

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

**OCENA VIŠINE ŠKODNIH REZERVACIJ Z UPORABO
STOHAŠTIČNIH METOD**

Ljubljana, junij 2016

URBAN PERKO

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani Urban Perko, študent Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtor predloženega dela z naslovom Ocena višine škodnih rezervacij z uporabo stohastičnih metod, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem Alešem Berk Skokom

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravil samostojno;
2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;
3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbel, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;
4. da se zavedam, da je plagiatstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;
5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;
6. da sem pridobil vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označil;
7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnal v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil soglasje etične komisije;
8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;
10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

V Ljubljani, dne 14.6.2016

Podpis avtorja: _____

KAZALO

UVOD	1
1 OSNOVNI POJMI IN DEFINICIJE	4
1.1 Škodni proces in škodne rezervacije.....	4
1.2 Predstavitev obravnavanih portfeljev	7
1.3 Opis deterministične metode veriženja	8
1.4 Uporaba deterministične metode na izbranih portfeljih	12
2 MACKOVA STOHAŠTIČNA METODA VERIŽENJA	16
2.1 Stohastične rezervacije	16
2.2 Opis Mackove stohastične metode veriženja.....	18
2.3 Uporaba metode na izbranih portfeljih	25
3 LOG-NORMALNI MODELI ZA KUMULATIVNE ŠKODE	30
3.1 Predpostavke in osnovne lastnosti log-normalnih modelov	30
3.2 Log-normalni model pri poznanih variancah.....	33
3.3 Log-normalni model pri nepoznanih variancah.....	35
3.4 Uporaba log-normalnih modelov na izbranih portfeljih	38
4 BOOTSTRAP METODA	44
4.1 Opis bootstrap metode	44
4.2 Parametrična in neparametrična bootstrap metoda.....	45
4.3 Uporaba bootstrap metode na izbranih portfeljih	48
5 PRIMER UPORABE POSPLOŠENIH LINEARNIH MODELOV NA INKREMENTALNIH ŠKODAH.....	55
5.1 Predstavitev posplošenih linearnih modelov	55
5.2 Opis bootstrap metode v prerazpršenem Poissonovem modelu	57
5.3 Uporaba modela na izbranih portfeljih	63
SKLEP	71
LITERATURA IN VIRI	74
PRILOGE	

KAZALO TABEL

Tabela 1: Izplačila škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti v 100 EUR.....	7
Tabela 2: Izplačila škod zavarovanja kopenskih vozil v 1.000 EUR	8

Tabela 3: Kumulativna izplačila škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	13
Tabela 4: Kumulativna izplačila škod zavarovanja kopenskih vozil	13
Tabela 5: Ocenjeni razvojni faktorji zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	13
Tabela 6: Ocenjeni razvojni faktorji zavarovanja kopenskih vozil.....	14
Tabela 7: Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	14
Tabela 8: Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja zavarovanja kopenskih vozil.....	15
Tabela 9: Ocenjeni razvojni faktorji in variance zavarovanja avtomobilske odgovornosti	25
Tabela 10: Ocenjeni razvojni faktorji in variance zavarovanja kopenskih vozil	26
Tabela 11: Standardna procesna napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti	28
Tabela 12: Standardna procesna napaka zavarovanja kopenskih vozil.....	28
Tabela 13: Standardna napaka ocene parametrov in standardna srednja napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	29
Tabela 14: Standardna napaka ocene parametrov in standardna srednja napaka zavarovanja kopenskih vozil	29
Tabela 15: Ostanki zavarovanja avtomobilske odgovornosti	38
Tabela 16: Ostanki zavarovanja kopenskih vozil.....	39
Tabela 17: Ocenjeni parametri log-normalnih modelov zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	41
Tabela 18: Ocenjeni parametri log-normalnih modelov zavarovanja kopenskih vozil	42
Tabela 19: Škodna rezervacija in napake log-normalnih modelov zavarovanja avtomobilske odgovornosti	43
Tabela 20: Škodna rezervacija in napake log-normalnih modelov zavarovanja kopenskih vozil.....	43
Tabela 21: Ostanki pri bootstrapu po metodi veriženja zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	49
Tabela 22: Ostanki pri bootstrapu po metodi veriženja zavarovanja kopenskih vozil.....	51
Tabela 23: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo metode veriženja.....	52
Tabela 24: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo metode veriženja in izpeljanimi porazdelitvami po Macku.....	53
Tabela 25: Mere porazdelitve parametričnega bootstrapa z uporabo log-normalnih modelov.....	54
Tabela 26: Mere porazdelitve neparametričnega bootstrapa z uporabo log-normalnih modelov.....	55
Tabela 27: Pearsonovi ostanki zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	63
Tabela 28: Pearsonovi ostanki zavarovanja kopenskih vozil.....	63
Tabela 29: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo ODP modela	66
Tabela 30: Povprečna škodna rezervacija in povprečna pogojna standardna napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti z uporabo ODP bootstrapa	67
Tabela 31: Povprečna škodna rezervacija in povprečna pogojna standardna napaka zavarovanja kopenskih vozil z uporabo ODP bootstrapa	68

Tabela 32: Napake ODP bootstrapa zavarovanja avtomobilske odgovornosti	68
Tabela 33: Napake ODP bootstrapa zavarovanja kopenskih vozil.....	69

KAZALO SLIK

Slika 1: Škodni proces	6
Slika 2: Informacije zbrane do razvojnega leta k	10
Slika 3: Predviden in opažen razvoj za prvo razvojno leto zavarovanja avtomobilske odgovornosti	15
Slika 4: Predviden in opažen razvoj za prvo razvojno leto zavarovanja kopenskih vozil...	16
Slika 5: Zgornji desni kot prostora informacij.....	23
Slika 6: Uteženi ostanki razvojnega leta 0 zavarovanja avtomobilske odgovornosti glede na $C_{i,0}$	26
Slika 7: Uteženi ostanki razvojnega leta 0 zavarovanja kopenskih vozil glede na $C_{i,0}$	27
Slika 8: Verjetnostni grafikon ostankov in standardne normalne porazdelitve zavarovanja avtomobilske odgovornosti	39
Slika 9: Verjetnostni grafikon ostankov in standardne normalne porazdelitve zavarovanja kopenskih vozil	40
Slika 10: Porazdelitev ostankov po letih nastanka škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti	40
Slika 11: Porazdelitev ostankov po letih nastanka škode zavarovanja kopenskih vozil	41
Slika 12: Ponazoritev bootstrap metode	45
Slika 13: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po metodi veriženja	50
Slika 14: Bootstrap, normalna in log-normalna (Mack) kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po metodi veriženja	50
Slika 15: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po metodi veriženja	51
Slika 16: Bootstrap, normalna in log-normalna (Mack) kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po metodi veriženja	52
Slika 17: Parametrični bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po log-normalnih modelih	53
Slika 18: Parametrični bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po log-normalnih modelih.....	54
Slika 19: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po letih nastanka škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti	64
Slika 20: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po letih nastanka škode zavarovanja kopenskih vozil	65
Slika 21: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po ODP modelu	65

Slika 22: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po ODP modelu	66
Slika 23: Bootstrap kvantilne funkcije po metodi veriženja, log-normalnem modelu, ODP ter ocenjena normalna (Mack) zavarovanja avtomobilske odgovornosti ...	70
Slika 24: Bootstrap kvantilne funkcije po metodi veriženja, log-normalnem modelu, ODP ter ocenjena normalna (Mack) zavarovanja kopenskih vozil	70

UVOD

Zavarovalnice, ki so članice Slovenskega zavarovalnega združenja, so konec leta 2014 oblikovale kosmate zavarovalno-tehnične rezervacije in odložene prihodke od premij v višini 1.472 milijonov evrov (Slovensko zavarovalno združenje, 2015). Kosmate škodne rezervacije so predstavljale 70 % teh obveznosti in so najpomembnejši del zavarovalno-tehničnih rezervacij. Stari zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 99/2010, v nadaljevanju ZZavar), po katerem so bile zavarovalno-tehnične rezervacije oblikovane, določa, da ocena kosmatih škodnih rezervacij zajema obveznosti, ki jih je zavarovalnica dolžna izplačati na podlagi zavarovalnih pogodb, pri katerih je zavarovalni primer nastopil do konca omenjenega leta. Škodne rezervacije morajo vključevati poleg ocenjenih obveznosti za prijavljene nastale, a še nerešene škode, tudi ocenjene obveznosti za že nastale, a še neprijavljene škode. Podzakonski akti dodatno zahtevajo, da se morajo škodne rezervacije za prijavljene in nerešene škode praviloma izračunavati ločeno za vsako tako škodo posebej. V nasprotju s škodnimi rezervacijami za prijavljene in nerešene škode se višina rezervacij za nastale, a še neprijavljene škode, določi glede na izkušnje preteklih let (Ur. l. RS, št. 3/2001).

Z začetkom leta 2016 je začel veljati novi zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 93/2015, v nadaljevanju ZZavar-1), ki v naš prostor implementira režim Solventnost II (Uradni list Evropske unije, 2009). Ta predpisuje, da se vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij izračunava kot vsota najboljše ocene in dodatka za tveganje (Ur. l. RS, št. 4/2016). Najboljša ocena ustreza z verjetnostjo uresničitve tehtanemu povprečju prihodnjih denarnih tokov, upoštevajoč časovno vrednost denarja (sedanja vrednost pričakovanih prihodnjih denarnih tokov). Dodatek za tveganje je tolikšen, da skupaj z najboljšo oceno zagotavlja, da je vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enakovredna znesku, ki bi ga za prevzem in izpolnitev obveznosti do zavarovalcev, zavarovancev in drugih upravičencev iz zavarovalnih pogodb zahtevale druge zavarovalnice, ki bi prevzele te obveznosti. V nadaljevanju zakon zahteva, da se izračun najboljše ocene izvede z uporabo ustreznih, uporabnih ter primernih aktuarskih in statističnih metod.

Direktiva Solventnost 2 vpeljuje pomembne regulatorne spremembe za zavarovalnice na področju Evropske unije. Izračun solventnostnih zahtev temelji na oceni tveganj, ki jim je zavarovalnica izpostavljena. Modul tveganj neživljenjskih zavarovanj predstavlja oceno tveganj, ki izvirajo iz obveznosti sklenjenih neživljenjskih zavarovanj, glede na krite nevarnosti in procese pri izvajanju posla. Pomembnejši vir negotovosti portfelja neživljenjskih zavarovanj predstavlja ocena obveznosti, ki izvirajo iz zavarovalniškega posla, natančneje, ocena zneska škodnih rezervacij. Negotovost ocene izvira iz tega, da zneski prihodnjih izplačil že nastalih škod na dan vrednotenja niso znani (Harej & Slapar, 2013, str. 40).

Švica je leta 2008 vpeljala Švicarski test solventnosti, ki podobno kot režim Solventnosti 2 vpeljuje v regulativo ocene tveganj in predpisuje izračun solventnostnega kapitala na podlagi negotovosti, ki izhajajo tako iz obveznosti kot naložb zavarovalnice (Gisler, 2009, str. 1). Oba modela sta parametrična, pri čemer oceno tveganj v okviru Solventnosti 2 opišemo faktorsko, v okviru Švicarskega testa solventnosti pa s privzeto porazdelitvijo, ki jo definirajo za prevzeta tveganja primerni parametri. Solventnost 2 za razliko od švicarskega modela, ne privzema porazdelitve kapitalske zahteve – po standardni formuli direktive Solventnost 2 lahko izračunamo samo točkovno oceno, ki predstavlja solventnostno kapitalsko zahtevo in ne njene porazdelitve (Gisler, 2009, str. 19).

Trenutno so najbolj uporabljene aktuarske metode za izračun višine škodnih rezervacij deterministične – metode vrnejo točkovno oceno, ne vrnejo pa informacije o natančnosti te ocene. Pričakujemo lahko, da bo tako tudi v neposredni prihodnosti, saj se stohastične metode še niso uveljavile za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij (Working Party on Solvency II Technical Provisions, 2013, str. 10). Med razlogi, zakaj še vedno prevladujejo deterministične metode izračuna, sta pomanjkanje razumevanja metod in strožje omejitve metod. Glavni razlog je verjetno ta, da deterministične metode zadostujejo za izračun višine škodnih rezervacij (England & Verall, 2002, str. 443).

Ena izmed najbolj priljubljenih determinističnih metod za oceno višine škodnih rezervacij za nastale, a še neprijavljene škode je deterministična metoda veriženja. Glavna razloga za njeno priljubljenost sta enostavnost in lastnost, da metoda ne zahteva veliko predpostavk (Mack, 1993a, str. 213) . Kljub enostavnosti algoritma je Mack (1993b, str. 103) metodo veriženja nadgradil s stohastičnim modelom, ki omogoča merjene napake ocene.

Za razliko od Mackove stohastične metode veriženja druge stohastične metode predpostavljajo porazdelitve v gibanju škod. Zgodovinsko priljubljena metoda temelji na uporabi log-normalne porazdelitve višine kumulativnih škod (England & Verall, 2002, str. 453). Druge predpostavljene porazdelitve, kot npr. normalna, seveda opisujejo drugačne stohastične modele, ki so lahko, glede na lastnosti zavarovalnega portfelja, bolj ali manj ustrezni kot log-normalni modeli.

Bootstrap metoda postaja vedno bolj uveljavljena kot način stohastičnega rezerviranja. Najbolj poznan način uporablja deterministično metodo veriženja za izračun višine škodnih rezervacij, ki jo nato naključno in stohastično ponavlja. Metoda generira porazdelitveno funkcijo višine škodnih rezervacij, ki nam, poleg pričakovane višine škodnih rezervacij, omogoča med drugim oceniti tudi kapitalsko zahtevo portfelja in verjetnost, da bo pričakovana končna škoda preseгла določeno vrednost (Shapland & Leong, 2010, str. 2). Glede na izbrano stohastično metodo v ponovitvah, lahko z bootstrap simulacijo izbrano metodo nadgradimo in na ta način določimo porazdelitveno funkcijo višine škodnih rezervacij, ki jo generira izbrana stohastična metoda. Na ta način lahko ocenimo poljubne mere porazdelitve višine škodnih rezervacij in napako ocenimo, kljub temu, da nam osnovna

izbrana metoda omogoča samo oceno prvih dveh momentov porazdelitve. V aktuarski literaturi je opisanih mnogo stohastičnih metod. Pomembno je zavedanje, da je uporaba metod ustrezna samo pod določenimi pogoji. Le temeljito razumevanje modelov in njihovih lastnosti omogoča prilagodljivost v vsakodnevnih okoliščinah. Upoštevati moramo, da so različni stohastični modeli samo orodja, ki nam pomagajo pri končni odločitvi in ne morejo biti zamenjava za aktuarsko presojo (Li, 2006, str. 490).

Predmet tega magistrskega dela je uporaba stohastičnih metod za izračunavanje višine škodnih rezervacij premoženjskih zavarovanj. Namen je pokazati, da nam uporaba stohastičnih metod pripomore k boljši oceni višine škodnih rezervacij. Stohastični modeli omogočajo uporabo statističnih orodij in tako nudijo dodatne informacije kot izračun preko točkovne ocene.

Cilj magistrskega dela je ovrednotiti in primerjati rezultate predstavljenih metod na portfelju premoženjskih zavarovanj. V ta namen smo uporabili metode na podatkih likvidiranih škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti in zavarovanja kopenskih vozil dveh italijanskih zavarovalnic. Zavarovanje avtomobilske odgovornosti je tipičen primer dolgorepe zavarovalne vrste. Za te je značilno dolgo obdobje med nastankom, prijavo in končnim izplačilom škodnega zahtevka. Med razlogi za daljše trajanje obveznosti so lahko slabo zdravstveno stanje upravičenca, dolgotrajni sodni postopki ter pridobitev zdravniških in ostalih strokovnih mnenj. Zavarovanja, pri katerih je čas reševanja škode navadno kratek, imenujemo kratkorepa zavarovanja. Zavarovanje kopenskih vozil je dober predstavnik kratkorepkih zavarovanj. Portfelja se razlikujeta tudi glede na velikost zavarovalnice, iz katere izhajata. Zavarovanje kopenskih vozil pripada manjši do srednje veliki zavarovalnici glede na italijanskem trg. Zgoraj omenjeni podatki zavarovanja avtomobilske odgovornosti vsebujejo približno desetkrat več primerov likvidiranih škod (Savelli & Clemente, 2011, str. 5). Pri uporabi modelov in razlagi rezultatov je bila posebna pozornost posvečena omenjeni lastnosti portfeljev.

V magistrskem delu si zastavljamo naslednja raziskovalna vprašanja: Kakšne so predpostavke in omejitve stohastičnih modelov, ki so podlaga izbranih metod? Kakšna je napaka posamezne ocene in iz kje izvira? Kako lahko ocenimo porazdelitveno funkcijo višine škod glede na posamezno metodo?

V delu uporabljamo predvsem teoretično-konceptualno in empirično metodo. S prvo pripravimo teoretične gradnike metode kot so predpostavke stohastičnega modela na katerem sloni metoda, matematično upanje in ostali momenti porazdelitve škodne rezerve ter ocene napak metode. Z drugo pokažemo uporabo metode na konkretnem problemu. Vsako poglavje zaključimo z uporabo statističnih metod za oceno primernosti uporabe stohastičnih metod na portfeljih, ki izvirajo iz zavarovanj z različnimi lastnostmi. Uporabljamo tudi primerjalno in induktivno metodo za primerjavo različnih stohastične

metod med seboj in ugotavljamo, kako njihove lastnosti vplivajo na natančnost in primernost ocene višine škodnih rezervacij.

Delo je razdeljeno na pet poglavij. V prvem poglavju opišemo škodni proces in predstavimo izbrana portfelja zavarovanj. V nadaljevanju poglavja predstavimo deterministično metodo veriženja in jo uporabimo za izračun višine škodnih rezervacij, ki izhajajo iz izbranih portfeljev.

V drugem poglavju predstavimo razliko med determinističnimi in stohastičnimi modeli. Sledi opis nadgradnje deterministične metode veriženja v Mackovo stohastično metodo veriženja. Poglavje zaključimo z uporabo Mackove stohastične metode veriženja na izbranih portfeljih in kritično ocenimo dodatne informacije, ki nam jih stohastični model doprinese kot nadgradnja determinističnega.

V tretjem poglavju definiramo log-normalna modela za kumulativne škode. Razvijemo dva modela glede na to ali so variance v modelu poznane ali ne. Na izbranih portfeljih primerjamo ocene višine škodne rezervacije in njene napake za inačice log-normalnih modelov med seboj kot tudi z Mackovo stohastično metodo veriženja.

V četrtem poglavju najprej predstavimo splošen opis metode bootstrap. V nadaljevanju razvijemo algoritme za uporabo bootstrap metode v okviru prejšnjih metod in jih uporabimo na izbranih portfeljih. Primerjamo, kako dobro se porazdelitev višine škodne rezervacije z uporabo bootstrap metod ujema s porazdelitvijo škodne rezervacije, če privzamemo normalno in log-normalno porazdelitev in potrebne parametre ocenimo na različne načine. Posebno pozornost posvetimo tveganim vrednostim kvantilov v repu porazdelitev višine škodnih rezervacij. Ti bi lahko v duhu Solventnosti 2 in Švicarskega solventnostnega testa predstavljali kapitalsko zahtevo izbranega portfelja.

V petem poglavju predstavimo posplošene linearne modele. Osredotočimo se na uporabo bootstrap metode v okviru prerazpršenega Poissonovega modela na inkrementalnih škodah. Rezultate izbranih portfeljev kritično primerjamo med sabo in s prejšnjimi metodami.

1 OSNOVNI POJMI IN DEFINICIJE

1.1 Škodni proces in škodne rezervacije

Zavarovalnica je pravna oseba, ki se kot gospodarski subjekt ukvarja z dejavnostjo zavarovanja. Z zavarovalci sklepa zavarovalne pogodbe, v katerih se zavarovalec zavezuje, da bo zavarovalnici plačal zavarovalno premijo ali prispevek, zavarovalnica pa se zavezuje, da bo, če se zgodi dogodek, ki pomeni zavarovalni primer na predmetu zavarovanja, izplačala zavarovalnino ali odškodnino ali storila kaj drugega. Glede na to, ali je predmet

zavarovanja oseba (npr. njeno zdravje, življenje) ali premoženje (npr. vozilo, hiša), zavarovanja v grobem delimo na osebna zavarovanja in premoženjska zavarovanja. V ZZavar in ZZavar-1 je sicer navedena drugačna delitev, na premoženjska in življenjska zavarovanja. Razlika je v tem, da zakona uvrščata nezgodna zavarovanja pod premoženjska zavarovanja (Močivnik, 2010).

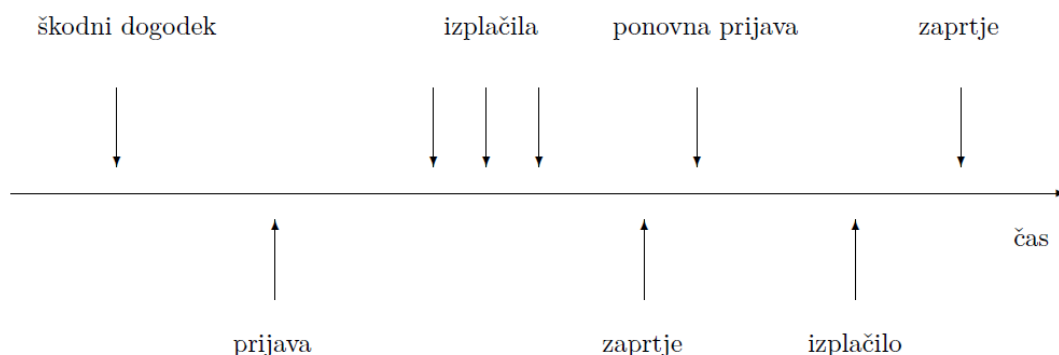
V delu se osredotočimo samo na premoženjska zavarovanja, ker se življenjska zavarovanja zaradi njihove drugačne narave modelira drugače kot premoženjska. ZZavar-1 razvršča premoženjska zavarovanja glede na glavne nevarnosti, ki jih krijejo, v 18 zavarovalnih vrst:

1. nezgodno zavarovanje,
2. zdravstveno zavarovanje,
3. zavarovanje kopenskih vozil,
4. zavarovanje tirnih vozil,
5. letalsko zavarovanje,
6. zavarovanje plovil,
7. zavarovanje prevoza blaga,
8. zavarovanje požara in elementarnih nesreč,
9. drugo škodno zavarovanje,
10. zavarovanje odgovornosti pri uporabi vozil,
11. zavarovanje odgovornosti pri uporabi zrakoplovov,
12. zavarovanje odgovornosti pri uporabi plovil,
13. splošno zavarovanje odgovornosti,
14. kreditno zavarovanje,
15. kavcijsko zavarovanje,
16. zavarovanje različnih finančnih izgub,
17. zavarovanje stroškov postopka,
18. zavarovanje pomoči.

Proces od nastopa škodnega primera do povrnitve škode zavarovancu in zaključka imenujemo škodni proces. Shematika je predstavljena na Sliki 1. Škodni proces se začne z nastopom škodnega dogodka. Zavarovanec čez nekaj časa škodni primer prijavi pri zavarovalnici. V kolikor je zahtevek upravičen, zavarovalnica odpre škodni spis, škodo oceni in zanjo oblikuje rezervacijo. V primeru, da zavarovalnica pridobi dodatne informacije, se višina rezervacije za prijavljeno škodo lahko poveča ali zmanjša. Mogoče je tudi, da zavarovalnica na podlagi novih informacij škodni zahtevek zavrne. Sledijo morebitna izplačila in zaprtje škodnega spisa.

Lahko se zgodi, da po zaprtju zavarovanec uveljavlja nov zahtevek iz istega škodnega dogodka. V tem primeru se postopek ponovi: za zahtevek se odpre škodni spis, oblikuje rezervacija, ki ji sledi morebitno izplačilo in vnovično zaprtje škodnega spisa.

Slika 1: Škodni proces



Z zgornjo sliko hočemo med drugim pokazati, da je čas od nastanka škode do njene poravnave lahko različno dolg. Za nekatere škodne primere lahko zavarovalnica natančno oceni višino izplačila in škodni spis hitro zapre. Za nekatere škodne dogodke pa se lahko zgodi, da lahko zavarovalnica ne ve končnega zneska izplačila še leta, v nekaterih primerih celo desetletja (Friedland, 2010, str. 4). Taka zavarovanja imenujemo dolgorepa zavarovanja. Tipična dolgorepa zavarovanja so zavarovanja odgovornosti in nekatera nezgodna zavarovanja. Njihovo nasprotje so kratkorepa zavarovanja, npr. zavarovanje kopenskih vozil in požarno zavarovanje.

Zavarovalnica je dolžna v zakonsko predpisanih rokih poročati višino škodnih rezervacij, ki morajo biti oblikovane v višini ocenjenih obveznosti in sicer ne glede na to ali je zavarovalni primer že prijavljen. Del škodne rezervacije, ki izvira iz prijavljenih a še ne izplačanih škod, imenujemo s kratico RBNS (ang. *Reported But Not Settled*). Rezervacijo, namenjeno že nastalim, a še ne prijavljenim škodam, označujemo z IBNR (ang. *Incurred But Not Reported*). Oblikujemo lahko tudi rezervacije za že nastale, a ne dovolj prijavljene škode, s kratico IBNeR (ang. *Incurred But Not enough Reported*).

Poleg dolgoročnega pogleda na škodni proces, tj. do izteka vseh obveznosti portfelja, nas zanima tudi kratkoročni pogled. Wüthrich Merz in Lysenko (2009, str. 66) navajajo naslednje razloge:

1. če kratkoročno obnašanje zavarovalnice ni ustrezno, ta ne bo obstala;
2. kratkoročni pogled pomaga pri vsakodnevnem upravljanju zavarovalnice in omogoča pri sprejemanju odločitev;
3. kratkoročna uspešnost zavarovalnice, ki se odraža npr. v računovodskih izkazih, je poleg lastnikov pomembna tudi za vlagatelje, regulatorje in stranke.

Kratkoročni pogled je pomemben tudi v režimu Solventnost 2, kje se zahtevani solventnostni kapital izračunava v višini tvegane vrednosti osnovnih lastnih virov sredstev zavarovalnice s stopnjo zaupanja 99,5 % za obdobje enega leta. V delu se osredotočimo na dolgoročni

pogled. Ko govorimo o zahtevanem kapitalu portfelja (Huerlimann, 2008, str. 3), mislimo na višino tvegane vrednosti porazdelitvene funkcije višine škodnih rezervacij v obdobju do izteka obveznosti, ki izhajajo iz portfelja

1.2 Predstavitev obravnavanih portfeljev

V delu uporabljamo zgodovinske podatke dveh italijanskih zavarovalnic med letoma 1995 in 2004 (Savelli & Clemente, 2011). Obravnavamo portfelja zavarovanja avtomobilske odgovornosti in zavarovanja kopenskih vozil. Prva pomembna razlika med portfeljema je, da se pri zavarovanju kopenskih vozil škode izplačujejo hitreje kot pri zavarovanju avtomobilske ali katere koli druge odgovornosti – portfelj uvrščamo med kratkorepe zavarovalne vrste. Druga pomembna razlika je, da portfelj zavarovanja kopenskih vozil pripada, za italijanski trg, manjši do srednje veliki zavarovalnici, portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti pa približno desetkrat večji zavarovalnici.

Tabela 1: Izplačila škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti v 100 EUR

Leto nastanka škode	Razvojno leto									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1995	2.255,78	1.867,64	933,49	476,09	309,71	262,91	176,21	184,10	146,62	75,91
1996	2.563,98	2.366,78	1.056,16	511,72	373,38	240,85	207,54	120,82	141,37	
1997	2.829,56	2.631,96	1.203,83	636,89	372,20	292,39	231,20	155,09		
1998	2.924,28	2.844,01	1.414,00	563,90	401,95	279,55	299,87			
1999	3.123,50	2.855,06	1.316,87	752,52	465,49	387,31				
2000	3.276,73	3.079,92	1.615,16	779,65	526,96					
2001	3.398,99	3.262,80	1.859,11	1.012,73						
2002	3.712,75	3.858,47	1.930,06							
2003	3.880,25	3.907,37								
2004	3.986,86									

Vir: N. Savelli & G. P. Clemente, Stochastic claim reserving based on CRM for Solvency II purposes, 2011, str. 15, Tabela 5

Z izborom portfelja kratkorepe in dolgorepe vrste imamo možnost oceniti kakšen vpliv ima čas trajanja reševanja škod na omejitve in ocene metode. Po drugi strani imamo priložnost ovrednotiti vpliv velikosti vzorca na oceno posamezne metode. Zanima nas, kako nam dodatna informacija o pričakovanem času reševanja škod in velikosti portfelja pomaga pri obrazložitvi rezultatov.

Podatki portfeljev (Tabela 1 in Tabela 2) so prikazani v obliki t.i. razvojnega trikotnika. Gre za tabelo, v kateri je prikazana višina izplačil škod glede na leto nastanka škodnega primera (leto nastanka škode) in število let med nastankom škodnega primera in izplačilom (razvojno

leto). Razvojni trikotnik je med najbolj pogostimi načini, ki jih aktuarji uporabljajo za organizacijo podatkov in analizo vzorcev, ki izhajajo iz zgodovinskih izkušenj (Friedland, 2010, str. 52).

Zaradi prikaza se omejimo na zadnjih 10 let nastanka škode, kar pomeni, da razvojni trikotnik škodnega procesa ne zajema v celoti. V takem primeru se višini škodnih rezervacij doda pribitek oziroma rep. Vrednotenje repa je izven obsega tega dela. Višino škodne rezervacije izračunavamo samo na podlagi razvojnih trikotnikov in predpostavimo, da je škodni proces po desetih letih končan. Pozorni bomo, kako ta predpostavka vpliva na rezultate metod.

