UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

MARKOVSKE VERIGE V ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJIH

Ljubljana, januar 2006 MATEJA SLAPAR

IZJAVA

Študentka Mateja Slapar izjavljam, da sem avtorica tega magistrskega dela, ki sem ga napisala pod mentorstvom prof. dr. Mihaela Permana, in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne_______________

Podpis:______________________

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

1.1 Življenjska zavarovanja

Življenjska zavarovanja postajajo iz leta v leto pomembnejša, saj se posameznikova varnost, ki mu jo je nudila država, iz leta v leto manjša. Tako mora posameznik sam poskrbeti za ustrezno varnost, med katero sodi tudi varnost družine v primeru smrti družinskega člana, in varnost za starost. Življenjska zavarovanja krijejo finančno izgubo v primeru smrti zaposlenega družinskega člana in pri tem pomagajo prebroditi družini finančno stisko, v katero sodijo ohranitev življenjskega standarda, poplačilo kreditov ali kritje stroškov povezanih s pogrebom.

Poleg omenjenega pa lahko gledamo na življenjska zavarovanja kot obliko varčevanja. Pod življenjska zavarovanja sodijo zavarovalni produkti klasičnega življenjskega zavarovanja, ki pa jim lahko dodamo rizike. Primer takega zavarovanja je zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, ki izplača zavarovalno vsoto v primeru smrti in prične izplačevati rento v primeru nastanka invalidnosti zavarovanca.

Zavarovalnice, ki ponujajo dogoročna življenjska zavarovanja, morajo oblikovati matematične rezervacije. Le-te pripomorejo k finančni stabilnosti zavarovalnice tudi v primeru slabega škodnega izida. Zakon o zavarovalništvu (ZZavar) in Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij opredeljujeta do kakšne višine in na kakšen način morajo biti matematične rezervacije oblikovane.

Za izračun matematičnih rezervacij morajo zavarovalnice oceniti verjetnosti nastanka vsake bodoče škode, opredeljene v zavarovalnem produktu, in pričakovane bodoče škode diskontirati v časovno točko izračuna. Ko imamo opravka s produkti z več riziki, na primer življensko zavarovanje za primer smrti in invalidnost, moramo tako oceniti verjetnosti za vse možne prehode med stanji, na primer iz stanja invalidnosti je možen prehod v stanje smrti, kot tudi prehod nazaj v normalno stanje. V takih primerih izračun matematičnih rezervacij ni enostaven. V primeru takih zavarovanj je metoda, ki jo bomo predstavili v magistrskem delu, zelo učinkovita. Omogoča izračun matematičnih rezervacij, kakor tudi ostalih vrednosti, ki jih mora zavarovalnica določiti, na primer premije.

1.2 Problematika modeliranja življenjskih zavarovanj

Tradicionalno se matematične rezervacije in ostale vrednosti portfelja zavarovalnih polic, kot so premija, višji momenti sedanjih vrednosti izplačil in vplačil po zavarovalni pogodbi računajo tako, da se s pomočjo izbranih mortalitetnih tablic za vsako zavarovalno pogodbo določi vsa možna bodoča izplačila oziroma bodoča vplačila in čas t, v katerem naj bi bila le ta izvedena. Nato se z izbrano obrestno mero tako določena neto bodoča izplačila (tu neto pomeni razliko med izplačili in vplačili) diskontirajo v časovno točko, v kateri želimo določiti sedanjo vrednost bodočih neto obveznosti. Ti aktuarski pristopi so dobro znani in razloženi med drugim tudi v (Bowers et al., 1997). Problem tradicionalnega načina računanja matematičnih rezervacij, premij in ostalih vrednosti se pojavi, ko imamo opravka z zavarovalno polico, pri kateri so bodoča izplačila in bodoča vplačila vezana na stanje zavarovanca. Primeri takih zavarovanj so zavarovanje za invalidnost in smrt, pokojninsko zavarovanje, zavarovanje za kritične bolezni, pa tudi zavarovanja, kjer se tablice smrtnosti spreminjajo glede na čas (uporaba selektivnih tablic umrljivosti za prvih nekaj let zavarovanja, na primer 20 let, nato pa se uporabijo ultimativne tablice). V teh primerih ima zavarovalna polica več stanj (tri ali več) in tako za tradicionalen način računanja potrebujemo vse možne prehodne verjetnosti med posameznimi stanji, ki pa jih je v realnosti težko določiti (Jones, 1995, str.5).

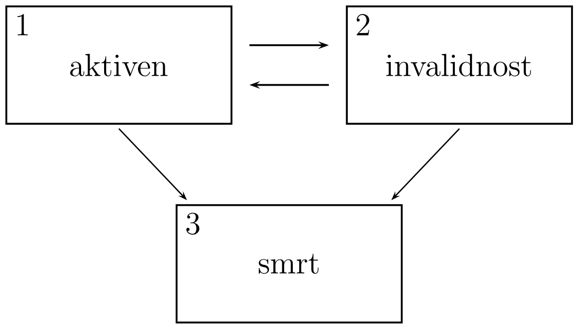
Oglejmo si primer, ki prikazuje pravkar omenjeno težavo. Vzemimo zavarovalno polico s tremi stanji. To je lahko zavarovanje za invalidnost in smrt. Izračunati želimo sedanjo vrednost neto bodočih obveznosti za zavarovalno vsoto 1, ki se izplača zavarovancu v primeru nastanka invalidnosti. Zaradi lažje indeksacije označimo obdobje, ko je zavarovanec v stanju invalidnosti kot stanje 2. Predpostavimo, da je trenutno zavarovanec star x let in je v aktivnem stanju. Aktivno stanje bomo vedno označevali z 1. Pričakovana izplačila pri jakosti 1 lahko zapišemo s formulo

$$\int_0^\infty v^t p_{12}(x, x+t)dt,$$

kjer je p_{ij} verjetnost, da bo zavarovanec v časovnem intervalu dolžine t skočil iz trenutnega stanja i v stanje j in je v^t funkcija diskontiranja. Te verjetnosti pa ni enostavno določiti, saj je potrebno upoštevati vsa ostala stanja, ki jih lahko na časovnem intervalu

$(x, x+t)$ obišče, preden pride do končnega stanja j. Problem pri zavarovanjih z več stanji je torej v določitvi prehodnih verjetnosti, ki pa so ključnega pomena za določitev vseh ostalih aktuarskih vrednosti.

Pri tem problemu si lahko pomagamo z markovskimi verigami. V kolikor imamo konstantne jakosti prehodov med stanji, lahko dokaj enostavno z enačbami Kolmogorova določimo prehodne verjetnosti. To lahko posplošimo za primer, ko so jakosti prehodov konstantne le za intervale dolžine 1 (med starostnimi obdobji enega leta). Glej v članku (Jones, 1995, str. 14-16). Smiselnost uporabe markovskih verig za modeliranje zavarovanj je nekoliko odvisna od izbire stanj. Kot primer lahko vzamemo zavarovanje za primer smrti in invalidnosti, predstavljeno s tremi stanji kot ga kaže slika 1.2.



Če so izplačila po zavarovalni polici odvisna od tega, kako dolgo je zavarovanec v nekem stanju, govorimo o semi-markovskih verigah. Tak primer zavarovanja je tudi renta za invalidnost, ki se prične izplačevati po preteku čakalne dobe. Aproksimacija semi-markovskih verig z markovskimi verigami je obdelana v (Cox, Miller, 1965). Metoda stanj omogoča aproksimacijo poljubne porazdelitve s primerno kombinacijo stanj in kjer je čas, da proces ostane v tem stanju, porazdeljen eksponentno. V članku (Jones, 1995, str. 18-24) je ta metoda predstavljena v primeru selektivnih in ultimativnih tablic smrtnosti.

V magistrskem delu bom predstavila Norbergovo metodo izračuna premij, višine matematičnih rezervacij in višjih momentov sedanjih vrednosti bodočih izplačil in vplačil (Norberg, 1995a). Potek zavarovanja je modeliran z markovskimi verigami. V zadnjem poglavju model razširimo tako, da vpeljemo stohastično obrestno mero, ki jo ravno tako modeliramo z markovsko verigo (Norberg, 1995b). Pri tem predpostavimo, da sta obe markovski verigi med seboj neodvisni. Prednost te metode je, da za izračun matematičnih rezervacij in premij ne potrebujemo prehodnih verjetnosti, temveč le jakosti prehodov med stanji zavarovanja. Matematične rezervacije dobimo tako, da rešimo sistem diferencialnih enačb. V splošnem je za dobljeni sistem diferencialnih enačb težko najti analitično rešitev, lahko pa enostavno določimo numerično rešitev.

Posebej enostavno je s to metodo računati premije in matematične vrednosti tudi v primeru, ko so stroški odvisni od trenutnih vrednosti matematičnih rezervacij, ali v primeru, ko so odškodnine odvisne od matematičnih rezervacij. Teorija je podkrepljena tudi z numeričnimi izračuni na izbranih življenjskih zavarovanjih, ki so modelirana z markovskimi verigami. Za numerične izračune so bile uporabljene mortalitetne tablice, ki jih uporabljajo zavarovalnice na Danskem in so aproksimirane z Gompertz-Makehamovim modelom za jakosti prehodov. V magistrskem delu se dotaknemo tudi analize občutljivosti izračunanih vrednosti matematičnih rezervacij na spremembe parametrov pri že prej predstavljenih primerih zavarovanj.

1.3 Princip ekvivalence in matematične rezervacije

1.3.1 Princip ekvivalence in zavarovalna premija

Kot pri ostalih storitvah, je tudi za sklenitev zavarovalne police potrebno plačati določeno premijo. Premija za življenjsko zavarovanje mora zadostovati za pokritje bodočih obveznosti zavarovalnice, ki jih je le ta prevzela z zavarovalno pogodbo. Princip ekvivalence omogoča določitev premije ob predpostavki, da sta ob sklenitvi zavarovanja pričakovana sedanja vrednost bodočih premij in pričakovana sedanja vrednost bodočih izplačanih škod zavarovalnice enaki. To z drugimi besedami pomeni, da so ob sklenitvi zavarovanja v povprečju diskontirane vrednosti bodočih premij in bodočih odškodnin enake.

Premija se določi za vsako polico posebej. Predpostavimo, da v izračunu premije ne upoštevamo stroškov zavarovanja. Premijo, ki jo dobimo s principom ekvivalence, imenujemo *neto premija*.

Premija je lahko enkratna v primeru, ko zavarovanec plača vse na začetku zavarovanja za celotno trajanje zavarovanja. Ponavadi pa so enkratne premije za življenjska zavarovanja prevelike, zato se večina zavarovancev odloči plačevati premijo mesečno ali letno, skozi celotno trajanje pogodbe. Premija je plačana le, če je zavarovanec na začetku meseca oziroma leta še živ. Predpostavimo, da se premija plačuje zvezno s konstantno jakostjo vplačil π, in si oglejmo primer m-letnega življenjskega zavarovanja za smrt. Sedanjo vrednost bodočih premij označimo s $\pi PV^{a;m}$, pričakovano sedanjo vrednost bodočih premij pa označimo s $\pi \bar{a}_{x:\overline{m}|}$. Slučajna spremenljivka, ki predstavlja sedanjo vrednost bodočih neto odškodnin za izbrano polico življenjskega zavarovanja, je

$$PV = PV^b - \pi PV^{a;m},$$

kjer PV^b predstavlja sedanjo vrednost bodočih izplačanih škod. Prikazano s formulami, pricip ekvivalence pravi, da je matematično upanje sedanjih vrednosti bodočih izplačanih neto odškodnin enako 0 oziroma

$$\mathbb{E}(PV) = 0.$$

Princip ekvivalence je zasnovan na principu razpršitve rizikov na velikem portfelju, s predpostavko, da je bodoči razvoj obresti in drugih potrebnih ekonomskih in demografskih parametrov vnaprej znan.

Vzemimo sedaj portfelj z m policami. Naj B^i predstavlja razliko med denarnim tokom pričakovanih bodočih škod in pričakovanih bodočih premij za polico i. Za B^i lahko tudi rečemo, da je funkcija pričakovanih bodočih plačil za polico i. Sedanja vrednost bodočih neto obveznosti je vsota diskontiranih vrednosti bodočih pričakovanih plačil za posamezno polico i. S formulo to zapišemo kot

$$V^i(t) = \int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} dB^i(\tau).$$

Naj $\mathcal{F}_t$ predstavlja zgodovino do trenutka t. To pomeni, da so v $\mathcal{F}_t$ vsi dogodki, ki so se dogodili pred in vključno s trenutkom t za vsako posamezno polico. Naj bo $\xi_i = \mathbb{E}[V^i(t)|\mathcal{F}_t]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\,[V^i(t)|\mathcal{F}_t]$ in $s_m^2 = \sum_{i=0}^m \sigma_i^2$. Predpostavimo tudi, da so police med seboj neodvisne in da portfelj raste omejeno, kar pomeni, da gre s_m^2 proti neskončnosti tako, da s_m^2 ni nikoli manjši od poljubnega posameznega člena σ_i^2. Ob teh predpostavkah po centralnem limitnem izreku (Grimmett, Stirzaker, 1992, str. 175) sledi, da standardna vsota diskontiranih obveznosti konvergira k standardni normalni porazdelitvi, ko število polic narašča čez vse meje:

$$\frac{\sum_{i=0}^m (V^i(t) - \xi_i)}{s_m} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1). \tag{1.1}$$

Predpostavimo, da zavarovalnica oblikuje matematične rezervacije

$$V^i_{zav} = \xi_i + \varepsilon \sigma_i^2 \tag{1.2}$$

za nek $\varepsilon > 0$. Potem je

$$\mathbb{P}[\sum_{i=1}^m V^i_{zav}(t) - \sum_{i=1}^m V^i(t) > 0|\mathcal{F}_t] = \mathbb{P}[\frac{\sum_{i=1}^m (V^i(t) - \xi_i)}{s_m} < \varepsilon s_m|\mathcal{F}_t].$$

Iz (1.1) sledi, da matematične rezervacije krijejo diskontirane bodoče neto obveznosti s pogojno verjetnostjo, ki konvergira k vrednosti 1. Podobno, če vzamemo $\varepsilon < 0$ v (1.2), matematične rezervacije krijejo diskontirane bodoče neto obveznosti z verjetnostjo 0. Princip ekvivalence je definiran z izbiro $\varepsilon = 0$ in se za posamezno zavarovalno polico glasi

$$V(t) = \mathbb{E}[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r(s)ds} dB(\tau)|\mathcal{F}_t].$$

Premija naj se torej določi ob sklenitvi police tako, da bo $\Delta B(0) + V(0) = 0$.

