UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

IZRAČUN »PRAVE« VIŠINE ŠKODNIH REZERVACIJ: REALNOST ALI ZGOLJ ŽELJA

Ljubljana, april 2003

PRIMOŽ MOČIVNIK

IZJAVA

Študent Primož Močivnik izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom prof. ddr. Ludvika Bogataja in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 3.4.2003

Podpis: Primož Močivnik

UVOD

Splošno znano dejstvo v svetu je, da zavarovalnice slovijo kot zelo konzervativne institucije, v katerih so kratkoročne spremembe pravzaprav nepredstavljive. Ravno obratno pa bi lahko rekli za slovenske zavarovalnice, saj so v zadnjih desetih letih doživele izredno veliko sprememb. Na večino sprememb je vplivalo predvsem pogosto spreminjanje zakonodaje na tem področju, ki postopoma zavarovalnicam predpisuje vedno strožja merila, ki jih morajo zavarovalnice izpolnjevati, da lahko poslujejo.

Pri nadzoru doseganja zastavljenih meril imamo pomembno vlogo tudi aktuarji, ki preverjamo ustreznost oblikovanih zavarovalno tehničnih rezervacij posamezne zavarovalnice, kjer je s pojmom ustreznost praviloma mišljeno, da so zavarovalno tehnične rezervacije oblikovane zadostno visoko. Na prvi pogled se morda zdi, da zahtevana naloga ni pretežka, saj lahko pač aktuar v primeru dvoma zahteva, da se rezervacije še dodatno oblikujejo. Žal pa lahko taka neupravičena zahteva povzroči nepotreben problem solventnosti in kapitalske ustreznosti zavarovalnice, po drugi strani pa celo spornost morebitnega skrivanja dobička zavarovalnice. V resnici torej zavarovalnice od aktuarja pričakujejo, da so višine posameznih zavarovalno tehničnih rezervacij, ki jih od zavarovalnice zahteva aktuar, ravno prav visoke.

Oblikovanje nekaterih zavarovalno tehničnih rezervacij v resnici ni preveč zahtevno, saj nam ustrezno višino bolj ali manj nakaže že sama definicija posamezne zavarovalno tehnične rezervacije (npr. prenosna premija, matematična rezervacija). Za take rezervacije je mogoče predpisati celo »recept«, po katerem jih aktuar lahko izračuna.

S tega vidika so za aktuarja verjetno najbolj problematične škodne rezervacije. Poleg tega, da je težko enostavno opredeliti ustreznost teh rezervacij, je velik problem le-teh tudi ta, da so praviloma te rezervacije po velikosti celo najpomembnejše od vseh rezervacij (vsaj za zavarovalnice, ki se ukvarjajo s skupino neživljenjskih zavarovanj, je tako). Napačna presoja aktuarja o teh rezervacijah ima zato lahko usodne posledice na poslovanje zavarovalnice. V delu bomo zato poskušali odgovoriti na vprašanje, ali je sploh mogoče zanesljivo oblikovati prave škodne rezervacije oz. ali je mogoče celo tudi za škodne rezervacije opredeliti dovolj dober recept, ki bi aktuarju zagotovil ustrezno oblikovane škodne rezervacije. Tak recept je v preteklosti v slovenski zakonodaji že obstajal, v delu pa bomo pokazali, da je bil povsem neustrezen.

Zadano nalogo bomo poskušali v delu izpeljati v več korakih. Najprej bomo opredelili, kaj škodne rezervacije sploh so, nato pa bomo teoretično in praktično kritično preučili celo vrsto metod za oblikovanje le-teh. Praktično preučevanje bomo izvajali na dveh, po lastnostih zelo različnih portfeljih. Preučevanje bomo razdelili v tri sklope, od katerih bo en sklop namenjen po receptu predpisani metodi iz (nekdanje, vendar še vedno dovoljene) slovenske zakonodaje, en sklop determinističnim metodam in en sklop stohastičnim metodam. Ob koncu pa bomo – kot odgovor na naše zastavljeno vprašanje iz naslova dela – opredelili, katera izmed naštetih metod da za posamezen portfelj najboljši rezultat in kako zanesljiv ta rezultat je. Opredelili pa bomo tudi, ali bo izbrana optimalna metoda (ali metode) res tako neodvisna od portfelja, da bi jo bilo smiselno predpisati kot recept za oblikovanje vseh škodnih rezervacij v vseh slovenskih zavarovalnicah.

1. PRIPRAVA OSNOVNIH GRADNIKOV

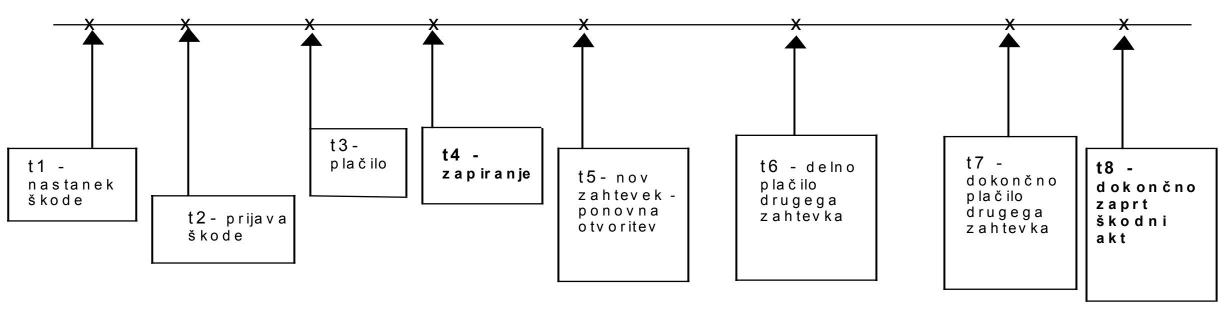
Preden se posvetimo podrobnejši analizi posameznih metod za izračun škodnih rezervacij, moramo seveda najprej opredeliti, kaj sploh so škodne rezervacije, zakaj se oblikujejo ter kakšen vpliv imajo škodne rezervacije na računovodske izkaze v zavarovalnici. Na vsa ta vprašanja bomo na kratko poskušali odgovoriti v tem poglavju. Ob koncu poglavja bomo podrobneje opisali tudi oba tipa portfeljev, na katerih bomo v nadaljevanju dela analizirali učinke, prednosti in slabosti posameznih obravnavanih metod.

1.1. DEFINICIJA POJMA ŠKODNE REZERVACIJE

Poslanstvo vsake zavarovalnice je, da svojim zavarovancem – seveda ob plačilu ustrezne zavarovalne premije - nudi varnost v primeru njihove nesreče. To poslanstvo zavarovalnica izkaže s tem, da zavarovancu povrne škodo, ki jo je ob nesreči utrpel. Zavarovalnica torej s sklenitvijo zavarovalne pogodbe nase prevzame obveznost povračila morebitne zavarovančeve škode.

Računovodski standardi so po državah zelo različni, prav tako pravni sistemi, vendar pa kljub temu lahko brez hudih omejitev privzamemo, da povsod velja načelo, da obveznost zavarovalnice do povračila škode nastopi s trenutkom nastanka škode. Praviloma pa zavarovalnica v trenutku nastanka niti ne ve, da je škoda sploh nastala, kaj šele, v kolikšni višini je nastala. Pri določenih tipih zavarovanj (npr. odgovornostna zavarovanja) je lahko pri eni škodi več zahtevkov za povračilo škode (npr. več oškodovancev, materialna in nematerialna škoda, itd.). Dinamiko dogajanja od nastanka škode do dokončnega poplačila vseh obveznosti zavarovalnice nam v vsej splošnosti prikaže naslednji časovni horizont:

Slika 1 – dinamika škodnega dogajanja na časovnem horizontu



Dolžina časovnega horizonta je odvisna predvsem od tipa zavarovalne pogodbe. Kjer je horizont izrazito dolg, pravimo, da gre za zavarovanja z dolgim repom reševanja, če pa gre za kratek horizont, pravimo, da gre za kratek rep. Kot bomo videli v nadaljevanju, bomo pri oblikovanju portfelja oblikovali en portfelj z dolgim in en portfelj s kratkim repom reševanja. Dolžina repa pa v precejšnji meri vpliva tudi na izbiro metode za oblikovanje škodnih rezervacij, saj so ene izrazito namenjene kratkim, druge pa dolgim repom.

Dogajanje na časovnem horizontu ponazorimo še s primerom. Za primer bomo izbrali zavarovanje avtomobilske odgovornosti, ki je v Sloveniji obvezno in je zato ta oblika zavarovanja tudi najbolj znana.

Primer 1:
Zavarovanec zavarovalnice ABC je dne t1 povzročil prometno nesrečo, v kateri sta bila oškodovanca nasproti vozeči voznik (materialna in nematerialna škoda) in zavarovančeva žena (telesne poškodbe). Prvi oškodovanec je zavarovalnici prijavil škodo na dan t2, ko je zavarovalnica tudi izvedela, da je do nesreče sploh prišlo. Vendar pa oškodovanec zavarovalnici ni povedal, da je oškodovanka tudi povzročiteljeva žena, zato je zavarovalnica domnevala, da je on edini oškodovanec. Zavarovalnica je po pridobitvi vse dokumentacije na dan t3 oškodovancu izplačala vso odškodnino (npr. 100 enot) in dne t4 primer zaključila.

Dne t5 pa je povzročiteljeva žena že toliko okrevala, da je tudi sama lahko vložila odškodninski zahtevek. Zavarovalnica je morala ponovno odpreti že zaključen primer. Ker se z oškodovanko ni uspela dogovoriti za ustrezno višino odškodnine, je oškodovanka vložila tožbo. Zavarovalnica je dne t6 oškodovanki plačala nesporni del škode (npr. 200 enot), za preostali del pa čakala na zaključek tožbe. Sodišče je dne t7 razsodilo, da mora zavarovalnica oškodovanki izplačati še dodatno odškodnino (npr. v višini še 150 enot), kar je zavarovalnica tudi storila.

Ker se do dne t8 ni pojavil noben nov zahtevek iz naslova te škode, po tem datumu pa bi šlo že za zastaranje, je zavarovalnica tega dne škodni spis dokončno zaključila.
(konec primera)

Glede na to, da obveznost zavarovalnice nastane že v času t1, mora zavarovalnica od tega trenutka dalje oblikovati ustrezne rezervacije za poplačilo vseh obveznosti, ki izhajajo iz naslova te škode. Te rezervacije imenujemo **škodne rezervacije**. V odvisnosti od tega, ali gre za rezervacijo že prijavljenih (torej znanih) škod ali gre za rezervacijo za še neprijavljene škode, jih ločimo na **rezervacije za nastale prijavljene škode** in na **rezervacijo za nastale neprijavljene škode**.

1.1.1. Rezervacija za nastale prijavljene škode

Kot že samo ime pove, oblikujemo ta tip škodnih rezervacij za tiste škodne dogodke, ki so bili zavarovalnici že prijavljeni. Zavarovalnica torej že ve, da je nastala obveznost plačila škode (ni pa rečeno, da tudi ve, v kakšni višini). Če pogledamo na naš časovni horizont, je vsakokratno oblikovanje rezervacije po dnevu t2 za škodo, ki je nastala na dan t1, oblikovanje rezervacije za nastale prijavljene škode.

Na prvi pogled se zdi, da je oblikovanje teh rezervacij bolj preprosto kot oblikovanje rezervacij za nastale neprijavljene škode. Zavarovalnica je namreč o škodnem dogodku obveščena, zato bi lahko tudi upravičeno sklepali, da bo znala dovolj dobro opredeliti svojo morebitno bodočo obveznost. Pri enostavnejših oblikah zavarovanj s krajšimi repi ta domneva kar drži, pri zavarovanjih, kjer so repi daljši, škode pa precej bolj kompleksne, pa je ta domneva lahko povsem napačna.

Napačnost take domneve nam lepo prikaže dogajanje na časovnem horizontu oz. naš Primer 1. Pri tem opozorimo, da zaradi enostavnosti zaenkrat ne upoštevamo inflacije.

Kot lahko vidimo, bi morala zavarovalnica v času t2 oblikovati rezervacijo v višini, ki je potrebna za izplačilo odškodnin v času t3, t5 in t7 (v našem Primeru1 je to 450 enot). Ker pa zavarovalnica ne ve za drugega oškodovanca, zavarovalnica v vmesnem času t2-t3 oblikuje rezervacijo zgolj v višini odškodnine za prvega oškodovanca (torej 100 enot). Po izplačilu odškodnine temu oškodovancu pa od trenutka t3 do trenutka t5 rezervacije sploh nima oblikovane, čeprav bi jo morala imeti oblikovano v višini odškodnine za drugo oškodovanko (350 enot).

Po dodatnem zahtevku druge oškodovanke zavarovalnica pričakuje izplačilo zgolj nespornega dela, zato v času t5 oblikuje zgolj rezervacijo v višini 200 enot (morala bi 350 enot). Šele po vložitvi tožbe oškodovanke bi zavarovalnica iz previdnosti verjetno oblikovala še dodatno rezervacijo (odvisno od zavarovalničine ocene o uspehu na sodišču). Po času t7 bi bila rezervacija zopet 0. Šele po času t8 je zavarovalnica lahko prepričana, da rezervacija za to škodo ni več potrebna.

Oblikovanje škodne rezervacije za nastale prijavljene škode je torej težavno zaradi dveh pomembnih dejstev:

1. zavarovalnica ob prijavi zve zgolj za nastanek obveznosti, večinoma pa ne zve, kolikšna je ta obveznost po višini;
2. ob prijavi ni rečeno, da izve za vse nastale obveznosti.

Predvsem zaradi druge točke (delno pa tudi zaradi prve) se velikokrat pojavljajo razmišljanja o oblikovanju še tretjega tipa škodne rezervacije tj. **škodna rezervacija za nastale vendar ne dovolj prijavljene škode** (IBNER – incurred but not enough reported). V Sloveniji ta del rezervacij ni posebej predviden, morajo pa zato metode, s katerimi določamo škodno rezervacijo za nastale prijavljene škode, upoštevati tudi možnost, da škoda ni prijavljena v celoti.

1.1.2. Rezervacija za nastale neprijavljene škode

To rezervacijo bomo v nadaljevanju označevali z angleško kratico IBNR (incurred but not reported).

Zavarovalnica mora to vrsto rezervacije oblikovati od trenutka nastanka škode (na časovnem horizontu t1) do prijave te škode zavarovalnici (trenutek t2). Od tega trenutka naprej se IBNR rezervacija sprosti, nastane pa obveznost oblikovanja že prej omenjene škodne rezervacije za nastale prijavljene škode (rezervacija se torej v bistvu prelije iz ene oblike v drugo).

Problematičnost oblikovanja IBNR rezervacije je predvsem v tem, da zavarovalnica ne ve, kdaj je nastopil trenutek obveznosti oblikovanja (ne ve, kdaj nastopi škodni dogodek), seveda pa tudi ne, v kakšni višini. Oblikovanje IBNR rezervacije zato temelji na ocenah in preteklih izkušnjah zavarovalnice o tem, kakšna je škodna pogostnost v posamezni zavarovalni vrsti, koliko od pričakovanih nastalih škod je že prijavljenih, kakšne so ponavadi višine odškodnin v posamezni zavarovalni vrsti, ipd.

1.2. PRIKAZ VPLIVA ŠKODNE REZERVACIJE NA RAČUNOVODSKE IZKAZE

Škodne rezervacije v vsaki zavarovalnici predstavljajo eno večjih postavk med obveznostmi, med neživljenjskimi zavarovalnicami pa prav gotovo največjo postavko (pri zavarovalnicah z močnim življenjskim portfeljem je praviloma večja obveznost matematična rezervacija). V slovenskih zavarovalnicah tako odstotek škodnih rezervacij glede na skupno fakturirano premijo v posameznem poslovnem letu dosega vrednosti od 50% do 90%, v tujini pa ta odstotek presega tudi 200%.

Pravilen izračun višine škodnih rezervacij v posamezni zavarovalnici je zato bistvenega pomena za delovanje zavarovalnice in seveda za ugotavljanje samega poslovnega izida. Zato lahko škodne rezervacije postanejo uspešno orodje manipulacij in špekulacij vodstev zavarovalnic za izkazovanje poslovnega izida. Ne morejo seveda manipulirati s tem, koliko bo končna skupna obveznost zavarovalnice za nastalo škodo, lahko pa uspešno manipulirajo s tem, kako bo zavarovalnica nastalo obveznost obremenila skozi posamezna poslovna leta. To nam kaže naslednji primer.

Primer 2:
Umestimo naš časovni horizont v konkretno časovno obdobje.

Pred točko t1 leži datum 1.1.1998. Nekje med točkama t2 in t3 je datum 31.12.1998, med točkama t4 in t5 datum 31.12.1999, med t6 in t7 datum 31.12.2000 in med točkama t7 in t8 datum 31.12.2001. V tabelah 1.1 do 1.4 si oglejmo možne poslovne izide poslovnih let 1998, 1999, 2000 in 2001 ob predpostavki (zaradi enostavnosti), da zavarovalnica v teh letih ni sklenila nobenega zavarovanja in da je škoda iz Primera1 edina škoda. Inflacije zopet ne upoštevamo.

Tabela 1.1 - Pravilno oblikovanje

	1998	1999	2000	2001
1. Rezervacije na začetku leta	0	450	350	150
2. Rezervacije na koncu leta	450	350	150	0
3. Rešene škode v letu	0	100	200	150
4. Čiste škode v breme poslovnega leta (= 3+2-1)	450	0	0	0
5. Rezultat poslovnega leta	**-450**	**0**	**0**	**0**

Tabela 1.2 - Verjetno oblikovanje iz Primera 1

	1998	1999	2000	2001
1. Rezervacije na začetku leta	0	100	0	0
2. Rezervacije na koncu leta	100	0	0	0
3. Rešene škode v letu	0	100	200	150
4. Čiste škode v breme poslovnega leta (= 3+2-1)	100	0	200	150
5. Rezultat poslovnega leta	**-100**	**0**	**-200**	**-150**

Tabela 1.3 - Manipulacija 1

	1998	1999	2000	2001
1. Rezervacije na začetku leta	0	50	0	200
2. Rezervacije na koncu leta	50	0	200	0
3. Rešene škode v letu	0	100	200	150
4. Čiste škode v breme poslovnega leta (= 3+2-1)	50	50	400	-50
5. Rezultat poslovnega leta	**-50**	**-50**	**-400**	**50**

Tabela 1.4 - Manipulacija 2

	1998	1999	2000	2001
1. Rezervacije na začetku leta	0	600	400	180
2. Rezervacije na koncu leta	600	400	180	0
3. Rešene škode v letu	0	100	200	150
4. Čiste škode v breme poslovnega leta (= 3+2-1)	600	-100	-20	-30
5. Rezultat poslovnega leta	**-600**	**100**	**20**	**30**

Vidimo torej, da zavarovalnica lahko z uspešnim prelivanjem rezervacije oblikuje boljši poslovni rezultat leta v breme poslovnih rezultatov prihodnjih let (Tabela 1.3). Na ta način torej lahko umetno kreira dobiček (ali manjšo izgubo od potrebne) poslovnega leta (v upanju, da bo naslednja leta poslovanje ugodnejše in se bo izguba tekočega leta pokrila), večinoma (vsaj v velikih svetovnih zavarovalnicah) pa gre za obraten primer, da namreč zavarovalnice na ta način prikrivajo previsok dobiček in umetno zvišujejo rezervacije (Tabela 1.4). Razlog seveda tiči v davčnih obremenitvah na ustvarjen dobiček. (konec primera)

Z računovodskega stališča je torej zelo pomembno, da so metode za oblikovanje škodne rezervacije take, ki onemogočajo preveliko manipulacijo z rezultati in da seveda zavarovalnica izbrano metodo konsistentno uporablja. Ko namreč zavarovalnica najde kolikor toliko ustrezno metodo, ki jo potem konsistentno uporablja in preverja vsa naslednja leta, poslovni izid leta ni več nujno tako zelo odvisen od oblikovane škodne rezervacije. Če namreč izbrana metoda povzroča, da so oblikovane rezervacije prenizke, so oblikovane prenizko vsako leto in je zaradi tega poslovni izid boljši, po drugi strani pa je zaradi izplačanih višjih škod, kot so bile v preteklih letih rezervirane, poslovni izid slabši. Seveda velja obratno, če so rezervacije ves čas previsoke. Zaradi previsoko oblikovanih rezervacij bo poslovni izid slabši, zaradi izplačanih nižjih škod, kot so bile rezervirane, pa bo poslovni izid boljši za razliko med rezerviranim zneskom in dejansko izplačano škodo. Ob relativno stabilnem portfelju in stabilnem škodnem dogajanju se ti efekti med seboj delno izničujejo, zato v takih primerih niti ni nujno, da je metoda za oblikovanje škodne rezervacije optimalna. No, trditev seveda ne drži ob nestabilnem (rastočem ali padajočem) portfelju, ali ob kakršnihkoli motnjah v škodnem dogajanju. V takih primerih je namreč izbira prave metode bistvenega pomena. Najbolj pa je izbira prave metode pomembna pri oceni bodočih obveznosti zavarovalnice ob vrednotenju zavarovalnice v nekem trenutku. Le-ta so v Sloveniji trenutno zelo aktualna (lastninjenje, dokapitalizacije, prodaje in združevanja zavarovalnic, itd.).

Konsistentnost uporabe izbrane metode zahtevajo tudi Slovenski računovodski standardi (v nadaljevanju SRS), ki sicer dopuščajo spremembo metodologije za izračun škodnih rezervacij, vendar je ob spremembi potrebno utemeljiti razloge za tako spremembo in oceniti učinke spremembe.

1.3. ZASNOVA MODELNIH PORTFELJEV ZAVAROVANJ

Na začetku opozorimo, da bomo imeli posamezen portfelj vedno razbit na različne **kohorte** zavarovanj, kjer s pojmom kohorta včasih označimo skupino vseh polic, ki imajo enak začetek zavarovanja (za naše razmere zadošča isto koledarsko leto sklenitve zavarovanja) in enako dobo zavarovanja (v naših primerih povsod eno leto). V zavarovalniški terminologiji govorimo o merodajnem letu škode, kar pomeni leto, v katerem je bila polica, na podlagi katere je škoda nastala, sklenjena. V našem primeru to pomeni, v katero kohorto sodi. Kadar pa nas ne zanima kohorta polic, ampak nas zanimajo zgolj škode, bomo portfelj oz. škode iz tega portfelja razdelili v kohorte tako, da bomo združili škode, ki imajo isto ali leto nastanka ali leto prijave ali leto rešitve škode. Tip razdelitve je odvisen od tega, na kakšen način je za posamezno metodo razdelitev najustreznejša.

Kot bomo videli v nadaljevanju, je ustreznost posamezne metode zelo odvisna od značilnosti portfelja. Pri tem imajo predvsem velik vpliv naslednji dejavniki:

- dolžina repa reševanja;
- velikost portfelja (tako število zavarovanj, predvsem pa število škod);
- verjetnost nastanka škodnega dogodka (povezana s prejšnjo točko);
- variabilnost višine predvidene odškodnine.

Ustreznost metod bomo zato preverjali na dveh potrfeljih, ki se v naštetih lastnostih precej razlikujeta. Portfelja sta zasnovana na seštevku realnih podatkov dveh slovenskih zavarovalnic. Seveda je v tako dobljena portfelja vgrajeno tudi nekaj namernih sprememb in sicer iz dveh razlogov:

- preprečitev razkritja poslovnih skrivnosti zavarovalnic (naloga bi namreč lahko ob realnih podatkih dokazala morebitno napačno oblikovanje škodnih rezervacij);
- vgrajene spremembe odpravljajo smeti v podatkih, zaradi katerih bi bili rezultati zelo vprašljivi, poleg tega pa so nekatere spremembe narejene zato, da zaradi njih lahko opozorimo, v kakšnih primerih bi opazovana metoda pokleknila.

Pri izbiri portfeljev smo upoštevali še načelo, da izberemo taka tipa zavarovanj, ki sta za povprečnega bralca najbolj poznana.

Kot smo že omenili, se oblika številčne predstavitve škod portfelja glede na metode razlikuje, zato bomo uvodoma predstavili portfelja opisno, številčno pa zgolj nekaj najpomembnejših podatkov. Nekatere dodatne podatke, ki jih posamezne metode še potrebujejo, bomo prikazali ob testiranju takih metod.

1.3.1. Ponazoritev portfelja A

Portfelj A je portfelj zavarovanj obveznega avtomobilskega zavarovanja (skrajšano AO zavarovanje). Osnovne značilnosti teh zavarovanj so:

a) Gre za obvezno zavarovanje, zato je to številčno najobsežnejši tip zavarovanja. Rečemo torej lahko, da je število zavarovanj in število škod veliko.
b) Variabilnost nastalih škod je zelo velika. Najmanjša škoda je npr. zvita pločevina enega avtomobila (nekaj 10.000 SIT), najvišja odškodnina pa je lahko velikanska (hude telesne poškodbe več udeležencev - nekaj 100 mio SIT). V Sloveniji so sicer zgornje obveznosti zavarovalnic po enem škodnem dogodku zaenkrat omejene z zakonom in sicer ločeno za materialno škodo in nematerialno škodo, v precej državah pa take zgornje omejitve ni. Ker lahko Slovenec povzroči škodo tudi v taki državi, zgornja meja obveznosti pa je odvisna od države nastanka škodnega dogodka, tudi za slovenske zavarovalnice torej pri tem tipu zavarovanj velja, da zgornje omejitve obveznosti ni.
c) Reševanje škode je načeloma zamudno. Čas reševanja je odvisen od teže (in posledično višine) škode. Višja kot je predvidena odškodnina, daljši je čas do dokončnega poplačila. Obstaja tudi možnost plačevanja odškodnine celo življenje (rente). Velikokrat je potrebno reševanje sporov na sodiščih. Vse našteto torej kaže na to, da gre za tipično zavarovalno vrsto z dolgim repom.

V naslednjih tabelah prikazujemo nekaj osnovnih številskih podatkov o portfelju. Opozorimo na pomembno vsebinsko razliko med oznakama AY in Leto, ki ju uporabljamo v tabelah. Kjer uporabljamo AY (accident year – leto škode), so vsi podatki vezani na leto nastanka škode iz kolone AY, kjer pa uporabljamo oznako Leto, se podatki nanašajo na poslovno leto iz te kolone.

Tabela 1. 5 - osnovni podatki AO portfelja (fakturirana premija in rešene škode v SIT)

Leto	Št. zavarovanj	Fakturirana premija	Št. škod	Rešene škode
1995	227.473	3.388.157.000	13.109	2.343.017.500
1996	215.888	3.738.449.500	13.098	3.136.903.000
1997	201.466	4.087.734.000	13.540	3.499.365.000
1998	203.903	4.662.195.500	13.283	3.828.166.500
1999	207.073	5.088.241.500	13.564	4.256.858.500
2000	197.222	5.879.245.000	13.889	4.658.634.500
2001	197.550	7.280.415.500	12.068	5.017.807.500

Tabela 1.6 – kumulativni razvoj zneska rešenih AO škod po letu nastanka in letu razvoja (v SIT)

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	1.203.621.595	2.193.984.559	2.583.365.387	2.822.347.041	3.034.091.468	3.178.100.509	3.342.253.196
1996	1.312.426.838	2.304.706.573	2.798.649.091	3.065.730.656	3.202.036.112	3.307.976.040	
1997	1.619.429.770	2.676.225.750	3.093.134.227	3.333.477.814	3.522.883.870		
1998	1.591.691.404	2.603.008.701	3.076.050.545	3.324.564.769			
1999	2.032.341.674	3.405.789.349	3.826.256.120				
2000	2.038.767.973	3.397.466.536					
2001	2.232.406.498						

Tabela 1.7 – kumulativni razvoj števila rešenih AO škod po letu nastanka in letu razvoja

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	8.024	11.220	11.999	13.337	13.456	13.508	13.539
1996	7.870	11.019	11.688	12.949	13.066	13.095	
1997	8.126	11.241	11.761	13.029	13.122		
1998	8.008	10.781	11.244	12.371			
1999	8.790	11.741	12.154				
2000	8.834	11.597					
2001	7.610						

Tabela 1.8 - kumulativni razvoj števila prijavljenih AO škod po letu nastanka in letu razvoja

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	11.672	13.097	13.333	13.469	13.545	13.558	13.563
1996	11.490	12.782	13.023	13.176	13.194	13.203	
1997	11.696	12.875	13.092	13.215	13.228		
1998	11.887	12.895	13.077	13.177			
1999	12.181	13.239	13.403				
2000	12.492	13.426					
2001	10.789						

1.3.2. Ponazoritev portfelja B

Portfelj B je sestavljen iz polic zavarovanja avtomobilskega kaska, ki je tudi zelo znana oblika zavarovanj. Značilnosti te oblike zavarovanj so:

a) Zavarovanje je prostovoljno, zato je tovrstnih zavarovanj precej manj kot zavarovanj avtomobilske odgovornosti. Je pa škodna pogostnost praktično identična kot pri prejšnjem tipu, zato sta portfelja, kar se verjetnosti nastanka škode tiče, zelo primerljiva.
b) Variabilnost višine škode je bistveno manjša od portfelja A. Najnižja odškodnina je enaka kot pri AO zavarovanjih, bistveno nižja pa je najvišja možna odškodnina, saj je le-ta lahko največ v višini novonabavne vrednosti vozila, ki je bilo poškodovano (oz. ukradeno). Okvirno torej lahko ocenimo, da odškodnina, razen izjemoma (tovornjaki ali luksuzni avtomobili), ne more biti višja od 10 mio SIT.
c) Reševanje škode poteka razmeroma hitro. Višina škode je znana kmalu po ogledu nastale škode. Visoka škoda je ponavadi rešena enako hitro ali celo hitreje kot majhna (visoka škoda pomeni, da je avto tako poškodovan, da se ga ne da več popraviti, ali je ukraden, majhna škoda pa je dokončno znana šele po popravilu, ki pa se lahko zavleče, sploh če je avto kljub škodi v normalno voznem stanju). Sodišča načeloma niso potrebna (razen izjemoma, ko ne gre za spore o višini ampak o upravičenosti do odškodnine). Zato je kasko zavarovanje izrazit predstavnik zavarovalnih vrst s kratkim repom.

Podobno, kot smo to storili pri portfelju avtomobilske odgovornosti, tudi tu prikazujemo nekaj osnovnih številskih podatkov o opisanem portfelju.

Tabela 1.9 - osnovni podatki o kasko portfelju (fakturirana premija in rešene škode v SIT)

Leto	Št. zavarovanj	Fakturirana premija	Št. škod	Rešene škode
1995	86.205	2.472.168.000	12.802	1.672.807.500
1996	94.700	3.133.285.500	15.419	2.047.229.500
1997	101.238	3.481.154.500	16.603	2.309.904.000
1998	93.721	3.862.646.500	16.134	2.367.694.000
1999	101.286	3.697.765.000	17.710	2.607.541.000
2000	103.208	3.608.015.500	17.209	2.732.508.500
2001	105.315	3.920.080.500	17.249	3.210.522.500

Tabela 1.10 - kumulativni razvoj zneska rešenih kasko škod po letu nastanka in letu razvoja (v SIT)

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	1.355.945.291	1.632.326.020	1.641.702.555	1.645.207.040	1.659.263.325	1.660.822.790	1.667.182.703
1996	1.702.679.402	2.050.733.309	2.072.941.700	2.082.432.555	2.078.730.668	2.078.722.497	
1997	1.912.585.199	2.298.373.187	2.301.577.239	2.309.357.347	2.331.819.741		
1998	1.920.490.600	2.326.893.502	2.344.941.381	2.360.465.594			
1999	2.168.837.430	2.635.276.416	2.658.553.195				
2000	2.230.573.213	2.618.111.571					
2001	2.725.376.786						

Tabela 1.11- kumulativni razvoj števila rešenih kasko škod po letu nastanka in letu razvoja

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	9.741	12.019	12.278	13.032	13.059	13.063	13.070
1996	11.887	14.427	14.647	15.138	15.166	15.166	
1997	12.598	15.250	15.440	16.228	16.259		
1998	12.302	14.853	15.080	15.921			
1999	14.447	17.349	17.529				
2000	13.257	15.800					
2001	13.647						

Tabela 1.12 - kumulativni razvoj števila prijavljenih kasko škod po letu nastanka in letu razvoja

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	11.762	12.994	13.049	13.058	13.067	13.068	13.070
1996	13.958	15.079	15.132	15.161	15.165	15.166	
1997	15.336	16.185	16.250	16.265	16.266		
1998	15.215	15.889	15.914	15.922			
1999	17.208	18.005	18.023				
2000	16.152	16.828					
2001	17.225						

Opozorimo na očitno razliko v dolžini repa reševanja med obema portfeljema, ki jo zlahka opazimo s primerjavo Tabel 1.6 in 1.10 in s primerjavo razlike med kumulativnim številom prijavljenih in rešenih škod. Prav tako smo že na tem mestu dolžni opozoriti, da za leta pred letom 1995 nimamo ustreznih podatkov, očitno pa je tudi, da vsaj za AO zavarovanja niti leto 1995 še ni do konca razvito (torej lahko v naslednjih letih še pričakujemo rešene zneske iz škod, ki so nastale v letu 1995). Kot bomo videli v nadaljevanju, pomanjkanje teh podatkov zelo pomembno vpliva na izbiro ustrezne metode.

Pojasnimo še, od kot razlika med številom rešenih škod iz tabel 1.5 in 1.9 v primerjavi s tabelama 1.7 oz. 1.11. V tabelah 1.5 in 1.9 so podatki o skupnem številu rešenih škod v posameznem letu, ne glede na čas nastanka te škode. V tabelah 1.7 in 1.11 pa so podatki o rešenih škodah, ki so nastali v posameznem letu. To je razlog za različne oznake prve kolone.

2. OCENA USTREZNOSTI V SLOVENIJI PREDPISANIH METOD

Preden se lotimo pregleda in analize metod, opozorimo, da bomo pri vseh navedenih metodah govorili o metodi za oblikovanje kosmate škodne rezervacije. Tej škodni rezervaciji moramo ponavadi prišteti še predvidene cenilne stroške, ki bodo potrebni za dokončno rešitev zahtevka, odštejemo lahko pričakovane regrese iz naslova nastalih škod, poleg tega pa še rezervacije razdelimo na lastni delež in delež pozavarovatelja oz. sozavarovatelja. Šele tako dobljena rezervacija – čista rezervacija - je predmet izkazov uspeha oz. stanja zavarovalnice. Glede na to, da je postopek pretvarjanja kosmate v čisto rezervacijo neodvisen od metod za oblikovanje rezervacije, ni predmet naše obravnave.

Oblikovanje škodnih rezervacij je v Sloveniji do uvedbe novega Zakona o zavarovalništvu (v nadaljevanju NZZav) urejal Zavarovalni statistični standard 2: Škodne rezervacije (v nadaljevanju ZSS2), ki ga je sprejelo Slovensko zavarovalno združenje dne 7.12.1995, Urad za zavarovalni nadzor pa je nanj dal soglasje dne 17.1.1996. Prvič so zavarovalnice oblikovale škodne rezervacije po tem standardu na dan 31.12.1995.

Z uvedbo NZZav je bila dolžnost Agencije za zavarovalni nadzor tudi, da pripravi ustrezen podzakonski akt, ki ureja področje oblikovanja ustreznih škodnih rezervacij. Podzakonski akt Sklep o oblikovanju zavarovalno – tehničnih rezervacij (v nadaljevanju SZTR) je izšel v Uradnem listu RS 3/01 dne 11.1.2001 (spremembe in dopolnitve pa UL RS 69/01 z dne 24.8.2001), zavarovalnice pa so ga dolžne spoštovati od 3.3.2001.

SZTR za razliko od ZSS2 ne predpisuje nobene konkretne metode, zahteva pa:

a) izbrana metoda za oblikovanje rezervacije za nastale prijavljene škode mora dati rezultate v vsaj takšni višini, kot bi jo dala metoda individualne ocene škod;
b) izbrana metoda za oblikovanje IBNR rezervacije mora temeljiti na podatkih o nastalih neprijavljenih škodah v preteklih letih.

SZTR še vedno dovoljuje smiselno uporabo ZSS2 (torej posredno priznava ustreznost metod, ki so v ZSS2 navedene), odpravlja pa veliko pomankljivost ZSS2, ki je prepovedovala uporabe drugih metod od predpisanih, čeprav je aktuar ugotovil neustreznost metode na določenem portfelju.

Z izrazom predpisane metode v Sloveniji zato mislimo na metode, ki so bile predpisane oz. dopustne z ZSS2.

2.1. OCENA METOD ZA DOLOČITEV NASTALIH PRIJAVLJENIH ŠKOD

ZSS2 obravnava rezervacije za nastale prijavljene škode v točki 1.3. V njej dopušča za oblikovanje tovrstnih rezervacij dva možna pristopa, in sicer:

a) popis vseh škodnih primerov, kjer s posamičnim ugotavljanjem za vsak nerešen zahtevek zavarovalnica preveri morebitno upravičenost odškodninskega zahtevka in določi verjetno višino zahtevka;
b) pavšalna ocena verjetne višine vseh odškodninskih zahtevkov skupaj (dopustna, če višina odškodninskih zahtevkov ni ekstremno različna).

2.1.1. Metoda popisa

ZSS2 opredeljuje metodo popisa kot metodo, pri kateri »zavarovalnica ovrednoti škodno rezervacijo za posamezne škodne primere po cenah ob koncu leta, za katerega ugotavlja škodno rezervacijo« (ZSS2, točka 1.13.). Pri tem mora upoštevati ustrezne pogoje, zbrano dokumentacijo, sodno prakso, izkušnje cenilcev, itd.. Upoštevati mora tudi pričakovano povečanje ali zmanjšanje ocenjenega zneska zaradi dejavnikov, ki lahko pomembno vplivajo na višino zneska odškodnine v času od rezerviranja do izplačila (npr. sprememba sodne prakse). Ta dodaten dejavnik je še posebej pomemben (pa tudi težko opredeljiv) pri zavarovalnih vrstah z dolgim repom.

Tako dobljeno višino odškodninskega zahtevka sme zavarovalnica zmanjšati za previdno določeno višino pričakovane regresne terjatve, če seveda obstajajo pogoji za uveljavljanje regresne terjatve.

Zanimiva je tudi diskusija o možnosti diskontiranja ocenjenih obveznosti. V svetu namreč obstajata dva pristopa pri oblikovanju ocenjenih obveznosti. Po prvem (ameriško-avstralskem) konceptu je treba pri oblikovanju ocene bodočih obveznosti upoštevati dejstvo, da zavarovalnica te obveznosti do izplačila nalaga, s tem pa pridobi dodatne obresti od teh naložb. Zato dejansko ob oblikovanju potrebuje le diskontirano vrednost bodočih obveznosti. Drugi (kontinentalni) pristop je bolj konservativen in ne dovoljuje diskontiranja bodočih obveznosti.

