; \frac{1}{I_{11}I_{22} - I_{12}I_{21}} \begin{Vmatrix} I_{22} & -I_{12} \\ -I_{21} & I_{11} \end{Vmatrix}$$

oziroma

$$\mathbf{\Sigma}(\alpha, p) \;=\; \frac{1}{\alpha\, I_{11} + p - 1} \begin{Vmatrix} \alpha & p\,(1-p) \\ p\,(1-p) & p^2\,(1-p)\,I_{11} \end{Vmatrix} \;=\; \frac{1}{\alpha\, I_{11} - q} \begin{Vmatrix} \alpha & p\,q \\ p\,q & p^2\,q\,I_{11} \end{Vmatrix}$$

Za praktično uporabo kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}(\alpha, p)$ moramo najprej z $\alpha = \hat{\alpha}$ in $p = \hat{p}$ izračunati verjetnosti p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, nato numerično izračunati I_{11} in končno kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}(\hat{\alpha}, \hat{p})$.

Ker matrika $\mathbf{\Sigma}(\alpha, p)$ ni diagonalna, sta parametra α in p korelirana. Že z grobo oceno

$$I_{11} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(\alpha\,+\,j)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, k = \frac{1}{\alpha^2}\, E[N] = \frac{1-p}{\alpha\, p}$$

dobimo $I_{11}\, I_{22} < \frac{1-p}{\alpha\, p}\, \frac{\alpha}{p^2\,(1-p)} = \frac{1}{p^3}$ ter $\rho = \frac{-I_{12}}{\sqrt{I_{11}\, I_{22}}} > \frac{p^{-1}}{p^{-3/2}} = \sqrt{p}$. Dejanski korelacijski koeficient ρ je še večji in je običajno velik, zato intervalov zaupanja za parametra α in p ne smemo ocenjevati neodvisno. Pomagamo si lahko z invariantnostjo metode največjega verjetja na transformacijo parametrov. Parameter p zamenjajmo s parametrom $\mu = E[N] = \frac{\alpha\, q}{p} = \frac{\alpha\,(1-p)}{p} = \frac{\alpha}{\beta}$. Kot smo že ugotovili, je $\hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \overline{n}$. Izračunajmo še kovariančno matriko, ki se nanaša na parametra α in μ. Ker je $\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = \frac{1-p}{p}$ in $\frac{\partial\mu}{\partial p} = -\,\frac{\alpha}{p^2}$, je

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}(\alpha, \mu) \;&=\; \mathbf{D}\, \mathbf{\Sigma}(\alpha, p)\, \mathbf{D}^T \;= \\ &=\; \frac{1}{\alpha\, I_{11}\,+\,p\,-\,1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-p}{p} & -\frac{\alpha}{p^2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & p\,(1-p) \\ p\,(1-p) & p^2\,(1-p)\,I_{11} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1-p}{p} \\ 0 & -\frac{\alpha}{p^2} \end{Vmatrix} \;= \\ &=\; \begin{Vmatrix} \frac{\alpha}{\alpha\, I_{11}+p-1} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\,(1-p)}{p^2} \end{Vmatrix} \;=\; \begin{Vmatrix} \frac{\alpha}{\alpha\, I_{11}-q} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\, q}{p^2} \end{Vmatrix} \end{aligned}$$

Asimptotično gledano, sta α in μ porazdeljena normalno in nista korelirana, zaradi česar sta neodvisna. Zato lahko s standardnima odklonoma $\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{n\,(\alpha\, I_{11}-q)}}$ in $\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\alpha\, q}{n\, p^2}}$, izračunanima v točkah $\alpha = \hat{\alpha}$ in $\mu = \hat{\mu}$, neodvisno ocenimo napako ocenjenega parametra $\hat{\alpha}$ oziroma $\hat{\mu}$.

P2.3 Binomska porazdelitev

Slučajna spremenljivka N je porazdeljena binomsko s parametroma $n \in \mathbb{N}^+$ in p, $0 < p < 1$, kar bomo označevali z $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, če je $q = 1 - p$ in

$$p_k \;=\; \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Njene karakteristike so: $M_N(t) = (p\,e^t + q)^n$, $\varphi_N(t) = (p\,e^{it} + q)^n$, $G_N(s) = (p\,s + q)^n$, $E[N] = n\,p$, $\mathrm{var}[N] = n\,p\,q$, $\sigma = \sqrt{n\,p\,q}$ in $\gamma = \frac{q\,-\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$.

Če sta $N_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$ in $N_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$G_{N_1+N_2}(s) \quad = \quad G_{N_1}(s)\,G_{N_2}(s) \quad = \quad (p\,s + q)^{n_1}\,(p\,s + q)^{n_2} \quad = \quad (p\,s + q)^{n_1+n_2},$$

iz česar sledi, da je $N_1 + N_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$. Rezultat lahko posplošimo za poljubno vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so binomsko porazdeljene in imajo isti parameter p.

Kadar parametra n in p nista znana in ju ocenjujemo po metodi momentov iz opazovanih vrednosti $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$, izenačimo $m_1 = \hat{m}_1$ in $\mu_2 = \hat{\mu}_2$. Z upoštevanjem $\hat{\mu_2} = \hat{m}_2 \,-\, \hat{m}_1^2$ dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} n\,p &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i = \overline{n}, \\ n\,p\,q &= \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i^2 - \left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} n_i\right)^2 = \overline{n^2} \,-\, \overline{n}^2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \frac{\overline{n}^2}{\overline{n}^2 \,+\, \overline{n} \,-\, \overline{n^2}}\,, \\ \hat{p} &= \frac{\overline{n}}{\hat{n}}\,. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izračunani $\hat{n}$ zaokrožimo, če ni celo število, in poskrbimo, da bo $\hat{n} \geq n_{max}$. Šele nato iz druge enačbe izračunamo $\hat{p}$.

Ocenimo parametra n in p še po metodi največjega verjetja z uporabo enačbe (P1.16).

$$\log p_k = \log\Gamma(n{+}1) \,-\, \log\Gamma(k{+}1) \,-\, \log\Gamma(n{+}1{-}k) \,+\, k\,\log p \,+\, (n \,-\, k)\,\log(1{-}p),$$

kjer smo upoštevali $\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1-k)}$. Parcialno odvajajmo po p, vstavimo v enačbo (P1.16) in upoštevajmo enačbi (P1.14) ter (P1.15). Dobimo

$$\sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \frac{\partial \log p_k}{\partial p} = \sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \left(\frac{k}{p} - \frac{n \,-\, k}{1 \,-\, p}\right) = \sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \frac{k \,-\, n\,p}{p\,(1 \,-\, p)} = \nu\,\left(\frac{\overline{n} \,-\, n\,p}{p\,(1 \,-\, p)}\right) = 0,$$

od tu pa $p = \frac{\overline{n}}{n}$.

Iz enačbe $\sum_{k=0}^{n_{max}} \nu_k \frac{\partial \log p_k}{\partial n} = 0$ s podobnim računom kot pri negativni binomski porazdelitvi dobimo enačbo

$$\sum_{j=0}^{n_{max}-1} \frac{c_j}{n \,-\, j} \,+\, \nu\,\log\left(1 \,-\, \frac{\overline{n}}{n}\right) \quad = \quad 0,$$

kjer je $c_j = \sum_{k=j+1}^{n_{max}} \nu_k$ za $j = 0, 1, \ldots, n_{max}{-}1$. Če z numeričnimi metodami najdemo rešitev $\hat{n}$ zgornje enačbe na intervalu $n \geq n_{max}$, jo zaokrožimo na tisto sosednje celo število, za katero ima funkcija verjetja L oziroma njen logaritem l večjo vrednost, nato pa izračunamo $\hat{p} = \frac{\overline{n}}{\hat{n}}$. Tudi tokrat bo matematično upanje dobljene porazdelitve enako vzorčnemu povprečju.

Včasih je še najbolj enostaven iterativni postopek, po katerem začnemo z $\hat{n}_0 = n_{max}$, $\hat{p}_0 = \frac{\overline{n}}{\hat{n}_0}$ in $l_0 = l(\hat{n}_0, \hat{p}_0)$, nato pa za $k = 1, 2, \ldots$ izračunamo $\hat{n}_k = \hat{n}_{k-1} + 1$, $\hat{p}_k = \frac{\overline{n}}{\hat{n}_k}$ in $l_k = l(\hat{n}_k, \hat{p}_k)$. Ustavimo se, ko je vrednost l_k manjša od l_{k-1}, za $\hat{n}$ pa vzamemo $\hat{n}_{k-1}$. Ker je mogoče, da se postopek ne bi nikoli ustavil, moramo število iteracij omejiti. Če najdemo lokalni maksimum pri $\hat{n}$, le še izračunamo $\hat{p} = \frac{\overline{n}}{\hat{n}}$ in privzamemo $N \sim \mathrm{Bin}(\hat{n}, \hat{p})$, sicer pa verjetno binomska porazdelitev ni primerna izbira.