Vzemimo primer mešanega življenjskega zavarovanja, ki vključuje zavarovanje za primer smrti in zavarovanje za primer doživetja (izplača se zavarovalna vsota, če zavarovanec preživi določeno obdobje). Naj bo zavarovanje sklenjeno za obdobje n let in naj se premija plačuje m let, pri čemer je $m < n$. Princip ekvivalence nam da enačbo

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \pi \bar{a}_{x:\overline{m}|} = 0,$$

v kateri pa je edina neznana komponenta vrednost π, ki predstavlja zavarovalno premijo za to zavarovanje.

1.3.2 Matematične rezervacije

Zavarovalnica, ki sklepa življenjska zavarovanja oziroma nezgodna ali zdravstvena zavarovanja, za katera se uporabljajo podobne verjetnostne tabele in izračuni kot za življenjska zavarovanja, mora v zvezi s temi zavarovanji oblikovati ustrezne matematične rezervacije (Zakon o zavarovalništvu, 2004).

Po Sklepu o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij morajo zavarovalnice oblikovati matematične rezervacije za vse dolgoročne obveznosti za vsako polico posebej. *Matematične rezervacije* morajo biti oblikovane v višini, da krijejo za vsako polico pričakovano sedanjo vrednost vseh bodočih izplačil in vplačil, določenih v zavarovalni pogodbi. Princip ekvivalence velja le ob sklenitvi zavarovanja. Med trajanjem zavarovalne police pa se tako pričakovana sedanja vrednost bodočih izplačanih škod kot tudi pričakovana sedanja vrednost bodočih premij spreminjata. Razlog za to je, da se ob določitvi premije predpostavijo parametri, kot so obrestna mera, verjetnost umrljivosti, ..., ki pa se v bodočnosti realizirajo drugače, poleg tega pa imamo kasneje tudi več informacij o poteku zavarovalne pogodbe.

Vrednost matematičnih rezervacij za zavarovanca starega x ob sklenitvi zavarovanja v času t in za zavarovalno polico, ki je aktivna do časa n, $n \geq t$, lahko zapišemo s formulo

$$V_t = \int_t^n v^{\tau-t}{}_{\tau-t}p_{x+t}\{\mu_{x+t}b_\tau - \pi_\tau\}d\tau + b_n v^{n-t}{}_{n-t}p_{x+t},$$

kjer je b_τ, $\tau \in [t, n)$ zavarovalna vsota, ki se izplača v primeru smrti in b_n zavarovalna vsota, ki se izplača v primeru doživetja. Vrednost π predstavlja premijo. Vrednost V_t se imenuje prospektivna matematična rezervacija, saj bodoča izplačila in vplačila diskontiramo v časovno točko t. Lahko bi definirali tudi retrospektivne matemetične rezervacije, kjer bi upoštevali izplačila in vplačila v preteklosti in jih obrestovali v časovno točko t (Bowers et al., 1997, str. 203-225). Pri obeh metodah dobimo popolnoma enako vrednost matematičnih rezervacij. Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij določa, naj bodo matematične rezervacije določene na prospektiven način, razen če to ni mogoče, kot v primeru, ko se premija ob sklenitvi ne določi za celotno trajanje zavarovanja. V tem primeru je bolj običajen retrospektiven način določanja matematičnih rezervacij.

Formula za matematične rezervacije se poenostavi v primeru mešanega življenjskega zavarovanja. Naj bo zavarovanje sklenjeno za obdobje n let in naj se premija plačuje m let, pri čemer je $m < n$. V tem primeru je po preteku časa t po sklenitvi zavarovalne pogodbe vrednost matematičnih rezervacij enaka

$$V_t = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \pi \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, \qquad t < m < n.$$

1.3.3 Thielejeva diferencialna enačba

Vzemimo zavarovalno polico s trajanjem n let ali drugače $t \in (0, n)$. Spreminjanje vrednosti matematičnih rezervacij v majhnem časovnem intervalu $(t, t + dt)$ lahko opišemo s formulo

$$V_t = b_t \mu_{x+t} dt - \pi_t dt + (1 - \mu_{x+t} dt) e^{-rdt} V_{t+dt},$$

kar pomeni, da je vrednost matematičnih rezervacij v času t enaka vsoti izplačanih škod b_t (z verjetnostjo, da zavarovanec umre v časovnem intervalu $(t, t+dt)$), negativni vrednosti vplačanih premij π_t v času t (ob predpostavki, da je zavarovanec živ v času t) in pa seveda diskontirani vrednosti matematičnih rezervacij, potrebnih v času $t + dt$ (z verjetnostjo, da zavarovanec preživi interval $(t, t + dt)$). Če odštejemo na obeh straneh enačbe V_{t+dt}, delimo z dt in naredimo limito, ko gre dt v 0, dobimo enačbo

$$\lim_{dt \to 0} \frac{V_t - V_{t+dt}}{dt} = b_t \mu_{x+t} - \pi_t + \lim_{dt \to 0} \frac{e^{-rdt} - 1 - \mu_{x+t} dt}{dt} V_{t+dt}.$$

Upoštevajoč dejstvo, da je $\lim_{dt \to 0} \frac{e^{-rdt}-1}{dt} = -r$, dobimo naslednjo enačbo

$$\frac{\partial}{\partial t} V_t = \pi_t - b_t \mu_{x+t} + (r + \mu_{x+t}) V_t.$$

Ta enačba se imenuje *Thielejeva diferencialna enačba.* Desna stran enačbe predstavlja spreminjanje matematičnih rezervacij za preživelega zavarovanca glede na čas, in sicer se matematične rezervacije povečajo za razliko med plačano premijo in izplačano škodo (kar je seveda lahko tudi negativno), za obresti rV_t in za sredstva, ki so ostala od tistih zavarovancev, ki so umrli ($\mu_{x+t} V_t$).

Če upoštevamo še robni pogoj

$$V_{n-} = b_n,$$

zgornja diferencialna enačba določa matematično rezervacijo V_t za fiksne b in π. Seveda morata biti b in π usklajena z enačbo principa ekvivalence. Torej $V_0 - \pi_0 = 0$. Thielejeva diferencialna enačba bo v nadaljevanju ključnega pomena, saj bomo z njeno pomočjo numerično določali matematične rezervacije.

Če malo preuredimo Thielejevo enačbo na način

$$\pi_t = \frac{d}{dt}V_t - rV_t + (b - V_t)\mu_{x+t},$$

vidimo, kako se premija v vsakem času t loči na *varčevalni del*

$$\pi_t^s = \frac{d}{dt}V_t - rV_t$$

in *rizični del*

$$\pi_t^r = (b - V_t)\mu_{x+t}.$$

Varčevalni del premije doprinese k vzdrževanju matematičnih rezervacij znesek, ki je potreben nad zasluženimi obrestmi, rizični del premije pa doprinese sredstva, ki so potrebna v višini nad doseženimi vrednostmi matematičnih rezervacij za kritje zavarovalnih škod.

Poglavje 2

Markovske verige v življenjskih zavarovanjih

2.1 Zvezne markovske verige

2.1.1 Proces štetja

Navedimo najprej nekaj definicij, ki so ključnega pomena za nadaljnje razumevanje.

Definicija 2.1.1. Zvezni stohastičen proces na prostoru E, opremljen z σ-algebro $\mathcal{E}$, je družina $(X_t)_{t\in\mathcal{R}^+}$ slučajnih spremenljivk, ki so definirane na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v merljivem prostoru $(E, \mathcal{E})$.

Definicija 2.1.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor. *Filtracija* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ je naraščajoča družina σ- algebr, ki so poddružine v $\mathcal{A}$.

σ- algebra $\mathcal{F}$ predstavlja informacije, ki so na razpolago v času t. Pravimo, da je proces $(X_t)_{t\geq 0}$ prilagojen v $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, če je za vsak t slučajna spremenljivka X_t merljiva v $\mathcal{F}_t$.

Definicija 2.1.3. Naj bo S stohastičen proces na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Par $(S, \mathcal{F}) = \{(S_n, \mathcal{F}_n) : n \geq 0\}$ je *predvidljiv*, če je S_n merljiva slučajna spremenljivka v $\mathcal{F}_{n-1}$ za vse $n \geq 1$.

Predvidljiv proces $(S, \mathcal{F})$ je naraščajoč, če je $S_0 = 0$ in $\mathbb{P}(S_n \leq S_{n+1}) = 1$ za vse n. Proces štetja je stohastičen proces $N = \{N_t\}_{0\leq t\leq T}$, ki prične v $N_0 = 0$ in nato naraste za 1 ob vsakem skoku. Množica skokov je diskretna množica. Naravna filtracija procesa N je $\mathcal{F}^N = \{\mathcal{F}_t^N\}_{0\leq t\leq T}$, kjer je $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{N_s; s \leq t\}$ zgodovina procesa N v času t. To je najmanjša filtracija, v kateri je N prilagojen. Stroga zgodovina procesa N je $\mathcal{F}_{t-}^N$. $\mathcal{F}^N-$ predvidljiv proces $\{\Lambda_t\}_{0\leq t\leq T}$ se imenuje *kompenzator* procesa N, če obstaja proces M, ki je definiran kot

$$M_t = N_t - \Lambda_t$$

in je $\mathcal{F}^N-$ martingal, za katerega je matematično upanje konstantno 0. Ko je Λ absolutno zvezen, kar pomeni, da se da predstaviti kot

$$\Lambda = \int_0^t \lambda_s ds,$$

imenujemo proces λ *jakost* procesa N.

Preden se lotimo markovskih verig, si oglejmo še Doob-Meyerjevo dekompozicijo submartingala, ki jo bomo potrebovali kasneje.

Izrek 2.1.4. *Submartingal* $(Y, \mathcal{F})$ *s končnim matematičnim upanjem se da zapisati kot*

$$Y_n = M_n + S_n,$$

kjer je $(M, \mathcal{F})$ *martingal in* $(S, \mathcal{F})$ *naraščajoč in predvidljiv proces. Razčlenitev je enolična.*

Proces $(S, \mathcal{F})$ se imenuje tudi kompenzator submartingala $(Y, \mathcal{F})$.

Dokaz. Definirajmo M in S na sledeč način: $M_0 = Y_0$, $S_0 = 0$,

$$M_{n+1} - M_n = Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n), \qquad S_{n+1} - S_n = \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) - Y_n,$$

za $n \geq 0$. M je očitno martingal, saj je

$$\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = 0,$$

kar pomeni, da je $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_n) = M_n$. S je očitno naraščajoč in predvidljiv proces.

Da pokažemo enoličnost, predpostavimo, da obstaja še ena razčlenitev in jo označimo z $Y_n = M'_n + S'_n$. Potem velja

$$\begin{aligned} Y_{n+1} - Y_n &= (M'_{n+1} - M'_n) + (S'_{n+1} - S'_n) \\ &= (M_{n+1} - M_n) + (S_{n+1} - S_n). \end{aligned}$$

Če izračunamo pogojno matematično upanje glede na $\mathcal{F}_n$ zgornje enačbe, dobimo $S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} - S_n$, za $n \geq 0$. Glede na začetni pogoj mora veljati $S'_0 = S_0 = 0$ in zato je $S'_n = S_n$. To pa tudi pomeni, da je $M'_n = M_n$. □

2.1.2 Markovske verige

Markovske verige so podrobneje predstavljene v (Grimmett, Stirzaker, 1992, str. 194-270). Tu si oglejmo le najbolj bistvene lastnosti. Naj $Z(t)$ predstavlja stanje posameznika v času (starosti) $t \geq 0$ in naj bo $\{Z(t); t \geq 0\}$ stohastični proces na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Naj bo $\mathcal{Z} = \{1, 2, \ldots, k\}$ končna množica stanj danega stohastičnega procesa $Z(t)$. Stohastični proces $\{Z(t); t \geq 0\}$ je markovska veriga, če za vsak $s, t \geq 0$ in i, j, $z(t) \in \mathcal{Z}$ velja

$$\mathbb{P}(Z(s+t) = j | Z(s) = i, Z(u) = z(u), 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(Z(s+t) = j | Z(s) = i).$$

Torej, kaj se bo dogajalo v bodočnosti s procesom $Z(t)$, to je po trenutku s, je odvisno le od tega, kje je proces v trenutku s in ne od tega, kakšno pot je napravil proces do trenutka s.

Definirajmo prehodne verjetnosti

$$p_{ij}(s, s+t) \equiv \mathbb{P}(Z(s+t) = j | Z(s) = i), \qquad i, j \in \mathcal{Z}$$

in predpostavimo, da je

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(s, s+t) = 1, \qquad \text{za vse}\, t \geq 0$$

in je

$$p_{ij}(t,t) = \begin{cases} 1, & \text{če } i = j, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Za markovsko verigo $Z(t)$ velja,

$$\mathbb{P}[Z(t_h) = j_h, h = 1, \ldots, p] = \prod_{h=1}^{p} p_{j_{h-1} j_h}(t_{h-1}, t_h), \tag{2.2}$$

za $t_1 < \cdots < t_p$ v $[0, n]$ in $j_1, \ldots, j_p \in \mathcal{Z}$.