ZSS2 diskontiranje dovoljuje (posredno že z upoštevanjem trenutnih cen, s čimer diskontira bodočo obveznost za predvideno inflacijo) v členu 1.14., kjer opredeljuje, da zavarovalnica sme diskontirati bodoče obveznosti največ po stopnji, ki jo dejansko realno (brez upoštevanja inflacije) dosega z nalaganjem sredstev v obračunskem obdobju. Pri tem je seveda največji problem ta, da je zelo težko opredeliti, kdaj bo obveznost dejansko plačana. Slovenske zavarovalnice kljub tej možnosti realnega diskontiranja praviloma niso uporabljale, so pa uporabljale metodo sedanjih cen in s tem znižale bodoče obveznosti za inflacijo.

SZTR zaostruje možnost diskontiranja in ga dovoljuje izjemoma v zavarovalnih vrstah, kjer so izpolnjeni dokaj strogi pogoji (povprečno čas od prijave do dokončnega izplačila najmanj štiri leta,…).

Metoda popisa je torej v bistvu metoda, ki ni predmet aktuarja, ampak ustreznih služb zavarovalnice. Kot bomo videli v nadaljevanju, pa je ta metoda za aktuarja pomembna predvsem kot metoda, ki zagotavlja vstopne podatke za kar nekaj statističnih metod. Zaradi tega mora seveda aktuar zelo dobro poznati, kakšne so smernice zavarovalnice (npr. kako oceniti škodo, kjer obstaja samo prijava, diskontiranje ali ne, zmanjševanje za regresne terjatve,…) pri posamičnem določanju višine rezervacij. Pri tem je bistvenega pomena, da preveri, ali je z dogovorjenimi smernicami zagotovljena konsistentnost. Če namreč zavarovalnica vsako leto spreminja navodila, kako opredeliti višino rezervacije, so dani rezultati za kakršnokoli resno naknadno analizo povsem neustrezni. Nekonsistentnost lahko npr. povzroči že menjava osebja (ali ključnih oseb) v škodni službi.

Prva statistična metoda, ki temelji na rezultatu popisanih škod in ki se ponuja kar sama po sebi, je ta, da aktuar na podlagi izkušenj iz preteklih let ugotovi, za koliko odstotkov je rezultat popisa prenizek (oz. previsok), ter da s tem odstotkom ustrezno popravi dejansko višino rezervacije.

ZSS2 se sicer zadovolji že z rezultatom, ki ga daje zgolj popis, SZTR pa aktuarja že opozarja, da mora preverjati tudi ustreznost oblikovanih rezervacij po popisu (torej ga usmerja v to statistično metodo). Zato se je v preteklosti pogosto dogajalo, da je aktuar zavarovalnice ugotovil, da metoda ne daje ustreznih rezultatov, posledica tega pa je bila, da je zavarovalnica spremenila pristop pri oblikovanju posameznih rezervacij in s tem popravila kvaliteto ocenjevanja, vendar s tem tudi povzročila nekonsistentnost.

Metoda popisa je praktično idealna in edina možna metoda v zavarovalnih vrstah, kjer je število škod majhno (npr. tako majhno, da vse škode lahko obvladuje ena oseba), variabilnost višine zahtevkov pa zelo velika.

2.1.2. Pavšalna metoda

Oblikovanje rezervacije po pavšalni metodi poteka skladno z ZSS2 v naslednjih korakih:

a) Zavarovalnica izloči vse tiste škodne primere, kjer je njena obveznost izplačevanje dosmrtne rente (ti primeri so značilni za odgovornostna zavarovanja). Za te primere oblikuje rezervacijo posamično kot sedanjo vrednost bodočih obveznosti, pri čemer obrestna mera ne sme presegati 6% letno.
b) Zavarovalnica izloči tiste škodne primere, ki bodo verjetno presegli 1,5% skupnega zneska obračunanih odškodnin v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju in za te primere oblikuje rezervacijo individualno.
c) Za vse ostale primere izračunamo pavšalno višino rezervacije po obrazcu

$$R = (N - n) * \varphi$$

$$\varphi = \frac{S - s}{M - m} * f * t,$$

kjer pomenijo:

- R pavšalna škodna rezervacija;
- N skupno število nerešenih škodnih primerov v zavarovalni vrsti;
- n število nerešenih škodnih primerov, za katero se določi višino posamično;
- φ povprečna odškodnina v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju, korigirana in revalorizirana na konec leta, za katerega izračunavamo škodno rezervacijo;
- S skupni znesek obračunanih odškodnin v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju;
- s znesek obračunanih odškodnin za škodne primere, pri katerih je obračunana odškodnina presegla 1,5% od skupnega zneska obračunanih odškodnin S;
- M skupno število obračunanih škodnih primerov v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju;
- m število obračunanih škodnih primerov, pri katerih je odškodnina presegla 1,5% od skupnega zneska obračunanih odškodnin S;
- f faktor revalorizacije škodnih izplačil na konec leta;
- t faktor, ki izraža trende v višinah odškodnin.

Očitno je bila predpisana metoda napisana površno, saj bi s moral vsebovati tudi vse obračune rent, m pa število rent, kjer je obveznost izplačevanja škod v obračunskem obdobju prenehala (oškodovanec je umrl ali mu je bila izplačana enkratna sedanja vrednost vseh bodočih rent).

Intuitivno lahko sklepamo, da je ta metoda zelo ustrezna za zavarovalne vrste, kjer je portfelj velik (tako število rešenih škod v obračunskem obdobju, na podlagi katerih izračunamo povprečno odškodnino, kot tudi število nerešenih škod) in kjer je višina škod zgoščena okrog povprečne odškodnine. Ta intuitivni sklep nadgradimo še teoretično in dokažimo naslednji izrek:

Izrek 1:

a) Pri oblikovanju škodne rezervacije za nastale prijavljene škode je pri velikem številu škod relativna napaka ocene škodne rezervacije pavšalne metode, ki jo označimo s P_1, manjša od relativne napake ocene metode popisa, ki jo označimo s P_2, pri majhnem številu škod pa ni mogoče zanesljivo opredeliti, katera metoda je boljša.
b) Pri majhnem številu škod je praviloma najboljša metoda popisa z ustreznim popravkom.

Dokaz 1:

Osnutek dokaza povzemamo po (Taylor,2000, str. 43). Izpeljimo najprej nekaj splošnih izrazov, ki jih bomo uporabili v nadaljevanju.

Označimo s Q skupen znesek nastalih prijavljenih n škod. S $\underline{\hat{Q}}$ označimo oceno za Q. Napaka ocene $\underline{\hat{Q}}$ je

$$E[\underline{\hat{Q}}-Q]^2 = E[\underline{\hat{Q}}-E(\underline{\hat{Q}})+E(\underline{\hat{Q}})-Q]^2$$
$$= V[\underline{\hat{Q}}]+[E(\underline{\hat{Q}})-Q]^2,$$

kjer smo predpostavili neodvisnost Q in $\underline{\hat{Q}}$. Ta predpostavka praviloma drži in ni prestroga, saj je prva odvisna od prihodnosti, druga pa od preteklega dogajanja. Predpostavimo sedaj, da za vsak n velja, da obstajata konstanti b, τ^2, za kateri velja:

$$E[\underline{\hat{Q}}] = (1+b)Q$$
$$\frac{V[\underline{\hat{Q}}]}{E^2[\underline{\hat{Q}}]} = \frac{\tau^2}{n}.$$

Potem lahko relativno napako ocene dobimo kot:

$$P = \frac{E[\underline{\hat{Q}}-Q]^2}{Q^2} = \frac{V[\underline{\hat{Q}}]}{E^2[\underline{\hat{Q}}]}\left[\frac{E[\underline{\hat{Q}}]}{Q}\right]^2 + \left[\frac{E[\underline{\hat{Q}}]}{Q}-1\right]^2$$
$$= \frac{(1+b)^2\tau^2}{n} + b^2.$$

To nam kaže, da je pri velikih n P odvisna od b, pri majhnih n pa od τ^2.

Uporabimo te rezultate na metodah posamičnega popisa oz. pavšala.

Predpostavimo, da imamo prijavljenih n nastalih prijavljenih škod. Znesek vsake nastale obveznosti je slučajna spremenljivka, ki jih označimo z $\theta_1,....,\theta_n$, s porazdelitveno funkcijo F. Označimo z $\mu = E[\theta], \sigma^2 = V[\theta]$ matematično upanje in varianco teh slučajnih spremenljivk ($\mu = \int \theta dF(\theta)$). S $\hat{\theta}_i$ označimo ocenjene vrednosti ustreznih slučajnih spremenljivk, dobljenih z metodo popisa.

Dejanska skupna obveznost zavarovalnice za nastale prijavljene škode znaša

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \theta_i .$$

Cenilka $\hat{Q}_1$, ki nam da oceno po metodi popisa, je očitno oblike

$$\hat{Q}_1 = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i ,$$

cenilka $\hat{Q}_2$, ki nam da oceno po pavšalni metodi, pa je oblike

$$\hat{Q}_2 = n\hat{\mu} ,$$

kjer smo z $\hat{\mu}$ označili oceno za μ.

Izračunajmo najprej relativno napako ocene, dobljene z metodo popisa. Predpostavimo, kot v splošnem, da obstajata b$_1$, τ_1^2, seveda za $\hat{\theta}_i$, da velja:

$$E\left[\hat{\theta}_i \middle| \theta_i\right] = (1+b_1)\theta_i, \forall i,$$
$$V\left[\hat{\theta}_i \middle| \theta_i\right] = \tau_1^2 E^2\left[\hat{\theta}_i \middle| \theta_i\right], \forall i.$$

Od tod dobimo:

$$E(\underline{\hat{Q}_1}) = E(\sum_i \hat{\theta}_i \middle| \theta_i) = (1+b_1)\sum_i \theta_i = (1+b_1)Q_1 ,$$

$$V(\underline{\hat{Q}_1}) = V(\sum_i \hat{\theta}_i \middle| \theta_i) = \tau_1^2 \sum_i E^2(\hat{\theta}_i \middle| \theta_i) = \tau_1^2 (1+b_1)^2 \sum_i \theta_i^2 .$$

P$_1$ za oceno pri metodi popisa je torej:

$$P_1 = \frac{V(\underline{\hat{Q}_1})}{Q_1^2} + \left[\frac{E(\underline{\hat{Q}_1})}{Q_1} - 1\right]^2 = \frac{\tau_1^2 (1+b_1)^2 \sum_i \theta_i^2}{Q_1^2} + b_1^2 ,$$

kjer smo z $\underline{\hat{Q}_1}$ označili oceno, ki nam jo da cenilka $\hat{Q}_1$ pri $\hat{\theta}_i$. Ker pa je relativna napaka odvisna od $\theta_1,....,\theta_n$, izrazimo raje matematično upanje relativne napake. Po (Taylor,2000, str. 45), dobimo:

$$E[P_1] = b_1^2 + (1+b_1)^2 \tau_1^2 \frac{1+v^2}{n},$$

kjer je v faktor, ki je odvisen od variabilnosti θ_i.

Ocenimo še napako ocene pavšalne metode. Spet privzemimo, da velja

$$E[\hat{\mu}] = (1+b_2)\mu,$$

$$\frac{V[\hat{\mu}]}{E^2[\hat{\mu}]} = \frac{\tau_2^2}{O(n)}.$$

Oceno $\hat{\mu}$ dobimo na podlagi rešenih škod v preteklem obdobju, ne pa na podlagi *n* ocen rezerviranih škod, zato v zgornjem izrazu imenovalec na desni ni *n*, upravičeno pa lahko predpostavljamo, da število rezerviranih škod lahko zapišemo kot linearno funkcijo števila rešenih škod, kar smo označili z *O(n)* (seveda je razmerje med rešenimi in rezerviranimi škodami po zavarovalnih vrstah zelo različno in je odvisno od repa zavarovalne vrste). Od tod dobimo za $\underline{\hat{Q}_2}$ - oceno, ki nam jo da cenilka $\hat{Q}_2$, pri $\hat{\mu}$:

$$E(\underline{\hat{Q}_2}) = n(1+b_2)\mu,$$

$$V(\underline{\hat{Q}_2}) = n^2 V(\hat{\mu}).$$

Izračunajmo sedaj relativno napako P_2 za $\underline{\hat{Q}_2}$:

$$P_2 = \frac{\tau_2^2}{O(n)}(1+b_2)^2 + \left[\frac{n(1+b_2)\mu}{\sum_i \theta_i} - 1\right]^2.$$

Tako kot P_1, je tudi P_2 odvisna od $\theta_1,....,\theta_n$, zato nam o napaki zopet več pove matematično upanje $E(P_2)$. Intuitivno vidimo, da pri velikem *n* $\sum \theta_i / n \to \mu$, izraz v oglatem oklepaju pa proti b_2^2. V splošnem pa lahko zapišemo

$$E(P_2) = \frac{(1+b_2)^2 \tau_2^2}{O(n)} + b_2^2 + O(\frac{\tau_2}{n}).$$

Zadnji izraz v enačbi je rezultat aproksimacije $Ef(X) = f(\alpha) + O(v^2)$, kjer je X slučajna spremenljivka z $E(X) = \alpha$, $V(X) = v^2$.

Za primerjavo $E(P_1)$ in $E(P_2)$ moramo najprej opredeliti razmerja med b_1, b_2, τ_1, τ_2. Precej očitno je dejstvo, da je pri velikem *n* $|b_1| > |b_2|$, saj je narava pavšalne metode taka, da se z velikim številom škod povprečje rešenih škod zelo približa matematičnemu upanju rezerviranih škod. Naj bo ocena popisa še tako dobra, torej b_1 še tako majhen, obstaja nek *n*, od katerega je b_2 manjši. Seveda pa je potrebna velikost *n*-ja spet zelo odvisna od narave zavarovalne vrste (za zavarovalne vrste z dolgim repom je npr. značilno, da dlje kot je škoda rezervirana, težja je po naravi, torej višja, povprečna višina rešene škode pa zato lahko bistveno nižja od matematičnega upanja rezerviranih škod. Rešenih škod mora zato biti zelo veliko in to tudi težjih, da pride do preloma, kjer je naš pogoj izpolnjen).

Obratno razmišljanje pa velja za parametra τ_1, τ_2. Če je namreč popis narejen kvalitetno in strokovno, lahko upravičeno domnevamo, da je τ_1^2 relativno majhen (razpršenost ocene glede na dejansko višino škode je majhna). To pa ne moremo trditi za τ_2^2, še posebej, če gre za zavarovalne vrste z veliko razpršenostjo višine škod okrog povprečne višine škode. Zato lahko zapišemo, da velja

$$\frac{\tau_1^2}{n} < \frac{\tau_2^2}{O(n)} + O(\frac{\tau_2^2}{n}).$$

Za dokaz člena a) velja ob zgornjih dejstvih naslednji razmislek:

Pri dovolj velikem n postaneta E(P_1) oz E(P_2) odvisna zgolj od b_1^2, oziroma b_2^2, zato je očitna neenačba E(P_1)>E(P_2). Pri majhnem n pa imajo lahko izrazi s τ prevladujoč vpliv (ali pa tudi ne), zato v takih primerih ne moremo dati zanesljive ocene o kvaliteti rezultata, ki ga da posamezna metoda. Rečemo lahko zgolj to, da je pri majhnih n kvaliteta rezultata zelo odvisna tudi od same narave zavarovalne vrste, torej od razpršenosti višine zahtevkov (pri večji razpršenosti praviloma boljši popis, pri majhni pa pavšal).

Za dokaz točke b) pa lahko dodamo misel, da v primerih, ko je tudi pri majhnem številu škod pavšal boljši od popisa, očitno popis ni dovolj kvaliteten in je zato b_1 bistveno prevelik in prevladujoč v vseh primerih. V takih primerih aktuar lahko uporabi metodo korekcije popisa, torej vpeljemo novo cenilko

$$\hat{Q}_3 = \frac{\hat{Q}_1}{(1+\hat{b}_1)},$$

kjer smo z $\hat{b}_1$ označili oceno potrebne korekcije. Precej verjetno je, da bo taka ocena pri majhnih n boljša od pavšala, saj ima nova ocena glede na prvo lahko bistveno manjši b.

(konec Dokaza1)

2.2. OCENA METOD ZA DOLOČITEV NASTALIH NEPRIJAVLJENIH ŠKOD

ZSS2 predvideva dve metodi za izračun IBNR škodnih rezervacij, ki sta po svojem pristopu nekoliko podobni metodam za določitev nastalih prijavljenih škod. Ti dve metodi sta **Metoda delnega popisa in delnega povprečja** in **Metoda povprečja oz. pavšala.**

2.2.1. Metoda delnega popisa in delnega povprečja

Osnovna ideja te metode temelji na tem, da ima zavarovalnica do oddaje zaključnega računa za poslovno leto še kar nekaj časa (rok 31.3. naslednjega leta za preteklo leto, pozavarovalnice še mesec dni kasneje), v tem vmesnem času pa lahko zve že za veliko naknadno prijavljenih škod. Zato metoda predpisuje dvostopenjsko določanje višine nastalih obveznosti iz naslova IBNR. Ti dve stopnji sta:

a) Zavarovalnica na dan 28.2. opravi popis vseh škod, ki so nastale v preteklem poslovnem letu in so bile prijavljene od 1.1. do 28.2. Popis in ugotavljanje višine predvidenih obveznosti opravi na enak način, kot to določa metoda popisa za nastale prijavljene škode.
b) Škodno rezervacijo za primere, ki so nastali v preteklem poslovnem letu, pa do 28.2. še niso bili prijavljeni, ugotovi zavarovalnica po posameznih zavarovalnih vrstah na podlagi statističnih podatkov za takšne primere povprečno v zadnjih treh letih pred letom, za katerega škodno rezervacijo oblikuje. Rezervacijo za te primere oblikuje po naslednjem obrazcu:

$$R = N * \varphi,$$

$$\varphi = \frac{S-s}{M-m} * f * t,$$

kjer pomenijo:

- R IBNR za škode, prijavljene po 28.2.;
- N povprečno število nerešenih škodnih primerov v zavarovalni vrsti v treh letih pred letom, za katero se oblikuje IBNR in so bili prijavljeni po 28.2. naslednjega leta;
- φ povprečna odškodnina v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju, korigirana in revalorizirana na konec leta, za katerega izračunavamo škodno rezervacijo;
- S skupni znesek obračunanih odškodnin v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju;
- s znesek obračunanih odškodnin za škodne primere, pri katerih je obračunana odškodnina presegla 1,5% od skupnega zneska obračunanih odškodnin S;
- M skupno število obračunanih škodnih primerov v zavarovalni vrsti v tekočem obračunskem obdobju;
- m število obračunanih škodnih primerov, pri katerih je odškodnina presegla 1,5% od skupnega zneska obračunanih odškodnin S;
- f faktor revalorizacije škodnih izplačil na konec leta;
- t faktor, ki izraža trende v višinah odškodnin.

Na prvi pogled se zdi metoda precej ustrezna, saj poskuša dobiti čimveč pravih podatkov. Če pa metodo ocenimo nekoliko bolj kritično, ugotovimo, da vsebuje nekaj hudih napak.

Prva očitna groba napaka je, da metoda za škode prijavljene po 28.2. predvideva izračun ocenjene škode s povprečno višino rešene škode v preteklem letu. Ta predpostavka je kolikor toliko ustrezna pri zavarovalnih vrstah s kratkim repom, popolnoma zgrešena pa pri zavarovalnih vrstah z dolgim repom reševanja. Pri teh vrstah je namreč značilno, da večino IBNR škod predstavljajo najtežje škode, ki so po višini bistveno višje od povprečne rešene škode. Zato je upoštevanje povprečne rešene škode neustrezno, rezultat pa krepko podcenjen.

Sporno je tudi določanje števila morebitnih nastalih neprijavljenih škod, ki temelji na povprečnem številu IBNR škod, ki so bile prijavljene v naslednjem letu za pretekla tri leta. Metoda namreč zahteva stabilnost portfelja in povsem odpove v primerih, ko število zavarovanj (posledično tudi škod) narašča, saj takrat narašča tudi število naknadno prijavljenih škod, vendar z zamudo. V takih primerih je torej po tej metodi tudi število IBNR škod podcenjeno (obraten razmislek seveda velja za padanje portfelja).

Omenimo še napako, ki je morda zgolj površnost oz. nenatančnost pri pisanju. Napaka je namreč ta, da za IBNR škode, ki so bile prijavljene od 1.1. do 28.2., zavarovalnica naredi popis na dan 28.2., kot je to določeno v standardu za popis nastalih prijavljenih škod. Dobesedno to pomeni, da zavarovalnica naredi za te škode popis zgolj tistih škod, ki so bile prijavljene od 1.1. do 28.2. in so na dan 28.2. še vedno nerešene oz. oblikuje rezervacijo zgolj v višini še nerešene škode na dan 28.2.. Pravilno seveda je, da mora k tako oblikovani rezervaciji prišteti še vse dejansko rešene IBNR škode, ki so bile prijavljene od 1.1.-28.2.! Napaka je seveda tako očitna, da so jo vse zavarovalnice odpravile in pravilno oblikovale rezervacije za ta del.

Metoda je bila torej kolikor toliko ustrezna v zavarovalnih vrstah s kratkimi repi reševanja in relativno hitrim prijavljanjem škod. V vrstah, kjer je čas od nastanka do prijave zelo dolg, pa je metoda povsem neustrezna (popis zajame majhen delež takih škod, pavšal pa je povsem napačno zasnovan). Od uvedbe novega zakona pa je metoda neuporabna, saj morajo zavarovalnice do 28.2. Agenciji za zavarovalni nadzor že poročati o stanju rezervacij na dan 31.12. in zavarovalnice nimajo več časa, da bi to metodo sploh še uporabljale.

2.2.2. Metoda povprečja

Metoda povprečja je po svojem pristopu podobna pavšalni metodi za oblikovanje nastalih prijavljenih škod. Bistvo metode namreč je, da na osnovi podatkov iz preteklih let ugotovi število naknadno prijavljenih škod in povprečen znesek naknadno prijavljene škode za vsako zavarovalno vrsto. Rezervacija je potem seveda zmnožek števila škod s povprečno višino. Podrobneje prikažimo to spet matematično:

$$R = n_{x+1} * \varphi,$$

$$n_{x+1} = k * p_x,$$

$$k = \frac{k_x + k_{x-1} + k_{x-2}}{3}, \; k_x = \frac{n_x}{p_{x-1}}, k_{x-1} = \frac{n_{x-1}}{p_{x-2}}, k_{x-2} = \frac{n_{x-2}}{p_{x-3}},$$

$$\varphi = \frac{(s_1 + s_2) * f * t + s_3}{n_x},$$

kjer pomenijo:

- R IBNR škodna rezervacija;
- n_x predvideno oz. dejansko število naknadno prijavljenih škod v letu x;
- φ povprečna naknadno prijavljena odškodnina v zavarovalni vrsti, korigirana in revalorizirana na konec leta, za katerega izračunavamo škodno rezervacijo;
- s_1 znesek obračunanih odškodnin v zavarovalni vrsti, ki so bile v letu x naknadno prijavljene in dokončno rešene;
- s_2 znesek obračunanih odškodnin v zavarovalni vrsti, ki so bile v letu x naknadno prijavljene in delno rešene;
- s_3 znesek škodnih rezervacij na koncu leta x za škode, ki so bile v tem letu naknadno prijavljene in nerešene ali delno rešene;
- p_x število vseh prijavljenih škod v zavarovalni vrsti v letu x;
- f faktor revalorizacije škodnih izplačil na konec leta;
- t faktor, ki izraža trende v višinah odškodnin.

Metoda torej na podlagi preteklih let oceni število naknadno prijavljenih škod s pomočjo števila vseh že prijavljenih škod, tako ocenjeno število škod pa množi s povprečno višino naknadno prijavljenih škod.

Metoda dokazuje, da se je odredbodajalec zavedal dejstva, da so naknadno prijavljene škode praviloma višje od redno prijavljenih, zato je toliko bolj nejasno, zakaj tega dejstva ni upošteval tudi pri definiranju prejšnje metode. Prav tako poskuša biti bolj natančen pri ugotavljanju števila naknadno prijavljenih škod, saj števila ne ugotavlja več zgolj na podlagi povprečnega števila škod, ampak računa povprečje razmerja med številom naknadno prijavljenih in vseh škod. Določanje števila škod zato torej v precejšnji meri odpravlja zahtevo po stabilnosti portfelja. Ob takem pristopu se lahko vprašamo samo, ali je res smotrno na podlagi števila prijavljenih škod sklepati tudi o številu naknadnih škod ob predvidevanju, da so ta razmerja enaka. Tak pristop namreč odpove pri izrazitih nihanjih škodnega dogajanja, saj je npr. ob ugodnem letu število redno prijavljenih škod majhno (ker je malo škod), število naknadno prijavljenih škod pa izrazito veliko (prejšnje slabo leto). Ob normalnem škodnem dogajanju pa se prav tako lahko vprašamo, ali majhno število prijavljenih škod res pomeni tudi majhno število naknadno prijavljenih škod ali pa morda velja celo obratno (število vseh škod je konstantno, če torej niso bile redno prijavljene, bodo morale biti prijavljene naknadno). Glede na to, da primerja naknadno prijavljene škode leta x s prijavljenimi škodami leta $x-1$, metoda posredno predvideva, da so vse škode prijavljene eno leto po nastanku, kar je seveda neustrezno za dolge repe.

Kljub zgornjim pomislekom lahko ocenimo, da je v stabilnih razmerah metoda kar zadovoljiva za večino zavarovalnih vrst (kratki in srednje dolgi repi) in da odpove le pri tistih vrstah, kjer so repi najdaljši, saj pridejo tam navedeni pomisleki bistveno bolj do izraza, poleg tega pa metoda najverjetneje neustrezno oceni tudi zneske (predvsem s_3). Intuitivno bi torej lahko rekli, da bi metoda lahko bila dobra za portfelj kasko zavarovanj in morda zadovoljiva za avtomobilsko odgovornost. Zagotovo pa je ta metoda praktično povsod boljša od metode delnega popisa in delnega pavšala.

Vse naštete ugotovitve o opisanih metodah (tako za nastale prijavljene, kot IBNR) bomo v nadaljevanju podkrepili s primeri oblikovanih rezervacij z vsemi metodami na že omejenih konkretnih portfeljih.

2.3. PRIMERJAVA IN KRITIČNA OCENA REZULTATOV METOD NA OBRAVNAVANIH PORTFELJIH

Opisana metode temeljijo na ločenem oblikovanju rezervacije za nastale prijavljene škode in ločenem oblikovanju za nastale neprijavljene škode. Končna rezervacija je torej seštevek obeh rezervacij. Ker sta za vsako komponento možni dve podmetodi, imamo torej za končni rezultat možne štiri različne dopustne kombinacije podmetod in štiri različne rezultate.

V naslednjih tabelah so razvidne vse komponente izračuna posamezne podmetode, v razdelkih 2.3.1. oz. 2.3.2. pa bomo prikazali vse končne možne rezultate.

Tabela 2.1 - Škodna rezervacija nastalih prijavljenih škod na dan 31.12.2001 po popisu

POPIS PRIJAVLJENIH ŠKOD		v SIT
	kasko	AO
Rezervacija	734.921.172	5.366.205.726

Tabela 2.2 - Škodna rezervacija na dan 31.12.2001, oblikovana po pavšalni metodi

PAVŠAL PRIJAVLJENIH ŠKOD		
	kasko	AO
N	5.171	6.048
n	0	0
S (v SIT)	3.210.522.500	5.017.807.500
s	0	0
M	17.249	12.068
m	0	0
f	1,04	1,04
t	1,00	1,02
φ (v SIT)	193.573,16	441.093,03
Rezervacija (v SIT)	1.000.966.799	2.667.510.127

Tabela 2.3 - IBNR rezervacija na dan 31.12.2001, oblikovana po metodi delnega popisa in delnega pavšala

A. POPIS IBNR DO 28.2.			B. PAVŠAL PO 1.3.		
	kasko	AO		kasko	AO
RA (v SIT)	100.706.904	203.109.203	n-2	400	830
C. IBNR SKUPAJ (RA+RB) v SIT			n-1	442	848
			n	437	896
	kasko	AO	N	427	858
Rezervacija	183.282.302	581.524.637	RB (v SIT)	82.575.398	378.415.434

Tabela 2.4 - IBNR rezervacija na dan 31.12.2001, oblikovana po metodi povprečja

IBNR po POVPREČJU		
	kasko	AO
kx	0,0449	0,0978
k(x-1)	0,0577	0,0960
k(x-2)	0,0440	0,0921
k	0,0489	0,0953
n(x+1)	877	1146
φ (v SIT)	164.504	1.024.172
Rezervacija (v SIT)	144.199.782	1.173.716.805

Opozorimo, da iz tabele 2.4. niso razvidni vsi podatki, ki so bili potrebni za izračun (manjkajo nekateri podatki, ki so potrebni za izračun φ – ja). Je pa iz opisa same metode seveda natančno razvidno, kateri so ti podatki in kako iz njih izračunamo φ.

Izpeljimo torej sedaj za vsak portfelj še končne rezultate.

2.3.1. Rezultati portfelja A

Naslednja tabela prikazuje vse možne končne rezultate oblikovane škodne rezervacije avtomobilske odgovornosti na dan 31.12.2001.

Tabela 2.5 – Skupna škodna rezervacija (v SIT) AO portfelja na dan 31.12.2001, s kombinacijo dopustnih metod

1. Popis + kombiniran IBNR	5.947.730.363
2. Popis + povprečje	6.539.922.531
3. Pavšal + kombiniran IBNR	3.249.034.764
4. Pavšal + povprečje	3.841.226.932
Povprečje	**4.894.478.648**
Standardni odklon	1.595.164.516

Opazimo lahko zelo velika odstopanja med najmanjšo in največjo možno rezervacijo (kar dvakratna razlika), glavna razlika pa je predvsem posledica velikega odstopanja med pavšalno metodo in metodo popisa pri rezervaciji za nastale prijavljene škode. Očitno je torej zakonski predpis pri tem portfelju povsem zgrešil svoj smisel, saj dopušča zavarovalnicam s kombinacijo dopustnih metod oblikovanje po višini bistveno različnih škodnih rezervacij. Poleg tega pa ta predpis v resnici sploh ne zagotavlja, da je vsaj najvišja možna rezervacija v resnici dovolj visoka. Ni namreč predvidenega naknadnega preverjanja popisa in vključitve korekcije morebitne ugotovljene napake, ki pri popisu nastaja.

2.3.2. Rezultati portfelja B

V naslednji tabeli poglejmo še končne rezultate rezervacije kasko zavarovanja.

Tabela 2.6 – Skupna škodna rezervacija kasko portfelja na dan 31.12.2001, s kombinacijo dopustnih metod

1. Popis + kombiniran IBNR	918.203.473
2. Popis + povprečje	879.120.953
3. Pavšal + kombiniran IBNR	1.184.249.101
4. Pavšal + povprečje	1.145.166.581
Povprečje	**1.031.685.027**
Standardni odklon	155.250.034

Rezultati kasko portfelja so nekoliko bolj uravnoteženi, kot je to veljalo za AO portfelj. Kar je še posebej zanimivo, dajeta višje rezultate tokrat kombinaciji, kjer nastopa pavšalna metoda rezervacije za nastale prijavljene škode. Tudi IBNR metodi pa delujeta obratno kot pri AO portfelju – za razliko od AO portfelja daje namreč tu kombiniran IBNR višje rezultate. Vsekakor pa tega ne smemo posplošiti za poljubne AO in kasko portfelje.

Sklepamo torej lahko, da kasko rezultatom lahko nekoliko bolj zaupamo. Z veliko zanesljivostjo lahko tudi pričakujemo, da je najvišja možna rezervacija zadovoljivo visoko opredeljena (ni pa nikakršnega dokaza, da ni celo previsoka).

Ob koncu tega poglavja lahko torej jasno zapišemo, da so predpisane metode sicer lahko povsem ustrezne za nekatere vrste portfeljev, da pa predpis še zdaleč ni ustrezen za vse vrste portfeljev in za vse zavarovalnice. Striktno oblikovanje rezervacij po tem predpisu je bilo za zavarovalnice celo škodljivo, saj zaradi njega v resnici sploh niso imele možnosti oblikovati ustreznih rezervacij. Podoben, vendar manj zavezujoč predpis, ki bi vključeval tudi korekcijo na podlagi preverjanja rezervacij iz preteklih let s kasnejšimi dejanskimi izplačili, pa bi lahko bil že dobra podlaga za pravi predpis. Od tod verjetno tudi črtanje predpisa iz zahtev SZTR.

3. PREUČITEV STANDARDNIH DETERMINISTIČNIH METOD

V tem poglavju bomo prikazali nekaj najbolj značilnih predstavnikov izmed tistih determinističnih metod, ki so trenutno v svetu najbolj popularne in uporabljane, pri nas pa se niso uporabljale. Vse opisane metode so splošno precej dobro znane, podrobno pa so opisane npr. v (Zehnwirth et al.,1997), od koder tudi povzemamo glavne izpeljave le-teh.

Za večino teh metod je značilno, da ocena rezerviranih škod temelji na podatkih iz preteklih let, ti podatki pa so prikazani v obliki trikotnih tabel. Se pa metode razlikujejo po tem, katere podatke posamezna metoda uporablja (rešene škode v posameznem letu, rešene škode kumulativno od dne nastanka škode do dne ocenjevanja, rešene škode + ocenjene škode, z upoštevanjem inflacije ali brez, nastale škode v letu, …). Zaradi številnih variant podobne ideje je nekoliko sporna celo angleška terminologija (z istim imenom je poimenovanih več različic), še bolj problematična pa je terminologija v slovenščini, saj teh metod pri nas zaenkrat ne uporabljamo, zato tudi ni ustreznih prevodov zanje. Med slovenskimi aktuarji se je tako zaenkrat za vse tovrstne metode uveljavil izraz »metode trikotnikov«, podrobneje pa metodo opisujemo z angleškim imenom. V nadaljevanju bomo zato pri opisu metode, kjer bo to zaradi nedvoumnosti potrebno, navedli tudi angleško ime te metode.

Pred nadaljevanjem smo dolžni opozoriti, da med standardne deterministične metode (oz. so bolj ali manj posrečene izpeljanke le teh) seveda sodijo tudi metode, ki smo jih opisali že v prejšnjem poglavju.

3.1. OPIS PREPROSTIH METOD

Preden se lotimo opisa najbolj uporabljanih metod, na kratko povzemimo osnovna načela in izraze, ki so skupni vsem metodam.

Predpostavimo, da imamo zbrane podatke o rešenih škodah v preteklih *n* letih. Razvrstimo te podatke tako, da združimo vse škode, ki imajo isto leto nastanka, znotraj te razvrstitve pa jih razdelimo še glede na leto rešitve (leto razvoja). Na ta način dobimo podatke razvrščene v naslednji trikotnik (za $n=6$):

Leto razvoja	0	1	2	3	4	5
Leto nastanka						
l-5	$A_{l-5,0}$	$A_{l-5,1}$	$A_{l-5,2}$	$A_{l-5,3}$	$A_{l-5,4}$	$A_{l-5,5}$
l-4	$A_{l-4,0}$	$A_{l-4,1}$	$A_{l-4,2}$	$A_{l-4,3}$	$A_{l-4,4}$	
l-3	$A_{l-3,0}$	$A_{l-3,1}$	$A_{l-3,2}$	$A_{l-3,3}$		
l-2	$A_{l-2,0}$	$A_{l-2,1}$	$A_{l-2,2}$			
l-1	$A_{l-1,0}$	$A_{l-1,1}$				
l	$A_{l,0}$					

Tako dobljeno tabelo bomo v nadaljevanju poimenovali **tabela razvoja**. Zaradi svoje značilne oblike je uveljavljeno tudi ime **trikotnik razvoja**.

V odvisnosti od metode nam podatek $A_{i,j}$ lahko pove, koliko je bilo rešenih škod (ali zneskovno ali komadno), ki so nastale v letu i in so bile rešene v letu $i+j$, ali koliko je skupen znesek rešenih škod v letih $i,..,i+j$, ki se nanašajo na leto i, ali kaj drugega. Nekatere metode škod celo ne razvrščajo glede na leto nastanka škode, ampak glede na leto sklenitve zavarovanja (razbitje na kohorte). Pri vsaki metodi bomo zato opredelili, kaj posamezna celica predstavlja.

Vse trikotniške metode temeljijo na predpostavki, da bo reševanje in izplačevanje škod v prihodnje potekalo po podobnem vzorcu, kot je potekalo v preteklosti. Zato zgornji tabeli pridružimo tabelo **faktorjev razvoja** $f_{i,j}$, $(j>0)$, kjer $f_{i,j}=A_{i,j}/A_{i,j-1}$. S tako dobljenimi faktorji in že znanimi $A_{i,j}$ lahko projiciramo preostale – neznane $A_{i,j}$. Ob tem pa se pojavi problem izbire pravega $f_{i,j}$, saj imamo za projekcijo na izbiro lahko več različnih faktorjev. $A_{l,1}$ lahko npr. izračunamo kot $A_{l,0}*f_{l-1,1}$, $A_{l,0}*f_{l-2,1}$, $A_{l,0}*f_{l-3,1}$, $A_{l,0}*f_{l-4,1}$, $A_{l,0}*f_{l-5,1}$, lahko pa tudi kot kombinacijo vseh navedenih. Konservativen pristop bi bil, da vedno vzamemo tisto razmerje, ki je največje, pragmatičen, da vzamemo razmerje preteklega leta (saj je to najbolj podobno obnašanju letošnjega), najbolj znan in uporabljan pa je pristop, ko pri projekciji upoštevamo vsa znana razmerja in iz njih izračunamo neko (uteženo) povprečje razmerij. Metodo, ki temelji na tem pristopu in kjer $A_{i,j}$ predstavlja kumulativen znesek vseh rešenih škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene do leta $i+j$, imenujemo **metodo veriženja (chain ladder)**. (V literaturi so včasih pod tem imenom mišljene vse metode, ki temeljijo na povprečjih razmerij, ne glede na vsebino $A_{i,j}$, včasih pa celo vse trikotniške metode.)