Tabela 2: Izplačila škod zavarovanja kopenskih vozil v 1.000 EUR

Leto nastanka škode	Razvojno leto									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1995	16.100	6.677	281	115	17	40	66	31	8	25
1996	15.543	6.352	145	12	20	40	6	1	3	
1997	15.372	7.162	402	17	16	10	40	2		
1998	17.581	7.196	259	150	159	14	28			
1999	18.641	6.702	212	121	28	59				
2000	21.062	7.196	499	164	75					
2001	25.591	8.682	302	74						
2002	25.921	8.686	581							
2003	28.350	9.142								
2004	41.858									

Vir: N. Savelli & G. P. Clemente, Stochastic claim reserving based on CRM for Solvency II purposes, 2011, str. 17, Tabela 8

1.3 Opis deterministične metode veriženja

Deterministična metoda veriženja je še vedno med najbolj priljubljenimi metodami za oceno višine škodnih rezervacij. Glavna razloga za njeno razširjeno uporabo sta enostavnost samega izračuna in nezahtevnost predpostavk (Mack, 1993a, str. 213). Metoda v splošnem vrača tudi zelo natančne rezultate (Mertz & Wüthrich, 2008, str. 547).

Zaradi preglednosti z oznakami in opisom sledimo Wüthrichu (Wüthrich & Mertz, 2008). Najprej formalno opišimo razvojni trikotnik, s katerim predstavljamo zbrane podatke. Z i označimo leto nastanka škode, z j pa razvojno leto škode. Naj bodo $X_{i,j}$ plačila škod v letu nastanka škode i in razvojnem letu j . Vrednosti $X_{i,j}$ imenujemo inkrementalne škode.

S $C_{i,j}$ označimo kumulativne škode

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}.$$

Razvojni trikotnik ima poleg vrstic (let nastanka škod) in stolpcev (razvojnih let) še eno dimenzijo. Opazimo, da se diagonale trikotnika ujemajo z računovodskimi leti. Inkrementalne škode v računovodskem letu k se tako nahajajo na diagonali $i+j=k$. Označimo jih z

$$X_k = \sum_{i+j=k} X_{i,j}.$$

Zgodovinski podatki likvidacij škod, zbrani v trikotniku, predstavljajo do sedaj zbrane informacije. Označimo jih z

$$\mathcal{D}_I = \{C_{i,j} : i + j < I, 0 \leq j \leq J\}.$$

Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da je $I=J$ in da so $X_{i,j}=0$ za vsak $j>J$.

Za lažjo predstavo označimo še informacije zbrane do razvojnega leta k z $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{D}_I$

$$\mathcal{B}_k = \{C_{i,j} : i + j \leq I, 0 \leq j \leq k\}.$$

Na Sliki 2 je prikazana množica \mathcal{B}_k v razvojnem trikotniku škod. Iz definicije kot tudi iz slike sledi, da je $\mathcal{B}_J = \mathcal{D}_I$.

Naša naloga je oceniti škodne rezervacije, kar pomeni, da moramo oceniti

$$\mathcal{D}_I^c = \{C_{i,j} : i + j > I, i \leq I, j \leq J\},$$

torej izpolniti oziroma razviti spodnji trikotnik v Tabeli 1 in Tabeli 2.

Škodna rezervacija je tako vsota razlik zadnjega stolpca (ocenjena končna škoda) in glavne diagonale (do sedaj likvidirane škode) razvitega kumulativnega razvojnega trikotnika. Skupna škodna rezervacija je vsota po letih nastanka škode i .

Slika 2: Informacije zbrane do razvojnega leta k

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j						
	0	1	2	...	k	...	J
0	\mathcal{B}_k						
1							
2							
...							
k							
...							
I							

Škodne rezervacije za leto nastanka škode i in razvojnem letu j v splošnem označimo z

$$R_{i,j} = \sum_{k=j+1}^J X_{i,k} = C_{i,J} - C_{i,j}.$$

Diagonale razvojnega trikotnika torej predstavljajo računovodska leta. Zato nam zaporedje diagonal X_k v \mathcal{D}_I^C omogoča izračun denarnih tokov po računovodskih letih. Ocena denarnih tokov nam omogoča upoštevanje časovne vrednosti denarja, kar je ena izmed zahtev pri izračunu zavarovano-tehničnih rezervacij v režimu Solventnost 2.

Med najbolj znanimi in priljubljenimi metodami za izračun višine škodnih rezervacij je deterministična metoda veriženja. Ta temelji na naslednjih predpostavkah:

1. kumulativne škode $C_{i,j}$ so neodvisne za različna leta nastanka škode i ;
2. obstajajo konstante $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$, tako da za vsak $0 \leq i \leq I$ in vsak $1 \leq j \leq J$ velja

$$E[C_{i,j} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}.$$

Pozitivnim konstantam f_0, \dots, f_{J-1} rečemo razvojni faktorji. Za njih lahko iz zgornje enakosti, predpostavke, da so kumulativne škode $C_{i,j}$ neodvisne za različna leta nastanka škode i in iz lastnosti pogojnega upanja izpeljemo

$$E[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = E[C_{i,J} | C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} f_{I-i} \dots f_{J-1}.$$

S $F_{i,j+1}$ označimo zaporedne razvojne faktorje, ki so definirani kot razmerje kumulativnih škod leta nastanka škode i in zaporednih razvojnih let j ter $j+1$, torej

$$F_{i,j+1} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}.$$

Iz danih podatkov je smiselno oceniti razvojne faktorje \hat{f}_j za $0 \leq j \leq J-1$ na naslednji način

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

oziroma

$$\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} F_{i,j+1}. \quad (1)$$

Na ocene razvojnih faktorjev \hat{f}_j lahko zaradi zgornje enakosti gledamo kot na uteženo povprečje zaporednih razvojnih faktorjev $F_{i,j+1}$.

Iz ocene razvojnih faktorjev in predpostavk metode naravno sledi cenilka za kumulativno škodo $\hat{C}_{i,j}^{MV}$. Za vse $i+j > I$ jo po deterministični metodi veriženja glede na $E[C_{i,j} | \mathcal{D}_I]$ izračunamo kot

$$\hat{C}_{i,j}^{MV} = \hat{E}[C_{i,j} | \mathcal{D}_I] = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-1}.$$

Seveda je predlagana cenilka samo ena izmed številnih možnosti. Kako vemo, da smo izbrali »dobro«
cenilko? Vsekakor si želimo, da je cenilka v povprečju blizu prave vrednosti. Ta lastnost vodi do definicije nepristranskosti. Cenilka $\hat{\theta}$ je po definiciji nepristranska za θ natanko tedaj, ko je $E[\hat{\theta}] = \theta$.

Nepristranskost od cenilke zahteva, da enakost $E[\hat{\theta}] = \theta$ velja za vzorce vseh velikosti. Možne so cenilke, za katere $E[\hat{\theta}]$ ne bo enako θ na končno velikih vzorcih, se pa približuje poljubno blizu θ , ko se velikost vzorca povečuje. Takim cenilkam rečemo asimptotsko nepristranske cenilke: cenilka $\hat{\theta}$ je po definiciji asimptotsko nepristranska cenilka za θ natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta.$$

V primeru, ko imamo na razpolago več nepristranskih cenilk (ali asimptotsko nepristranskih cenilk) izberemo tisto, ki ima najmanjšo varianco. Več o merah ustreznosti cenilk lahko najdemo v (Tse, 2009, str. 281 – 286).

Ob izpolnjenih predpostavkah determinističnega modela veriženja veljajo naslednje trditve:

1. pri danem \mathcal{B}_j je cenilka \hat{f}_j pogojno nepristranska za f_j

$$E[\hat{f}_j | \mathcal{B}_j] = f_j;$$

2. cenilka \hat{f}_j je nepristranska za f_j ali

$$E[\hat{f}_j] = f_j;$$

3. velja

$$E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1}] = E[\hat{f}_0] \dots E[\hat{f}_{j-1}],$$

kar pomeni, da so cenilke $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{j-1}$ nekolerirane;

4. pri danem $C_{i,l-i}$ je $\hat{C}_{i,j}^{MV}$ pogojno nepristranska cenilka za $E[C_{i,j} | \mathcal{D}_l]$

$$E[\hat{C}_{i,j}^{MV} | C_{i,l-i}] = E[C_{i,j} | \mathcal{D}_l];$$

5. cenilka $\hat{C}_{i,j}^{MV}$ je nepristranska za $E[C_{i,j}]$, torej

$$E[\hat{C}_{i,j}^{MV}] = E[C_{i,j}].$$

Vidimo, da trditev 2. sledi neposredno iz trditve 1. in da je trditev 5. neposredna posledica trditve 4¹.

1.4 Uporaba deterministične metode na izbranih portfeljih

Vhodna podatka za deterministično metodo veriženja sta kumulativna razvojna trikotnika izplačila škod. Trikotnika sta prikazana v Tabeli 3 in Tabeli 4. Vrednosti povezane z zavarovanjem avtomobilske odgovornosti od tu naprej navajamo zaokrožene na celo število.

Preko enačbe (1) ocenimo razvojne faktorje – ti so prikazani v Tabeli 5 in Tabeli 6.

Z ocenjenimi razvojnimi faktorji \hat{f}_j izračunamo kumulativne škode $C_{i,j}$ in s tem do konca zapolnimo prostor informacij \mathcal{D}_l^C . V Tabeli 7 in Tabeli 8 so za izbrana portfelja po letih nastanka škode i prikazana do sedaj znana izplačila (nahajajo se na glavni diagonali kumulativnega trikotnika), ocena končne škode (ang. *Ultimate claim*) $\hat{C}_{i,j}^{MV}$ in ocena škodne

¹Preostanek dokaza je naveden v Wuetrich & Mertz (2008, str. 19).

rezervacije po deterministični metodi veriženja, ki je razlika med diagonalnim izplačilom in oceno končne škode.

Tabela 3: Kumulativna izplačila škod zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2.256	4.123	5.057	5.533	5.843	6.106	6.282	6.466	6.613	6.688
1	2.564	4.931	5.987	6.499	6.872	7.113	7.320	7.441	7.583	
2	2.830	5.462	6.665	7.302	7.674	7.967	8.198	8.353		
3	2.924	5.768	7.182	7.746	8.148	8.428	8.728			
4	3.124	5.979	7.295	8.048	8.513	8.901				
5	3.277	6.357	7.972	8.751	9.278					
6	3.399	6.662	8.521	9.534						
7	3.713	7.571	9.501							
8	3.880	7.788								
9	3.987									

Tabela 4: Kumulativna izplačila škod zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	16.100	22.777	23.058	23.173	23.190	23.230	23.296	23.327	23.335	23.360
1	15.543	21.895	22.040	22.052	22.072	22.112	22.118	22.119	22.122	
2	15.372	22.534	22.936	22.953	22.969	22.979	23.019	23.021		
3	17.581	24.777	25.036	25.186	25.345	25.359	25.387			
4	18.641	25.343	25.555	25.676	25.704	25.763				
5	21.062	28.258	28.757	28.921	28.996					
6	25.591	34.273	34.575	34.649						
7	25.921	34.607	35.188							
8	28.350	37.492								
9	41.858									

Tabela 5: Ocenjeni razvojni faktorji zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Ocenjeni razvojni faktorji	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\hat{f}_j	1,9538	1,2418	1,0972	1,0558	1,0395	1,0309	1,0211	1,0207	1,0115	

Tabela 6: Ocenjeni razvojni faktorji zavarovanja kopenskih vozil

Ocenjeni razvojni faktorji	Razvojno leto j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{f}_j	1,3681	1,0125	1,0036	1,0021	1,0014	1,0015	1,0005	1,0002	1,0011

Tabela 7: Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Diagonalna izplačila	Ocena končne škode po deterministični metodi veriženja	Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja
0	6.688	6.688	0
1	7.583	7.670	87
2	8.353	8.624	271
3	8.728	9.201	473
4	8.901	9.673	772
5	9.278	10.482	1.203
6	9.534	11.371	1.838
7	9.501	12.435	2.933
8	7.788	12.656	4.869
9	3.987	12.660	8.673
Skupaj	80.340	101.460	21.119

Primerjava Tabel 7 in Tabel 8 pokaže, da glavnina škodne rezervacije pri zavarovanju kopenskih vozil odpade na zadnje leto nastanka škode. To je v skladu z našimi pričakovanji, saj ima zavarovanje kratek rep. Tudi portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti odraža pričakovano daljše reševanje škodnih zahtevkov, kar se odraža v tem, da je škodna rezervacija bolj enakomerno razporejena po letih nastanka škode.

Do sedaj smo implicitno privzeli, da sta predpostavki deterministične metode veriženja izpolnjeni. Poglobljen opis testiranja veljavnosti predpostavk sta predstavila Mack (1993b) in Venter (1998), tukaj pa pogledjmo kako dobro portfelja izpolnjujeta 2. predpostavko metode veriženja.

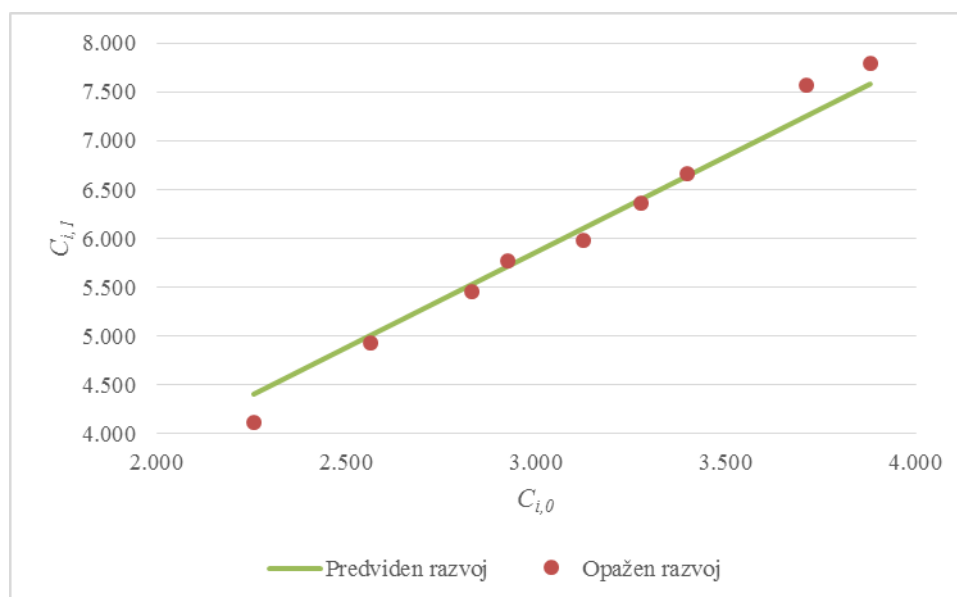
Preveriti hočemo, kako dobro se ocenjene vrednosti $\hat{C}_{i,j}^{MV} = C_{i,j-1}\hat{f}_{j-1}$ pri izbranem j ujemajo s $C_{i,j-1}$ za vse $0 \leq i \leq I-j$. Možne izbire za j so med 1 in J . Mack (1993b) priporoča, da za vsak j linearnost preverimo na grafu. Na abscisni osi prikažemo $C_{i,j-1}$, na ordinatni $C_{i,j}$, oceno $C_{i,j-1}\hat{f}_{j-1}$ pa predstavimo s premico skozi izhodišče in naklonom \hat{f}_{j-1} . Zaradi majhnega števila točk, bomo predpostavko preverili samo za prvo in drugo razvojno leto.

Tabela 8: Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Diagonalna izplačila	Ocena končne škode po deterministični metodi veriženja	Škodna rezervacija po deterministični metodi veriženja
0	23.360	23.360	0
1	22.122	22.146	24
2	23.021	23.051	30
3	25.387	25.433	46
4	25.763	25.848	85
5	28.996	29.132	136
6	34.649	34.885	236
7	35.188	35.555	367
8	37.492	38.357	865
9	41.858	58.588	16.730
Skupaj	297.836	316.355	18.519

Na Sliki 3 lahko za zavarovanje avtomobilske odgovornosti grafično preverimo, kako dobro predpostavka linearosti drži za prvo razvojno leto. Za $C_{i,0}$ med 2.500 in 3.500 se ocena $C_{i,0}\hat{f}_0$ dobro ujema z meritvijo. Za manjše zneske metoda v prvem razvojnem letu precenjuje napoved kumulativnih škod, za zneske več kot 3.500 pa podcenjuje. Vemo, da z zadnjimi desetimi leti nastanka škode navedenimi v razvojnem trikotniku nismo zajeli dovolj dolgega časovnega obdobja, tako da je podcenjenost pričakovana. Predpostavka bolje opisuje drugo razvojno leto (Priloga 1), z izjemo šestega leta nastanka škode.

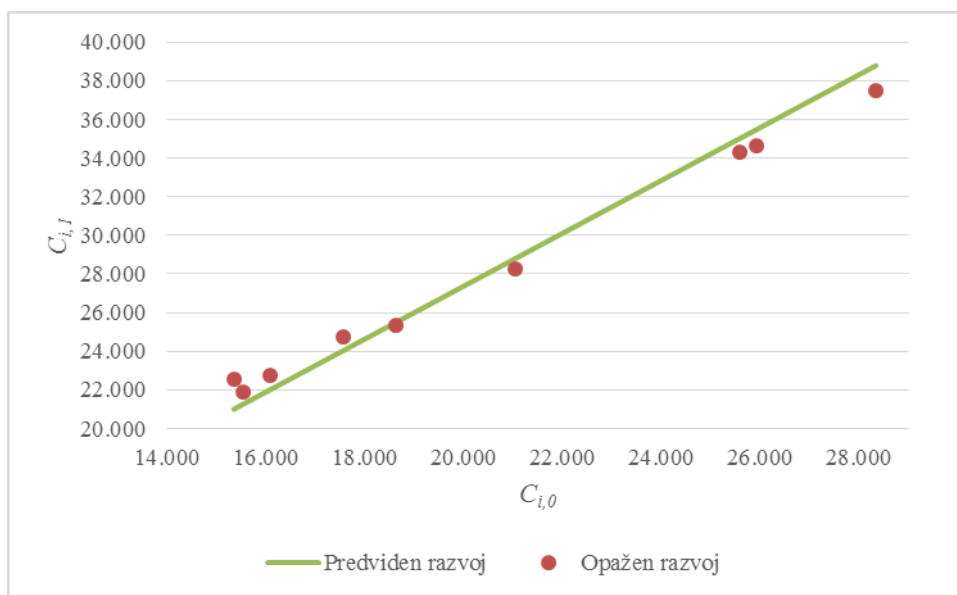
Slika 3: Predviden in opažen razvoj za prvo razvojno leto zavarovanja avtomobilske odgovornosti



Situacija je obrnjena pri zavarovanju kopenskih vozil (Slika 4). Spomnimo se, da portfelj izhaja iz manjše zavarovalnice kot prvi, tako da lahko pričakujemo večjo razpršenost. Premica se sicer še vedno dobro prilega podatkom. Metoda podcenjuje manjše zneske, ampak glede na trend rasti likvidiranih škod, to verjetno v prihodnosti ne bo problem. Bolj zanimivo je, da metoda precenjuje višje zneske, kar bi lahko pomenilo, da je skupna rezervacija previsoka. Opazen je tudi skok likvidiranih škod v zadnjem letu nastanka škode (spodnje oglišče trikotnika, Tabela 4). Spodnje oglišče je že tako ali tako najbolj občutljivo na nihanja podatkov, saj je edini podatek, ki ga imamo za zadnje leto nastanka škode. Skupaj z dejstvom, da večina škodne rezervacije izhaja iz zadnjega leta nastanka škode (Tabela 8), bi bilo pametno preveriti, kaj se je zgodilo z višino likvidacij v zadnjem letu nastanka škod. Povečanje lahko izhaja iz naravne rasti portfelja, lahko pa so se spremenile druge okoliščine kot so spremembe v zakonodaji ali politiki likvidiranja škodnega oddelka. Na žalost nimamo možnosti, da bi raziskali vzroke za tolikšno povečanje.

Priloga 1 kaže, da je linearnost dobra predpostavka za drugo razvojno leto zavarovanja kopenskih vozil.

Slika 4: Predviden in opažen razvoj za prvo razvojno leto zavarovanja kopenskih vozil



2 MACKOVA STOHAŠTIČNA METODA VERIŽENJA

2.1 Stohastične rezervacije

Kljub temu, da zanimanje za stohastične metode ocene višine škodnih rezervacij premoženjskih zavarovanj narašča že zadnjih trideset let, jih presenetljivo še vedno uporablja le malo aktuarjev. Med razloge lahko prištevamo splošno nepoznavanje metod, strožje omejitve metod glede vhodnih podatkov in slabo programsko podporo. Najbolj

verjetno pa je glavni razlog v tem, da so deterministične metode zadostne za izračun višine škodnih rezervacij. Kljub temu pa se s sprejetjem direktive Solventnost 2, ki vpeljuje pojem najboljše ocene (ang. *Best estimate*), povečuje potreba po oceni razpršenosti višine škodnih rezervacij. V tem kontekstu bi bilo najboljše, če bi znali oceniti porazdelitveno funkcijo višine škodnih rezervacij, saj bi iz nje lahko izračunali kvantile in različne mere tveganja (England & Verall, 2002, str. 444).

Aktuar iz svojih izkušenj seveda ve, da so portfelji nekaterih zavarovalnih vrst bolj stabilni in predvidljivi kot drugi, tako da lahko sklepa, da bo izračun višine škodnih rezervacij bolj natančen kot pri bolj razpršenih portfeljih. Tipično lahko pričakujemo, da bo ocena višine škodnih rezervacij kratkorepe vrste bolj natančna od ocene dolgorepkih zavarovalnih vrst, toda to napako je težko kvantificirati (England & Verall, 2001, str. 2).

S porazdelitveno funkcijo želimo poleg gibanja škodnih rezervacij zajeti tudi napako, ki izvira iz ocene. Predvsem nas zanima napaka, ki izvira iz natančnosti ocene parametrov in naključnosti škodnega procesa (England & Verall, 2006, str. 221).

Ocena višine škodnih rezervacij z uporabo stohastičnih metod omogoča izračun najboljše ocene in merjenje napake ocene tako, da škodni proces prikaže v okviru statističnega modela pri katerem analiza podatkov zaseda pomembno vlogo. Statistični okvir nam omogoča tudi uporabo orodij za iskanje morebitnih odstopanj v podatkih in preverjanje ustreznosti podatkov glede na predpostavke uporabljene metode (England & Verall, 2001, str. 2).

Li (2006, str. 491 – 492) ocene napak glede na to, iz kje izhajajo, razvršča v:

1. oceno napake parametrov – napaka, ki izhaja iz dejstva, da ne poznamo pravih vrednosti parametrov ampak samo njihove ocene, ki jih določimo na podlagi preteklih izkušenj;
2. procesno napako, ki izhaja iz narave stohastičnega procesa;
3. modelno napako, ki se opisuje ustreznost izbranega modela za opis škodnega procesa;
4. podatkovno napako, ki zajema tudi omejitve podatkov;
5. napake v oceni prihodnjih trendov, npr. trendov v škodni in finančni inflaciji, prihodnji politiki reševanja škod, pozavarovalnih in sozavarovalnih pogodbah, zavarovalnih pogojih, izpostavljenosti in zakonodaji;
6. oceno napake tveganja nasprotne stranke, kot je morebitna plačilna nezmožnost pozavarovalnice v primeru velike škode.

Glede na to, da imamo poleg razvojnih trikotnikov, relativnih velikosti portfeljev in zavarovalne podvrste na razpolago bolj malo dodatnih informacij, težko ocenimo zadnje štiri napake, saj bi potrebovali vpogled v škodni proces posamezne zavarovalnice. V tem magistrskem delu se zato osredotočimo na procesno napako in oceno napake parametrov.

V prejšnjem poglavju smo definirali cenilko kumulativne višine škode $\hat{C}_{i,J}^{MV}$ po deterministični metodi veriženja in pokazali, da je pri danem $C_{i,t-i}$ cenilka pogojno nepristranska za $E[C_{i,J} | \mathcal{D}_I]$ in nepristranska za $E[C_{i,J}]$. Spomnimo se, da je cenilka $\hat{\theta}$ za θ nepristranska natanko tedaj, ko je $E[\hat{\theta}] = \theta$. Kako bi izmerili natančnost cenilke $\hat{\theta}$ za θ ? Ena izmed možnosti je srednja (kvadratna) napaka ocene (ang. *Mean square error of prediction*). Definiramo jo kot

$$mse_{\theta}(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2].$$

Glede na organizacijo podatkov v razvojnem trikotniku je smiselno definirati srednjo napako glede na zbrane podatke. Srednjo pogojno napako (ang. *Conditional mean square error of prediction*) cenilke $\hat{\theta}$ za θ pri zbranih informacijah \mathcal{D}_I definiramo z

$$mse_{\theta|\mathcal{D}_I}(\hat{\theta}) = E[(\theta - \hat{\theta})^2 | \mathcal{D}_I].$$

Ob predpostavki, da je $\hat{\theta}$ tudi \mathcal{D}_I -merljiv, velja

$$mse_{\theta|\mathcal{D}_I}(\hat{\theta}) = Var[\theta | \mathcal{D}_I] + (\hat{\theta} - E[\theta | \mathcal{D}_I])^2.$$

Člen $Var[\theta | \mathcal{D}_I]$ imenujemo pogojna procesna ali stohastična napaka. Ta izhaja iz stohastičnega procesa in je ne moremo odpraviti. Člen $(\hat{\theta} - E[\theta | \mathcal{D}_I])^2$ imenujemo pogojna napaka ocene parametrov, ki se v splošnem zmanjšuje, ko nam raste število opazovanj.

2.2 Opis Mackove stohastične metode veriženja

Zaradi priljubljenosti deterministične metode veriženja in njenega algoritma, ki ne predpostavlja analitične porazdelitve v gibanju škod, je bilo v zadnjih letih veliko zanimanja za opise in primerjavo stohastičnih modelov, ki ocenjujejo višino škodne rezervacije v enaki višini kot deterministična metoda veriženja. Natanko enaka ocena, kot smo je vajeni, nam skupaj z dobrim poznavanjem portfelja pomaga izkoristiti prednosti stohastičnih metod, ki smo jih navedli na začetku poglavja (England & Verall, 1999, str. 281).

V podpoglavju se osredotočimo na stohastični model metode veriženja, kot ga je opisal Mack (1993a). Njegov model nadgrajuje Schnieperjev mešani model (1991) na metodo veriženja. Mackov model ni edini stohastični model, ki ocenjuje škodne rezervacije v isti višini kot deterministična metoda veriženja, zato bomo, sicer manj podrobno, omenili ostale pristope ter pojasnili teoretične in praktične posledice različnih predpostavk, na katerih slonijo modeli.

Predpostavki Mackove stohastične metode veriženja:

1. kumulativne škode $C_{i,j}$ so neodvisne za različna leta nastankov škod i ;
2. obstajajo konstante $f_0, \dots, f_{j-1} > 0$ in $\sigma_0^2, \dots, \sigma_{j-1}^2 > 0$, tako da za vsak $0 \leq i \leq I$ in vsak $1 \leq j \leq J$ velja

$$E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}$$

in

$$\text{Var}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}.$$

Wüthrich in Merz (2008, str. 37) v 2. točki dodatno privzameta, da so $(C_{i,j})_{j \geq 0}$ markovske verige za vse i . Dodatna zahteva ni bistvena in je namenjena predvsem poenostavitvi oznak in izpeljav, ki se jih bomo držali tudi v tem poglavju.

Oceno razvojnih faktorjev določimo kot pri deterministični metodi veriženja

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} F_{i,j+1}.$$

Mackova metoda ima enake predpostavke kot deterministična metoda veriženja in ocenjuje razvojne faktorje na enak način – dodatno privzema samo strukturo varianc. Ker ni več možnosti za zamenjavo metod, spuščamo pridevnik »deterministična«.