Prehodne verjetnosti lahko definiramo tudi bolj splošno kot verjetnost prehoda iz stanja j v neko podmnožico stanj $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$

$$p_{j\mathcal{K}}(t, u) = \mathbb{P}(Z(u) \in \mathcal{K} | Z(t) = j) = \sum_{k \in \mathcal{K}} p_{jk}(t, u).$$

Seveda v splošnem primeru, ko vzamemo za množico kar celo množico stanj $\mathcal{Z}$, dobimo

$$p_{j\mathcal{Z}}(t, u) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} p_{jk}(t, u) = 1. \tag{2.3}$$

Definicija 2.1.5. Markovska veriga $\{Z(t); t \geq 0\}$ je *homogena*, če zanjo velja za vsak s, $t \in [0, n]$ in i, $j \in \mathcal{Z}$

$$\mathbb{P}(Z(s+t) = j | Z(s) = i) = \mathbb{P}(Z(t) = j | Z(0) = i).$$

2.1.3 Enačba Chapman-Kolmogorova

Ker so stanja procesa $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ različna in je unija verjetnosti, da je proces v določenem trenutku v enem izmed teh stanj skoraj gotov dogodek, velja

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z(u)=k\,|Z(s)=i) &= \sum_{j\in\mathcal{Z}}\mathbb{P}(Z(t)=j,\, Z(u)=k\,|Z(s)=i)\\ &= \sum_{j\in\mathcal{Z}}\mathbb{P}(Z(t)=j\,|Z(s)=i)\,\mathbb{P}(Z(u)=k\,|Z(s)=i,\, Z(t)=j).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Če je Z markovski proces in $0\leq s\leq t\leq u$, lahko enačbo (2.4) zapišemo

$$p_{ik}(s,u)=\sum_{j\in\mathcal{Z}}p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u). \tag{2.5}$$

Enačba je znana kot *enačba Chapman-Kolmogorova* (Grimmett, Stirzaker, 1992, str. 196).

2.1.4 Jakosti prehodov

Za $i\neq j$ definirajmo

$$\mu_{ij}(t)=\frac{\partial}{\partial t}p_{ij}(v,t)|_{v=t}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t,t+h)-p_{ij}(t,t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t,t+h)}{h},$$

saj je zaradi lastnosti (2.1) $p_{ij}=0$ za $i\neq j$.

Relacija med prehodnimi verjetnostmi in jakostmi prehodov je

$$p_{ij}(t,t+dt)=\mu_{ij}(t)dt+o(dt),\ \text{če}\, i\neq j, \tag{2.6}$$

kjer je $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

Prehodne verjetnosti so na nekem majhnem časovnem intervalu približno proporcionalne dolžini časovnega intervala in faktorji proporcionalnosti so natanko jakosti prehoda med stanji, ki so lahko tudi odvisni od časa. Kako opredeliti majhen časovni interval je odvisno od velikosti jakosti prehoda. Če so $\mu_{jk}(\tau)$ približno konstantni in manjši od 1 za vse $k\neq j$ in $\tau\in[t,t+1]$, potem $\mu_{jk}(t)$ aproksimira verjetnost prehoda $p_{jk}(t,t+1)$. V splošnem lahko jakost prehoda doseže poljubno vrednost in zato je ne smemo mešati z verjetnostmi.

Za $j\notin\mathcal{K}\subset\mathcal{Z}$ definiramo jakost prehoda iz stanja j v množico stanj $\mathcal{K}$ v času t

$$\mu_{j\mathcal{K}}(t)=\lim_{u\to t}\frac{p_{j\mathcal{K}}(t,u)}{u-t}=\sum_{k\in\mathcal{K}}\mu_{jk}(t).$$

V spošnem primeru pa celotno jakost prehoda iz stanja j v času t označimo z $\mu_{j,\mathcal{Z}-\{j\}}(t)$ oziroma skrajšano kot

$$\mu_{j\cdot}(t) = \sum_{k;k\neq j} \mu_{jk}(t).$$

Iz enačb (2.3) in (2.6) dobimo

$$p_{jj}(t, t+dt) = 1 - \mu_{j\cdot}(t)dt + o(dt), \tag{2.7}$$

ki predstavlja verjetnost, da stohastični proces ostane v stanju j na časovnem intervalu $(t, t+dt)$.

2.1.5 Diferencialni enačbi Kolmogorova

Predpostavimo, da je markovski proces Z v stanju j v času t. Napišimo enačbo za verjetnost, da bo proces v stanju k v nekem času u v bodočnosti. Najprej poglejmo, kaj se lahko zgodi v majhnem časovnem intervalu $(t, t+dt]$. Proces lahko ostane v stanju j z verjetnostjo $1 - \mu_{j\cdot}(t)dt$ ali pa skoči v neko drugo stanje g z verjetnostjo $\mu_{jg}(t)dt$. Verjetnost, da bo proces v bodočnosti u v stanju k pogojno na dogodek, da je proces na $(t, t+dt]$ ostal v stanju j, je enaka $p_{jk}(t+dt, u)$. Verjetnost, da bo proces v bodočnosti u v stanju k pogojno na dogodek, da je proces na $(t, t+dt]$ skočil v stanje g, pa je enaka $p_{gk}(t+dt, u)$. Torej je skupna verjetnost, da bo proces Z v času u v stanju k, enaka

$$p_{jk}(t, u) = (1 - \mu_{j\cdot}(t)dt)p_{jk}(t+dt, u) + \sum_{g;g\neq j} \mu_{jg}(t)\, dt\, p_{gk}(t+dt, u) + o(dt), \tag{2.8}$$

Če označimo $d_t p_{jk}(t, u) = p_{jk}(t+dt, u) - p_{jk}(t, u)$ v infinitizimalnem smislu, dobimo

$$d_t p_{jk}(t, u) = \mu_{j\cdot}(t)\, dt\, p_{jk}(t, u) - \sum_{g;g\neq j} \mu_{jg}(t)\, dt\, p_{gk}(t, u). \tag{2.9}$$

Za dana k in u zgornje diferenčne enačbe enolično določajo funkcije $p_{jk}(\cdot, u)$, za $j = 0, \ldots, r$, ob pogoju, da je $p_{jk}(u, u) = \delta_{jk}$. Zgoraj δ_{jk} predstavlja Kronekerjev delta definiran kot

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{če } j = k, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Enačbo (2.9) lahko izpeljemo tudi z uporabo enačbe Chapman-Kolmogorova

$$p_{jk}(t, u) = \sum_{g\in\mathcal{Z}} p_{jg}(t, v)p_{gk}(v, u), \qquad 0 \leq t \leq v < u,$$

in sicer lahko razliko verjetnosti $p_{jk}(t+dt,u)-p_{jk}(t,u)$ zapišemo kot

$$\begin{aligned}p_{jk}(t+dt,u)-p_{jk}(t,u) &= p_{jk}(t+dt,u)-\sum_{g\in\mathcal{Z}}p_{jg}(t,t+dt)p_{gk}(t+dt,u)\\ &= p_{jk}(t+dt,u)-\sum_{g;g\neq j}p_{jg}(t,t+dt)p_{gk}(t+dt,u)-p_{jj}(t,t+dt)p_{jk}(t+dt,u)\\ &= p_{jk}(t+dt,u)(1-p_{jj}(t,t+dt))-\sum_{g;g\neq j}p_{jg}(t,t+dt)p_{gk}(t+dt,u).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Delimo obe strani z dt, upoštevamo enačbo (2.7) in naredimo limito, ko gre $dt\to 0$. Tako dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{jk}(t,u)=p_{jk}(t,u)\mu_{j\cdot}(t)-\sum_{g;g\neq j}p_{gk}(t,u)\mu_{jg}(t). \tag{2.12}$$

Zgornja enačba se imenuje *leva diferencialna enačba Kolmogorova.* Ime izhaja iz dejstva, da odvajamo po začetnem času, ki se v oznakah nahaja na levem mestu v intervalu $[t,u]$.

Zgoraj smo lahko delili z dt in dobili limito le v točkah, kjer so jakosti prehodov zvezne. Ker pa smo privzeli, da so jakosti prehodov le kosoma zvezne, zgornji odvodi obstajajo le kosoma. Zato bomo raje uporabljali diferenčno obliko, saj velja tudi ob naši predpostavki. Seveda obstaja tudi *desna diferencialna enačba Kolmogorova* . To dobimo, če se osredotočimo na končni čas (Norberg, 2001a). S podobnim razmislekom pridemo do enačbe

$$p_{ij}(s,t+dt)=\sum_{g;g\neq j}p_{ig}(s,t)\mu_{gj}(t)dt+p_{ij}(s,t)(1-\mu_{j\cdot}(t)dt)+o(dt), \tag{2.13}$$

torej

$$d_tp_{ij}(s,t)=\sum_{g;g\neq j}p_{ig}(s,t)\mu_{gj}(t)dt-p_{ij}(s,t)\mu_{j\cdot}(t)dt. \tag{2.14}$$

Za dana i in s diferencialne enačbe enolično določajo funkcije $p_{ij}(s,\cdot)$, za $j=0,\ldots,r$, ob pogoju

$$p_{ij}(s,s)=\delta_{ij}.$$

V nekaterih enostavnih primerih imajo diferencialne enačbe analitične rešitve, v splošnem pa jih je potrebno reševati z numeričnimi metodami, kot na primer Runge-Kutta metodo (Dormand, Prince, 1980).

Ko določimo vse enostavne verjetnosti prehodov, lahko izračunamo verjetnost kateregakoli dogodka v $\mathcal{F}_{\{t_1,\ldots,t_r\}}$ iz končno dimenzionalnega verjetnostnega prostora s pomočjo formule (2.2).

Za konec si poglejmo še formulo za verjetnost, da proces $Z(t)$ ostane neprekinjeno v trenutnem stanju neprekinjeno določen čas,

$$p_{\overline{jj}}(t,u)=\mathbb{P}(Z(\tau)=j,\tau\in(t,u]|Z(t)=j).$$

Očitno je $p_{\overline{jj}}(t,u) = p_{\overline{jj}}(t,s)p_{\overline{jj}}(s,u)$ za $t < s < u$. Izberimo $s = t + dt$ in uporabimo enačbo (2.7)

$$p_{\overline{jj}}(t,u) = (1 - \mu_{j\cdot}(t)dt)p_{\overline{jj}}(t+dt,u) + o(dt).$$

Pogoj je $p_{\overline{jj}}(u,u) = 1$. To enačbo zopet nastavimo kot diferenčno enačbo

$$p_{\overline{jj}}(t+dt,u) - p_{\overline{jj}}(t,u) = \mu_{j\cdot}(t)\,dt\,p_{\overline{jj}}(t,u).$$

Delimo s dt, naredimo limito, ko gre dt proti 0 in rešimo enačbo, da dobimo rešitev

$$p_{\overline{jj}}(t,u) = e^{-\int_t^u \mu_{j\cdot}}.$$

2.2 Modeli za različna življenjska zavarovanja

2.2.1 Zavarovanje za riziko smrti

Življenjska doba za zavarovano osebo je modelirana s pozitivno slučajno spremenljivko T s funkcijo preživetja $\overline{F}$. Zavarovanje lahko predstavimo z modelom, ki ima dve stanji: stanje smrti in stanje preživetja. Če stanji označimo z 2 (smrt) in 1 (preživetje), potem lahko proces stanj Z označimo kot

$$Z(t) = 1_{[T \leq t]}, \quad t \in [0,n].$$

Proces Z je v stanju 1, dokler je $T > t$. V primeru, ko je življenjska doba T manjša od časa t, pa pomeni, da je oseba umrla že pred t in tako je trenutno stanje enako 2. Proces Z je zvezen z desne in je očitno markov proces, saj je v stanju 1 preteklost očitna, v stanju 2 pa je očitna prihodnost. Prehodna porazdelitev je

$$p_{11}(s,t) = \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}.$$

Enačba Chapman-Kolmogorova se poenostavi v

$$p_{11}(s,u) = p_{11}(s,t)p_{11}(t,u) = \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)} \cdot \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}(t)},$$

$$p_{11}(s,u) = \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}(s)}.$$

Edina neničelna jakost prehoda je $\mu_{12}(t) = \mu(t)$. Kot vemo, je

$$p_{11}(t,u) = e^{-\int_t^u \mu}.$$[1]

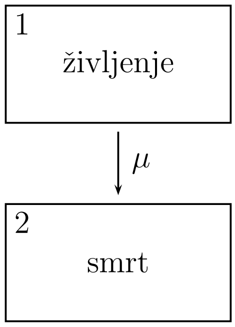
Diferencialna enačba Kolmogorova se poenostavi

$$\tfrac{\partial}{\partial t} p_{11}(v,t) = p_{12}(v,t)\mu_{21}(t) - p_{11}(v,t)\mu_{1\cdot}(t) = -p_{11}(v,t)\mu(t)$$

in zato

$$p_{11}(v,t) = e^{-\int_v^t \mu}.$$

[1] Oznaka μ pod integralskim znakom v tem primeru predstavlja mero $\mu(s)ds$.