3.1.1. Metoda veriženja

3.1.1.1. Opis osnovne metode

Kot smo že omenili, pri metodi veriženja izračunamo faktor projekcije s pomočjo uteženega povprečja vseh znanih razmerij. Utež je znesek rešenih škod. Faktor projekcije $f_{l,1}$ dobimo kot:

$$f_{l,1} = \frac{A_{l-5,0} \cdot f_{l-5,1} + A_{l-4,0} \cdot f_{l-4,1} + A_{l-3,0} \cdot f_{l-3,1} + A_{l-2,0} \cdot f_{l-2,1} + A_{l-1,0} \cdot f_{l-1,1}}{A_{l-5,0} + A_{l-4,0} + A_{l-3,0} + A_{l-2,0} + A_{l-1,0}},$$

oziroma

$$f_{l,1} = \frac{A_{l-5,1} + A_{l-4,1} + A_{l-3,1} + A_{l-2,1} + A_{l-1,1}}{A_{l-5,0} + A_{l-4,0} + A_{l-3,0} + A_{l-2,0} + A_{l-1,0}}.$$

Splošno lahko za vsak k $(0 \le k \le n-2)$ zapišemo:

$$f_{l-k,k+1} = \frac{\sum_{i=k+1}^{n-1} A_{l-i,k+1}}{\sum_{i=k+1}^{n-1} A_{l-i,k}}.$$

Preostalih faktorjev ne razvijamo iz že projiciranih podatkov, ampak za vsak j $(1 \le j \le k)$ privzamemo, da so $f_{l-k+j,k+1} = f_{l-k,k+1}$.

Za vsak k $(0 \le k \le n-2)$ in vsak j $(k+1 \le j \le n-1)$ dobimo sedaj projekcijo preostalih – neznanih $A_{i,j}$ kot:

$$A_{l-k,j} = A_{l-k,k} \cdot \prod_{i=k+1}^{j} f_{l-k,i}.$$

(Opomba: v nekaterih literaturah se s pojmom »faktorji razvoja« misli na zmnožke faktorjev od i-tega stolpca do zadnjega stolpca v tabeli in predstavljajo faktor, s katerim moramo pomnožiti $A_{i,j}$, da dobimo končno skupno obveznost, ki je nastala v letu *i*. Tako dobljene faktorja bomo, kjer bo to potrebno, v nadaljevanju označevali z g_i in jih poimenovali »kumulativni faktorji razvoja«).

Zelo preprosto lahko sedaj določimo skupno nastalo obveznost zavarovalnice iz vseh preteklih let. Ta je namreč kar seštevek zadnje kolone, torej $\sum_{i=0}^{n-1} A_{l-i,n-1}$. Prav tako preprosto ugotovimo, koliko nastalih obveznosti je zavarovalnica že poravnala, saj nam ta podatek da seštevek diagonalnih celic. Ker škodna rezervacija predstavlja razliko med vsemi nastalimi obveznostmi in obveznostmi, ki jih je zavarovalnica že poravnala, dobimo torej škodno rezervacijo kot:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} A_{l-i,n-1} - \sum_{i=0}^{n-1} A_{l-i,i}.$$

Ni odveč opozorilo, da na ta način dobimo skupno preostalo obveznost zavarovalnice (tako nastalih prijavljenih kot tudi IBNR škod). Glede na to, da naši standardi zahtevajo razdelitev na nastalo prijavljeno in IBNR rezervacijo, je metodo potrebno prilagoditi v toliko, da podatke $A_{i,j}$ razdelimo na $B_{i,j}$+$C_{i,j}$, kjer v tabeli $B_{i,j}$ opazujemo samo razvoj obveznosti, ki so nastale v letu *i* in so bile tudi prijavljene v letu *i*, v tabeli $C_{i,j}$ pa opazujemo razvoj obveznosti, ki so nastale v letu *i* in so bile prijavljene kasneje. To ne vpliva na splošnost, nam pa utegne koristiti, saj metodo lahko uporabimo tudi samo za eno od obeh rezervacij, drugo rezervacijo pa oblikujemo z drugačno metodo.

3.1.1.2. Osnovna metoda z upoštevanjem inflacije

Pri zavarovalnih vrstah z zelo dolgim repom in v okoljih z zelo visoko inflacijo postane osnovna metoda hitro povsem neuporabna, saj imajo rešeni zneski v zadnjih letih nerealen vpliv v kumulativnem seštevku. Zato moramo nujno prilagoditi metodo tako, da $A_{i,j}$ ne predstavlja več seštevka vseh rešenih škod iz leta *i* do leta *i+j*, ampak predstavlja znesek rešenih škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene zgolj v letu j. Tako prikazane podatke ustrezno korigiramo z inflacijo (z istim faktorjem pomnožimo vse podatke po diagonalah), nato pa ponovno oblikujemo kumulativno tabelo in nadaljujemo s postopkom po osnovni metodi.

Nekoliko bolj natančni pa moramo biti v primerih, ko dejanska rast škod ni zgolj posledica inflacije, ampak škode tudi realno naraščajo (npr. sodišča dosojajo za enake škode vse višje odškodnine, cena popravil je realno višja, itd.). V takih primerih ne zadošča, da zgolj korigiramo podatke iz preteklih let, ampak moramo rast škod upoštevati tudi pri projekciji prihodnjih let. Zato moramo v teh primerih tudi projicirane kumulativne podatke ponovno preoblikovati v letne podatke, tako pridobljene celice pomnožiti s predvideno rastjo škod (realno ali tudi z upoštevanjem inflacije) v prihodnjih letih in šele s temi podatki lahko dokončno pristopimo k oblikovanju škodne rezervacije.

Kljub temu, da torej metoda z nekaj preoblikovanji podatkov dopušča uporabo v nestabilnih razmerah, ki so posledice rasti škod, pa se dejansko ta metoda v teh razmerah ne uporablja. V takih primerih je namreč mnogo boljša **metoda separacije**, ki jo je leta 1977 iz metode veriženja razvil Taylor. To metodo bomo natančneje opisali v naslednjem razdelku.

Ob koncu opisa metode veriženja podajmo še nekaj najbolj očitnih prednosti in slabosti te metode.

Največja prednost metode je, da dobi z njo aktuar zelo jasen vpogled v škodno dogajanje preteklih let. V primeru stabilnega dogajanja je to tudi dobra osnova za napovedovanje prihodnosti. Ravno zahteva po stabilnosti pa je hkrati največja napaka te metode. Prav tako je za metodo potrebno zagotoviti dovolj velik portfelj, da so podatki sploh statistično značilni. Zato lahko intuitivno ocenimo, da je metoda dobra v zavarovalnih vrstah s srednje velikim repom reševanja in dovolj velikim portfeljem. Pri kratkih repih je metoda sicer dobra, vendar nesmotrna (premalo značilni podatki v kasnejših letih razvoja), pri dolgih repih pa je praktično nemogoče zagotoviti stabilnost. Nenazadnje lahko stabilnost - tudi v finančno stabilnem okolju - zruši že zamenjava kadra v škodni službi, ostrejši (ali milejši) pristop k reševanju, itd. Če torej želi aktuar uporabljati to metodo, mora skrbno preučiti vse podatke, preučiti razloge za morebitne odklone, ki jih zazna, in temu primerno utežiti podatke posameznega obdobja. Je pa metoda zaradi logike pristopa, kot bomo videli v nadaljevanju, zelo dobra osnova za oblikovanje bolj zahtevnih metod.

3.1.2. Metoda separacije

Osnovna ideja metode separacije je, da zbrane podatke iz preteklih let že v osnovi razbijemo na del, ki vsebuje realni del in inflacijo. Opazovani trikotnik s podatki je zato oblike:

Leto razvoja	0	1	2	3	4	5
Leto nastanka						
l-5	$Q_{l-5}r_0\lambda_0$	$Q_{l-5}r_1\lambda_1$	$Q_{l-5}r_2\lambda_2$	$Q_{l-5}r_3\lambda_3$	$Q_{l-5}r_4\lambda_4$	$Q_{l-5}r_5\lambda_5$
l-4	$Q_{l-4}r_0\lambda_1$	$Q_{l-4}r_1\lambda_2$	$Q_{l-4}r_2\lambda_3$	$Q_{l-4}r_3\lambda_4$	$Q_{l-4}r_4\lambda_5$	
l-3	$Q_{l-3}r_0\lambda_2$	$Q_{l-3}r_1\lambda_3$	$Q_{l-3}r_2\lambda_4$	$Q_{l-3}r_3\lambda_5$		
l-2	$Q_{l-2}r_0\lambda_3$	$Q_{l-2}r_1\lambda_4$	$Q_{l-2}r_2\lambda_5$			
l-1	$Q_{l-1}r_0\lambda_4$	$Q_{l-1}r_1\lambda_5$				
l	$Q_l r_0\lambda_5$					

kjer pomenijo:

- Q_i skupen znesek vseh škod, ki so nastale v letu *i*, brez upoštevanja inflacije;
- r_j delež vseh rešenih škod, ki bi bile rešene v letu razvoja j, kjer v izračunu deleža ne upoštevamo inflacije;
- λ_k produkt inflacijskih faktorjev od prvega leta do vključno leta *k*, kjer $k=i-l+j+5$. Faktorji se nanašajo na inflacijo škod.

Na podlagi že znanih podatkov poskušamo sedaj izluščiti vse zgoraj navedene parametre. Bistvena razlika od z inflacijo popravljene metode veriženja je torej v tem, da tudi pretekle inflacije ne predpostavljamo, ampak jo izluščimo na podlagi preteklih podatkov.

Pri izračunavanju parametrov predpostavljamo, da je trikotnik razvit za toliko let, da za prvo leto že zajame vse škode (v našem primeru torej $r_0+...+r_5=1$), kljub temu pa za izračun še nimamo dovolj podatkov, saj so seveda neznani koeficienti $Q_{l-4},...,Q_l$ (te navsezadnje želimo oceniti).

Da premostimo ta problem, si ponavadi pomagamo s predpostavko, da je vsak Q_i sorazmeren številu vseh škod, ki so nastale v letu *i* (torej $Q_i=c_1*N_i$, kjer je N_i število vseh nastalih škod v letu *i*, c_1 pa razmerje med zneskom in številom škod). Seveda je sedaj neznan N_i, ki pa ga praviloma lažje ocenimo kot Q_i. Metodo separacije praviloma poenostavimo še z dodatno predpostavko, da je število vseh škod, ki so nastale v letu *i*, sorazmerno številu vseh škod, ki so bile rešene v prvem letu razvoja (torej $N_i=c_2*n_i$; kjer je n_i število škod, ki so nastale v letu *i* in so bile rešene v prvem letu razvoja, c_2 pa razmerje med skupnim številom škod in n_i). Ob taki predpostavki torej obstaja nek parameter *c*, s katerim lahko za vsak *i* zapišemo $Q_i=c*n_i$. (Podobna predpostavka je uporabljena pri predpisanih IBNR metodah v Sloveniji – glej poglavje 2).

Posledica izpeljave je, da tabelo znanih podatkov o rešenih škodah preoblikujemo tako, da vse podatke v vrstici *i* delimo z ustreznim n_i. Struktura podatkov v tabeli dobi na ta način naslednjo obliko:

Leto razvoja	0	1	2	3	4	5
Leto nastanka						
l-5	$cr_0 \lambda_0$	$cr_1 \lambda_1$	$cr_2 \lambda_2$	$cr_3 \lambda_3$	$cr_4 \lambda_4$	$cr_5 \lambda_5$
l-4	$cr_0 \lambda_1$	$cr_1 \lambda_2$	$cr_2 \lambda_3$	$cr_3 \lambda_4$	$cr_4 \lambda_5$	
l-3	$cr_0 \lambda_2$	$cr_1 \lambda_3$	$cr_2 \lambda_4$	$cr_3 \lambda_5$		
l-2	$cr_0 \lambda_3$	$cr_1 \lambda_4$	$cr_2 \lambda_5$			
l-1	$cr_0 \lambda_4$	$cr_1 \lambda_5$				
l	$cr_0 \lambda_5$					

Vse želene parametre (Q_i , r_j , λ_k , c) lahko sedaj izračunamo iz sistema enačb, ki jih dobimo z vsotami celic po diagonalah in po stolpcih (ter seveda ob upoštevanju dejstva, da je vsota vseh *r*-jev enaka 1).

Z izračunom vseh parametrov iz obstoječih podatkov pa smo prehodili šele lažji del poti. Da bi namreč lahko ocenili potrebno višino škodne rezervacije, moramo zgornjo tabelo dopolniti še s vrednostmi v spodnjem delu tabele (poddiagonalne celice). Za to pa moramo (v našem primeru) oceniti parametre $\lambda_6,\ldots,\lambda_{10}$. To posredno pomeni, da potrebujemo oceno inflacije škod v prihodnjih letih. Praviloma vse prihodnje λ ocenimo na podlagi enake bodoče inflacije škod (ni pa seveda nujno), ki jo lahko dobimo na različne načine. Najbolj pogost je način, ko vrednost prihodnjih λ ugotovimo na podlagi preteklih inflacij škod (ali njihovo povprečje ali izračunamo trend ali primerjamo pretekle inflacije škod z rastjo drobnoprodajnih cen in upoštevamo napovedi le teh v prihodnjih letih,…). Izbira ustreznih λ_i pa je seveda zelo odvisna tudi od odnosa do problematike diskontiranja bodočih obveznosti. Tako bi v Sloveniji pri enakem pristopu, kot ga zavarovalnice uporabljajo pri posamičnem ocenjevanju (in ZSS2 opredeljuje), bodoči λ_i morali odražati samo realno rast škod brez upoštevanja inflacije.

S tako ocenjenimi parametri λ_i izračunamo še preostale celice v tabeli ter tako dobljene rezultate ponovno pomnožimo s številom škod v prvem letu razvoja. Končno predvideno višino škodne rezervacije po tej metodi pa dobimo tako, da seštejemo vse poddiagonalne celice v tabeli.

Dolžni smo omeniti še glavne prednosti in slabosti metode.

Glavna slabost metode je gotovo ta, da vsebuje kar nekaj predpostavk, ki lahko hitro postanejo trhle (npr. predpostavka o razmerju med zneskom in številom škod v prvem letu). Poleg tega ohranja večino slabosti kot metoda veriženja (saj temelji na podobni logiki). Glavna prednost metode pa je, da v inflacijskih razmerah rast škod ne povezuje **direktno z rastjo inflacije, ampak poskuša inflacijo izluščiti iz podatkov** samih (pogosto namreč škode rastejo hitreje od inflacije zaradi še drugih vplivov, včasih pa celo počasneje kot inflacija). Zato lahko rečemo, da je metoda dobra za podobne zavarovalne vrste kot metoda veriženja, vendar bistveno bolj uporabna predvsem v inflacijskih razmerah. Zato je tudi manj občutljiva na stabilnost, saj se nestabilnosti odražajo v parametrih λ_i. Metoda je zato bolj primerna tudi za daljše repe, kjer je skoraj nemogoče pozabiti na inflacijo.

Ob koncu razdelka o preprostih metodah omenimo še najpreprostejšo metodo, ki se sama zase praktično ne uporablja, je pa dobra v kombinacijah z drugimi metodami. To je metoda **ULR** (ultimate loss ratio method), oz. metoda končnega zavarovalno tehničnega rezultata[1] (poenostavljeno se uporablja izraz škodni rezultat, ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju). Ta metoda temelji na opazovanju kohorte polic opazovanega obdobja in predpostavlja, da je razmerje škod in premij v opazovanem obdobju enako kot v preteklih letih. Škodno rezervacijo opazovanih polic dobimo tako, da od pričakovanega zneska škod (skupno premijo teh polic pomnožimo z zavarovalno tehničnim rezultatom) odštejemo vse že rešene škode. Škodno rezervacijo celotnega portfelja dobimo tako, da seštejemo rezervacijo vseh kohort.

Tudi ta metoda ima več variacij, ki se razlikujejo glede na to, kako sestavljamo kohorto polic (npr. police sklenjene v istem obdobju, police s škodami v istem obdobju, …). Vsekakor pa metoda sama zase zahteva izredno stabilen portfelj, brez kakršnihkoli spreminjanj premij, trendov v škodnem dogajanju, zato je v realnem svetu sama zase zelo redko uporabna. Njena veliko prednost pred ostalimi metodami pa je, da je izjemno preprosta, poleg tega pa za uporabo ne zahteva velikega portfelja, saj pri majhnem portfelju lahko uporabimo škodne rezultate sorodne zavarovalne vrste ali celotnega trga v neki zavarovalni vrsti. Koristna je tudi v primerih, ko so dejanski podatki nezanesljivi ali pomanjkljivi. Kot bomo videli v nadaljevanju, je ravno zaradi tega lahko koristna v kombinaciji z ostalimi metodami.

3.2. POVZETEK OSTALIH DETERMINISTIČNIH METOD

Poleg metod, ki smo jih do sedaj že omenili, obstaja še vrsta metod, ki poskušajo (bolj ali manj uspešno) z raznimi popravki zajeti čimveč koristnih podatkov iz preteklih let in z njimi odpraviti pomanjkljivosti osnovnih metod. Po samem bistvu lahko take poskuse razdelimo v dve skupini metod, in sicer na **razširjene osnovne metode**, za katere je značilno, da dopolnjujejo osnovne metode z dodatnimi podatki, in na metode, ki temeljijo na **kombinaciji osnovnih metod,** in za katere je značilno, kot že ime pove, da kombinirajo rezultate dveh (ali več) metod. Za vsako skupino si bomo nekoliko bolj podrobno pogledali le eno od metod, in sicer tisto, ki jo bomo kasneje uporabili tudi na naših portfeljih.

3.2.1. Razširjene osnovne metode

Ena od najbolj značilnih razširjenih metod je metoda veriženja povprečij. Po sami logiki je ta metoda podobna pavšalni metodi, opisani v 2.1.2., le da ta metoda preko tabel razvoja upošteva

[1] Zavarovalno tehnični rezultat (merodajni) izračunamo kot razmerje med dejanskimi škodami leta in zasluženo premijo leta. Pri tem v dejanskih škodah upoštevamo rešene škode v letu, razliko med višino škodnih rezervacij na začetku in koncu leta ter uveljavljene regrese v letu. V zasluženi premiji upoštevamo fakturirano premijo v letu in razliko med začetno in končno prenosno premijo. Včasih pri izračunu rezultata upoštevamo tudi obresti naložb zavarovalno tehničnih rezervacij in spremembe ostalih zavarovalno tehničnih rezervacij.

dejanske trende v rasti povprečne škode, prav tako pa poskuša zajeti tudi vse bodoče škode. Metoda kot taka ni enotno opredeljena, saj je zopet možnih veliko različic, ki se predvsem razlikujejo po tem, katere podatke pri izpeljavi metode uporabimo. Najbolj znana sta dva pristopa, in sicer:

- pristop, kjer povprečje računamo s podatki o znesku rešenih škod in številu rešenih škod;
- pristop, kjer upoštevamo znesek nastalih škod in število prijavljenih škod (ta pristop bi lahko šteli že med metode, ki uporabljajo kombinacijo osnovnih metod, saj moramo za določitev zneska nastalih škod opredeliti višino škodne rezervacije za nastale in nerešene škode. Najpogosteje to storimo z metodo popisa, možna pa je seveda tudi katerakoli druga metoda).

Podrobneje bomo opisali prvi pristop, ki je zaradi primerjave s pavšalno metodo za nas bolj zanimiv.

Prvi korak je izdelava treh tabel razvoja, in sicer:

a) tabela razvoja $A_{i,j}$ kumulativnih zneskov rešenih škod;
b) tabela razvoja $N_{i,j}$ kumulativnega števila rešenih škod;
c) tabela razvoja povprečij $P_{i,j}$, kjer $P_{i,j}=A_{i,j}/N_{i,j}$.

V drugem koraku s pomočjo metode veriženja izračunamo neznane vrednosti celic v tabelah $N_{i,j}$ in $P_{i,j}$.

V tretjem koraku izračunamo predvideno skupno nastalo obveznost zavarovalnice iz vseh preteklih let, ki jo dobimo kot seštevek zmnožkov ustreznih celic zadnje kolone v tabeli $N_{i,j}$ in $P_{i,j}$, torej $\sum_{i=0}^{n-1} N_{l-i,n-1} \cdot P_{l-i,n-1}$. Od predvidene skupne obveznosti odštejemo še vse že rešene škode in dobimo škodno rezervacijo.

Opisana osnovna oblika metode ne upošteva inflacije, vendar to seveda ni moteče. Glede na to, da metoda temelji na metodi veriženja, namreč lahko zelo preprosto apliciramo tudi metodo veriženja z upoštevanjem inflacije oz. celo metodo separacije (seveda zgolj na tabelah $A_{i,j}$, kjer upoštevamo korekcijo zaradi inflacije v preteklosti, in $P_{i,j}$, kjer povprečja popravimo za predvideno inflacijo v prihodnosti.

Metoda ne odpravlja bistvenih slabosti metod, na katerih temelji (veriženje oz. separacija), razen morda tega, da zaradi spremljave ne samo zneskov, ampak tudi števila škod, opazovalec podatkov lažje zazna odklone v podatkih in vzroke zanje (npr. nenormalna rast ali padec povprečne škode jasno kaže na drugačen pristop v reševanju škod). Če pa metodo primerjamo z metodo iz 2.1.2. vidimo, da je metoda veriženja povprečij zasnovana precej bolj natančno, saj poskuša skupno obveznost zavarovalnice izluščiti dinamično na podlagi podatkov iz preteklosti in projekcije v prihodnosti, medtem ko pavšalna metoda obveznost določi zgolj na statičnem prerezu portfelja ob koncu obdobja. Kljub temu pa moramo opozoriti, da je metoda veriženja povprečij vseeno primerna zgolj za portfelje, kjer je povprečna rešena škoda približno enaka povprečni rezervirani škodi. Kot smo omenili že pri 2.1.2., pa smemo na to upati zgolj pri portfelju s kratkim repom reševanja, pri portfelju z dolgim repom pa mora biti portfelj izredno velik, da se povprečna rezervirana škoda lahko dovolj dobro približa povprečni rešeni škodi.

3.2.2. Kombinacije metod

Glede na to, kako smo opredelili metode, ki sodijo v ta razdelek, bi vanj sodila skoraj vsaka metoda, ki se v praksi dejansko uporablja. Praviloma aktuarji pri določanju škodnih rezervacij dejansko namreč ne uporabljajo ene same metode, ampak kombinirajo rezultate več metod skupaj. Večina izmed njih (če ne drugače vsaj kot začetno aproksimacijo) uporablja metodo popisa in eno od oblik veriženja.

Ena od najbolj znanih kombinacij metod je Bornhuetter – Fergusonov pristop in po njima imenovana **Bornhuetter – Fergusonova metoda (BF metoda)**. Metoda v svoji osnovni – originalni različici namreč kombinira tri osnovne metode in sicer metodo popisa, metodo veriženja ter ULR metodo. Spet pa obstaja tudi pri tej metodi cela vrsta različic, ki se razlikujejo predvsem po tem, kako je sestavljena kohorta škod oziroma polic, in pa po tem, ali je pri metodi veriženja upoštevana inflacija ali ne. Opisali bomo osnovno izvedenko BF metode, ki temelji na osnovni metodi veriženja (brez inflacije) in na kohorti polic (oziroma škod) z nastankom škod v istem obdobju (zato moramo pri ULR metodi upoštevati zasluženo in ne fakturirano premijo). Osnovna metoda BF metode tudi upošteva, da v metodi veriženja uporabljamo zneske nastalih in prijavljenih škod v posameznem letu razvoja (ne pa zneske rešenih škod v posameznem letu razvoja), kar posledično pomeni, da moramo vse nastale in nerešene škode oceniti – v osnovni izvedenki z metodo popisa. (Opomba: Ni odveč že na tem mestu poudarek, da na obeh naših portfeljih ne bomo uporabljali osnovne metode, ampak eno od njenih izvedenk, saj zavarovalnici ne moreta zagotoviti vseh podatkov, ki so za osnovno izvedbo potrebni. Poleg tega je v naših razmerah nujna uporaba metode z upoštevanjem korekcije za inflacijo. Natančneje bomo verzijo izvedenke opisali pri dejanski uporabi).

Opišimo torej navedeno metodo.

Logika metode temelji na dveh predpostavkah, in sicer:

- obnašanje škod v prihodnjih letih razvoja za posamezno leto nastanka bo sledilo razvoju škod v preteklih letih nastanka, ne glede na to, kakšno je bilo obnašanje škod v preteklih – že znanih letih;
- ULR da lahko za posamezno leto nastanka boljši namig o razvoju škod v prihodnje, kot ga za to isto leto nastanka lahko da razvoj škod v preteklih letih razvoja.

BF torej po svoji vsebini sicer sledi metodi veriženja, vendar poskuša z uporabo ULR metode zajeziti nepravilnosti, ki se pri metodi veriženja lahko pojavijo zaradi napak ali odklonov v podatkih (npr. hitrejše ali počasnejše reševanje zaradi drugačne startegije, še ne pomeni, da bo skupno število škod na koncu večje ali manjše – metoda veriženja to spregleda, za ULR pa to ni pomembno).

Oblikovanje škodne rezervacije po BF metodi izvedemo v naslednjih korakih:

a) Najprej razvrstimo kumulativne podatke o znesku nastalih škod (znesek rešenih škod + ocena nerešenih prijavljenih škod) v trikotno tabelo glede na leto nastanka škode, kjer je leto razvoja leto prijave.
b) Na tej tabeli s pomočjo metode veriženja izračunamo faktorje kumulativnega razvoja g_i.
c) S pomočjo ULR metode z znanim zneskom zaslužene premije za vsako leto in pričakovanim škodnim rezultatom za vsako leto nastanka škode izračunamo skupno predvideno nastalo obveznost za posamezno leto.
d) Predvideno nastalo obveznost delimo z ustreznimi faktorji kumulativnega razvoja, s čimer ugotovimo, koliko bi – ob tako predvideni skupni nastali obveznosti in taki dinamiki razvoja – moralo biti nastalih škod v posameznem letu razvoja. Od predvidene skupne nastale obveznosti za posamezno leto odštejemo tako dobljeno oceno za posamezno leto razvoja, s čimer dobimo predvideno preostalo obveznost zavarovalnice po preteku tega leta razvoja za posamezno leto nastanka škode. Poenostavljeno lahko zapišemo bodočo obveznost za posamezno leto nastanka kot

   $$\text{BOL}= (\text{zaslužena premija leta})*(\text{škodni delež})*(1-1/g_i).$$
e) Bodoči obveznosti leta prištejemo vse že dejansko prijavljene obveznosti leta, s čimer dobimo skupno dejansko obveznost za posamezno leto nastanka.
f) Od skupne dejanske obveznosti odštejemo vse že rešene škode. Preostanek je škodna rezervacija za posamezno leto nastanka. Seštevek po vseh letih nastanka je celotna škodna rezervacija.

BF torej v svoji osnovni obliki v bistvu ob znani škodni rezervaciji za nastale prijavljene škode nudi recept za oblikovanje IBNR rezervacije (iz celotne rezervacije namreč zlahka izluščimo tudi rezervacijo za nastale prijavljene škode, saj naj bi jo konec koncev poznali, če želimo delati s nastalimi škodami)! V primeru pa bomo pokazali, da vendarle v primerih, ko želimo izvedeti le skupno škodno rezervacijo, lahko oceno nastalih škod pridobimo tudi s pomočjo rešenih škod in števila prijavljenih škod.

Ob koncu spet omenimo očitne prednosti oz. slabosti metode. Glede na to, da je ta metoda v prvi vrsti kombinacija metod veriženja in ULR, ima torej tudi podobne slabosti kot ti dve metodi. Dobra stran metode pa je, da s kombinacijo teh dveh metod njunih slabosti ne potencira, ampak jih omili in določene celo odpravlja (predvsem npr. nekonsistentno dinamiko v metodi veriženja in po drugi strani vpliv spreminjanja škodnega deleža pri ULR metodi). Glavna prednost pa je, da za dokaj kvalitetno uporabo ne potrebuje tako velikega portfelja kot npr. veriženje (razlog je ULR, kjer velikost portfelja sploh ni bistvenega pomena). Poleg tega jo zelo lahko prilagajamo različnim predpostavkam (z inflacijo, brez, …). Glavna slabost (ki pa je lahko tudi prednost – odvisno od zanesljivosti preteklih in sedanjih podatkov) pa je, da je vpliv preteklih – bolj razvitih let - za oblikovanje rezervacije precej bolj pomemben kot vpliv še nerazvitih let.

3.3. UPORABA IN ANALIZA METOD NA OBEH PORTFELJIH

Pri konkretni uporabi večine metod, ki smo jih opisali v tem poglavju, se prvič soočimo s problemom premalo razvitih trikotnikov razvoja. Skoraj vse metode namreč temeljijo na predpostavki, da imamo podatke za toliko let, kot je za določen portfelj potrebno, da je metoda lahko uspešna. V našem primeru je zadovoljivo dobro razvit kasko portfelj, AO pa žal ne.

Posledica tega dejstva je, da bomo v resnici v vseh primerih uporabili kombinirano metodo, kjer bomo za vsa leta pred letom 1995 rezervacijo za ta leta ocenili z metodo popisa, prav tako pa bomo to storili za leto 1995. Tako dobljeno oceno bomo – metodi primerno – uporabili za določitev ocene ostalih let (npr. pri trikotniških metodah se bomo obnašali, kot da so tabele do konca razvite, tako dobljene rezultate pa zvišali skladno z razmerjem leta 1995). Kjer bo to potrebno, bomo popravek natančneje opredelili ob prikazu rezultatov metode.

3.3.1. Rezultati portfelja A

V nadaljevanju predstavljamo rezultate vseh opisanih metod na AO portfelju, po enakem vrstnem redu, kot so bile opisane v tem poglavju. Najprej osnovna metoda:

Tabela 3.1 – osnovna metoda veriženja na AO portfelju z rezultati (v SIT) na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	1.203.621.595	2.193.984.559	2.583.365.387	2.822.347.041	3.034.091.468	3.178.100.509	3.342.253.196	3.482.627.830	140.374.634	0
1996	1.312.426.838	2.304.706.573	2.798.649.091	3.065.730.656	3.202.036.112	3.307.976.040	3.478.836.953	3.624.948.105	316.972.065	170.860.913
1997	1.619.429.770	2.676.225.750	3.093.134.227	3.333.477.814	3.522.883.870	3.664.083.866	3.853.338.173	4.015.178.377	492.294.507	330.454.304
1998	1.591.691.404	2.603.008.701	3.076.050.545	3.324.564.769	3.518.328.942	3.659.346.373	3.848.355.984	4.009.986.935	685.422.166	523.791.215
1999	2.032.341.674	3.405.789.349	3.826.256.120	4.155.816.939	4.398.028.623	4.574.305.120	4.810.573.442	5.012.617.526	1.186.361.406	984.317.322
2000	2.038.767.973	3.397.466.536	3.962.797.307	4.304.118.610	4.554.973.697	4.737.540.677	4.982.240.311	5.191.494.404	1.794.027.868	1.584.773.775
2001	2.232.406.498	3.777.799.784	4.406.417.151	4.785.948.055	5.064.885.399	5.267.890.047	5.539.982.859	5.772.662.139	3.540.255.641	3.307.576.361
Vsota	12.030.685.752	16.581.181.466	15.377.465.370	12.546.120.280	9.759.011.450	6.486.076.549	3.342.253.196		8.155.708.287	6.901.773.888
Vsota-zadnji	9.798.279.254	13.183.714.930	11.551.199.250	9.221.555.511	6.236.127.580	3.178.100.509	0			
f-utežen		1,692254429	1,166397745	1,086131406	1,058282568	1,040080798	1,051651194			
							Rezervacija pred 1.1.95		1.160.590.847	
							Skupaj		9.316.299.134	

V stolpcu Ult je za leto 1995 pričakovan končen znesek rešenih škod, ki je dobljen s seštevkom že rešenih škod in po popisu ocenjenih nerešenih škod. Za ostala leta je v stolpcu Ult ocena, ki je dobljena tako, da je ocenjen znesek iz stolpca 6 zvišan v enakem razmerju, kakršno je veljalo v letu 1995. Ocene v stolpcu 6 pa so dejanske končne ocene posameznega leta po metodi veriženja.

V stolpcu Rezervacija je prikazana celotna rezervacija za posamezno leto (Ult – zadnji dejanski znesek rešenih škod), v zadnjem stolpcu pa rezervacija, ki bi jo dobili po metodi veriženja brez dodatne korekcije zaradi ne dovolj razvite tabele.

V predzadnji vrstici je prikazana rezervacija za škode, ki so nastale pred 1.1.1995 in je bila ocenjena po metodi popisa, v zadnji vrstici pa celoten ocenjen znesek potrebne rezervacije našega AO portfelja na dan 31.12.2001 po tako korigirani metodi veriženja.

V praksi se zelo velikokrat zgodi, da tabele razvoja niso dovolj razvite, poleg tega pa tudi nimamo ustrezne ocene nerešenih škod vsaj za prvo leto. V takem primeru si lahko pogosto pomagamo tako, da tabeli dodamo toliko stolpcev, kolikor jih po naši oceni zadošča, faktorje razvoja za te stolpce pa določimo skladno s trendom padanja faktorjev. Faktor razvoja za zadnji stolpec naj ne sledi trendu, ampak naj bo večji od predzadnjega (običajno dvakratnik). V zadnjem faktorju namreč upoštevamo (podobno, kot smo to storili v stolpcu Ult) možnost, da tudi ta stolpec v resnični tabeli razvoja ne bi bil zadnji, zato vključuje še vse bodoče marginalne faktorje.

Sledijo rezultati metode veriženja z upoštevanjem inflacije. Vsi znani rešeni zneski škod so tu valorizirani z ustreznim faktorjem inflacije od sredine leta rešitve škode (30.6. posameznega leta) do dne 31.12.2001. Bodoče škode so korigirane s pričakovano dejansko rastjo škod.

Tabela 3.2 - metoda veriženja z upoštevanjem korekcije za inflacijo za AO portfelj z rezultati (v SIT) na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	2.025.649.324	3.531.561.109	4.076.201.958	4.384.258.506	4.644.455.565	4.805.447.245	4.972.899.401	5.113.274.035	140.374.634	0
1996	1.995.631.013	3.383.568.058	4.020.278.972	4.348.475.746	4.500.855.375	4.608.924.696	4.769.528.764	4.904.162.667	295.237.971	160.604.068
1997	2.265.154.162	3.627.404.846	4.139.712.826	4.408.399.553	4.601.612.670	4.736.995.110	4.902.061.961	5.040.437.001	438.824.331	300.449.291
1998	2.051.751.470	3.294.484.466	3.823.310.994	4.076.820.354	4.264.756.665	4.390.228.583	4.543.211.896	4.671.457.343	594.636.989	466.391.541
1999	2.497.394.303	4.032.809.353	4.461.727.507	4.783.573.396	5.004.090.137	5.151.313.726	5.330.818.056	5.481.295.992	1.019.568.485	869.090.550
2000	2.279.194.967	3.665.203.370	4.209.021.505	4.512.638.493	4.720.665.475	4.859.550.526	5.028.887.982	5.170.843.058	1.505.639.687	1.363.684.611
2001	2.277.277.869	3.739.389.282	4.294.214.621	4.603.977.000	4.816.214.572	4.957.910.740	5.130.675.687	5.275.504.018	2.998.226.149	2.853.397.818
Vsota	15.392.053.107	21.535.031.203	20.521.232.257	17.217.954.159	13.746.923.610	9.414.371.941	4.972.899.401		6.992.508.246	6.013.617.879
Vsota-zadnji	13.114.775.238	17.869.827.833	16.059.504.750	13.141.133.804	9.145.310.940	4.805.447.245	0			
f-utežen		1,642043482	1,14837325	1,072134815	1,046098747	1,029420651	1,034846321	1,028227926		
							Rezervacija pred 1.1.95		1.160.590.847	
							Skupaj		8.153.099.093	

Osnovni komentar tabele je identičen komentarju tabele 3.1. Opozorimo pa na pričakovano dejstvo, da je potrebna rezervacija po metodi veriženja z vključeno inflacijo nižja, kot po osnovni metodi. Osnovna metoda namreč implicitno tudi v bodočih škodah upošteva enako nadaljnjo inflacijo, kot je vgrajena v podatkih, metoda z upoštevanjem inflacije pa ta učinek uniči. Zaradi tega je morda tudi nekoliko sporno, ali je smotrno pri obeh metodah uporabiti isto oceno rešenih škod za leta pred 1.1.1996. Metoda popisa namreč temelji na sedanji vrednosti vseh še nerešenih škod (torej brez inflacije), zato metodološko ni enaka osnovni metodi veriženja. Za tako kombinirano osnovno metodo veriženja torej lahko zapišemo, da le delno upošteva bodočo inflacijo. Ni pa odveč pripomba, da v praksi aktuarji pri normalni letni inflaciji le-te ne izpostavljajo kot poseben problem. (Primer: ocena rezervacije za leto 1995 lahko vsebuje zaradi same napake ocene bistveno višjo napako, kot bi jo prinesla inflacija od 31.12.2001 do dejanske rešitve). Zaradi tega lahko povsem mirno uporabimo enako oceno rezervacij za škode pred 1.1.1996 tudi pri metodi separacije. Rezultati te so:

Tabela 3.3 - metoda separacije z rezultati (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001

Zneski/rešene škode v 1. Letu

AY	0	1	2	3	4	5	6	Do konca	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	150.012	123.433	48.530	29.785	26.391	17.948	20.459	17.495	140.374.634	0
1996	166.774	126.092	62.767	33.939	17.321	13.462	22.486	19.229	328.278.182	176.955.372
1997	199.290	130.051	51.305	29.577	23.309	18.095	24.714	21.134	519.605.993	347.867.935
1998	198.763	126.288	59.071	31.033	26.625	19.888	27.163	23.229	776.016.235	590.001.961
1999	231.224	156.260	47.837	38.240	29.264	21.859	29.855	25.530	1.272.259.717	1.047.861.785
2000	230.800	153.812	68.240	42.030	32.163	24.024	32.813	28.060	2.008.122.373	1.760.254.654
2001	293.371	178.528	75.002	46.194	35.350	26.405	36.064	30.840	3.259.784.643	3.025.104.819
c	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6		8.304.441.777	6.948.046.526
332.922	0,4506	0,2785	0,1064	0,0597	0,0415	0,0282	0,0351			
	la0	la1	la2	la3	la4	la5	la6			
	1,0000	1,1956	1,3442	1,4139	1,5044	1,5906	1,7520			

Diagonale	150.012	290.207	373.912	421.366	469.147	510.977	583.283			
Vrstice	1.470.233	815.936	269.511	124.334	67.020	31.410	20.459			
	c*la0	c*la1	c*la2	c*la3	c*la4	c*la5	c*la6			
	332.922	398.050	447.522	470.712	500.852	529.551	583.283	**povprečna inflacija**		
		1,1956	1,1243	1,0518	1,064	1,0573	1,10147	**1,09909**		
	la7	la8	la9	la10	la11	la12	la13		Rez. pred 1.1.95	**1.160.590.847**
	1,9256	2,1164	2,3261	2,5566	2,8100	3,0884	3,3944		**Skupaj**	**9.465.032.624**

V osnovni tabeli so prikazani rešeni zneski škod posameznega leta v posameznem letu razvoja (ne kumulativni), ki so deljeni s številom rešenih škod v prvem letu. Pod tabelo so izpeljani vsi parametri. Bodoča inflacija je upoštevana kot povprečna inflacija znanih let. Dejanska nerazvitost tabele je upoštevana na enak način kot pri prejšnjih metodah (torej se obnašamo, kot da je tabela razvita do konca, nato pa dobljene rezultate popravimo v enakem razmerju kot leto 1995).