Pogosto je že zaradi narave problema parameter n znan, kot npr. pri skupinskih zavarovanjih n neodvisnih in enakih rizikov, pri čemer je za posamezen riziko možna le ena škoda z neznano verjetnostjo p. V takem primeru izračunamo le $\hat{p} = \frac{\overline{n}}{n}$, pri testiranju s χ^2-testom pa upoštevamo, da se na račun izračuna parametrov iz vzorca število prostostnih stopenj zmanjša le za 1.

Analogno kot pri negativni binomski porazdelitvi izračunamo elemente informacijske matrike, ki so $I_{11} = \sum_{k=1}^{n} p_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n-j)^2}$, $I_{12} = I_{21} = \frac{1}{1-p}$ in $I_{22} = \frac{n}{p\,(1-p)}$, ter kovariančno matriko

$$\mathbf{\Sigma}(n,p) = \frac{1}{n\,(1-p)\,I_{11} - p} \begin{Vmatrix} n\,(1-p) & -p\,(1-p) \\ -p\,(1-p) & p\,(1-p)^2\,I_{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{n\,q\,I_{11} - p} \begin{Vmatrix} n\,q & -p\,q \\ -p\,q & p\,q^2\,I_{11} \end{Vmatrix}$$

Ker matrika $\mathbf{\Sigma}(n,p)$ ni diagonalna, sta parametra n in p korelirana. Spet parameter p zamenjajmo s parametrom $\mu = E[N] = n\,p$. Kot smo že ugotovili, je $\hat{\mu} = \overline{n}$, nova kovariančna matrika pa je

$$\mathbf{\Sigma}(n,\mu) \quad = \quad \begin{Vmatrix} \frac{n\,(n-\mu)}{n\,(n-\mu)\,I_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{(n-\mu)\,\mu}{n} \end{Vmatrix}$$

Ker mora biti n naravno število, je asimptotično gledanje zanimivo predvsem za μ. S standardnim odklonom $\sigma_\mu = \frac{1}{n}\sqrt{(n-\mu)\,\mu}$, izračunanim v točkah $n = \hat{n}$ in $\mu = \hat{\mu}$, lahko neodvisno od n ocenimo napako ocenjenega parametra $\hat{\mu}$.

P3 Nekatere pomembne porazdelitve višine odškodnin

V razdelku P1.4 smo opozorili na pomembno razliko med škodo in odškodnino ter navedli najbolj pogoste funkcijske zveze med njima. V zavarovalnih pogojih in zavarovalnih policah je zelo pogosto določena zavarovalna vsota, s katero je navzgor omejena največja odškodnina za posamezen škodni dogodek, mnogo redkejša pa je t. i. agregatna omejitev, s katero je navzgor omejena tudi vsota odškodnin za vse škode, ki nastanejo v določenem časovnem obdobju. Omenimo še nekaj posebnosti, ki jih je potrebno upoštevati pri preoblikovanju vzorca odškodnin, če hočemo iz njega poleg porazdelitvene funkcije odškodnin izračunati tudi porazdelitveno funkcijo škod.

Najprej omenimo osnovni dve zavarovalni obliki. Pri klasičnem zavarovanju pri sklepanju določimo zavarovalno vsoto. Če je zavarovalna vsota manjša od zavarovane vrednosti, npr. hiše pri požarnem zavarovanju, govorimo o podzavarovanju. Do podzavarovanja večkrat pride zaradi špekulacije sklenitelja zavarovanja, ki želi zmanjšati osnovo za obračun zavarovalne premije.

Da ne bi prišlo do nesporazumov ob škodnem dogodku, je koristno, če je stopnja podzavarovanosti ugotovljena že ob sklenitvi zavarovanja, ker ob škodnem dogodku zavarovalnica kot izhodišče za izračun odškodnine upošteva škodo, pomnoženo z razmerjem med zavarovalno vsoto in zavarovano vrednostjo. Mogoče je tudi, da je zavarovalna vsota večja od zavarovane vrednosti. V tem primeru zaradi načela prepovedi obogatitve zavarovalnica odškodnino izračuna tako kot v primeru, ko je zavarovalna vsota enaka zavarovani vrednosti, čeprav je zaračunala previsoko zavarovalno premijo. V nasprotju s klasičnim zavarovanjem pri zavarovanju na prvi riziko vedno določimo zavarovalno vsoto, ki je manjša od vrednosti zavarovane stvari oziroma največje možne škode. Kot izhodišče za izračun odškodnine zavarovalnica upošteva škodo v celoti, če ne presega zavarovalne vsote, sicer pa zavarovalno vsoto.

Namesto franšize v fiksnem znesku ali odstotku zavarovalne vsote ali zavarovane vrednosti je v zavarovalni polici večkrat dogovorjen odstotek soudeležbe zavarovanca pri škodi. Ob škodnem dogodku iz višine škode določimo izhodiščno odškodnino za primer brez soudeležbe, nato pa jo zmanjšamo za dogovorjeni odstotek. Včasih je ta način kombiniran še z najmanjšim in največjim zneskom soudeležbe, ki bremeni zavarovanca. Vsekakor moramo pri preoblikovanju višine škode v višino odškodnine in obratno upoštevati vse dogovorjene omejitve in pravilni vrstni red njihovega upoštevanja. Tako v primeru, ko škoda presega dogovorjeno zavarovalno vsoto, za izhodišče namesto škode upoštevamo zavarovalno vsoto, nato pa upoštevamo morebitno franšizo ali z odstotkom dogovorjeno soudeležbo zavarovanca. Pravilni vrstni red je pomemben tudi v primeru, ko imamo za iste rizike več vrst pozavarovalnega kritja. Običajno je dogovorjeno, da najprej upoštevamo proporcionalna pozavarovalna kritja, nato pa neproporcionalna. V takem primeru kosmate odškodnine najprej zmanjšamo za pozavarovalni del, ki izvira iz proporcionalnega pozavarovalnega kritja, preostanek pa zmanjšamo za morebitni pozavarovalni del, ki izvira npr. iz škodno presežkovnega pozavarovanja.

Iz vsega navedenega lahko ugotovimo, da rekonstrukcija škod iz odškodnin zaradi ugotavljanja porazdelitvene funkcije škod ni enostavna. Je pa potrebna za natančno določanje premij in podobna opravila, kot je npr. določanje odstotkov popusta za različne franšize ali določanje odstotka doplačila zaradi podvojitve običajne zavarovalne vsote pri nekaterih odgovornostnih zavarovanjih.

V nadaljevanju predstavljene porazdelitvene funkcije so primerne za modeliranje višine škod in odškodnin, čeprav ima porazdelitvena funkcija odškodnin v nekaterih primerih skoke. Tudi to nam govori v prid iskanja porazdelitvene funkcije škod, ki jo lahko po podobnih enačbah, kot je (P1.20), predelamo v porazdelitveno funkcijo odškodnin, kadar je ne potrebujemo za zapletene analitične obdelave. Poleg porazdelitvenih funkcij, obravnavanih v nadaljevanju priloge, je še mnogo takih, ki so zelo uporabne v zavarovalništvu (glej npr. Panjer, Willmot, 1992; Klugman, Panjer, Willmot, 1998).