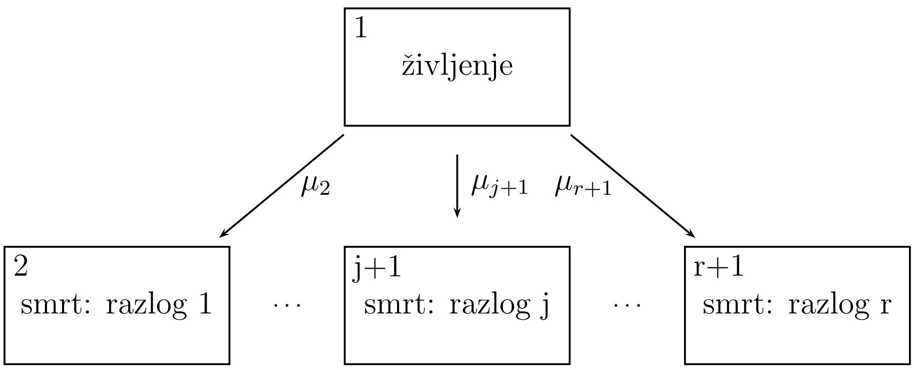
Slika 2.1: Življenjsko zavarovanje, modelirano z dvema stanjema

2.2.2 Zavarovanje za riziko smrti z r riziki

To je posplošitev predhodnega primera v smislu, da zamenjamo eno stanje za rizik smrti z r stanji za različne rizike smrti, na primer smrt zaradi nesreče, smrt zaradi bolezni srca in tako dalje. Skupna jakost prehoda iz stanja 1 oziroma aktivnega stanja v stanje smrti $2, \ldots, r+1$ označimo z

$$\mu_{1\cdot} = \mu(t) = \sum_{j=1}^{r} \mu_{j+1}(t).$$

V formuli smo označili $\mu_{1,j+1}(t)$ z $\mu_{j+1}(t)$, saj je v tem primeru oznaka začetnega stanja 1 nepotrebna, ker je le eno stanje iz katerega sploh lahko gremo v ostala, in ko smo v stanju, ki je različno od 1, se ne moremo več premakniti v nobeno drugo stanje.



Slika 2.2: Življenjsko zavarovanje za riziko smrti z r razlogi za smrt

Prehodna verjetnost, da oseba, stara t let, umre za rizikom j pred letom u, je

$$p_j(t,u) = \int_t^u e^{-\int_t^\tau \mu} \mu_j(\tau) d\tau.$$

Če pogledamo formuli zgoraj, lahko opazimo, da povečanje jakosti prehoda μ_k povzroči zmanjšanje verjetnosti preživetja in ravno tako zmanjšanje verjetnosti smrti za druge rizike smrti $j \neq k$. Ker pa se verjetnosti seštejejo v ena, to pomeni, da se poveča verjetnost smrti zaradi rizika k. V tem smislu lahko pojasnimo povečano smrtnost zaradi bolezni srca in raka, saj je tehnološki razvoj v medicini praktično izničil smrtnost zaradi pljučnice, otroške vročice in številnih drugih bolezni (Norberg, 2001a, str. 33).

2.2.3 Zavarovanje za riziko smrti in invalidnost z možnostjo ozdravitve

Slika 2.3 prikazuje model, primeren za analiziranje zavarovanj z izplačili, ki so odvisna od zdravstvenega stanja zavarovanca. Kot primera vzemimo zdravstveno zavarovanje, pri katerem zavarovanec za čas bolniške prejema rento, in življenjsko zavarovanje, pri katerem je zavarovanec oproščen plačila premije v času, ko je v stanju invalidnosti. V ta model lahko vključimo tudi pokojninska zavarovanja z dodatnimi izplačili za zakonca, kjer stanji 1 in 2 ustrezata stanjema "poročen"in "neporočen".

Za zdravega in aktivnega zavarovanca v času s nam da desna diferencialna enačba Kolmogorova

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{11}(s,t) = p_{12}(s,t)\varrho(t) - p_{11}(s,t)(\mu(t)+\sigma(t)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}p_{12}(s,t) = p_{11}(s,t)\sigma(t) - p_{12}(s,t)(\nu(t)+\varrho(t)).$$

Verjetnost $p_{13}(s,t)$ je določena z zgornjima verjetnostima. Začetna pogoja sta

$$p_{11}(s,s) = 1,$$
$$p_{12}(s,s) = 0.$$

Če so jakosti prehodov zadosti enostavne funkcije, na primer konstantne, lahko najdemo eksplicitno rešitev za verjetnosti prehodov.

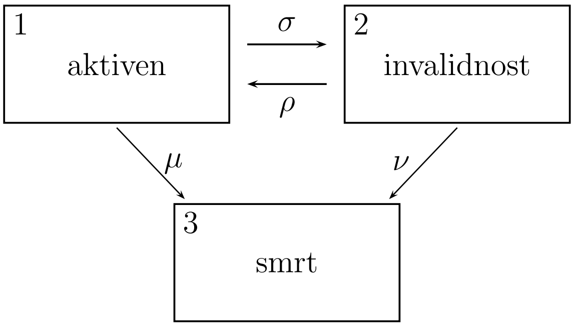
V nadaljevanju predpostavimo, da so $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}$ konstantne za vse t (takšen markovski proces se imenuje *stacionaren* ali *časovno homogen proces*). Ta predpostavka nam pove, da je čas, ki ga proces preživi v vsakem stanju porazdeljen eksponentno. Prav tako so verjetnosti $p_{ij}(s,s+t)$ enake za vse $s \geq 0$ in jih zato lahko označimo s $p_{ij}(t)$.

Izrazimo prehode jakosti in verjetnosti v matrični obliki. Naj bo Q $k \times k$ matrika z (i,j)-tim elementom μ_{ij} in naj bo P $k \times k$ matrika z (i,j)-tim elementom $p_{ij}(t)$. Enačba Chapman-Kolmogorova (2.5) je podana z

$$P(t+u) = P(t)P(u).$$

Podobno lahko diferencialni enačbi Kolmogorova zapišemo kot

$$P'(t) = P(t)Q \tag{2.15}$$



Slika 2.3: Življenjsko zavarovanje za riziko smrti in invalidnosti s tremi stanji

in

$$P'(t) = QP(t), \tag{2.16}$$

z robnim pogojem

$$P(0) = I.$$

Enačbi (2.15) in (2.16) imata rešitev

$$\begin{aligned} P(t) =& e^{Qt} \\ =& I + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + \cdots \end{aligned} \tag{2.17}$$

V kolikor ima matrika Q lastne vrednosti, ki so med sabo različne, na primer $d_1, d_2, \ldots, d_k$, lahko matriko Q predstavimo kot

$$Q = ADA^{-1},$$

kjer je $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k)$. Matrika A je matrika lastnih vektorjev, in sicer je i-ti stolpec matrike A desni lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti d_i. Prehodno matriko $P(t)$ lahko razčlenimo na sledeč način

$$P(t) = A\,\mathrm{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_k})A^{-1}.$$

Torej, problem iskanja prehodnih verjetnosti se prevede na iskanje lastnih vektorjev in lastnih vrednosti matrike jakosti prehodov Q. Predpostavka, da ima Q različne lastne vektorje, ne predstavlja praktičnih omejitev, saj v nasprotnem primeru lahko uporabimo Jordanovo kanonično obliko. V praksi pa imamo opraviti z jakostmi prehoda, ki so odvisne od časa oziroma kosoma konstantne, saj se spreminjajo s starostjo zavarovanca. V tem primeru na vsakem časovnem intervalu, kjer je jakost prehoda konstantna, uporabimo predstavljeno metodo iskanja prehodnih verjetnosti (Jones, 1995, str. 14-16).

2.3 Model standardne zavarovalne pogodbe z več stanji

2.3.1 Zavarovalna polica kot stohastični proces

Vzemimo poljubno zavarovalno polico, izdano v času 0, sklenjeno za n let. Lahko si zamislimo zavarovalno polico za življenjsko, pokojninsko ali invalidsko zavarovanje v poljubni obliki. Običajno so zavarovalne premije in škode vezane na prehod police med stanji, ki so določene v zavarovalni pogodbi.

Predpostavimo, da ima polica končno število stanj. Označimo množico stanj z $\mathcal{Z} = \{1, \ldots, r\}$. Naj bodo stanja taka, da je polica v vsakem trenutku lahko le v enem stanju. Pričnemo v času 0 v začetnem stanju 1. Stanje police v času t označimo z $Z(t)$.

$Z(t)$ je funkcija, ki slika iz $[0, n]$ v $\mathcal{Z}$, je zvezna z desne in ima končno mnogo skokov. Zaradi predpostavke, da je zavarovalna polica na začetku v stanju 1, je $Z(0) = 1$. Da bi zajeli naključno pot, ki jo naredi zavarovalna polica, jo modeliramo kot stohastični proces na nekem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.3.2 Modeliranje izplačil in vplačil za zavarovalno polico

Definirajmo procesa

$$I_j(t) = 1_{[Z(t)=j]}$$

in

$$N_{jk}(t) = \sharp\{\tau; Z(\tau-) = j, Z(\tau) = k, \tau \in (0, t]\}.$$

Proces I_j ima vrednost 0, če proces Z ni v stanju j oziroma 1, če je proces Z v stanju j. Proces N_{jk} pa šteje prehode iz stanja j v stanje k ($k \neq j$) v časovnem intervalu $(0, n]$. Oba zgoraj definirana procesa sta vezana na proces Z. Ker je Z zvezen z desne s končno mnogo skoki, lahko enako zaključimo tudi za procesa I_j in N_{jk}.

Stohastična procesa I_j in N_{jk} povezuje enačba

$$dI_j(t) = dN_{\cdot j}(t) - dN_{j\cdot}(t),$$

kjer pika v indeksu pomeni vsoto po vseh stanjih, različnih od stanja zraven pike oziroma

$$N_{j\cdot} = \sum_{k; k \neq j} N_{jk}. \tag{2.18}$$

Enačba (2.18) nam pove, da ko se I_j poveča (zmanjša) za 1, pomeni, da je proces naredil skok v stanje j oziroma iz stanja j.

Denarni tok police je sestavljen iz izplačanih škod brez vplačanih premij. V zavarovalništvu imamo opraviti z zavarovalno pogodbo med zavarovalnico in stranko. Zavarovalna pogodba nalaga stranki plačilo premije, zavarovalnici pa plačilo za nastale in vnaprej v pogodbi določene škode. Vse te denarne tokove police označimo z $B(t)$. Čas $t = 0$ predstavlja začetek zavarovanja. Tako dobimo enačbo

$$dB(t) = \sum_k I_k(t) dB_k(t) + \sum_{l;l \neq k} b_{kl}(t) dN_{kl}(t), \tag{2.19}$$

kjer je

$$dB_k(t) = b_k(t)dt + B_k(t) - B_k(t-), \quad \text{za vsak}\, k.$$

Funkcija dB_k je deterministična in predstavlja plačila v stanju k. Funkcija b_{kl} je prav tako deterministična funkcija, ki predstavlja plačila po zavarovalni polici ob prehodu iz stanja k v stanje l. Funkcijo b_k si lahko predstavljamo kot zvezno neto plačilo v stanju k, funkcija b_{kl} pa predstavlja zavarovalno vsoto ob prehodu v stanje k. Kadar je razlika $B_k(t) - B_k(t-)$ različna od 0, le ta predstavlja plačilo zavarovalne vsote v času t, v kolikor zavarovanec ostane v istem stanju k. Funkciji b_k in b_{kl} naj bosta končni in kosoma zvezni. Množica nezveznosti za poljubno življenjsko rento B_k naj bo $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \ldots, t_q\}$.

Pozitivne vrednosti funkcij dB_k in b_{kl} predstavljajo škode in negativne vrednosti predstavljajo premije. V splošnem so premije le v obliki rent. Če $t \notin [0, n]$, potem so vsa plačila enaka 0.

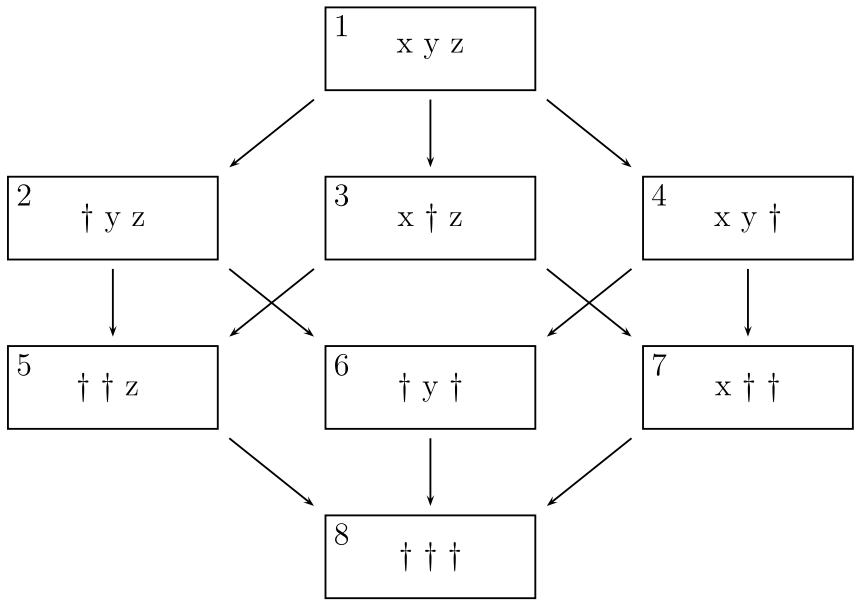
Navedimo nekaj primerov. Vzemimo najprej diagram 2.1, ki predstavlja življenjsko zavarovanje za zavarovanca s plačili, ki so odvisna le od preživetja oziroma smrti zavarovanca. Naj ZV označuje zavarovalno vsoto. Naštejmo osnovna zavarovanja:

- n-letno življenjsko zavarovanje z ZV za smrt enako 1 ($b_{12} = 1$), torej $dB(t) = dN_{12}(t)$;
- n-letno mešano življenjsko zavarovanje z ZV za smrt enako 1 in ZV za preživetje enako 1 ($b_{12} = 1, \quad \Delta B_1(t) = 0, t \neq n$ in $\Delta B_1(t) = 1, t = n$), torej $dB(t) = dN_{12}(t) + I_1(t)\Delta B_1(t)$;
- n-letno rento plačljivo enkrat letno ($\Delta B_1(t) = 1, \quad t = 1, \ldots, n$), torej $dB(t) = I_1(t)\Delta B_1(t)$;
- n-letno rento plačljivo zvezno in sicer 1 letno ($b_1(t) = 1, \quad t \in (0, n)$), torej $dB(t) = I_1(t)\, dt$ na $(0, n)$;
- $(n - m)$-letno odloženo rento za m let, ki plačuje zvezno 1 letno ($b_1(t) = 1, \quad t \in (m, n)$), torej $dB(t) = I_1(t)\, dt$ na (m, n);

- n-letno življenjsko zavarovanje z ZV za smrt enako b in zvezno letno premijo c $dB(t) = bdN_{12}(t) - cI_1(t)dt$ za $0 \leq t < n$ in $dB(t) = 0$ za $t \geq 0$.