Končni rezultat ocene po metodi separacije je višji od obeh metod veriženja, kar je seveda posledica dejstva, da separacija pri bodočih škodah upošteva poleg inflacije tudi realno rast škod. Seveda pa je tu rezultat izredno občutljiv na našo oceno bodoče inflacije (ob neupoštevanju le te, torej bodoči lambda = 1, bi bila skupna rezervacija zgolj 7.700.000.000 SIT, ob upoštevanju zgolj realne rasti škod pa na podobnem nivoju, kot ga da metoda veriženja z upoštevanjem inflacije in korekcijo za realno rast). Vse to pa kaže, da pravzaprav v ekonomskem okolju z inflacijo, kot jo imamo pri nas, uporaba ta metode verjetno ni smotrna za samo oblikovanje rezervacij, saj nam ne pove bistveno več novega, kot izvemo že iz preprostejših metod veriženja, je pa bolj občutljiva za špekulacije o prihodnjem dogajanju. Zna pa biti izredno koristna, ko želimo oceniti, kako naše škode realno naraščajo, saj nam to nakaže primerjava lambd z uradno stopnjo inflacije.

Zadnja izmed osnovnih metod, ki smo jo opisali, je metoda ULR. Tudi pri tej metodi imamo pravzaprav dve možnosti glede upoštevanja inflacije – ali enostavno uporabimo metodo na podatkih, ki jih imamo, ali pa vse podatke preoblikujemo na sedanjo vrednost (na dan 31.12.2001). Seveda pa je od teh podatkov odvisen tudi pričakovan škodni rezultat (brez korekcije podatkov mora biti seveda slabši, saj so izplačila škod bistveno kasnejša, kot je vplačilo premij, zato so izplačila brez korekcije za inflacijo realno previsoka). Rezultati te metode po obeh verzijah so:

Tabela 3.4 - rezultati ULR metode (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001 - podatki korigirani za inflacijo

Leto	PP začetek-dejansko	F. premija - dejansko	Zasl. premija- realno	Že rešeno - realno	ŠR - realni	Rezerva - realno
1995	1.286.517.094	3.388.157.000	5.461.565.991	4.972.899.401	0,9362	140.327.911
1996	1.429.463.438	3.738.449.500	5.459.835.496	4.608.924.696	0,9312	475.383.314
1997	1.577.251.844	4.087.734.000	5.511.537.233	4.601.612.670	0,9262	503.283.346
1998	1.724.614.975	4.662.195.500	5.697.331.200	4.076.820.354	0,9212	1.171.675.093
1999	1.966.980.281	5.088.241.500	6.031.683.475	4.461.727.507	0,9162	1.064.621.527
2000	2.146.729.089	5.879.245.000	6.199.490.506	3.665.203.370	0,9062	1.952.898.916
2001	2.480.453.466	7.280.415.500	6.823.715.826	2.277.277.869	0,9062	3.906.509.887
2002	3.071.607.299					
				Rezervacija pred 1.1.95		**1.160.590.847**
				Skupaj		**10.375.290.841**

Tabela 3.5 - rezultati ULR metode (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001 – originalni podatki brez korekcije za inflacijo

Leto	PP začetek-dejansko	F. premija - dejansko	Zasl. premija -dejansk	Že rešeno - dejansko	ŠR - dejanski	Rezerva - dejansko
1995	1.286.517.094	3.388.157.000	3.245.210.656	3.342.253.196	1,0732	140.344.620
1996	1.429.463.438	3.738.449.500	3.590.661.094	3.307.976.040	1,0674	524.762.786
1997	1.577.251.844	4.087.734.000	3.940.370.869	3.522.883.870	1,0617	660.558.299
1998	1.724.614.975	4.662.195.500	4.419.830.193	3.324.564.769	1,0560	1.342.581.993
1999	1.966.980.281	5.088.241.500	4.908.492.693	3.826.256.120	1,0502	1.328.764.797
2000	2.146.729.089	5.879.245.000	5.545.520.623	3.397.466.536	1,0388	2.363.010.940
2001	2.480.453.466	7.280.415.500	6.689.261.666	2.232.406.498	1,0388	4.716.145.996
2002	3.071.607.299					
				Rezervacija pred 1.1.95		**1.160.590.847**
				Skupaj		**12.236.760.279**

PP v tabelah pomeni prenosna premija, F.premija fakturirana premija, ŠR pa škodni rezultat.

Uporaba te metode je v našem primeru zelo sporna. Cena zavarovanja avtomobilske odgovornosti je bila namreč v Sloveniji dolgo časa pod nadzorom države, navidezno sproščena pa je šele od leta 2000. Zato škodni rezultati med posameznimi leti niso primerljivi. V našem primeru je orientacijski škodni rezultat izračunan na podlagi škodnega rezultata leta 1995 (kjer spet vsem že rešenim škodam prištejemo rezervacijo po popisu), nato pa pričakujemo, da se škodni rezultat postopoma izboljšuje. Odstotek izboljšave škodnega rezultata v posameznem letu je v obeh primerih enak. Razlika v končni oceni rezervacije je spet posledica dejstva, da v tabeli 3.5 tudi bodoča izplačila rastejo z inflacijo. Precej visoko ocenjena rezervacija (v primerjavi z ostalimi metodami) nakazuje, da smo bili pri oceni škodnih rezultatov morda nekoliko preveč pesimistični. Očitno pa je tudi ta metoda v nestabilnih zavarovalnih vrstah zelo nagnjena k špekulacijam, saj lahko aktuar pričakovane škodne rezultate prilagaja, kot se mu zdi v danem trenutku najbolj primerno.

Naslednje prikazujemo rezultate metode veriženja povprečij. Glede na to, da pravzaprav ta metoda po samem bistvu ni drugačna od klasičnih veriženj, bomo prikazali zgolj rezultate metode z upoštevanjem korekcije za inflacijo (podatki so torej realni – korigirani za inflacijo). Prikazani sta obe tabeli razvoja - tako tabela razvoja rešenih škod, kot tudi tabela razvoja povprečij.

Tabela 3.6 - tabela razvoja števila rešenih škod za AO portfelj

N(i,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.
1995	8.024	11.220	11.999	13.337	13.456	13.508	13.539	13.921
1996	7.870	11.019	11.688	12.949	13.066	13.095	13.125	13.495
1997	8.126	11.241	11.761	13.029	13.122	13.162	13.192	13.564
1998	8.008	10.781	11.244	12.371	12.474	12.512	12.541	12.894
1999	8.790	11.741	12.154	13.453	13.566	13.607	13.639	14.023
2000	8.834	11.597	12.185	13.489	13.601	13.643	13.675	14.060
2001	7.610	10.360	10.886	12.051	12.151	12.188	12.217	12.561
Vsota	57.260	67.598	58.845	51.685	39.643	26.602	13.539	
Vsota-zadnji	49.650	56.001	46.691	39.315	26.521	13.508	0	
f-utežen		1,36148	1,050776	1,106959	1,008343	1,00305	1,00233	

Tabela 3.7- tabela razvoja povprečnih zneskov rešenih škod (v SIT) z rezultati za AO portfelj na dan 31.12.2001

P(i,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	252.465	314.756	339.726	328.729	345.172	355.761	367.302	367.307	**140.374.634**	0
1996	253.591	307.067	343.981	335.816	344.484	351.974	363.392	363.396	**295.108.243**	160.604.068
1997	278.754	322.694	351.986	338.366	350.693	359.886	371.561	371.565	**438.298.985**	300.113.922
1998	256.213	305.597	340.031	329.560	341.862	350.824	362.205	362.209	**593.504.487**	465.580.017
1999	284.134	343.496	367.115	355.572	368.845	378.515	390.793	390.798	**1.018.438.295**	868.235.674
2000	258.017	316.061	345.658	334.790	347.288	356.392	367.953	367.958	**1.508.281.226**	1.366.383.165
2001	299.268	360.986	394.789	382.377	396.651	407.049	420.253	420.259	**3.001.590.653**	2.856.821.937
Vsota	1.882.441	1.909.670	1.742.839	1.332.470	1.040.348	707.735	367.302		**6.995.596.523**	**6.017.738.784**
Vsota-zadnji	1.583.173	1.593.609	1.375.725	1.002.910	689.656	355.761	0			
f-utežen		1,20623	1,093643	0,968559	1,037329	1,0262	1,0324			
						Rezervacija pred 1.1.95			**1.160.590.847**	
						Skupaj			**8.156.187.370**	

Rezultati te metode so zelo podobni metodi veriženja z upoštevanjem korekcije za inflacijo, kar nakazuje na upravičenost našega pomisleka o smiselnosti metode. Zaradi relativno nizke rezervacije (glede na druge metode) pa se tudi vendarle pojavi dvom, ali niso morda najdlje v rezervaciji tiste škode, ki so tudi najvišje, kar pa pomeni, da je povprečna škoda v rezervaciji precej višja od povprečno rešene škode do sedaj. To pa ta metoda zanemari.

Zadnja izmed opisanih determinističnih metod je bila metoda BF. Zaradi svoje kompleksnosti so predstavljeni rezultati razbiti v dve tabeli, kjer je tabela 3.8.2 nadaljevanje tabele 3.8.1. V tabeli razvoja zneskov so razviti zneski nastalih škod s korekcijo za inflacijo, kjer pa smo (glede na to, da nimamo podatka o znesku nerešenih škod za posamezno leto) za oceno nastalih škod uporabili podatke iz metode veriženja povprečij (število prijavljenih škod iz tabele 1.7 smo pomnožili z zneskom povprečne škode iz tabele 3.7.), za ULR pa je uporabljen podatek iz metode ULR s korekcijo za inflacijo (tabela 3.4). Rezultati so naslednji:

Tabela 3.8.1 - razvoj prijavljenih škod (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	4.287.201.676	4.810.429.811	4.897.297.802	4.947.251.489	4.975.166.784	4.979.941.769	4.981.778.301
1996	4.175.241.679	4.644.931.384	4.732.328.192	4.787.927.824	4.794.650.656	4.797.921.222	4.799.823.334
1997	4.345.827.685	4.783.717.384	4.864.347.053	4.910.049.584	4.915.065.716	4.919.416.897	4.921.358.104
1998	4.305.399.118	4.670.687.050	4.736.428.012	4.772.648.927	4.786.540.826	4.790.758.519	4.792.640.123
1999	4.760.119.771	5.173.779.865	5.237.675.401	5.292.567.035	5.307.900.624	5.312.555.860	5.314.632.608
2000	4.596.526.997	4.940.015.466	5.024.806.058	5.077.221.855	5.091.862.811	5.096.307.607	5.098.290.424
2001	4.533.960.119	5.004.091.612	5.089.582.519	5.142.425.934	5.157.185.296	5.161.665.880	5.163.664.607
Vsota	31.004.277.044	29.023.560.960	24.468.076.460	19.417.877.825	14.684.883.156	9.777.862.991	4.981.778.301
Vsota-zadnji	26.470.316.925	24.083.545.494	19.230.401.059	14.645.228.897	9.769.817.440	4.979.941.769	0
f-utežen		1,096456874	1,015966543	1,009748978	1,002707657	1,000823511	1,000368786
g		1,159009644	1,057049913	1,040437719	1,030392446	1,02761003	1,026764478

Tabela 3.8.2 - rezultati BF metode (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001

AY	ULR-prič.	BOL	Skupaj	Rezervacija
1995	5.113.227.312	131.449.010	5.113.227.312	**140.327.911**
1996	5.084.308.010	132.531.709	4.930.452.931	**321.528.235**
1997	5.104.896.016	137.159.358	5.052.225.074	**450.612.404**
1998	5.248.495.448	154.809.571	4.927.458.498	**850.638.144**
1999	5.526.349.034	214.787.437	5.452.462.838	**990.735.332**
2000	5.618.102.286	303.213.919	5.243.229.385	**1.578.026.014**
2001	6.183.787.755	848.381.110	5.382.341.228	**3.105.063.359**
Vsota				**7.436.931.399**
Vsota-zadnji				
f-utežen	1,026385961	Rezervacija pred 1.1.95		**1.160.590.847**
g	1,026385961	Skupaj		**8.597.522.246**

Rezultat je seveda (že iz definicije) neka vmesna vrednost med metodama, ki smo ju izbrali za osnovo (veriženje povprečij in ULR), precej bližje pa je veriženju, kar zopet kaže na to, da je ULR bil morda preveč pesimističen in zato premalo relevanten.

3.3.2. Rezultati portfelja B

Poglejmo sedaj, kakšne rezultate nam izbrane metode dajo na kasko portfelju. Same vsebine tabel ne bomo ponovno komentirali, saj so vsebinsko povsem enako zasnovane, kot so bile pri AO portfelju. Zato bomo, kjer bo to seveda sploh potrebno, na kratko komentirali zgolj dobljene rezultate posamezne metode.

Začnimo spet z osnovno metodo veriženja.

Tabela 3.9 – osnovna metoda veriženja na kasko portfelju z rezultati (v SIT) na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	1.355.945.291	1.632.326.020	1.641.702.555	1.645.207.040	1.659.263.325	1.660.822.790	1.667.182.703	1.675.518.617	**8.335.914**	0
1996	1.702.679.402	2.050.733.309	2.072.941.700	2.082.432.555	2.078.730.668	2.078.722.497	2.086.682.705	2.097.116.118	**18.393.621**	7.960.208
1997	1.912.585.199	2.298.373.187	2.301.577.239	2.309.357.347	2.331.819.741	2.332.787.463	2.341.720.580	2.353.429.183	**21.609.442**	9.900.839
1998	1.920.490.600	2.326.893.502	2.344.941.381	2.360.465.594	2.373.296.959	2.374.281.894	2.383.373.909	2.395.290.779	**34.825.184**	22.908.315
1999	2.168.837.430	2.635.276.416	2.658.553.195	2.670.095.200	2.684.609.694	2.685.723.826	2.696.008.469	2.709.488.512	**50.935.317**	37.455.275
2000	2.230.573.213	2.618.111.571	2.636.320.747	2.647.766.231	2.662.159.346	2.663.264.161	2.673.462.798	2.686.830.112	**68.718.541**	55.351.227
2001	2.725.376.786	3.273.440.503	3.296.207.546	3.310.517.902	3.328.513.700	3.329.895.057	3.342.646.473	3.359.359.705	**633.982.920**	617.269.687
Vsota	14.016.487.922	13.561.714.004	11.019.716.069	8.397.462.536	6.069.813.734	3.739.545.287	1.667.182.703		**836.800.939**	750.845.551
Vsota-zadnji	11.291.111.136	10.943.602.434	8.361.162.874	6.036.996.942	3.737.993.993	1.660.822.790	0			
f-utežen		1,201096494	1,00695508	1,004341461	1,005435946	1,000415007	1,003829375	1,005		
							Rezervacija pred 1.1.95		**9.327.722**	
							Skupaj		**846.128.661**	

Uporabili smo povsem enako metodo za podaljšanje tabele, kot smo to storili pri AO portfelju, čeprav rezultati leta 1996 kažejo, da je tak pristop morda neupravičen. Iz leta 1996 je namreč razvidno, da je tabela verjetno dovolj razvita, obstoječe rezervacije pred 1996 (na katerih temelji dokončen razvoj tabele za ostala leta) pa morda prej izjema kot pravilo. Izbrana enaka metodologija, kot v AO-ju nam zato zagotavlja, da so dobljeni rezultati precej »varni« - dovolj visoki.

Podoben komentar glede razširitve tabele razvoja in uporabe tako dobljenih rezultatov na kasko portfelju velja skoraj pri vseh v nadaljevanju predstavljenih tabelah, zato tega ne bomo več omenjali.

Sledijo rezultati metode veriženja s korekcijo za inflacijo.

Tabela 3.10 - metoda veriženja z upoštevanjem korekcije za inflacijo za kasko portfelj z rezultati (v SIT) na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	2.282.004.305	2.702.259.314	2.715.374.609	2.719.892.024	2.737.164.753	2.738.908.122	2.745.395.870	2.753.731.783	8.335.914	0
1996	2.589.035.610	3.075.871.020	3.104.498.490	3.116.161.101	3.112.022.659	3.112.014.323	3.119.385.860	3.128.857.329	16.843.006	7.371.537
1997	2.675.201.113	3.172.496.675	3.176.433.897	3.185.131.495	3.208.045.383	3.208.996.980	3.216.598.243	3.226.364.880	18.319.497	8.552.860
1998	2.475.586.287	2.974.984.742	2.995.160.963	3.010.997.213	3.023.028.998	3.023.925.714	3.031.088.592	3.040.291.962	29.294.748	20.091.379
1999	2.665.123.839	3.186.568.850	3.210.313.492	3.221.213.267	3.234.085.064	3.235.044.385	3.242.707.348	3.252.553.260	42.239.768	32.393.855
2000	2.493.619.336	2.888.947.215	2.906.075.923	2.915.942.739	2.927.594.691	2.928.463.098	2.935.399.851	2.944.312.678	55.365.463	46.452.636
2001	2.780.156.859	3.296.711.346	3.316.257.707	3.327.517.187	3.340.813.769	3.341.804.749	3.349.720.598	3.359.891.438	579.734.579	569.563.739
Vsota	17.960.727.350	18.001.127.816	15.201.781.452	12.032.181.833	9.057.232.795	5.850.922.446	2.745.395.870		750.132.974	684.426.006
Vsota-zadnji	15.180.570.491	15.112.180.601	11.991.467.960	9.021.184.620	5.849.187.412	2.738.908.122	0			
f-utežen		1,185800483	1,005929048	1,003395237	1,003995947	1,000296628	1,002368735	1,003036325		
							Rezervacija pred 1.1.95		9.327.722	
							Skupaj		759.460.696	

Vpliv krajšega repa reševanja kasko portfelja glede na AO portfelj je opazen tudi pri primerjavi relativne razlike rezultatov te metode in osnovne metode med kasko in AO portfeljem. Relativna razlika med osnovno metodo in metodo z upoštevanjem inflacije je namreč pri kasko portfelju manjša (predvsem je pri tem potrebno primerjati relativno razliko med rezultatoma v zadnji koloni), kar pomeni, da je vpliv inflacije na končni rezultat manjši. To pa lahko pomeni le, da bo čas od oblikovanja rezervacije škode do dejanskega izplačila pri kasko portfelju krajši kot pri

AO portfelju. Po definiciji to pomeni, da ima kasko torej krajši rep. Zaradi navedenega lahko zelo majhno razliko pričakujemo tudi med tema metodama in metodo separacije. Poglejmo:

Tabela 3.11 - metoda separacije z rezultati (v SIT) za kasko portfelj na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6	Do konca	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	139.207	28.374	963	360	1.443	160	653	856	**8.335.914**	0
1996	143.245	29.281	1.868	798	-311	-1	691	905	**18.971.397**	8.210.252
1997	151.817	30.623	254	618	1.783	90	759	995	**23.237.421**	10.702.010
1998	156.112	33.036	1.467	1.262	1.158	99	834	1.094	**39.190.020**	25.736.214
1999	150.124	32.286	1.611	925	1.273	109	917	1.202	**63.944.242**	46.579.049
2000	168.256	29.233	1.530	1.016	1.399	120	1.008	1.321	**84.776.986**	67.263.216
2001	199.713	38.629	1.682	1.117	1.538	132	1.108	1.452	**623.065.975**	603.251.245
c	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6		**861.521.953**	761.741.985
168.453	0,8264	0,1559	0,0062	0,0037	0,0047	0,0004	0,0028			
	la0	la1	la2	la3	la4	la5	la6			
	1,0000	1,0372	1,0934	1,1306	1,1056	1,2053	1,3906			

Diagonale	139.207	171.619	182.061	188.963	185.655	202.476	234.254			
Vrstice	1.108.473	182.833	6.164	3.038	2.915	159	653			
	c*la0	c*la1	c*la2	c*la3	c*la4	c*la5	c*la6			
	168.453	174.717	184.190	190.454	186.242	203.042	234.254	**povprečna inflacija**		
		1,0372	1,0542	1,034	0,9779	1,0902	1,15372	**1,05787**		
	la7	la8	la9	la10	la11	la12	la13		Rez. pred 1.1.95	**9.327.722**
	1,4711	1,6169	1,7771	1,9532	2,1467	2,3594	2,5932		**Skupaj**	**870.849.675**

Rezultati so v skladu s pričakovanji višji od obeh predhodnih metod, razlika pa je (predvsem ko primerjamo rezultate, ki bi jih dala neokrnjena metoda) manjša, kot pri AO portfelju.

Ni odveč, da opozorimo še na različni povprečni inflaciji, ki ju metoda izlušči pri naših portfeljih ob enakih stopnjah dejanske inflacije. To dejstvo nam nakaže, v čem je smotrnost uporabe metode separacije – lepo je vidno, da pri AO portfelju škode tudi realno rastejo (pri kasku pa - zanimivo – stagnirajo oz. celo rahlo padajo).

Sledi rezultat ULR metode. Za razliko od AO portfelja bomo tu prikazali zgolj realni rezultat, saj so razlike med realno in dejansko verzijo realno spet bistveno manjše kot pri AO portfelju.

Tabela 3.12 - rezultati ULR metode (v SIT) za AO portfelj na dan 31.12.2001 - podatki korigirani za inflacijo

Leto	PP začetek-dejansko	F. premija - dejansko	Zasl. premija- realno	Že rešeno - realno	ŠR - realni	Rezerva - realno
1995	938.706.911	2.472.168.000	3.985.030.408	2.745.395.870	0,6910	8.336.256
1996	1.043.007.679	3.133.285.500	4.340.241.472	3.112.014.323	0,6910	0
1997	1.321.933.152	3.481.154.500	4.663.928.182	3.208.045.383	0,6910	14.818.072
1998	1.468.699.084	3.862.646.500	4.771.627.333	3.010.997.213	0,6910	286.288.412
1999	1.629.650.558	3.697.765.000	4.629.391.243	3.210.313.492	0,7252	146.876.476
2000	1.560.087.054	3.608.015.500	4.075.830.752	2.888.947.215	0,7594	206.082.343
2001	1.522.221.739	3.920.080.500	3.864.567.524	2.780.156.859	0,7594	154.447.506
	1.653.881.963					
				Rezervacija pred 1.1.95		**9.327.722**
				Skupaj		**826.176.788**

Uporaba ULR metode pri kasku je nekoliko bolj smiselna, kot je bila pri AO zavarovanjih. V vseh letih je prišlo namreč le enkrat do spremembe premij - v letu 1999 je bilo 15% znižanje premij polnega kaska osebnih vozil, toda zaradi ohranitve cen ostalih vrst kaska (tovornjaki, delne kombinacije,..) znižanje v resnici ni v tolikšni meri vplivalo na skupni škodni rezultat.

Sledita tabeli z rezultati veriženja povprečij - tako kot pri AO portfelju - spet z realnimi, tj. za inflacijo korigiranimi, podatki.

Tabela 3.13 - tabela razvoja števila rešenih škod za kasko portfelj

N(i,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.
1995	9.741	12.019	12.278	13.032	13.059	13.063	13.070	13.110
1996	11.887	14.427	14.647	15.138	15.166	15.166	15.173	15.219
1997	12.598	15.250	15.440	16.228	16.259	16.261	16.269	16.318
1998	12.302	14.853	15.080	15.921	15.951	15.954	15.962	16.010
1999	14.447	17.349	17.529	18.406	18.442	18.444	18.453	18.509
2000	13.257	15.800	16.030	16.832	16.864	16.867	16.875	16.926
2001	13.647	16.489	16.730	17.567	17.601	17.603	17.612	17.665
Vsota	87.878	89.696	74.973	60.319	44.483	28.229	13.070	
Vsota-zadnji	74.231	73.896	57.444	44.398	28.225	13.063	0	
f-utežen		1,208329	1,014568	1,050058	1,001915	1,00014	1,0005	

Tabela 3.14 - tabela razvoja povprečnih zneskov rešenih škod (v SIT) z rezultati za kasko portfelj na dan 31.12.2001

P(i,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	Ult.	Rezervacija	Rezervacija-Ult
1995	234.280	224.842	221.167	208.709	209.600	209.669	210.061	210.056	**8.335.914**	0
1996	217.813	213.210	211.962	205.850	205.204	205.204	205.587	205.582	**16.743.460**	7.371.537
1997	212.351	208.039	205.728	196.274	197.315	197.348	197.717	197.712	**18.218.454**	8.587.599
1998	201.234	200.295	198.625	189.121	189.519	189.551	189.905	189.901	**29.311.882**	20.209.091
1999	184.476	183.680	183.143	174.936	175.305	175.334	175.662	175.658	**40.931.905**	31.260.370
2000	188.098	182.851	181.174	173.056	173.421	173.449	173.774	173.769	**52.274.775**	43.497.675
2001	203.727	199.558	197.729	188.869	189.266	189.298	189.652	189.647	**569.962.724**	559.995.977
Vsota	1.441.980	1.212.916	1.020.624	799.954	612.119	414.873	210.061		**735.779.114**	**670.922.248**
Vsota-zadnji	1.238.253	1.030.066	837.481	610.833	414.804	209.669	0			
f-utežen		0,979538	0,990834	0,95519	1,00211	1,0002	1,0019			
						Rezervacija pred 1.1.95			**9.327.722**	
						Skupaj			**745.106.836**	

Relativni razkorak med to metodo in ostalimi je pri kasko portfelju še bolj izrazit, kot je bil pri AO portfelju. Razvoj povprečne škode je tu celo padajoč (kar je logično, saj je večina pravih škod rešenih hitro, sledi pa veliko odklonitev in škod, ki so zastarale – vse te so rešene z zneskom nič. Kot smo že omenili tudi v prvem poglavju, je povsem realna tudi možnost negativne škode, ki tudi povzroči znižanje povprečne skupne škode. Naš portfelj tak primer celo dejansko ima, saj je v letu 1996 skupen znesek rešenih škod po petih letih razvoja nižji, kot po štirih letih razvoja.) Rezervacija za vse prihodnje škode upošteva tako – znižano – povprečje, kar je lahko sporno (za leta, kjer so v rezervaciji tudi še nezastarane škode, je to sprejemljivo, za leta, kjer so na rešetu nerešenih škod ostale zgolj dejanske škode, pa prav gotovo ne).

Ostanejo nam še rezultati BF metode. Glede na večjo zanesljivost ULR metode, bi lahko tudi pri tej metodi pričakovali, da bo dala bolj verodostojne rezultate, kot jih je dala pri AO portfelju, po drugi strani pa naša verzija BF metode temelji na tudi na veriženju povprečij, za katero pa smo pravkar ugotavljali, da ji ne gre preveč zaupati. Poglejmo torej rezultate.

Tabela 3.15.1 - razvoj prijavljenih škod (v SIT) za kasko portfelj na dan 31.12.2001

AY	0	1	2	3	4	5	6
1995	2.470.649.542	2.729.459.789	2.740.949.863	2.742.976.906	2.744.762.383	2.744.982.942	2.745.371.546
1996	2.869.590.394	3.100.017.371	3.110.810.444	3.116.792.891	3.117.656.337	3.117.800.244	3.118.274.731
1997	3.032.199.658	3.199.889.061	3.212.888.622	3.215.735.675	3.216.032.243	3.216.247.179	3.216.734.372
1998	2.889.328.599	3.017.302.634	3.022.002.675	3.023.559.860	3.024.614.767	3.024.815.970	3.025.272.024
1999	3.022.627.110	3.162.705.215	3.165.831.919	3.169.327.283	3.170.427.904	3.170.637.822	3.171.113.617
2000	2.806.654.915	2.924.105.697	2.933.015.390	2.936.238.642	2.937.253.553	2.937.447.118	2.937.885.841
2001	3.266.598.911	3.480.780.552	3.491.337.092	3.495.155.985	3.496.358.414	3.496.587.738	3.497.107.496
Vsota	20.357.649.130	18.133.479.767	15.252.483.524	12.099.065.331	9.078.450.962	5.862.783.187	2.745.371.546
Vsota-zadnji	17.091.050.218	15.209.374.070	12.086.651.605	9.075.505.471	5.862.418.720	2.744.982.942	0
f-utežen		1,060992715	1,0028344	1,001027061	1,000324554	1,00006217	1,000141569
g		1,068900826	1,007453502	1,004606046	1,003575313	1,003249704	1,003187336

Tabela 3.15.2 - rezultati BF metode (v SIT) za kasko portfelj na dan 31.12.2001

AY	ULR-prič.	BOL	Skupaj	Rezervacija
1995	2.753.732.126	8.360.580	2.753.732.126	**8.336.256**
1996	2.999.189.756	9.529.054	3.127.329.298	**15.314.975**
1997	3.222.863.455	10.439.429	3.226.471.671	**18.426.288**
1998	3.297.285.625	11.746.830	3.035.306.690	**24.309.477**
1999	3.357.189.968	15.392.473	3.181.224.392	**0**
2000	3.095.029.558	22.898.137	2.947.003.834	**58.056.619**
2001	2.934.604.365	189.163.165	3.455.762.077	**675.605.218**
Vsota				**800.048.833**
Vsota-zadnji				
f-utežen	1,003045336	Rezervacija pred 1.1.95		**9.327.722**
g	1,003045336	Skupaj		**809.376.555**

BF metoda je prav prijetno presenečenje, saj prav z rezultati pokaže, da res zelo učinkovito kombinira rezultate uporabljenih metod. Za razliko od AO portfelja, kjer je BF večjo težo dal veriženju, pa je tu očitno veliko težo prevzela ULR metoda. Ob tem je potrebno h komentarju rezultatov metode dodati, da je metoda za leto 1999 prikazala celo negativno rezervacijo, ki pa smo jo seveda ročno postavili na 0. Negativna rezervacija je aktuarsko sicer možna (ker so možni negativni rešeni zneski in ker lahko včasih pričakujemo po rešitvi škod naknadno uveljavitev regresnega zahtevka), vendar pa iz načela previdnosti ni priporočljivo imeti negativnih rezervacij (tudi računovodsko je negativna rezervacija med obveznostmi sporna, saj to potem ni obveznost).

Ob koncu poglavja dodajmo le, da namerno nismo komentirali rezultatov po letih, ampak samo skupne – pa še te bolj površno in po občutku. Podrobnejšo analizo vseh rezultatov bomo namreč opravili v petem poglavju pri iskanju optimalne metode.

4. PREUČITEV STOHASTIČNIH METOD

V prejšnjih poglavjih smo preleteli glavne deterministične metode oblikovanja škodnih rezervacij, ki se uporabljajo v praksi. Vse opisane metode imajo soroden pristop k problematiki ocene bodočih izplačil in sicer da v teoretični model umestijo podatke o preteklih škodah in na podlagi le-teh napovejo bodoča pričakovana izplačila.

V tem poglavju pa se bomo posvetili stohastičnim metodam, kjer v modele vključimo slučajne spremenljivke. Vpeljava slučajnosti nam omogoči, da predpostavke v modelih tudi statistično preverimo in dobimo oceno ne zgolj pričakovanih bodočih izplačil, ampak tudi njihovih varianc, s čemer lahko opredelimo tudi kvaliteto naše ocene. Tako nam npr. deterministične metode opredelijo pričakovan znesek bodočih izplačil in vse, kar lahko o tako dobljenem znesku povemo, je, da dejanski znesek ne bo tak. Ne dajo pa nam niti najmanjše možnosti, da bi lahko ocenili, ali bo razlika med dejanskim in predvidenim zneskom signifikantna ali ne. Stohastične metode pa aktuarju omogočijo ravno to – ne dajo mu zgolj ocene bodočih izplačil, ampak mu tudi povedo, kako dobra je taka ocena.

Ena izmed večjih pomanjkljivosti determinističnih metod je tudi, da jih lahko zelo pogosto uporabljamo brez jasnih predstav, pri katerih predpostavkah so izpeljane in pri katerih so kolikor toliko korektne. Te pomanjkljivosti stohastične metode nimajo, saj so za vsak stohastični model vse predpostavke eksplicitno jasne, vsako izmed njih pa lahko tudi preverimo.

Razvoj stohastičnih metod se je začel dokaj pozno. Aktuarji so se jim namreč resneje posvetili šele po l. 1980. Zato še vedno ne moremo govoriti o standardnih metodah, saj razvoj stohastičnih metod poteka v več smereh. V delu bomo podrobneje opisali tri, ki imajo od vseh znanih pristopov za naše delo najbolj primerno praktično vrednost, saj izbrane metode praktično lahko uporabimo tudi brez zahtevnih statističnih paketov, ki jih potrebujejo nekatere ostale metode.

4.1. OPREDELITEV OSNOV STOHASTIČNEGA PRISTOPA

Bistvo stohastičnih metod je, da poskušajo zelo kompleksno škodno dogajanje vstaviti v čimbolj preprost model s čimmanj možnimi parametri (čimmanj seveda pomeni najmanjše možno število parametrov, pri katerem model še dovolj dobro opisuje značilnosti podatkov). Pri tem je zelo pomembno, da model ločuje med faktorji, ki imajo sistematičen vpliv na dogajanje (npr. inflacijo), in faktorji, ki imajo naključen vpliv (npr. škodna pogostnost).

Parametre v posameznem modelu izbiramo tako, da z njimi dosežemo najboljše možno prilaganje podatkov v model. Seveda se z višanjem števila parametrov model vedno bolje prilagaja obstoječim podatkom, vendar pa s tem povzročimo tudi večjo kompleksnost, nerazumljivost in računsko zahtevnost modela. Poleg tega lahko s prevelikim številom parametrov povzročimo, da je model »prilagojen« obstoječim podatkom, zato nas morda premalo natančno opozori o možnem dogajanju v prihodnosti, poleg tega pa lahko že majhna sprememba v podatkih, na podlagi katerih so bili parametri določeni, povzroči veliko spremembo v parametrih in praktično povsem nov model.

Dober stohastični model tudi ne sme biti preobčutljiv za posamezne naključne motnje v podatkih, prav tako pa mora zagotoviti, da je vse predpostavke možno statistično preveriti in opredeliti stabilnost posamezne predpostavke.

Kljub vsem navedenim zahtevam ne smemo pozabiti, da je še tako dober model še vedno zadovoljiv zgolj za portfelje, ki po značilnostih ustrezajo predpostavkam, na katerih je bil model zasnovan. Za vse ostale je model lahko povsem napačen in močno zavajajoč. Tudi pri ustreznih portfeljih pa se moramo zavedati, da je model zgolj poenostavitev dejanskega dogajanja, ki aktuarju omogoči praktično projekcijo prihodnjega dogajanja. Zato se aktuar nikoli ne sme zanesti zgolj na projekcijo, ki je rezultat enega modela, ampak mora rezultate preveriti tudi s pomočjo drugih modelov, ki temeljijo na podobnih predpostavkah. Nenazadnje pa je potrebno model preveriti tudi na preteklih podatkih in na ta način tudi ugotoviti vpliv posameznih odklonov v portfelju na vrednost parametrov. Na to je treba biti predvsem pozoren v primerih, ko so pretekli podatki neprečiščeni in vsebujejo neznačilne šume. Model je namreč lahko preveč odvisen od teh šumov, kar pa seveda uniči model.

4.2. RAZVRSTITEV GLAVNIH STOHASTIČNIH METOD

V tem razdelku si bomo podrobno ogledali že omenjene tri glavne pristope k stohastičnemu rezerviranju, ki so v svetu trenutno aktualne, in jih bomo obdelali v delu.

Zelo veliko metod temelji na deterministični metodi veriženja, zato bomo temu pristopu tudi posvetili največ pozornosti. Kot že pri determinističnem veriženju obstaja tudi pri stohastičnem pristopu kopica podvariant. Opisali bomo le najpomembnejše.

Drug pomemben pristop je pristop s pomočjo teorije kredibilnosti. Tega pristopa v osnovni obliki ne bomo obravnavali, saj bomo opisali bolj kompleksen pristop s pomočjo teorije prostora stanj in Kalmanovega filtra. Podrobnejša povezava med teorijo kredibilnosti in Kalmanovim filtrom je opisana npr. v (Taylor, 2000, str.304), nakazali pa jo bomo v delu.

Od vsakega stohastičnega modela seveda pričakujemo, da nam kot rezultat vrne matematično upanje skupnega števila nastalih škod in varianco škod ali vsaj varianco matematičnega upanja. Večina modelov zato potrebuje implicitno ali celo eksplicitno predpostavko o porazdelitvi škod. V zadnjem razdelku pa si bomo ogledali metodo, ki ne zahteva nobenih predpostavk o porazdelitvi škod, je pa zelo »računalniško« orientirana.

V svetu sta aktualna še dva pomembna stohastična pristopa, ki ju v delu ne bomo obravnavali. Razloga za to sta povsem različna.

Prvi – grafični pristop – je pravzaprav bolj deterministični kot stohastični pristop in temelji na iskanju krivulje, ki najbolj ustreza danim podatkom, s pomočjo dobljene krivulje pa kasneje modelira bodoča izplačila. S pomočjo tega pristopa ne pridobimo bistveno več novih informacij, kot nam jih dajo že deterministični pristopi. Je pa pristop uporabljen kot eden izmed korakov v razvoju modela s Kalmanovim filtrom.

Drugi pristop, ki ga ne bomo obravnavali, je pristop generaliziranega linearnega modeliranja. Modeli, ki temeljijo na tem pristopu, so pomembni, slabost vseh teh modelov pa je, da so teoretično relativno enostavni, računsko pa zelo zahtevni in obvladljivi le z močnimi statističnimi paketi (GENSTAT, GLIM, SAS, …). Ker je cilj našega dela tudi praktična uporaba vseh pristopov na naših portfeljih, bomo zaradi računske zahtevnosti ta pristop izpustili. Poleg tega pa bomo pokazali, da so ti modeli zgolj poenostavljeni modeli pristopa s Kalmanovim filtrom.

4.2.1. Stohastično veriženje

V poglavju 3.1.1. smo pokazali, da končni rezultat skupne škodne rezervacije po metodi determinističnega veriženja dobimo kot seštevek rezervacij po posameznih letih nastanka škode. V nadaljevanju bomo zato prikazali stohastične aproksimacije veriženja posamezne vrstice – torej rezervacije posameznega leta nastanka škode.