Oceno varianc za $0 \leq j < J-1$ izračunamo kot

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2.$$

Manjka nam še cenilka $\hat{\sigma}_{j-1}^2$. Če je $\hat{f}_{j-1} = 1$ in smo prepričani, da se škodni proces z letom $J-1$ zaključi, lahko predpostavimo, da je $\hat{\sigma}_{j-1}^2 = 0$. V ostalih primerih Mack (1993a, str. 217) predlaga ekstrapolacijo manjkajoče cenilke iz poznanih $\hat{\sigma}_j$ za $j < J-1$ z npr. uporabo padajoče eksponente funkcije, ponudi pa tudi lažjo alternativo. Kjer velja $\hat{\sigma}_{j-3} > \hat{\sigma}_{j-2}, \hat{\sigma}_{j-1}$ ocenimo preko enakosti

$$\frac{\hat{\sigma}_{j-3}}{\hat{\sigma}_{j-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{j-2}}{\hat{\sigma}_{j-1}},$$

kar vodi do ocene

$$\hat{\sigma}_{j-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{j-2}^4}{\hat{\sigma}_{j-3}^2}, \min\{\hat{\sigma}_{j-2}^2, \hat{\sigma}_{j-3}^2\} \right\}.$$

Spomnimo se, da lahko gledamo na razvojne faktorje \hat{f}_j kot na uteženo povprečje zaporednih faktorjev $F_{i,j+1}$, z utežmi $\frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{l-j-1} C_{k,j}}$. Dodaten razlog za izbor cenilk \hat{f}_j je v tem, da je pri predpostavkah Mackove stohastične metode veriženja \hat{f}_j \mathcal{B}_{j+1} -merljiva nepristranska cenilka za f_j , ki ima najmanjšo pogojno varianco na \mathcal{B}_j med vsemi nepristranskimi linearnimi kombinacijami \mathcal{B}_j -merljivih nepristranskih cenilk $(F_{i,j+1})_{0 \leq i \leq l-j-1}$ za f_j (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 38 – 40), oziroma

$$\text{Var}[\hat{f}_j | \mathcal{B}_j] = \min_{\{\alpha_i \in \mathbb{R} : \sum \alpha_i = 1\}} (\text{Var}[\sum_{i=0}^{l-j-1} \alpha_i F_{i,j+1} | \mathcal{B}_j]) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{l-j-1} C_{i,j}}.$$

Želimo še, da so cenilke $\hat{\sigma}_j^2$ nepristranske – tako pogojno glede na prostor informacij \mathcal{B}_j kot v splošnem. Pokažemo lahko, da pri predpostavkah Mackove stohastične metode veriženja za cenilke $\hat{\sigma}_j^2$ velja²:

1. za dani \mathcal{B}_j je $\hat{\sigma}_j^2$ pogojno nepristranska cenilka za σ_j^2 ali

$$E[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{B}_j] = \sigma_j^2;$$

2. cenilka $\hat{\sigma}_j^2$ je nepristranska za σ_j^2 , oziroma

$$E[\hat{\sigma}_j^2] = \sigma_j^2.$$

Naš cilj je najti oceno srednje pogojne napake cenilke $\hat{C}_{i,J}^{MV}$ po posameznih letih nastanka škod $1 \leq i \leq I$ in oceno srednje pogojne napake vsote let nastanka škod. Po definicij jo za posamezno leto $1 \leq i \leq I$ razbijmo na pogojno procesno napako in pogojno napako ocene parametrov

$$mse_{p_{C_{i,J} | \mathcal{D}_I}}(\hat{C}_{i,J}^{MV}) = E[(C_{i,J} - \hat{C}_{i,J}^{MV})^2 | \mathcal{D}_I] = \text{Var}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] + (\hat{C}_{i,J}^{MV} - E[\hat{C}_{i,J}^{MV} | \mathcal{D}_I])^2.$$

Srednja pogojna napaka ocene skupne višine škodne rezervacije je definirana z vsoto

² Dokaza za trditvi lahko najdemo v (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 38-41).

$$mse_{p_{\Sigma_i C_{i,J} | \mathcal{D}_I}} \left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,J}^{MV} \right) = E \left[\left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,J}^{MV} - \sum_{i=1}^I C_{i,J} \right)^2 \mid \mathcal{D}_I \right].$$

Pogojno procesno napako $Var[C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I]$ za posamezno leto nastanka škod i , kjer $1 \leq i \leq I$, lahko analitično izrazimo z

$$Var[C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I] = (E[C_{i,j} \mid C_{i,j-1}])^2 \sum_{j=i}^{J-1} \frac{\sigma_j^2}{f_j^2 E[C_{i,j} \mid C_{i,j-1}]} \quad (2)$$

Iz enačbe (2) sledi, da je cenilko za pogojno procesno napako posameznega leta nastanka škod i smiselno definirati kot

$$\widehat{Var}[C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I] = \hat{E} \left[(C_{i,J} - E[C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I])^2 \mid \mathcal{D}_I \right] = (\hat{C}_{i,J}^{MV})^2 \sum_{j=i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \hat{C}_{i,j}^{MV}}.$$

Iz neodvisnosti let nastanka škode i sledi

$$Var \left[\sum_{i=1}^J C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I \right] = \sum_{i=1}^J Var[C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I].$$

Za lažjo analizo virov napak Wüthrich (2008, str. 379) predlaga izračun variacijskega količnika. Za slučajno spremenljivko θ , ki ima končno varianco, ga definiramo kot

$$V_{co}[\theta] = \frac{\sqrt{Var(\theta)}}{E[\theta]}.$$

Variacijski količnik procesne napake posameznega leta nastanka škode i ocenimo, pogojno glede na zbrane informacije \mathcal{D}_I , z

$$V_{co_i} = \widehat{V}_{co}(C_{i,J} - C_{i,I-i} \mid \mathcal{D}_I) = \frac{\sqrt{\widehat{Var}(C_{i,J} \mid \mathcal{D}_I)}}{\hat{C}_{i,J}^{MV} - C_{i,I-i}}.$$

Analogno definiramo variacijska količnika ocene celotne napake in ocene napake parametrov.

Iz predpostavk Mackove stohastične metode veriženja lahko dokažemo (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 70), da za zaporedne razvojne faktorje

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

velja

$$E [F_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1}$$

in

$$\text{Var} [F_{i,j} | C_{i,j-1}] = \frac{\sigma_{j-1}^2}{C_{i,j-1}}.$$

Sledi, da je variacijski količnik zaporednega razvojnega faktorja enak

$$V_{co} [F_{i,j} | C_{i,j-1}] = \frac{\sigma_{j-1}}{f_{j-1}\sqrt{C_{i,j-1}}}$$

in da gre proti 0, ko $C_{i,j-1} \rightarrow \infty$.

Teorija upravljanje s tveganji na podlagi zgornjega asimptotskega obnašanja pogosto izpelje, da v primeru, ko tveganja merimo s pomočjo variacijskih količnikov, asimptotsko obnašanje pomeni, da tveganja po zakonu velikih števil popolnoma izginejo za zelo velike portfelje. To bi pomenilo, da so za neskončno velike portfelje tveganja popolnoma diverzificirana. Wüthrich (2008, str. 379) v nadaljevanju komentira, da se tej predpostavki nove smernice izračuna solventnostnega kapitala izogibajo. Vemo, da vedno obstajajo zunanji vplivi, ki vplivajo na ves portfelj hkrati in na enak način. Tveganje spremembe zakonodaje je eden izmed primerov tveganja, ki se večja z rastjo portfelja.

Za oceno napake $\hat{C}_{i,J}^{MV}$ moramo določiti še cenilko za napako ocene parametrov. Opis problematike bomo povzeli po Wüthrichu in Merzu (2008, str. 44). Fiksirajmo poljubno leto nastanka škode i . Oceniti želimo

$$\begin{aligned} (\hat{C}_{i,J}^{MV} - E[\hat{C}_{i,J}^{MV} | \mathcal{D}_I])^2 &= C_{i,I-i}^2 (\hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{J-1} - f_{I-i} \dots f_{J-1})^2 \\ &= C_{i,I-i}^2 \left(\prod_{j=I-1}^{J-1} \hat{f}_j^2 + \prod_{j=I-1}^{J-1} f_j^2 - 2 \prod_{j=I-1}^{J-1} \hat{f}_j f_j \right). \end{aligned}$$

V letu nastanka škode I poznamo vse cenilke $\hat{f}_{I-i}, \dots, \hat{f}_{J-1}$, seveda pa ne poznamo pravih vrednosti f_{I-i}, \dots, f_{J-1} in tako ne moremo izračunati cenilke napake parametrov neposredno.

Ugotoviti moramo, kakšne vrednosti lahko dosežejo cenilke \hat{f}_j glede na prave vrednosti f_j . Pokazali smo, da so \hat{f}_j nepristranske in nekolerirane cenilke, zato lahko člene $f_{I-i} \dots f_{j-1}$ izračunamo kot povprečje. Glavna težava je torej oceniti produkt kvadratov $\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2$. Za namen predstavitve različnih pristopov ocenjevanja napake definirajmo zgornji desni kot prostora informacij $\mathcal{D}_{I,i}^0$ (Slika 5) glede na razvojno leto $j = I - i$ kot

$$\mathcal{D}_{I,i}^0 = \{C_{k,j} \subseteq \mathcal{D}_I : j > I - i\} = \mathcal{B}_i^c \cap \mathcal{D}_I.$$

Slika 5: Zgornji desni kot prostora informacij

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j						
	0	1	2	...	$I-i$...	J
0	\mathcal{B}_{I-i}					$\mathcal{D}_{I,i}^0$	
1							
2							
...							
$I-i$							
...							
I							

Spomnimo se, da so \hat{f}_j^2 \mathcal{B}_{j+1} -merljive za vse j . Oceno člena $\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2$ lahko izračunamo z različnimi stopnjami upoštevanja informacij v $\mathcal{D}_{I,i}^0$.

Iz Slike 5 je razvidno, da sta množici \mathcal{B}_j in $\mathcal{D}_{I,i}^0$ disjunktni, ko je $j = I - i$. Ocena preko povprečja

$$E[\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2 \mid \mathcal{B}_{I-i}]$$

pomeni, da smo člen $\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2$ ocenili neodvisno od informacij vsebovanih v $\mathcal{D}_{I,i}^0$, saj je $\mathcal{B}_{I-i} \cap \mathcal{D}_{I,i}^0 = \emptyset$.

Nasprotna možnost je ocena $\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2$ z upoštevanjem vseh informacij zbranih v $\mathcal{D}_{I,i}^0$. V tem primeru ocenjujemo preko povprečja v vsakem razvojnem letu $j \in I - i, \dots, J - 1$:

$$E[\hat{f}_{I-i}^2 \mid \mathcal{B}_{I-i}] E[\hat{f}_{I-i+1}^2 \mid \mathcal{B}_{I-i+1}] \dots E[\hat{f}_{j-1}^2 \mid \mathcal{B}_{j-1}].$$

Možen je tudi pristop, pri katerem upoštevamo samo del informacij v $\mathcal{D}_{I,i}^0$. Če želimo upoštevati skoraj vse informacije v $\mathcal{D}_{I,i}^0$, bi morali oceniti povprečje

$$\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{J-2}^2 E[\hat{f}_{J-1}^2 | \mathcal{B}_{J-1}].$$

Zgornja povprečja lahko ocenimo na različne načine, na primer s pomočjo bootstrap metode, Monte – Carlo simulacij ali na analitičen način. Širši pristop k izračunu ocen predstavimo na koncu podglavja.

V tem magistrskem delu se omejimo na primer, kjer člen $\hat{f}_{I-i}^2 \dots \hat{f}_{J-1}^2$ ocenimo z upoštevanjem vseh informacij, ki se nahajajo v $\mathcal{D}_{I,i}^0$. Predstavimo cenilko srednje pogojne napake $\hat{C}_{i,J}^{MV}$, kot jo je prvič predstavil Mack (1993a). V kolikor veljajo predpostavke Mackove stohastične metode veriženja, je cenilka za srednjo pogojno napako $\hat{C}_{i,J}^{MV}$ posameznega leta nastanka škode enaka

$$\widehat{mse}_{C_{i,J}|\mathcal{D}_I}(\hat{C}_{i,J}^{MV}) = (\hat{C}_{i,J}^{MV})^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,J}^{MV}} + \frac{1}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \right).$$

Cenilka povprečne pogojne napake za vsoto let nastanka škode $\hat{C}_{i,J}^{MV}$ je enaka

$$\begin{aligned} \widehat{mse}_{\sum_i C_{i,J}|\mathcal{D}_I} \left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,J}^{MV} \right) &= \sum_{i=1}^I \widehat{mse}_{C_{i,J}|\mathcal{D}_I}(\hat{C}_{i,J}^{MV}) + \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} \hat{C}_{i,J}^{MV} \hat{C}_{k,J}^{MV} \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}. \end{aligned}$$

Zgornji cenilki sta povezani s škodno rezervacijo do izteka obveznosti, ki izhajajo iz portfelja (dolgoročni pogled). Ocene, povezane s krajšimi obdobji, sta izpeljala Merz in Wüthrich (2007).

Postopek ocene napake parametrov z uporabo zgornjega desnega kota prostora informacij $\mathcal{D}_{I,i}^0$ so formalizirali Buchwalder, Bühlmann, Merz in Wüthrich (2006). Metodo veriženja so opisali kot časovno vrsto z naslednjimi predpostavkami:

1. kumulativne škode $C_{i,j}$ so neodvisne za različna leta nastankov škod i ;
2. za vsak $0 \leq j \leq J-1$ obstajajo konstante $f_j > 0$, $\sigma_j > 0$ in take slučajne spremenljivke $\epsilon_{i,j+1}$, da za vsak $0 \leq i \leq I$ velja

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + \sigma_j \sqrt{C_{i,j}} \epsilon_{i,j+1}.$$

Predpostavimo še, da so $\epsilon_{i,j+1}$ neodvisne z $E[\epsilon_{i,j+1}] = 0$ in $E[\epsilon_{i,j+1}^2] = 1$.

Z zgornjimi predpostavkami smo metodo veriženja opisali kot avtoregresijski model. Podaja nam okvir, v katerem je mogoče enostavno izračunati napake ocene cenilke in opisuje mehanizem, s katerim lahko generiramo možne meritve glede na to, kako upoštevamo zgornji desni kot prostora informacij $\mathcal{D}_{I,i}^0$.

Teoretično gledano bi naš model lahko vračal tudi negativne kumulativne in s tem negativne inkrementalne škode v posameznih letih. To je v določenih primerih sicer uporabno, vseeno pa sta se Merz in Wüthrich (2006, str. 49) omejila s predpostavko, da so kumulativne škode pozitivne in dodatno predpostavila, da za vsak i, j velja

$$P[C_{i,j+1} > 0 \mid C_{i,j}] = 1.$$

Buchwalder et al. (2006, str. 535) so bili hvaležni recenzentu njihovega članka, ki je opazil, da so rezultati navedenega numeričnega primera identični rezultatom enega izmed Murphyjevih (1994) modelov – modela 4, ki temelji na uteženih povprečnih razvojnih faktorjih (ang. *Weighted average development factors*). Vseeno modela zaradi različnih predpostavk v splošnem opisujeta različna stohastična modela, saj Murphyjev model privzema, da so ocene razvojnih faktorjev neodvisne. Model časovne vrste so nadgradili Kvedaras, Leipus in Šiaulys (2012).

Mack, Quarg in Braun (2006, str. 544) so mnenja, da je dodatna predpostavka o neodvisnosti ostankov $\epsilon_{i,j+1}$ znotraj leta nastanka škode sporna in nakazuje, da se opis metode s časovno vrsto ne ujema s predpostavkami Mackove stohastične metode veriženja. Ocena napake parametrov preko metode s časovno vrsto je vedno večja od Mackove. Tudi Venter (2006, str. 571) je mnenja, da je nekoreliranost ostankov (in ne neodvisnost) predpostavka, ki najboljše opisuje Mackovo stohastično metodo veriženja.

2.3 Uporaba metode na izbranih portfeljih

Tabela 9 in Tabela 10 prikazuje z Mackovo stohastično metodo veriženja ocenjene razvojne faktorje \hat{f}_j in variance $\hat{\sigma}_j^2$ za izbrana portfelja.

Tabela 9: Ocenjeni razvojni faktorji in variance zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Ocenjeni razvojni faktorji in variance	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
\hat{f}_j	1,9538	1,2418	1,0972	1,0558	1,0395	1,0309	1,0211	1,0207	1,0115	
$\hat{\sigma}_j^2$	3,2508	1,7561	1,1294	0,3196	0,4619	0,2940	0,5553	0,2163	0,0843	

Tabela 10: Ocenjeni razvojni faktorji in variance zavarovanja kopenskih vozil

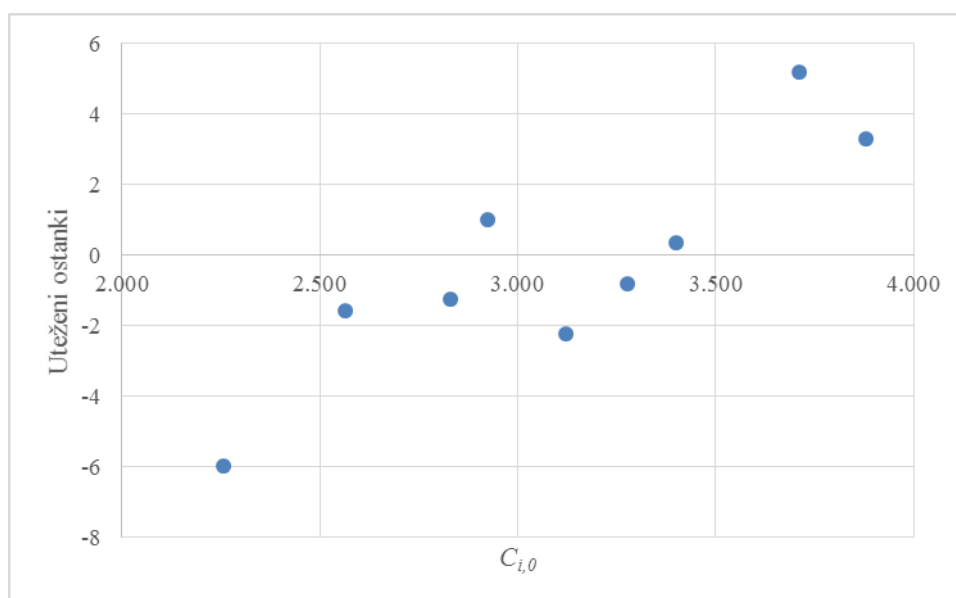
Ocenjeni razvojni faktorji in variance	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
\hat{f}_j	1,3681	1,0125	1,0036	1,0021	1,0014	1,0015	1,0005	1,0002	1,0011	
$\hat{\sigma}_j^2$	6,7281	0,7359	0,3684	0,3464	0,1287	0,1638	0,1109	0,0221	0,0044	

V prejšnjem poglavju smo grafično preverjali ali je linearnost razvojnih faktorjev ustrezna predpostavka glede na dane podatke. Podoben test bi radi konstruirali tudi za primernost cenilke variance pri izbranih podatkih. Mack (1993b, str. 122) z uporabo regresijskega modela opazi, da morajo biti variance, glede na predpostavke metode veriženja, sorazmerne $C_{i,j}$. Kot grafični test predlaga, da za razvojna leta j prikažemo utežene ostanke

$$\frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}\hat{f}_{j-1}}{\sqrt{C_{i,j-1}}}$$

glede na $C_{i,j-1}$.

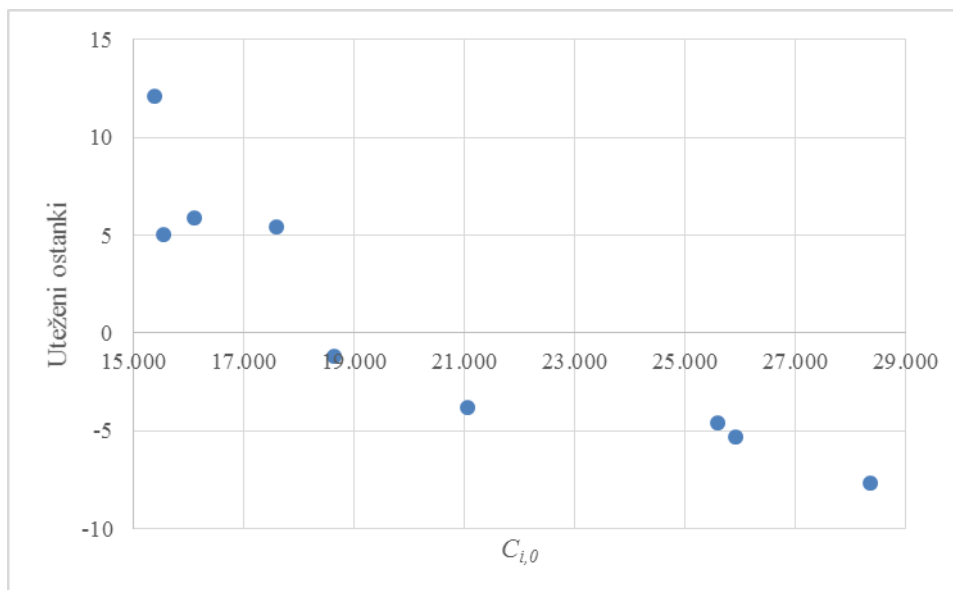
Slika 6: Uteženi ostanke razvojnega leta 0 zavarovanja avtomobilske odgovornosti glede na $C_{i,0}$



Utežene ostanke portfelja zavarovanja avtomobilske odgovornosti razvojnega leta 0 glede na $C_{i,0}$ prikazuje Slika 6. Želeli bi si čim bolj naključno in središčno porazdelitev ostankov. Naključnost drži za srednjo skupino ostankov, od nje pa odstopata prvo in zadnji dve leti nastanka škode. Na odstopanje teh treh let od predpostavke metode veriženja nas je opozorila že Slika 3. Trend naraščanja razpršenosti v zadnjih letih nastanka škode zasledimo tudi v prvem razvojnem letu (Priloga 3).

Portfelj zavarovanja kopenskih vozil na podlagi grafične analize varianc izkazuje bolj izrazit trend zmanjševanja ostankov (Slika 7). Analiza linearnosti (Slika 4) nas je opozorila, da se prva štiri leta razlikujejo od ostanka portfelja, kar lahko razberemo tudi na Sliki 7. Podobno kot Slika 4 tudi Slika 7 kaže na posebnost zadnjega leta nastanka škode. Bistveno bolj smo zadovoljni z naključno razpršenostjo ostankov prvega razvojnega leta (Priloga 4).

Slika 7: Uteženi ostanki razvojnega leta 0 zavarovanja kopenskih vozil glede na $C_{i,0}$



V okviru modela Mackove stohastične metode veriženja analizirajmo pogojno procesno napako $Var[C_{i,J} | \mathcal{D}_I]$ po posameznih letih nastanka škod. Spomnimo se, da procesna napaka predstavlja napako, ki opisuje naključnost znotraj stohastičnega modela. To izvira iz čiste naključnosti in je ne moremo odpraviti (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 34).

Tabela 11 in Tabela 12 prikazujeta pogojno procesno napako po letu nastanka škode, ki smo jo zaradi primerjave prikazali kot standardno (pogojno) procesno napako, tj.

$\sqrt{Var[C_{i,J} | \mathcal{D}_I]}$. Če jo delimo s škodno rezervacijo, dobimo variacijski količnik pogojne procesne napake.

Majhna skupna standardna procesna napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti (Tabela 11) se ujema z dejstvom, da portfelj izhaja iz velike zavarovalnice. Glede na to, da najdemo najvišje variacijske količnike v prvih letih nastanka škode, bi lahko sklepali, da zadnjih deset let ne predstavlja zadostnega prostora informacij \mathcal{D}_I s katerem bi lahko ustrezno zajeli škodni proces.

Bistveno večja je skupna standardna procesna napaka zavarovanja kopenskih vozil (Tabela 12). To smo pričakovali saj je velikost portfelja manjša v primerjavi s portfeljem

avtomobilske odgovornosti. Variacijski količniki kažejo, da je škodni proces bolje opisan v prejšnjem portfelju. Zopet opozorimo na zadnje razvojno leto. To ima izrazito nizek variacijski količnik kljub temu, da vsebuje večino standardne procesne napake. Seveda je nizek variacijski količnik zadnjega razvojnega leta posledica dejstva, da to vsebuje tudi glavnino škodne rezervacije.

Tabela 11: Standardna procesna napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Ocena končne škode po metodi veriženja	Škodna rezervacija po metodi veriženja	Standardna procesna napaka	V_{co_i} v %
1	7.670	87	7	8,4
2	8.624	271	21	7,9
3	9.201	473	58	12,3
4	9.673	772	66	8,6
5	10.482	1.203	84	7,0
6	11.371	1.838	95	5,1
7	12.435	2.933	164	5,6
8	12.656	4.869	262	5,4
9	12.660	8.673	424	4,9
Skupaj		21.119	548	2,6

Tabela 12: Standardna procesna napaka zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Ocena končne škode po metodi veriženja	Škodna rezervacija po metodi veriženja	Standardna procesna napaka	V_{co_i} v %
1	22.146	24	1	2,8
2	23.051	30	3	11,3
3	25.433	46	18	39,3
4	25.848	85	32	37,6
5	29.132	136	40	29,8
6	34.885	236	78	33,2
7	35.555	367	105	28,7
8	38.357	865	181	20,9
9	58.588	16.730	1.426	8,5
Skupaj		18.519	1.444	7,8

Napake ocene parametrov in ocene skupne napake posameznih let nastanka škode za izbrana portfelja so odvisne od načina upoštevanja prostora informacij $\mathcal{D}_{I,i}^0$. Uporabili smo pristop, ki ga je opisal Mack. Rezultate navajata Tabela 13 in Tabela 14.

Visok variacijski koeficient standardne napake prvih let nastanka škode zopet nakazuje, da škodni proces portfelja zavarovanja avtomobilske odgovornosti po desetih letih ni končan.

Tabela 13: Standardna napaka ocene parametrov in standardna srednja napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Škodna rezervacija po metodi veriženja	Standardna napaka ocene parametrov	V_{coi} standardne napake ocene parametrov v %	Standardna srednja napaka	V_{coi} standardne srednje napake v %
1	87	8	9,0	11	12,4
2	271	18	6,6	28	10,3
3	473	39	8,2	70	14,8
4	772	44	5,7	79	10,3
5	1.203	53	4,4	100	8,3
6	1.838	60	3,3	112	6,1
7	2.933	88	3,0	186	6,4
8	4.869	122	2,5	289	5,9
9	8.673	175	2,0	459	5,3
Skupaj	21.119	478	2,3	727	3,4

Tabela 14: Standardna napaka ocene parametrov in standardna srednja napaka zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Škodna rezervacija po metodi veriženja	Standardna napaka ocene parametrov	V_{coi} standardne napake ocene parametrov v %	Standardna srednja napaka	V_{coi} standardne srednje napake v %
1	24	1	2,7	1	3,9
2	30	2	8,2	4	14,0
3	46	11	24,2	21	46,1
4	85	18	20,9	37	43,0
5	136	23	16,8	46	34,3
6	236	42	17,6	89	37,6
7	367	52	14,2	118	32,1
8	865	83	9,5	199	23,0
9	16.730	683	4,1	1.581	9,5
Skupaj	18.519	735	4,0	1.621	8,8

Zadnje razvojno leto portfelja zavarovanja kopenskih vozil zopet popači rezultate analize. Podobno kot Slika 7 nam kaže na nenavadno škodno dogajanje v letu 3 in 4.

3 LOG-NORMALNI MODELI ZA KUMULATIVNE ŠKODE

3.1 Predpostavke in osnovne lastnosti log-normalnih modelov

V prejšnjem poglavju smo predstavili stohastično metodo veriženja, kot jo je opisal Mack (1993a). Spomnimo se, da smo predpostavili samo neodvisnost kumulativnih škod glede na leta nastanka škode in strukturo prvega in drugega momenta kumulativnih škod. Metoda ne predvideva porazdelitve v gibanju škod in uporablja mehanski pristop, brez možnosti vključevanja aktuarske presoje. Standardno napako ocenjene skupne višine škodne rezervacije in vsakega posameznega leta smo izračunali analitično neposredno iz podatkov (Collings & White, 2001). Enostavnost je po eni strani prednost Mackove stohastične metode, je pa hkrati tudi njena slabost, saj smo omejeni na prva dva momenta. Model moramo nadgraditi z dodatnimi predpostavkami, če ga hočemo uporabiti v npr. dinamični finančni analizi, kjer morda želimo simulirati porazdelitev višine škodnih rezervacij (England & Verall, 2002, str. 453).

Drugi pristopi k stohastičnim opisom škodnega dogajanja znotraj razvojnega trikotnika predvidevajo, da so inkrementalne škode glede na razvojna leta porazdeljene z npr. normalno, eksponentno ali log –normalno porazdelitvijo (Mack, 1994, str. 232) . Prednost tako opisanih modelov je v tem, da lahko glede na predpostavljeno porazdelitev enostavno simuliramo porazdelitveno funkcijo škodne rezervacije. Prvi pomembni korak v tej smeri je po mnenju Renshawa in Verralla (1998, str. 905) naredil Kremer (1982), ki je metodo veriženja opisal z log-normalno porazdelitvijo inkrementalnih škod. Model sta nadgradila Hertig (1985), kasneje Taylor (2000, str. 197 – 203) ter de Jong v (2004) in (2006), ki so predpostavko o porazdelitvi inkrementalnih škod nadomestili s predpostavko o log-normalni porazdelitvi zaporednih razvojnih faktorjev $F_{i,j}$. Spomnimo se, da so definirani kot razmerje kumulativnih škod zaporednih razvojnih let. Opis modela bomo povzeli po Wüthrichu in Merzu (2008, str. 167 – 182).

Predpostavke log-normalnega modela za kumulativne škode so:

1. za logaritme $\eta_{i,j}$ zaporednih razvojnih faktorjev $F_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$ velja, da so log-normalno porazdeljeni s parametroma ξ_j in σ_j^2 , natančneje

$$\eta_{i,j} = \log F_{i,j} \sim N(\xi_j, \sigma_j^2)$$

za vsak $0 \leq i \leq I$ in vsak $0 \leq j \leq J$, pri čemer je $C_{i,-1} = 1$ in $N(\xi_j, \sigma_j^2)$ normalna porazdelitev s parametroma ξ_j in σ_j^2 ;

2. slučajne spremenljivke $\eta_{i,j}$ so neodvisne za vse $0 \leq i \leq I$ in vse $0 \leq j \leq J$.

Iz definicije modela in lastnosti normalne porazdelitve izpeljemo naslednji enakosti za prva dva momenta:

$$\begin{aligned} E[F_{i,j}] &= \exp\left(\xi_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right) \\ \text{Var}[F_{i,j}] &= \exp(2\xi_j + \sigma_j^2) \exp(\sigma_j^2 - 1). \end{aligned}$$

Iz predpostavk porazdelitve zaporednih razvojnih faktorjev sledi

$$E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = C_{i,j-1} E[F_{i,j} | C_{i,j-1}] = C_{i,j-1} \exp\left(\xi_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2\right).$$

Našli smo pozitivne konstante f_{j-1} , za katere velja $E[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}$, kar pomeni, da je druga predpostavka metode veriženja izpolnjena.

Za varianco lahko izpeljemo

$$\text{Var}[C_{i,j} | C_{i,j-1}] = C_{i,j-1}^2 \text{Var}[F_{i,j} | C_{i,j-1}] = C_{i,j-1}^2 \exp(2\xi_j + \sigma_j^2).$$

Opazimo, da je varianca v log-normalnem modelu sorazmerna s $C_{i,j-1}^2$. Model zato opisuje drugačen stohastični model kot Mackova stohastična metoda veriženja. Tam smo privzeli, da je varianca sorazmerna s $C_{i,j-1}$.

Glede na prostor zbranih informacij \mathcal{D}_I definiramo cenilke $\hat{\xi}_j$ in $\hat{\sigma}_j^2$ za parametra ξ_j in σ_j^2 z

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_j &= \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} \log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right) \\ \hat{\sigma}_j^2 &= \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \left(\log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right) - \hat{\xi}_j\right)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Iz predpostavk log-normalnega modela sledi tudi

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_j &\sim N\left(\xi_j, \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) \\ \frac{I-j}{\sigma_j^2} \hat{\sigma}_j^2 &\sim \chi_{I-j}^2, \end{aligned}$$

pri čemer smo s χ_{I-j}^2 označili χ^2 – porazdelitev z $I-j$ prostostnimi stopnjami³.

³ Dokaz najdemo v (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 169).