P3.1 Normalna porazdelitev

Zvezna slučajna spremenljivka X, ki ima za $\sigma > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}$ porazdelitveno funkcijo

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad = \quad \Phi\left(\frac{x\,-\,\mu}{\sigma}\right)$$

in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, je porazdeljena normalno s parametroma μ in σ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Karakteristike normalne porazdelitve so: $M_X(t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $\varphi_X(t) = e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $E[X] = \mu$, $\mathrm{var}[X] = \sigma^2$ in $\gamma = 0$. Vsi centralni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo. Lihi so nič, sode pa izračunamo po enačbi

$$\mu_{2j} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j - 1)\,\sigma^{2j} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Če sta $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ in $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t) = e^{it\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2}\, e^{it\mu_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2},$$

iz česar sledi, da je $X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Rezultat lahko posplošimo za poljubno vsoto normalno porazdeljenih neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Neznana parametra μ in σ iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po metodi momentov izračunamo tako, da izenačimo $m_1 = \hat{m}_1$ in $\mu_2 = \hat{\mu}_2$. Ker je $m_1 = \mu$, $\mu_2 = \sigma^2$ in $\hat{\mu}_2 = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$, je rešitev tega sistema enačb

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}.$$

Po metodi največjega verjetja dobimo isti rezultat in privzamemo, da je $X \sim \mathrm{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle \hat{\mu} - \mu, \hat{\sigma} - \sigma \rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(\mu, \sigma) = \begin{Vmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{Vmatrix}$$

P3.2 Logaritemsko normalna porazdelitev

Naj bo $Y = \log X$ oziroma $X = e^Y$, kjer je $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ in $\sigma > 0$. Tedaj je X zvezna slučajna spremenljivka, ki ima na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right)^2}}{t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log x - \mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2}$. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena logaritemsko normalno s parametroma μ in σ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$. Vsi začetni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo, čeprav momentno rodovna funkcija ne obstaja. Izračunamo jih z enačbo $m_j = e^{j\mu+\frac{1}{2}j^2\sigma^2}$, $j = 1, 2, \ldots$

Neznana parametra μ in σ iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po metodi momentov in po metodi največjega verjetja ocenimo z

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i = \overline{\log x},$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log^2 x_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i\right)^2} = \sqrt{\overline{\log^2 x} - \overline{\log x}^2}$$

in privzamemo, da je $X \sim \mathrm{LN}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle \hat{\mu} - \mu, \hat{\sigma} - \sigma \rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(\mu, \sigma) \quad = \quad \begin{Vmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{Vmatrix}$$

P3.3 Transformirana gama porazdelitev

Slučajna spremenljivka X, ki ima za $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ in $\tau > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{(\lambda x)^\tau} t^{\alpha - 1}\, e^{-t}\, dt \quad = \quad \Gamma(\alpha; (\lambda x)^\tau)$$

in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha\tau}\,\tau\, x^{\alpha\tau - 1}\, e^{-(\lambda x)^\tau}}{\Gamma(\alpha)}$, je porazdeljena po transformirani gama porazdelitvi s parametri α, λ in τ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{T}\Gamma(\alpha, \lambda, \tau)$. Vsi začetni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \frac{\Gamma(\alpha\, +\, \frac{j}{\tau})}{\lambda^j\, \Gamma(\alpha)}$, $j = 1, 2, \ldots$

Posebni primeri transformirane gama porazdelitve so: gama porazdelitev, če je $\tau = 1$, Weibullova porazdelitev, če je $\alpha = 1$, in eksponentna porazdelitev, če je $\alpha = \tau = 1$.

Neznane parametre α, λ in τ bomo iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ocenili po metodi največjega verjetja. Sestavimo funkcijo verjetja

$$L(\alpha, \lambda, \tau) \quad = \quad \frac{\lambda^{\alpha\tau n}\, \tau^n}{\Gamma(\alpha)^n} \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{\alpha\tau - 1}\, e^{-(\lambda x_i)^\tau} \tag{P3.1}$$

in njen logaritem

$$\begin{aligned} l(\alpha, \lambda, \tau) \quad &= \quad \alpha\,\tau\, n\, \log\lambda \,+\, n\, \log\tau \,-\, n\, \log\Gamma(\alpha) \,+\, (\alpha\,\tau - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i \,-\, \lambda^\tau \sum_{i=1}^{n} x_i^\tau = \\ &= \quad n\,(\alpha\,\tau\, \log\lambda \,+\, \log\tau \,-\, \log\Gamma(\alpha) \,+\, (\alpha\,\tau - 1)\, \overline{\log x} \,-\, \lambda^\tau\, \overline{x^\tau}). \end{aligned} \tag{P3.2}$$

Iz pogoja

$$\frac{1}{n} \frac{\partial l}{\partial \lambda} \quad = \quad \frac{\alpha\,\tau}{\lambda} \,-\, \tau\, \lambda^{\tau - 1}\, \overline{x^\tau} \quad = \quad 0$$

dobimo $\lambda^\tau = \frac{\alpha}{\overline{x^\tau}}$ oziroma

$$\lambda \quad = \quad \left(\frac{\overline{x^\tau}}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{\tau}} \tag{P3.3}$$

in $\log\lambda = \,-\,\frac{1}{\tau}\, \log\overline{x^\tau} \,+\, \frac{1}{\tau}\, \log\alpha$. To upoštevamo v enačbi

$$\frac{1}{n} \frac{\partial l}{\partial \alpha} \quad = \quad \tau\, \log\lambda \,-\, \psi(\alpha) \,+\, \tau\, \overline{\log x} \quad = \quad 0 \tag{P3.4}$$

ter dobimo

$$\psi(\alpha) \,-\, \log\alpha \,-\, \tau\, \overline{\log x} \,+\, \log\overline{x^\tau} \quad = \quad 0. \tag{P3.5}$$

V tretjem pogoju

$$\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \tau} \;=\; \alpha\,\log\lambda \,+\, \frac{1}{\tau} \,+\, \alpha\,\overline{\log x} \,-\, \lambda^\tau\,\overline{x^\tau}\,\log\lambda \,-\, \lambda^\tau\,\overline{x^\tau\,\log x} \;=\; 0 \qquad \text{(P3.6)}$$

upoštevamo $\lambda^\tau = \frac{\alpha}{\overline{x^\tau}}$ in po preureditvi dobimo

$$\alpha \;=\; \frac{\overline{x^\tau}}{\tau\,(\overline{x^\tau\,\log x} \,-\, \overline{x^\tau}\,\overline{\log x})}. \qquad \text{(P3.7)}$$

Če desno stran enačbe (P3.7) označimo z $g(\tau)$ in jo namesto α vstavimo v enačbo (P3.5), dobimo enačbo

$$\psi(g(\tau)) \,-\, \log(g(\tau)) \,-\, \tau\,\overline{\log x} \,+\, \log\overline{x^\tau} \;=\; 0, \qquad \text{(P3.8)}$$

v kateri nastopa le še neznani parameter τ.

Enačba (P3.8) je sicer zapletena, vendar se da brez večjih težav numerično ugnati. Če levo stran označimo s $f(\tau)$, jo lahko rešujemo npr. z Newton-Raphsonovo metodo, kjer odvod aproksimiramo s $f'(\tau) \approx \frac{f(\tau\,(1\,+\,\Delta))\,-\,f(\tau)}{\tau\,\Delta}$. Pri tem je Δ primerno majhno število, npr. 10^{-7}, ki ga določimo glede na natančnost, s katero računamo v enačbi nastopajoče funkcije. Iz začetnega približka τ_0 računamo zaporedne približke z rekurzivno enačbo

$$\tau_{k+1} \;=\; \tau_k \,-\, \frac{f(\tau_k)}{\frac{f(\tau_k\,(1\,+\,\Delta))\,-\,f(\tau_k)}{\tau_k\,\Delta}} \;=\; \tau_k\left(1 \,-\, \frac{\Delta}{\frac{f(\tau_k\,(1\,+\,\Delta))}{f(\tau_k)} \,-\, 1}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ustavimo se, ko sta dva zaporedna približka dovolj blizu. Odprto ostane le še vprašanje primerne izbire začetnega približka. Kot navaja Venter (1983, str. 176), si lahko pomagamo z dejstvom, da je za transformirano gama porazdelitev dvakratnik koeficienta variacije, deljen s koeficientom asimetrije, hkrati s τ enak, večji ali manjši od 1. Trditev pa ne drži, kar dokazuje nasprotni primer $\mathrm{T}\Gamma(2, 1, 4)$, ko je omenjeni izraz $-3{,}02$. Za pravilnost Venterjeve trditve je potrebno, da je koeficient asimetrije pozitiven. Domnevamo, da je ta pogoj tudi zadosten in vedno izpolnjen, če je $\tau \le 3$. Kljub nepopolnosti je Venterjev napotek praktično uporaben, saj imajo porazdelitve odškodnin praviloma pozitiven koeficient asimetrije.