V 3.1.1. smo z $A_{i,j}$ označili kumulativen znesek rešenih škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene do leta $i+j$, z n pa število let, za kolikor že imamo znane podatke. Zaradi lažjega zapisa in poenostavitve izrazov v nadaljevanju »preštevilčimo« i tako, da z $i=1$ označimo prvo leto, za katero imamo podatke (torej $1 \le i \le n$), z j pa leto razvoja (torej tudi $1 \le j \le n$). $A_{i,j}$ nam torej v nadaljevanju pove, kolikšen je kumulativen znesek škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene do vključno leta j. Naša naloga je, da na podlagi znanih $A_{i,j}$ (to so vsi, za katere je $i+j \le n+1$) ocenimo neznane $A_{i,j}$ ($i+j > n+1$). Izpeljali smo naslednje cenilke:

$$\hat{A}_{i,j} = A_{i,n+1-i} \prod_{k=n+1-i}^{j-1} \hat{f}_k; \quad i+j > n+1, \quad (4.2.1.1)$$

kjer

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{l=1}^{n-k} A_{l,k+1}}{\sum_{l=1}^{n-k} A_{l,k}}; \quad 1 \le k \le n-1.$$

Kot smo omenili že v uvodu, je veriženje tipičen primer determinističnega pristopa, ki pa nam žal nič ne pove o standardnem odklonu oz. varianci rezultata. Zato je bilo v preteklih letih izpeljanih veliko poti k iskanju stohastičnega modela, ki bi čimbolj natančno opisal proces veriženja. Opišimo dva glavna tipa.

4.2.1.1. Log-linearni modeli

Log-linearni modeli so se razvili v osemdestih letih, najpomembnejši avtorji na tem področju pa so Kremer, Hertig in Zehnwirth. Vse do Mackovega modela, ki ga bomo opisali v nadaljevanju, so ti modeli veljali za »prave« modele in še zdaj se v literaturi pogosto pod pojmom stohastično veriženje omenjajo (napačno) prav ti modeli.

Pri iskanju stohastičnega modela, ki bi zadovoljivo povzel postopek metode veriženja, moramo najprej pretvoriti enačbo veriženja (4.2.1.1) v stohastično obliko. V nadaljevanju predstavljamo eno od možnih poti, ki jo povzemamo po (Mack,1994b).

Iz (4.2.1.1) lahko sklepamo, da velja $\hat{A}_{i,j+1} = \hat{A}_{i,j}\hat{f}_j$, *j>n+1-i.* Stohastično to enačbo lahko posplošimo v

$$E(A_{i,j+1}) = E(A_{i,j})f_j,\ 1 \le j \le n-1\ , (4.2.1.2)$$

kjer so vse $A_{i,j}$ slučajne spremenljivke, $f_1,....,f_{n-1}$ pa neznani parametri. Označimo sedaj s $C_{i,j} = A_{i,j} - A_{i,j-1},\ 1 \le i,j \le n$, slučajne spremenljivke, ki predstavljajo zneske rešenih škod, ki so nastali v letu i in so bili rešeni v letu j (z dogovorom, da velja $A_{i,0} = 0$). Zgornji model (4.2.1.2) lahko prevedemo v ekvivalentni model

$$E(C_{i,j}) = x_i y_j,\ 1 \le i,j \le n,\ (4.2.1.3)$$

z neznanima parametroma $x_i, 1 \le i \le n$ in $y_j, 1 \le j \le n$, kjer $y_1 + \cdots + y_n = 1$.

Dokažimo, da sta modela (4.2.1.2) in (4.2.1.3) res ekvivalentna. Dokaz povzemamo po (Mack, 1994b) in ga izvedemo v dveh korakih:

a) Iz (4.2.1.2) sledi (4.2.1.3)

Iz (4.2.1.2) je očitno, da $E(A_{i,n}) = E(A_{i,j})f_j \cdots f_{n-1}$. Ker je $E(C_{i,j}) = E(A_{i,j}) - E(A_{i,j-1})$, torej velja

$$E(C_{i,j}) = E(A_{i,n})((f_j \cdots f_{n-1})^{-1} - (f_{j-1} \cdots f_{n-1})^{-1}).$$

Če definiramo:

$x_i = E(A_{i,n}),\ 1 \le i \le n,$

$y_1 = (f_1 \cdots f_{n-1})^{-1},$

$y_j = (f_j \cdots f_{n-1})^{-1} - (f_{j-1} \cdots f_{n-1})^{-1}, \qquad 2 \le j \le n-1,$

$y_n = 1 - f_{n-1}^{-1},$

smo dobili (4.2.1.3), saj drži tudi $y_1 + \cdots + y_n = 1$.

b) Iz (4.2.1.3) sledi (4.2.1.2)

Iz definicije $C_{i,j}$ je očitno, da velja:

$$E(A_{i,j}) = E(C_{i,1}) + \cdots + E(C_{i,j}) = x_i(y_1 + \cdots + y_j).$$

Zato

$$\frac{E(A_{i,j+1})}{E(A_{i,j})} = \frac{y_1 + \cdots + y_j + y_{j+1}}{y_1 + \cdots + y_j} = f_j, \qquad 1 \le j \le n-1.$$

(konec dokaza)

Model (4.2.1.3) ima očitno *2n-1* parametrov, zato jih ima zaradi ekvivalentnosti modelov očitno prav toliko tudi model (4.2.1.2). Med tem ko je *n-1* parametrov očitnih (to so namreč $f_1, \ldots, f_{n-1}$), pa nam ostalih *n* parametrov razkrije šele točka a) v dokazu ekvivalentnosti modelov. Tam namreč vidimo, da moramo za vsako leto *i* tudi $E(A_{i,n})$ šteti za parameter modela.

Dokaz nam posredno pokaže tudi vlogo obeh parametrov. Vidimo namreč, da x_i ustreza pričakovanemu skupnemu znesku rešenih škod, ki so nastale v *i*-tem letu, y_i pa deležu porasta rešenih škod v *j*-tem letu razvoja.

Ob predpostavki, da so vsi $C_{i,k}$ med sabo neodvisni, lahko ob poljubni izbrani porazdelitvi ocenimo parametre x_i, y_j (npr. po metodi najmanjših kvadratov ali kaki drugi metodi). Pri tem upoštevamo, da je $E(C_{i,j}) = x_i y_j$. Pri porazdelitvah z dvema parametroma pa praviloma predpostavimo, da je drugi parameter konstanten za vse $C_{i,j}$. Tako je De Vylder že l. 1978 prvi ocenil parametre po metodi najmanjših kvadratov in ob upoštevanju, da je $C_{i,j}$ porazdeljena normalno, torej po $N(x_i y_j, \sigma^2)$.

Pravi razcvet tega pristopa pa je l. 1982 sprožil Kremer (Kremer, 1982), ki je namesto normalne porazdelitve za $C_{i,j}$ raje uporabil lognormalno porazdelitev, torej $LnN(x_i + y_j, \sigma^2)$. Ta namreč upošteva dejstvo, da je porazdelitev $C_{i,j}$ v resnici ponavadi nagnjena v desno, poleg tega pa se model prevede v linearni model za $\ln(C_{i,j})$, parametre pa lahko zaradi tega enostavno ocenjujemo z navadno regresijsko analizo, ki jo lahko izvedemo že s splošno dosegljivimi in uporabljanimi programskimi orodji (kot npr. Excel, Lotus123,..). Vse modele, ki temeljijo na opisani izpeljavi in uporabljajo za $C_{i,j}$ lognormalno porazdelitev, imenujemo log-linearni modeli. Preden si te modele podrobneje ogledamo, zapišimo nekaj osnovnih lastnosti log-normalne porazdelitve.

Definicija: Naj bo slučajna spremenljivka X porazdeljena normalno. Potem je slučajna spremenljivka $Y = e^X$ porazdeljena log-normalno.

Iz definicije sledi, da je porazdelitvena funkcija log-normalne porazdelitve oblike

$$f(y)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma y}\exp\left(\frac{-(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right);\qquad x\geq 0.$$

Enostavno lahko izračunamo tudi vse momente log-normalne porazdelitve, saj

$$E(Y^r)=E((e^X)^r)=M_X(r)=\exp(r\mu+\tfrac{1}{2}r^2\sigma^2).$$

Če je torej $E(X)=\mu,$ $Var(X)=\sigma^2,$ je $E(Y)=\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$ in $Var(Y)=\exp(2\mu+\sigma^2)[\exp(\sigma^2)-1].$

Izpeljimo sedaj (po Christofides,1997) osnovni log-linearen model.

Zapišimo najprej enačbo (4.2.1.3) v obliki $C_{i,j}=x_i y_j \eta_{ij}$, kjer sta x_i oz. y_j parametra, ki predstavljata vpliv *i*-tega leta nastanka škode oz. *j*-tega leta razvoja in veljata zanju enake omejitve oz. predpostavke kot v (4.2.1.3), η_{ij} pa je slučajna spremenljivka napake z $E(\eta_{ij})=1$. Z logaritmiranjem enačbo prevedemo v

$$Z_{i,j}=a_i+b_j+\varepsilon_{ij},\qquad \forall j\leq n-i+1,\qquad \forall i,\ (4.2.1.4)$$

kjer $a_i=\ln(x_i),$ $b_j=\ln(y_j),$ $\varepsilon_{ij}=\ln(\eta_{ij}).$ Ponavadi predpostavimo (brez izgube splošnosti), da je ε_{ij} porazdeljena normalno z $E(\varepsilon_{ij})=0,$ $Var(\varepsilon_{ij})=\sigma^2.$

Ker $\ln(\sum y_j)\neq\sum\ln(y_j),$ s tem izgubimo pogoj $\sum y_j=1,$ zato je model singularen. Da bi lahko uporabili regresijsko analizo, moramo to singularnost odpraviti. Najbolj enostavno to storimo s tem, da postavimo npr. $b_o=0.$ (Nekateri avtorji singularnost odpravijo tudi tako, da postavijo oba ničelna parametra na 0, uvedejo pa neko dodatno konstanto. S tem dobimo model, ki je enak modelu, ki ga bomo navedli v nadaljevanju, in ki ga ne bomo reševali s pomočjo regresijske analize). Ta sprememba ne vpliva na dobljene rezultate, zavedati pa se moramo, da vpliva na interpretacijo dobljenih parametrov, saj parametri sedaj nimajo več enake vsebine, kot so jih imeli v dokazu.

Omenjeni programi nam dajo oceno parametrov regresije po metodi najmanjših kvadratov, kjer so $Z_{i,j}$ odvisne spremenljivke, $a_i,$ b_j neodvisne spremenljivke, σ^2 pa rezultat analize, ki opiše varianco takega modela. Primer takega izračuna v Excelu je npr. priložen v (Christofides, 1997).

Z dobljenimi cenilkami $\hat{Z}_{i,j}$ pa smo prehodili šele pol poti. Zanimajo nas namreč cenilke za $\hat{C}_{i,j}$. Zaradi navedenih relacij med normalno in log-normalno porazdelitvijo velja

$$E(\hat{C}_{i,j})=\exp(E(\hat{Z}_{i,j})+\tfrac{1}{2}Var(\hat{Z}_{i,j})),$$

oziroma

$$Var(\hat{C}_{i,j})=E^2(\hat{C}_{i,j})(\exp(Var(\hat{Z}_{i,j}))-1).$$

Medtem ko je $E(\hat{Z}_{i,j}) = \hat{a}_i + \hat{b}_j$, pa moramo za izračun variance vložiti več truda. Velja namreč

$$Var(\hat{Z}_{i,j}) = Var(\hat{a}_i) + Var(\hat{b}_j) + Cov(\hat{a}_i \hat{b}_j) + \sigma^2.$$

Členi, ki vsebujejo $\hat{a}_i$ oz. $\hat{b}_j$, izvirajo iz napake same cenilke, σ^2 pa predstavlja napako samega procesa oz. podatkov.

Zanima pa nas seveda tudi ocena skupnega zneska škodne rezervacije. Kot že vemo, je skupna škodna rezervacija $\hat{R} = \sum_{i=2}^{n} \hat{A}_{i,n}$, kjer je $\hat{A}_{i,n} = \sum_{k=n-i+2}^{n} \hat{C}_{i,k}$. Zato je enostaven izračun za $E(\hat{R})$, več dela pa nam zopet povzroči izračun $Var(\hat{R})$, saj moramo zopet izračunati vse ustrezne kovariance. Pri tem nam zelo koristi naslednji rezultat

$$Cov(\hat{C}_{i,j}, \hat{C}_{k,l}) = E(\hat{Z}_{i,j})E(\hat{Z}_{k,l})(\exp(Cov(\hat{Z}_{i,j}, \hat{Z}_{k,l})) - 1),$$

kjer

$$Cov(\hat{Z}_{i,j}, \hat{Z}_{k,l}) = Cov(\hat{a}_i, \hat{a}_k) + Cov(\hat{b}_j, \hat{b}_l) + Cov(\hat{a}_i, \hat{b}_l) + Cov(\hat{a}_k, \hat{b}_j),$$

saj z njim prevedemo problem izračuna variance celotne rezervacije na izračun variance oz. kovariance posameznih parametrov modela.

Še starejši – od računalniške podpore neodvisen - pa je naslednji pristop, ki je povzet po (Kremer, 1982).

Zapišimo (4.2.1.4) nekoliko drugače, in sicer:

$$Z_{i,j} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}, \quad \forall j \le n-i+1, \quad \forall i, \ (4.2.1.5)$$

kjer smo definirali

$Z_{i,j} = \ln(C_{i,j}); \ \varepsilon_{ij} = \ln(\eta_{ij});$

$a_i = \ln(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \ln(x_l); \quad b_j = \ln(y_j) - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \ln(y_l); \ \mu = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\ln(x_l) + \ln(y_l)).$

Ob dodatnih predpostavkah, da so ε_{ij} nekorelirani za $j \le n-i+1$, $i \le n$ in $E(\varepsilon_{ij}) = 0$, $Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$, $\sigma^2 \in (0,\infty)$, $j \le n-i+1$, $i \le n$ in ob očitnem dejstvu, da velja $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$, je (4.2.1.5) zelo podobna enačbi dvostranskega modela analize variance, ki se od njega razlikuje po tem, da v našem modelu manjka spodnji desni del matrike podatkov za $Z_{i,j}$. (Za kompletno matriko podatkov so cenilke dobljene po metodi največjega verjetja v takem modelu naslednje:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n^2}\sum_i \sum_j Z_{i,j} \ ;$$

$$\hat{a}_i = \frac{1}{n}\sum_i Z_{i,j} - \hat{\mu};$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{n}\sum_j Z_{i,j} - \hat{\mu}.$$

Da bi lahko uporabili te cenilke, moramo manjkajoče podatke v matriki dopolniti z začetnimi pričakovanimi vrednostmi manjkajočih celic, na podlagi teh podatkov izračunati ocene, na podlagi teh ocen pa nove vrednosti manjkajočih celic. Ta postopek rekurzivno ponavljamo toliko časa, dokler ni razlika med vhodnimi in izhodnimi ocenami parametrov relativno dovolj majhna. Navedeni postopek je v literaturi znan kot »E-M algoritem«.)

Za naš »okrnjeni« model je Kremer izpeljal naslednje direktne cenilke:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{n-i+1}\sum_{j=1}^{n-i+1}\left(Z_{i,j} - \frac{1}{n-j+1}\sum_{l=1}^{n-j+1} Z_{l,j} - \frac{1}{n-j+1}\sum_{l=n-j+2}^{n}\hat{a}_l\right), \qquad i<n;$$

$$\hat{a}_n = Z_{n,1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{i,1};$$

$$\hat{b}_j = \frac{1}{n-j+1}\sum_{i=1}^{n-j+1}\left(Z_{i,j} - \frac{1}{n-i+1}\sum_{l=1}^{n-i+1} Z_{i,l} - \frac{1}{n-i+1}\sum_{l=n-i+2}^{n}\hat{b}_l\right), \qquad j<n;$$

$$\hat{b}_n = Z_{1,n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{1,j};$$

$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i+1}(Z_{i,j} - \hat{a}_i - \hat{b}_j).$$

Cenilka za σ^2 pa je oblike:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i+1}(z_{i,j} - \hat{\mu} - \hat{a}_i - \hat{b}_j)^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n - 1}.$$

Kot pri prejšnjem modelu lahko tudi tu spet uporabimo povezavo med normalno in log-normalno porazdelitvijo, s pomočjo katere dobimo originalne rezultate. V resnici se nam računanje tu močno poenostavi, saj po definiciji σ^2 v tem modelu odraža celotno varianco.

Izpeljemo pa lahko tudi cenilke v osnovnem prostoru podatkov, saj imamo za vse parametre podane eksplicitne izraze v enačbi (4.2.1.5). Zato lahko z inverzno transformacijo enačbe (4.2.1.5) in z upoštevanjem definicij v tej enačbi izpeljemo cenilke $\hat{x}_i$ oz. $\hat{y}_j$. Dobimo:

$$\frac{\hat{x}_i}{\left(\prod_{l=1}^{n}\hat{x}_l\right)^{\frac{1}{n}}} = \exp(\hat{a}_i); \qquad \frac{\hat{y}_j}{\left(\prod_{l=1}^{n}\hat{y}_l\right)^{\frac{1}{n}}} = \exp(\hat{b}_j); \qquad \left(\prod_{i=1}^{n}\hat{x}_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{j=1}^{n}\hat{y}_j\right)^{\frac{1}{n}} = \exp(\hat{\mu}).$$

Ob pogoju $\sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j = 1$ izpeljemo:

$$\frac{\sum \hat{y}_j}{\left(\prod \hat{y}_j\right)^{\frac{1}{n}}} = \sum \exp(\hat{b}_j) \Rightarrow \left(\prod \hat{y}_j\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sum \exp(\hat{b}_j)} \Rightarrow \hat{y}_j = \frac{\exp(\hat{b}_j)}{\sum \exp(\hat{b}_j)}$$

in

$$\left(\prod \hat{x}_i\right)^{\frac{1}{n}} = \exp(\hat{\mu}) \cdot \sum \exp(\hat{b}_j) \Rightarrow \hat{x}_i = \exp(\hat{a}_i) \cdot \exp(\hat{\mu}) \cdot \sum \exp(\hat{b}_j).$$

Ob poznavanju tega rezultata in ob že znani vlogi parametra $\hat{x}_i$ (skupno število rešenih škod, ki so nastale v letu *i*), dejanski izračun parametrov $\hat{y}_j$ za oceno rezerviranih škod ni potreben.

Pri obeh navedenih pristopih dobljene cenilke za originalni prostor podatkov žal niso enake cenilkam, ki so dobljene po metodi največjega verjetja, poleg tega pa tudi niso nepristranske (oboje seveda drži za log-normalen prostor). Kljub temu pa imajo statistično vrednost, saj zelo dobro aproksimirajo metodo veriženja. Verrall je zato v (Verrall, 1994) za log-linearne modele izpeljal nepristranske cenilke po metodi največjega verjetja, ki pa imajo zaradi svoje kompleksne strukture bolj teoretično kot praktično vrednost.

Vsi log-linearni modeli zanemarjajo, da v takem modelu niso dopustni negativni $C_{i,j}$. Na prvi pogled se sicer zdi, da ta slabost ni pomembna, saj znesek rešenih škod ne more biti negativen. V resnici pa v nekaterih primerih znesek rešenih škod vendarle je negativen, in to predvsem takrat, kadar je zavarovalnica v prvih letih razvoja oškodovancu izplačala preveč akontacije za škodo, ob ugotovitvi vseh dejstev pa se izkaže, da mora oškodovanec del izplačila povrniti. Najbolj znani taki primeri pri avtomobilskih zavarovanjih so, ko zavarovalnica oškodovancu izplača škodo v vrednosti celotnega poškodovanega avtomobila, zavarovalnica pa obdrži razbitine in jih – včasih bistveno kasneje – proda. Dejanska škoda zavarovalnice je tako samo razlika med izplačano škodo in pridobljeno kupnino, v tabeli razvoja pa imamo najprej $C_{i,j}$ v višini celotne vrednosti avta, nato pa še $C_{i,j+k}$ v negativni višini kupnine.

Taki primeri torej lahko pomembno vplivajo na dejansko porazdelitev dejanskih izplačil, predvsem pa imajo velik vpliv ob koncu repov. Še več, velikokrat prav taki primeri daljšajo repe.

Omenjena slabost pa vendarle večinoma ni tako pomembna, da bi zaradi tega model postal neuporaben. V takih primerih lahko namreč podatke »premaknemo« za konstanto in iščemo rešitev za model $Log(C_{i,j} + c) = Z_{i,j} = a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$, kjer je *c* konstanta, ki je večja od absolutne vrednosti najmanjšega negativnega $C_{i,j}$. So pa odstopanja med takim modelom in determinističnim modelom veriženja znatna.

Zaradi vsega navedenega so log-linearni modeli med stohastičnimi modeli daleč najbolj razširjeni in uporabljani. V naslednjem razdelku pa bomo pokazali, da so nekoliko neupravičeno tovrstne modele poimenovali stohastično veriženje. To ime si namreč zasluži Mackov model.

4.2.1.2. Mackov »pravi« stohastični model veriženja

Pri izpeljavi modela v 4.2.1.1. smo opazili, da izpeljava modela sicer temelji na logiki pristopa veriženja, da pa vendarle izpeljani modeli ne dajejo enakih rezultatov, kot ga da deterministično veriženje. Še več, v nekaterih primerih izpeljanega modela niti ne moremo uporabiti, čeprav za klasično veriženje ni nobenih ovir. Poiščimo možne vzroke za ta razhajanja.

Ponovno uporabimo izraza (4.2.1.1) in (4.2.1.2) in ju zapišimo za prvi neznani *j* – torej *j=n+2-i*. Iz (4.2.1.1) dobimo

$$\hat{A}_{i,n+2-i} = A_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+1-i}, \quad (4.2.1.7)$$

iz (4.2.1.2) pa

$$\hat{A}_{i,n+2-i} = E(A_{i,n+2-i}) = E(A_{i,n+1-i})f_{n+1-i}. \quad (4.2.1.8)$$

Vidimo, da se (4.2.1.7) in (4.2.1.8) razhajata v pomembni razliki. V (4.2.1.7) je namreč ocena neznane $A_{i,n+2-i}$ odvisna od dejanske opazovane vrednosti $A_{i,n+1-i}$, v (4.2.1.8) pa od njene pričakovane vrednosti. Za deterministično metodo veriženja so torej zadnje znane dejanske vrednosti za oceno pomembnejše od povprečnih vrednosti skozi celotno obdobje. Mack je to opazil in na podlagi tega v delu, ki ga v nadaljevanju povzemamo (Mack, 1994a), zasnoval naslednji stohastični model veriženja, ki temelji na pogojnih matematičnih upanjih:

$$E(A_{i,j+1} \mid A_{i,1} = a_{i,1},\dots, A_{i,j} = a_{i,j}) = A_{i,j}f_j, \qquad 1 \le i \le n, \qquad 1 \le j \le n-1. \; (4.2.1.9)$$

Opozorimo, da moramo imeti v nadaljevanju pri razvoju modela ves čas v mislih, da je zgornji del tabele razvoja znan, zato v tem delu ustrezni $A_{i,j}$ v resnici niso slučajne spremenljivke. Kjer bi bil zaradi tega zapis enačb lahko matematično nekorekten ali zavajajoč, bomo to ponovno eksplicitno opredelili. Za lažje delo v nadaljevanju zato označimo z $D = \{A_{i,j} = a_{i,j} \mid \quad i + j \le n+1\}$ množico vseh znanih – opazovanih vrednosti za leto *i.*

Dokažimo sedaj naslednji izrek:

Izrek: Če velja neodvisnost med leti nastanka škode, (tj. $\{A_{i,1},\dots,A_{i,n}\}$ in $\{A_{k,1},\dots,A_{k,n}\}$ so neodvisne za vsak $i \ne k$) in če velja enačba (4.2.1.9), potem velja:

$$E(A_{i,n} \mid D) = A_{i,n+1-i}f_{n+1-i}\cdots f_{n-1}.$$

(Opomba: V resnici izrek velja za vsak $j > n+1-i$, vendar nas za oceno škodne rezervacije zanima samo primer, ko je *j=n*.)

Dokaz: Definirajmo z $E_i(X) = E(X | A_{i,1} = a_{i,1}, ..., A_{i,n+1-i} = a_{i,n+1-i})$. Zaradi zahtevane neodvisnosti in s ponavljanjem enačbe (4.2.1.9) zapišemo

$$\begin{aligned} E(A_{i,n} | D) &= E_i(A_{i,n}) \\ &= E_i(E(A_{i,n} | A_{i,1} = a_{i,1}, ..., A_{i,n-1} = a_{i,n-1})) \\ &= E_i(A_{i,n-1}) f_{n-1} \\ &= \ldots \\ &= E_i(A_{i,n+2-i}) f_{n+2-i} \cdots f_{n-1} \\ &= A_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}. \end{aligned}$$

(konec dokaza)

Zgornji izrek nam pove, da nam tako zastavljen stohastičen model pri istih znanih podatkih zgornjega dela trikotnika razvoja da povsem enake končne rezultate kot determinističen model veriženja, seveda ob predpostavki, da so za vsak k, $1 \le k \le n-1$ parametri f_k dobljeni s cenilkami $\hat{f}_k$ iz (4.2.1.1). Naslednji izrek nam potrdi, da je izbira teh cenilk za parametre f_k res ustrezna.

Izrek: Če velja neodvisnost med leti nastanka škode, (tj. $\{A_{i,1}, ..., A_{i,n}\}$ in $\{A_{k,1}, ..., A_{k,n}\}$ so neodvisne za vsak $i \neq k$) in če velja enačba (4.2.1.9), so cenilke $\hat{f}_j$, $1 \le j \le n-1$, nekorelirane in nepristranske.

Dokaz: Definirajmo z $B_k = \{A_{i,j} = a_{i,j} | j \le k, i + j \le n+1\}$, $1 \le k \le n.$ Iz (4.2.1.9) in zahteve po neodvisnosti med leti nastanka sledi

$$E(A_{i,k+1} | B_k) = E(A_{i,k+1} | A_{i,1} = a_{i,1}, ..., A_{i,k} = a_{i,k}) = A_{i,k} f_k.$$

Zato

$$E(\hat{f}_k | B_k) = \frac{\sum_{j=1}^{n-i} E(A_{j,k+1} | B_k)}{\sum_{j=1}^{n-k} A_{j,k}} = f_k,$$

od tod pa sledi nepristranskost, saj $E(\hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_k | B_k)) = f_k$, $\quad 1 \le k \le n-1.$

Dokažimo še nekoreliranost cenilk. Za vsak $j<k$ zapišimo

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_j \hat{f}_k) &= E(E(\hat{f}_j \hat{f}_k | B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j E(\hat{f}_k | B_k)) \\ &= E(\hat{f}_j) f_k \\ &= E(\hat{f}_j) E(\hat{f}_k). \end{aligned}$$

(konec dokaza)

Nekoreliranost cenilk je pravzaprav presenetljiv rezultat, saj iz definicije izhaja, da npr. $\hat{f}_k$ in $\hat{f}_{k+1}$ temeljita na istih podatkih $A_{1,k} + ... + A_{n-k,k}$. Dokaz o nekoreliranosti tudi zlahka razširimo tako, da izpeljemo $E(\hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1}) = f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}$, s čimer pa lahko vidimo, da je $\hat{A}_{i,n} = A_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1}$ nepristranska cenilka za $E(A_{i,n}|D) = A_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{n-1}$.

Iz obeh izrekov oz. dokazov lahko opazimo, da ima ta model samo *n-1* parametrov, kar pomeni, da je precej bolj robusten, kot pa so to log-linearni modeli in torej manj odvisen od konkretnih podatkov. Model tudi ne zahteva predpostavk o konkretnih porazdelitvah – v literaturi ga zato pogosto zasledimo pod imenom »Od porazdelitve neodvisno stohastično veriženje« (Mack,1991). Zaradi tega dejstva je bila modelu očitana slabost, da pri njem ni možno opredeliti kvalitete rezultata. To slabost je odpravil Mack v (Mack, 1991) in (Mack, 1994) na način, ki je opisan v nadaljevanju.

Definirajmo najprej funkcijo $mse(\hat{A}_{i,n}) = E((\hat{A}_{i,n} - A_{i,n})^2 | D)$, kjer smo z D zopet definirali množico vseh opazovanih vrednosti. (Ponavadi je *mse* definirana kot brezpogojno matematično upanje kvadrata razlik po vseh možnih D – jih. Ker pa nas tokrat zanima dejanska ocena, ki nam jo da cenilka $\hat{A}_{i,n}$ pri konkretni množici podatkov D, smo *mse* zato definirali pogojno na D.) Vidimo, da je *mse* za cenilke po vsebini enaka varianci slučajne spremenljivke, ki meri povprečno razdaljo spremenljivke od njenega matematičnega upanja, *mse* pa meri povprečno razhajanje med cenilko in spremenljivko, ki jo cenilka ocenjuje. Zaradi pravila $E(X-a)^2 = Var(X) + (E(X) - a)^2$, lahko zapišemo

$$mse(\hat{A}_{i,n}) = Var(A_{i,n}|D) + (E(A_{i,n}|D) - \hat{A}_{i,n})^2,$$

kar kaže, da je *mse* vsota stohastične napake (napake procesa) in napake ocene.

Pri izračunu *mse* bomo očitno potrebovali tudi $Var(A_{i,n}|D)$. Na podlagi dejstva, da so $\hat{f}_j$ utežena povprečja vseh prejšnjih faktorjev projekcije (glej 3.1.1.1), lahko intuitivno sklepamo, da je $Var((A_{i,j+1} / A_{i,j} = a_{i,j}) | A_{i,1} = a_{i,1}, ..., A_{i,j} = a_{i,j})$ obratno sorazmerna $A_{i,j}$. Ta intuitivni sklep zapišemo kot

$$Var(A_{i,j+1} | A_{i,1} = a_{i,1}, ..., A_{i,j} = a_{i,j}) = A_{i,j}\sigma_j^2, 1 \le j \le n-1,$$

z neznanimi parametri $\sigma_j^2, 1 \le j \le n-1$. Slutimo tudi lahko (iz *Var(aX)=* $a^2 Var(X)$), da so neznani parametri σ_j^2 odvisni od $A_{i,j}$. Pri izpeljavi formule za izračun teh parametrov, ki sledi v nadaljevanju, bo slutnja potrjena.

Že pri determinističnem veriženju smo pokazali, da je $R_i = A_{i,n} - A_{i,n+1-i}$ rezervacija za škode, ki so nastale v letu *i*. Na podlagi obeh izrekov lahko zato sklepamo, da je cenilka za R_i oblike $\hat{R}_i = \hat{A}_{i,n} - A_{i,n+1-i}$. Zato velja

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2 \,|\, D) = E((\hat{A}_{i,n} - A_{i,n})^2 \,|\, D) = mse(\hat{A}_{i,n}).$$

Povzemimo sedaj glavni Mackov izrek. Ob tem ni odveč ponovno opozorilo, da $A_{i,j}$ v »znanem« delu trikotnika razvoja niso slučajne spremenljivke (glej str. 54).

Mackov izrek: Če veljajo naslednje predpostavke:

(A) $E(A_{i,j+1} \,|\, A_{i,1} = a_{i,1},..., A_{i,j} = a_{i,j}) = A_{i,j} f_j, \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n-1;$

(B) $\{A_{i,1},..., A_{i,n}\}$ in $\{A_{k,1},..., A_{k,n}\}$ so neodvisne za vsak $i \neq k$;

(C) $Var(A_{i,j+1} \,|\, A_{i,1} = a_{i,1},..., A_{i,j} = a_{i,j}) = A_{i,j}\sigma_j^2, 1 \le j \le n-1,$

je cenilka za $mse(\hat{R}_i)$, ki jo označimo z $\overline{mse(\hat{R}_i)}$, oblike

$$\overline{mse(\hat{R}_i)} = \hat{A}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{A}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} A_{k,j}} \right);$$

kjer so $\hat{A}_{i,j} = A_{i,n+1-i} \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{j-1}$, *j>n+1-i*, ocene bodočih $A_{i,j}$ in $\hat{A}_{i,n+1-i}, = A_{i,n+1-i}$ cenilka $\hat{\sigma}_j^2$ pa je nepristranska in oblike

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} A_{i,j} \left(\frac{A_{i,j+1}}{A_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 1 \le j \le n-2;$$

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)).$$

Dokaz Mackovega izreka matematično sicer ni preveč zahteven, je pa kljub vsemu precej dolg, zato ga tu ne bomo navajali. V vseh podrobnostih je predstavljen v že omenjenih delih.

Na tem mestu omenimo, da imenujemo funkcijo $se(\hat{R}_i) = \sqrt{\overline{mse(\hat{R}_i)}}$ standardna ocena napake za $\hat{R}_i$.

Za kvalitetno oceno dobljenih rezultatov želimo včasih opredeliti tudi intervale zaupanja za R_i. Za to bi morali poznati dejansko porazdelitev za R_i, ki pa je Mackov model ne opredeljuje. Pri dovolj velikem številu podatkov si zato lahko pomagamo s centralnim limitnim izrekom in predpostavimo, da je porazdelitev normalna z matematičnim upanjem $\hat{R}_i$ in standardnim odklonom $se(\hat{R}_i)$. 95% interval zaupanja tako npr. dobimo kot $(\hat{R}_i - 2 \cdot se(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 2 \cdot se(\hat{R}_i))$.

Kot pa smo omenili že pri log-linearnih modelih, zaradi same narave podatkov o škodah normalna porazdelitev ponavadi ni najbolj primerna izbira. Precej bolj primerna je predpostavka o log normalni porazdelitvi R_i. Pri tej predpostavki moramo za vsak i poiskati parametra μ_i, σ_i^2, da velja

$$\exp(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}) = \hat{R}_i;$$

$$\exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1) = (se(\hat{R}_i))^2,$$

od koder dobimo

$$\sigma_i^2 = \ln(1 + \frac{(se(\hat{R}_i))^2}{\hat{R}_i^2}); \ \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2}.$$

Če npr. sedaj želimo dobiti 90% kvantil, poiščemo najprej kvantil za standardno normalno porazdelitev (tj. 1.28). Vrednost $\exp(\mu_i + 1.28\sigma_i^2)$, kjer sta μ_i in σ_i^2 dobljena iz zgornjih enačb, je nato kvantil lognormalne porazdelitve.

Ob koncu si poglejmo še, kako oceniti standardno oceno napake celotne škodne rezervacije $R = R_2 + \cdots + R_n$. Čeprav so R_i neodvisne spremenljivke, pa to žal ne velja za njihove cenilke $\hat{R}_i$, saj vse cenilke temeljijo na istih cenilkah $\hat{f}_j$. Standardne ocene za $\hat{R}$ zato ne moremo dobiti s preprostim seštevanjem $(se(\hat{R}_i))^2$. Mack je – pri predpostavkah iz Mackovega izreka - izpeljal naslednjo enačbo za oceno napake celotne škodne rezervacije:

$$\overline{mse(\hat{R})} = \sum_{i=2}^{n} \left\{ (se(\hat{R}_i))^2 + \hat{A}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} \hat{A}_{k,n} \right) \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{2\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}}{\sum_{l=1}^{n-j} A_{l,j}} \right\}.$$

4.2.2. Kalmanov filter

Kalmanov filter sta v aktuarsko literaturo v zvezi s škodnimi rezervacijami prva uvedla De Jong in Zehnwirth v (De Jong, Zehnwirth, 1983). V nadaljevanju bomo povzeli njune rezultate iz navedenega dela.

4.2.2.1. Uporabljene oznake

Glede na to, da bomo v tem razdelku imeli na škodno dogajanje nekoliko drugačen pogled kot v ostalih opisanih modelih, se za začetek posvetimo definicijam in oznakam, ki jih bomo uporabljali v tem razdelku.

Podatke o rešenih škodah ponovno razvrstimo v trikotnik, vendar pa tokrat v trikotniku posamezne celice ne predstavljajo kumulativnih rešenih škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene do leta $i+j$, ampak samo rešene škode, ki so nastale v letu i in so bile rešene v letu j. Za potrebe tega razdelka bomo namerno oznake, ki smo jih uporabljali doslej, spremenili in podatke opazovali po diagonalah trikotnika. To torej pomeni, da bomo grupirali podatke po koledarskem letu, v katerem so bile posamezne škode rešene. Trikotnik škod bomo v tem razdelku torej opazovali na naslednji način:

Leto razvoja / Leto nastanka	0	1	2	3	4	5
1	$y_0(1)$	$y_1(2)$	$y_2(3)$	$y_3(4)$	$y_4(5)$	$y_5(6)$
2	$y_0(2)$	$y_1(3)$	$y_2(4)$	$y_3(5)$	$y_4(6)$	
3	$y_0(3)$	$y_1(4)$	$y_2(5)$	$y_3(6)$		
4	$y_0(4)$	$y_1(5)$	$y_2(6)$			
5	$y_0(5)$	$y_1(6)$				
6	$y_0(6)$					

Z $y_d(t)$ $(0 \leq d \leq 5, d+1 \leq t \leq 6)$ torej označimo znesek rešenih škod, ki so nastale v letu $w=t-d$, in so bile rešene v koledarskem letu t, ki je za navedene rešene škode d-to leto razvoja. Za razvoj stohastičnega modela zapišimo $y_d(t)$ v obliki

$$y_d(t) = m(t-d,d) + u_d(t),$$

kjer je $m(w,d)$ pričakovan znesek rešenih škod, ki so nastale v letu w in so bile rešene v letu $t=w+d$, $u_d(t)$ pa je napaka, za katero velja $E(u_d(t)) = 0.$ Iščemo torej ustrezno funkcijo $m(w,d)$, z znanimi podatki pa določimo ustrezne parametre tega modela. Dobljen model bo potem seveda osnova za aproksimacijo bodočih škod.

Preden se lotimo iskanja ustreznega modela, preverimo, ali so obstoječi podatki dovolj homogeni. Tako preverimo vpliv inflacije in pa morebitne dinamike (rasti ali padca) portfelja. V primeru, da je portfelj izrazito nehomogen, zapišemo $y_d(t)$ raje v obliki

$$y_d(t) = n(t-d)\lambda(t)m(t-d,d) + u_d(t),$$

kjer $n(w)$ odraža utež velikosti portfelja v letu nastanka škode w, $\lambda(t)$ odraža inflacijo v koledarskem letu t, $m(w,d)$ pa je pričakovan »realen« znesek rešenih škod, ki so nastale v letu w in so bile rešene po d letih.

Zaradi poenostavitev izpeljav modela definirajmo z $y(t)$ vektor vseh opazovanih vrednosti v letu t, torej

$$y(t) = [y_0(t), y_1(t), ..., y_{t-1}(t)]^T.$$

$y(t)$ torej predstavlja t-to diagonalo trikotnika rešenih škod.

Analogno definiramo tudi *u(t)* in *f(t),* kjer je *u(t)* vektor napak, *f(t)* pa ustrezne funkcije (v osnovni obliki oz. s korekcijo za inflacijo in dinamiko portfelja). Za vsako leto t lahko v vsej splošnosti naše osnovne enačbe zapišemo kot

$$y(t) = f(t) + u(t). \qquad (4.2.2.1)$$

4.2.2.2. Definicija modela prostora stanj in uporaba Kalmanovega filtra

Pred nadaljevanjem izpeljave našega modela smo dolžni na kratko opisati osnovna orodja, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. Opišimo najprej model prostora stanj.