Zaradi lastnosti logaritemske funkcije lahko model zapišemo aditivno. Definirajmo

$$Z_{i,j} = \log C_{i,j}.$$

Opazimo, da velja

$$Z_{i,J} = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \log \left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \right) = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \eta_{i,j}.$$

Upoštevamo, da je $E[N(\xi_j, \sigma_j^2)] = \xi_j$ in iz zgornje enakosti sledi

$$E[Z_{i,J} | \mathcal{D}_I] = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \xi_j.$$

Cenilko $\hat{Z}_{i,J}$ za $Z_{i,J}$ je zato smiselno definirati kot

$$\hat{Z}_{i,J} = \hat{E}[Z_{i,J} | \mathcal{D}_I] = Z_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\xi}_j.$$

Pri predpostavkah log-normalnega modela lahko za cenilko $\hat{Z}_{i,J}$ dokažemo (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 170):

1. pri danem $Z_{i,I-i}$ je $\hat{Z}_{i,J}$ nepristranska cenilka za $E[Z_{i,J} | \mathcal{D}_I] = E[Z_{i,J} | Z_{i,I-i}]$;
2. cenilka $\hat{Z}_{i,J}$ je nepristranska cenilka za $E[Z_{i,J}]$;
3. srednja pogojna napaka glede na zbrani prostor informacij \mathcal{D}_I je enaka

$$mse_{p_{Z_{i,J} | \mathcal{D}_I}}(\hat{Z}_{i,J}) = \sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2 + \left(\sum_{j=I-i+1}^J (\xi_j - \hat{\xi}_j) \right)^2;$$

4. srednja napaka je enaka

$$mse_{p_{Z_{i,J}}(\hat{Z}_{i,J})} = mse_{p_{Z_{i,J} | Z_{i,I-i}}(\hat{Z}_{i,J})} = \sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2 \left(1 + \frac{1}{I-j+1} \right)^2.$$

Zaradi aditivnosti modela, se členi $Z_{i,I-i} = \log(C_{i,I-i})$ v oceni napake odštejejo, kar zopet kaže, da log-normalni in Mackov model opisujeta različna stohastična modela.

3.2 Log-normalni model pri poznanih variancah

V tem podpoglavju privzemamo, da so variance $\sigma_0^2, \dots, \sigma_J^2$ poznane. Seveda lahko uporabimo njihove cenilke, lahko pa jih določimo preko tržnih podatkov, aktuarske presoje ali rezultatov simulacij. Izpeljemo lahko

$$\begin{aligned}
 E[C_{i,J} | C_{i,I-i}] &= E[\exp(Z_{i,J}) | C_{i,I-i}] \\
 &= \exp(Z_{i,I-i}) \exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \xi_j + \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{2}\right) \\
 &= C_{i,I-i} \exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \xi_j + \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Podobno ocenimo

$$\begin{aligned}
 E[\exp(\hat{Z}_{i,J}) | C_{i,I-i}] &= \exp(Z_{i,I-i}) E\left[\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \hat{\xi}_j\right)\right] \\
 &= C_{i,I-i} \exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \xi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right).
 \end{aligned}$$

Iz zgornjih enačb sledi, da je za oceno končne škode posameznega leta nastanka i smiselno definirati cenilko

$$\hat{C}_{i,J}^{LN} = \hat{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = \exp\left(\hat{Z}_{i,J} + \frac{1}{2} \sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2 \left(1 - \frac{1}{I-j+1}\right)\right).$$

Za cenilko $\hat{C}_{i,J}^{LN}$ lahko ob izpolnjenih predpostavkah log-normalnega modela dokažemo (Wüthrich & Mertzt, 2008, str. 172):

1. pri danem $C_{i,I-i}$ je $\hat{C}_{i,J}^{LN}$ pogojna nepristranska cenilka za $E[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = E[C_{i,J} | C_{i,I-i}]$;
2. cenilka $\hat{C}_{i,J}^{LN}$ je nepristranska za $E[C_{i,J}]$;
3. srednja pogojna napake je enaka

$$\begin{aligned}
msep_{C_{i,J} | C_{I-i}}(\hat{C}_{i,J}^{LN}) &= (E[C_{i,J} | C_{I-i}])^2 \cdot \\
&\cdot \left(\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2\right) + \exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) - 2 \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

V 3. točki smo srednjo pogojno napako izračunali neodvisno od $\mathcal{D}_{I,i}^0$. Če bi hoteli uporabiti vse informacije v razvojnem trikotniku, bi morali oceniti

$$\begin{aligned}
msep_{C_{i,J} | \mathcal{D}_I}(\hat{C}_{i,J}^{LN}) &= E[(C_{i,J} - \hat{C}_{i,J}^{LN})^2 | \mathcal{D}_I] \\
&= C_{i,I-i}^2 \text{Var} \left[\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \eta_{i,j}\right) \right] + (E[C_{i,J} | C_{I-i}] - \hat{C}_{i,J}^{LN})^2.
\end{aligned}$$

Iz točke 3 izpeljemo, da je procesna napaka enaka

$$\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2\right) - 1,$$

napaka ocene parametrov pa

$$\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) - 1.$$

Cenilko za srednjo pogojno napako vsote let nastanka škode definirajmo kot

$$\begin{aligned}
\widehat{msep}_{\sum_i C_{i,J} | \cdot} \left(\sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,J}^{LN} \right) &= \sum_{i=1}^I msep_{C_{i,J} | \mathcal{D}_I}(\hat{C}_{i,J}^{LN}) + \\
&+ 2 \sum_{1 \leq i < k \leq I} E[C_{i,J} | C_{I-i}] E[C_{k,J} | C_{I-k}] \left(\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) - 1 \right).
\end{aligned}$$

V zgornji oceni smo pogoj zapisali z »|«, saj je diagonala trikotnika C_{I-i} hkrati tudi slučajna spremenljivka v oceni $\hat{\xi}_{I-i}$.

3.3 Log-normalni model pri nepoznatih variancah

Ocenjene ali izbrane vrednosti skoraj gotovo niso enake pravim vrednostim. Vseeno pa je cenilka $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ uporabna, saj za razliko od Mackove metode le-ta omogoča fleksibilnost pri izbiri parametrov in enostavno uporabo v simulacijah. Vseeno bi radi našli način, kako bi zajeli negotovost pri izbiri varianc.

Definirajmo slučajno spremenljivko W , ki je porazdeljena s χ^2 porazdelitvijo s p prostostnimi stopnjami. Torej je porazdeljena z $\Gamma(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$ in ima momentno funkcijo $E[\exp(uW)] = (1 - 2u)^{-\frac{p}{2}}$ za $u < \frac{1}{2}$. Spomnimo se, da je $\frac{l-j}{\sigma_j^2} \hat{\sigma}_j^2$ porazdeljena z χ_{l-j}^2 porazdelitvijo. Definirajmo $u = \frac{t\sigma_j^2}{l-j}$ in $W = \frac{l-j}{\sigma_j^2} \hat{\sigma}_j^2$. Sledi, da za vse $\frac{t\sigma_j^2}{l-j} < \frac{1}{2}$ lahko definiramo:

$$E[\exp(uW)] = E[\exp(t\hat{\sigma}_j^2)] = \left(1 - \frac{2t\sigma_j^2}{l-j}\right)^{-\frac{l-j}{2}}.$$

Zaradi definicije cenilke $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ izberimo tak t , da bo veljalo:

$$\left(1 - \frac{2t\sigma_j^2}{l-j}\right)^{-\frac{l-j}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_j^2\left(1 - \frac{1}{l-j+1}\right)\right),$$

iz česar sledi, da je

$$t = \frac{l-j}{2\sigma_j^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sigma_j^2}{(l-j)}\left(1 - \frac{1}{l-j+1}\right)\right)\right).$$

Iz poenostavitve enačbe smiselno definiramo funkcijo $t_j(\sigma_j^2) < 1$ kot

$$t_j(\sigma_j^2) = \frac{l-j}{\sigma_j^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sigma_j^2}{l-j+1}\right)\right). \quad (6)$$

Kljub temu, da ne poznamo $t_j(\sigma_j^2)$, saj ne poznamo σ_j^2 , definirajmo naslednjo cenilko za log-normalni model pri neznanih variancah:

$$\hat{C}_{i,J}^{NV_1} = \hat{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = \exp\left(\hat{Z}_{i,J} + \frac{1}{2} \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\sigma}_j^2 t_j(\sigma_j^2)\right).$$

Izkaže se (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 178), da za cenilko $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$ pri predpostavkah log-normalnega modela in dodatni predpostavki, da poznamo vse $t_j(\sigma_j^2) < 1$, kjer $0 \leq j \leq J$, velja:

1. pri danem $C_{i,I-i}$ je $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$ pogojno nepristranska za cenilka za $E[C_{i,J} | C_{i,I-i}] = E[C_{i,J} | \mathcal{D}_I]$;
2. cenilka $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$ je nepristranska za $E[C_{i,J}]$.

Cenilke $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$ še vedno ne moremo izračunati neposredno iz podatkov, saj ne poznamo varianc v funkciji $t_j(\sigma_j^2)$. Lahko pa ocenimo $t_j(\hat{\sigma}_j^2)$ in za $1 \leq i \leq I$ definiramo naslednji operator

$$\hat{C}_{i,J}^{NV_2} = \hat{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = \exp\left(\hat{Z}_{i,J} + \frac{1}{2} \sum_{j=I-i+1}^J \hat{\sigma}_j^2 \left(1 - \frac{1}{I-j+1}\right)\right).$$

Wüthrich in Mertz (2008, str. 179) pokažeta, da velja

$$E[\hat{C}_{i,J}^{NV_2} | C_{i,I-i}] \rightarrow E[C_{i,J} | C_{i,I-i}],$$

ko $I \rightarrow \infty$. To pomeni, da cenilka $\hat{C}_{i,J}^{NV_2}$ ni več pogojno nepristranska ampak asimptotsko pogojno nepristranska za $E[C_{i,J} | C_{i,I-i}]$. Pri dovolj velikem številu let nastanka škode lahko zato cenilko $\hat{C}_{i,J}^{NV_2}$ smatramo za dober približek cenilke $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$.

Določimo še srednjo pogojno napako cenilke $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$ posameznega leta škode. Pri predpostavkah log-normalnega modela, neznanih variancah σ_j^2 , toda znanih $t_j(\sigma_j^2) < 1$ za vse j , lahko srednjo pogojno napako glede na $C_{i,I-i}$ izračunamo kot (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 179 – 181):

$$mse_{p_{C_{i,J} | C_{i,I-i}}}(\hat{C}_{i,J}^{NV_1}) = (E[C_{i,J} | C_{i,I-i}])^2 \left(\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \sigma_j^2\right) - 2 + \right.$$

$$\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \left(\sigma_j^2 \left(\frac{2}{I-j+1} - 1\right) - \frac{I-j}{2} \log\left(1 - \frac{2\sigma_j^2 t_j(\sigma_j^2)}{I-j}\right)\right)\right). \quad (7)$$

Primerjava enačbe (7) in enačbe (5) pokaže razliko med stohastičnima modeloma pri poznanih in nepoznanih variancah. Ocena napake parametrov cenilke $\hat{C}_{i,J}^{LN}$ se je iz

$$\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{I-j+1}\right) - 1.$$

spremenila v oceno napake parametrov cenilke $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$

$$\exp\left(\sum_{j=I-i+1}^J \left(\sigma_j^2 \left(\frac{2}{I-j+1} - 1\right) - \frac{I-j}{2} \log\left(1 - \frac{2\sigma_j^2 t_j(\sigma_j^2)}{I-j}\right)\right)\right) - 1.$$

Sprememba ocene napake parametrov log-normalnega modela pri nepoznanih variancah je posledica dejstva, da so ocene σ_j^2 negotove.

V tem poglavju opisani stohastični model privzema log-normalno porazdelitev zaporednih razvojnih faktorjev $F_{i,j}$ in na ta način opiše škodni proces portfelja. Privzem družine porazdelitev v definiciji log-normalnega modela nam omogoča prilagodljivost v opisu razvoja škodnega trikotnika. Mackova stohastična metoda veriženja, ki smo jo opisali v prejšnjem poglavju, sicer vzpostavlja statistični okvir, s katerim lahko ocenimo napako višine škodne rezervacije in primernost predpostavk glede na podatke, ne ponuja pa nam enostavnega vpliva na model, saj sta oba momenta enolično določena z razvojnim trikotnikom.

Z dodatno predpostavko o log-normalni porazdelitvi v opisu škodnega procesa definiramo stohastični model, ki nam omogoča prilagodljivost v modeliranju. Omogoča nam izbiro v oceni drugega momenta in vpliv izbire tudi oceni. V prvem log-normalnem modelu privzamemo, da so variance poznane in izpeljemo lastnosti cenilke $\hat{C}_{i,J}^{LN}$. Model nadgradimo s cenilko $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$, ki upošteva, da ocenjene ali privzete variance niso poznane in to negotovost izrazi v drugače ocenjeni napaki izračuna parametrov.

Opišemo lahko tudi stohastični model, ki temelji, podobno kot Mackova stohastična metoda veriženja, samo na ocenah iz razvojnega trikotnika. Cenilko $\hat{C}_{i,J}^{NV_2}$ definirajo parametri, ki jih iz podatkov ocenimo preko enačbe (3). Zanj velja, da je pri dovolj velikih portfeljih dober približek cenilke $\hat{C}_{i,J}^{NV_1}$, saj je asimptotsko pogojno nepristranska za $E[C_{i,J} | C_{i,I-i}]$.

3.4 Uporaba log-normalnih modelov na izbranih portfeljih

Za testiranje, kako dobro portfelja ustrezata predpostavkam log-normalnega modela, uporabimo postopek, kot ga je opisal de Jong (2004). Definirajmo (normalizirani) ostanek

$$\frac{\eta_{i,j} - \xi_j}{\hat{\sigma}_j} \quad (8)$$

Iz definicije $\eta_{i,j}$ lahko pričakujemo, da so ostanki porazdeljeni približno standardno normalno. Tabela 15 in Tabela 16 navajata ostanke zavarovanja obeh portfeljev.

Tabela 15: Ostanke zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-1,9925	-0,5677	-0,1558	0,0710	1,0093	-0,5483	1,1362	0,7071	0,0000
1	-0,3657	-1,1163	-0,8343	0,4810	-0,8478	-0,4512	-0,7464	-0,7071	
2	-0,2479	-0,8356	-0,0463	-1,3195	-0,2764	-0,4994	-0,3897		
3	0,4484	0,2654	-1,3827	-1,0635	-0,9865	1,4988			
4	-0,5166	-0,8425	0,5428	0,5874	1,1014				
5	-0,0861	0,6590	0,1285	1,2436					
6	0,2427	1,7422	1,7478						
7	1,5145	0,6954							
8	1,0033								

Pri portfelju zavarovanja avtomobilske odgovornosti (Tabela 15) izstopata leto nastanka škode 0 (vrednost -1,9925) in 6 (vrednosti 1,7422 in 1,7478). Po predpostavkah log-normalnega modela bi take vrednosti pričakovali samo v 2 % oz. 4 % primerih. Prva vrednost sicer pripada razvojnemu letu 0 nastanka škode 0, ki seveda ni reprezentativno za škodni proces dolgorepe zavarovalne vrste.

Tudi pri zavarovanju kopenskih vozil odstopata dve leti nastanka škode: 2 in 3. Pred uporabo log-normalnega modela je pametno raziskati, kaj se je zgodilo v teh dveh letih, če seveda imamo to možnost.

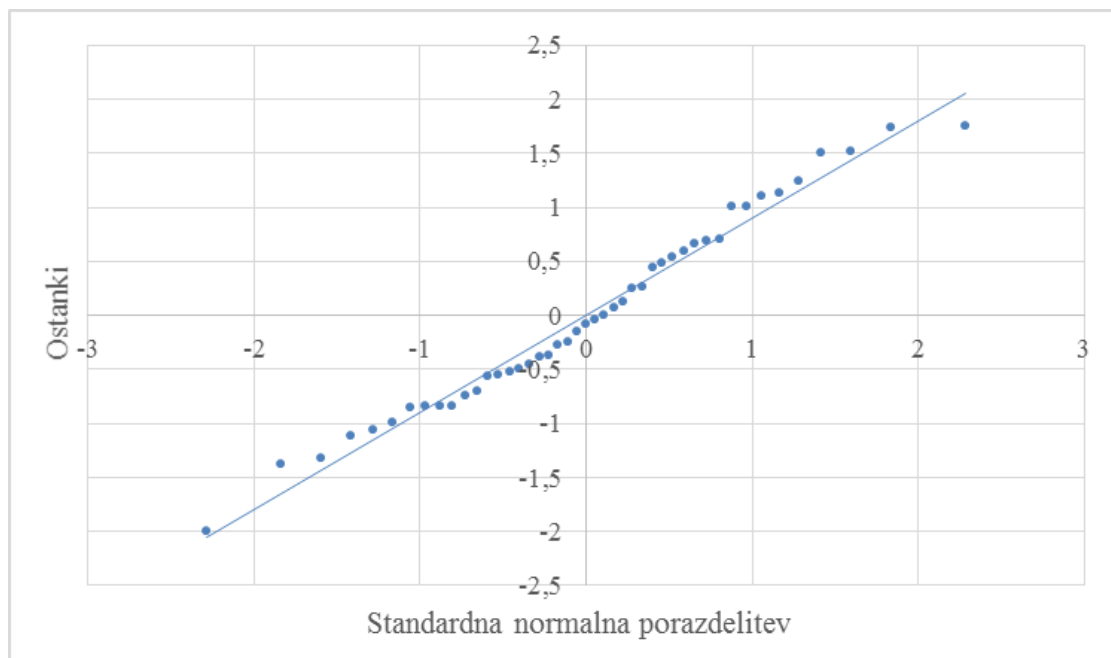
V naslednjem koraku grafično preverimo, kako dobro se ostanki v vsem razvojnem trikotniku ujemajo s standardno normalno porazdelitvijo. Na Sliki 8 in Sliki 9 smo prikazali kvantile ostankov glede na kvantile standardne normalne porazdelitve in jim prilagodili trendno črto.

Portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti se dobro ujema (Slika 8) s simetralo lihih kvadrantov. Trendna črta je sicer bolj položna od simetrane, kar pove, da so ostanki manj razpršeni od pričakovanj. S pregledom ostankov po letih nastanka škode smo ugotovili iz kje lahko odstopanje izhaja. Manj smo zadovoljni z oceno normalnosti ostankov zavarovanja kopenskih vozil (Slika 9), saj so odstopanja od premice bistveno večja.

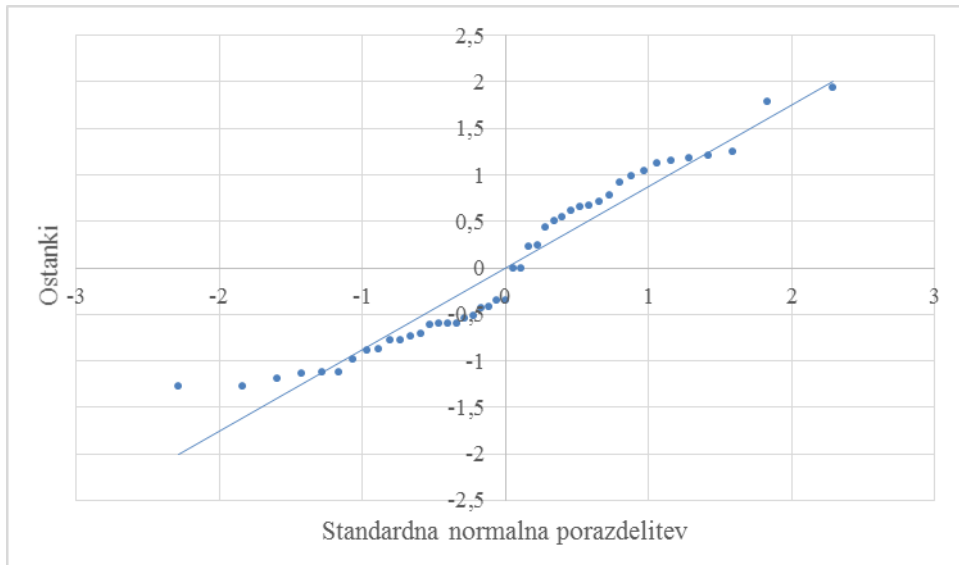
Tabela 16: Ostanki zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,7757	-0,0030	0,6139	-0,6006	0,4378	1,2472	1,1542	0,7071	0,0000
1	0,6539	-1,2722	-1,2821	-0,5217	0,5437	-1,1244	-0,6057	-0,7071	
2	1,7862	1,2123	-1,1979	-0,6172	-1,1264	0,2324	-0,5486		
3	0,6667	-0,4206	1,0412	1,9324	-0,9844	-0,3552			
4	-0,3556	-0,8844	0,5064	-0,4381	1,1292				
5	-0,7318	1,1724	0,9185	0,2452					
6	-0,7826	-0,7852	-0,6001						
7	-0,8712	0,9806							
8	-1,1413								

Slika 8: Verjetnostni grafikon ostankov in standardne normalne porazdelitve zavarovanja avtomobilske odgovornosti

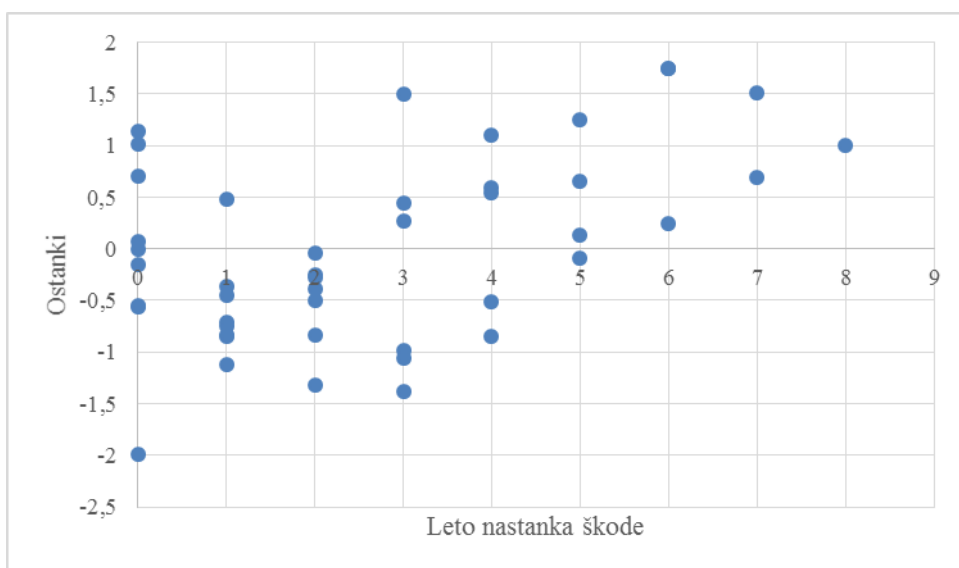


Slika 9: Verjetnostni grafikon ostankov in standardne normalne porazdelitve zavarovanja kopenskih vozil



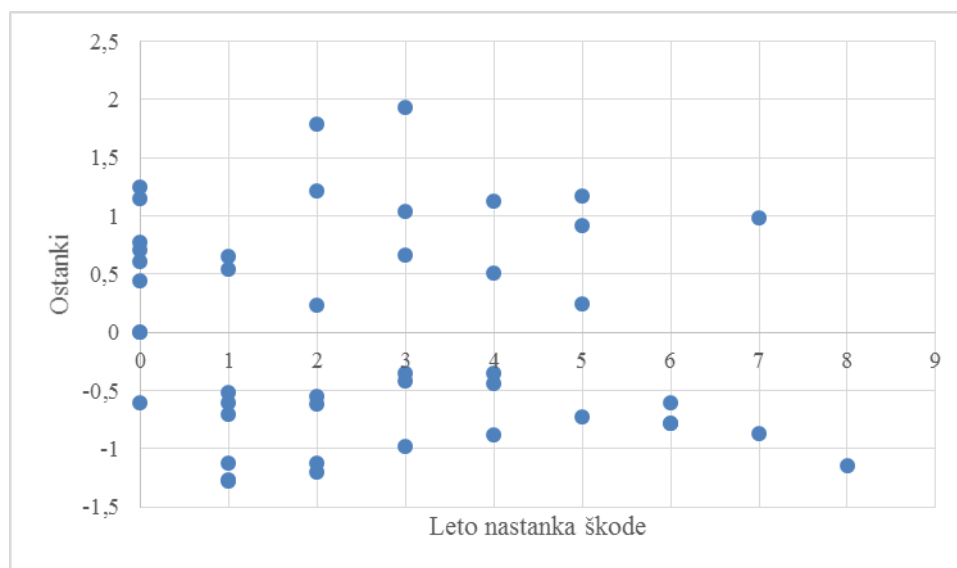
Zanimivi so tudi grafi, na katerih primerjamo ostanke glede na razvojna letih j , leta nastanka škode i in diagonale $i+j$. V kolikor se podatki dobro ujemajo s predpostavkami modela, lahko pričakujemo sredinsko in naključno razpršitev točk, brez očitnih trendov. Slika 10, na kateri smo primerjali ostanke zavarovanja avtomobilske odgovornosti po letih nastanka škode, ne izpolnjuje teh pričakovanj. V razpršitvi točk opazimo padajoč trend, ki se je obrnil v letu 3. Manj izrazit trend opazimo v razpršitvi po računovodskih letih (Priloga 6). Izstopa predvsem računovodsko leto 5, kjer so opažene vrednosti nižje od ocen. Najbolj naključno razpršenost opazimo, če ostanke prikažemo glede na razvojna leta (Priloga 5).

Slika 10: Porazdelitev ostankov po letih nastanka škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti



Na Sliki 11 smo prikazali ostanke zavarovanja kopenskih vozil po razvojnih letih. Največjo razpršenost tudi pri tem testu opazimo v letih 2 in 3, v splošnem pa smo z naključnostjo točk bolj zadovoljni kot pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti. Višja razpršenost v primerjavi s prejšnjim portfeljem je sicer pričakovana, saj je portfelj zavarovanja kopenskih vozil približno desetkrat manjši. Tudi prikaza ostankov po razvojnih (Priloga 7) in računovodskih letih (Priloga 8) sta bolj razpršena kot pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti.

Slika 11: Porazdelitev ostankov po letih nastanka škode zavarovanja kopenskih vozil



Parametra $\hat{\xi}_j$ in $\hat{\sigma}_j$ smo ocenili po enačbah (3), parameter $t_j(\hat{\sigma}_j^2)$, ki nastopa v cenilkah log-normalnih modelov z nepoznanimi variancami, pa po enačbi (6). Za oceno $\hat{\sigma}_j$ zadnjega razvojnega leta smo uporabili oceno predzadnjega leta. Posledično sta za zadnji dve leti enaka tudi parametra $t_j(\hat{\sigma}_j^2)$. Ocene za izbrana portfelja avtomobilskih zavarovanj navajata Tabela 17 in Tabela 18.

Tabela 17: Ocenjeni parametri log-normalnih modelov zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Ocenjeni parametri	Razvojno leto j								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\xi}_j$	0,6653	0,2144	0,0918	0,0542	0,0388	0,0302	0,0213	0,0206	0,0114
$\hat{\sigma}_j$	0,0312	0,0182	0,0117	0,0034	0,0052	0,0032	0,0066	0,0025	0,0025
$t_j(\hat{\sigma}_j^2)$	0,8888	0,8750	0,8571	0,8333	0,8000	0,7500	0,6667	0,5000	0,5000

Ocene $\hat{\xi}_j$ pri obeh portfeljih kažejo podobno dinamiko kot razvojni faktorji metode veriženja (Tabela 5 in Tabela 6). Padec parametra $\hat{\xi}_j$ v prvem razvojnem letu je tudi pri log-normalnih modelih bolj izrazit pri zavarovanju kopenskih vozil. Podobno kot pri metodi veriženja opazimo nepričakovano povišanje v zadnjem razvojnem letu.

Tabela 18: Ocenjeni parametri log-normalnih modelov zavarovanja kopenskih vozil

Ocenjeni parametri	Razvojno leto j								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{\xi}_j$	0,3196	0,0123	0,0035	0,0021	0,0014	0,0015	0,0005	0,0002	0,0011
$\hat{\sigma}_j$	0,0352	0,0045	0,0023	0,0022	0,0008	0,0011	0,0007	0,0001	0,0001
$t_j(\hat{\sigma}_j^2)$	0,8888	0,8750	0,8571	0,8333	0,8000	0,7500	0,6667	0,5000	0,5000

Zadnji dve oceni se pri obeh portfeljih ujemata zaradi omejitve prikaza na štiri decimalke. Funkcija $t_j(\hat{\sigma}_j^2)$ je eksponentna, tako da razlike opazimo šele na kasnejših decimalnih mestih.

Oceno škodne rezervacije in njenih napak smo ovrednotili s cenilkama $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ in $\hat{C}_{i,j}^{NV_2}$. Za cenilko pri poznanih varianca $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ privzemamo, da so variance $\hat{\sigma}_j^2$, ki jih lahko določimo preko Tabele 17 in Tabele 18, pravilne. Spomnimo se, da smo v opisu modela pri neznanih variancah izpeljali cenilko napak posameznih razvojnih let samo za $\hat{C}_{i,j}^{NV_1}$. Pokazali pa smo, da je cenilka $\hat{C}_{i,j}^{NV_2}$ dober približek za $\hat{C}_{i,j}^{NV_1}$, saj je asimptotsko nepristranska. To opravičuje, da smo za napako $\hat{C}_{i,j}^{NV_2}$ uporabili napako cenilke $\hat{C}_{i,j}^{NV_1}$ oziroma predpostavili, da je $t_j(\sigma_j^2) = t_j(\hat{\sigma}_j^2)$. Pri teh predpostavkah je razlika med cenilkama $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ in $\hat{C}_{i,j}^{NV_2}$ samo v obravnavi ocene parametrov, kar pojasnjuje, zakaj modela za izbrana portfelja vračata identične ocene. Tabela 19 in Tabela 20 navajata rezultate log-normalnih modelov za izbrana portfelja in cenilki.

Log-normalna modela škodno rezervacijo zavarovanja avtomobilske odgovornosti (Tabela 19) ocenjujeta še nižje kot metoda veriženja. Po drugi strani je srednja standardna napaka višja, kot je po Mackovi stohastični metodi veriženja. Razliko v momentih lahko morda pojasnimo s privzeto porazdelitvijo v modelu. Log-normalna porazdelitev je primerna za opis portfeljev z debelejšim repom, vemo pa, da se škodni proces portfelja avtomobilske odgovornosti po desetih letih še ni zaključil.