Diagram 2.3 predstavlja zavarovanje, kjer je izplačilo škode zavarovancu odvisno od zdravstvenega stanja zavarovanca. Primer takega zavarovanja je n-letno mešano življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto za smrt enako b, zavarovalno vsoto za preživetje enako b ter zvezno letno premijo c, vendar le ko je zavarovanec aktiven. Tu lahko plačila, povezana z zavarovalno polico, opišemo kot $dB(t) = b(dN_{13}(t) + dN_{23}(t)) - cI_1(t)dt$, za $0 \leq t \leq n$ in $dB(t) = 0$ za $t > n$.

Podajmo še primer zavarovanja za tri življenja. Slika 2.4 prikazuje model stanj.



Slika 2.4: Zavarovanje, ki vključuje tri življenja x, y, z. Smrt je prikazana z znakom †.

Življenjsko n-letno zavarovanje za tri osebe, izplača zavarovalno vsoto b, ko zadnji izmed treh zavarovanih oseb umre, in zvezno letno premijo c, ki se plačuje le, dokler so vsi trije zavarovanci živi. V tem primeru je

$$dB(t) = b(dN_{5,8}(t) + dN_{6,8}(t) + dN_{7,8}(t)) - cI_1(t)dt, \quad \text{za}\, 0 \leq t < n$$

in

$$dB(t) = 0 \quad \text{za}\, t \geq n.$$

2.3.3 Obresti

Predpostavimo, da zavarovalnica vlaga sredstva za kritje obveznosti po zavarovalnih pogodbah tako, da doseže zvezen donos $r(t)$ v času t. Torej, za vnaprej dani scenarij obrestnih mer $r(\cdot)$, je vrednost ene enote, vložene v času τ, enaka $e^{\int_\tau^t r}$, če $t \geq \tau$ in $e^{-\int_\tau^t r}$, če $t \leq \tau$. Predpostavimo seveda, da je donos r kosoma zvezen in da je $\int_0^T r$ končen. Definirajmo tudi funkcijo diskontiranja z

$$v_t = e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}.$$

2.4 Izračun višine matematičnih rezervacij in premij

Že prej smo nekaj povedali o matematičnih rezervacijah. Kot smo že omenili, mora zavarovatelj za dolgoročna zavarovanja po zakonu oblikovati matematične rezervacije za kritje vseh bodočih obveznosti, določenih v zavarovalnih pogodbah. Ker pa se bodoče obveznosti težko natančno določijo, saj v času izračuna nimamo podatkov o vseh parametrih, je matematična rezervacija le približek, ki ga določimo na osnovi informacij, ki so nam na voljo v času izračuna. Višina matematičnih rezervacij je tako definirana v času t kot pogojna pričakovana vrednost razlike bodočih škod in bodočih premij, pri dani zgodovini $\mathcal{F}_t$, z naslednjo formulo

$$V(t) = \mathbb{E}[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r} dB(\tau) | \mathcal{F}_t].$$

Zvezne formule se da aproksimirati z markovskimi verigami kot

$$V(t) = V_{Z(t)}(t) = \sum_j I_j^Z(t) V_j(t),$$

kjer je V_j pogojno matematično upanje sedanjih vrednosti bodočih neto izplačil, ko je stohastični proces Z v stanju j oziroma s formulo:

$$\begin{aligned}
V_j(t) &= \mathbb{E}[\int_t^n e^{-\int_t^\tau r} dB(\tau) | Z(t) = j] \\
&= \int_t^n e^{-\int_t^\tau r} \sum_g p_{jg}(t,\tau) \left(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau \right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Enačbo (2.20) dobimo, če zamenjamo integral in matematično upanje ter vstavimo formulo za $dB(\tau)$. Pri tem uporabimo naslednji enakosti

$$\mathbb{E}[I_g(\tau) | Z(t) = j] = p_{jg}(t,\tau),$$

$$\mathbb{E}[dN_{gh}(\tau)|Z(t)=j] = p_{jg}(t,\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau.$$

Enačbo (2.20) lahko razložimo na sledeč način. Zavarovalna polica je v stanju k v času τ z verjetnostjo $p_{jk}(t,\tau)$. V kolikor v nekem majhnem intervalu dolžine $d\tau$ okoli časa τ tudi ostane v stanju k, je $dB_k(\tau)$ enak kar življenjski renti na tem časovnem intervalu. Torej je pričakovana vrednost tega slučajnega dogodka v času t enaka

$$p_{jk}(t,\tau)e^{-\int_t^\tau r}dB_k(\tau).$$

Z verjetnostjo $p_{jk}(t,\tau)\mu_{kl}(\tau)d\tau$ pa zavarovalna polica skoči iz stanja k v stanje l v majhnem časovnem intervalu $d\tau$ okoli časa τ. V tem primeru je pričakovana vrednost slučajnega dogodka v času t enaka

$$p_{jk}(t,\tau)\mu_{kl}(\tau)d\tau e^{-\int_t^\tau r}b_{kl}(\tau).$$

Ko seštejemo po vseh bodočih t in vseh vrstah izplačil, dobimo natanko enačbo (2.20).

Naj bo $0 \leq t < u < n$. Če ločimo enačbo (2.20) na časovne intervale $(t,u]$ in $(u,n]$ na desni strani enačbe in uporabimo enačbo Chapman-Kolmogorova na drugem intervalu, dobimo naslednje

$$\begin{aligned}
V_j(t) &= \int_t^u e^{-\int_t^\tau r}\sum_g p_{jg}(t,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) + \\
&\quad + \int_u^n e^{-\int_t^\tau r}\sum_g p_{jg}(t,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) \\
&= \int_t^u e^{-\int_t^\tau r}\sum_g p_{jg}(t,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) + \\
&\quad + e^{-\int_t^u r}\int_u^n e^{-\int_u^\tau r}\sum_g \sum_{l\in\mathcal{Z}} p_{jl}(t,u)p_{lg}(u,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) \\
&= \int_t^u e^{-\int_t^\tau r}\sum_g p_{jg}(t,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) + \\
&\quad + e^{-\int_t^u r}\sum_{l\in\mathcal{Z}} p_{jl}(t,u)\int_u^n e^{-\int_u^\tau r}\sum_g p_{lg}(u,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) \\
&= \int_t^u e^{-\int_t^\tau r}\sum_g p_{jg}(t,\tau)(dB_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} b_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau) + \\
&\quad + e^{-\int_t^u r}\sum_{l\in\mathcal{Z}} p_{jl}(t,u)V_l(u).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

S pomočjo enačbe (2.21), v kateri smo poslali u proti t, lahko izpeljemo *Thielejevo diferencialno enačbo*, ki opisuje dinamiko matematičnih rezervacij.

Predpostavimo, da je polica v stanju j v času $t \notin \mathcal{D}$, kjer je $\mathcal{D}$ množica nezveznosti za življenjsko rento B_k. Glede na to, kaj se zgodi v majhnem časovnem intervalu $(t, t+dt]$ (ki ne preseka $\mathcal{D}$), lahko zapišemo

$$\begin{aligned} V_j(t) &= b_j(t)dt + \sum_{k;k\neq j} \mu_{jk}(t)\,dt\,b_{jk}(t) + (1-\mu_{j\cdot}(t)dt)e^{-r(t)dt}V_j(t+dt) \\ &+ \sum_{k:k\neq j} \mu_{jk}(t)\,dt\,e^{-r(t)dt}V_k(t+dt). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Nastavimo diferenčno enačbo $V_{t+dt} - V_t$, delimo z dt in nastavimo limito, ko gre dt proti 0. Dobimo Thielejevo diferencialno enačbo s kosoma zveznimi koeficienti za prospektivno matematično rezervacijo

$$\frac{d}{dt}V_j(t) = (r(t)+\mu_{j\cdot}(t))V_j(t) - \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}(t)V_k(t) - b_j(t) - \sum_{k;k\neq j} b_{jk}(t)\mu_{jk}(t). \tag{2.23}$$

Diferencialne enačbe so dobro definirane na odprtih intervalih (t_{p-1}, t_p), kjer je $p = 1, 2, \ldots, q$, in morajo zadoščati robnemu pogoju

$$V_j(t_p-) = (B_j(t_p) - B_j(t_p-)) + V_j(t_p), \qquad p = 1, \ldots, q, j \in \mathcal{Z}.$$

Skupaj z robnim pogojem diferencialne enačbe določajo funkcije $V_j(t)$ enolično.

V točkah zveznosti funkcij b_j, b_{jk}, μ_{jk} in r ni problemov z diferenciabilnostjo funkcij V_j, saj je desna stran zgornje enačbe zvezna. V točkah, kjer pa so funkcije na desni strani enačbe nezvezne, pa $\frac{d}{dt}V_j$ ne obstaja. Ker je takih točk le končno mnogo, in imajo tako mero 0, ne vplivajo na reševanje diferencialne enačbe (2.23).

2.5 Višji momenti sedanjih vrednosti in ocena tveganja

Višji momenti sedanjih vrednosti neto izplačil za zavarovalni portfelj so koristni za merjenje nihanja premij in vrednosti matematičnih rezervacij. V kolikor so variiranja večja, je dobro vsaj del teh nihanj vključiti v premijo oziroma matematično rezervacijo (Norberg, 1995a) kot varnostno rezervo. Ravno tako tudi uporabimo višje momente za določitev ocene tveganja zavarovalnega portfelja.

Predpostavimo, da imamo standardno zavarovalno polico. Množica časovnih točk, v katerih so možna izplačila večjih zavarovalnih vsot pri plačilih rent oziroma točk nezveznosti funkcije $V(t,u)$, je $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, kjer je $t_0 = 0$ in $t_m = n$. Označimo z $V(t,u)$ sedanjo vrednost plačil po zavarovalni pogodbi v časovnem intervalu $(t,u]$ v času t. Naj bo $V(t) = V(t,n)$ sedanja vrednost vseh bodočih neto izplačil. Želimo določiti višje momente $V(t)$ in jih označimo z

$$V_j^{(q)}(t) = \mathbb{E}[V(t)^q | Z(t) = j], \qquad q = 1, 2, \ldots.$$

Predpostavimo, da velja $\mathbb{E}(\int_0^n vd|B|)^q < \infty$ in da so funkcije r, b_j, b_{jk}, in μ_{jk} kosoma zvezne.

Izrek 2.5.1. *Funkcije $V_j^{(q)}(t)$ so določene z diferencialnimi enačbami*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_j^{(q)}(t) &= (qr(t) + \mu_{j\cdot}(t))V_j^{(q)}(t) - qb_j(t)V_j^{(q-1)}(t) \\ &- \sum_{k:k\neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (b_{jk}(t))^p V_k^{q-p}(t), \end{aligned} \tag{2.24}$$

ki so dobro definirane na intervalu $(0, n) \setminus \mathcal{D}$. Robni pogoj je

$$V_j^{(q)}(t-) = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (B_j(t) - B_j(t-))^p V_j^{(q-p)}(t), \tag{2.25}$$

$t \in \mathcal{D}$.

Dokaz. Zapišimo konstantno obrestno mero v obliki $r(t) = \sum_j I_j(t)r_j$. Če je obrestna mera konstantna, so vsi r_j med seboj enaki. Definirajmo funkcije

$$\widetilde{V}_j^{(q)}(t) = e^{-q\int_0^t r(s)ds} V_j^{(q)}(t) = v_t^q V_j^{(q)}(t). \tag{2.26}$$

Odvod zgornjih funkcij je

$$d\widetilde{V}_j^{(q)}(t) = -qv_t^q \sum_j I_j(t)r_j(t)\, dt\, V_j^{(q)}(t) + v_t^q dV_j^{(q)}(t). \tag{2.27}$$

Naj bo $\mathcal{F}_t$ informacija, ki jo vsebuje proces štetja N_{jk} do časa t, to pomeni, da je $\mathcal{F}_t$ najmanjša σ-algebra generirana z $N_{jk}(\tau)$, $j \neq k$, $0 < \tau \leq t$. Za vsak q definiramo martingal $M^{(q)}$ kot

$$M_t^{(q)} = \mathbb{E}[(\int_0^n vdB)^q | \mathcal{F}_t].$$

Če razčlenimo q-to potenco integrala $\int_0^n vdB = \int_0^t vdB + \int_t^n vdB$ z binomsko formulo dobimo

$$M_t^{(q)} = \mathbb{E}[\sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (\int_0^t vdB)^p (\int_t^n vdB)^{(q-p)} | \mathcal{F}_t].$$

Definirajmo funkcijo $U_t = \int_0^t vdB$. Opazimo lahko, da je neodvisna od σ-algebre $\mathcal{F}_t$ in zato velja $\mathbb{E}[U_t|\mathcal{F}_t] = U_t$. Uporabimo enakost

$$\mathbb{E}[(\int_t^n vdB)^{q-p} | \mathcal{F}_t] = \sum_j I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)$$

in zapišemo

$$M_t^{(q)} = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \sum_j U_t^p I_j(t) \widetilde{V}_j^{(q-p)}(t).$$

Izberemo le desno-zvezni del funkcije $M_t^{(q)}$. Tako so desno-zvezni tudi $\widetilde{V}_j^{(q)}(t)$, saj sta U_t in $I_j(t)$ tudi desno-zvezni funkciji. Ta argument lahko ponovimo za vse q. V diferencialni obliki zapišemo

$$dM_t^{(q)} = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \sum_j d\left(U_t^p I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)\right). \tag{2.28}$$

To odvajamo in označimo zvezni del funkcije X z $\bar{X}$.

$$\begin{aligned} d\left(U_t^p I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)\right) = &\sum_j \Big[pU_t^{p-1}d\bar{U}_t I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) \\ &+ U_t^p d\bar{I}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) \\ &+ U_t^p I_j(t)d\bar{\widetilde{V}}_j^{(q-p)}(t) \\ &+ U_t^p I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p I_j(t-)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\Big]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Opazimo naslednje:

1. Prvi člen na desni strani enačbe (2.29) vsebuje $d\bar{U}_t$, kar lahko zapišemo kot $d\bar{U}_t = v_t \sum_k I_k(t)b_k(t)dt$ in uporabimo dejstvo $I_k(t)I_j(t) = I_j(t)\delta_{jk}$.