Model prostora stanj sestavljata dve množici enačb, in sicer:

1. $y(t) = X(t)\beta(t) + u(t);$ (4.2.2.2)
2. $\beta(t) = H(t)\beta(t-1) + G(t)v(t).$ (4.2.2.3)

Pri tem pomenijo:

1. $\beta(t)$ označuje vektor neznanih parametrov, $X(t)$ pa znano matriko, ki opredeljuje, kako so opazovane vrednosti in parametri med sabo povezani. Matriko $X(t)$ imenujemo oblikovalska matrika. Ostale oznake so znane že iz razdelka 4.2.2.1.
2. $v(t)$ je vektor napak z ničelnim matematičnim upanjem, $H(t)$ in $G(t)$ pa sta znani matriki, ki povesta, na kakšen način je vektor parametrov v času *t* odvisen od vektorja parametrov v času *t-1*.

Model prostora stanj torej temelji na predpostavki, da je v vsakem opazovanem trenutku posamezna komponenta vektorja opazovanih vrednosti rezultat znane linearne kombinacije neznanih – časovno spremenljivih – parametrov in časovno odvisne napake. Parametri pa so rezultat slučajnega časovnega procesa, za katerega poznamo mehanizem, po katerem poteka. Ob tem opozorimo še na predpostavko, da so vektorji *u(t)* in *v(t)* nekorelirani tako med sabo, kot z realizacijami v prejšnjih časovnih obdobjih, znane pa so nam tudi ustrezne kovariančne matrike *U(t)* oz. *V(t).*

Na tem mestu ni odveč, če si pogledamo poseben primer modela prostora stanj, t.j. primer, v katerem za vsak *t* velja, da $\beta(t) = \beta,$ torej je $H(t) = I$ in $V(t) = 0$. Model prostora stanj se namreč v tem primeru prevede na posplošeni linearni model (GLM – general linear model), ki smo ga v uvodu v to poglavje omenili kot zelo pomemben model, ki ga ne bomo obravnavali, in kot enega od razlogov našteli ravno dejstvo, da obravnavamo precej zahtevnejši model.

Oglejmo si še, kaj pojmujemo pod izrazom Kalmanov filter. Gre za metodo ocenjevanja vektorja parametrov $\beta(t),$ za vsako obdobje *t*. Ocenjevanje temelji na vseh znanih opazovanih vrednostih do vključno časa *t*. Poglejmo si torej to metodo podrobneje.

Predpostavimo, da imamo znane vektorje opazovanih vrednosti *y(t), t=1,2,…* in želimo oceniti parametre $\beta(t)$ in napovedati naslednji vektor opazovanih vrednosti *y(t+1).* Standardno označimo cenilke oz. ocene za neznana vektorja z $\hat{\beta}(t)$ oz. $\hat{y}(t+1)$. Seveda želimo to storiti na najboljši način, kar pomeni, da želimo najmanjšo možno varianco napake. Označimo z $\hat{\beta}(t-1)$ oz. $\hat{y}(t)$ ocene za $\beta(t-1)$ oz. $y(t)$, ki jih dobimo na podlagi opazovanih vrednosti *y(t-1), y(t-2),…,y(1),* s *C(t)* pa kovariančno matriko za $\hat{\beta}(t)-\beta(t)$. Ob vseh že naštetih omejitvah je Kalman izpeljal naslednje rezultate:

$$\hat{y}(t+1) = X(t+1)H(t+1)\hat{\beta}(t) \quad (4.2.2.4)$$

$$\hat{\beta}(t) = H(t)\hat{\beta}(t-1) + K(t)(y(t)-\hat{y}(t)) \quad (4.2.2.5)$$

$$R(t) = H(t)C(t-1)H^T(t) + G(t)V(t)G^T(t) \quad (4.2.2.6)$$

$$K(t) = R(t)X^T(t)\left(X(t)R(t)X^T(t)+U(t)\right)^{-1} \quad (4.2.2.7)$$

$$C(t) = R(t) - K(t)X(t)R(t). \quad (4.2.2.8)$$

Kot vidimo, gre za rekurzivne enačbe, ki računsko – seveda s pomočjo računalnika – niso prezahtevne. Poleg tega imajo zelo lepo lastnost, da namreč ob pridobitvi novih informacij – novih opazovanih vrednosti – ni potrebno ponovno preračunavati enačb za nazaj. Imajo pa, tako kot vse rekurzivne formule, slabost, da je včasih težko opredeliti začetne vrednosti.

*R(t),*definirana s (4.2.2.6), nima posebnega vsebinskega pomena, saj je zgolj pomožna matrika, ki poveča preglednost navedenih enačb. Vsebinsko bistveno bolj pomembna pa je matrika K(t), imenujemo jo Kalmanova matrika izboljšav, ki ima po svoji vsebini podobno vlogo, kot faktor kredibilnosti v modelih, ki temeljijo na teoriji kredibilnosti. Opredeljuje namreč utež, ki jo imajo pri oceni parametrov zadnje opazovane vrednosti. Večji kot je *U(t)*, manjši je *K(t)*, kar pa je intuitivno logično, saj velik *U(t)* pomeni veliko varianco *y(t)*, zato za ocene zadnjih parametrov niso primerne. Od tod tudi lahko slutimo, kakšna je povezava med opisanimi modeli in modeli s pomočjo teorije kredibilnosti, ki smo jo omenili v uvodu v to poglavje. Zanimivost te matrike je tudi ta, da za izračun te matrike ne potrebujemo zadnjih opazovanih vrednosti in jo torej lahko izračunamo vnaprej. Omenimo še, da včasih izračun lahko pospešimo, če namesto enačb (4.2.2.7) in (4.2.2.8) uporabimo ekvivalentni naslednji enačbi:

$$C(t) = \left(X(t)U^{-1}(t)X(t) + R^{-1}(t)\right)^{-1}$$

$$K(t) = C(t)X^T(t)U^{-1}(t).$$

4.2.2.3. Povezava trikotnika s prostorom stanj

Poiščimo sedaj, kako lahko podatke, razvrščene v obliki trikotnika, interpretiramo v duhu modela prostora stanj.

Najprej poglejmo, kako lahko zapišemo enačbo (4.2.2.1) v obliki (4.2.2.2). Očitno moramo za to zapisati *f(t)* v obliki

$$f(t) = X(t)\beta(t).$$

V (4.2.2.1) smo pokazali dve obliki za *f(t)*. V nadaljevanju bomo (brez izgube splošnosti) za lažjo izpeljavo predpostavili, da ima *f(t)* enostavnejšo od obeh oblik, torej

$$f(t) = [m(t,0), m(t-1,1),..., m(1,t-1)]^T.$$

Oglejmo si funkcijo *m(w,d)* pri nekem fiksnem *w*-ju. Pri fiksnem *w*-ju postane namreč *m(w,d)* funkcija *d*-ja, za katero lahko – zaradi same narave škodnega procesa - upravičeno predpostavljamo, da je gladka glede na *d*. Še več, opredeliti znamo tudi obliko njenega grafa. »Normalno« je, da bo krivulja v začetku hitro naraščajoča, potem pa počasi padajoča z morebitnimi kratkotrajnimi ponovnimi vzponi. Kako daleč moramo iti, da je vrednost funkcije za vsak d, ki je večji od tega mejnega d-ja, identično enaka nič, pa je – kot smo že ugotovili - odvisno od značaja zavarovanja samega oz. od dolžine repa.

Z intuitivnim sklepanjem o naravi funkcije *m(w,d)* kot funkciji *d*-ja pri fiksnem *w*-ju pa smo pravzaprav močno omejili možno izbiro »baznih« funkcij, s katerimi lahko modeliramo tak proces. Kar same se kot relativno enostavne bazne funkcije ponujajo funkcije, ki so produkt polinomske funkcije *d*-ja in eksponentne funkcije (*-d*)-ja. Možne pa so seveda še poljubne linearne funkcije teh baznih funkcij. Zato za poljuben *w* lahko zapišemo *m(w,d)* v obliki

$$m(w,d) = \sum_{j=1}^{p} \Phi_j(d) b_j(w),$$

kjer smo s $\Phi_j(d)$, $(1 \le j \le p)$ označili p baznih funkcij, ki jih v modelu kombiniramo, z $b_j(w)$ pa uteži oz. parametre, ki so odvisni od *w*-ja in opredeljujejo, kakšna kombinacija baznih funkcij je za leto *w* najbolj primerna. Zgornjo enačbo zapišimo še v vektorski obliki:

$$\begin{aligned} m(w,d) &= \Phi^T(d) b(w); \qquad (4.2.2.9) \\ \Phi(d) &= [\Phi_1(d), \Phi_2(d), ..., \Phi_p(d)]^T; \\ b(w) &= [b_1(w), b_2(w), ..., b_p(w)]^T. \end{aligned}$$

Vse navedeno uporabimo pri zapisu *f(t)*. Dobimo:

$$f(t) = \begin{bmatrix} \Phi^T(0)b(t) \\ \Phi^T(1)b(t-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi^T(t-1)b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T(0) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \Phi^T(1) & & & \\ \cdot & 0 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \Phi^T(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ b(1) \end{bmatrix} =$$

$$X(t)\beta(t).$$

S tem smo zaključili prvi korak pretvorbe v model prostora stanj. Čaka nas še druga enačba, ki povezuje parametre $\beta(t)$ z $\beta(t-1)$. Spet želimo dobiti gladko krivuljo, vendar bomo tokrat gladkost želeli pri fiksnem *d*-ju, spremenljivka v *m(w,d)* pa bo *w*.

Za vsak *d* zapišimo

$$m(w,d) = E[m(w,d) | m(w-1,d) = y_1, m(w-2,d) = y_2, ...] + \eta(w,d), \qquad (4.2.2.10)$$

kjer je $\eta(w,d)$ naključna napaka z ničelnim matematičnim upanjem. Predpostavimo sedaj, da je pogojno matematično upanje v (4.2.2.10) polinom stopnje *q-1* spremenljivke *w*, katerega graf poteka skozi točke $m(w-1,d)=y_1$, $m(w-2,d)=y_2, ..., m(w-q,d)=y_q$. Potem velja naslednji izrek:

Izrek: Pri navedenih predpostavkah lahko vrednost funkcije (polinoma) *m(w,d)* v točki (letu nastanka) *w* (pri fiksnem *d*) izračunamo kot

$$m(w,d) = \sum_{j=1}^{q} a(j) y_j + \eta(w,d); \qquad (4.2.2.11)$$

$$a(j) = \binom{q}{j} (-1)^{j-1}, \qquad j = 1,2,...,q.$$

Skica dokaza:

Imejmo *n>q* ekvidistančnih točk $x_n, ..., x_1$ in definirajmo operatorja **I** in **B** kot: $\mathbf{I}(f(x_k)) = f(x_k)$ in $\mathbf{B}(f(x_k)) = f(x_{k-1})$, kjer je *f(x)* polinom stopnje *q-1*. Potem lahko z nekaj računskega truda dokažemo, da za vsak *k* velja $(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{B})^{q-1}(\mathrm{f}(x_k)) = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{B})^{q-1}(\mathrm{f}(x_{k-1}))$. Z upoštevanjem te enakosti in enačbe

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{B})^{q-1} = \sum_{j=0}^{q-1} \binom{q-1}{j} (-1)^j B^j,$$

pa lahko zapišemo

$$f(x_n) = \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} (-1)^{j-1} f(x_{n-j}).$$

Ker so leta nastanka škode ekvidistančna, lahko ta rezultat uporabimo v našem primeru, da dobimo (4.2.2.11).

(konec dokaza)

Vstavimo sedaj (4.2.2.9) na obe strani enačbe (4.2.2.11). Ob upoštevanju $y_j = m(w-j,d)$ dobimo:

$$\Theta b(w) = \sum_{j=1}^{q} a(j) \Theta b(w-j) + v(w), \quad (4.2.2.12)$$

kjer sta matrika Θ in vektor $v(w)$ definirana kot

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Phi^T(d_1) \\ \Phi^T(d_2) \\ . \\ . \end{bmatrix}, \qquad v(w) = [\eta(w,d_1), \eta(w,d_2), ...]^T.$$

De Jong in Zehnwirth sta v delu, ki ga povzemamo, dokazala, da je – ob predpostavki, da so osnovne slučajne spremenljivke v modelu *b(w)* - kovariančna matrika matrike *v(w)* lahko največ ranga *p*, če pa ima matrika Θ inverz, pa natanko *p*. To pa pomeni, da ima enačba (4.2.2.11) največ *p* neodvisnih zapisov, torej toliko, kolikor baznih funkcij smo v model vključili. Označimo z Ψ (morebitno) inverzno matriko matrike Θ. Enačbo (4.2.2.12) lahko potem pretvorimo v

$$b(w) = \sum_{j=1}^{q} a(j) b(w-j) + \Psi v(w). \qquad (4.2.2.13)$$

Matrično zapišemo enačbo (4.2.2.13) kot

$$\begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ . \\ . \\ . \\ b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1)I & . & a(q)I & 0 & . \\ I & 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & I & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t-1) \\ b(t-2) \\ . \\ . \\ . \\ b(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} v(t),$$

kjer sta I in 0 matriki ranga p. Matriko na levi strani enačbe smo že srečali ($\beta(t)$), na desni pa prvo matriko označimo z *H(t)*, matriko, ki vsebuje Ψ, pa z *G(t)*. Dobimo

$$\beta(t) = H(t)\beta(t-1) + G(t)v(t).$$

To pa je ravno enačba oblike (4.2.2.3).

Podrobnejša izpeljava pretvorbe trikotnika v model stanj nam je kot stranski rezultat tudi pokazala, kakšne oblike (oz. kako izračunamo elemente matrik, ki so »znane«) so vse matrike, ki jih potrebujemo za zagon Kalmanovega filtra. Nismo pa opredelili, kako dobimo kovariančne matrike *U(t)* in *V(t)*. Prav tako nismo omenili, kakšne so začetne vrednosti, ki jih - glede na rekurzivno naravo modela - potrebujemo. Pri naših konkretnih izračunih smo uporabili pristop (ni edini), ki ga predlagata avtorja v obravnavanem delu. Ker je razlaga le tega spet precej obsežna, jo bomo izpustili. Avtorja tudi opozarjata, da je včasih bolje, če začetne parametre uporabnik predpostavi sam (metoda jih namreč izlušči iz podatkov).

Dolžni smo še opravičilo, da smo pri izpeljavi modela vzeli za *f(t)* »lažjo« od obeh variant. V resnici se s težjo obliko *f(t)*-ja nekoliko spremeni le matrika *X(t)*, kjer bi morali *j*-to vrstico pomnožiti z *n(t-j-1)* $\lambda(t)$. Upoštevali bi torej velikost portfelja in inflacijo, s tem pa bi nam *m(w,d)* predstavljala realna povprečja (brez inflacije in ob uravnoteženi velikosti portfelja).

4.2.2.4. Ocena bodočih škod

V prejšnjih točkah smo izpeljali, kako poiščemo model, ki čimbolj natančno opisuje že znano škodno dogajanje. Naša naloga je, da sedaj poskusimo s pomočjo izpeljanega modela oceniti razvoj rešenih škod v naslednjih koledarskih letih. Seveda nas zanimajo zgolj tiste bodoče rešene škode, ki so nastale v opazovanih letih nastanka. Najlažje bomo zadano nalogo rešili, če na bodoča izplačila gledamo kar kot na hipotetične naslednje opazovane vektorje našega modela, pri čemer pa predpostavljamo, da je hipotetično naslednje stanje enako trenutnemu stanju (torej poenostavitev, ki je tipična za GLM modele).

Označimo s *s* zadnje leto, za katero imamo opazovane vrednosti, in označimo z *y(s+1)* vektor vseh bodočih ocen, ki so zložene v vektor v nekem fiksnem znanem zaporedju. Vsi elementi vektorja so odvisni od opazovanih vrednosti iz let nastanka *1,2,...,s*, zato so njihova matematična upanja parametrizirana s kombinacijo znanih parametrov *b(1),...,b(s)*. Zato lahko zapišemo

$$\beta(s+1) = [b(s), b(s-1), ..., b(1)]^T = \beta(s).$$

Od tod seveda sledi, da je *H(s+1)* identiteta, *V(s+1)* pa ničelna matrika. Od tod sledi, da je

$$\hat{y}(s+1) = X(s+1)H(s+1)\hat{\beta}(s) = X(s+1)\hat{\beta}(s),$$

kovariančna matrika ocene napake za $y(s+1) - \hat{y}(s+1)$ pa je oblike $X(s+1)C(s)X^T(s+1)$, kjer je *C(s)* znana matrika, *X(s+1)* pa zavzame v *j*-ti vrstici vrednost 0 povsod, razen v stolpcih od *(w-1)p+1,...,wp,* kjer zavzame vrednost $n(w)\lambda(w+d)\Phi^T(d)$, pri čemer *j* označuje položaj aproksimiranega elementa, ki je na poziciji (w-ta vrstica, d-ti stolpec) v spodnjem delu trikotnika v vektorju vseh ocenjevanih vrednosti *y(s+1)*.

Kot vidimo, model omogoča oceno bodočih škod tudi z upoštevanjem bodoče inflacije, česar pa na naših portfeljih ne bomo uporabili, saj nas bodo zanimale predvsem pričakovane sedanje vrednosti bodočih izplačil. V poštev bi zato prišla zgolj realna inflacija škod, ki pa jo bomo zanemarili. Na splošno pa upoštevanje inflacije ne povzroči pretiranih komplikacij pri samem izračunu pričakovanih bodočih izplačil, kar precej več truda pa je potrebno vložiti v izračun kovariančne matrike. Vse potrebne izračune sta za primer, ko tudi na bodočo inflacijo gledamo kot na naključni proces, v delu, ki ga povzemamo, izpeljala De Jong in Zehnwirth.

Ob koncu opisa metode Kalmanovega filtra opozorimo na zelo pomembno značilnost tega modela v primerjavi z ostalimi modeli, ki jih obravnavamo (enako lastnost ima v resnici tudi log-linearni model z uporabo regresijske analize). Opisani model nam namreč omogoča, da ocenimo morebitne nerešene škode tudi za tista leta razvoja, za katere sploh še nimamo nobenih opazovanih vrednosti (v našem trikotniku bi tako npr. lahko aproksimirali rešene škode, ki so nastale v letu 1 in bodo rešene v 6. letu razvoja). Metodo torej lahko uporabimo tudi takrat, ko natančno vemo, da niti prvo leto, za katero imamo podatke, ni dokončno razvito. To pa je zelo pogost primer pri vrstah z zelo dolgim repom.

4.2.3. Bootstrap metoda

Bootstrap metoda je dokaj nova statistična metoda (prvi jo je predstavil l. 1979 Efron, glej npr. (Efron, Tibshirani 1992)), ki svojo pravo veljavo dobiva z vse večjo zmogljivostjo računalnikov. Temelji namreč na preračunavanju istih statistik na različnih permutacijah istega vzorca opazovanih vrednosti nekega stohastičnega procesa. V aktuarski literaturi je bil bootstrap prvič omenjen šele koncem osemdesetih let. Poglejmo najprej, kako bootstrap deluje, potem pa razvijmo bootstrap metodo za izračun škodne rezervacije.

4.2.3.1. Kaj je bootstrap

Privzemimo, da imamo N neodvisnih opazovanih vrednosti iz neznane porazdelitve F. Tem opazovanim vrednostim rečemo realizacija slučajnega vzorca in jo označimo z $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_N)$. Porazdelitvi F pridružimo *empirično porazdelitev* $\hat{F}$, ki je definirana kot diskretna porazdelitev, pri kateri je $P(X = x_i) = \frac{1}{N}, \quad i = 1,..,N.$ S pomočjo te empirične porazdelitve želimo oceniti parameter θ, ki je odvisen od porazdelitve F. Iščemo torej cenilko $\hat{\theta}(\mathbf{x})$, včasih pa nas zanimajo še poljubne statistike - funkcije cenilke.

Osnova bootstrap metode temelji na ideji, da ustvarimo B psevdo slučajnih vzorcev velikosti N, katerih realizacije x_i^* dobimo z naključnim izbiranjem (z možnim ponavljanjem) izmed zaloge vrednosti $\mathbf{x}$ in izračunamo – ocenimo parameter θ na vsakem vzorcu. Na ta način dobimo diskretno porazdelitev za θ, s pomočjo katere lahko izračunamo tudi vse karakteristike za θ.

Poglejmo preprost primer.

Predpostavimo, da naš slučajni vzorec sestavlja 10 rešenih škod iz naslova kasko zavarovanja v letu 2001. Realizacija slučajnega vzorca je (100.000, 50.000, 300.000, 1.500.000, 150.000, 100.000, 450.000, 2.200.000, 80.000, 300.000). Parameter θ naj predstavlja matematično upanje slučajne spremenljivke *X,* ki predstavlja višino rešene škode kasko zavarovanja, cenilka za θ pa preprosto povprečje vzorca. S pomočjo bootsrap metode želimo oceniti varianco tako dobljene ocene.

Izberimo 100 slučajnih realizacij:

$x_1^* = (300.000,\ 150.000,\ 100.000,\ 80.000,\ 300.000,\ 2.200.000,\ 100.000,\ 80.000,\ 50.000,\ 300.000)$; $\hat{\theta}(x_1^*) = 366.000$;

$x_2^* = (100.000,\ 100.000,\ 300.000,\ 1.500.000,\ 300.000,\ 450.000,\ 50.000,\ 300.000,\ 1.500.000,\ 50.000)$; $\hat{\theta}(x_2^*) = 465.000$;

.

$x_{100}^* = (50.000,\ 450.000,\ 2.200.000,\ 80.000,\ 100.000,\ 450.000,\ 300.000,\ 150.000,\ 50.000,\ 1.500.000)$; $\hat{\theta}(x_{100}^*) = 533.000$;

Označimo z $\overline{\hat{\theta}} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\theta}(x_i^*)$ matematično upanje ocene $\hat{\theta}$. Varianco dobimo kot

$$Var(\hat{\theta}) = \left(\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\theta}(x_i^*) - \overline{\hat{\theta}})^2\right).$$

4.2.3.2. Uporaba bootsrap metode pri veriženju

Iz opisa metode je razvidno, da lahko bootstrap uporabimo pri večini statističnih metod. Nekako najmanj očitno je, kako lahko z bootstrap metodo nadgradimo metodo veriženja in njej sorodne metode, ki za rezultate potrebujejo podatke v obliki trikotnikov. Predstavljena izvedba je povzeta po (Bonnard, Greenwood, Greybe,1998).

Predpostavimo, da opazujemo n let nastanka škod, ki imajo k let razvoja. $A_{i,j}$ naj nam zopet pomeni kumulativen znesek rešenih škod, ki so nastale v letu i $(1 \le i \le n)$ in so bile rešene do vključno leta j $(1 \le j \le k)$, z f_j pa znova označimo faktorje razvoja. Dodatno definirajmo še

$$(DA)_{i,j} = \frac{A_{i,l}}{\prod_{m=j}^{l-1} f_m}; \qquad l = \min(n-i, k),$$

ki predstavljajo dejanski ustrezni kumulativni znesek škod, ki so nastale v letu i in so bile rešene do vključno leta j, ob katerem bi bili ob končni oceni vseh nastalih škod v letu i faktorji razvoja za to leto povsem natančni.

Sedaj lahko analiziramo residuale – razlike med dejanskimi in dejanskimi ustreznimi kumulativnimi zneski. Definiramo jih kot:

$$r_{ij} = \begin{cases} A_{i,j} - (DA)_{i,j}; & j = 1, \quad 1 \le i \le n-1 \\ (A_{i,j} - A_{i,j-1}) - ((DA)_{i,j} - (DA)_{i,j-1}); & 1 < j \le d, \quad 1 \le i \le n-j+1 \end{cases},$$

kjer je

$$d = \begin{cases} k; & n > k; \\ k-1; & n = k \end{cases}.$$

Osnovna ideja uporabe bootstrap metode na veriženju je, da je množica residualov tista, ki jo »vzorčimo« in z vzorcem novih residualov sestavimo nov trikotnik in izračunamo novo škodno rezervacijo. Celoten alogoritem bootsrapa na veriženju poteka tako v naslednjih korakih:

1. v trikotniku kumulativno rešenih škod s pomočjo osnovne metode veriženja izračunamo vse faktorje razvoja in zadnjo kolono (pričakovan skupen znesek rešenih škod za vsako leto nastanka) ter seveda celotno škodno rezervacijo;
2. izračunamo vse residuale r_{ij};
3. iz množice residualov ustvarimo nov psevdo slučajen vzorec residualov r_{ij}^*;
4. z novimi residuali ustvarimo nov trikotnik rešenih škod na naslednji način:
$$A_{i,j}^* = (DA)_{i,j} + r_{ij}^*; \qquad j = 1,$$
$$A_{i,j}^* - A_{i,j-1}^* = (DA)_{i,j} - (DA)_{i,j-1} + r_{ij}^*; \; j > 1;$$
5. v novem trikotniku ponovno s pomočjo osnovne metode veriženja izračunamo vse kot v 1;
6. postopek od 3. – 5. ponovimo B krat;

7. kot rezultat dobimo B ocen škodne rezervacije. Na podlagi teh ocen lahko izračunamo želene ocene za npr. varianco, intervale zaupanja,…;

Seveda moramo pomisliti tudi na to, kdaj s tako opisano bootstrap metodo sploh smemo nadgraditi metodo veriženja. Na prve večje probleme namreč naletimo že zelo zgodaj. Bootsrap namreč temelji na predpostavki, da sestavljamo psevdo vzorce iz zaloge vrednosti realizacije slučajnega vzorca, kar pa zahteva neodvisnost in enako porazdeljenost vzorca. To pa v našem primeru pomeni, da morajo biti residuali med sabo neodvisni in enako porazdeljeni. Predvsem v trikotnikih, kjer npr. velikost portfelja signifikantno niha ali kjer je inflacija znatna, se zdi, da nobena od teh dveh predpostavk ne drži. Zato je bilo predlaganih že kar veliko korekcij osnovnega modela. Navedimo le nekaj najbolj učinkovitih:

a) *Korekcija vpliva posameznega leta razvoja s pomočjo standardizacije*

Kadar je iz podatkov razvidno, da gre za znatne odklone residualov glede na leto razvoja (velika razlika v natančnosti ocene med leti razvoja), osnovne residuale standardiziramo z

$$r_{ij}^{st} = \frac{r_{ij}}{\hat{\sigma}_j^{st}}; \qquad \hat{\sigma}_j^{st} = \Big(\frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{\min(n-1,n-j+1)} r_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzorčenje izvedemo izmed standardiziranih residualov, izbran standardiziran residual pa pred izračunom novega trikotnika destandardiziramo z ustreznim $\hat{\sigma}_j^{st}$ za leto razvoja, na katerega se izbran residual po novem nanaša.

Ob velikem številu podatkov je v takem primeru možen tudi pristop, kjer vzorčimo znotraj posameznega leta razvoja. Vendar ob tem vedno nastopi problem zadnjih let razvoja (ki pa imajo na škodno rezervacijo največji vpliv), saj je praviloma v zadnjih letih residualov premalo za resno statistično analizo. V takih primerih nam tudi zgoraj opisana standardizacija ne daje ustreznih rezultatov, zato je ena od poti tudi standardizacija residualov s standardnim odklonom celotnega trikotnika in predpostavka, da je standardni odklon residualov v posameznem letu razvoja sorazmeren deležu rešenih škod do vključno tega leta razvoja, glede na skupen znesek rešenih škod. Residuale tako izračunamo kot

$$r_{ij}^{tot} = \frac{r_{ij}}{\hat{w}_j \hat{\sigma}^{tot}},$$

kjer

$$\hat{\sigma}^{tot} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{\min(n-1,n-j+1)} \left(\frac{r_{ij}}{\hat{w}_j} \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{\min(n-1,n-j+1)} 1 \right) - (k-1)} \right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \hat{w}_j = \left(\frac{\prod_{l=0}^{j} f_l - \prod_{l=0}^{j-1} f_l}{\prod_{l=0}^{k-1} f_l} \right).$$

b) Multiplikativni residuali

Včasih lahko residuale učinkovito homogeniziramo, če jih definiramo na naslednji način:

$$r_{ij}^{mul} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{A_{i,j}}{(DA)_{i,j}}; & j = 1, \\ \dfrac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{(DA)_{i,j} - (DA)_{i,j-1}}; & 1 \le j \le d \end{array} \right\}.$$

Ustrezno seveda računamo tudi nov trikotnik. V primerih, kjer je imenovalec 0, residuala ne računamo.

Ker vzorčimo razmerja med dejanskim in pričakovanim, lahko tu učinkovito odpravimo odklone tako v letih razvoja, kot tudi v letih nastanka škode.

c) Korekcija za rast portfelja oz. inflacijo

Preden residuale kakorkoli standardiziramo, vedno najprej preverimo, če je potrebno podatke v osnovnem trikotniku korigirati zaradi gibanja portfelja oz. zaradi inflacije. Korekcijo za inflacijo smo opisali že pri determinističnem veriženju, zato tu ponovno zgolj opozorimo, da praviloma to korekcijo delamo na podatkih posameznega leta in ne na kumulativnih podatkih. Od vseh korekcij tudi ponavadi najprej naredimo to (vendar pa jo naredimo le v pogojih dovolj visoke inflacije).

Korekcijo za gibanje portfelja lahko izvedemo kar na kumulativni osnovni tabeli podatkov, in sicer jo izvedemo tako, da kumulativen znesek škod v posamezni celici delimo s kvadratnim korenom števila, ki meri izpostavljenost (npr. število zavarovanih vozil) za vsako leto nastanka škode. Lahko pa korekcijo naredimo tudi naknadno, in sicer tako, da s kvadratnim korenom izpostavljenosti delimo residuale osnovne tabele. Metodi se razlikujeta zgolj v ocenjenih faktorjih razvoja, druga metoda pa zato daje večjo utež letom z večjo izpostavljenostjo.

Vidimo torej, da je nadgradnja statistične metode z bootstrapom v dobi zmogljivih računalnikov zelo enostavna in da nam lahko da zelo veliko informacij. Žal pa se moramo nadgradnje lotiti zelo previdno, saj so predpostavke, na katerih temelji bootstrap, kljub navidezni enostavnosti večinoma precej stroge.

4.3. OCENA UPORABNOSTI METOD NA OBEH PORTFELJIH

V nadaljevanju bomo predstavili rezultate opisanih stohastičnih metod. Opozorimo, da je izračun praviloma zelo obsežen, vmesni koraki pa vsebujejo veliko matrik. Zato podani rezultati večinoma kažejo samo končne rezultate, ni pa razviden celoten potek postopka (kot je bilo to pri determinističnih metodah).

Pred pregledom rezultatov opozorimo še na uporabljene oznake v tabelah z rezultati. Z oznako AY smo označili leto nastanka škode, z R rezervacijo, z SD smo označili standardni odklon, z %SD razmerje med standardnim odklonom in ocenjeno rezervacijo. Ni odveč poudariti, da rezultati v vrsticah skupaj predstavljajo rezultate celotnega portfelja. Pri rezultatih rezervacije je to v resnici seštevek rezultatov rezervacij po posameznih letih nastanka (torej je rezultat v vrstici skupaj seštevek predhodnih vrstic), nikakor pa to seveda ne velja za rezultate standardnih odklonov. Standardni odkloni rezervacije celotnega portfelja praviloma niso seštevki standardnih odklonov po posameznih letih nastanka škod (gre za odvisne spremenljivke, zato pri izračunu variance seveda pomembno vlogo igra še kovarianca). Ostale oznake v nekaterih tabelah bomo definirali ob komentarju rezultatov teh tabel.

4.3.1. Rezultati portfelja A

Začnimo z rezultati log – linearnih modelov. Najprej bomo prikazali rezultate regresijske analize. Prednost tega pristopa je, da lahko aproksimira razvoj bodočih škod tudi v tistem delu trikotnika, za katerega še nimamo ustreznih podatkov iz preteklih let. Konkretno to v našem primeru pomeni, da nam ta model aproksimira tudi razvoj škod po letu 2001, ne glede na to, da še nobeno leto iz našega trikotnika ni do konca razvito. V naših izračunih smo predpostavili, da so vse škode do konca razvite po dvanajstih letih razvoja.

Poglejmo torej rezultate. Tabela 4.1 (rezervacija za vsako leto škode in leto razvoja posebej) in Tabela 4.2 (kumulativna rezervacija za posamezno leto škode) prikazujeta rezultate brez upoštevanja korekcije za inflacijo, Tabela 4.3 (kumulativna) pa z upoštevano korekcijo (ne bomo pa prikazali tabele za vsako leto škode in leto razvoja posebej, saj nam o končnih rezultatih ne pove nič novega – ilustrira nam le, kako postopek poteka). Opozorimo še, da moramo dobljenim rezultatom škodne rezervacije (za primerljivost z rezultati determinističnih metod) prišteti še rezervacijo za vsa leta pred letom 1995. Seveda se standardni odklon nanaša samo na del rezervacije iz let po letu 1995.

Tabela 4.1 - znesek rezerviranih škod (Pij) v SIT z varianco in standardnim odklonom za posamezno leto škode in leto razvoja - portfelj AO brez korekcije za inflacijo

	AY	L.razvoja	Yij	Var(Yij)	Pij	Var(Pij)	SD(Pij)
1	0	7	17,76	0,1242	55.096.683	401.581.778.644.985	20.039.505
2	0	8	17,29	0,1424	34.809.190	185.406.309.284.673	13.616.399
3	0	9	16,83	0,1649	22.039.886	87.073.794.158.338	9.331.334
4	0	10	16,36	0,1917	13.985.299	41.339.649.632.004	6.429.592
5	0	11	15,89	0,2230	8.893.672	19.756.870.120.043	4.444.870
6	0	12	15,42	0,2586	5.668.100	9.479.225.049.478	3.078.835
7	1	6	18,06	0,1181	74.321.216	692.688.215.010.103	26.318.971
8	1	7	17,60	0,1339	46.897.973	315.014.943.865.014	17.748.660
9	1	8	17,13	0,1539	29.658.030	146.370.798.646.946	12.098.380
10	1	9	16,66	0,1784	18.796.522	68.986.236.930.769	8.305.795
11	1	10	16,19	0,2072	11.938.772	32.807.844.044.654	5.727.813
12	1	11	15,72	0,2403	7.599.566	15.688.506.108.977	3.960.872
13	1	12	15,26	0,2778	4.848.026	7.527.203.696.908	2.743.575
14	2	5	18,61	0,1140	127.867.032	1.974.739.892.521.770	44.438.046
15	2	6	18,14	0,1272	80.584.435	880.923.771.151.098	29.680.360
16	2	7	17,67	0,1448	50.896.827	403.487.586.503.534	20.087.000
17	2	8	17,20	0,1667	32.216.416	188.229.178.613.274	13.719.664
18	2	9	16,74	0,1929	20.436.697	88.877.528.742.992	9.427.488
19	2	10	16,27	0,2236	12.992.453	42.288.939.868.181	6.502.995
20	2	11	15,80	0,2586	8.277.869	20.217.852.929.113	4.496.427
21	2	12	15,33	0,2979	5.285.584	9.695.089.580.570	3.113.694
22	3	4	19,11	0,1126	210.139.969	5.263.559.721.047.980	72.550.394
23	3	5	18,64	0,1231	132.255.868	2.291.280.160.580.330	47.867.318
24	3	6	18,17	0,1379	83.419.619	1.029.276.756.419.830	32.082.343
25	3	7	17,70	0,1571	52.731.294	473.174.795.711.686	21.752.581
26	3	8	17,23	0,1807	33.405.318	221.037.228.611.118	14.867.321
27	3	9	16,77	0,2086	21.208.491	104.358.118.404.571	10.215.582
28	3	10	16,30	0,2409	13.494.317	49.610.569.005.161	7.043.477
29	3	11	15,83	0,2776	8.604.765	23.689.168.843.790	4.867.152
30	3	12	15,36	0,3186	5.498.878	11.345.207.266.653	3.368.265
31	4	3	19,80	0,1157	421.247.655	21.763.564.398.374.100	147.524.792
32	4	4	19,33	0,1231	264.717.277	9.181.890.620.848.150	95.822.182
33	4	5	18,86	0,1349	166.714.757	4.014.933.606.369.370	63.363.504
34	4	6	18,40	0,1511	105.223.506	1.805.840.590.069.010	42.495.183
35	4	7	17,93	0,1716	66.557.724	829.352.080.810.956	28.798.474
36	4	8	17,46	0,1965	42.192.098	386.524.546.816.829	19.660.228
37	4	9	16,99	0,2257	26.804.688	181.955.391.315.193	13.489.084
38	4	10	16,52	0,2593	17.066.220	86.234.206.477.668	9.286.237
39	4	11	16,05	0,2973	10.889.575	41.056.889.320.351	6.407.565
40	4	12	15,59	0,3396	6.963.562	19.611.493.259.453	4.428.487
41	5	2	20,47	0,1291	829.272.885	94.798.206.087.103.900	307.893.173
42	5	3	20,00	0,1327	520.107.058	38.377.362.481.465.400	195.901.410
43	5	4	19,53	0,1406	326.915.112	16.128.517.101.637.600	126.998.099
44	5	5	19,07	0,1528	205.932.178	7.001.411.732.998.670	83.674.439
45	5	6	18,60	0,1694	130.005.102	3.120.151.097.800.640	55.858.313
46	5	7	18,13	0,1904	82.251.448	1.418.780.022.208.540	37.666.696
47	5	8	17,66	0,2157	52.152.325	654.806.860.206.910	25.589.194
48	5	9	17,19	0,2454	33.139.867	305.471.073.729.460	17.477.731
49	5	10	16,73	0,2795	21.104.488	143.604.870.587.864	11.983.525
50	5	11	16,26	0,3179	13.469.325	67.889.577.017.914	8.239.513
51	5	12	15,79	0,3607	8.615.170	32.231.589.986.997	5.677.287
52	6	1	20,94	0,1886	1.365.490.986	387.018.038.494.327.000	622.107.739
53	6	2	20,47	0,1848	853.262.308	147.741.834.485.235.000	384.372.000
54	6	3	20,00	0,1853	534.346.850	58.116.898.944.564.000	241.074.468
55	6	4	19,54	0,1901	335.359.731	23.552.944.252.823.300	153.469.685
56	6	5	19,07	0,1994	210.933.491	9.817.030.488.537.970	99.080.929
57	6	6	18,60	0,2130	132.961.876	4.196.090.480.766.110	64.777.237
58	6	7	18,13	0,2309	83.995.438	1.832.734.858.045.380	42.810.453
59	6	8	17,66	0,2532	53.177.906	814.998.096.544.182	28.548.172
60	6	9	17,19	0,2799	33.740.672	367.747.292.806.648	19.176.738
61	6	10	16,73	0,3110	21.454.737	167.891.428.503.467	12.957.292
62	6	11	16,26	0,3464	13.672.239	77.373.366.290.574	8.796.213
63	6	12	15,79	0,3861	8.731.785	35.931.335.837.847	5.994.275
	SKUPAJ				8.232.338.804		

Tabela 4.2 - rezervacija škod v SIT po posameznem letu škode s standardnimi odkloni za AO portfelj brez korekcije za inflacijo

AY	R	SD	% SD
0	140.492.830	42.609.807	30,3%
1	194.060.106	55.996.922	28,9%
2	338.557.312	93.257.935	27,5%
3	560.758.518	148.968.234	26,6%
4	1.128.377.062	296.548.577	26,3%
5	2.222.964.957	616.361.336	27,7%
6	3.647.128.019	1.311.303.879	36,0%
Skupaj	8.232.338.804	1.677.790.165	20,4%

Tabela 4.3 - rezervacija škod v SIT po posameznem letu škode s standardnimi odkloni za AO portfelj s korekcijo za inflacijo

AY	R	SD	% SD
0	121.214.713	36.415.517	30,0%
1	165.666.089	47.288.861	28,5%
2	287.577.662	78.361.954	27,2%
3	475.388.737	125.170.885	26,3%
4	957.925.127	250.618.351	26,2%
5	1.869.588.152	519.551.876	27,8%
6	3.041.211.787	1.103.194.983	36,3%
Skupaj	6.918.572.266	1.385.922.914	20,0%

Kot vidimo, so rezultati zelo primerljivi z rezultati determinističnih metod, standardni odkloni pa še sprejemljivi, da rezultatom lahko zaupamo.