Oceni višine škodne rezervacije s cenilkama log-normalnih modelov zavarovanja kopenskih vozil (Tabela 20) sta malo višji kot pri Mackovi stohastični metodi veriženja, razpršenost ocene pa je bistveno večja. Izhaja iz povečanja procesne napake, saj sta standardni napaki ocene parametrov podobni po obeh modelih. Sklepamo lahko, da sta log-normalna modela bolj občutljiva na povečanje likvidacij v zadnjem letu nastanka škod kot Mackova metoda.

Tabela 19: Škodna rezervacija in napake log-normalnih modelov zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode <i>i</i>	Ocena končne škode po log-normalnih modelih	Škodna rezervacija po log-normalnih modelih	Standardna procesna varianca	Standardna napaka ocene parametrov	Srednja standardna napaka
1	7.670	87	20	20	28
2	8.625	272	31	27	41
3	9.206	479	70	46	83
4	9.677	776	79	50	94
5	10.487	1.208	102	60	118
6	11.375	1.842	117	67	134
7	12.428	2.926	194	91	214
8	12.624	4.836	303	123	327
9	12.576	8.590	495	179	526
Skupaj		21.016	641	529	831

Tabela 20: Škodna rezervacija in napake log-normalnih modelov zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode <i>i</i>	Ocena končne škode po log-normalnih modelih	Škodna rezervacija po log-normalnih modelih	Standardna procesna varianca	Standardna napaka ocene parametrov	Srednja standardna napaka
1	22.146	24	3	3	5
2	23.051	30	5	4	6
3	25.433	46	19	12	23
4	25.848	85	34	18	39
5	29.131	135	45	23	51
6	34.882	233	94	42	103
7	35.550	362	127	53	137
8	38.346	854	219	83	234
9	58.969	17.111	2.102	703	2.217
Skupaj		18.880	2.120	756	2.251

Primerjava rezultatov modelov za izbrana portfelja se ujema z Mackovim opažanjem (1994, str. 230), da je ocena višine škodne rezervacije po log-normalnem modelu bistveno bolj razpršena, kot pri njegovem. Zehnwirth (1989, str. D1.6) po drugi strani priporoča uporabo log-normalne porazdelitve, saj je mnenja, da je logaritemska transformacija podatkov zaželeno, ker zmanjšuje heterogenost podatkov in stabilizira varianco.

4 BOOTSTRAP METODA

4.1 Opis bootstrap metode

Bootstrap metoda je način simulacije, ki izhaja iz poznane vzorca. Omogoča nam statistično sklepanje – sklepanje o populaciji na osnovi vzorca. Na metodo lahko gledamo tudi kot na statistično metodo pri kateri ocenjujemo porazdelitev vzorčnih ocen cenilk s pomočjo vzorčenja s ponavljanjem. Ime izhaja iz angleškega rekla »*to pull oneself up by one's bootstraps*«, ki naj bi izviral iz romana »Čudovite prigode barona Münchhausna« pisatelja Rudolpha Ericha Raspeja iz 18. stoletja (Efron & Tibshirani, 1994, str. 4). Metodo je prvi predstavil Efron (1979). Skupaj s Tibshiranim (1986) sta kasneje predstavila natančnejšo oceno napake vzorca z uporabo bootstrap metode. Zaradi enostavnosti je metoda postala priljubljena tudi med aktuarji.

Uporabo bootstrap metode za izračun višine škodnih rezervacij po metodi veriženja je med prvimi predstavil Lowe (1994, str. 160 – 170) po katerem povzemamo opis v tem podpoglavju. Poznani vzorec opisuje razvojni trikotnik likvidiranih škod. Te izhajajo iz naključnega razvoja portfelja v opazovanih letih nastanka škode. Trikotnik tako opisuje samo eno izmed možnosti škodnega razvoja portfelja v času. Iščemo postopek s katerim bomo preko naključnega vzorčenja s ponavljanjem opisali porazdelitveno funkcijo višine škodnih rezervacij. Iz nje bomo izračunali pričakovano višino škodne rezervacije, njeno standardno napako in druge mere, ki bi nas utegnile zanimati.

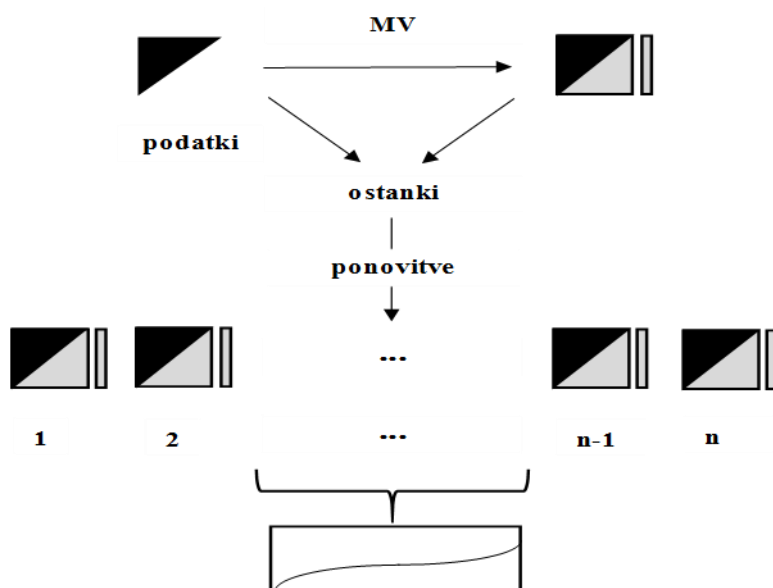
S T_X označimo izvorni trikotnik likvidiranih inkrementalnih škod, z T_C pa izvorni trikotnik kumulativnih škod. Postopek bootstrap simulacije je opisan s koraki spodaj in prikazan na Sliki 12.

1. Iz kumulativnega trikotnika T_C po metodi veriženja ocenimo razvojne faktorje f_j in izračunamo višino škodne rezervacije R . Spomnimo se, da izračun R poteka tako, da zaporedno in po vseh letih nastanka škode množimo diagonalo zadnjega računovodskega leta ($i + j = I$) s pripadajočimi razvojnimi faktorji v desno smer, dokler ne izpolnimo vsega pravokotnika.
2. Diagonalo zadnjega računovodskega leta množimo nazaj in izračunamo idealni kumulativni trikotnik T_C^I , iz njega pa idealni inkrementalni trikotnik T_X^I . Trikotnika nam prikazujeta kakšen je vzorec razvoja škod v preteklosti, kot ga predvideva metoda veriženja.
3. Od inkrementalnega trikotnika T_X po mestih odštejemo idealnega T_X^I . Dobimo trikotnik ostankov T_O . Elementi trikotnika tvorijo množico ostankov \mathcal{O} .
4. Naključno in z vračanjem izbiramo elemente iz množice ostankov \mathcal{O} in na ta način tvorimo nov trikotnik ostankov T_O^* .

5. Trikotniku T_C^* prištejemo T_X^I . Dobljeni inkrementalni bootstrap trikotnik označimo s T_X^* , kumulativnega pa s T_C^* .
6. Po metodi veriženja razvijemo T_C^* in izračunamo višino škodne rezervacije R^* .
7. Korake 4. do 6. ponavljamo n -krat.
8. Kvantilno funkcijo (tj. inverzno kumulativno porazdelitveno funkcijo) višine škodnih rezervacij dobimo tako, da iteracije R_1^*, \dots, R_n^* naraščajoče uredimo.

V 3. koraku bi lahko odšteli idealni trikotnik od izvornega inkrementalnega ter ustrezno popravili 5. korak. V primeru, ko je pričakovana vrednost ostankov 0, vrstni red operacij ni pomemben. Ostanke bi lahko definirali tudi preko kumulativnega trikotnika namesto inkrementalnega in si v iteracijah prihranili preračunavanje med T_C^* in T_X^* . Toda če hočemo opravičiti rezultate metode, moramo predpostaviti, da so ostanki neodvisni in enako porazdeljeni, kar pa je malo verjetno za ostanke izračunane na podlagi kumulativnih trikotnikov. Višine kumulativnih škod so seveda v splošnem odvisne od preteklih let (Lowe, 1994, str. 164).

Slika 12: Ponazoritev bootstrap metode



4.2 Parametrična in neparametrična bootstrap metoda

Formalizirajmo opis bootstrap metode (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 233 – 242). Recimo, da imamo n enako porazdeljenih vzorcev neznane porazdelitve F

$$Z_1, \dots, Z_n \sim F.$$

Za porazdelitev F bi radi ocenili parameter $h(F)$, na primer tvegano vrednost neznane porazdelitve. Predpostavimo, da poznamo funkcijo g , ki iz danih podatkov Z_1, \dots, Z_n oceni $h(F)$. Iščemo torej cenilko

$$\hat{\Theta}_n = g(Z_1, \dots, Z_n).$$

Na žalost ne poznamo načina, ki bi generiral porazdelitev F . Zato uporabimo empirično porazdelitev \hat{F}_n s katero generiramo nadaljnje ponovitve. Porazdelitev \hat{F}_n pripiše utež $\frac{1}{n}$ vsaki ponovitvi Z_i , iz česar generiramo nove podatke Z_1^*, \dots, Z_n^* . Ti so neodvisni in enako porazdeljeni s porazdelitvijo \hat{F}_n . Dobljenemu vektorju (Z_1^*, \dots, Z_n^*) rečemo bootstrap vzorec. Na njem uporabimo funkcijo g in tako določimo novo vrednost cenilke

$$\hat{\Theta}_n^* = g(Z_1^*, \dots, Z_n^*).$$

Postopek ponavljamo za dovolj velik n in na ta način generiramo bootstrap porazdelitev F_n^* za $\hat{\Theta}_n$.

Na porazdelitev F_n^* lahko gledamo kot na simulacijo generirano z empirično porazdelitvijo \hat{F}_n . Temu načinu uporabe metode rečemo neparametrični bootstrap. Formalno je neparametrična bootstrap porazdelitev F_n^* za cenilko $\hat{\Theta}_n^*$ pogojna porazdelitev, ki jo, glede na dane podatke Z_1, \dots, Z_n , generiramo z vnovičnim izborom neodvisnih in enako porazdeljenih podatkov

$$Z_1^*, \dots, Z_n^* \sim \hat{F}_n.$$

Na simulacijo lahko gledamo še na drug način. Recimo, da imamo dodatno informacijo o porazdelitvah Z_i . Predpostavimo, da so Z_i neodvisne in enako porazdeljene z

$$Z_1, \dots, Z_n \sim F_\Theta.$$

Porazdelitev F_Θ je sicer poznana, je pa odvisna od neznanega parametra Θ . Tega ocenimo s cenilko $\hat{\Theta}$ in oceno uporabimo v generiranju bootstrap vzorca. Korake nato ponavljamo v dovolj velikem številu. Opisani pristop imenujemo parametrični bootstrap. saj smo porazdelitev $\hat{F}_{\hat{\Theta}} = F_{\hat{\Theta}}$ določili preko ocene parametra in ne z empirično porazdelitvijo \hat{F}_n . Bootstrap porazdelitev je torej definirana z neodvisnimi in enako porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami

$$Z_1^*, \dots, Z_n^* \sim \hat{F}_{\hat{\Theta}}.$$

V podpoglavju 4.1 smo predstavili, kako vgradimo metodo veriženja v neparametrično bootstrap metodo. V tem podpoglavju pokažemo, kako vgradimo parametrično in neparametrično bootstrap metodo v log-normalni model.

Model smo opisali z neodvisnimi in enako porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami

$$\eta_{i,j} = \log F_{i,j} \sim N(\xi_j, \sigma_j^2).$$

Ocenjujemo torej vektor Θ s komponentami $\theta_j = (\xi_j, \sigma_j^2)$.

Glede na prostor informacij \mathcal{D}_I bi radi z uporabo parametričnega bootstrapa generirali porazdelitev škodne rezervacije

$$h(F) = \sum_{i+j>I} E[X_{i,j} | \mathcal{D}_I].$$

Iz enačbe (4) sledi

$$h(F) = \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \left(\exp \left(\sum_{j=I-i+1}^J \xi_j + \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sigma_j^2}{2} \right) - 1 \right).$$

Cenilki smo definirali z

$$\hat{\xi}_j = \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} \eta_{i,j}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} (\eta_{i,j} - \hat{\xi}_j)^2.$$

Iz podatkov \mathcal{D}_I lahko neposredno ocenimo samo višino končne škode po cenilki $\hat{C}_{i,J}^{NV_2}$.

Cenilka $g(\mathcal{D}_I)$ za višino škodne rezervacije je po definiciji $\hat{C}_{i,J}^{NV_2}$ enaka

$$g(\mathcal{D}_I) = \sum_{i=1}^I (\hat{C}_{i,J}^{NV_2} - C_{i,I-i})$$

$$= \sum_{i=1}^I C_{i,I-i} \left(\exp \left(\sum_{j=I-i+1}^J \hat{\xi}_j + \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\hat{\sigma}_j^2}{2} \left(1 - \frac{1}{I-j+1} \right) \right) - 1 \right).$$

V ponovitvah z ocenjenimi parametri $\hat{\xi}_j$ in $\hat{\sigma}_j^2$ generiramo nove neodvisne in enako porazdeljene vzorce

$$\eta_{i,j}^* \sim N(\hat{\xi}_j, \hat{\sigma}_j^2)$$

na podlagi katerih ocenimo novi cenilki

$$\hat{\xi}_j^* = \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} \eta_{i,j}^*$$

$$\hat{\sigma}_j^{2*} = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} (\eta_{i,j}^* - \hat{\xi}_j^*)^2.$$

in izračunamo višino škodne rezervacije $g^*(\mathcal{D}_I)$. S ponavljanjem opisanih korakov generiramo porazdelitev $g^*(\mathcal{D}_I)$.

V log-normalnem modelu lahko uporabimo tudi neparametrično bootstrap metodo. Najti moramo enako porazdeljene spremenljivke iz katerih bomo sestavili empirično porazdelitev \hat{F}_n . Definirajmo ostanke

$$D_{i,j} = \frac{\eta_{i,j} - \hat{\xi}_j}{\hat{\sigma}_j}.$$

Bootstrap porazdelitev $\hat{F}_{\mathcal{D}_I}$ nam definira množica enako porazdeljenih ostankov $\mathcal{O} = \{D_{i,j} : i+j \leq I, j \geq 1\}$. Iz nje naključno in s ponavljanjem izbiramo ostanke in iz njih sestavimo nov trikotnik

$$D_{i,j}^* \sim \hat{F}_{\mathcal{D}_I}$$

in novo

$$\eta_{i,j}^* = \hat{\sigma}_j D_{i,j}^* + \hat{\xi}_j.$$

4.3 Uporaba bootstrap metode na izbranih portfeljih

V podglavju 4.1 smo opisali postopek, kako na podlagi metode veriženja z bootstrap metodo določimo kumulativno funkcijo višine škodnih rezervacij. Množico ostankov, iz katere ob začetku posamezne ponovitve naključno izbiramo elemente bootstrap trikotnika, za zavarovanje avtomobilske odgovornosti opisuje Tabela 21.

Kvantilno funkcijo višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po omenjeni metodi pri 10.000 ponovitvah prikazuje Slika 13. Poleg porazdelitve po bootstrap metodi, smo na sliki prikazali še kvantilni funkciji normalne in log-normalne porazdelitve za parametra ocenjena iz ponovitev bootstrap metode. Kvantilne funkcije so si tako blizu, da samo pri zadnjih kvantilih opazimo pričakovano odstopanje log-normalne porazdelitve.

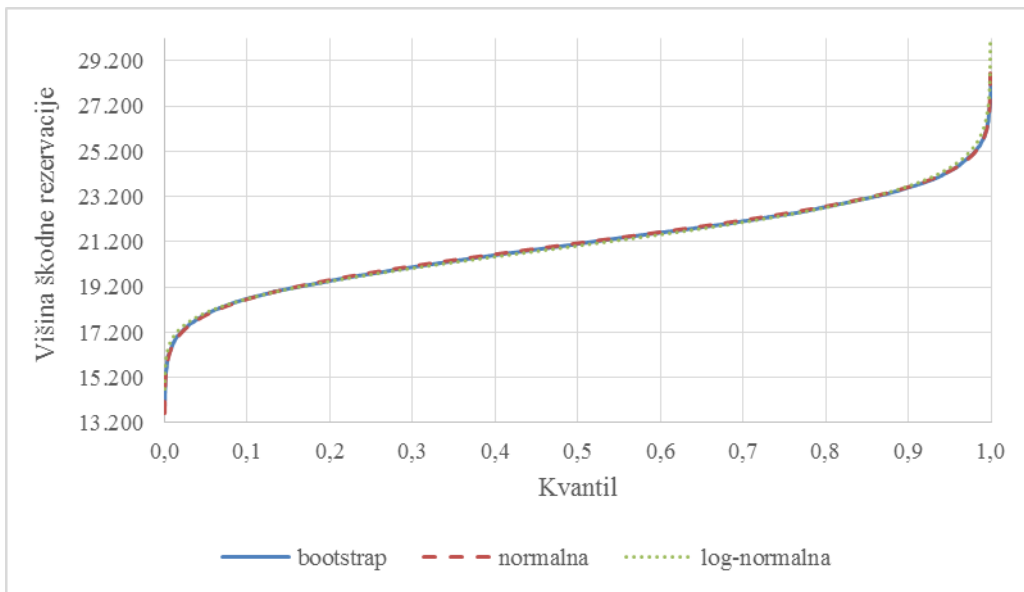
Tabela 21: Ostanke pri bootstrapu po metodi veriženja zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-149	141	62	21	3	-29	14	-50	-12	0
1	-149	-63	85	58	-14	27	10	33	12	
2	-114	-41	79	4	31	9	14	18		
3	-27	-80	-45	120	29	42	-38			
4	-77	51	122	-34	-13	-49				
5	24	69	-56	-1	-36					
6	182	153	-167	-168						
7	203	-123	-80							
8	106	-106								
9	0									

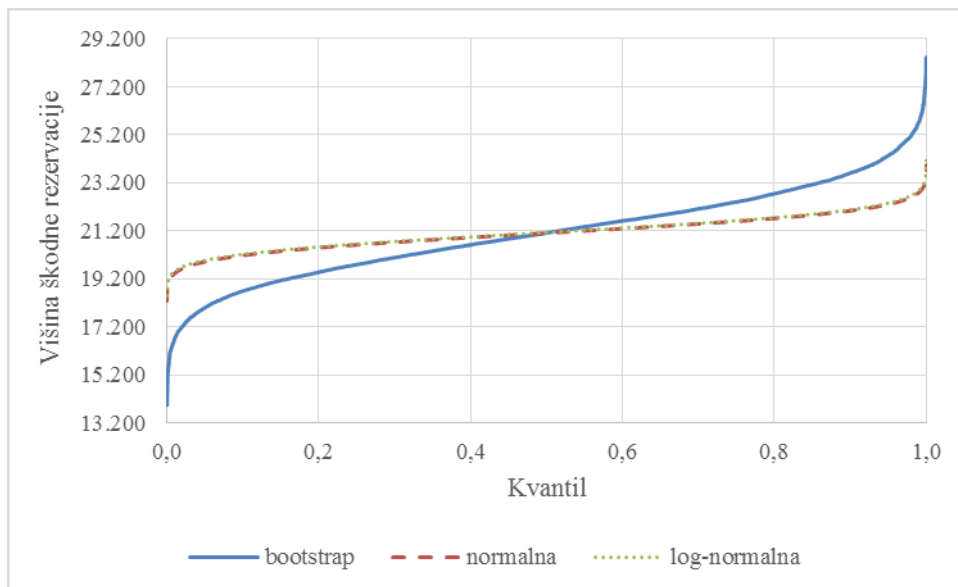
Slika 14 primerja kvantilno funkcijo bootstrap metode s kvantilnima funkcijama normalne in log-normalne porazdelitve. Za parametre smo uporabili ocenjena momenta po Mackovi stohastični metodi veriženja. Bootstrap porazdelitev je bistveno bolj razpršena kot preostali, tako da lahko pričakujemo visoko oceno napake. Podobno lahko sklepamo tudi za portfelj zavarovanja kopenskih vozil (Slika 16).

Množica ostankov zavarovanja kopenskih vozil (Tabela 22) je bistveno bolj razpršena kot pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti. Najvišji vrednosti in s tem odstopanji od napovedi metode veriženja ponovno zasledimo v drugem letu nastanka škode. Glede na visoko razpršenost bi bilo smiselno množico ostankov razdeliti na dve disjunktni množici, npr. na ostanke prvih treh razvojnih let in ostale ostanke. Postopek bi morali spremeniti samo toliko, da ob vsaki ponovitvi upoštevamo iz katere množice izbiramo ostanke, ko polnimo razvojna leta T_{\varnothing}^* .

Slika 13: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po metodi veriženja



Slika 14: Bootstrap, normalna in log-normalna (Mack) kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po metodi veriženja



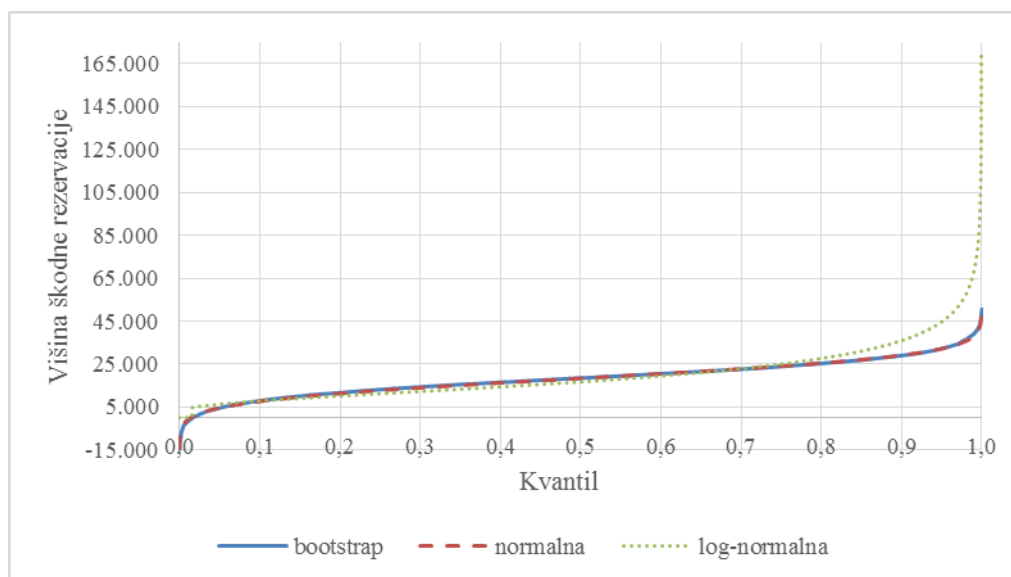
Visoka razpršenost ostankov zavarovanja kopenskih vozil je povzročila, da so med ponovitvami bootstrapa možne tudi negativne škodne rezervacije. Če je v poznem razvojnem letu trikotnika T_0^* izbran npr. največji ostanek, bo postopek na ustreznem mestu kumulativnega trikotnika T_C^* izračunal negativno kumulativno škodo. Te so sicer možne, če podatki vsebujejo npr. tudi regresirane škode. Za zavarovalno vrsto kopenskih vozil regresije niso tipični, gotovo pa ne v taki višini, da bi lahko v normalnih okoliščinah povzročili negativno škodno rezervacijo.

Tabela 22: Ostanke pri bootstrapu po metodi veriženja zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	590	-533	4	-32	32	-8	-31	-19	-2	0
1	279	-527	126	67	27	-10	27	10	2	
2	1.097	-1.099	-120	65	33	21	-6	9		
3	590	-507	52	-60	-105	21	10			
4	-174	96	104	-29	27	-24				
5	-249	466	-143	-61	-13					
6	-667	493	124	50						
7	-519	665	-147							
8	-946	946								
9	0									

Vseeno se izkaže, da je prilagojena normalna porazdelitev dober približek bootstrap porazdelitve po metodi veriženja. Prilagojena log-normalna porazdelitev zaradi izločenih negativnih vrednosti slabo opisuje škodni procesa zavarovanja kopenskih vozil.

Slika 15: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po metodi veriženja



Slika 16: Bootstrap, normalna in log-normalna (Mack) kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po metodi veriženja

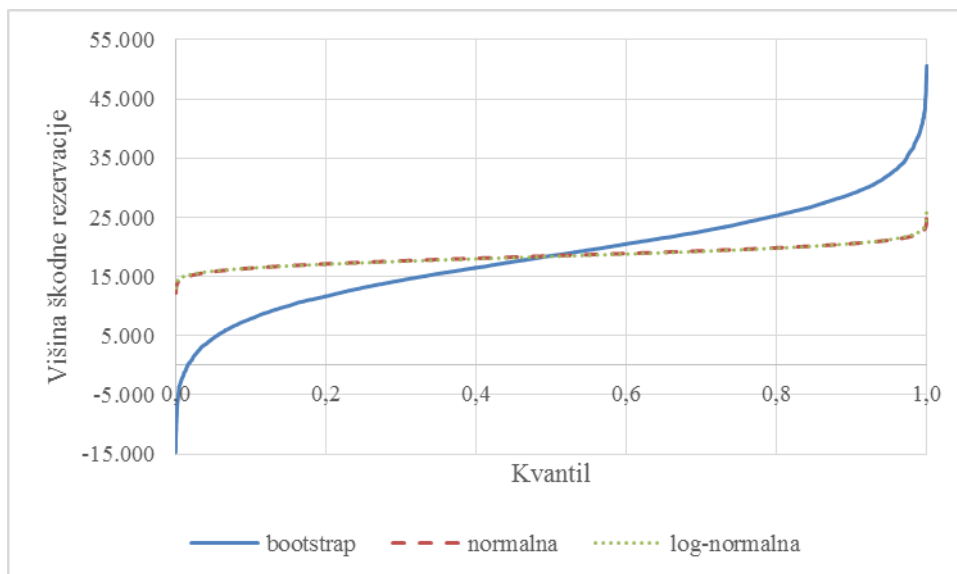


Tabela 23 navaja povprečno oceno škodne rezervacije, njeno razpršenost in primerjavo tveganih vrednosti vseh treh porazdelitev za oba portfelja. Ker je v ureditvi Solventnost 2 kapitalska zahteva kalibrirana na 99,5 % kvantil porazdelitve tveganj (CEIOPS e.V, 2010, str. 12), bomo za izbrana portfelja primerjali $\text{VaR}_{99,5\%}$ za bootstrap in izpeljane porazdelitve. Na obveznosti z opisano bootstrap metodo sicer gledamo dolgoročno in ne v enoletnem okviru, kot ga predpisuje režim Solventnost 2.

Tabela 23: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo metode veriženja

Portfelj	Povprečna višina škodne rezervacije	Standardna napaka višine škodne rezervacije	Bootstrap $\text{VaR}_{99,5\%}$	Normalna porazdelitev $\text{VaR}_{99,5\%}$	Log-normalna porazdelitev $\text{VaR}_{99,5\%}$
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	21.121	1.932	26.237	26.103	26.676
Zavarovanje kopenskih vozil	18.484	8.396	41.570	40.140	78.145

Za oba portfelja zavarovanj bootstrap metoda ocenjuje skoraj enako višino škodne rezervacije kot metoda veriženja, na kateri bootstrap metoda temelji. Tudi tvegana vrednost metode je med vrednostnima ocenjenih porazdelitev. Vseeno pa sta standardni napaki previsoki, da bi lahko zaupali rezultatom simulacije izbranih portfeljev. Napako bi morda lahko zmanjšali z razbitjem množice ostankov glede na razvojna leta.

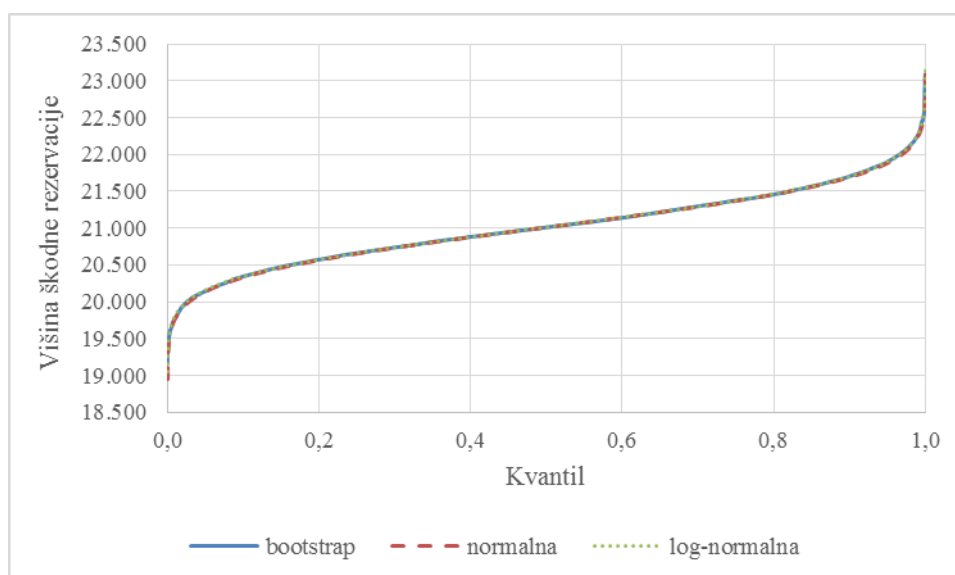
Tabela 24: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo metode veriženja in izpeljanimi porazdelitvami po Macku

Portfelj	Bootstrap VaR _{99,5%}	Normalna porazdelitev VaR _{99,5%}	Log-normalna porazdelitev VaR _{99,5%}
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	26.237	22.995	23.066
Zavarovanje kopenskih vozil	41.570	22.699	23.110

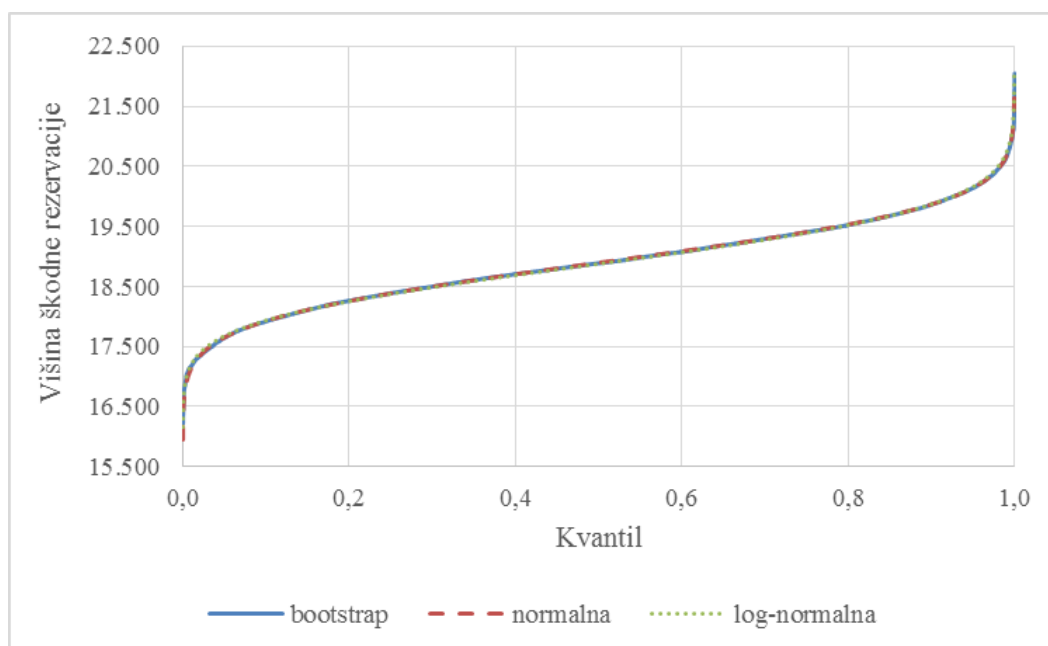
V log-normalni model lahko bootstrap metodo vgradimo na parametričen ali neparametričen način. Metodi se razlikujeta v tem, da pri neparametričnem bootstrapu izbiramo iz množice ostankov, podobno kot pri metodi veriženja, pri parametričnem pa elemente trikotnika generiramo neposredno iz predpostavljenih log-normalnih porazdelitev z ocenjenima parametroma. Zaradi identičnih rezultatov smo se pri bootstrap metodi omejili na cenilko $\hat{C}_{i,j}^{LN}$, pri čemer smo za variance uporabili ocenjene vrednosti.