Iz koeficienta variacije $\frac{\sigma}{m_1} = \frac{\mu_2^{1/2}}{m_1}$ in koeficienta asimetrije $\gamma = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$ za začetni približek dobimo izraz $\frac{2\,\mu_2^2}{m_1\,\mu_3}$. Če ga izračunamo z vzorčnimi momenti $\hat{m}_1$, $\hat{\mu}_2$ in $\hat{\mu}_3$ in je rezultat pozitiven, dobimo primeren začetni približek τ_0, če pa je rezultat negativen, lahko začnemo npr. s $\tau_0 = 3{,}5$. S tako izračunanim začetnim približkom pa še ne dobimo zagotovila, da bodo zaporedni približki τ_0, τ_1, τ_2, $\ldots$ konvergirali h korenu enačbe (P3.8). Ker je $\lim_{\tau\to+0} f(\tau) = 0$, se pri uporabi Newton-Raphsonove metode lahko zgodi, da začnemo s τ_0, ki leži levo od pozitivnega lokalnega maksimuma funkcije $f(\tau)$, zaporedni približki pa konvergirajo k 0, medtem ko iščemo pozitivno ničlo funkcije $f(\tau)$, ki je desno od lokalnega maksimuma. Poleg te splošne slabosti Newton-Raphsonove metode ima v našem primeru opisana metoda še to slabost, da je pri vsaki iteraciji potrebno izračunati vrednosti $\overline{x^\tau}$ in $\overline{x^\tau\,\log x}$ za dva različna τ, kar je pri velikem vzorcu zamudno. Vsekakor si težave zmanjšamo, če za iskanje ničle uporabimo sekantno metodo ali metodo bisekcije. Počasnejšo konvergenco vsaj delno ublažimo s tem, da na vsakem koraku izraza $\overline{x^\tau}$ in $\overline{x^\tau\,\log x}$ izračunamo le enkrat, predvsem pa z gotovostjo najdemo ničlo, če le uspemo najti točko, kjer je funkcija negativna.

Kakorkoli že izračunamo koren $\hat{\tau}$ enačbe (P3.8), iz enačbe (P3.7) izračunamo $\hat{\alpha}$, nato pa iz enačbe (P3.3) še $\hat{\lambda}$ ter predpostavimo, da je $X \sim \mathrm{T}\Gamma(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$.

Transformirana gama porazdelitev je uporabna za modeliranje porazdelitve višine posameznih odškodnin, ko imamo običajno na razpolago dovolj velik vzorec, pa tudi za približek porazdelitve agregatnih odškodnin, ko primernega vzorca nimamo, znamo pa oceniti prve tri momente porazdelitve agregatnih odškodnin. V takem primeru parametre transformirane gama porazdelitve ocenimo po metodi momentov. Kako to naredimo, smo si ogledali v podrazdelku 3.5.4.

P3.4 Gama porazdelitev

Zvezna slučajna spremenljivka X, ki ima za $\alpha > 0$ in $\lambda > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo

$$F(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda x} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt \;=\; \Gamma(\alpha; \lambda x)$$

in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\lambda^\alpha\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$, je porazdeljena po gama porazdelitvi s parametroma α in λ, kar bomo označevali z $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Njene karakteristike so: $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$ za $t < \lambda$, $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$, $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\mathrm{var}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ in $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Vsi začetni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \frac{\Gamma(\alpha\,+\,j)}{\lambda^j\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\prod_{i=0}^{j-1}(\alpha\,+\,i)}{\lambda^j}$, $j = 1, 2, \ldots$

Če sta $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ in $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda_2)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) \;=\; \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t) \;=\; \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha_2} \;=\; \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha_1+\alpha_2},$$

iz česar sledi, da je $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$. Rezultat lahko posplošimo za poljubno vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so porazdeljene po gama porazdelitvi z istim parametrom λ.

Po metodi momentov iz enačb $m_1 = \hat{m}_1$ in $\mu_2 = \hat{\mu}_2$ oziroma $\frac{\alpha}{\lambda} = \hat{m}_1$ in $\frac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$ iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izračunamo oceni neznanih parametrov α in λ. Dobimo

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} \;&=\; \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 \,-\, \hat{m}_1^2} \;=\; \frac{\overline{x}^2}{\overline{x^2} \,-\, \overline{x}^2}, \\
\hat{\lambda} \;&=\; \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_2 \,-\, \hat{m}_1^2} \;=\; \frac{\overline{x}}{\overline{x^2} \,-\, \overline{x}^2}.
\end{aligned}$$

Gama porazdelitev je le poseben primer transformirane gama porazdelitve, saj je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ ekvivalentno $X \sim \mathrm{T}\Gamma(\alpha, \lambda, 1)$. Zato bomo za oceno neznanih parametrov po metodi največjega verjetja uporabili že znane rezultate.

V funkciji verjetja (P3.1) in njenem odvodu (P3.2) lahko postavimo $\tau = 1$. Zato tudi v enačbi (P3.3) in (P3.5), ki sta izpeljani le z upoštevanjem parcialnih odvodov $\frac{\partial l}{\partial \lambda}$ in $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, lahko vstavimo $\tau = 1$. V primeru gama porazdelitve funkcija verjetja (P3.1) in njen odvod nista odvisna od τ, zato namesto enačbe (P3.6) dobimo $\frac{\partial l}{\partial \tau} \equiv 0$, enačba (P3.7) pa ne velja več. Neznani parameter α je potrebno izračunati iz enačbe (P3.5), ki se zaradi $\tau = 1$ poenostavi v

$$\psi(\alpha) \,-\, \log\alpha \,-\, \overline{\log x} \,+\, \log\overline{x} \;=\; 0, \tag{P3.9}$$

λ pa iz enačbe (P3.3), ki se poenostavi v $\lambda = \frac{\alpha}{\overline{x}}$.

Pri numeričnem iterativnem iskanju korena enačbe (P3.9) za začetni približek α_0 lahko vzamemo oceno $\hat{\alpha}$, dobljeno po metodi momentov. Omenimo še, da je v splošnem z numeričnega stališča zelo ugodno, če so iskani koeficienti istega velikostnega reda, kar pa je odvisno od enote, v kateri navajamo velikosti odškodnin. Če jih v našem primeru navajamo kot mnogokratnike povprečne odškodnine, je $\overline{x} = 1$. Zadnji člen na levi strani enačbe (P3.9) odpade, povrhu pa je $\lambda = \alpha$. Kakorkoli že izračunamo $\hat{\alpha}$ in $\hat{\lambda}$, predpostavimo, da je $X \sim \Gamma(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle \hat{\alpha} - \alpha, \hat{\lambda} - \lambda \rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(\alpha, \lambda) \;=\; \frac{1}{\alpha\,\psi'(\alpha) - 1} \left\| \begin{array}{cc} \alpha & \lambda \\ \lambda & \lambda^2\,\psi'(\alpha) \end{array} \right\|$$

P3.5 Logaritemsko gama porazdelitev

Naj bo $Y = \log X$ oziroma $X = e^Y$, kjer je $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$ in $\lambda > 0$. Tedaj je X zvezna slučajna spremenljivka, ki ima na nosilcu $\{x | x > 1\}$ porazdelitveno funkcijo

$$F(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda \log x} t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt \;=\; \Gamma(\alpha; \lambda \log x)$$

in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\lambda^\alpha\,(\log x)^{\alpha-1}}{x^{\lambda+1}\,\Gamma(\alpha)}$, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{L}\Gamma(\alpha, \lambda)$. Začetni momenti m_j slučajne spremenljivke X obstajajo le za $j < \lambda$, izračunamo pa jih z enačbo $m_j = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j}\right)^\alpha$.

Definirajmo $\hat{m}'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log x_i)^j$, $j = 1, 2$. Neznana parametra α in λ po metodi momentov iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ocenimo z

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\hat{m}'^2_1}{\hat{m}'_2 \;-\; \hat{m}'^2_1} &= \frac{\overline{\log x}^2}{\overline{\log^2 x} \;-\; \overline{\log x}^2}, \\ \hat{\lambda} &= \frac{\hat{m}'_1}{\hat{m}'_2 \;-\; \hat{m}'^2_1} &= \frac{\overline{\log x}}{\overline{\log^2 x} \;-\; \overline{\log x}^2}. \end{aligned}$$

Enačbi sta izpeljani pri predpostavki, da prva dva momenta obstajata, za kar pa mora biti $\lambda > 2$. Zato je možno, da rezultat ni smiseln.