Poglejmo, kakšni pa so rezultati Kremerjevega postopka. V tabeli 4.4 so izračunane ocene za parametre, ki jih po dobimo iz Kremerjevih enačb, za portfelj brez upoštevanja korekcije za inflacijo, v tabeli 4.5 dejanski rezultati tega portfelja, v tabeli 4.6 pa rezultati portfelja z upoštevanjem korekcije za inflacijo (vrednosti parametrov za ta portfelj ne navajamo).

Tabela 4.4 - parametri za izračun rezervacije AO portfelja brez upoštevanja korekcije za inflacijo

AY	a	b	µ
0	-0,143088169	1,44617	19,7955
1	-0,194751567	1,08739	
2	-0,103788364	0,19114	
3	-0,086438049	-0,33257	
4	0,072928438	-0,661368227	
5	0,170443104	-0,994674084	
6	0,284694607	-0,736082925	

Tabela 4.5 - rezultati Kremerjeve metode (v SIT) za AO portfelj - brez upoštevanja korekcije za inflacijo (s Pij smo označili cenilko za Cij iz opisa metode)

E(Pi,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	E(R)	SD(R)
1995	1.472.829.910	1.028.808.522	419.853.678	248.686.800	179.002.540	128.264.448	166.115.826		
1996	1.398.670.666	977.006.435	398.713.401	236.165.038	169.989.487	121.806.137	157.751.640	157.751.640	24.470.064
1997	1.531.864.259	1.070.045.491	436.682.362	258.654.729	186.177.366	133.405.577	172.774.124	306.179.701	33.859.716
1998	1.558.674.498	1.088.773.113	444.325.048	263.181.628	189.435.787	135.740.402	175.797.966	500.974.156	34.452.319
1999	1.827.963.062	1.276.877.908	521.090.052	308.650.905	222.164.167	159.191.956	206.170.171	896.177.199	40.404.566
2000	2.015.196.949	1.407.665.461	574.464.061	340.265.279	244.919.912	175.497.607	227.287.689	1.562.434.548	44.543.109
2001	2.259.104.364	1.578.040.889	643.993.763	381.448.959	274.563.556	196.738.791	254.797.235	3.329.583.192	49.934.341
							SKUPAJ	6.753.100.436	95.090.918

Tabela 4.6 - rezultati Kremerjeve metode (v SIT) za AO portfelj – z upoštevanjem korekcije za inflacijo

E(Pi,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	E(R)	SD(R)
1995	2.447.015.583	1.572.461.793	592.958.455	325.549.929	217.515.250	142.868.530	169.526.084		
1996	2.137.770.184	1.373.739.489	518.022.408	284.408.050	190.026.422	124.813.297	148.101.962	148.101.962	23.381.259
1997	2.163.448.629	1.390.240.558	524.244.784	287.824.300	192.308.980	126.312.528	149.880.931	276.193.459	30.944.321
1998	2.040.423.422	1.311.184.078	494.433.435	271.457.078	181.373.267	119.129.725	141.357.903	441.860.896	29.184.662
1999	2.221.252.526	1.427.385.569	538.251.769	295.514.506	197.447.169	129.687.398	153.885.511	776.534.584	31.771.104
2000	2.244.645.567	1.442.418.028	543.920.348	298.626.706	199.526.577	131.053.196	155.506.150	1.328.632.977	32.105.700
2001	2.305.482.413	1.481.512.024	558.662.273	306.720.415	204.934.365	134.605.143	159.720.849	2.846.155.069	32.975.864
							SKUPAJ	5.817.478.947	74.051.100

Dolžni smo opozoriti na precejšnjo vsebinsko razliko med rezultati obeh log- linearnih metod. Rezultati Kremerjeve metode namreč prikazujejo rezervacijo, kot da je leto 1995 že do konca razvito, prav tako je izračunan standardni odklon zgolj manjkajočega spodnjega dela trikotnika. Rezultate rezervacije moramo za primerljivost z regresijsko metodo povečati za pričakovano dodatno rezervacijo do konca razvoja posameznega leta, standardnih odklonov pa ne moremo primerjati. Prav tako moramo (kot pri vseh metodah doslej) tem rezultatom prišteti še rezervacijo za škode, ki so nastale pred letom 1995.

Naslednja na vrsti je Mackova stohastična metoda veriženja. Dokazali smo že, da so rezultati identični deterministični metodi veriženja, zato jih ne bomo posebej prikazovali. Prikazali bomo samo standardne odklone po posameznih letih škod in skupni standardni odklon. Kot pri Kremerju se tudi tu standardni odkloni nanašajo zgolj na rezultate spodnjega dela tabele, ne pa na končne rezultate, ki smo jih dobili s korekcijo za pričakovan dokončni razvoj. Oznake v tabelah ustrezajo definicijam v Mackovem opisu modela, zato se namerno razlikujejo od oznak v ostalih tabelah. Vsebinsko pa oznaka *se* ustreza oznaki SD v ostalih tabelah.

Tabela 4.7 - standardni odkloni (v SIT) po Macku za metodo veriženja za AO portfelj

	Brez korekcije za inflacijo			S korekcijo za inflacijo		
AY	Ri	se(Ri)	%se	Ri	se(Ri)	%se
1995	0			0		
1996	170.860.913	19.482.220	11,40%	160.604.068	18.550.094	11,55%
1997	330.454.304	38.047.028	11,51%	300.449.291	36.388.700	12,11%
1998	523.791.215	62.770.093	11,98%	466.391.541	61.746.106	13,24%
1999	984.317.322	85.286.368	8,66%	869.090.550	81.176.935	9,34%
2000	1.584.773.775	158.217.928	9,98%	1.363.684.611	150.336.044	11,02%
2001	3.307.576.361	256.515.693	7,76%	2.853.397.818	234.370.647	8,21%
SKUPAJ	6.901.773.888	***381.131.551***	***5,52%***	6.013.617.879	***344.057.021***	**5,72%**

Nadaljevali bomo z rezultati bootstrap metode (pri opisu smo sicer pred njo opisali Klamanov filter), saj bomo tako lažje primerjali rezultate metod, ki temeljijo na podobni logiki (veriženje). Prikazani rezultati so ena izmed različic rezultatov po pet tisoč iteracijah. S Povpr. Ri smo nakazali, da gre za povprečje 5000 rezultatov ločeno po letih nastanka škod.

Tabela 4.8 - rezultati bootstrapa za AO portfelj (5000 iteracij)

	Brez korekcije za inflacijo			S korekcijo za inflacijo		
AY	Povpr. Ri	SD(Ri)	%SD	Povpr. (Ri)	SD(Ri)	%SD(Ri)
1995						
1996	172.912.541	84.295.615	48,75%	163.097.842	95.984.699	58,85%
1997	334.327.995	93.207.172	27,88%	302.730.970	101.121.797	33,40%
1998	527.189.862	93.900.944	17,81%	467.927.971	93.885.735	20,06%
1999	989.225.738	119.868.665	12,12%	871.142.548	111.426.001	12,79%
2000	1.589.375.223	127.310.531	8,01%	1.367.352.183	109.561.985	8,01%
2001	3.314.959.386	173.946.396	5,25%	2.857.843.843	148.776.698	5,21%
SKUPAJ	6.927.990.744	***614.932.407***	***8,88%***	6.030.095.356	***569.670.463***	***9,45%***

Končni rezultati so primerljivi z Mackom, se pa standardni odkloni za posamezno leto zelo razlikujejo. Velik standardni odklon v prvih letih je povsem razumljiv, saj v bistvu kaže na razpršenost samih residualov. V letu 1996 tako z residuali spreminjamo samo zadnje leto, zato je ob dokaj visoki razpršenosti le-teh pričakovano, da bo tudi sam rezultat leta razpršen. Ni odveč še opozorilo, da je kvaliteta rezultatov po metodi bootstrap zelo odvisna tudi od kvalitete generatorja naključnih števil, ki pa v orodju Excel, v katerem je bila metoda izpeljana, ni najboljši.

Ob koncu si oglejmo še rezultate metode Kalmanovega filtra. Kot smo omenili že ob opisu metode, nam metoda lahko da rezultate tudi, če portfelj še ni do konca razvit. Pri izračunih smo tako predpostavili, da bodo vsa leta razvita v devetih letih. Metodo smo preverili z upoštevanjem ene, dveh, treh in štirih baznih funkcij in ob predpostavki, da parametri sledijo procesu naključnega sprehoda (najbolj enostavna možnost – bolj komplicirani naključni procesi zahtevajo več začetnih parametrov, ki pa že tako ali tako predstavljajo precejšnjo oviro). Glede na to, da nam metoda v osnovi omogoča upoštevanje vpliva inflacije in velikosti portfelja na gibanje rešenih škod, smo vse to upoštevali v *f(t)*. Čeprav nam metoda prav tako omogoča upoštevanje vpliva bodoče inflacije na škode, pa tega zaradi primerljivosti z ostalimi metodami nismo upoštevali. Zaradi vsega navedenega torej lahko na to metodo vsebinsko gledamo kot na metode, kjer smo podatke korigirali za inflacijo.

Za razliko od drugih metod, so tu v osnovi rezultati prikazani glede na bodoče leto rešitve, ne glede na to, iz katerega leta nastanka škode izvirajo. Rezultati so razvidni iz Tabele 4.9.

Tabela 4.9 - rezultati metode Kalmanovega filtra za AO portfelj

	1 bazna funkcija		2 bazni funkciji		3 bazne funkcije		4 bazne funkcije	
Rešeno v	R	SD	R	SD	R	SD	R	SD
2002	2.585.268.887	151.882.796	2.387.441.866	109.408.061	2.591.933.095	426.093.233	2.725.261.101	762.174.059
2003	1.336.530.935	75.886.274	1.064.026.180	83.679.248	1.231.427.883	373.459.986	1.560.066.583	727.321.161
2004	642.929.528	35.557.998	424.388.165	55.143.456	589.238.917	347.531.779	1.042.501.199	717.765.321
2005	294.288.094	16.036.739	155.295.031	32.342.460	283.646.024	312.258.992	781.116.330	711.896.192
2006	132.606.489	7.311.442	52.179.250	17.074.100	150.262.380	238.517.716	577.331.299	621.677.192
2007	56.760.618	3.356.039	15.792.088	8.446.845	81.386.844	146.275.976	380.179.618	440.972.504
2008	22.217.211	1.339.666	4.078.767	3.587.033	46.087.641	65.503.371	214.001.918	219.581.168
2009	7.175.227	514.394	796.335	1.568.492	28.093.188	15.025.510	93.418.618	38.944.263
2010	2.094.093	160.776	34.683	499.925	7.118.274	7.436.835	27.775.308	27.120.705
SKUPAJ	5.079.871.080	256.356.917	4.104.032.366	303.606.320	5.009.194.247	1.820.520.855	7.401.651.974	4.150.075.462

Tako predstavljeni rezultati nam pokažejo, da (razumljivo) s številom baznih funkcij standardni odklon hitro narašča (zato tudi nismo nadaljevali s še več baznimi funkcijami), bolj vprašljivo pa je, koliko so sploh verodostojni. Ob dejstvu, da namreč metode upoštevajo tudi nadaljnji razvoj škod po šestem letu razvoja, je namreč končna rezervacija kljub dejstvu, da upošteva tako inflacijo kot gibanje portfelja, vsaj pri prvih treh verzijah izrazito nižja od vseh dosedanjih metod. Šele verzija s štirimi baznimi funkcijami je po višini rezervacije primerljiva z ostalimi metodami, žal pa je standardni odklon v tem primeru že tako velik, da lahko resno dvomimo o danih rezultatih. Za bolj resno diskusijo o kvaliteti in primerljivosti rezultatov z ostalimi metodami je torej nujno, da le-te preoblikujemo v klasično obliko – dopolnimo torej trikotnike razvoja. Tako prikazane rezultate za vse štiri variante metode prikazuje Tabela 4.10.

Tabela 4.10 - Rezultati metod Kalmanovega filtra v trikotniški obliki za AO portfelj

AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	1.203.621.595	990.362.963	389.380.828	238.981.654	211.744.427	144.009.041	164.152.687	17.216.707	5.856.620	2.412.549	25.485.876	
1996	1.312.426.838	992.279.734	493.942.519	267.081.565	136.305.455	105.939.929	37.191.256	16.183.704	5.505.223	2.267.796	61.147.980	37.191.256
1997	1.619.429.770	1.056.795.980	416.908.477	240.343.587	189.406.056	76.306.251	34.817.346	15.150.702	5.153.826	2.123.044	133.551.168	111.123.597
1998	1.591.691.404	1.011.317.297	473.041.844	248.514.225	165.426.582	77.693.637	35.450.389	15.426.169	5.247.532	2.161.644	301.405.954	278.570.608
1999	2.032.341.674	1.373.447.675	420.466.772	362.145.079	168.011.372	78.907.600	36.004.301	15.667.203	5.329.524	2.195.420	668.260.501	645.068.353
2000	2.038.767.973	1.358.698.563	688.141.820	345.032.729	160.072.374	75.179.000	34.302.999	14.926.885	5.077.690	2.091.680	1.324.825.177	1.302.728.922
2001	2.232.406.498	1.238.841.191	688.935.525	345.430.691	160.257.001	75.265.711	34.342.564	14.944.102	5.083.546	2.094.093	2.565.194.424	2.543.072.684
											5.079.871.080	**4.917.755.420**
AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	1.203.621.595	990.362.963	389.380.828	238.981.654	211.744.427	144.009.041	164.152.687	3.780.635	877.525	39.957	4.698.118	
1996	1.312.426.838	992.279.734	493.942.519	267.081.565	136.305.455	105.939.929	12.648.770	3.553.797	824.874	37.560	17.065.000	12.648.770
1997	1.619.429.770	1.056.795.980	416.908.477	240.343.587	189.406.056	36.752.141	11.841.401	3.326.959	772.222	35.163	52.727.886	48.593.542
1998	1.591.691.404	1.011.317.297	473.041.844	248.514.225	105.954.584	37.420.362	12.056.699	3.387.449	786.263	35.802	159.641.158	155.431.645
1999	2.032.341.674	1.373.447.675	420.466.772	280.558.211	107.610.124	38.005.055	12.245.085	3.440.378	798.548	36.361	442.693.762	438.418.475
2000	2.038.767.973	1.358.698.563	634.689.854	267.301.065	102.525.250	36.209.211	11.666.471	3.277.811	760.814	34.643	1.056.465.119	1.052.391.851
2001	2.232.406.498	1.313.057.672	635.421.906	267.609.370	102.643.503	36.250.975	11.679.928	3.281.592	761.692	34.683	2.370.741.321	2.366.663.355
											4.104.032.366	**4.074.147.637**
AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	1.203.621.595	990.362.963	389.380.828	238.981.654	211.744.427	144.009.041	164.152.687	20.352.527	24.174.096	8.200.776	52.727.399	
1996	1.312.426.838	992.279.734	493.942.519	267.081.565	136.305.455	105.939.929	37.247.912	19.131.376	22.723.650	7.708.730	86.811.667	37.247.912
1997	1.619.429.770	1.056.795.980	416.908.477	240.343.587	189.406.056	69.456.791	34.870.385	17.910.224	21.273.204	7.216.683	150.727.287	104.327.176
1998	1.591.691.404	1.011.317.297	473.041.844	248.514.225	136.194.429	70.719.641	35.504.392	18.235.865	21.659.990	7.347.896	289.662.213	242.418.463
1999	2.032.341.674	1.373.447.675	420.466.772	315.867.383	138.322.467	71.824.636	36.059.148	18.520.800	21.998.427	7.462.706	610.055.567	562.073.634
2000	2.038.767.973	1.358.698.563	642.527.045	300.941.781	131.786.350	68.430.724	34.355.255	17.645.641	20.958.941	7.110.073	1.223.755.811	1.178.041.155
2001	2.232.406.498	1.370.287.009	643.268.137	301.288.888	131.938.353	68.509.653	34.394.880	17.665.994	20.983.115	7.118.274	2.595.454.302	2.549.686.920
											5.009.194.247	**4.673.795.259**
AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	1.203.621.595	990.362.963	389.380.828	238.981.654	211.744.427	144.009.041	164.152.687	137.422.807	75.662.799	31.999.203	245.084.809	
1996	1.312.426.838	992.279.734	493.942.519	267.081.565	136.305.455	105.939.929	177.072.621	129.177.439	71.123.031	30.079.251	407.452.341	177.072.621
1997	1.619.429.770	1.056.795.980	416.908.477	240.343.587	189.406.056	195.670.374	165.770.114	120.932.070	66.583.263	28.159.299	577.115.119	361.440.488
1998	1.591.691.404	1.011.317.297	473.041.844	248.514.225	203.480.594	199.228.017	168.784.116	123.130.835	67.793.868	28.671.286	791.088.715	571.492.727
1999	2.032.341.674	1.373.447.675	420.466.772	262.544.538	206.659.978	202.340.955	171.421.367	125.054.754	68.853.147	29.119.275	1.065.994.014	842.966.838
2000	2.038.767.973	1.358.698.563	532.815.099	250.138.587	196.894.726	192.779.789	163.321.237	119.145.574	65.599.646	27.743.309	1.548.437.968	1.335.949.439
2001	2.232.406.498	1.216.255.067	533.429.650	250.427.098	197.121.825	193.002.142	163.509.612	119.282.997	65.675.309	27.775.308	2.766.479.007	2.553.745.393
											7.401.651.974	**5.842.667.506**

Za primerljivost z ostalimi metodami, ki ne znajo opredeliti rezervacije nerazvitega dela trikotnika, smo v koloni REZ.-ZADNJI prikazali, kakšna je rezervacija po metodah Kalmanovega filtra zgolj do šestega leta razvoja. Hitro lahko opazimo, da z manj baznimi funkcijami vsaj optično aproksimacija ni preveč dobra – prva leta razvoja so verjetno precenjena, kasnejša leta razvoja pa izrazito podcenjena. Precej bolj se našim pričakovanjem, podatkom in rezultatom ostalih metod prilega verzija s štirimi baznimi funkcijami, ki bi ji na prvi pogled zato lahko hitro zaupali. Vendar, kot smo že omenili, standardni odklon nas svari pred prevelikim zaupanjem. Vseeno je smiselno preveriti še, ali se morda tako velik standardni odklon ne nanaša predvsem na leta 7, 8, in 9, ki jih pri ostalih metodah sploh nismo mogli preveriti. V Tabeli 4.11 zato predstavljamo še standardne odklone rezervacije za zgolj šest let razvoja pri varianti s štirimi baznimi funkcijami.

Tabela 4.11 - Standardni odkloni metode Kalmanovega filtra s štirimi baznimi funkcijami za standardno razvito tabelo

AY	REZ. - ZADNJI	SD	%SD
1995			
1996	177.072.621	256.767.543	145,01%
1997	361.440.488	424.382.979	117,41%
1998	571.492.727	521.255.978	91,21%
1999	842.966.838	409.241.278	48,55%
2000	1.335.949.439	518.180.145	38,79%
2001	2.553.745.393	533.310.614	20,88%

Tudi ti odkloni so žal previsoki (predvsem prva leta) za resno uporabo.

Zaključimo lahko, da so rezultati metode Kalmanovega filtra pravzaprav precejšnje razočaranje, saj bi zgolj na podlagi teoretične izpeljave lahko upali na bolj kvalitetne rezultate. Seveda pa ne moremo na splošno trditi, da ta metoda ni dobra. Verjetno bi bili rezultati precej boljši, če bi metodo uporabili na bistveno večji tabeli razvoja. Očitno je namreč, da s se da s štirimi baznimi funkcijami že kar lepo opisati gibanje AO portfelja, žal pa je podatkov premalo, da bi se standardni odkloni že lahko »umirili«.

4.3.2. Rezultati portfelja B

Preglejmo še rezultate, ki jih izbrane metode dajo za kasko portfelj.

Začeli bomo spet z log-linearnimi modeli. Toda – pri originalnem portfelju log-linearnih modelov sploh ne moremo uporabiti, saj imamo v nekaterih letih negativen znesek rešenih škod. Zato moramo portfelj naprej predelati, v našem primeru smo ga premaknili za konstanto (premik moramo seveda upoštevati tudi pri rezultatih). Kljub temu so rezultati regresijske analize izredno slabi (z zelo velikimi standardnimi odkloni) in zelo odvisni od konstante premika. Standardni odkloni postanejo uporabni šele pri zelo veliki konstanti premika. Tabela 4.12 prikazuje rezultate brez korekcije za inflacijo in ob premiku 50.000.000 SIT.

Tabela 4.12 - rezervacija regresijske analize v SIT za kasko portfelj brez korekcije za inflacijo in ob premiku za 50 mio SIT

AY	R	SD	% SD
0	0	0	
1	0	0	
2	0	0	
3	24.371.479	19.998.672	82,1%
4	145.473.094	95.879.888	65,9%
5	544.279.385	361.751.940	66,5%
6	1.066.977.168	960.062.315	90,0%
Skupaj	1.781.101.126	1.060.461.330	59,5%

Premik za konstanto pa se izkaže za primerno rešitev pri Kremerjevi metodi. Pri enakem premiku so namreč rezultati naslednji:

Tabela 4.13 - rezultati Kremerjeve metode v SIT za kasko portfelj brez korekcije za inflacijo in ob premiku za 50 mio SIT

E(Pi,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	E(R)	SD(R)
1995	1.583.381.816	313.302.206	6.599.511	3.758.954	6.652.202	-304.119	6.872.419		
1996	1.685.869.708	336.097.903	10.150.894	7.132.104	10.206.891	2.814.090	10.440.926	10.440.926	1.411.248
1997	1.816.550.726	365.164.409	14.679.218	11.433.165	14.739.430	6.790.080	14.991.084	21.781.163	2.224.431
1998	1.962.097.790	397.537.470	19.722.676	16.223.508	19.787.584	11.218.370	20.058.860	51.064.814	3.106.472
1999	2.187.003.084	447.561.652	27.516.034	23.625.741	27.588.197	18.061.147	27.889.796	97.164.881	4.491.153
2000	2.087.328.625	425.391.728	24.062.141	20.345.189	24.131.089	15.028.537	24.419.249	107.986.205	3.875.624
2001	2.750.614.525	572.921.979	47.046.147	42.175.698	47.136.492	35.209.108	47.514.078	792.003.502	7.993.350
							SKUPAJ	1.080.441.492	10.755.205

Tudi ta metoda pa je občutljiva na velikost konstante. Pri pol manjšem premiku (25 mio SIT) so npr. rezultati naslednji:

Tabela 4.14 - rezultati Kremerjeve metode v SIT za kasko portfelj brez korekcije za inflacijo in ob premiku za 25 mio SIT

E(Pi,j)

AY	0	1	2	3	4	5	6	E(R)	SD(R)
1995	1.575.972.521	314.395.194	9.245.397	5.895.433	7.646.624	736.402	7.060.771		
1996	1.651.887.029	330.488.549	10.869.236	7.360.425	9.194.653	1.956.764	8.581.020	8.581.020	1.824.293
1997	1.828.224.934	367.870.976	14.641.170	10.763.379	12.790.491	4.791.481	12.112.330	16.903.810	2.769.198
1998	2.042.669.444	413.331.741	19.228.217	14.901.711	17.163.389	8.238.779	16.406.755	41.808.922	3.903.090
1999	2.281.162.162	463.890.562	24.329.665	19.504.124	22.026.672	12.072.664	21.182.764	74.786.224	5.183.420
2000	2.116.898.255	429.067.740	20.815.999	16.334.173	18.677.044	9.432.043	17.893.247	83.152.505	4.300.185
2001	2.786.844.528	571.091.755	35.146.399	29.262.740	32.338.418	20.201.751	31.309.463	719.350.525	7.921.580
							SKUPAJ	944.583.007	11.590.577

Rezultati obeh metod na portfelju, korigiranem z inflacijo, niso bistveno boljši, zato jih ne bomo navajali. Zaključimo torej lahko, da log-linearni modeli niso primerni za tovrstne portfelje. Posvetimo se zato rezultatom veriženja. Oglejmo si zopet rezultate Mackovega pristopa, nato pa še bootstrapa.

Tabela 4.15 - standardni odkloni (v SIT) po Macku za metodo veriženja za kasko portfelj

	Brez korekcije za inflacijo			S korekcijo za inflacijo		
AY	Ri	se(Ri)	%se	Ri	se(Ri)	%se
1995	0			0		
1996	7.960.208	119.245	1,50%	7.371.537	114.078	1,55%
1997	9.900.839	1.259.323	12,72%	8.552.860	1.224.981	14,32%
1998	22.908.315	13.627.894	59,49%	20.091.379	13.577.169	67,58%
1999	37.455.275	16.051.658	42,86%	32.393.855	15.240.077	47,05%
2000	55.351.227	18.169.485	32,83%	46.452.636	16.517.628	35,56%
2001	617.269.687	43.459.341	7,04%	569.563.739	43.786.599	7,69%
SKUPAJ	750.845.551	**59.891.795**	**7,98%**	684.426.006	**57.128.976**	**8,35%**

Tabela 4.16 – rezultati bootstrapa za kasko portfelj (5000 iteracij)

	Brez korekcije za inflacijo			S korekcijo za inflacijo		
AY	Povpr. Ri	SD(Ri)	%SD	Povpr. (Ri)	SD(Ri)	%SD(Ri)
1995						
1996	8.358.336	30.483.426	364,71%	8.383.363	32.719.730	390,29%
1997	9.889.472	33.584.349	339,60%	9.217.355	32.915.750	357,11%
1998	22.906.073	33.855.683	147,80%	20.705.302	31.046.524	149,94%
1999	37.595.887	38.502.499	102,41%	33.121.081	33.370.178	100,75%
2000	55.549.216	37.980.406	68,37%	47.151.589	30.156.908	63,96%
2001	617.597.245	48.157.057	7,80%	570.155.538	35.231.069	6,18%
SKUPAJ	751.886.735	**211.408.337**	**28,12%**	688.734.227	**182.528.674**	**26,50%**

Rezultati rezervacij za posamezna leta so podobni, odkloni pa po bootstrapu bistveno višji, kot po Macku. Za večino let, ki so že precej razvita, so odkloni po bootstrapu problematični. Če primerjamo rezultate še z rezultati za AO portfelj, lahko tudi opazimo, da so rezultati obeh metod pri kasku načeloma bistveno bolj nezanesljivi. Možna razlaga tega dejstva je, da je kasko portfelj za uporabo stohastičnih metod, ki temeljijo na podlagi trikotnikov razvoja, morda celo preveč razvit in da poskušamo s trikotniki ocenjevati razvoj že v tistih letih, ko je znesek rešenih škod statistično neznačilen - seveda za to velikost portfelja.

Poglejmo ob koncu še, kako se obnese Kalmanov filter, ki vendarle temelji na nekoliko drugačni logiki delovanja kot do sedaj naštete metode. Čeprav dosedanji rezultati namigujejo, da je šest let razvoja za kasko portfelj več kot dovolj, bomo – zaradi primerljivosti in enakosti z AO-jem – tudi tu predpostavili, da je potrebnih devet let razvoja. Spet smo tudi uporabili od ene do štiri bazne funkcije in naključni sprehod za variiranje parametrov. Rezultati so prikazani v tabeli 4.17.

Tabela 4.17 - rezultati metode Kalmanovega filtra za kasko portfelj

	1 bazna funkcija		2 bazni funkciji		3 bazne funkcije		4 bazne funkcije	
Rešeno v	R	SD	R	SD	R	SD	R	SD
2002	339.663.559	248.405.452	245.990.449	178.034.794	1.117.124.668	128.625.211	534.572.535	2.920.056.345
2003	192.542.440	115.287.227	-248.736.817	103.284.294	442.170.768	121.547.058	-71.491.829	2.939.719.203
2004	105.370.561	52.079.853	-378.916.652	87.371.628	424.587.558	123.858.684	-113.135.680	2.948.246.901
2005	64.894.429	25.163.581	-355.360.263	75.385.661	449.108.121	124.118.321	-114.843.768	2.961.137.178
2006	44.006.139	13.747.336	-277.191.139	64.906.505	374.732.154	111.684.651	-134.328.643	2.777.851.516
2007	30.736.517	9.417.840	-173.076.081	55.368.292	237.574.395	74.026.071	-114.740.495	2.138.512.428
2008	13.854.636	4.767.596	-69.978.056	25.678.105	111.003.587	34.158.414	-67.033.035	1.114.260.311
2009	916.161	799.085	-7.502.038	3.232.892	22.400.250	3.951.075	-15.171.952	127.572.425
2010	257.526	267.583	-3.094.175	1.272.270	11.331.642	2.241.543	-13.051.347	98.464.945
SKUPAJ	792.241.969	373.746.857	-1.267.864.772	471.621.052	3.190.033.143	691.657.843	-109.224.214	17.517.735.398

Rezultati so milo rečeno slabi in daleč od pričakovanj. Za razliko od AO portfelja so tu še najboljši pri najbolj grobi verziji – z eno samo bazno funkcijo. Pri pregledu rezultatov pa moramo ponovno opozoriti, da so predstavljeni rezultati povsem neobdelani rezultati in zgolj taki, kot jih predstavljena metoda da. Tako zaradi krajših repov, kot smo predpostavili v metodi v zadnjih letih, metoda praviloma predpostavlja negativno rezervacijo (izjema je ena bazna funkcija – od tod tudi najbolj »normalni« rezultati), ki bi jo v realnem svetu prav gotovo črtali. Z nuliranjem negativnih rezervacij nam tudi 2 in 4 bazne funkcije dajo rezultat okrog 720 mio SIT. Podrobneje lahko tako predelane rezultate, prikazane v obliki trikotnikov, preverimo v tabeli 4.18.

Tabela 4.18 - Rezultati korigiranih metod Kalmanovega filtra v trikotniški obliki za kasko portfelj

AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	2.282.004.305	420.255.009	13.115.295	4.517.415	17.272.729	1.743.369	6.487.747	10.624.659	544.304	211.171	11.380.135	
1996	2.589.035.610	486.835.410	28.627.471	11.662.610	-4.138.442	-8.335	15.455.090	11.661.211	597.407	231.773	27.945.481	15.455.090
1997	2.675.201.113	497.295.561	3.937.223	8.697.598	22.913.888	13.344.619	16.485.429	12.438.625	637.234	247.225	43.153.132	29.830.048
1998	2.475.586.287	499.398.455	20.176.221	15.836.250	19.923.289	12.371.574	15.283.366	11.531.642	590.769	229.198	59.929.839	47.578.229
1999	2.665.123.839	521.445.011	23.744.642	39.895.074	21.490.290	13.344.619	16.485.429	12.438.625	637.234	247.225	104.538.495	91.215.411
2000	2.493.619.336	395.327.879	87.478.144	40.726.221	21.938.004	13.622.632	16.828.875	12.697.763	650.510	252.376	194.194.524	180.593.876
2001	2.780.156.859	152.942.685	89.263.412	41.557.368	22.385.718	13.900.645	17.172.322	12.956.901	663.786	257.526	351.100.362	337.222.150
											792.241.969	**701.894.804**

AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	2.282.004.305	420.255.009	13.115.295	4.517.415	17.272.729	1.743.369	6.487.747	0	0	0	0	
1996	2.589.035.610	486.835.410	28.627.471	11.662.610	-4.138.442	-8.335	0	0	0	0	0	0
1997	2.675.201.113	497.295.561	3.937.223	8.697.598	22.913.888	0	0	0	0	0	0	0
1998	2.475.586.287	499.398.455	20.176.221	15.836.250	0	0	0	0	0	0	0	0
1999	2.665.123.839	521.445.011	23.744.642	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	2.493.619.336	395.327.879	118.553.525	0	0	0	0	0	0	0	118.553.525	118.553.525
2001	2.780.156.859	483.036.069	120.972.985	0	0	0	0	0	0	0	604.009.055	604.009.055
											722.562.580	**722.562.580**

AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	2.282.004.305	420.255.009	13.115.295	4.517.415	17.272.729	1.743.369	6.487.747	73.025.817	9.262.097	9.291.947	91.579.862	
1996	2.589.035.610	486.835.410	28.627.471	11.662.610	-4.138.442	-8.335	116.434	80.150.287	10.165.717	10.198.478	100.630.916	116.434
1997	2.675.201.113	497.295.561	3.937.223	8.697.598	22.913.888	135.862.799	124.196	85.493.640	10.843.431	10.878.377	243.202.443	135.986.995
1998	2.475.586.287	499.398.455	20.176.221	15.836.250	76.466.135	125.956.137	115.140	79.259.729	10.052.764	10.085.162	301.935.067	202.537.412
1999	2.665.123.839	521.445.011	23.744.642	0	82.480.326	135.862.799	124.196	85.493.640	10.843.431	10.878.377	325.682.769	218.467.321
2000	2.493.619.336	395.327.879	34.672.252	0	84.198.666	138.693.274	126.784	87.274.757	11.069.336	11.105.010	367.140.078	257.690.975
2001	2.780.156.859	695.606.546	35.379.848	0	85.917.006	141.523.749	129.371	89.055.875	11.295.241	11.331.642	1.070.239.279	958.556.521
											2.500.410.413	**1.773.355.659**

AY	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	REZERVACIJA	REZ. - ZADNJI
1995	2.282.004.305	420.255.009	13.115.295	4.517.415	17.272.729	1.743.369	6.487.747	0	0	0	0	
1996	2.589.035.610	486.835.410	28.627.471	11.662.610	-4.138.442	-8.335	0	0	0	0	0	0
1997	2.675.201.113	497.295.561	3.937.223	8.697.598	22.913.888	0	0	0	0	0	0	0
1998	2.475.586.287	499.398.455	20.176.221	15.836.250	12.286.278	0	0	0	0	0	12.286.278	12.286.278
1999	2.665.123.839	521.445.011	23.744.642	529.571	13.252.615	0	0	0	0	0	13.782.186	13.782.186
2000	2.493.619.336	395.327.879	29.327.952	540.604	13.528.711	0	0	0	0	0	43.397.267	43.397.267
2001	2.780.156.859	599.992.544	29.926.482	551.636	13.804.807	0	0	0	0	0	644.275.470	644.275.470
											713.741.200	**713.741.200**

Tako predelani rezultati so vsaj optično pri eni, dveh in štirih baznih funkcijah kolikor toliko pravi, pri čemer so včasih prva leta podcenjena, ostala precenjena, včasih pa je obratno.

Glavni nauk metode Kalmanovega filtra je, da še tako dober teoretični model ni zanesljiv pri vsakem portfelju, sploh pa ne tako zanesljiv, da bi rezultatom metode lahko zaupali brez kakršnekoli korekcije. Nauk pa lahko razširimo pravzaprav na vse opisane metode, saj nam standardni odkloni skoraj vseh metod jasno kažejo, da uporaba istih metod na portfeljih s kratkim in dolgim repom še zdaleč ne da enako kvalitetnih rezultatov. Ti rezultati nam zato že dajo kar jasen namig, da je iskanje optimalne univerzalne metode, ki bi jo lahko zakonsko predpisali, dobra pa bi bila za vse zavarovalnice in vse tipe portfeljev, neizvedljiva naloga.

5. KRITIČNA ANALIZA REZULTATOV METOD IN ISKANJE OPTIMALNE METODE

V tem poglavju bomo poskušali na podlagi rezultatov predhodnih poglavij ugotoviti, katera metoda da izmed vseh najboljši rezultat. Že ob koncu prejšnjega poglavja smo – bolj površno – nakazali, da najverjetneje optimalne metode za vse portfelje preprosto ni. Naš osnovni namen bo zato, da poiščemo optimalno metodo za vsakega izmed naših portfeljev posebej. Poskusili pa bomo tudi oceniti, v kolikšni meri bi lahko tako izbrano metodo opredelili kot optimalno za posamezen tip portfelja.

Pri iskanju najboljše metode se hitro znajdemo v precejšnji zagati. Glede na to, da so naši rezultati zgolj ocene nekih bodočih dogajanj, je ena od zahtev optimalne metode prav gotovo ta, da je optimalna tista, ki najbolj točno predvidi to neznano bodoče dogajanje. Po drugi strani pa od optimalne ocene pričakujemo tudi, da bo čimbolj stabilna, kar pomeni, da rahli odkloni v preteklem dogajanju ne povzročijo prevelikih odstopanj pri končni oceni.

Oba kriterija nam delata kar nekaj preglavic, največ seveda prvi. Če bi namreč vedeli, kakšen je pravi rezultat bodočega dogajanja, potem ne bi potrebovali ocen! Največ, kar lahko storimo, je, da opazujemo rezultate, ki so jih dale metode v preteklih letih, in jih primerjamo z dejanskim dogajanjem do današnjega dne. To pomeni, da bi morali imeti rezultate po vseh predstavljenih metodah kar za veliko let nazaj (odvisno od repa). Obe zavarovalnici, katerih portfelja sta bila osnova za naša testna portfelja, sta v preteklih letih uporabljali zgolj zakonsko predpisane metode, zato bomo oceno o ustreznosti aproksimacije bodočega dogajanja vseh metod žal lahko utemeljevali zgolj na rezultatu (ne)ustreznosti teh metod v preteklih letih. Žal zato, ker ti rezultati ne dajo ocene po posameznem letu razvoja, zato ne bomo mogli izvedeti, za katera leta razvoja je posamezna metoda slaba in za katera dobra.