Podobno kot pri metodi veriženja smo za oba log-normalna bootstrapa primerjali vse tri kvantilne funkcije na istem grafu (Slika 17 in Slika 18). Porazdelitvi parametričnega in neparametričnega bootstrapa sta si tako podobni, da prikazujemo samo parametrično inačico. Opazimo, da bi bila pri obeh portfeljih ocenjena normalna in log-normalna porazdelitev dober približek za dobljeno bootstrap porazdelitev.

Slika 17: Parametrični bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po log-normalnih modelih



Slika 18: Parametrični bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po log-normalnih modelih



V Tabeli 25 in Tabeli 26 navajamo povprečno višino škodnih rezervacij za oba portfelja glede na izbrano inačico bootstrapa log-normalnih modelov skupaj z standardno napako in tveganimi vrednostmi. Višina škodne rezervacije se dobro ujema z analitičnima modeloma, na katerih sta bila pristopa simulacij izpeljana.

Tabela 25: Mere porazdelitve parametričnega bootstrapa z uporabo log-normalnih modelov

Portfelj	Povprečna višina škodne rezervacije	Standardna napaka višine škodne rezervacije	Bootstrap VaR _{99,5%}	Normalna porazdelitev VaR _{99,5%}	Log-normalna porazdelitev VaR _{99,5%}
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	21.017	532	22.430	22.388	22.427
Zavarovanje kopenskih vozil	18.894	755	20.878	20.841	20.931

Standardno napako bootstrap porazdelitve po log-normalnih modelih moramo primerjati z oceno napake parametrov cenilke $\hat{C}_{i,j}^{LN}$ (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 238). Opazimo, da je za parametrični bootstrap ocena napake (Tabela 25 in Tabela 26) nižja kot v analitičnem modelu, za neparametrično različico pa je napaka na isti ravni kot napaka ocene parametrov cenilke $\hat{C}_{i,j}^{LN}$. Tvegane vrednosti neparametričnega bootstrapa so za oba portfelja nižje pri

neparametričnem bootstrapu. Vseeno bolj zaupamo repu parametrične bootstrap porazdelitve, ker so ostanki manj razpršeni kot predvideva model (Slika 8 in Slika 9).

Tabela 26: Mere porazdelitve neparametričnega bootstrapa z uporabo log-normalnih modelov

Portfelj	Povprečna višina škodne rezervacije	Standardna napaka višine škodne rezervacije	Bootstrap VaR _{99,5%}	Normalna porazdelitev VaR _{99,5%}	Log-normalna porazdelitev VaR _{99,5%}
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	21.023	479	22.314	22.259	22.290
Zavarovanje kopenskih vozil	18.873	688	20.678	20.647	20.717

5 PRIMER UPORABE POSPLOŠENIH LINEARNIH MODELOV NA INKREMENTALNIH ŠKODAH

5.1 Predstavitev posplošenih linearnih modelov

Posplošeni linearni modeli so učinkovito statistično orodje s katerim modeliramo slučajne spremenljivke, ki so odvisne od porazdelitev. Modeli definirajo okvir, s katerim lahko preučimo kaj vpliva na izid modela in vplive ovrednotimo (International Actuarial Association, 2010, str. II-61).

V tem podpoglavju definiramo strukturo in osnovne lastnosti modelov, ne spuščamo pa se v podrobnejšo obravnavo. Naš namen je predstaviti posplošene linearne modele v tolikšni meri, da lahko v njegovem okviru opišemo naslednje podpoglavje. Opis povzamemo po Dobson (2002, str. 50 – 57).

Na začetku definirajmo družino eksponentnih porazdelitev. Privzemimo, da je slučajna spremenljivka Y odvisna samo od parametra θ . Spremenljivka Y po definiciji pripada družini eksponentnih porazdelitev, če lahko njeno gostoto zapišemo v obliki

$$f(y; \theta) = \exp(a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)), \quad (9)$$

kjer so a, b, c in d znane funkcije.

V prejšnjih poglavjih smo uporabljali normalno in log-normalno porazdelitev. Obe pripadata družini eksponentnih porazdelitev. Pripada ji tudi Poissonova porazdelitev, ki jo uporabljamo v tem poglavju. Njena gostota je

$$f(y, \theta) = \frac{\theta^y e^{-\theta}}{y!} = \exp(y \log(\theta) - \theta - \log(y!)),$$

kjer $y \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Najpogosteje jo uporabljamo za opis števila ponovitev dogodka v časovnem obdobju, pri čemer privzamemo, da je verjetnost dogodka majhna v kratkem časovnem obdobju. Poissonovo porazdelitev uporablja tudi Švicarski test solventnosti.

Posplošeni linearni model opisujejo neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke Y_1, \dots, Y_N . Za njih predpostavimo, da pripadajo isti članici družine eksponentnih porazdelitev, npr. Poissonovi s parametri $\theta_1, \dots, \theta_N$. Predpostavimo še, da njihovo gostoto lahko zapišemo kot

$$f(y_i; \theta_i) = \exp(y_i b(\theta_i) + c(\theta_i) + d(y_i)).$$

Zanima nas vektor parametrov $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \dots \beta_p]^T$, kjer je $p < N$. Predpostavimo da za upanje velja $E[Y_i] = \mu_i$, kjer so μ_i funkcije parametrov θ_i . Za definicijo posplošenih linearnih modelih potrebujemo še monotono diferenciable funkcijo g , za katero velja

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}.$$

Funkciji g rečemo vezna funkcija, $1 \times p$ vektorjem

$$\mathbf{x}_i = [x_{i1} \dots x_{ip}]^T$$

pa pojasnjevalna spremenljivka. Vektor \mathbf{x}_i predstavlja i -ti stolpec pojasnjevalne matrike \mathbf{X} .

Posplošeni linearni model je sestavljen iz treh komponent:

1. pojasnjevalnih spremenljivk Y_1, \dots, Y_N , ki so neodvisne in porazdeljene z isto porazdelitvijo iz družine eksponentnih porazdelitev;
2. množice vektorjev \mathbf{x}_i in $\boldsymbol{\beta}$;
3. vezne funkcije

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta},$$

za katero velja $E[Y_i] = \mu_i$.

5.2 Opis bootstrap metode v prerazpršenem Poissonovem modelu

Doslej predstavljena modela, Mackova stohastična metoda veriženja in log-normalni model sta bila definirana preko predpostavk o lastnostih kumulativnih škod. Na njuni podlagi smo preko bootstrap metode ocenili porazdelitvene funkcije. Opazili smo, da so bile porazdelitvene funkcije dobljene z bootstrap metodo manj razpršene v log-normalnem modelu kot z metodo veriženja.

Prednost log-normalnega modela je bila v tem, da nam je omogočil parametrični bootstrap – simulacijo na podlagi predpostavke o porazdelitvi kumulativnih škod. Slabost modela je v tem, da ocena višine škodne rezervacije ni ista kot pri metodi veriženja. Ta se še vedno smatra za standardno deterministično metodo, tako da težko primerjamo in ocenimo ustreznost dobljenih rezultatov bootstrap metode z uporabo log-normalne porazdelitve. V tem podpoglavju bomo predstavili model, ki ima dobre lastnosti log-normalnega modela in hkrati ocenjuje škodne rezervacije v isti višini kot metoda veriženja.

Eden izmed modelov (Mack, 1994, str. 232), ki ocenjuje škodno rezervacijo v isti višini kot metoda veriženja, je prerazpršeni Poissonov model (ang. *Over dispersed Poisson model*, v nadaljevanju ODP model). V stohastični obliki sta ga predstavila Renshaw in Verrall (1998, str. 906). ODP model je definiran z naslednjimi predpostavkami (zaradi enovitosti bomo ohranili notacijo Wüthricha in Merza):

1. obstajajo taki pozitivni parametri $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$, $\gamma_0, \dots, \gamma_J > 0$ in $\phi > 0$, da so inkrementalne škode $X_{i,j}$ za vse $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$ neodvisne ter porazdeljene s prerazpršeno Poissonovo porazdelitvijo

$$E[X_{i,j}] = x_{i,j} = \mu_i \gamma_j$$

in

$$Var[X_{i,j}] = \phi x_{i,j};$$

2. za parametre γ_j dodatno velja $\sum_{j=0}^J \gamma_j = 1$.

Parameter μ_i predstavlja pričakovano končno škodo leta nastanka škode i , parameter γ_j pa delež končne škode, ki odpade na razvojno leto j . Predpostavka $\gamma_0, \dots, \gamma_J > 0$ je potrebna, ker γ_j nastopajo v definiciji variance. Toda to pomeni, da mora biti vsota inkrementalnih škod stolpca j razvojnega trikotnika pozitivna, kar je omejitev modela v primerjavi z metodo veriženja. Vseeno so negativne inkrementalne škode dovoljene, vsaj dokler je vsota vsakega stolpca pozitivna (England & Verall, 2002, str. 450).

Poissonovo porazdelitev parameter ϕ posplošuje v prerazpršeno Poissonovo porazdelitev. Varianca in upanje Poissonove porazdelitve sta namreč enaki, kar je pogosto preveč močna predpostavka za opazovane podatke.

Po metodi največjega verjetja ocenimo parametre glede na \mathcal{D}_I in izpeljemo, da so cenilke $\hat{\mu}_i$ in $\hat{\gamma}_j$ rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{I-i} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j &= \sum_{j=0}^{I-i} X_{i,j} = C_{I,I-i} \\ \sum_{j=0}^{I-j} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j &= \sum_{j=0}^{I-j} X_{i,j} \end{aligned} \quad (10)$$

za vse $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$, pri čemer upoštevamo omejitve $\sum_{j=0}^J \hat{\gamma}_j = 1$ (Wüthrich & Mertz, 2008, str. 26). Cenilko inkrementalne škode in končne škode posameznega leta nastanka škode je tako smiselno definirati kot

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,j}^{ODP} &= \hat{E}[X_{i,j}] = \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j \\ \hat{C}_{i,J}^{ODP} &= \hat{E}[C_{i,J} | \mathcal{D}_I] = C_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \hat{X}_{i,j}^{ODP} = \hat{\mu}_i. \end{aligned}$$

Presenetljiva lastnost ODP cenilke je, da je ocenjena višina končne škode $C_{i,J}$ (in s tem tudi škodne rezervacije) ista kot pri metodi veriženja, oz.

$$\hat{C}_{i,J}^{ODP} = \hat{C}_{i,J}^{MV}.$$

Metoda največjega verjetja, po kateri smo določili cenilki $\hat{\mu}_i$ in $\hat{\gamma}_j$, je zato samo ena izmed možnosti za izračun razvojnih faktorjev \hat{f}_j metode veriženja (Verall, 2000, str. 98).

Po Verrallu (1994, str. 397 – 407) ter Englandu in Verralu (1999, str. 284 – 285) povzemimo, kako ODP model opišemo kot posplošeni linearni model in izpeljimo oceno srednje napake.

1. Inkrementalne škode so neodvisne $X_{i,j}$ in porazdeljene prerazpršeno Poissonovo z

$$\begin{aligned} E[X_{i,j}] &= x_{i,j} \\ Var[X_{i,j}] &= \phi E[X_{i,j}] = \phi x_{i,j}, \end{aligned}$$

kjer $\phi > 0$.

2. Vezna funkcija je $\log(x_{i,j}) = \eta_{i,j}$, kjer $\eta_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j$. Predpostavimo še, da sta $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
3. Vsota inkrementalnih škod $\sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \geq 0$ za vsako razvojno leto j .

Točka 3. v opisu posplošenega linearnega modela se ujema z zahtevo prvotnega opisa ODP modela. Renshaw in Verrall (1998, str. 915) sta pokazala, da lahko z maksimiranjem kvazi logaritmične funkcije verjetja določimo cenilke parametrov kljub negativnim inkrementalnim škodam, dokler je vsota vsakega stolpca razvojnega trikotnika nenegativna.

V okviru posplošenega linearnega izpeljimo pogojno srednjo napako cenilke. Najprej opazimo, da za ODP model velja približek

$$mse_{p_{X_{i,j}}}(\hat{X}_{i,j}^{ODP}) = E \left[(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}^{ODP})^2 \right] \cong Var[X_{i,j}] + Var[\hat{X}_{i,j}^{ODP}].$$

Vemo, da je $Var[X_{i,j}] = \phi x_{i,j}$ in $\hat{X}_{i,j}^{ODP} = e^{\eta_{i,j}}$. Ocenimo lahko, da je

$$Var[\hat{X}_{i,j}^{ODP}] \cong \left| \frac{\partial x_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} \right|^2 Var[\eta_{i,j}],$$

kar nam da oceno

$$mse_{p_{X_{i,j}}}(\hat{X}_{i,j}^{ODP}) \cong \phi x_{i,j} + x_{i,j}^2 Var[\eta_{i,j}].$$

Ocena srednje napake rezervacije $\hat{R}_{i,I-i}^{ODP} = \sum_{k=I-i+1}^J \hat{X}_{i,k}^{ODP}$ posameznega leta nastanka škode i je enaka

$$\begin{aligned} mse_{p_{R_{i,I-i}}}(\hat{R}_{i,I-i}^{ODP}) &\cong \sum_{j>I-i} \phi x_{i,j} + \\ &+ \sum_{j>I-i} x_{i,j}^2 Var[\eta_{i,j}] + 2 \sum_{j_2>j_1>I-i} x_{i,j_1} x_{i,j_2} Cov[\eta_{i,j_1}, \eta_{i,j_2}], \end{aligned} \quad (11)$$

ocena srednje napake vsote rezervacij pa

$$mse_{p_{\sum_i R_{i,I-i}}} \left(\sum_{i=1}^I \hat{R}_{i,I-i}^{ODP} \right) \cong \sum_{i,j \in \mathcal{D}_I^c} \phi x_{i,j} + \quad (12)$$

$$+ \sum_{i,j \in \mathcal{D}_I^c} x_{i,j}^2 \text{Var}[\eta_{i,j}] + 2 \sum_{\substack{i_1 j_1, i_2 j_2 \in \mathcal{D}_I^c \\ i_1 j_1 \neq i_2 j_2}} x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \text{Cov}[\eta_{i_1 j_1}, \eta_{i_2 j_2}].$$

Ocene (11) in (12) je zaradi seštevanja kovarianc težko implementirati v programsko orodje, kot je npr. Excel, je pa na voljo v mnogih standardnih statističnih paketih (England & Verall, 1999, str. 285).

Avtorja priporočata, da napako ocenimo z bootstrap metodo, za kar potrebujemo ustrezno definicijo ostankov. Predlagata uporabo Pearsonovih ostankov

$$r_p = \frac{X - \hat{X}}{\sqrt{\hat{X}}}, \quad (13)$$

saj so primerna izbira v okviru posplošenih linearnih modelov. V enačbi (13) predstavlja X opaženo inkrementalno škodo, \hat{X} pa njeno cenilko.

Skladno s Pearsonovimi ostanki izračunamo še koeficient razpršenosti ϕ po

$$\hat{\phi} = \frac{\sum r_p^2}{n - p}. \quad (14)$$

Imenovalec je razlika med številom opazovanih spremenljivk n in številom parametrov p , ki jih ocenjujemo. Če privzamemo, da je $I=J$, je število opazovanih spremenljivk $n = \frac{I(I+1)}{2}$ in $p = 2I - 1$.

Podobno kot v poglavju 4 pri vsaki ponovitvi iz množice Pearsonovih ostankov \mathcal{O} naključno in s ponavljanjem izbiramo ostanke r_p skupaj s cenilkami \hat{X} , ki ostanek definirajo. Inkrementalni trikotnik v posamezni ponovitvi konstruiramo iz elementov

$$X^* = r_p^* \sqrt{\hat{X}} + \hat{X}. \quad (15)$$

Iz njega izračunamo višino škodne rezervacije po ODP modelu. Formalno bi morali rešiti sistem enačb (10) ali izračunati cenilke $\hat{\alpha}_i$ in $\hat{\beta}_j$. Na srečo ODP model in metoda veriženja ocenjujeta škodno rezervacijo, tako po letih kot skupaj, v enaki višini. Zato lahko pri posamezni ponovitvi trikotnik razvijemo in ocenimo po bistveno manj zahtevni metodi veriženja.

Standardna napaka višine škodnih rezervacij dobljenih ponovitev je ocena standardne napake parametrov. Od analitične ocene se razlikuje v tem, da ne upošteva koliko parametrov smo ocenili v modelu. Bootstrap metoda uporablja ostanke brez upoštevanja, kako smo jih določili. Da bomo skladni z analitično oceno napake, Pearsonove ostanke r_p prilagodimo tako, da upoštevamo število neznank in ocenjenih parametrov:

$$r'_p = \sqrt{\frac{n}{n-p} \cdot \frac{X - \hat{X}}{\sqrt{\hat{X}}}} \quad (16)$$

Za izračun srednje standardne napake potrebujemo še oceno procesne variance. Iz enačb (11) in (12) sledi, da je procesna varianca višine škodne rezervacije leta nastanka škode enaka $\hat{\phi} \hat{R}_{i,I-i}^{ODP}$, procesna napaka skupne rezervacije pa

$$\hat{\phi} \sum_{i=1}^I \hat{R}_{i,I-i}^{ODP}.$$

Zapišimo še korake simulacije. Opis bootstrap metode z uporabo ODP modela povzemamo po Englandu (2002, str. 465).

1. Iz danega inkrementalnega trikotnika T_X izračunamo kumulativni trikotnik T_C in po metodi veriženja ocenimo razvojne faktorje \hat{f}_j . Izračunamo višino škodne rezervacije posameznega leta nastanka škode R_i in skupno rezervacijo R .
2. Diagonalo zadnjega računovodskega leta množimo nazaj, izračunamo idealni kumulativni trikotnik T_C^I in iz njega idealni inkrementalni trikotnik T_X^I .
3. Od inkrementalnega trikotnika T_X po mestih odštejemo idealnega T_X^I in iz elementov izračunamo Pearsonove ostanke po enačbi (13). Dobimo trikotnik ostankov T_O in pripadajočo množico ostankov \mathcal{O} .
4. Naključno in z vračanjem izbiramo elemente iz množice ostankov \mathcal{O} in na ta način tvorimo nov trikotnik ostankov T_O^* .
5. Izračunamo cenilko razpršenosti $\hat{\phi}$ po enačbi (14).
6. Prilagodimo Pearsonove ostanke po enačbi (16). Dobljeno množico ostankov označimo z \mathcal{O}' . Pripadajoče trikotnike ostankov bomo označevali s $T_{O'}$.
7. Naključno in z vračanjem izbiramo elemente iz množice ostankov \mathcal{O}' in na ta način tvorimo nov trikotnik ostankov $T_{O'}^*$.
8. Za vsak element $T_{O'}^*$, rešimo enačbo (15), pri čemer je cenilka \hat{X} pripadajoči element trikotnika T_X^I . Dobljeni inkrementalni bootstrap trikotnik označimo s T_X^* , kumulativnega pa s T_C^* .
9. Po metodi veriženja razvijemo T_C^* in izračunamo inkrementalnega T_X^* .

10. Elementom $X_{i,j}^*$ inkrementalnega trikotnika T_X^* dodamo procesno napako tako, da mu prištejemo naključno škodo, ki je porazdeljena po ODP porazdelitvi z upanjem $X_{i,j}^*$ in varianco $\hat{\phi}X_{i,j}^*$.
11. Izračunamo škodno rezervacijo posameznega leta in skupno škodno rezervacijo.
12. Korake 7. do 11. ponavljamo n-krat.
13. Ponovitve glede na višino škodnih rezervacij naraščajoče uredimo in tako dobimo kvantilno funkcijo višine škodnih rezervacij izvirnega trikotnika.

Mack in Venter (2000) menita, da Mackov stohastični model bolje nadgrajuje metodo veriženja kot ODP model. Oba modela sicer ocenjujeta škodno rezervacijo v isti višini kot metoda veriženja, toda med njima so vseeno razlike v predpostavkah in s tem razlike v obnašanju modelov. Med razlikami v predpostavkah navajata, da metoda veriženja predpostavlja neodvisnost let nastanka škode, medtem ko ODP model privzema neodvisnost vseh inkrementalnih škod razvojnega trikotnika. Metoda veriženja tudi ni omejena s predpostavko o nenegativnosti vsote stolpcev inkrementalnih škod.

Verrall in England (2000) se v odgovoru strinjata, da obstajajo primeri, v katerih ODP model odpove, metoda veriženja pa še vedno lahko oceni višino škodne rezervacije. Kljub temu sta mnenja, da to ni dober razlog za trditev, da sta metoda veriženja in ODP model različna. Z zapisom v rekurzivni obliki (Verall, 2000, str. 94 – 96) bo ODP model lahko ovrednotil iste razvojne trikotnike kot metoda veriženja. Priporočata tudi, da se glede na število stohastičnih modelov, ki opisujejo metodo veriženja, ni smiselno omejiti samo na enega.

Sporna je tudi uporaba Pearsonovih ostankov, če so definirani kot v enačbi (13). Taka definicija lahko povzroči, da so nekateri ostanki enaki 0, kar ni zaželeno. Pinheiro, Andrade de Silva in Centeno (2003, str. 6) predlagajo uporabo standardiziranih Pearsonovih ostankov

$$\frac{r_{p_{i,j}}}{\sqrt{1 - h_{i,j}}}$$

kjer je člen $h_{i,j}$ ustrezni element matrike

$$H = X(X^T W X)^{-1} X^T W.$$

Matrika W je diagonalna matrika z elementi

$$w_{i,i} = \left(x_{i,i} \left(\frac{\partial \eta_{i,i}}{\partial x_{i,i}} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Opis korakov bootstrap metode z uporabo ODP modela in standardiziranih Pearsonovih ostankov najdemo v (International Actuarial Association, 2010, str. A29 – A34).

5.3 Uporaba modela na izbranih portfeljih

Za izbrana portfelja po enačbi (13) izračunamo Pearsonove ostanke (pred prilagoditvijo s številom parametrov). Rezultate prikazujeta Tabela 27 in Tabela 28.

Tabela 27: Pearsonovi ostanki zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	3,2548	-3,1559	-1,9534	-0,9355	-0,1891	1,9048	-1,0091	4,3407	1,0762	0,0000
1	3,0231	1,3115	-2,5143	-2,4349	0,7599	-1,6631	-0,7095	-2,6389	-1,0050	
2	2,1800	0,8147	-2,2124	-0,1525	-1,5653	-0,5211	-0,8905	-1,3341		
3	0,4961	1,5271	1,2195	-4,5782	-1,3827	-2,3446	2,3703			
4	1,3975	-0,9384	-3,2239	1,2614	0,5985	2,6757				
5	-0,4228	-1,2229	1,4100	0,0311	1,6414					
6	-3,0444	-2,6170	4,0669	5,7748						
7	-3,2490	2,0174	1,8604							
8	-1,6729	1,7130								
9	0,0000									

Tabela 28: Pearsonovi ostanki zavarovanja kopenskih vozil

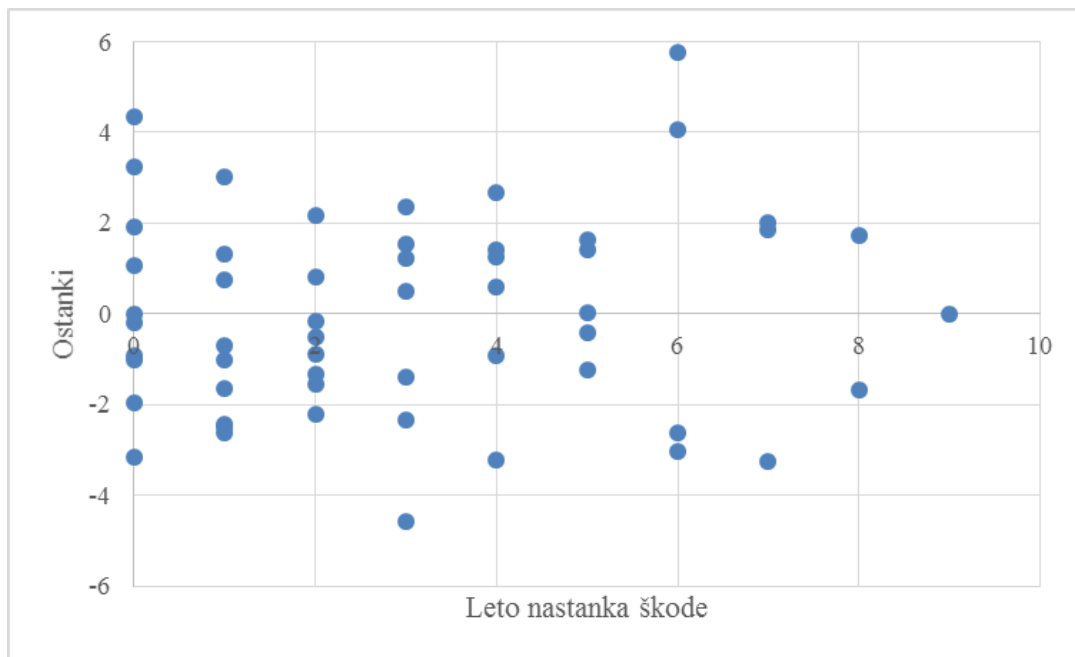
Leto nastanka škode i	Razvojno leto j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-4,5632	6,8013	-0,2627	3,5167	-4,6093	1,4594	5,2901	5,7041	0,9903	0,0000
1	-2,2177	6,9116	-7,6353	-7,5157	-3,9204	1,7998	-4,6987	-3,0123	-1,0171	
2	-8,5475	14,1185	7,1700	-7,1695	-4,6898	-3,8135	0,9667	-2,7896		
3	-4,3735	6,1978	-2,9366	6,2782	14,3483	-3,5013	-1,6057			
4	1,2788	-1,1682	-5,8431	3,0470	-3,6057	4,0210				
5	1,7254	-5,3226	7,5813	5,9510	1,7074					
6	4,2269	-5,1482	-6,0189	-4,4831						
7	3,2548	-6,8799	7,0309							
8	5,7155	-9,4201								
9	0,0000									

Grafična analiza Pearsonovih ostankov zavarovanja avtomobilske odgovornosti po letih nastanka škode (Slika 19) pokaže, da je najbolj razpršeno leto 6, ki vsebuje največji ostanek,

in leto 3 z najmanjšim ostankom. Opazen je tudi trend zmanjševanja razpršenosti v prvih treh letih, a smo vseeno bolj zadovoljni z naključnostjo razpršitve točk kot pri log-normalnem modelu (Slika 10). Podobno, kot pri log-normalnih modelih opazimo trend v razpršenosti ostankov, če jih prikažemo glede na računovodska leta (Priloga 10) in najbolj naključno porazdelitev, če jih prikažemo po računovodskih letih (Priloga 9).

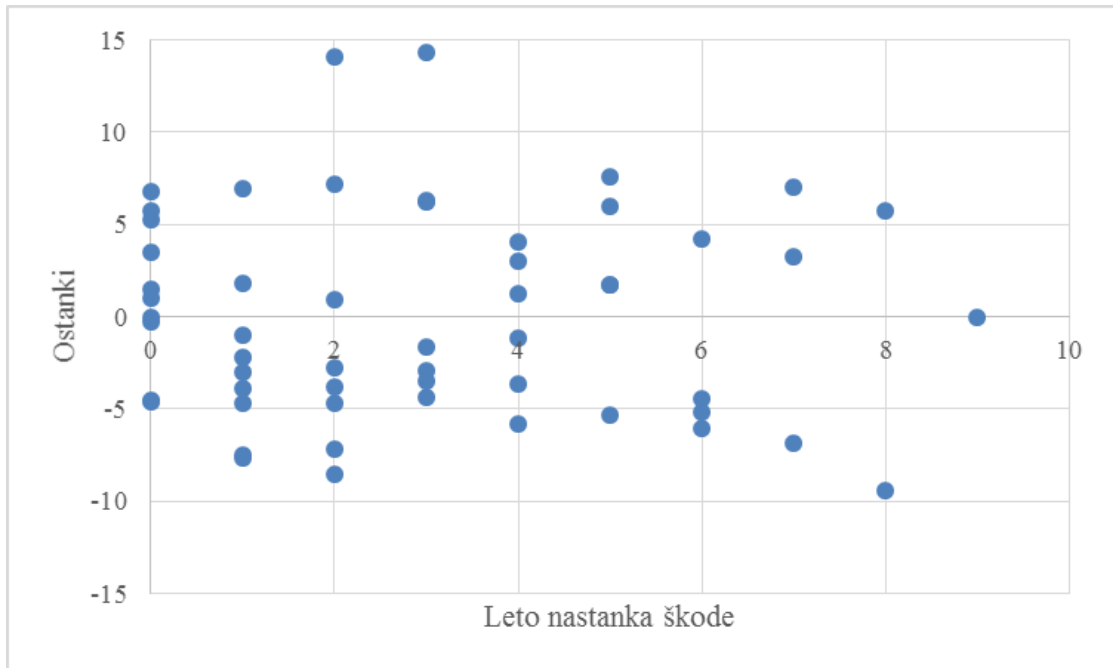
Zadovoljni smo tudi z naključno razpršitvijo Pearsonovih ostankov po letih nastanka škode zavarovanja kopenskih vozil (Slika 20). Izstopata sicer leto 2 in 3, ki vsebujeta največje ostanke. Manj smo zadovoljni z oddaljenostjo ostankov od abscise, saj je razpon vrednosti bistveno višji kot pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti. Podobno lahko sklepamo tudi na podlagi grafičnega prikaza ostankov po razvojnih (Priloga 35) in računovodskih letih (Priloga 36).