Ocenimo parametra α in λ še po metodi največjega verjetja. Sestavimo funkcijo verjetja

$$L(\alpha, \lambda) \;=\; \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^\alpha\,(\log x_i)^{\alpha-1}}{{x_i}^{\lambda+1}\,\Gamma(\alpha)} \;=\; \frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n} \prod_{i=1}^n \frac{(\log x_i)^{\alpha-1}}{{x_i}^{\lambda+1}}$$

in njen logaritem

$$l(\alpha, \lambda) \;=\; n\,\alpha\,\log\lambda \;-\; n\,\log\Gamma(\alpha) \;+\; \sum_{i=1}^n ((\alpha \;-\; 1)\log\log x_i \;-\; (\lambda \;+\; 1)\,\log x_i).$$

Oceni neznanih parametrov izračunamo iz sistema enačb

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \log\lambda - \psi(\alpha) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\log x_i = 0,\\ \frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \lambda} &= \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i = \frac{\alpha}{\lambda} - \overline{\log x} = 0.\end{aligned}$$

Iz druge enačbe izračunamo $\lambda = \frac{\alpha}{\overline{\log x}}$, vstavimo v prvo enačbo in po preureditvi dobimo

$$\psi(\alpha) - \log\alpha - \overline{\log\,\log x} + \log\left(\overline{\log x}\right) = 0.$$

Pri numeričnem iterativnem iskanju korena zgornje enačbe za začetni približek α_0 lahko vzamemo oceno, dobljeno po metodi momentov. Ko najdemo koren $\hat\alpha$, izračunamo $\hat\lambda = \frac{\hat\alpha}{\overline{\log x}}$ in predpostavimo $X \sim \mathrm{L}\Gamma(\hat\alpha, \hat\lambda)$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle\hat\alpha-\alpha, \hat\lambda-\lambda\rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\alpha\,\psi'(\alpha)-1}\left\|\begin{matrix}\alpha & \lambda\\ \lambda & \lambda^2\,\psi'(\alpha)\end{matrix}\right\|$$

P3.6 Eksponentna porazdelitev

Slučajna spremenljivka X, ki ima na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, in gostoto verjetnosti $f(x) = \lambda\,e^{-\lambda x}$, je porazdeljena eksponentno s parametrom λ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Eksponentna porazdelitev je le poseben primer gama porazdelitve in poseben primer transformirane gama porazdelitve, saj je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ekvivalentno $X \sim \Gamma(1,\lambda)$, to pa je ekvivalentno $X \sim \mathrm{T}\Gamma(1,\lambda,1)$. Njene karakteristike so: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ za $t < \lambda$, $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-it}$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ in $\gamma = 2$. Vsi začetni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \frac{j\,!}{\lambda^j}$, $j = 1, 2, \ldots$

Če sta $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ in $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^2,$$

iz česar sledi, da je $X_1 + X_2 \sim \Gamma(2,\lambda)$. Rezultat lahko posplošimo tudi na vsoto n neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki so porazdeljene eksponentno z istim parametrom.

Neznani parameter λ iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po metodi momentov in po metodi največjega verjetja ocenimo z $\hat\lambda = \frac{1}{\bar x}$ in predpostavimo $X \sim \mathrm{Exp}(\hat\lambda)$. Ker je $\mathbf{\Sigma} = \|\lambda^2\|$, porazdelitev slučajne spremenljivke $\sqrt{n}\,(\hat\lambda - \lambda)$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(0, \lambda^2)$.

P3.7 Weibullova porazdelitev

Zvezna slučajna spremenljivka X, ki ima za $c > 0$ in $\tau > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo $F(x) = 1 - e^{-cx^\tau}$ in gostoto verjetnosti $f(x) = c\,\tau\,x^{\tau-1}\,e^{-cx^\tau}$, je porazdeljena po

Weibullovi porazdelitvi s parametroma c in τ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{W}(c, \tau)$. Vsi začetni momenti slučajne spremenljivke X obstajajo. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \frac{\Gamma(1 + \frac{j}{\tau})}{c^{\frac{j}{\tau}}}$, $j = 1, 2, \ldots$

Weibullova porazdelitev je le poseben primer transformirane gama porazdelitve, saj je $X \sim \mathrm{W}(c, \tau)$ ekvivalentno $X \sim \mathrm{T\Gamma}(1, c^{\frac{1}{\tau}}, \tau)$. Naj bo $\lambda = c^{\frac{1}{\tau}}$. Tedaj je $X \sim \mathrm{T\Gamma}(1, \lambda, \tau)$ in za oceno neznanih parametrov λ in τ po metodi največjega verjetja lahko uporabimo že znane rezultate.

V funkciji verjetja (P3.1) in njenem odvodu (P3.2) lahko postavimo $\alpha = 1$. Zato tudi v enačbi (P3.3) in (P3.7), ki sta izpeljani le z upoštevanjem parcialnih odvodov $\frac{\partial l}{\partial \lambda}$ in $\frac{\partial l}{\partial \tau}$, lahko vstavimo $\alpha = 1$. V primeru Weibullove porazdelitve funkcija verjetja (P3.1) in njen odvod nista odvisna od α, zato namesto enačbe (P3.4) dobimo $\frac{\partial l}{\partial \alpha} \equiv 0$, enačbi (P3.5) in (P3.8) pa ne veljata več. Neznani parameter τ je potrebno izračunati iz enačbe (P3.7), ki se zaradi $\alpha = 1$ po preureditvi glasi

$$\frac{1}{\tau} - \frac{\overline{x^\tau \log x}}{\overline{x^\tau}} + \overline{\log x} = 0. \tag{P3.10}$$

Tudi v tem posebnem primeru transformirane gama porazdelitve je za reševanje z Newton-Raphsonovo metodo primeren začetni približek $\tau_0 = \frac{2\,\hat{\mu}_2^2}{\hat{m}_1\,\hat{\mu}_3}$, če je pozitiven, sicer pa $\tau_0 = 3{,}5$. Iz korena $\hat{\tau}$ enačbe (P3.10) in zvez (P3.3) ter $c = \lambda^\tau$ izračunamo $\hat{c} = \frac{1}{\overline{x^{\hat{\tau}}}}$ ter predpostavimo $X \sim \mathrm{W}(\hat{c}, \hat{\tau})$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle \hat{c} - c, \hat{\tau} - \tau \rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(c, \tau) = \frac{6}{\pi^2} \left\| \begin{array}{cc} \tau^2 & c\,\tau\,(1 - C - \log c) \\ c\,\tau\,(1 - C - \log c) & c^2 \left(\frac{\pi^2}{6} + (1 - C - \log c)^2 \right) \end{array} \right\|$$

in $C = 0,5772156649\ldots$ Eulerjeva konstanta.

P3.8 Transformirana Paretova oziroma Burrova porazdelitev

Zvezna slučajna spremenljivka X, ki ima za $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ in $\tau > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^\tau}\right)^\alpha$ in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\alpha\,\tau\,\lambda^\alpha\,x^{\tau - 1}}{(\lambda + x^\tau)^{\alpha + 1}}$, je porazdeljena po transformirani Paretovi oziroma Burrovi porazdelitvi s parametri α, λ in τ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{Burr}(\alpha, \lambda, \tau)$. Momentno rodovna funkcija ne obstaja, začetni momenti m_j slučajne spremenljivke X pa obstajajo le za $j < \alpha\,\tau$. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \lambda^{\frac{j}{\tau}}\,\Gamma(\alpha - \frac{j}{\tau})\,\Gamma(1 + \frac{j}{\tau})/\Gamma(\alpha)$.

Neznane parametre α, λ in τ bomo iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ocenili po metodi največjega verjetja. Sestavimo funkcijo verjetja

$$L(\alpha, \lambda, \tau) = \alpha^n\,\tau^n\,\lambda^{n\,\alpha} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\tau - 1}}{(\lambda + x_i^\tau)^{\alpha + 1}} \tag{P3.11}$$

in njen logaritem

$$l(\alpha, \lambda, \tau) = n \log \alpha + n \log \tau + n\,\alpha \log \lambda + (\tau - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^{n} \log(\lambda + x_i^\tau). \tag{P3.12}$$

Iz enačbe

$$\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \alpha} \;=\; \frac{1}{\alpha} + \log\lambda - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(\lambda + x_i^{\tau}) \;=\; 0$$

z upoštevanjem

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(\lambda + x_i^{\tau}) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\lambda\left(1 + \frac{x_i^{\tau}}{\lambda}\right)\right) \;=\; \log\lambda + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 + \frac{x_i^{\tau}}{\lambda}\right)$$

dobimo

$$\frac{1}{\alpha} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(1 + \frac{x_i^{\tau}}{\lambda}\right) \;=\; -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}$$

oziroma

$$\alpha \;=\; -\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}\right)^{-1}. \qquad \text{(P3.13)}$$