Nekoliko lažje bomo utemeljevali stabilnost posameznih metod. Predvsem to velja za stohastične metode, ki nam stabilnost oz. zanesljivost nakažejo že s standardnimi odkloni. Za deterministične metode pa avtorji (Rollins, 1997), (Weber, Van Slyke, Russo, 1997) predlagajo Monte Carlo pristop – ponavljanje izbiranja naključnega podatka, ki ga namerno spremenimo in analiziranje vplivov takih sprememb. Pomembno je, da je sprememba izbranega podatka relativno majhna. Če bo »optimalna« metoda deterministična, bomo podoben pristop izbrali tudi mi, vendar v zelo omejenem obsegu (globlje analiziranje tovrstnih dogajanj je namreč zelo obsežno področje in ni predmet našega dela). Žal nekatere metode ne omogočajo niti takega pristopa (zakonsko opredeljene metode, ki temeljijo na popisu).

Omenimo še, da bomo izbirali optimalno metodo zgolj med metodami oz. rezultati, kjer upoštevamo korekcijo za inflacijo. Razlog za to je, da so zgolj te metode primerljive z metodo popisa, saj ta pri oceni rezerviranih škod temelji na sedanji vrednosti vseh bodočih obveznosti po cenah na dan popisa.

5.1. Ovrednotenje kvalitete rezultatov na portfelju A

Analiza kvalitete ocene rezervacije za nastale prijavljene škode po metodi popisa nam je pokazala, da bi bilo treba v preteklih letih oceno dobljeno po tej metodi zvišati za vsaj 15%, da bi dobili dobre rezultate. Prav tako nam analiza IBNR metode po metodi pavšala v preteklih letih kaže, da bi morali to oceno zvišati za vsaj 55%. Na podlagi teh podatkov bi torej lahko opredelili, da je minimalna celotna škodna rezervacija za leto 2001 okrog 8.000.000.000 SIT. Ker moramo pri večini metod rezervacijo za nastale škode pred letom 1995 tako ali tako oceniti po metodi popisa, lahko opazujemo zgolj ocene, ki jih dajo metode za leta po letu 1995. V tem primeru bi kot sprejemljiv rezultat lahko šteli rezultate med 6.600.000.000 SIT in 6.700.000.000 SIT. Opozoriti moramo še, da rezultati večine metod (vse, ki temeljijo na veriženju) temeljijo na oceni, koliko je še nerešenih škod iz leta 1995, ta pa je spet dobljena po metodi (morda prenizkega) popisa!

S tem smo opredelili šele spodnjo sprejemljivo mejo rezervacije. Žal je to pravzaprav tudi vse, kar s tem pristopom lahko storimo. Poglejmo, zakaj.

Ocena realnosti je sestavljena iz dveh komponent – dejanskih že rešenih škod in škod, ki so še vedno v rezervi. Oceno pravilnosti rezervacij za leto 1998 ob koncu leta 2001 npr. dobimo kot dejansko rešene škode v letih 1999, 2000 in 2001, ki so nastale pred 31.12.1998, in oceno škod, ki so še vedno v rezervaciji ter so nastale pred 31.12.1998. Ta ocena je spet dobljena z metodo popisa, v katerem pa so sedaj tudi škode, ki so bile na dan originalnega ocenjevanja še neprijavljene, poleg tega pa o posamezni prijavljeni škodi zagotovo vemo precej več. Ta ocena je zato boljša, kot je bila prej, še vedno pa ne toliko natančna, da bi lahko privzeli, da je točna.

To razmišljanje torej namiguje na to, da bi morali večjo utež pri oceni dejanske rezervacije nameniti korekciji, ki izvira iz starejših rezervacij (torej je pri oceni rezervacije za leto 2001 bolj zanesljiva korekcija na podlagi primerjave leta 1997 kot leta 1999). Žal pa tu lahko hitro zaidemo v težave, saj je metoda popisa tipična metoda, kjer je konsistentnost enakih kriterijev vprašljiva. Zelo verjetno je, da se je v tem času osebje, ki rezervacijo ocenjuje, kar pošteno spremenilo (drugi ljudje, obstoječi imajo več znanja,…), spremenili pa so se lahko tudi kriteriji ocenjevanja (npr. zaradi preslabih ocen v preteklosti je vodstvo zavarovalnice postavilo strožje kriterije ocenjevanja). Vse to razmišljanje kaže, da je najbolj verodostojen faktor korekcije, ki izvira iz zadnjega leta. V zavarovalnicah, od koder izvira naš portfelj, dejansko držita obe trditvi – tako glede sprememb kadra, kot tudi poslovne politike rezerviranja škod, ki se je spremenila z uvedbo novega zakona v letu 2001. Zato faktorja korekcije izvirata iz zadnjih znanih let in zato sta zanesljivo premajhna – od tod smelo trdimo, da je rezervacija premajhna za vsaj te faktorje korekcije. Zaradi spremenjene metodologije rezerviranja pa s preteklimi rezervacijami tudi ne moremo določiti zgornje meje.

Posvetimo se sedaj rezultatom. V tabeli 5.1. so prikazani rezultati vseh metod, ki temeljijo na realnih podatkih (torej s korekcijo za inflacijo). (S Kalman k. smo označili rezultate metode s

Kalmanovim filtrom s k baznimi funkcijami). Rezultati so predelani na iste osnove (vse metode, ki zahtevajo oceno rezerve za leto 1995 do izteka, temeljijo na enaki oceni).

Tabela 5.1. – pregled rezultatov v SIT izbranih metod za AO portfelj

	DETERMINISTIČNE METODE				STOHASTIČNE METODE				
AY	**Chain ladder**	**ULR**	**CL - povprečja**	**BF**	**Regresija**	**Kremer**	**Bootstrap**	**Kalman 1.**	**Kalman 4.**
1995	140.374.634	140.327.911	140.374.634	140.327.911	121.214.713	140.374.634	140.374.634	25.485.876	245.084.809
1996	295.237.971	475.383.314	295.108.243	321.528.235	165.666.089	270.736.533	328.235.429	61.147.980	407.452.341
1997	438.824.331	503.283.346	438.298.985	450.612.404	287.577.662	400.301.092	472.457.315	133.551.168	577.115.119
1998	594.636.989	1.171.675.093	593.504.487	850.638.144	475.388.737	558.911.108	625.229.685	301.405.954	791.088.715
1999	1.019.568.485	1.064.621.527	1.018.438.295	990.735.332	957.925.127	903.958.174	1.055.713.912	668.260.501	1.065.994.014
2000	1.505.639.687	1.952.898.916	1.508.281.226	1.578.026.014	1.869.588.152	1.457.398.524	1.541.469.684	1.324.825.177	1.548.437.968
2001	2.998.226.149	3.906.509.887	3.001.590.653	3.105.063.359	3.041.211.787	2.978.410.561	3.035.485.587	2.565.194.424	2.766.479.007
SKUPAJ	**6.992.508.246**	**9.214.699.994**	**6.995.596.523**	**7.436.931.399**	**6.918.572.266**	**6.710.090.626**	**7.198.966.246**	**5.079.871.080**	**7.401.651.974**

Kot vidimo, so končni rezultati skoraj vseh metod zelo primerljivi. Izrazito odstopata metodi ULR (navzgor) in Kalmanova metoda z eno bazno funkcijo (navzdol). Že pri opisu ULR metode smo ugotavljali, da zaradi zelo slabih podatkov o škodnem rezultatu za pretekla leta ULR metodi ne moremo preveč zaupati, zato nas izrazit odklon navzgor glede na ostale metode ne skrbi preveč, to metodo pa izločimo iz izbora. Posledica tega je, da iz izbora izločimo tudi BF metodo, saj so rezultati ULR metode pomembni za to metodo. Po drugi strani oceni Kalmanova metoda s samo eno bazno funkcijo precej nižjo rezervacijo, kot smo že ugotovili, da je spodnja meja, zato tudi ta metoda prav gotovo ne pride v ožji izbor. Ostale metode izpolnjujejo kriterij najnižje zahtevane rezervacije.

Večje razlike med metodami pa opazimo, če pogledamo, na kakšen način je končni rezultat rezervacije razbit po posameznih letih nastanka. Identični sta pravzaprav zgolj osnovna metoda veriženja in metoda veriženja povprečij, ki tudi s tem dokazujeta, da sta iz istega gnezda. Ker imamo za osnovno metodo Mackove stohastične ocene, bomo za nadaljevanje uporabljali zgolj rezultate osnovne metode. Res pa je, da je morda metoda povprečij lahko nekoliko boljša, saj posredno odraža tudi odmike, ki nastajajo zaradi rasti ali padanja števila zavarovanj v portfelju. Po drugi strani pa rezultata log-linearnih modelov (regresija, Kremer) kažeta, da metodi res nista pravi stohastični ekvivalent veriženju. Res pa je, da se Kremerjeva metoda od osnovne metode veriženja v rezultatih pravzaprav resno razlikuje zgolj za leto 1999. Nasploh je leto 1999 tisto leto, v katerem prihaja do največjih razlik med izbranimi metodami. Vsekakor bi aktuar ob takih podatkih to leto moral podrobneje analizirati.

Zanimiva je predvsem regresija, ki ne potrebuje predpostavke o dokončni razvitosti za leto 1995. Na podlagi znanih rezultatov metode popisa in rezultatov ostalih metod pa je razvidno, da je metoda nekoliko podcenila rezervacijo za prva leta (1995 – 1998). Upravičeno se zato lahko vprašamo, ali ni morda podcenjena v vseh letih (čeprav je višja, kot pri ostalih metodah), kar pomeni, da so ostala leta podcenile tudi vse ostale metode.

Veliko presenečenje je bootstrap, saj je osnova za to metodo spet osnovna metoda veriženja, rezultati pa so v vseh letih kar znatno višji.

Čeprav smo v resnici zaradi nestabilnosti že pri opisu metode izločili Kalmanovo metodo s štirimi baznimi funkcijami, pa so same ocene rezervacij te metode pravzaprav zanimive. Ta metoda namreč brez ocene po metodi popisa spet ocenjuje tudi nerazvita leta, njene ocene pa so za prva leta precej višje, kot so dobljene s popisom. Glede na to, da vemo, da je popis prej prenizek kot ustrezen, bi ti rezultati lahko bili kar dobri.

V ožji izbor bi torej na podlagi teh rezultatov lahko uvrstili osnovno metodo veriženja, regresijo, Kramerjevo metodo, bootstrap in Kalmanov filter s štirimi baznimi funkcijami. Glede na to, da so to vse stohastične metode (veriženje v Mackovem smislu), si v Tabeli 5.2 poglejmo še standardne odklone po posameznih letih škod. Zaradi primerljivosti prikazujemo pri vseh metodah standardne odklone v % glede na rezervacijo, ki jo da posamezna metoda in to zgolj za del, ki se nanaša na »zapolnjeni« spodnji del trikotnika. Pri regresiji in Kalmanu torej ni upoštevan standardni odklon (in rezervacija) do konca z metodo predvidenega razvoja.

Tabela 5.2 – poenoten prikaz standardnih odklonov

STANDARDNI ODKLONI V % GLEDE NA REZERVACIJO					
AY	Chain ladder	Regresija	Kramer	Bootstrap	Kalman 4.
1996	11,55%	35,28%	15,79%	58,85%	145,01%
1997	12,11%	28,88%	11,20%	33,40%	117,41%
1998	13,24%	26,75%	6,60%	20,06%	91,21%
1999	9,34%	26,31%	4,09%	12,79%	48,55%
2000	11,02%	27,96%	2,42%	8,01%	38,79%
2001	8,21%	36,56%	1,16%	5,21%	20,88%

Razen regresije je pri vseh metodah zaznati višjo stopnjo zaupanja zadnjim letom in manjšo prvim. Iz narave posameznih metod je to tudi razumljivo, saj regresija in Kalman edina uporabljata enako število podatkov za izračun vsakega leta. Žal so rezultati regresije za vsa leta precej nestabilni, tako da s tega stališča ta metoda ni priporočljiva. Podobno velja tudi za Kalmanov filter. Ostale tri metode so kar primerne (bootstrap sicer šele od leta 1999 naprej). Izrazito stabilni – celo preveč – so rezultati Kremerja. Ponovno pa moramo poudariti, da to niso standardni odkloni celotne rezervacije posameznega leta, ampak samo rezervacije, ki bi jo metoda dala, če bi bilo leto 1995 že do konca razvito.

Na situ so torej ostale še tri metode (veriženje, Kremer, bootstrap), med katerimi pa ima vsaka svoje prednosti. V literaturi (npr. Taylor, 2000, str. 346) je zaslediti priporočilo, da v takih primerih (oz. vedno) pri dokončni oceni škodne rezervacije upoštevamo uteženo povprečje vseh relevantnih metod, pri čemer je utež odvisna od stopnje zaupanja v posamezno metodo. Najbolje je, če to storimo za vsako posamezno leto posebej (v primeru, ko kombiniramo samo stohastične metode, najdemo v omenjeni literaturi tudi metodo za izračun variance take kombinacije). S tem pristopom pa žal dokončno pometemo z zahtevo (ali željo), da obstaja zgolj ena optimalna metoda, ki nam neodvisno od portfelja zagotovi najboljše rezultate. Predlagan pristop je namreč izrazito subjektiven, saj je stopnja zaupanja v rezultate posamezne metode odvisna od aktuarja, ki te rezultate uporablja. Če so izbrane metode stohastične (kot je to v našem primeru), nam tu sicer lahko pomagajo standardni odkloni (zagotovo pa niso edino merilo), v primeru determinističnih metod pa žal prevladajo subjektivni faktorji, ki so v veliki meri odvisni od aktuarjevega poznavanja portfelja in občutka, kateri rezultati so boljši. Za naš izbran portfelj smo po letih izbrali naslednje uteži:

Tabela 5.3 – izbrane uteži upoštevanja posamezne metode po letih nastanka škode

AY	veriženje	Kremer	Bootstrap
1995	1,0	0,0	0,0
1996	0,6	0,4	0,0
1997	0,5	0,5	0,0
1998	0,3	0,5	0,2
1999	0,3	0,4	0,3
2000	0,1	0,6	0,3
2001	0,1	0,6	0,3

Izbrane uteži temeljijo na subjektivni oceni kvalitete doseženih rezultatov posamezne metode za navedena leta škode.

Končni rezultati z izbranimi utežmi so prikazani v Tabeli 5.4.

Tabela 5.4 – končni rezultati rezervacije (v SIT) za AO portfelj

	DELEŽI METODE V CELOTNI REZERVACIJI			
AY	**Veriženje**	**Kremer**	**Bootstrap**	**Skupaj**
1995	140.374.634	0	0	140.374.634
1996	177.142.782	108.294.613	0	285.437.396
1997	219.412.165	200.150.546	0	419.562.711
1998	178.391.097	279.455.554	125.045.937	582.892.587
1999	305.870.545	361.583.269	316.714.174	984.167.989
2000	150.563.969	874.439.114	462.440.905	1.487.443.988
2001	299.822.615	1.787.046.337	910.645.676	2.997.514.628
SKUPAJ	**1.471.577.808**	**3.610.969.434**	**1.814.846.692**	**6.897.393.933**

Končni skupni rezultat je najbližji rezultatu regresijske analize, po posameznih letih pa so rezultati še najbolj podobni veriženju. Glede na to, da so rezultati veriženja skoraj v vseh letih najbližji, vendar višji od »optimalnih«, bi lahko na podlagi teh rezultatov kot poenostavljen, objektiven, dovolj varen, predpisan recept napisali: »Optimalna metoda za določitev škodne rezervacije je metoda veriženja. V primeru, da za metodo veriženja prvo leto še ni do konca razvito, metodo dopolnimo s tem, da rezervacijo prvega leta v tabeli razvoja ocenimo po metodi popisa, s tem rezultatom do konca razvijemo prvo leto, nato pa izvedemo veriženje. Tej rezervaciji prištejemo še rezervacijo za leta, ki jih v tabeli razvoja ne upoštevamo. Rezervacijo za ta leta ocenimo z metodo popisa.«

Glede na računovodske zahteve po ločenem prikazovanju rezervacije za nastale prijavljene škode in IBNR rezervacije in ob dejstvu, da izbrana metoda ponuja rezervacijo skupaj, opredelimo še, kako lahko premostimo ta navidezni problem. Obstaja več rešitev, najpreprostejši pa sta dve:

1. Veriženje delamo ločeno za obe komponenti rezervacij. Ob majhnem portfelju ta rešitev ni najboljša, saj imajo lahko anomalije v podatkih prevelik vpliv.

2. Poleg veriženja izvedemo tudi metodo popisa nastalih prijavljenih škod (to tako ali tako moramo storiti, saj SZTR zahteva, da rezervacija za nastale prijavljene škode ne sme biti nižja od tiste, ki jo da metoda popisa. Torej moramo metodo popisa izvesti že zaradi kontrole). Dobljene rezultate popisa razdelimo glede na leta nastanka škod. To je rezervacija za nastale prijavljene škode. IBNR pa dobimo, ko od rezultatov veriženja odštejemo popis. Če je slučajno za kakšno leto rezultat veriženja nižji od popisa (kar se teoretično seveda lahko zgodi), je pač IBNR za tisto leto škode enak 0, skupna rezervacija za to leto pa ustrezno višja (kar je spet v skladu s SZTR). Posredno so na ta način v IBNR vključene tudi IBNER rezervacije, kar je z aktuarskega stališča seveda dobrodošlo.

5.2. Ovrednotenje rezultatov na portfelju B

Na enak način preglejmo še rezultate metod na kasko portfelju.

Analiza preteklih let nam kaže, da je metoda popisa zelo kvalitetno ocenila rezervacije za nastale prijavljene škode, pavšalna IBNR metoda pa da celo previsoke rezultate (za približno 20%). Z našim pregledom bi torej lahko že zaključili in opredelili, da je prava metoda kombinacija metode popisa in pavšalne IBNR metode. Žal nam ta kombinacija ne ponuja rezultatov, ki bi bili razbiti po letih nastanka škod. Vemo tudi, da je ta kombinacija pri AO portfelju dala zelo slabe rezultate, naša želja pa je, da poiščemo optimalno metodo za vse portfelje. Zato kljub temu preverimo, kako je z ostalimi metodami.

Na podlagi analize bomo zahtevali, da je skupni rezultat rezervacije za leta od 1995 dalje vsaj 830.000.000 SIT. Rezultate posameznih metod moramo spet poenotiti, pri čemer pa ima to poenotenje precej manjši vpliv na rezultat metod, saj sta praktično tako leto 1995, kot tudi 1996 do konca razviti. Rezultati so prikazani v Tabeli 5.5.

Tabela 5.5 – rezultati metod (vSIT) za kasko portfelj (regresija in Kremer uporabljen premik za 50 mio SIT)

	DETERMINISTIČNE METODE				STOHASTIČNE METODE			
AY	**Chain ladder**	**ULR**	**CL - povprečja**	**BF**	**Regresija**	**Kremer**	**Bootstrap**	**Kalman 1.**
1995	8.335.914	8.336.256	8.335.914	8.336.256	0	8.335.914	8.335.914	11.380.135
1996	16.843.006	0	16.743.460	15.314.975	0	12.007.022	17.854.831	27.945.481
1997	18.319.497	14.818.072	18.218.454	18.426.288	0	25.320.341	18.983.992	43.153.132
1998	29.294.748	286.288.412	29.311.882	24.309.477	22.165.745	37.008.856	29.908.671	59.929.839
1999	42.239.768	146.876.476	40.931.905	0	127.539.371	57.255.499	42.966.994	104.538.495
2000	55.365.463	206.082.343	52.274.775	58.056.619	465.663.508	60.584.918	56.064.416	194.194.524
2001	579.734.579	154.447.506	569.962.724	675.605.218	881.986.004	790.217.170	580.326.377	351.100.362
SKUPAJ	**750.132.974**	**816.849.066**	**735.779.114**	**800.048.833**	**1.497.354.628**	**990.729.720**	**754.441.195**	**792.241.969**

Nobena statistična metoda ne daje ustreznih rezultatov! Najbolj se je želenemu rezultatu približala ULR metoda, ki pa ima po posameznih letih prav neverjetne rezultate. Še najbolj verjetni delujejo rezultati BF metode, saj bi – v primeru, da za leto 1999, ki ga BF ocenjuje kot zaključenega, uporabimo rezultat veriženja – prišli v rang predvidenega rezultata. Povsem neprimerni so rezultati log-linearnih modelov, Kalman pa ima, glede na naravo portfelja, nekoliko preveč linearno rast rezervacije po posameznih letih razvoja.

Kje je razlog, da so se vse metode tako slabo odrezale ravno pri kasko portfelju, ki bi moral biti zaradi kratkega repa reševanja lažje določljiv kot AO portfelj? Za stohastične log-linearne modele je razlog očiten – dinamika kasko portfelja je za te metode neprimerna. Repi so namreč tako kratki, da te metode prehitro uporabljajo logaritme majhnih števil (v našem primeru nastopajo celo negativna števila). To pa so tipični primeri, kjer te metode seveda odpovedo.

Podoben razmislek velja tudi za vse ostale deterministične obravnavane metode. V želji, da bi poiskali optimalno metodo za poljuben portfelj, smo pri kasko portfelju namreč uporabljali enake dimenzije tabel razvoja, kot smo jih pri AO portfelju. To pa je povzročilo, da smo v prvih letih (1995 – 1997) razvijali tako daleč, da smo prišli že do statistično neznačilnih rezultatov, ki pa so močno zmotili skupne rezultate. Kasko ima torej tako kratek rep, da je kakršnokoli veriženje zelo hitro statistično neznačilno. Ker prav vse naštete metode na tak ali drugačen način uporabljajo veriženje, so torej prav vse metode naletele na ta problem.

S tako razlago pa se vendarle ne smemo prehitro zadovoljiti. Podrobnejši pregled vseh rezultatov pa nam da še en presenetljiv rezultat. Klasična pavšalna metoda oceni rezervacijo za nastale prijavljene škode v višini 1.000.000.000 SIT, kar je precej več, kot zahtevamo za celotno rezervacijo (prijavljene in neprijavljene škode). Tega odklona prav gotovo ne moremo razložiti s statistično neznačilnostjo. Pravzaprav je povsem nelogično, da je povprečna rešena škoda zadnjega leta toliko višja od rezervirane škode (bolj logično bi bilo obratno). Taka nelogičnost zato zahteva temeljito analizo portfelja in vseh podatkov. Možnih je več razlag, kot npr:

1. Sprememba osebja ali metodologije rezerviranja, kar je povzročilo slabo rezerviranje oz. podrezerviranje. V tem primeru nam analiza rezervacije preteklih let ne pove prav nič o kvaliteti ocene zadnjega leta, zato je predlagana osnova 830.000.000 SIT povsem neutemeljena (je pa najverjetneje prenizka in je razkorak med metodami in dejansko potrebnimi rezervacijami še večji).
2. V zadnjem letu je bilo rešeno majhno število zelo velikih škod, ki imajo velik vpliv na povprečno rešeno škodo, v rezervacijah pa podobne škode ni. V takih primerih je potrebno v vseh podatkih tovrstne škode odstraniti (tudi v tabelah razvoja).
3. V rezervaciji je veliko število majhnih škod, ki pa kumulativno vseeno predstavljajo velik znesek. Tega zneska na podlagi prejšnjih let ni mogoče napovedati.
4. Katerakoli kombinacija prej naštetih vzrokov.

Dejansko sta se v letu 2001 res zgodili dve izmed treh naštetih stvari in sicer kraja treh tovornih vozil – delovnih strojev v skupni škodi 60 mio SIT, poleg tega pa še toča, zaradi katere je bilo konec leta nerešenih še dobrih 100 prijavljenih škod, ki pa so bile tako majhne, da se lastniki poškodovanih vozil še niso odločili za popravilo (oba odklona lahko zaznamo že iz osnovnih podatkov iz tabel 1.6 – 1.8). Glede na število škod oz. polic so vsi dogodki tako pomembni, da bi jih bilo potrebno pri uporabi statističnih metod ustrezno upoštevati. Ena od možnih rešitev bi npr. bila, da izvedemo veriženje brez upoštevanja rešenih zneskov kraje in toče, dobljenim rezultatom pa prištejemo rezervacijo za tiste škode, ki so posledica toče (to bi seveda dobili z metodo popisa zgolj teh škod). V resnici pa bi se najbrž velika večina aktuarjev po ugotovitvi vseh opisanih dejstev zadovoljila z rezultatom, ki nam ga ponuja kombinacija popis prijavljenih in pavšalni IBNR.

Ob zaključku poglavja torej lahko izpostavimo naslednja dejstva:

1. Enostavnost določanja škodnih rezervacij ni nujno odvisna od dolžine repa reševanja.
2. Izbira metode za oblikovanje škodnih rezervacij je odvisna od dolžine repa. Univerzalne metode ni.
3. Rezultatom nobene metode ni mogoče slepo verjeti. Vsak rezultat je potrebno skrbno pretehtati. Tudi na videz preprost portfelj lahko vsebuje pasti, ki močno vplivajo na končne rezultate.
4. Če se posamezna metoda v preteklih letih izkaže na nekem portfelju kot zelo dobra, to še ne pomeni, da bo dobra tudi v prihodnjih letih. Poznavanje portfelja je predpogoj za pravilno oblikovanje rezervacije oz. izbiro prave metode.

SKLEP

V delu smo poskušali odgovoriti na osnovno vprašanje, ki se poraja vsakemu aktuarju ob oblikovanju škodnih rezervacij, in sicer: »Ali je sploh možno oblikovati pravo višino škodnih rezervacij, oziroma kako natančno lahko napovemo bodoče škodno dogajanje?«. Da bi lahko odgovorili na to vprašanje, smo pregledali celo vrsto najbolj znanih determinističnih in stohastičnih metod za oblikovanje škodnih rezervacij. Vsako metodo smo tudi praktično preizkusili na dveh portfeljih, ki se po svojih osnovnih značilnostih bistveno razlikujeta.

Odgovor na osnovno zastavljeno vprašanje pa ni bil edini cilj te naloge. Skušali smo namreč tudi ugotoviti, če morda v primeru pozitivnega odgovora na prvo vprašanje obstaja kakšna univerzalna metoda, ki daje dovolj dobre rezultate na poljubnem portfelju. V slovenski zakonodaji je namreč v preteklih letih že obstajal standard, ki je zavarovalnice zavezoval, kako morajo oblikovati rezervacijo, neodvisno od vrste portfelja. Zaradi velikih sprememb, ki se dogajajo na slovenskem zavarovalnem trgu (lastninjenja, združevanja zavarovalnic,…) bi bila taka metoda nadvse dobrodošla, saj bi z njo lahko precej bolj objektivno ovrednotili posamezne zavarovalnice.

Rezultati pa, žal, niso preveč vzpodbudni. Že odgovor na prvo vprašanje namreč ni enostaven. Ugotovili smo lahko, da je kvalitetno oceno škodnih rezervacij možno opredeliti, vendar zgolj ob izvrstnem poznavanju tega portfelja, ob natančni analizi preteklega dogajanja in preteklih napovedi in ob predpostavki, da je gibanje portfelja stabilno in sledi svojim zakonitostim. Kljub vsemu pa je ocenjevanje škodnih rezervacij in napovedovanje škodnega dogajanja v prihodnosti še najbolj podobno napovedovanju gibanja borznih tečajev, kjer ni rečeno, da bo jutrišnji trend gibanja enak preteklemu.

Če torej na prvo vprašanje še lahko damo pogojno pozitiven odgovor, pa smo zelo nazorno pokazali, da žal univerzalne metode, ki bi bila dobra za vse portfelje, enostavno ni. Ta trditev velja ne samo za različne portfelje glede na vrsto zavarovanja (pri nas AO in kasko), ampak velja celo za enake vrste portfeljev različnih zavarovalnic oz. različnih let. Nič kaj vzpodbudna ugotovitev za vse nadzorne organe (Agencija za zavarovalni nadzor, Davčni urad,…)!

Vse navedene ugotovitve posredno pokažejo, kako zelo pomembna in odgovorna je vloga pooblaščenega aktuarja v zavarovalnici. Kljub vsem naštetim problemom mora namreč le-ta čim bolj natančno ugotoviti, koliko škodnih rezervacij zavarovalnica potrebuje. Zato mora odlično poznati vsa dogajanja v zavarovalnici, pri čemer mu lahko pomagajo zgolj izkušnje in kvaliteten informacijski sistem zavarovalnice. Poznati pa mora tudi čim več različnih pristopov, ki mu lahko razkrijejo zakonitosti posameznega portfelja. Upamo, da mu bo pri tem lahko v pomoč tudi pričujoče delo, v katerem si bo lahko pomagal s sistematičnim pregledom metod in s spiskom tozadevne strokovne literature.

LITERATURA

1. Ashe F.R.: An Essay at Measuring the Variance of Estimates of Outstanding Claim Payments, ASTIN Bulletin, 1986, Vol. 16S, str. 99 - 113
2. Blum Kathleen A., Otto David J.: Best Estimate Loss Reserving: An Actuarial Perspective, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1998, Vol. : Fall, str. 55-102
3. Bonnard R., Greenwood M., Greybe S.: Bootstrapping Reserve Estimates, Johanesburg, Actuarial Society of South Africa, 1998, 70 str.
4. Brown Robert L.: Variability of Loss Reserves, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 1, str. 279-296
5. Christofides S.: Regression Models Based on Log-Incremental Payments, Claims Reserving Manual Vol. 2, The Faculty and Institute of Actuaries, 1997, str. D5.1 - D5.53
6. D'Arcy Stephen P. et al.: Foundations of Casualty Actuarial Science, 2nd edition, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1990, 599 str.
7. De Jong P., Zehnwirth B.: Claims Reserving, State-Space Models and the Kalman Filter, Journal of the Institute of Actuaries, 1983, 110, str. 157 – 181
8. De Jong P., Zehnwirth B.: Credibility Theory and Kalman Filter, Insurance: Mathematics and Economics, 1983, Vol. 2, str. 281 – 286
9. De Vylder F.: Practical Credibility Theory with Emphasis on Optimal Parameter Estimation, ASTIN Bulletin, 1981, Vol. 12, str. 115 - 132
10. De Vylder, F.: Estimation of IBNR Claims by Credibility theory, Insurance: Mathematics and Economics, 1982, Vol. 1, str. 35 – 40
11. Doray Louis: IBNR Reserve Under a Loglinear Location – Scale Regression Model, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1997, Vol: Spring, Vol. 2, str. 607-652

12. Efron B., Tibshirani R.J.: An Introduction to the Bootstrap, New York, Monographs on Statistics and Applied Probability 57, Chapman and Hall, 1992, 413 str.
13. Ellis Phil et al. Subject G: General Insurance, Core Reading, London, Institute and Faculty of Actuaries, 1997
14. Halliwell Leight J.: Conjoint Prediction of Paid and Incurred Losses, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1997, Vol: Summer, Vol. 1, str. 241-380
15. Hart D. G., Buchanan R. A., Howe B.A.: The Actuarial Practice Of General Insurance. 5th ed. Sydney: Institute of Actuaries of Australia, 1996, 592 str.
16. Hayne Roger M.: A Method to Estimate Probability Level for Loss Reserves, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 1, str. 297-356
17. Hesselager O., Witting T.: A Credibility Model with Random Fluctuations in Delay Probabilities for the Prediction of IBNR Claims, ASTIN Bulletin, 1987, Vol. 18, str. 79 - 90
18. Holmberg Randall D.: Correlation and the Measurement of Loss Reserve Variability, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 1, str. 247-278
19. Kelly Mary V.: Practical Loss reserving Method With Stohastic Development Factors, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1992, Vol: May, Vol. 1, str. 355-381
20. Kim Changseob Joe: A Generalised Framework for the Stohastic Loss Reserving, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 2, str. 653-711
21. Kremer E.: IBNR – Claims and the two- way Model of ANOVA, Scandinavian Actuarial Journal, 1982, str. 47 - 55
22. Lyons Daniel K.: A Note on Simulation of Claim Activity for Use in Aggregate Loss Distributions, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 1, str. 357-392
23. Mack Thomas : Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates, ASTIN Bulletin, 1991, Vol. 21, str. 93 - 109
24. Mack Thomas: Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994a, Vol. 1, str. 101-182
25. Mack Thomas: Which stohastic model is underlying the chain ladder method, Insurance: Mathematics and Economics, 1994b, Vol 15, str. 133 – 138
26. Mack Thomas: The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor, ASTIN Bulletin, 1999, Vol 29, str. 361-366
27. Murphy Daniel M.: Unbiased Loss Development Factors, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1994, Vol. 1, str. 183-246
28. Narayan Prakash, Warthen Thomas V.: A Comparative Study of the Performance of Loss Reserving: Methods Through Simulation, Arlington, Casualty Actuarial, Society, 1997, Vol: Summer, Vol. 1, str. 175-196
29. Ollodart Bruce E.: A Note on the Paid Bornhuetter-Ferguson Loss Reserving Method: Recognising Dependency on Case Reserves, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1999, Vol: Winter, str. 405-416
30. Renshaw A.E.: Chain Ladder and Interactive Modelling (Claims Reserving and GLIM), Journal of the Institute of Actuaries, 116, str. 559 - 587
31. Rollins John W.: Performance Testing Aggregate and Structural Reserving Methods: A Simulation Approach, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1997, Vol.: Summer, Vol 1, str. 137- 174

32. Schmidt K.D., Schnaus A.: An Extension of the Model of Mack for the Chain-Ladder Method, ASTIN Bulletin, 1996, Vol. 26, str. 247 - 262
33. Taylor Greg: The Statistical Distribution of Incurred Losses and Its Evolution Over Time – Non-Parametric Models. Melbourne, University of Melbourne, 1999. 30 str.
34. Taylor Greg: The Statistical Distribution of Incurred Losses and Its Evolution Over Time – Parametric Models. Melbourne, University of Melbourne, 1999. 41 str., 3 pril.
35. Taylor Greg: Loss Reserving – An Actuarial Perspective. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2000, 386 str.
36. Sund Bjorn: An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics. 3rd edition. Karlsruhe, Verlag, 1993, 215 str.
37. Verrall Richard J. : Statistical Methods for the Chain Ladder Technique, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1994, Vol.: Spring Vol 2, str. 393-446
38. Weber Robert A., Van Slyke Oakley E., Russo Guiseppe: Loss Reserving Testing: Beyond Popular Methods, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1997, Vol.: Summer Vol 1, str. 381-448
39. Zehnwirth Ben: Outstanding Claim Liabilities: Are They Predictable? Melbourne, University of Melbourne, 1995, 48 str. 3 pril.
40. Zehnwirth Ben: Linear Filtering and Recursive Credibility Estimation, ASTIN Bulletin, 1984, Vol. 15, str. 19 - 35
41. Zehnwirth Ben: Probabilistic Development factor Models with Applications to Loss Reserve Variability, Prediction Intervals and Risk Based Capital, Arlington, Casualty Actuarial Society, 1994, Vol.: Spring Vol 2, str. 447-606
42. Zehnwirth Ben: Kalman Filters with Applications to Loss reserving, SEP 1996, Casualty Loss Reserve Seminar, Research Paper Series, 45 str., 15 pril.
43. Zehnwirth Ben et. al.: Claims reserving Manual, London, The Faculty and Institute of Actuaries, 1997

VIRI

1. Interni akti Zavarovalnice Tilia d.d.
2. Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardnih za izračun zavarovalno tehničnih rezervacij – spremenjena verzija, Ur. List RS, 69/01
3. Slovenski računovodski standardi, Slovenski inštitut za revizijo, Zveza računovodij, finančnikov in revizorjev Slovenije, 1997
4. Zakon o zavarovalnicah, Ur. list RS, 64/94
5. Zakon o zavarovalništvu, Ur. list RS 13/00
6. Zavarovalni statistični standard 2: Škodne rezervacije, Urad RS za zavarovalni nadzor, 1996

Priloga 1 – slovarček slovenskih prevodov tujih izrazov, s tolmačenjem[2]

Chain ladder method – metoda veriženja; metoda za ocenjevanje škodnih rezervacij, ki temelji na analizi razvoja izplačil (ali rešitve) škod glede na leto nastanka škod;

Claim incurred – nastala škoda;

Claim outstanding – nerešena škoda; škoda, ki še ni dokončno rešena, rezervirana škoda

Claim reported – prijavljena škoda; škoda za katero zavarovalnica ve, da je nastala

Claim paid – izplačana škoda; škoda, za katero je zavarovalnica upravičencu izplačala ustrezno zavarovalnino oz. odškodnino;

Claim settled – rešena (obračunana) škoda; škoda, za katero je zavarovalnica že priznala svojo obveznost za izplačilo, ni pa je še nujno dejansko izplačala upravičencu. Zaradi (praviloma) zelo kratkega časovnega razmaka med rešitvijo in izplačilom škode, pojem v tuji literaturi pogosto enačijo z izplačano škodo;

Claims reserve – škodna rezervacija; znesek rezervacije za tiste nastale škode, ki jih zavarovalnica še ni do konca rešila (obračunala);

Development year – leto razvoja; pomembno pri vseh metodah za ocenjevanje škodnih rezervacij, ki temeljijo na analizi razvoja izplačil škod glede na leto nastanka škod;

Development factor – faktor razvoja; faktor, s katerim ocenimo bodoče škode pri tistih metodah za oceno škodnih rezervacij, ki so sorodne metodi veriženja ;

Incurred but not enough reported claim – nastala vendar prenizko prijavljena škoda (IBNER);

Incurred but not reported claim – nastala neprijavljena škoda (IBNR);

Long-tail busines – zavarovalne vrste z dolgim repom, tj. zavarovalne vrste, ki s svojimi nastalimi obveznostmi zelo dolgo časa vplivajo na poslovanje zavarovalnice;

Loss ratio – zavarovalno tehnični rezultat, škodni rezultat, tj. rezultat, ki se ga izračuna kot razmerje med obračunanimi škodami in obračunanimi premijami, kjer se upoštevajo tudi spremembe zavarovalno tehničnih rezervacij (ULR);

Loss reserve – glej claims reserve;

Nil claim – prijavljena škoda, pri kateri pa zavarovalnica nima obveznosti za izplačilo (npr. odklonitev škode, dejanska škoda manjša od dogovorjene franšize, itd.); rešena škoda brez izplačila;

Run-off triangles – trikotniki razvoja, tabele razvoja; razporeditev podatkov o škodah v tabele (praviloma) glede na leta nastanka in leta razvoja rešitve. Na tovrstnih tabelah temeljijo metode, ki so sorodne metodi veriženja.

[2] Prevedeni in razloženi so zgolj tisti strokovni izrazi, ki so tesno povezani z delom.