2. Drugi člen na desni strani enačbe na desni strani enačbe (2.29) je ničeln, saj je zvezni del funkcije $I_j(t)$ konstanta.

3. Zadnja dva člena na desni strani (2.29) predstavljata skok funkcije $U_t^p I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)$, ki pa ima lahko skok le iz dveh razlogov:

   (a) Zaradi skoka v novo stanje. V tem primeru se lahko enačbi, ki predstavljata skok, zapišeta kot

   $$\sum_{j\neq k} \left((U_{t-} + v_t b_{jk}(t))^p \widetilde{V}_k^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p \widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right) dN_{jk}(t).$$

   (b) Zaradi nezveznosti rente v istem stanju. V tem primeru se lahko enačbi, ki predstavljata skok, zapišeta kot

   $$\sum_j I_j(t) \left((U_{t-} + v_t \Delta B_j(t))^p \widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p \widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right),$$

   ki pa je lahko različen od nič le za čase $t \in \mathcal{D}$.

V zgornjih enačbah lahko zamenjamo $I_j(t-)$ z $I_j(t)$, saj se ujemata z verjetnostjo 1 na $\mathcal{D}$. Zaradi istega razloga so prispevki zveznih skokov rent in prehodov med stanji ničelni z verjetnostjo 1 in jih lahko zanemarimo. Zaradi skoraj gotove zveznosti funkcije

$\int_t^n vdB$ na množici $t \notin \mathcal{D}$ so funkcije $\widetilde{V}_j^{(q-p)}$ zvezne v teh točkah in nimajo drugih skokov. Definirajmo še okrajšave za diskontirane vrednosti funkcij

$$\widetilde{b}_j(t) = v_t b_j(t), \quad \widetilde{b}_{jk}(t) = v_t b_{jk}(t), \quad \Delta\widetilde{B}_j(t) = v_t \Delta B_j(t)$$

in združimo zgoraj napisane ugotovitve

$$\begin{aligned} d\left(U_t^p I_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)\right) = &\sum_j I_j(t)\left(pU_t^{p-1}\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)dt + U_t^p d\bar{\widetilde{V}}_j^{(q-p)}(t)\right) \\ &+ \sum_{k\neq j}\left((U_{t-}+\widetilde{b}_{jk}(t))^p\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right)dN_{jk}(t) \\ &+ \sum_j I_j(t)\left((U_{t-}+\Delta\widetilde{B}_j(t))^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Če uporabimo enačbo (2.30) v (2.28) in uporabimo

$$dM_{jk}(t) = dN_{jk}(t) - I_j(t)\mu_{jk}(t)dt,$$

upoštevajoč splošno pravilo $X_{t-}dt = X_t dt$, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} dM_t^{(q)}(t) - &\sum_{k\neq j}\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left((U_{t-}+\widetilde{b}_{jk}(t))^p\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right)dM_{jk}(t) = \\ = &\sum_j I_j(t)\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}[pU_t^{p-1}\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)dt + U_t^p d\bar{\widetilde{V}}_j^{(q-p)}(t) \\ &+ \sum_{k;k\neq j}\left((U_t+\widetilde{b}_{jk}(t))^p\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t) - U_t^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)\right)\mu_{jk}(t)dt] \\ &+ \sum_j I_j(t-)\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left((U_{t-}+\Delta\widetilde{B}_j(t))^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Oglejmo si funkcijo $d\bar{\widetilde{V}}_j^{(q-p)}(t)$ in jo pomnožimo z $I_j(t)$. Po (2.27) produkt lahko zapišemo kot

$$d\bar{\widetilde{V}}_j^{(q-p)}(t) = -qv_t^q r_j(t)\,dt\,V_j^{(q)}(t) + v_t^q d\bar{V}_j^{(q)}(t). \tag{2.32}$$

To uporabimo v enačbi (2.31).

V enačbi (2.31) je leva stran enačbe enaka razliki diferencialov martingalov. Torej mora biti tudi desna stran enačbe diferencial martingalov. Martingal pa je predvidljiv in ima omejeno variacijo, torej mora biti konstanten zaradi Doob-Meyerjeve dekompozicije. Zaključimo lahko, da morata imeti tako diskretni kot zvezni del dekompozicije martingala prirastke, ki so identično enaki nič. To pa je res za vse možne izide indikatorskega procesa natanko takrat, ko je

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{p=1}^{q} \binom{q}{p} pU_t^{p-1}\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)dt \\
&+ \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} U_t^p d\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) \\
&+ \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \sum_{k;k\neq j} \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} U_t^l(\widetilde{b}_{jk}(t))^{p-l}\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t)\mu_{jk}(t)dt \\
&- \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} U_t^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t)\mu_{j\cdot}(t)dt
\end{aligned} \tag{2.33}$$

za vse j in vse $t \in (0,n) \setminus \mathcal{D}$ in

$$0 = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (\sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} U_{t-}^l(\Delta\widetilde{B}_j(t))^{p-l}\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t) - U_{t-}^p\widetilde{V}_j^{(q-p)}(t-)) \tag{2.34}$$

za vse $t \in \mathcal{D}$.

Najprej pokažimo, da je enačba (2.24) ekvivalentna enačbi (2.33). Uporabimo enakost

$$\binom{q}{p} p = \binom{q}{p-1}(q-(p-1))$$

v prvem členu desne strani enačbe (2.33)

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{q} \binom{q}{p-1}(q-(p-1))U_t^{p-1}\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-1-(p-1))}(t)dt \\
&= \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p}(q-p)U_t^p\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-1-p)}(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Definirajmo $\widetilde{V}_j^{(-1)}(t) = 0$. Tretji člen desne strani enačbe (2.33) lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \sum_{k;k\neq j} \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} U_t^l(\widetilde{b}_{jk}(t))^{p-l}\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t)\mu_{jk}(t)dt \\
&= \sum_{l=0}^{q} U_t^l \sum_{p=l}^{q} \binom{q}{p}\binom{p}{r} \sum_{k\neq j} (\widetilde{b}_{jk}(t))^{p-l}\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t)\mu_{jk}(t)dt \\
&= \sum_{l=0}^{q} U_t^l \sum_{p=l}^{q} \binom{q}{p}\binom{q-l}{p-l} \sum_{k\neq j} (\widetilde{b}_{jk}(t))^{p-l}\widetilde{V}_k^{(q-l-(p-l))}(t)\mu_{jk}(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Za zadnjo enakost smo uporabili enačbo

$$\binom{q}{p}\binom{p}{l} = \binom{q}{l}\binom{q-l}{p-l}.$$

Če zamenjamo $p-l$ s p in zamenjamo imena indeksov, ki tečejo v vsotah, dobimo:

$$\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_{k;k\neq j}\sum_{l=0}^{p}\binom{p}{l}U_t^l(\widetilde{b}_{jk}(t))^{p-l}\widetilde{V}_k^{(q-p)}(t)\mu_{jk}(t)dt\\&=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}U_t^p\sum_{l=0}^{q-p}\binom{q-p}{l}\sum_{k\neq j}(\widetilde{b}_{jk}(t))^l\widetilde{V}_k^{(q-p-l)}(t)\mu_{jk}(t)dt.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Zgornje izpeljave uporabimo v enačbi (2.33) in združimo člene z istimi potencami U_t, kar nas privede do enačbe

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}U_t^p dQ_j^{(q-p)}(t),$$

kjer smo definirali

$$\begin{aligned}dQ_j^{(q)}(t)&=q\widetilde{b}_j(t)\widetilde{V}_j^{(q-1)}(t)dt+d\overline{\widetilde{V}}_j^{(q)}(t)\\&+\sum_{l=0}^{q}\binom{q}{l}\sum_{k\neq j}(\widetilde{b}_{jk}(t))^l\widetilde{V}_k^{(q-l)}(t)\mu_{jk}(t)dt\\&-\widetilde{V}_j^{(q)}(t)\mu_{j\cdot}(t)dt.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Jasno je, da je $dQ_j^{(0)}(t)\equiv 0$, in zato je po indukciji tudi $dQ_j^{(q)}(t)\equiv 0$ za vse q. Če združimo to z (2.26) in (2.32), smo dokazali (2.24). Prav tako lahko zaključimo, da odvodi $\frac{dV_j^{(q)}(t)}{dt}$ obstajajo v tistih točkah $t\in(0,n)\setminus\mathcal{D}$, kjer so funkcije $r(t)$, $b_j(t)$, $b_{jk}(t)$ in $\mu_{jk}(t)$ zvezne.
Končno, pogoj (2.25) je dobljen iz (2.34), če ponovimo izračune v (2.37). □

Centralni momenti so lažje predstavljivi, saj opisujejo nihanja okoli povprečja. Označimo z $m_j^{(q)}(t)$ q-ti centralni moment.

$$\begin{aligned}m_j^{(1)}(t)&=V_j^{(1)}(t),\\m_j^{(q)}(t)&=\sum_{p=0}^{q}(-1)^{q-p}\binom{q}{p}V_j^{(p)}(t)(V_j^{(1)}(t))^{q-p}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

2.5.1 Ocena tveganja portfelja življenjskih zavarovanj

Naj bo Y slučajna spremenljivka, ki predstavlja sedanjo vrednost vseh bodočih neto obveznosti v celotnem zavarovalnem portfelju. Označimo q-ti centralni moment slučajne spremenljivke Y z $m^{(q)}$. Aproksimirajmo z $y_{1-\varepsilon}$ vrednost slučajne spremenljivke Y, pri kateri je verjetnost, da je Y manjša od $y_{1-\varepsilon}$ enaka $1-\varepsilon$ kot

$$y_{1-\varepsilon} = m^{(1)} + c_{1-\varepsilon}\sqrt{m^{(2)}} + \frac{c_{1-\varepsilon}^2 - 1}{6}\frac{m^{(3)}}{m^{(2)}},$$

kjer je $c_{1-\varepsilon}$ zgornji ε-fraktil za standardno normalno slučajno spremenljivko (Norberg, 2001a, str. 43). Vrednost $y_{1-\varepsilon}$ lahko razumemo kot minimalni kapital, ki je potreben za kritje matematičnih rezervacij v določenem trenutku. Matematične rezervacije je mogoče razdeliti na *premijski del*, $m^{(1)}$ in pa *fluktuacijski del*, $y_{1-\varepsilon} - m^{(1)}$. Za oceno tveganosti portfelja lahko uporabimo koeficient

$$R = \frac{y_{1-\varepsilon} - m^{(1)}}{P},$$

kjer je P primerno izbrana mera velikosti portfelja, npr. skupna letna premija.

2.6 Numerični izračuni

2.6.1 Metoda izračuna

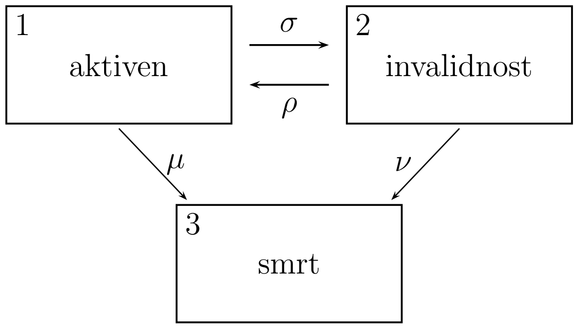
Rešitev želimo poiskati na intervalu $[0, n]$. Dani interval razdelimo na majhne podintervale $[t_s, t_{s+1}]$, kjer je $s = 0, \ldots, m$ in je $t_0 = 0$ in $t_m = n$. Najprej rešimo sistem diferencialnih enačb na zadnjem intervalu $[t_{m-1}, n]$, na katerem $V_j^{(q)}$ zadošča robnemu pogoju

$$V_j^{(q)}(n-) = (B_j(n) - B_j(n-))^q,$$

saj je v enačbi (2.25) $V_j^{(q)}(n) = \delta_{q0}$ (Kroneckerjev delta). Nato, v kolikor je $m > 1$, rešimo sistem diferencialnih enačb za naslednji interval, in sicer (t_{m-2}, t_{m-1}) z robnim pogojem (2.25) s $t = t_{m-1}$. Tako nadaljujemo, dokler ne dosežemo začetne točke $t = 0$. Seveda pa si lahko pomagamo z že obstoječimi metodami za reševanje sistemov diferencialnih enačb, ki so običajno že vgrajene v matematične programe in so osnovane na numeričnih metodah, kot so Runge-Kutta metoda in podobne. Za numerično reševanje primerov v nadaljevanju sem uporabljala MATLAB®, v katerem je že vgrajena funkcija, ki uporablja metodo Runge-Kutta. Posvetimo se sedaj praktični uporabi teorije, ki smo jo obdelali do sedaj.

2.6.2 Primeri življenjskega zavarovanja, modeliranega s tremi stanji

V modelu za življenjska zavarovanja bomo predpostavili, da so vplačila in izplačila za izbrano zavarovalno polico markovska veriga na treh stanjih, in sicer stanje 1 (zavarovanec aktiven), stanje 2 (zavarovanec invalid) in stanje 3 (smrt). Izračunali bomo prve tri momente (povprečje, varianco in gladkost) za zavarovanja z različnimi vplačili oziroma vplačili.