Iz enačbe

$$\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \lambda} \;=\; \frac{\alpha}{\lambda} - (\alpha + 1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda + x_i^{\tau}} \;=\; \frac{1}{\lambda}\left(\alpha - (\alpha + 1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}\right) = 0$$

z upoštevanjem enačbe (P3.13) dobimo

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}} \;=\; \frac{\alpha}{\alpha + 1} \;=\; \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \;=\; \left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}\right)^{-1}$$

oziroma

$$\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}} - 1 \;=\; 0. \qquad \text{(P3.14)}$$

Iz enačbe

$$\frac{1}{n}\frac{\partial l}{\partial \tau} \;=\; \frac{1}{\tau} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i - (\alpha + 1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\tau}\,\log x_i}{\lambda + x_i^{\tau}} \;=\; 0$$

z upoštevanjem enačbe (P3.13) dobimo

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \left(1 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}\right)^{-1}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\tau}\,\log x_i}{\lambda + x_i^{\tau}} \;=\; 0. \qquad \text{(P3.15)}$$

Rešiti moramo še sistem dveh nelinearnih enačb (P3.14) in (P3.15) z neznankama λ in τ. Za iterativno numerično reševanje je praktično, če vpeljemo pomožne spremenljivke $y_i(\lambda,\tau) = \frac{x_i^{\tau}}{\lambda}$ in $z_i(\lambda,\tau) = \frac{1}{1 + y_i(\lambda,\tau)}$. Ker je $z_i(\lambda,\tau) = \frac{\lambda}{\lambda + x_i^{\tau}}$, lahko enačbe (P3.13), (P3.14) in (P3.15) zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}
\alpha \;&=\; -\,1/\,\overline{\log z},\\
f(\lambda,\tau) \;&=\; \left(1 - \overline{\log z}\right)\overline{z} - 1 \;=\; 0,\\
g(\lambda,\tau) \;&=\; \frac{1}{\tau} + \overline{\log x} - \left(1 - 1/\,\overline{\log z}\right)\overline{y\,z\,\log x} \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Sistem enačb $f(\lambda, \tau) = 0$ in $g(\lambda, \tau) = 0$ lahko rešujemo z Newton-Raphsonovo metodo, v kateri parcialne odvode aproksimiramo z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\lambda,\tau)}{\partial \lambda} &\approx \frac{f(\lambda\,(1\,+\,\Delta),\tau)\,-\,f(\lambda,\tau)}{\lambda\,\Delta} = f_\lambda,\\
\frac{\partial f(\lambda,\tau)}{\partial \tau} &\approx \frac{f(\lambda,\tau\,(1\,+\,\Delta))\,-\,f(\lambda,\tau)}{\tau\,\Delta} = f_\tau,\\
\frac{\partial g(\lambda,\tau)}{\partial \lambda} &\approx \frac{g(\lambda\,(1\,+\,\Delta),\tau)\,-\,g(\lambda,\tau)}{\lambda\,\Delta} = g_\lambda,\\
\frac{\partial g(\lambda,\tau)}{\partial \tau} &\approx \frac{g(\lambda,\tau\,(1\,+\,\Delta))\,-\,g(\lambda,\tau)}{\tau\,\Delta} = g_\tau.
\end{aligned}$$

Pri tem je Δ primerno majhno število, npr. 10^{-7}, ki ga določimo glede na natančnost, s katero računamo funkciji f in g. Iz začetnega približka (λ_0, τ_0) računamo zaporedne približke z rekurzivno enačbo

$$(\lambda_{k+1}, \tau_{k+1}) = \left(\lambda_k - \frac{f\,g_\tau\,-\,g\,f_\tau}{f_\lambda\,g_\tau\,-\,g_\lambda\,f_\tau},\, \tau_k - \frac{g\,f_\lambda\,-\,f\,g_\lambda}{f_\lambda\,g_\tau\,-\,g_\lambda\,f_\tau}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ustavimo se, ko sta dva zaporedna približka dovolj blizu. Začetni približek (λ_0, τ_0) lahko sestavimo tako, da vzamemo $\tau_0 = 1$, za λ_0 pa oceno $\hat{\lambda}$, ki jo dobimo po metodi največjega verjetja za Paretovo porazdelitev.

Če imamo težave s konvergenco Newton-Raphsonove metode, lahko sistem nelinearnih enačb (P3.14) in (P3.15) alternativno rešujemo tudi z dvema vgnezdenima bisekcijama. Glede na spremenljivko τ rešujemo enačbo $g(\lambda, \tau) = 0$, za kar pa moramo iz $f(\lambda, \tau) = 0$ pri znanem τ izluščiti $\lambda = \lambda(\tau)$. Najprej določimo začetni interval za τ z enim krajiščem v 1, na katerem je funkcija v krajiščih različno predznačena, ter izračunamo začetni približek τ_0 kot središče intervala. Pri znani vrednosti τ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, z bisekcijo rešimo enačbo $f(\lambda, \tau_k) = 0$ in dobimo λ_k, nato pa v odvisnosti od predznaka funkcije $g(\lambda_k, \tau_k)$ premaknemo eno od krajišč intervala za τ v τ_k in določimo τ_{k+1} kot središče novega intervala. Postopek zaključimo, če naletimo na ničlo, sicer pa takrat, ko sta dva zaporedna približka dovolj blizu. Kot bomo videli v nadaljevanju, je iskanje λ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ekvivalentno iskanju neznanega parametra λ za Paretovo porazdelitev po metodi največjega verjetja, kjer namesto vzorca x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, upoštevamo vzorec $x_i^{\tau_k}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Kakorkoli že izračunamo $\hat{\lambda}$ in $\hat{\tau}$, ki rešita sistem enačb (P3.14) in (P3.15), iz enačbe (P3.13) izračunamo še $\hat{\alpha}$ in predpostavimo $X \sim \mathrm{Burr}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\tau})$.

P3.9 Paretova porazdelitev

Zvezna slučajna spremenljivka X, ki ima za $\alpha > 0$ in $\lambda > 0$ na nosilcu $\mathbb{R}^+$ porazdelitveno funkcijo $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda\,+\,x}\right)^\alpha$ in gostoto verjetnosti $f(x) = \frac{\alpha\,\lambda^\alpha}{(\lambda\,+\,x)^{\alpha+1}}$, je porazdeljena po Paretovi porazdelitvi s parametroma α in λ, kar bomo označevali z $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$. Začetni momenti m_j slučajne spremenljivke X obstajajo le za $j < \alpha$. Izračunamo jih z enačbo $m_j = \frac{\lambda^j\,j\,!}{\prod_{i=1}^{j}\,(\alpha\,-\,i)}$.

Neznana parametra α in λ iz vzorca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po metodi momentov ocenimo z

$$\hat{\alpha} = \frac{2\,(\hat{m}_2 \,-\, \hat{m}_1^2)}{\hat{m}_2 \,-\, 2\,\hat{m}_1^2} = \frac{2\,(\overline{x^2} \,-\, \overline{x}^2)}{\overline{x^2} \,-\, 2\,\overline{x}^2},$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{m}_1\,\hat{m}_2}{\hat{m}_2 \,-\, 2\,\hat{m}_1^2} = \frac{\overline{x}\;\overline{x^2}}{\overline{x^2} \,-\, 2\,\overline{x}^2}.$$

Enačbi sta izpeljani pri predpostavki, da prva dva momenta obstajata, za kar pa mora biti $\alpha > 2$. Zato je mogoče, da rezultat ni smiseln, saj se v praksi pojavljajo tipični primeri, ko je $\alpha \le 2$ (glej npr. Schmutz, Doerr, 1998, str. 12).

Paretova porazdelitev je le poseben primer transformirane Paretove porazdelitve, saj je $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$ ekvivalentno $X \sim \mathrm{Burr}(\alpha, \lambda, 1)$. Zato bomo za oceno neznanih parametrov po metodi največjega verjetja uporabili že znane rezultate.