Slika 19: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po letih nastanka škode zavarovanja avtomobilske odgovornosti

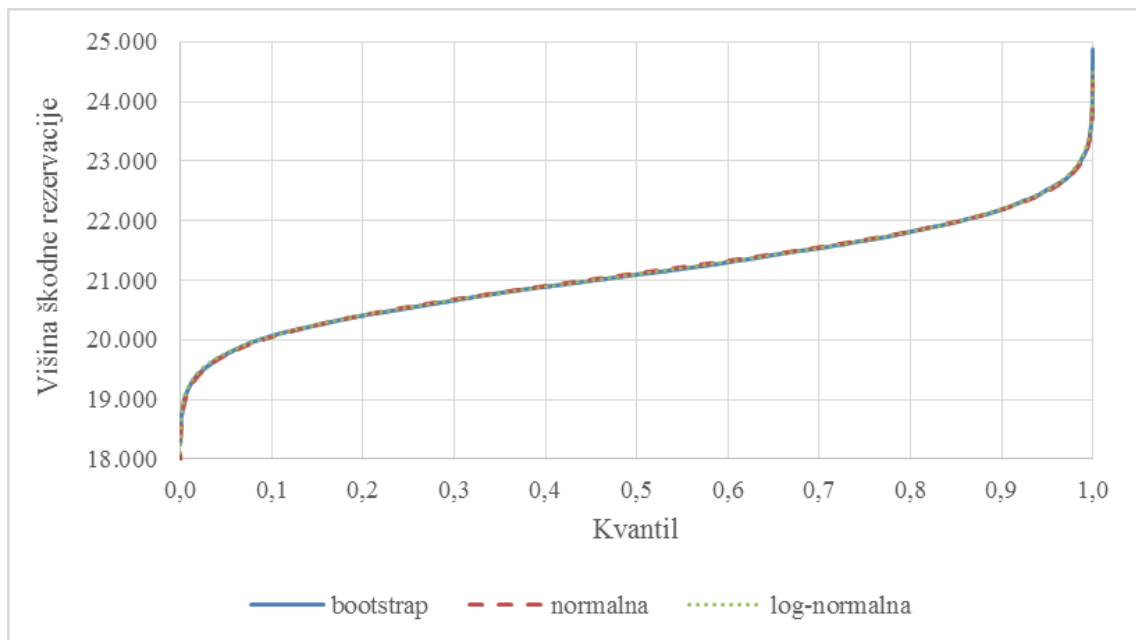


Kumulativni porazdelitveni funkciji višine škodnih rezervacij po bootstrap metodi z uporabo ODP modela prikazujeta Slika 21 in Slika 22. Podobno kot v prejšnjem poglavju smo iz bootstrap porazdelitve ocenili prva dva momenta, ki smo jih uporabili v normalni in log-normalni porazdelitvi. Primerjava vseh treh kumulativnih porazdelitvenih funkcij kaže, da bi bila predpostavka o normalni ali log-normalni porazdelitvi škod dober približek za oba portfelja.

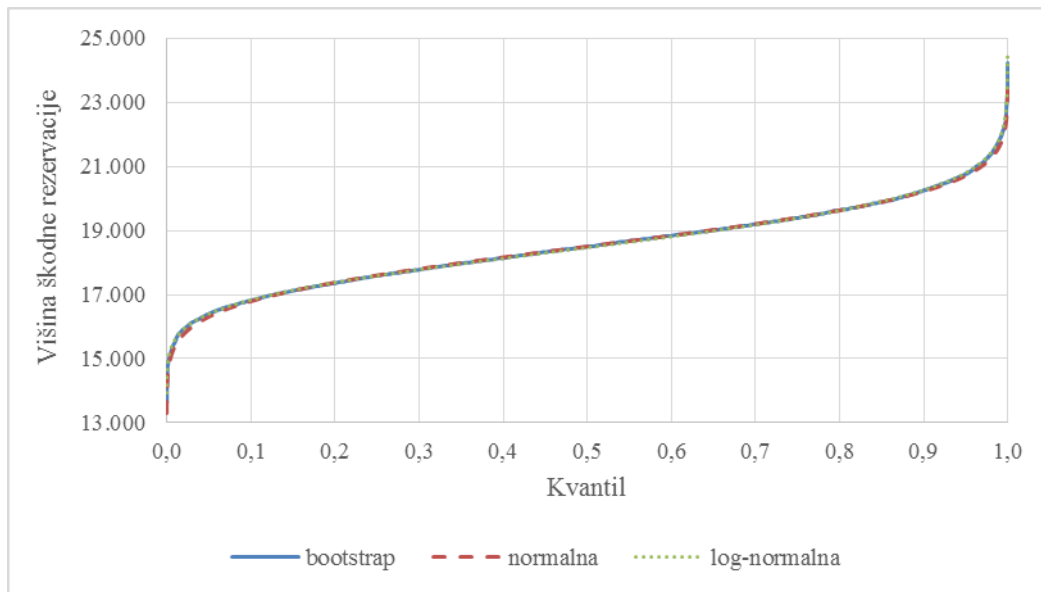
Slika 20: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po letih nastanka škode zavarovanja kopenskih vozil



Slika 21: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja avtomobilske odgovornosti po ODP modelu



Slika 22: Bootstrap, normalna in log-normalna kvantilna funkcija višine škodne rezervacije zavarovanja kopenskih vozil po ODP modelu



Tvegane vrednosti za oba portfelja in ocenjene porazdelitve navaja Tabela 29. Pri obeh portfeljih so za vse porazdelitve večje kot tvegane mere dobljene preko bootstrapa z uporabo tako parametričnega kot neparametričnega modela. Pričakovano so manjše (posebno pri zavarovanju kopenskih vozil) od tveganih mer dobljenih preko bootstrapa z uporabo metode veriženja.

Tabela 29: Mere porazdelitve bootstrapa z uporabo ODP modela

Portfelj	Povprečna višina škodne rezervacije	Standardna napaka višine škodne rezervacije	Bootstrap VaR _{99,5%}	Normalna porazdelitev VaR _{99,5%}	Log-normalna porazdelitev VaR _{99,5%}
Zavarovanje avtomobilske odgovornosti	21.111	834	23.299	23.262	23.357
Zavarovanje kopenskih vozil	18.519	1.338	22.154	21.970	22.258

Višino škodne rezervacije, izračunane po ODP modelu, povprečno višino škodne rezervacije dobljeno z bootstrap metodo pri 10.000 ponovitvah in njeno srednjo pogojno standardno napako za zavarovanje avtomobilske odgovornosti navaja Tabela 30. Pričakovano se višina škodne rezervacije po vseh letih nastanka škode ujema s škodno rezervacijo dobljeno po metodi veriženja. Povprečje po bootstrap metodi je malenkost nižje kot analitična ocena in izvira iz zadnjih treh let, ki imajo tudi največjo srednjo pogojno standardno napako. Odstopanje višine škodne rezervacije je za izbrani portfelj majhno.

Leong, Wang in Chen (2014) so analizirali resnične (in ne simulirane) podatke iz obdobja treh desetletij za stotine zavarovalnic iz Združenih držav Amerike in ugotovili, da metoda podcenjuje rezervacijsko tveganje.

Skupna napaka se dobro ujema z log-normalnim modelom z znanimi variancami (spomnimo se, da smo uporabili ocenjene variance in tako umetno zmanjšali razpršenost), je pa večja od Mackove metode. Primerjava po letih pokaže, da se porazdelitev napake po letih bolj ujema z Mackovim modelom, kot log-normalnim, ki zadnjemu letu nastanka škode pripisuje bistveno višjo napako kot druga dva modela.

Pri zavarovanju kopenskih vozil (Tabela 31) se skupno povprečje višine škodne rezervacije ujema z analitičnim izračunom, po letih nastanka škode pa malo razlikuje. Srednja napaka je skoraj polovična v primerjavi z napako log-normalnega modela in bistveno nižja v primerjavi z napako Mackove metode. Vse metode sicer pripisujejo največjo srednjo napako zadnjemu razvojnemu letu, opazimo pa, da bootstrap metoda z uporabo ODP modela pripisuje višje napake tudi prvim letom nastanka škode.

Tabela 30: Povprečna škodna rezervacija in povprečna pogojna standardna napaka zavarovanja avtomobilske odgovornosti z uporabo ODP bootstrapa

Leto nastanka škode i	Višina škodne rezervacija po ODP modelu	Povprečna škodna rezervacija bootstrap porazdelitve	Srednja standardna napaka	V_{co_i} v %
1	87	87	37	42
2	271	272	61	22
3	473	473	78	16
4	772	771	97	13
5	1.203	1.203	121	10
6	1.838	1.838	149	8
7	2.933	2.932	195	7
8	4.869	4.865	268	6
9	8.673	8.671	483	6
Skupaj	21.119	21.111	834	4

Komponenti srednje standardne napake, procesno standardno napako in standardno napako ocene parametrov, za zavarovanje avtomobilske odgovornosti navaja Tabela 32, za zavarovanje kopenskih vozil pa Tabela 33. Prikazali smo tudi, kakšna bi bila standardna napaka bootstrap porazdelitev, če bi namesto Pearsonovih ostankov r'_p uporabili verzijo, ki ne upošteva števila ocenjenih parametrov, tj. r_p .

Tabela 31: Povprečna škodna rezervacija in povprečna pogojna standardna napaka zavarovanja kopenskih vozil z uporabo ODP bootstrapa

Leto nastanka škode i	Višina škodne rezervacija po ODP modelu	Povprečje višine škodne rezervacije bootstrap porazdelitve	Srednja standardna napaka	V_{co_i} v %
1	24	23	49	212
2	30	30	56	184
3	46	47	68	147
4	85	86	84	98
5	136	136	103	76
6	236	235	133	57
7	367	369	159	43
8	865	863	234	27
9	16.730	16.729	1.168	7
Skupaj	18.519	18.519	1.338	7

Tabela 32: Napake ODP bootstrapa zavarovanja avtomobilske odgovornosti

Leto nastanka škode i	Višina škodne rezervacija po ODP modelu	Standardna napaka bootstrap porazdelitve	Procesna standardna napaka	Standardna napaka ocene parametrov
1	87	22	25	27
2	271	34	44	41
3	473	42	58	52
4	772	50	74	62
5	1.203	63	93	78
6	1.838	77	115	95
7	2.933	105	145	130
8	4.869	156	186	193
9	8.673	335	249	414
Skupaj	21.119	597	388	738

Bootstrap z uporabo ODP modela ocenjuje, da pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti najmanj napake izvira razpršenosti podatkov, torej iz procesne standardne napake. Ta je najnižja od uporabljenih metod. Mackov in log-normalni model ocenjujeta, da sta standardna napaka ocene parametrov in procesna standardna napaka podobnih velikostnih razredov.

Tabela 33: Napake ODP bootstrapa zavarovanja kopenskih vozil

Leto nastanka škode i	Višina škodne rezervacija po ODP modelu	Standardna napaka bootstrap porazdelitve	Procesna standardna napaka	Standardna napaka ocene parametrov
1	24	30	33	37
2	30	34	37	42
3	46	40	46	50
4	85	46	63	56
5	136	53	79	66
6	236	67	104	83
7	367	74	130	91
8	865	98	200	121
9	16.730	622	879	769
Skupaj	18.519	783	925	967

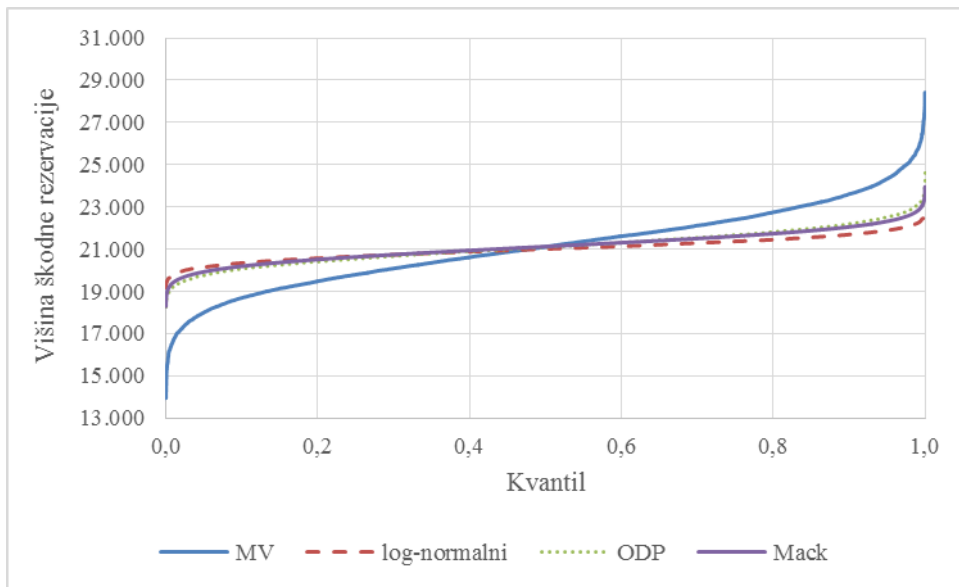
Drugače je pri zavarovanju kopenskih vozil. Obe standardni napaki bootstrap metoda z uporabo ODP modela ocenjuje v podobni višini, Mackova in log-normalna modela pa ocenjujeta, da glavna srednje standardne napake izvira iz standardne procesne variance. Vseeno bootstrap metoda glede na skok likvidacij v zadnjem letu nastanka škode pričakovano ocenjuje nižjo napako ocene parametrov kot napako, ki izvira iz razpršenosti podatkov.

Za končno primerjavo na isti graf narišimo še kumulativne funkcije bootstrap porazdelitev po metodi veriženja, log-normalnem modelu in ODP modelu, skupaj z kumulativno normalno porazdelitvijo s parametroma ocenjenima po Mackovi stohastični metodi veriženja (Slika 23 in Slika 24).

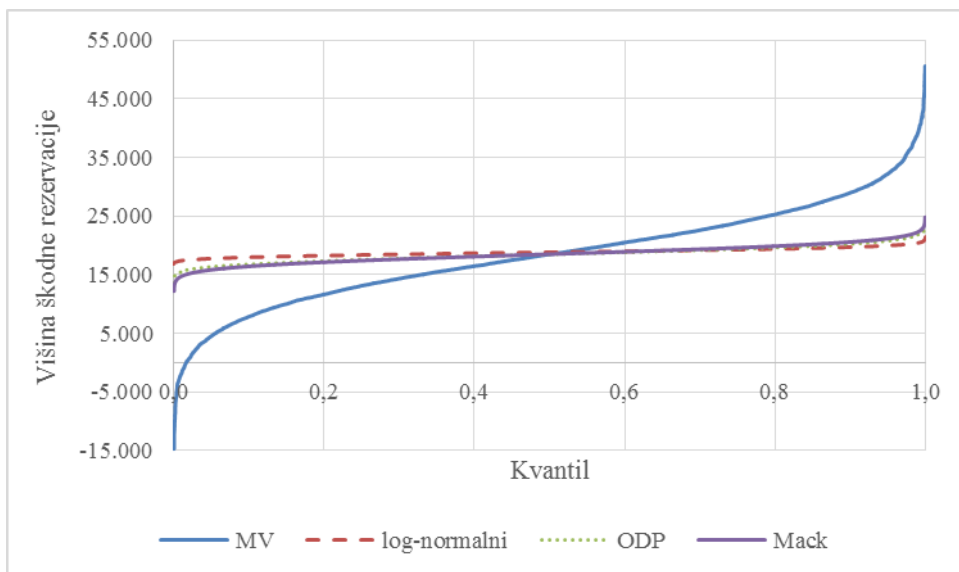
Pri obeh portfeljih so porazdelitve, z izjemo bootstrap metode z uporabo metode veriženja, podobne. Opazimo, da ima bootstrap metoda z uporabo ODP modela debelejši rep kot z uporabo log-normalnega modela. Debelejši rep je pričakovan, saj smo v bootstrap metodi z uporabo ODP modela, v 10. koraku dodali procesno napako, ki je v ponovitvah z uporabo log-normalnih modelov nismo.

Normalna porazdelitev, prilagojena s parametri ocenjenimi preko Mackove stohastične metode veriženja, se pri obeh modelih bolj prilega kvantilni funkciji bootstrap metode z uporabo ODP modela kot z uporabo log-normalnega modela.

Slika 23: Bootstrap kvantilne funkcije po metodi veriženja, log-normalnem modelu, ODP ter ocenjena normalna (Mack) zavarovanja avtomobilske odgovornosti



Slika 24: Bootstrap kvantilne funkcije po metodi veriženja, log-normalnem modelu, ODP ter ocenjena normalna (Mack) zavarovanja kopenskih vozil



Pokazali smo, da izbrani modeli ocenjujejo pričakovano višino škodnih rezervacij v identični ali primerljivi višini kot v praksi pogosto uporabljena metoda veriženja. Glede na to, da je za namen izračuna zavarovalno-tehničnih rezervacij tako po starem kot po novem zakonu dovolj že točkovna ocena, nas na prvi pogled lahko preseneti, da je izbor nadgrajenij metode veriženja v stohastičen model tako obširen.

Prvi razlog za širok nabor so predvsem različne predpostavke, ki nastopajo v opisu škodnega procesa. Te so lahko bolj ali manj primerne za dane podatke. V okviru izbranih metod smo tudi opisali, kako primernost predpostavk preverimo in odstopanja ocenimo.

Drugi razlog, ki vpliva na hiter razvoj stohastičnih metod, je potreba po modeliranju gibanja škodnih rezervacij za potrebe drugih izračunov, npr. kot del analize pozavarovalne zaščite ali lastni oceni kapitalske zahteve tako skupnega portfelja zavarovalnice kot posameznih homogenih delov znotraj portfelja. Pri obeh izračunih nas poleg pričakovane vrednosti in njene razpršenosti zanimajo predvsem tvegane vrednosti v repih porazdelitev.

Tudi iz tega razloga so zaželeno metode, ki opišejo porazdelitveno funkcijo višine škodnih rezervacij. Če nam model, kot npr. Mackova stohastična metoda veriženja, omogoča samo oceno prvih dveh momentov, se v praksi kot dober približek porazdelitvene funkcije pogosto izkaže uporaba normalne ali log-normalne porazdelitve, ki smo jo prilagodili z ocenjenima parametroma.

Velikost portfelja zavarovanja avtomobilske odgovornosti je glavni razlog, da so rezultati uporabljenih modelov primerljivi. Poleg ocen prvih dveh momentov so medsebojno primerljive tudi porazdelitve in tvegane vrednosti v njihovih repih, ki smo jih ocenili tako z uporabo bootstrap metod kot približkov. Vseeno smo zaznali trende v razvojnem trikotniku, ki bi jih bilo potrebno še posebej pazljivo ovrednotiti v primeru, ko bi hoteli ocenjeno porazdelitev uporabiti še v druge namene, kot izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij.

Slabše primerljivi so rezultati izbranih metod za zavarovanje motornih vozil. Izbor metode bi bil glede na ocenjeno visoko razpršenost še posebej pomemben, če bi nam bilo pomembno predvsem obnašanje škodne rezervacije v repu ocenjenih porazdelitev. Kljub temu, da je zavarovanje kopenskih vozil kratkorepa vrsta, je razpršenost ocen večja kot pri prejšnjem portfelju, saj je od njega bistveno manjši. Pri vseh modelih smo opazili, da razpršenost povečuje predvsem zajem zadnjega leta nastanka škode v razvojnem trikotniku.

Slika 23 in Slika 24 vključuje tudi kvantilno funkcijo bootstrap metode z uporabo metode veriženja, ki pri obeh portfeljih edina bistveno odstopa od preostalih metod. Simulacija nam služi predvsem za enostaven prikaz uporabe bootstrap metode v okviru razvojnega trikotnika. Rezultat zaradi visoke razpršenosti seveda ne zaupamo. Bootstrap metoda z uporabo metode veriženja nazorno kaže, da moramo do izbora stohastičnega modela pristopiti kritično in biti pozorni tako na vhodne podatke kot na razlago rezultatov metod.

SKLEP

Škodne rezervacije praviloma predstavljajo glavnino zavarovano-tehničnih rezervacij pri premoženjski zavarovalnici. Ocenjujejo višino obveznosti, ki izhajajo iz zavarovalnih pogodb za škodne primere, ki so se zgodili do datuma vrednotenja. Ocena mora zajemati obveznosti, ki izhajajo tako iz prijavljenih kot neprijavljenih škodnih dogodkov, tako da mora njen izračun temeljiti na primernih aktuarskih in statističnih metodah.

Višina škodne rezervacije pomembno vpliva na poslovanje zavarovalnice. V kratkoročnem pogledu se odraža predvsem v računovodskih izkazih in višini zahtevanega solventnega kapitala. Dolgoročno gledano je ustrezno ocenjena višina škodne rezervacije pomembna, ker omogoča zavarovalnici izpolnjevanje tako dolgoročnih pogodbenih obveznosti kot bolj učinkovito uporabo sredstev, ki so ji na voljo.

Za namene izračuna računovodskih izkazov in zavarovalno-tehničnih rezervacij po režimu Solventnost 2 zadostujejo že točkovne ocene izračunane preko determinističnih metod. Višino škodnih rezervacij pa zavarovalnice ocenjujejo tudi v drugih izračunih, npr. v okviru modeliranja poslovanja zavarovalnice glede na zastavljeni dolgoročni plan, optimizaciji pozavarovalne zaščite ali minimizaciji kapitalskih zahtev, ki izhajajo iz portfeljev prevzetih obveznosti. Metode, ki vračajo samo točkovno oceno višine škodnih rezervacij za uporabo v teh modelih niso več ustrezne.

V magistrskem delu izpostavimo metodo veriženja, ki je med najbolj priljubljenimi determinističnimi metodami za izračun višine škodnih rezervacij. Nadgradimo jo z dvema različnima stohastičnima modeloma, Mackovo stohastično metodo veriženja in ODP modelom, ki škodno rezervacijo ocenjujeta v isti višini kot metoda veriženja.

Opišemo tudi log-normalni model, ki v splošnem škodno rezervacijo ocenjuje v različni a primerljivi višini kot metoda veriženja. Razlog za izbor modela je v drugačnih predpostavkah neodvisnosti podatkov in njihovih porazdelitev, kar nam omogoča prilagodljivost v izračunu. Ker ne temelji na metodi veriženja opisuje tudi nov pristop za modeliranje škodnega procesa. Dodatna motivacija za predstavitev modela je uporaba log-normalne porazdelitve v izračunu kapitalske zahteve podmodula rezervacijskega tveganja v okviru Solventnosti 2. Log-normalna porazdelitev je tudi dober približek porazdelitve rezervacijskega tveganja v Švicarskem testu solventnosti.

Metode smo uporabili na izbranih portfeljih zavarovanja avtomobilske odgovornosti in kopenskih vozil. Z analizo ostankov in drugimi statističnimi orodji smo preverili, kako dobro metode opisujejo škodni proces posameznega portfelja in identificirali leta, kjer podatki odstopajo od pričakovanj.

Vsi stohastični modeli kažejo, da pri zavarovanju kopenskih vozil izstopa zadnje leto nastanka škode z izrazitim skokom višine likvidiranih škod. V praksi bi to leto izločili iz trikotnika in njegovo škodno rezervacijo ocenili na drug način. Modeli, ki temeljijo na stohastičnih metodah so v takih primerih v prednosti pred determinističnimi, saj nam omogočajo oceno napake v napovedi. Ugotovili smo tudi, da so modeli različno občutljivi na odstopanje v zadnjem letu nastanka škode. Kljub temu, da je razčlenitev standardne srednje napake na njene komponente različna od modela do modela, so vsi zaznali, da glavnina napake ocene višine škodne rezervacije izhaja iz razpršenosti podatkov, tj. procesne standardne napake.

Ocenjene višine škodne rezervacije in njene napake so za portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti bolj primerljive za izbrane stohastične modele. To smo pričakovali, saj je portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti bistveno večji od portfelja zavarovanja kopenskih vozil. Z analizo ostankov smo zaznali trende v računovodskih letih in letih nastanka škode, ki jih zaradi pomanjkanja podatkov ne znamo ovrednotiti. Ocenjeno višino bi morali prilagoditi tudi za manjkajoča razvojna leta. Iz razporeditev napak po letih nastanka škode smo opazili, da škodni proces v desetih letih, ki smo jih zajeli v razvojnem trikotniku, za portfelj zavarovanja avtomobilske odgovornosti še ni končan.

Za porazdelitev višine škodnih rezervacij pogosto uporabimo približek – privzamemo npr. log-normalno ali normalno porazdelitev in jo prilagodimo momentom, ki smo jih ocenili z uporabo stohastičnih metod. Porazdelitev lahko ocenimo tudi z uporabo bootstrap metode. V okviru predstavljenih modelov smo jo uporabili na izbranih portfeljih. Ugotovili smo, da so skoraj vse dobljene porazdelitve primerljive za oba portfelja in da se dobro ujemajo z opisanim približkom. V primeru, ko bi nas zanimali predvsem repi porazdelitev, kot v primeru optimizacije pozavarovalne zaščite, bi morali nameniti več pozornosti razlikam med uporabljenimi stohastičnimi modeli, če bi hoteli izbrati primerno metodo za oceno porazdelitve višine škodnih rezervacij.

Poleg dobrega poznavanja podatkov in portfelja je za kvaliteten izračun višine škodnih rezervacij potrebno tudi razumevanje uporabljenih metod. Primer bootstrap metode z metodo veriženja je pokazal, da ni vsak model dober samo zato, ker je stohastičen. Priporočljivo je poznati več stohastičnih modelov, na podlagi katerih presodimo, kateri oceni najbolj verjamemo. Primernost podatkov za izbrano metodo, razlike v predpostavkah in ne nazadnje tudi računski zahtevnost simulacij, vplivajo na uporabnost stohastične metode v danih okoliščinah. Modeli so samo orodja, ki lahko pripomorejo k boljši oceni, niso pa zamenjava za aktuarsko presojo.

LITERATURA IN VIRI

- 1 Buchwalder, M., Bühlmann, H., Merz, M., & Wüthrich, M. V. (2006). The mean square error of prediction in the chain ladder reserving method (Mack and Murphy revisited). *Astin Bulletin*, 36(2), 521 – 542.
- 2 CEIOPS e.V. (2010, 8. april). *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula Calibration of Non-life Underwriting Risk*. Najdeno 23. aprila 2016 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/CEIOPS-Archive/Documents/Advices/CEIOPS-DOC-67-10_L2_Advice_Non_Life_Underwriting_Risk.pdf
- 3 Collings, S., & White, G. (2001). APRA risk margin analysis. Institute of Actuaries of Australia XIIIth General Insurance Seminar.
- 4 de Jong, P. (2004). Forecasting general insurance liabilities. *Department of Actuarial Studies Research Series*.
- 5 de Jong, P. (2006). Forecasting runoff triangles. *North American actuarial journal*, 10(2), 28 – 38.
- 6 Dobson, A. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models, Second Edition*. Taylor & Francis.
- 7 Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 1 – 26.
- 8 Efron, B., & Tibshirani, R. (1986). Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy. *Statistical Science*, 1(1), 54 – 77.
- 9 Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1994). *An introduction to the bootstrap*. CRC press.
- 10 England, P. (2002). Addendum to “Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31(3), 461 – 466.
- 11 England, P. D., & Verall, R. J. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance: mathematics and economics*, 25(3), 281 – 293.
- 12 England, P. D., & Verall, R. J. (2001). A flexible framework for stochastic claims reserving. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 88(1), 1 – 38.
- 13 England, P. D., & Verall, R. J. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(2), 443 – 518 .
- 14 England, P. D., & Verall, R. J. (2006). Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance. *Annals of Actuarial Science*, 221 – 270.
- 15 Friedland, J. (2010). *Estimating Unpaid claims Using Basic Techniques*. Najdeno 3. januarja 2016 na spletnem naslovu http://www.casact.org/library/studynotes/Friedland_estimating.pdf
- 16 Gisler, A. (2009). The Insurance Risk in the SST and in Solvency II: Modeling and Parameter Estimation. *ASTIN Colloquia*. Helsinki: International Actuarial Association.
- 17 Harej, B., & Slapar, M. (2013). Merjenje tveganja škodnih rezervacij v okviru Solventnosti 2. *Zavarovalniški horizonti*, 1, 39 – 64.