Slika 2.5: Življenjsko zavarovanje s tremi stanji

Predpostavimo, da je obrestna mera konstantna, in sicer 2.75% letno, kar lahko zapišemo

$$r = \ln(1.0275).$$

Nadalje predpostavimo, da so jakosti prehodov med stanji odvisne le od starosti zavarovanca x, in sicer

$$\begin{aligned}\mu_x &= \nu_x = 0.0005 + 0.000075858 \cdot 10^{0.038x},\\ \sigma_x &= 0.0004 + 0.0000034674 \cdot 10^{0.06x},\\ \rho_x &= 0.005.\end{aligned} \tag{2.40}$$

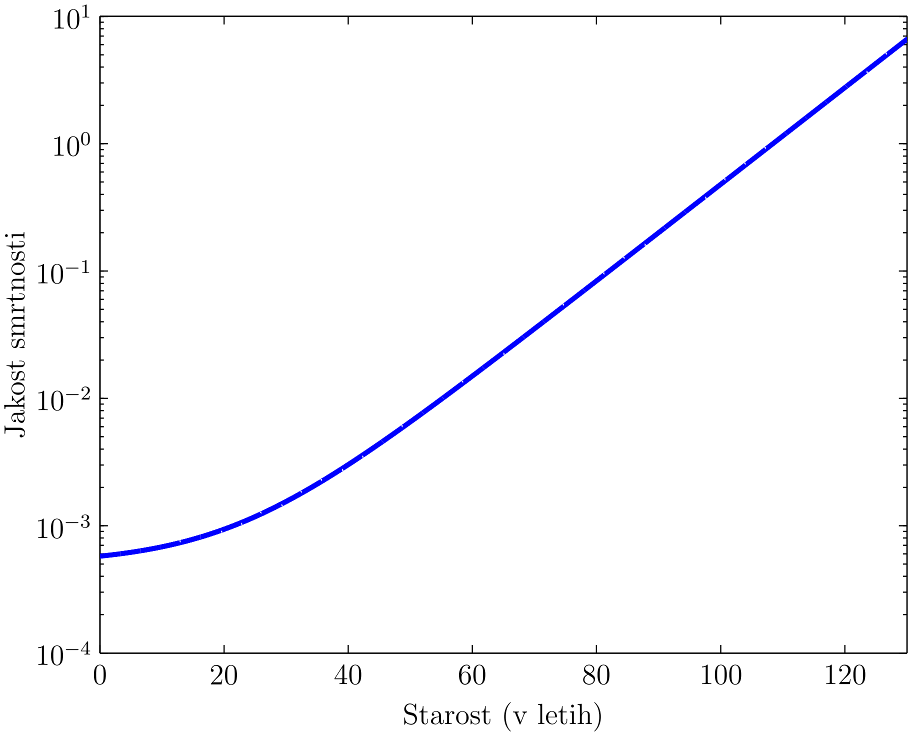
Jakosti prehodov μ, ν in σ so bile določene tako, da so mortalitetne tablice za moške, ki jih uporabljajo zavarovalnice na Danskem (Norberg, 2001a, str. 14), aproksimirali z Gompertz-Makeham mortalitetnim modelom. V Gompertz-Makehamovem modelu ima jakost smrtnosti obliko

$$\mu(t) = \alpha + \beta\gamma^t.$$

Izbrana baza, ki so jo uporabili za določitev jakosti prehodov sicer ne dopušča ozdravitve oziroma prehoda iz stanja invalidnosti v aktivno stanje, vendar bomo v našem primeru predpostavili, da je to mogoče. Vzemimo torej moškega zavarovanca, ki je ob sklenitvi 30-letnega življenjskega zavarovanja dopolnil starost 30 let.

Jakosti prehodov so sledeče

$$\begin{aligned}\mu_{13}(t) &= \mu_{23}(t) = \mu_{30+t},\\ \mu_{12}(t) &= \sigma_{30+t},\\ \mu_{21}(t) &= \rho_{30+t}\end{aligned}$$



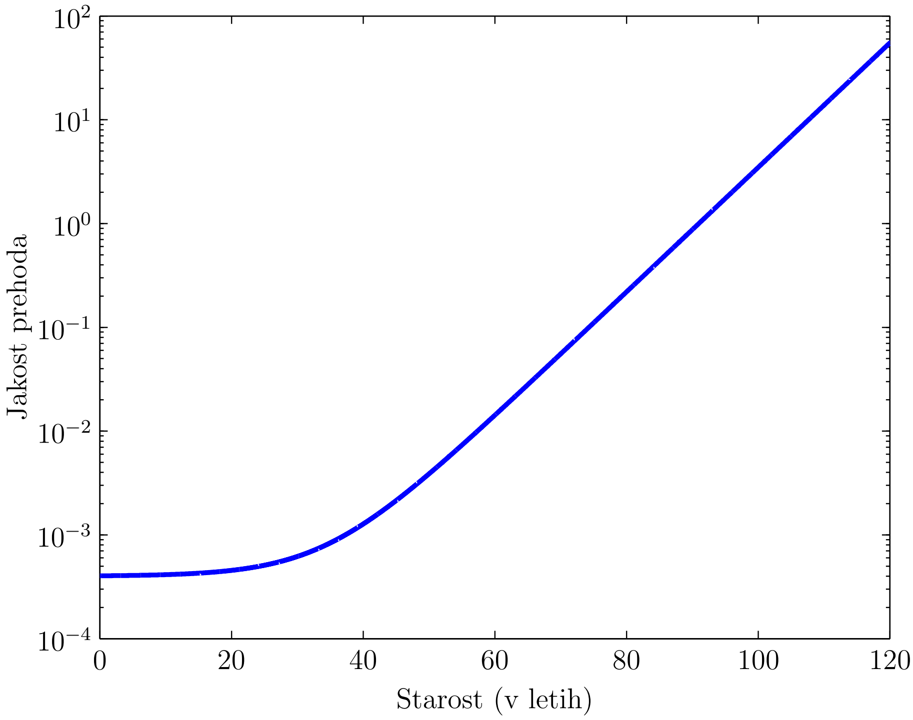
Slika 2.6: Jakost smrtnosti v odvisnosti od starosti zavarovanca po danskih mortalitetnih tablicah.

za $0 < t < 30 (= n)$. Numerične vrednosti matematičnih rezervacij in višjih centralnih momentov so prikazane za začetni stanji 1 in 2 (začetno stanje 3 je nezanimivo, saj se iz njega ne da nikomor premakniti) za $t = 0, 6, 12, 18, 24$ in 30. Slika 2.5 prikazuje model zavarovanja.

Najprej vzemimo življenjsko zavarovanje, ki izplača zavarovalno vsoto 1 v primeru smrti. V tem primeru je $b_{13} = b_{23} = 1$ in je torej

$$dB(t) = \begin{cases} dN_{13}(t) + dN_{23}(t) & \text{za} \quad 0 \le t < n, \\ 0 & \text{za} \quad t \ge n. \end{cases} \tag{2.41}$$

Za izračun numeričnih vrednosti premij in prvih treh višjih momentov sedanjih vrednosti neto izplačil je potrebno rešiti naslednji sistem diferencialnih enačb:



Slika 2.7: Jakost prehoda iz aktivnega stanja v stanje invalidnosti v odvisnosti od starosti zavarovanca po danskih mortalitetnih tablicah.

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_1^{(1)}}{dt}(t) &= (r+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1^{(1)}(t)-\sigma_x(t)V_2^{(1)}(t)-\mu_x(t)(V_3^{(1)}(t)+b_{13})\\
\frac{dV_2^{(1)}}{dt}(t) &= (r+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2^{(1)}(t)-\rho_x(t)V_1^{(1)}(t)-\nu_x(t)(V_3^{(1)}(t)+b_{23})\\
\frac{dV_3^{(1)}}{dt}(t) &= rV_3^{(1)}(t)\\
\frac{dV_1^{(2)}}{dt}(t) &= (2r+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1^{(2)}(t)-\sigma_x(t)V_2^{(2)}(t)-\mu_x(t)(V_3^{(2)}(t)+2b_{13}V_3^{(1)}(t)+b_{13}^2)\\
\frac{dV_2^{(2)}}{dt}(t) &= (2r+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2^{(2)}(t)-\rho_x(t)V_1^{(2)}(t)-\nu_x(t)(V_3^{(2)}(t)-2b_{23}V_3^{(1)}(t)+b_{23}^2)\\
\frac{dV_3^{(2)}}{dt}(t) &= 2rV_3^{(2)}(t)\\
\frac{dV_1^{(3)}}{dt}(t) &= (3r+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1^{(3)}(t)-\sigma_x(t)V_2^{(3)}(t)-\\
&\qquad -\mu_x(t)(V_3^{(3)}(t)+3b_{13}V_3^{(2)}(t)+3b_{13}^2V_3^{(1)}(t)+b_{13}^3)\\
\frac{dV_2^{(3)}}{dt}(t) &= (3r+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2^{(3)}(t)-\rho_x(t)V_1^{(3)}(t)-\\
&\qquad -\nu_x(t)(V_3^{(3)}(t)+3b_{23}V_3^{(2)}(t)+3b_{23}^2V_3^{(1)}(t)+b_{23}^3)\\
\frac{dV_3^{(3)}}{dt}(t) &= 3rV_3^{(3)}(t)
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0.0921	0.0973	0.0980	0.0894	0.0624	0
$m_2^{(1)}(t)$	0.0921	0.0973	0.0980	0.0894	0.0624	0
$m_1^{(2)}(t)$	0.0491	0.0580	0.0654	0.0672	0.0535	0
$m_2^{(2)}(t)$	0.0491	0.0580	0.0654	0.0672	0.0535	0
$m_1^{(3)}(t)$	0.0237	0.0305	0.0383	0.0450	0.0426	0
$m_2^{(3)}(t)$	0.0237	0.0305	0.0383	0.0450	0.0426	0

Tabela 2.1: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za primer smrti z zavarovalno vsoto 1 ($b_{13} = b_{23} = 1$).
Vir: Lastni

z robnim pogojem

$$V_j^{(q)}(n) = 0, \quad j, q = 1,\ 2,\ 3.$$

V sistemu opazimo, da so diferencialne enačbe za stanje 3 rešljive neodvisno od drugih enačb in zaradi robnega pogoja ničelne. Zato jih tudi lahko spustimo. Sistem diferencialnih enačb rešimo z numerično metodo Runge-Kutta stopnje 4 in nato po formulah (2.39) izračunamo centralne momente $m_j^{(q)}(t)$ za j, $q = 1$, 2, 3.

Prva centralna momenta z začetnim stanjem 1 ($m_1^{(1)}(t)$) in z začetnim stanjem 2 ($m_2^{(1)}(t)$) predstavljata vrednosti matematičnih rezervacij ob času t. V tabeli 2.1 lahko opazimo, da so v tem primeru vrednosti matematičnih rezervacij za začetni stanji 1 in 2 enake. To je zato, ker sta v tem primeru jakosti prehodov iz obeh stanj v stanje 3 enaki.

Druga centralna momenta z začetnim stanjem 1 ($m_1^{(2)}(t)$) in z začetnim stanjem 2 ($m_2^{(2)}(t)$) predstavljata varianco vrednosti matematičnih rezervacij ob času t. Z drugimi besedami nam ta količina pove, koliko lahko dejanska vrednost matematičnih rezervacij odstopa od pričakovane vrednosti matematičnih rezervacij. Vidimo tudi, da se matematične rezervacije počasi večajo, nato pa zopet padajo in so nič ob izteku pogodbe.

Vzemimo sedaj rentno zavarovanje, ki izplačuje zvezno rento 1 na leto, dokler je zavarovanec v aktivnem stanju. Tu imamo $b_1 = 1$. Sistem diferencialnih enačb se seveda v tem primeru spremeni. Vrednosti centralnih momentov so prikazane v tabeli 2.2. Opazimo, da so vrednosti matematičnih rezervacij za začetno stanje 1 precej višje kot za začetno stanje 2. To je razumljivo, saj, v kolikor zavarovanec sklene zavarovanje v aktivnem stanju, takoj prične prejemati rento. Če pa je zavarovanec ob sklenitvi zavarovanja invalid, prične prejemati rento le, če se povrne v aktivno stanje.