V funkciji verjetja (P3.11) in njenem odvodu (P3.12) lahko postavimo $\tau = 1$. Zato tudi v enačbi (P3.13) in (P3.14), ki sta izpeljani le z upoštevanjem parcialnih odvodov $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$ in $\frac{\partial l}{\partial \lambda}$, lahko vstavimo $\tau = 1$. V primeru Paretove porazdelitve funkcija verjetja (P3.11) in njen odvod nista odvisna od τ, zato je $\frac{\partial l}{\partial \tau} \equiv 0$, enačba (P3.15) pa ne velja več. Neznani parameter λ izračunamo iz enačbe (P3.14), ki se poenostavi v

$$\left(1 \,-\, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\lambda}{\lambda \,+\, x_i}\right) \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda \,+\, x_i} \,-\, 1 = 0,$$

α pa iz enačbe (P3.13), ki se poenostavi v

$$\alpha = -\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\lambda}{\lambda \,+\, x_i}\right)^{-1}.$$

Če vpeljemo pomožne spremenljivke $z_i(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda \,+\, x_i}$, lahko zapišemo

$$\alpha = -\,1/\,\overline{\log z}, \tag{P3.16}$$

$$f(\lambda) = \left(1 \,-\, \overline{\log z}\right)\overline{z} \,-\, 1 = 0, \tag{P3.17}$$

kar je enako zapisu, ki smo ga z vsebinsko različnimi pomožnimi spremenljivkami z_i dobili že pri Burrovi porazdelitvi.

Pri numeričnem iterativnem iskanju korena enačbe (P3.17) za začetni približek λ_0 lahko vzamemo vrednost, dobljeno z metodo momentov. Kakorkoli že izračunamo koren $\hat{\lambda}$ enačbe (P3.17), iz enačbe (P3.16) izračunamo $\hat{\alpha}$ in predpostavimo $X \sim \mathrm{Pareto}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$.

Porazdelitev vektorja $\sqrt{n}\,\langle \hat{\alpha} - \alpha, \hat{\lambda} - \lambda \rangle$ z večanjem vzorca konvergira k porazdelitvi $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, kjer je

$$\mathbf{\Sigma}(\alpha, \lambda) = (\alpha + 1) \begin{Vmatrix} \alpha^2\,(\alpha+1) & \alpha\,(\alpha+2)\,\lambda \\ \alpha\,(\alpha+2)\,\lambda & \frac{(\alpha+1)\,(\alpha+2)}{\alpha}\,\lambda^2 \end{Vmatrix}$$

Paretovo porazdelitev pogosto uporabljamo v pozavarovanju, kjer jo večkrat srečamo v alternativni obliki s porazdelitveno funkcijo $F(x) = 1 - \left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha}$, $x \geq M$. Z njo modeliramo predvsem odškodnine zaradi škodno presežkovnega pozavarovanja (glej npr. Rytgaard, 1990; Schmitter, Bütikofer, 1998; Schmutz, Doerr, 1998). Kot smo omenili že v razdelku P1.4, pri škodno presežkovnem pozavarovanju pozavarovalnica nima informacij o škodah, ki ne presegajo prioritete M. Zato v splošnem primeru iz vzorca znanih odškodnin težko določimo porazdelitveno funkcijo škod. Če pa iz vzorca odškodnin ugotovimo, da je za modeliranje odškodnin primerna Paretova porazdelitev, smo s tem rešili tudi problem porazdelitve škod. Razlog je v lepi lastnosti, da iz $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda)$ za slučajno spremenljivko $Y = (X - M|X > M)$ velja $Y \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \lambda + M)$. Ker gostota verjetnosti Paretove porazdelitve v primerjavi z nekaterimi drugimi porazdelitvami počasi pada k 0, je pozavarovalnica z uporabo Paretove porazdelitve običajno na varni strani. Paretova porazdelitev je primerna tudi za analitično uporabo. Za izračun pozavarovalne premije je najpomembnejša enačba

$$E[X; M] = \begin{cases} -\lambda \log \frac{\lambda}{\lambda + M} & \text{za } \alpha = 1 \\ \frac{\lambda}{\alpha - 1} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + M}\right)^{\alpha - 1}\right) & \text{za } \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{P3.18}$$

ki jo z malo truda lahko sami izpeljemo. Skupaj z enačbo (P1.21) nam omogoča izračun povprečne odškodnine, ki jo plača pozavarovalnica. Če pa nas zanimajo omejeni začetni momenti višjega reda, ključno enačbo najdemo v (Patrik, 1980, str. 85).

P4 Naključno generirane odškodnine

V tabelah 11 in 12 je 500 odškodnin, ki smo jih po metodi iz razdelka 3.8 naključno generirali za Paretovo porazdelitev s parametroma $\alpha = 1{,}6$ in $\lambda = 1.000$, pri tem pa smo za enoto vzeli 1.000 SIT. V tabeli 11 so po vrsticah navedene odškodnine $x_1, x_2, \ldots, x_{500}$, kot so bile generirane, v tabeli 12 pa so iste odškodnine urejene po velikosti.

Tabela 11: 500 naključno generiranih odškodnin v 1.000 SIT

247,749	1.191,974	21,208	2.656,938	612,026	866,552
2.996,526	204,570	4.348,467	224,986	1.195,338	511,063
605,355	135,030	218,773	781,531	2.065,059	175,609
993,445	601,027	611,979	108,718	53,575	611,462
1.447,458	1.659,470	1.023,075	353,503	195,126	1.277,689
94,236	584,124	307,262	51.975,626	354,494	1.879,875
823,140	1.702,785	4.460,194	20,626	22.035,211	3.932,265
4.985,104	46,621	44,107	3.055,264	2.042,306	60,794
88,446	837,345	18,914	2.275,224	6.273,266	1.318,317
528,591	1.556,163	330,144	22,361	522,854	1.207,277
8,938	64,214	276,904	3.203,751	232,040	1.681,412
625,848	471,114	80,652	345,219	1.517,030	1.339,335
69,001	30,014	541,303	1.054,483	144,319	297,227
26,564	12.235,259	412,346	898,176	3.068,259	602,733

Vir: Naključno generirane odškodnine za $X \sim \mathrm{Pareto}(1{,}6\,, 1000)$

Tabela 11: 500 naključno generiranih odškodnin v 1.000 SIT (nadaljevanje)

1.205,658	25,447	147,249	451,616	1.188,525	748,416
223,042	112,376	1.036,520	661,204	207,550	197,085
1.929,813	3.131,742	696,594	351,913	1.120,165	524,795
31,917	101,132	147,630	359,437	6.052,069	418,351
13,747	458,742	719,558	3.749,690	272,997	3.186,544
441,368	2.379,103	398,431	1.489,626	890,483	21,690
8.498,798	906,417	2.973,005	1.287,915	1.031,519	228,798
1.097,265	6.296,491	2.252,387	76,573	1.255,932	1.476,745
271,347	739,601	381,940	556,063	273,734	27.329,119
58,537	2.424,468	843,427	420,454	1.824,608	1.040,955
825,468	866,509	213,918	5.165,665	2.720,083	10.405,172
660,705	2.456,039	31,358	468,822	944,003	4.458,903
125,101	472,155	1.314,208	1.081,874	44,426	6.574,639
298,171	116,071	2.018,722	107,104	73,447	892,760
228,556	1.835,513	747,974	486,529	2.969,486	960,314
501,085	75,716	761,024	421,825	52,925	1.345,935
74,760	180,202	167,618	113,345	28,635	1.486,152
412,234	113,324	1.429,487	200,790	375,968	1.043,471
1.189,714	223,359	217,042	110,562	624,366	107,525
152,133	557,861	23,139	2.096,758	2.517,677	93,571
2.591,212	276,068	903,336	2.981,195	398,463	2.921,639
560,757	8,889	1.135,790	513,993	239,498	356,290
193,180	43,333	3.006,197	1.017,991	802,429	6.090,266
431,911	1.523,460	1.542,800	1.406,676	782,376	1.417,845
1.641,858	110,938	482,352	1.145,927	9,681	142,108
182,224	64,295	602,666	1.291,144	2.530,281	956,330
583,988	320,093	213,602	56,037	905,001	442,299
191,342	4.930,923	542,896	571,856	649,726	1.601,078
324,399	31,103	26,314	285,205	1.928,779	1.018,016
3.174,863	1.545,993	1.677,371	3.452,275	14,812	1.421,029
330,501	107,507	1.364,787	829,256	2.163,331	2.236,648
100,123	254,341	683,098	343,398	86,036	1.994,230
757,623	360,778	1.276,670	444,325	4.460,507	4.202,175
2.388,672	8,132	324,015	668,079	1.046,462	205,327
1.969,937	56,539	305,457	3.514,660	3.042,258	12,583
575,245	165,022	1.680,066	2.971,316	6.457,285	1.884,269
2.260,227	2.345,539	158,889	36,445	722,681	838,575
4.057,840	307,963	1.062,808	507,988	922,669	676,495
2.273,670	1.862,633	418,776	2.818,846	9,699	2,158
187,436	106,860	318,180	2.383,612	961,352	16,096
51.608,973	234,805	63,602	561,009	1.695,045	544,396
3.265,069	192,197	1.136,066	197,144	1.701,141	336,570