- 18 Hertig, J. (1985). A statistical approach to IBNR-reserves in marine reinsurance. *Astin Bulletin*, 15(2), 171 – 183.
- 19 Huerlimann, W. (2008). On the Non-Life Solvency II Model. *ASTIN Colloquia*. Manchester: International Actuarial Association.
- 20 International Actuarial Association. (2010). *Stochastic Modeling – Theory and Reality from an Actuarial Perspective*. International Actuarial Association.
- 21 Kremer, E. (1982). IBNR-claims and the two-way model of ANOVA. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 47 – 55.
- 22 Kvedaras, V., Leipus, R., & Šiaulyš, J. (2012). Estimation of the generalized stochastic claims reserving model and the chain-ladder method. *Monetary Studies (Bank of Lithuania)*, 16(1), 68 – 90.
- 23 Leong, J., Wang, S., & Chen, H. (2014). Back-Testing the ODP Bootstrap of the Paid Chain-Ladder Model with Actual Historical Claims Data. *Variance*, 8(2), 182 – 202.
- 24 Li, J. (2006). Comparison of Stochastic Reserving Methods. *Australian Actuarial Journal*, 12(4), 489 – 569.
- 25 Lowe, J. (1994). A Practical Guide To Measuring Reserve Variability Using: Bootstrapping;, Operational Time And A Distribution-Free Approach. *General Insurance Convention* (str. 157 – 196). Glasgow: Institute and Faculty of Actuaries.
- 26 Mack, T. (1993a). Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. *ASTIN Bulletin*, 23(2), 213 – 225.
- 27 Mack, T. (1993b). Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates. *Spring 1994 CAS Forum*, 1, 101 – 182.
- 28 Mack, T. (1994). Which stochastic model is underlying the chain ladder method? *Insurance: Mathematics and Economics*, 15, 133 – 138.
- 29 Mack, T., & Venter, G. (2000). A comparison of stochastic models that reproduce chain ladder reserve estimates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26(1), 101 – 107.
- 30 Mack, T., Quarg, G., & Braun, C. (2006). The mean square error of prediction in the chain ladder reserving method—a comment. *Astin Bulletin*, 36(2), 543 – 552.
- 31 Mertz, M., & Wüthrich, V. M. (2007). Prediction error of the expected claims development result. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, 1, 117 – 137.
- 32 Mertz, M., & Wüthrich, V. M. (2008). Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes. *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 542 – 568.
- 33 Močivnik, P. (2010). *Slovar zavarovalnih izrazov*. Najdeno 1. maja 2016 na spletnem naslovu <http://www.zav-zdruzenje.si/slovar-zavarovalnih-izrazov/>
- 34 Murphy, D. M. (1994). Unbiased loss development factors. *CAS Forum*, 1, 183 – 246.
- 35 Pinheiro, P. J., Andrade de Silva, J. M., & Centeno, M. (2003). Bootstrap Methodology in Claim Reserving. *Journal of Risk and Insurance*, 14(4).
- 36 Renshaw, A. E., & Verrall, R. J. (1998). A stochastic model underlying the chain-ladder technique. *British Actuarial Journal*, 4(4), 903 – 923.

- 37 Savelli, N., & Clemente, G. P. (2011). Stochastic claim reserving based on CRM for Solvency II purposes. *ASTIN Colloquia*. Madrid: International Actuarial Association.
- 38 Schnieper, R. (1991). Separating true IBNR and IBNER claims. *ASTIN Bulletin*, 21, 111 – 127.
- 39 Shapland, M. R., & Leong, J. (2010). Bootstrap Modeling: Beyond the Basics. *2010 Fall CAS E-Forum*.
- 40 Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehničnih rezervacij. *Uradni list RS št. 4/2016*.
- 41 Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij. *Uradni list RS št. 3/2001*.
- 42 Slovensko zavarovalno združenje. (2015). *Statistični letni podatki za leto 2014 - Računovodski izkazi (bilanca stanja, izkaz poslovnega izida)*. Ljubljana: Slovensko zavarovalno združenje.
- 43 Taylor, G. (2000). *Loss reserving: an actuarial perspective*. Springer US.
- 44 Tse, Y.-K. (2009). *Nonlife Actuarial Models*. Cambridge University Press.
- 45 Uradni list Evropske unije. (2009, 17. december). *Direktiva 2009/138/ES Evropskega parlamenta in Sveta*. Najdeno 26. aprila 2016 na spletnem naslovu <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/SL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=EN>
- 46 Venter, G. G. (1998). Testing the Assumptions of Age-to-Age Factors. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 85, 807 – 847.
- 47 Venter, G. G. (2006). Discussion of the mean square error of prediction in the chain ladder reserving method. *Astin Bulletin*, 36(2), 566 – 571.
- 48 Verall, R. J. (1994). Statistical Methods for the Chain Ladder Technique. *Casualty Actuarial Society Forum*, 393 – 446.
- 49 Verall, R. J. (2000). An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique. *Insurance: mathematics and economics*, 26(1), 91 – 99.
- 50 Verall, R. J., & England, P. D. (2000). Comments on: “A comparison of stochastic models that reproduce chain ladder reserve estimates”, by Mack and Venter. *Insurance: mathematics and economics*, 26(1), 109 – 111.
- 51 Working Party on Solvency II Technical Provisions. (2013). Solvency II Technical Provisions for General Insurers. *GIRO40*. Edinburgh: Institute and Faculty of Actuaries.
- 52 Wüthrich, M. V. (2008). Prediction error in the chain ladder method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(1), 378 – 388.
- 53 Wüthrich, M. V., & Lysenko, N. (2009). Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 63 – 84.
- 54 Wüthrich, V. M., & Mertz, M. (2008). *Stochastic Claims Reserving Methods In Insurance*. John Wiley and Sons.
- 55 Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS št. 99/2010*.
- 56 Zakon o zavarovalništvu. *Uradni list RS št. 93/2015*.

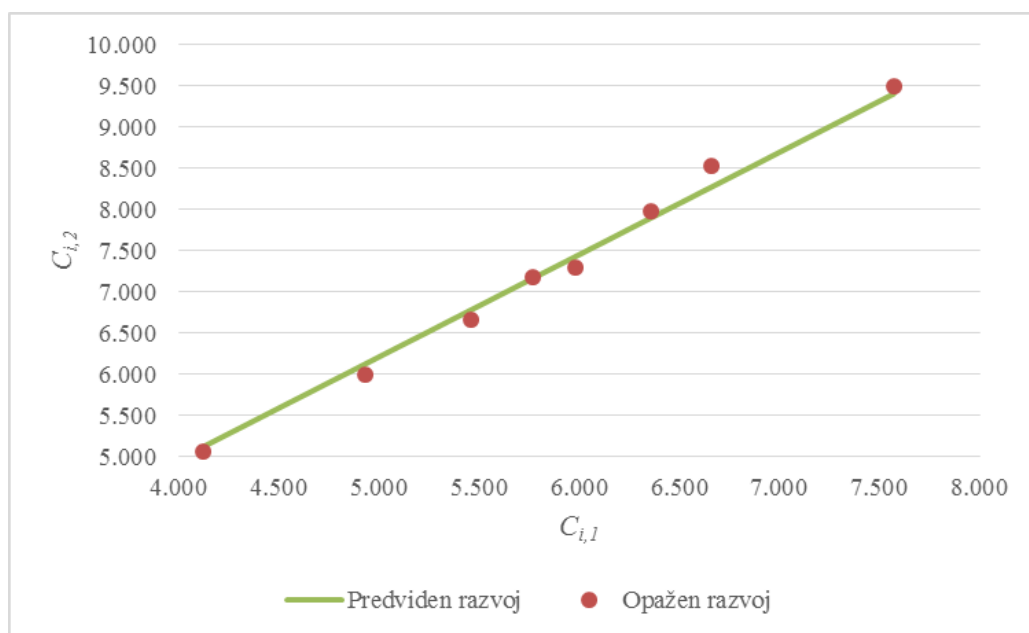
57 Zehnwirth, B. (1989). The chain ladder technique – A stochastic model. *Claims Reserving Manual*, 2, 2 – 9.

PRILOGE

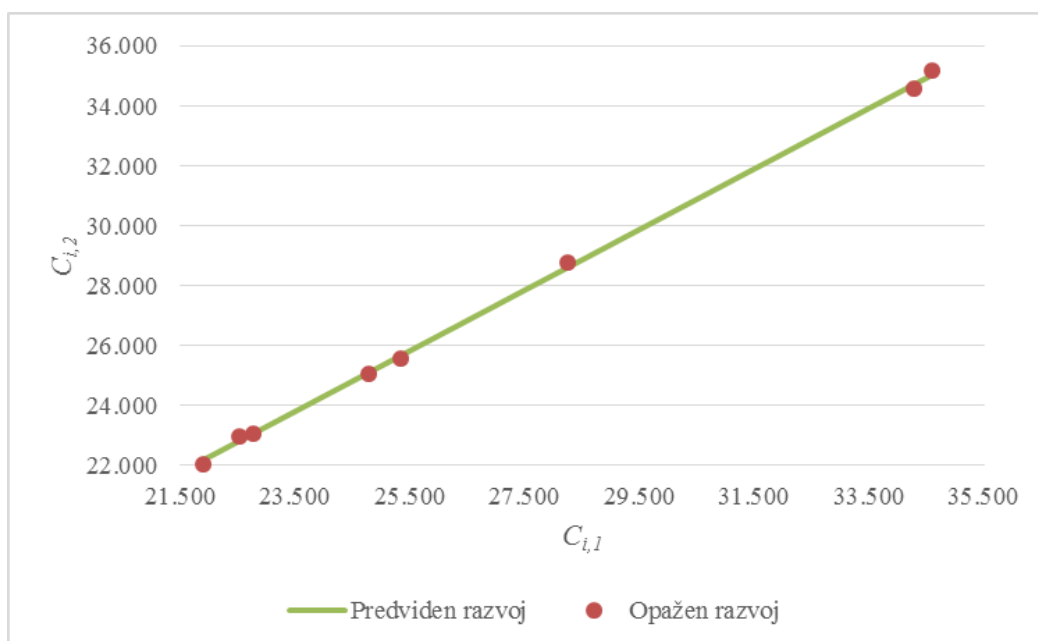
KAZALO PRILOG

Priloga 1: Predviden in opažen razvoj za drugo razvojno leto zavarovanja avtomobilske odgovornosti	1
Priloga 2: Predviden in opažen razvoj za drugo razvojno leto zavarovanja kopenskih vozil	1
Priloga 3: Uteženi ostanki razvojnega leta 1 zavarovanja avtomobilske odgovornosti glede na $C_i, 1$	2
Priloga 4: Uteženi ostanki razvojnega leta 1 zavarovanja kopenskih vozil glede na $C_i, 1 \dots$	2
Priloga 5: Porazdelitev ostankov po razvojnih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti	3
Priloga 6: Porazdelitev ostankov po računovodskih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti	3
Priloga 7: Porazdelitev ostankov po razvojnih letih zavarovanja kopenskih vozil	4
Priloga 8: Porazdelitev ostankov po računovodskih letih zavarovanja kopenskih vozil.....	4
Priloga 9: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po razvojnih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti.....	5
Priloga 10: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po računovodskih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti	5
Priloga 11: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po razvojnih letih zavarovanja kopenskih vozil	6
Priloga 12: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po računovodskih letih zavarovanja kopenskih vozil	6

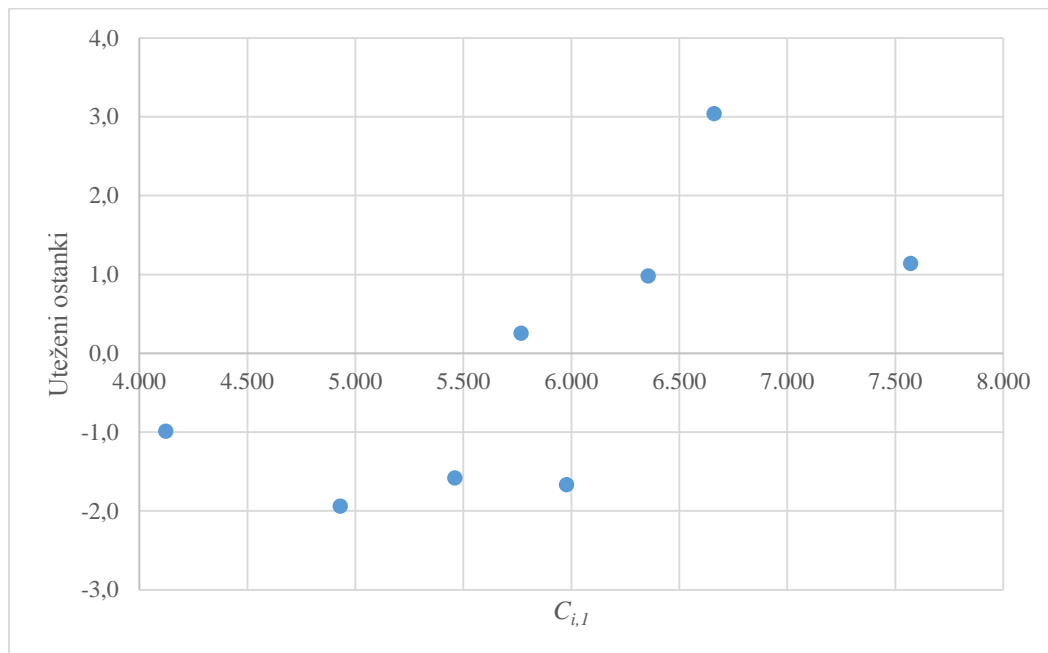
Priloga 1: Predviden in opažen razvoj za drugo razvojno leto zavarovanja avtomobilske odgovornosti



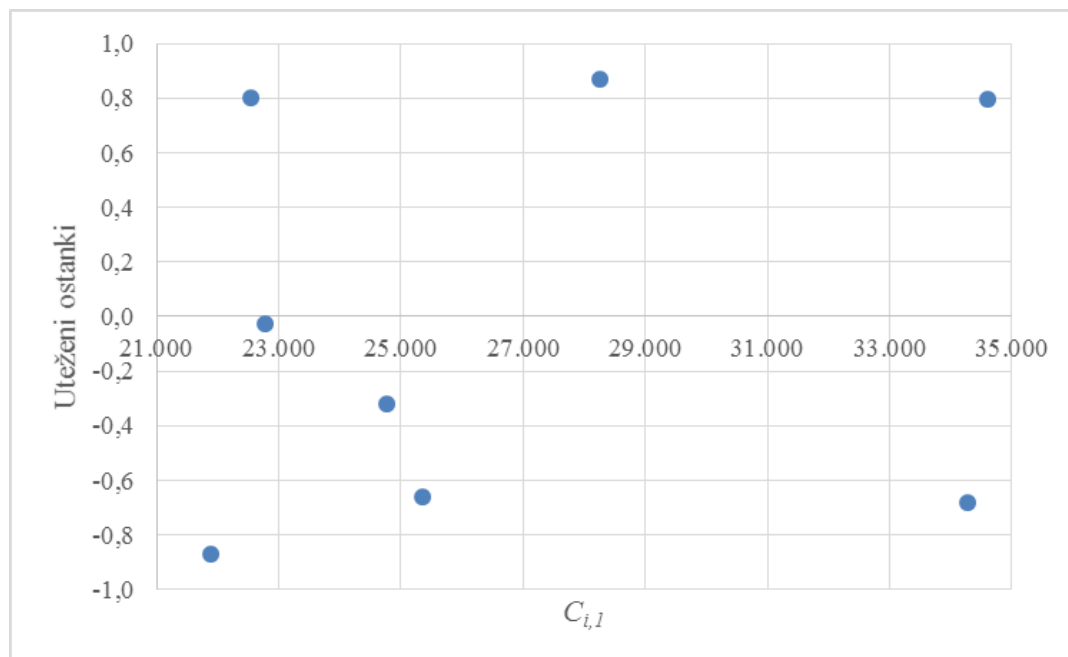
Priloga 2: Predviden in opažen razvoj za drugo razvojno leto zavarovanja kopenskih vozil



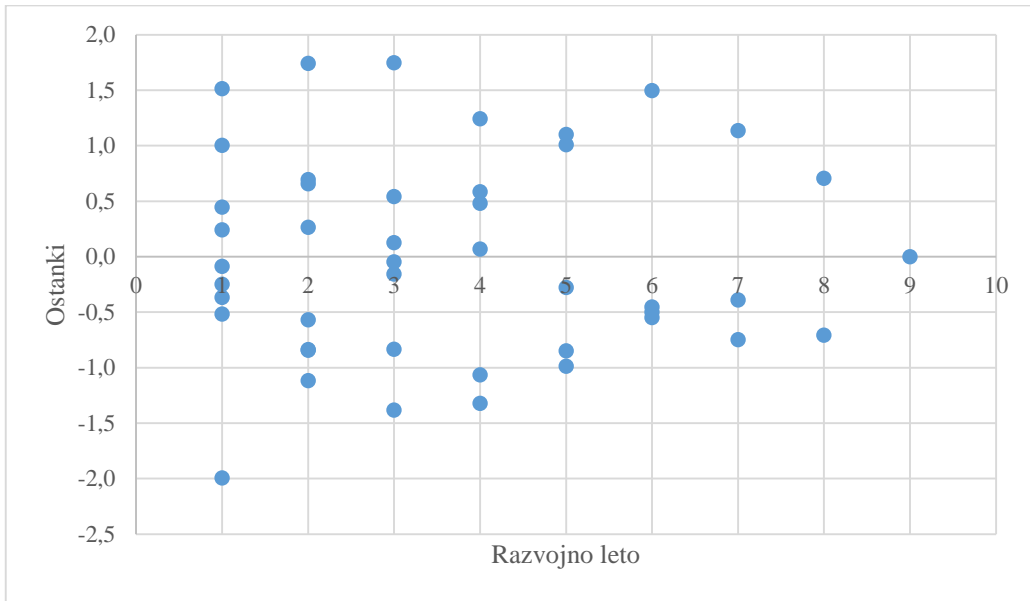
Priloga 3: Uteženi ostanki razvojnega leta 1 zavarovanja avtomobilske odgovornosti glede na $C_{i,1}$



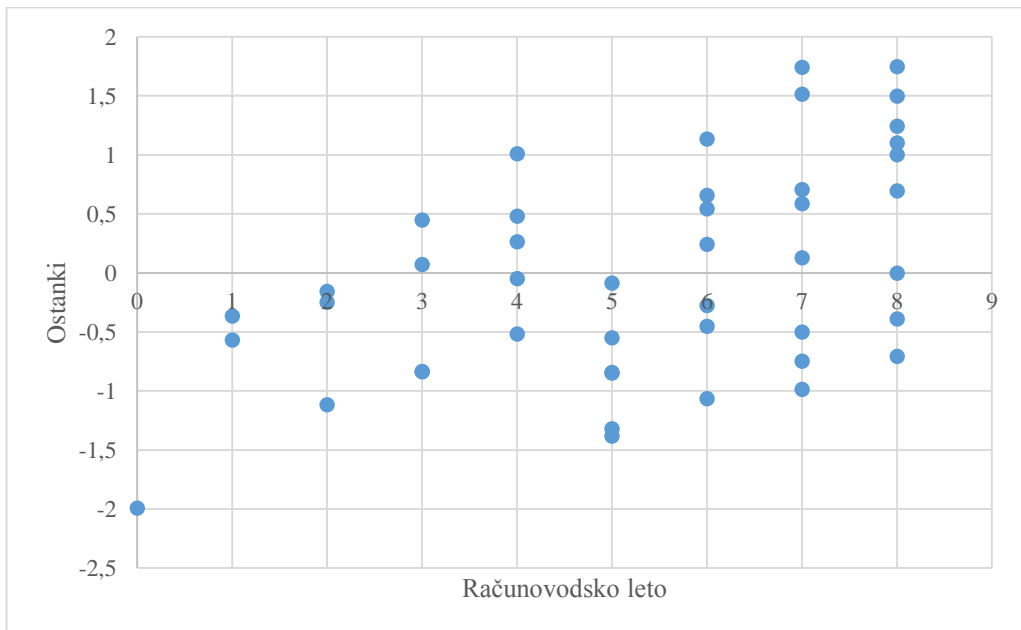
Priloga 4: Uteženi ostanki razvojnega leta 1 zavarovanja kopenskih vozil glede na $C_{i,1}$



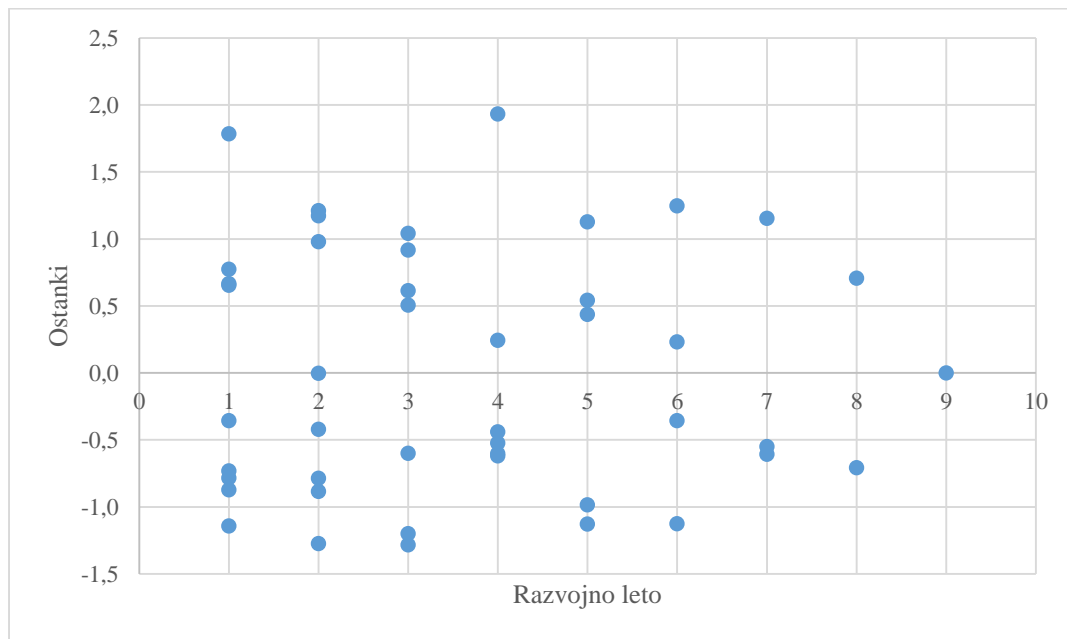
Priloga 5: Porazdelitev ostankov po razvojnih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti



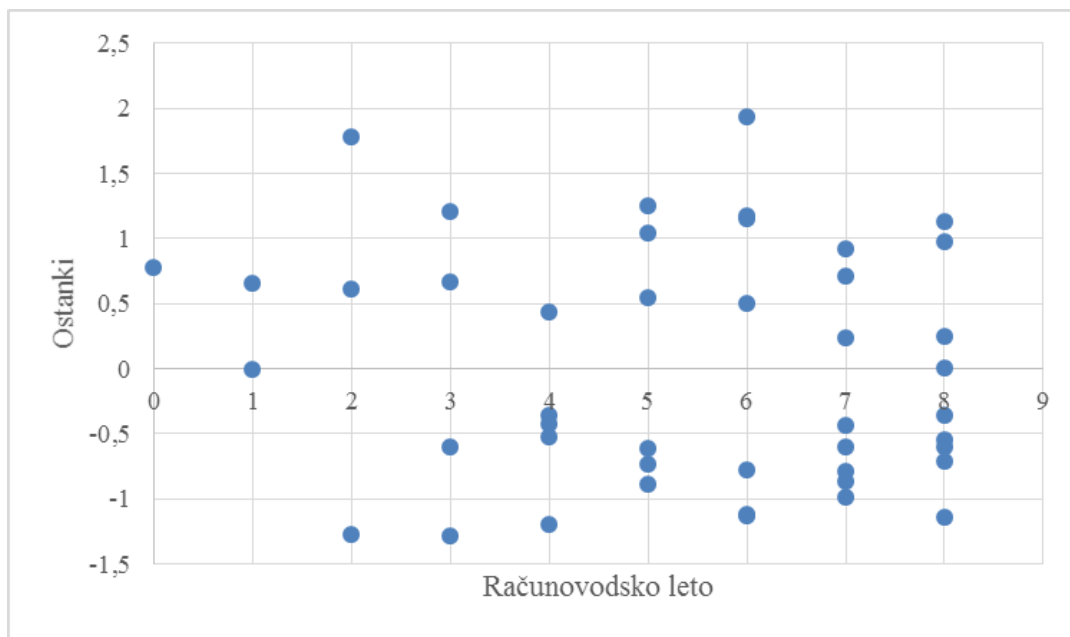
Priloga 6: Porazdelitev ostankov po računovodskih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti



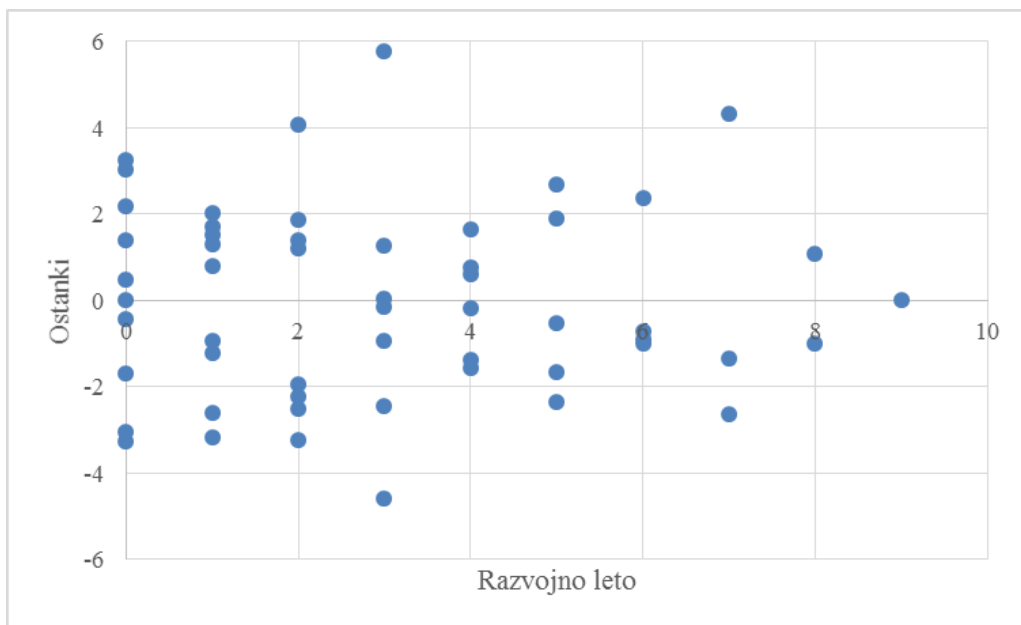
Priloga 7: Porazdelitev ostankov po razvojnih letih zavarovanja kopenskih vozil



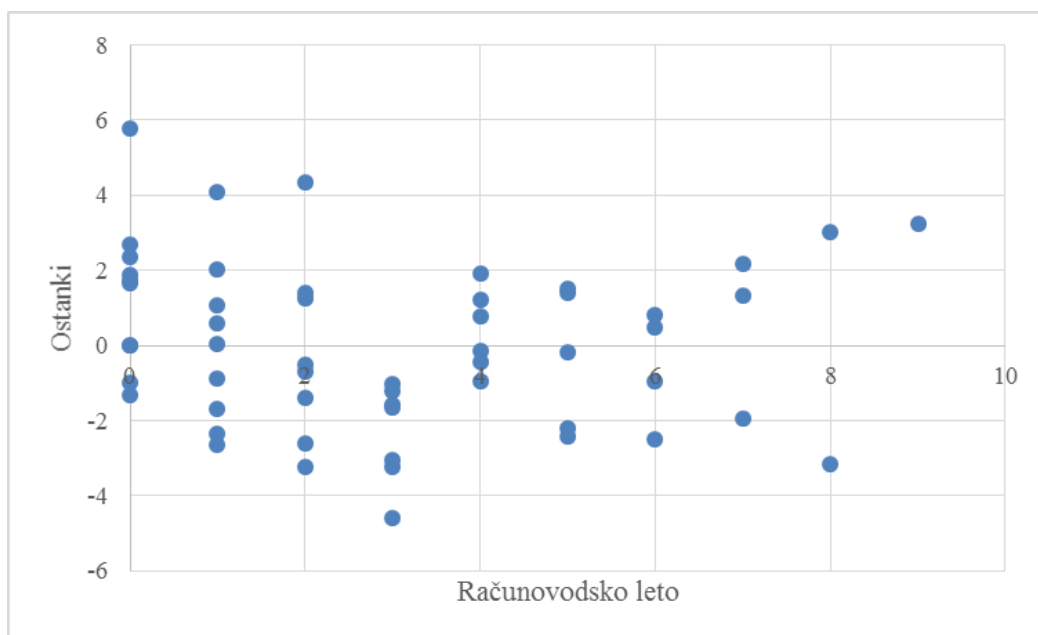
Priloga 8: Porazdelitev ostankov po računovodskih letih zavarovanja kopenskih vozil



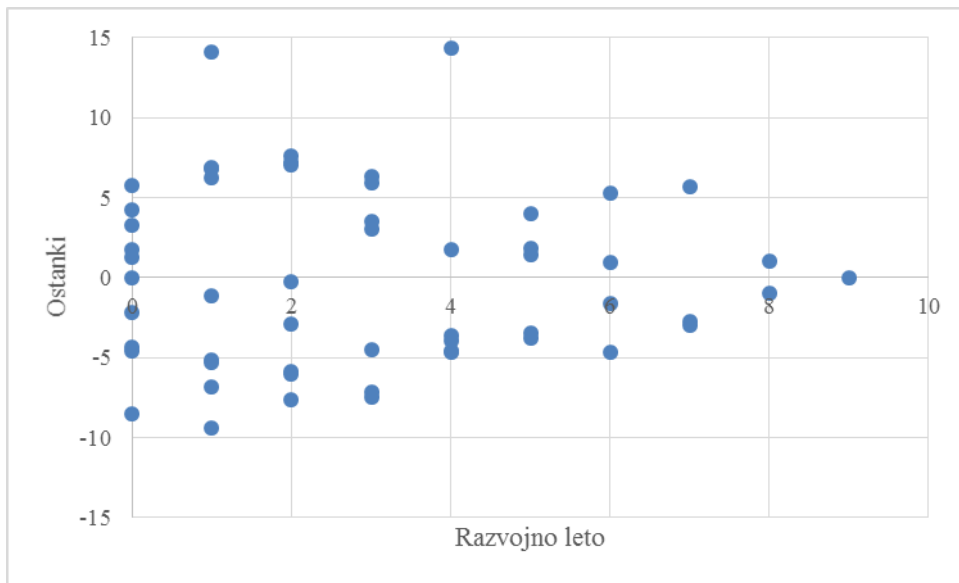
Priloga 9: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po razvojnih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti



Priloga 10: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po računovodskih letih zavarovanja avtomobilske odgovornosti



Priloga 11: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po razvojnih letih zavarovanja kopenskih vozil



Priloga 12: Porazdelitev Pearsonovih ostankov po računovodskih letih zavarovanja kopenskih vozil