Vir: Naključno generirane odškodnine za $X \sim \mathrm{Pareto}(1{,}6\,,1000)$

Tabela 11: 500 naključno generiranih odškodnin v 1.000 SIT (nadaljevanje)

52,411	28,499	730,787	503,012	632,842	1.032,734
11,392	1.018,067	1.251,038	522,179	197,656	2.541,363
13,723	177,692	85,384	232,064	64,088	467,581
3.653,176	783,849	108,605	6.477,449	206,672	158,543
633,814	2.788,057	1.471,726	156,057	4.688,874	7.960,386
634,864	127,943	58,653	4.753,560	868,266	104,927
11.260,514	6,354	17,301	48,781	1.460,174	150,521
76,045	368,090	94,358	94,040	196,962	734,039
6.150,255	13,043	505,322	534,593	263,420	1.982,932
1.991,432	3.305,428	6.126,099	910,658	2.230,692	370,563
1.107,849	4,955	919,682	939,868	1.247,367	32,386
1.421,742	852,843	65,041	15.681,547	21,786	560,001
545,427	3.067,372	85,975	948,465	920,155	426,625
352,312	896,420	4.025,567	83,043	322,006	629,048
220,874	617,434	597,609	426,507	161,400	725,959
362,584	314,862	3.639,768	24,607	25,494	201,056
1.119,157	164,826	218,132	501,785	515,893	1.884,150
151,915	268,160	65,146	322,259	95,507	1.506,638
653,262	238,799	342,548	588,807	424,382	211,610
3,559	299,068	63,421	800,188	813,326	490,932
309,500	625,852	317,199	823,628	547,797	165,696
257,128	136,782	1.717,431	1.460,473	582,592	2.719,521
2.782,150	62,844	212,199	377,866	1.069,351	64,955
616,575	4.331,742	441,558	3.767,792	1.914,592	1.324,734
179,355	2.271,901	50.381,443	245,902	614,343	1.940,339
5.306,847	569,514	403,470	556,892	6.256,049	796,349
4.540,015	75,244	33,395	1.099,722	1.010,169	25,848
181,152	834,860				

Vir: Naključno generirane odškodnine za $X \sim \mathrm{Pareto}(1{,}6\,,1000)$

Tabela 12: 500 naključno generiranih odškodnin v 1.000 SIT - urejeno

2,158	3,559	4,955	6,354	8,132	8,889
8,938	9,681	9,699	11,392	12,583	13,043
13,723	13,747	14,812	16,096	17,301	18,914
20,626	21,208	21,690	21,786	22,361	23,139
24,607	25,447	25,494	25,848	26,314	26,564
28,499	28,635	30,014	31,103	31,358	31,917
32,386	33,395	36,445	43,333	44,107	44,426
46,621	48,781	52,411	52,925	53,575	56,037
56,539	58,537	58,653	60,794	62,844	63,421
63,602	64,088	64,214	64,295	64,955	65,041
65,146	69,001	73,447	74,760	75,244	75,716
76,045	76,573	80,652	83,043	85,384	85,975
86,036	88,446	93,571	94,040	94,236	94,358
95,507	100,123	101,132	104,927	106,860	107,104
107,507	107,525	108,605	108,718	110,562	110,938
112,376	113,324	113,345	116,071	125,101	127,943
135,030	136,782	142,108	144,319	147,249	147,630
150,521	151,915	152,133	156,057	158,543	158,889
161,400	164,826	165,022	165,696	167,618	175,609
177,692	179,355	180,202	181,152	182,224	187,436
191,342	192,197	193,180	195,126	196,962	197,085
197,144	197,656	200,790	201,056	204,570	205,327
206,672	207,550	211,610	212,199	213,602	213,918
217,042	218,132	218,773	220,874	223,042	223,359
224,986	228,556	228,798	232,040	232,064	234,805
238,799	239,498	245,902	247,749	254,341	257,128
263,420	268,160	271,347	272,997	273,734	276,068
276,904	285,205	297,227	298,171	299,068	305,457
307,262	307,963	309,500	314,862	317,199	318,180
320,093	322,006	322,259	324,015	324,399	330,144
330,501	336,570	342,548	343,398	345,219	351,913
352,312	353,503	354,494	356,290	359,437	360,778
362,584	368,090	370,563	375,968	377,866	381,940
398,431	398,463	403,470	412,234	412,346	418,351
418,776	420,454	421,825	424,382	426,507	426,625
431,911	441,368	441,558	442,299	444,325	451,616
458,742	467,581	468,822	471,114	472,155	482,352
486,529	490,932	501,085	501,785	503,012	505,322
507,988	511,063	513,993	515,893	522,179	522,854
524,795	528,591	534,593	541,303	542,896	544,396
545,427	547,797	556,063	556,892	557,861	560,001
560,757	561,009	569,514	571,856	575,245	582,592

Vir: Naključno generirane odškodnine za $X \sim \mathrm{Pareto}(1{,}6\,, 1000)$

Tabela 12: 500 naključno generiranih odškodnin v 1.000 SIT - urejeno (nadaljevanje)

583,988	584,124	588,807	597,609	601,027	602,666
602,733	605,355	611,462	611,979	612,026	614,343
616,575	617,434	624,366	625,848	625,852	629,048
632,842	633,814	634,864	649,726	653,262	660,705
661,204	668,079	676,495	683,098	696,594	719,558
722,681	725,959	730,787	734,039	739,601	747,974
748,416	757,623	761,024	781,531	782,376	783,849
796,349	800,188	802,429	813,326	823,140	823,628
825,468	829,256	834,860	837,345	838,575	843,427
852,843	866,509	866,552	868,266	890,483	892,760
896,420	898,176	903,336	905,001	906,417	910,658
919,682	920,155	922,669	939,868	944,003	948,465
956,330	960,314	961,352	993,445	1.010,169	1.017,991
1.018,016	1.018,067	1.023,075	1.031,519	1.032,734	1.036,520
1.040,955	1.043,471	1.046,462	1.054,483	1.062,808	1.069,351
1.081,874	1.097,265	1.099,722	1.107,849	1.119,157	1.120,165
1.135,790	1.136,066	1.145,927	1.188,525	1.189,714	1.191,974
1.195,338	1.205,658	1.207,277	1.247,367	1.251,038	1.255,932
1.276,670	1.277,689	1.287,915	1.291,144	1.314,208	1.318,317
1.324,734	1.339,335	1.345,935	1.364,787	1.406,676	1.417,845
1.421,029	1.421,742	1.429,487	1.447,458	1.460,174	1.460,473
1.471,726	1.476,745	1.486,152	1.489,626	1.506,638	1.517,030
1.523,460	1.542,800	1.545,993	1.556,163	1.601,078	1.641,858
1.659,470	1.677,371	1.680,066	1.681,412	1.695,045	1.701,141
1.702,785	1.717,431	1.824,608	1.835,513	1.862,633	1.879,875
1.884,150	1.884,269	1.914,592	1.928,779	1.929,813	1.940,339
1.969,937	1.982,932	1.991,432	1.994,230	2.018,722	2.042,306
2.065,059	2.096,758	2.163,331	2.230,692	2.236,648	2.252,387
2.260,227	2.271,901	2.273,670	2.275,224	2.345,539	2.379,103
2.383,612	2.388,672	2.424,468	2.456,039	2.517,677	2.530,281
2.541,363	2.591,212	2.656,938	2.719,521	2.720,083	2.782,150
2.788,057	2.818,846	2.921,639	2.969,486	2.971,316	2.973,005
2.981,195	2.996,526	3.006,197	3.042,258	3.055,264	3.067,372
3.068,259	3.131,742	3.174,863	3.186,544	3.203,751	3.265,069
3.305,428	3.452,275	3.514,660	3.639,768	3.653,176	3.749,690
3.767,792	3.932,265	4.025,567	4.057,840	4.202,175	4.331,742
4.348,467	4.458,903	4.460,194	4.460,507	4.540,015	4.688,874
4.753,560	4.930,923	4.985,104	5.165,665	5.306,847	6.052,069
6.090,266	6.126,099	6.150,255	6.256,049	6.273,266	6.296,491
6.457,285	6.477,449	6.574,639	7.960,386	8.498,798	10.405,172
11.260,514	12.235,259	15.681,547	22.035,211	27.329,119	50.381,443
51.608,973	51.975,626				

Vir: Naključno generirane odškodnine za $X \sim \mathrm{Pareto}(1{,}6\,,1000)$