Oglejmo si še primer rentnega zavarovanja, ki izplačuje zvezno rento 1 letno, dokler

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	19.2666	16.4545	13.2262	9.5273	5.2399	0
$m_2^{(1)}(t)$	1.1601	0.8254	0.5192	0.2609	0.0752	0
$m_1^{(2)}(t)$	10.6554	9.1761	6.8353	3.7755	0.9435	0
$m_2^{(2)}(t)$	13.3138	8.3681	4.3780	1.6348	0.2647	0
$m_1^{(3)}(t)$	-113.8696	-85.4780	-52.8214	-22.0244	-3.2637	0
$m_2^{(3)}(t)$	166.9980	93.3626	40.9061	11.4256	1.0444	0

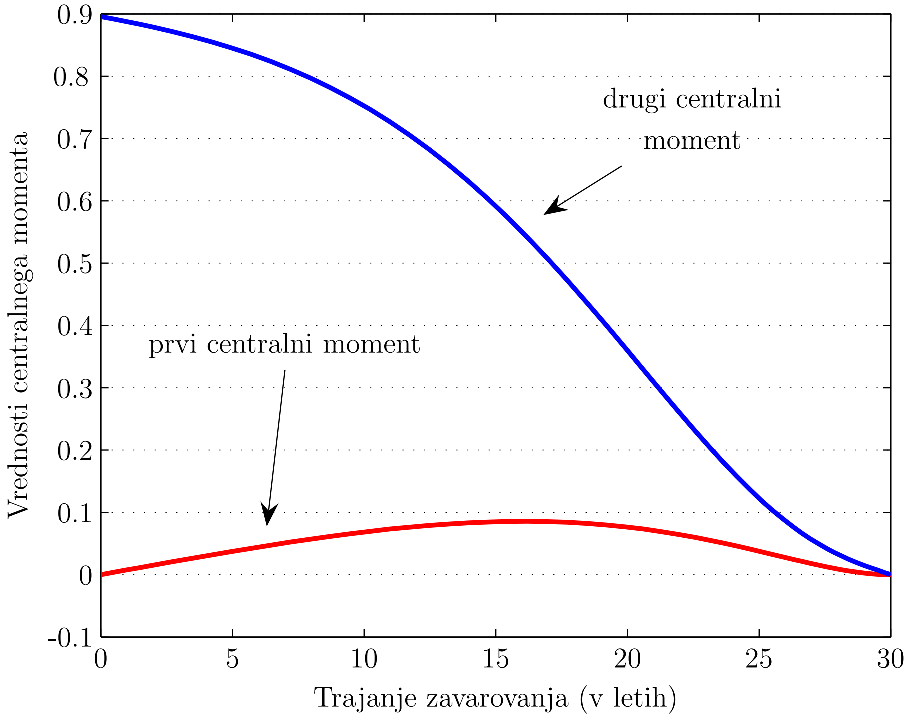
Tabela 2.2: Centralni momenti za zvezno življenjsko rento v vrednosti 1 letno, dokler je zavarovanec aktiven ($b_1 = 1$).
Vir: Lastni

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0.3950	0.3887	0.3564	0.2748	0.1274	0
$m_2^{(1)}(t)$	18.5015	16.0177	13.0634	9.5412	5.2921	0
$m_1^{(2)}(t)$	3.2223	2.9422	2.3950	1.4740	0.4129	0
$m_2^{(2)}(t)$	19.9499	14.1796	8.6964	3.9568	0.8103	0
$m_1^{(3)}(t)$	36.3118	29.2188	20.0460	9.3810	1.5270	0
$m_2^{(3)}(t)$	-213.8660	-134.2188	-69.1952	-24.0652	-2.9222	0

Tabela 2.3: Centralni momenti za zvezno življenjsko rento v vrednosti 1 letno v primeru invalidnosti ($b_2 = 1$).
Vir: Lastni

je zavarovanec invalid. V tem primeru je $b_2 = 1$. Vrednosti momentov so prikazane v tabeli 2.3. Iz podatkov lahko vidimo, da je v tem primeru vrednost matematičnih rezervacij višja v stanju invalidnosti in nižja v aktivnem stanju. Razlika v vrednostih matematičnih rezervacij v začetnima stanjema je večja v primeru rente za invalidnost, saj je manjša verjetnost za prehod iz stanja invalidnosti v aktivno stanje kot pa obratno.

Vzemimo zdaj zavarovanje, ki izplača zavarovalno vsoto 1 za smrt ($b_{13} = b_{23} = 1$) in izplačuje zvezno invalidsko rento 0.5 na leto ($b_2 = 0.5$), če je zavarovanec invalid. Iz obravnavanih primerov lahko določimo zvezno letno neto premijo, ki jo mora zavarovanec plačevati, dokler je v aktivnem stanju. Če je bil zavarovanec ob sklenitvi zavarovanja aktiven, je premija enaka 0.01503 ($= (0.0921 + 0.5 \cdot 0.3950)/19.2666$). Če pa je bil zavarovanec ob sklenitvi zavarovanja v stanju invalidnosti, je neto premija enaka 8.05351 ($= (0.0921 + 0.5 \cdot 18.5015)/1.1601$).



Slika 2.8: Vrednosti prvega in drugega centralnega momenta za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto za smrt enako 1 in zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Premija se plačuje, dokler je zavarovanec aktiven in znaša 0.01503.

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0	0.0444	0.0775	0.0836	0.0474	0
$m_2^{(1)}(t)$	9.3254	8.0938	6.6219	4.8560	2.7074	0
$m_1^{(2)}(t)$	0.8958	0.8289	0.6914	0.4520	0.1621	0
$m_2^{(2)}(t)$	4.7397	3.2269	1.8482	0.7419	0.1131	0
$m_1^{(3)}(t)$	4.8164	3.8540	2.6345	1.2442	0.2351	0
$m_2^{(3)}(t)$	-26.0443	-15.5134	-7.3429	-2.1786	-0.1752	0

Tabela 2.4: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 za smrt, z zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Zavarovanec plačuje zvezno neto premijo 0.01503, dokler je aktiven.
Vir: Lastni

Tako lahko izračunamo vrednosti matematičnih rezervacij in višje momente za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 za smrt, z zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Zavarovanec plačuje zvezno neto premijo $P = 0.01503$. Rezultate prikazuje tabela 2.4.

2.6.3 Ohranjevanje fluktuacijskih rezervacij v višini proporcionalni varianci

Thielejevo enačbo lahko uporabimo tudi za določitev višine matematičnih rezervacij in premije za zavarovalne produkte, kjer so izplačila po zavarovalni pogodbi odvisne od matematičnih rezervacij. Diferencialne enačbe za višje momente pa omogočajo izračun vrednosti matematičnih rezervacij in premij pri zavarovalnih produktih, kjer so odškodnine po zavarovalni pogodbi odvisne ne samo od vrednosti matematičnih rezervacij in premij, ampak tudi variance oziroma višjih momentov. Oglejmo si primer zavarovalnega produkta, kjer zavarovalnica želi imeti poleg matematičnih rezervacij v višini pričakovanih vrednosti bodočih neto odškodnin tudi rezervacije za kritje bodočih neto obveznosti, ki so nad pričakovanimi bodočimi neto obveznostmi. Slednje rezervacije imenujemo *fluktuacijske rezervacije*.

Privzemimo, da so za izbrano zavarovalno polico fluktuacijske rezervacije, ki krijejo bodoče neto obveznosti nad pričakovanimi neto bodočimi obveznostmi, proporcionalne varianci sedanjih pričakovanih vrednosti neto bodočih odškodnin oziroma so v času t fluktuacijske rezervacije enake $em^{(2)}_{X_t}(t)$, kjer X_t predstavlja stanje zavarovalne police v času t, konstanta e pa je proporcionalnostni faktor. Naravna pot za oblikovanje in ohranjanje fluktuacijskih rezervacij je, da povečamo premijo ob sklenitvi zavarovalne pogodbe. Premija pa naj se poveča za toliko, kolikor se povečajo fluktuacijske rezervacije. To pomeni, da se fluktuacijske rezervacije v časovni točki $t = 0$ povečajo za $em^{(2)}_1(0)$ na vsakem intervalu $[t, t + dt)$ pa za $edm^{(2)}_{X_t}(t)$, kjer je $0 < t \leq n$. Začetni prispevek v $t = 0$ k fluktuacijskim rezervacijam je pozitiven, kasneje pa so prispevki lahko tudi negativni. Vsota vseh prispevkov fluktuacijskih rezervacij na časovnem intervalu, na katerem je zavarovalna polica aktivna, pa mora biti nič. Torej $m^{(2)}_{X_t}(n) = 0$ in

$$m^{(2)}_1(0) + \int_0^n dm^{(2)}_{X_t}(t) = m^{(2)}_{X_n}(n) = 0.$$

Oglejmo si sedanjo vrednost vseh bodočih prispevkov fluktuacijskih rezervacij

$$\begin{aligned} m^{(2)}_1(0) + \int_0^n v_t dm^{(2)}_{X_t}(t) &= m^{(2)}_1(0) + v_t m^{(2)}_{X_t}(t)|_0^n + \int_0^n v_t \delta_t m^{(2)}_{X_t}(t) dt \\ &= \int_0^n v_t \delta_t m^{(2)}_{X_t}(t) dt > 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

To nam pove, da prispevki fluktuacijskih rezervacij povečajo višino premije, kljub temu, da se seštejejo v 0.

Vzemimo sedaj primer standardne police in predpostavimo, da so B_j in b_{jk} neodvisne funkcije vrednosti $V_j^{(q)}$ in da v zavarovalni polici ni predvidenih nobenih nezveznih izplačil. To pomeni, da so funkcije $V_j^{(q)}(t)$ zvezne na intervalu $(0, n)$. V primeru, ko zavarovalnica za tako zavarovalno pogodbo vpelje fluktuacijske rezervacije, se izplačila po zavarovalni polici spremenijo na sledeči način:

- Zvezno plačilo v stanju j

$$\begin{aligned}\bar{b}_j(t) &= b_j(t) + e\, dm_j^{(2)}(t) = b_j(t) + e\, d(V_j^{(2)}(t) - (V_j^{(1)}(t))^2) \\ &= b_j(t) + e(dV_j^{(2)}(t) - 2\, V_j^{(1)}(t)\, dV_j^{(1)}(t)).\end{aligned}$$

- Plačilo v stanju k v primeru skoka iz stanja j v stanje k

$$\begin{aligned}\bar{b}_{jk}(t) &= b_{jk}(t) + e(m_k^{(2)}(t) - m_j^{(2)}(t)) \\ &= b_{jk}(t) + e[V_k^{(2)}(t) - (V_k^{(1)}(t))^2 - V_j^{(2)}(t) + (V_j^{(1)}(t))^2].\end{aligned}$$

Diferencialne enačbe (2.24) postanejo

$$\frac{d}{dt} V_j^{(q)}(t) = R_j^{(q)}(t) - qeS_j(t)V_j^{(q-1)}(t), \tag{2.44}$$

kjer so

$$\begin{aligned}R_j^{(q)}(t) &= (qr(t) + \mu_{j\cdot}(t))V_j^{(q)}(t) - qb_j(t)V_j^{(q-1)}(t) \\ &\quad - \sum_{k:k\neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (\bar{b}_{jk}(t))^p V_k^{q-p}(t),\end{aligned}$$

in

$$S_j(t) = \frac{d}{dt} V_j^{(2)}(t) - 2V_j^{(1)}(t) \frac{d}{dt} V_j^{(1)}(t).$$

Ker je $S_j(t)$ funkcija odvodov matematičnih rezervacij, jo poskusimo malo preoblikovati. Pomnožimo prvo enačbo za $q = 1$ v (2.44) z $2V_j^{(1)}(t)$ in odštejmo dobljeni rezultat od druge enačbe za $q = 2$. Dobimo

$$S_j(t) = R_j^{(2)}(t) - 2V_j^{(1)}(t)R_j^{(1)}(t).$$

S tako izbranim $S_j(t)$ lahko rešimo sistem diferencialnih enačb (2.44). Princip ekvivalence je v tem primeru

$$V_j^{(1)}(0) = -\Delta B_0^1 - e\, m_1^{(2)}(0),$$

ki jo izpolnimo s poskušanjem s spreminjanjem premije.

Oglejmo si ta primer na že prej predstavljenem primeru življenjskega zavarovanja z zavarovalno vsoto za smrt 1 in zvezno letno rento 0.5 v primeru invalidnosti. Predpostavimo, da želimo imeti fluktuacijsko rezervacijo v višini 10% variance oziroma

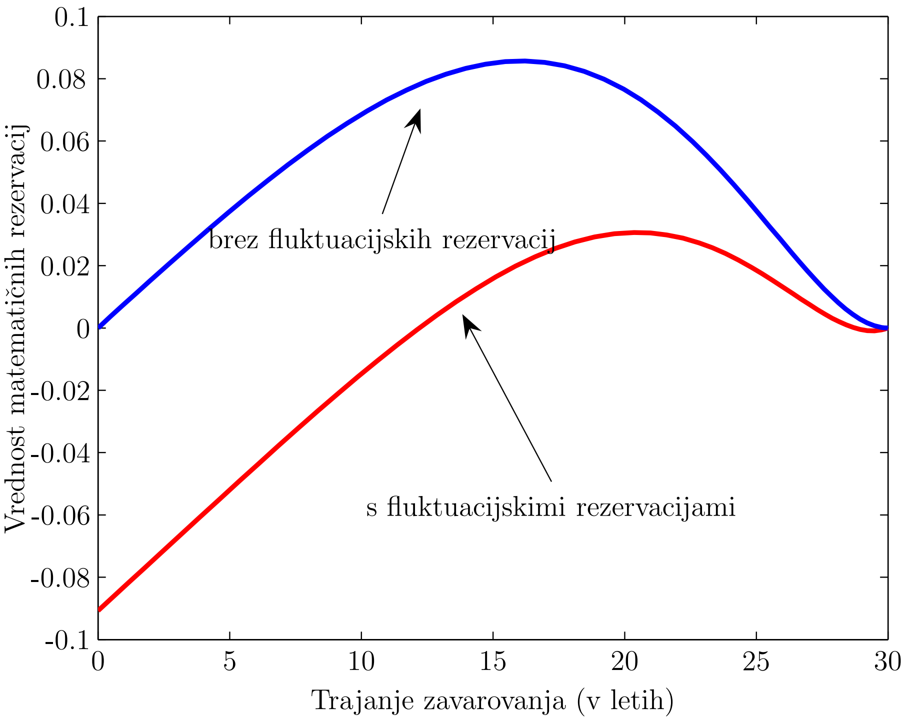
Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	-0.09074	-0.04431	-0.00129	0.02735	0.02320	0
$m_2^{(1)}(t)$	8.94986	7.82420	6.45911	4.78725	2.69639	0
$m_1^{(2)}(t)$	0.90727	0.83717	0.69707	0.45539	0.16329	0
$m_2^{(2)}(t)$	4.81154	3.25988	1.86038	0.74521	0.11358	0
$m_1^{(3)}(t)$	4.92460	3.91536	2.66538	1.25637	0.23745	0
$m_2^{(3)}(t)$	-26.72788	-15.78472	-7.42516	-2.19561	-0.17650	0

Tabela 2.5: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto 1 za smrt, z zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Zavarovanec plačuje zvezno neto premijo 0.01672, dokler je aktiven.
Vir: Lastni

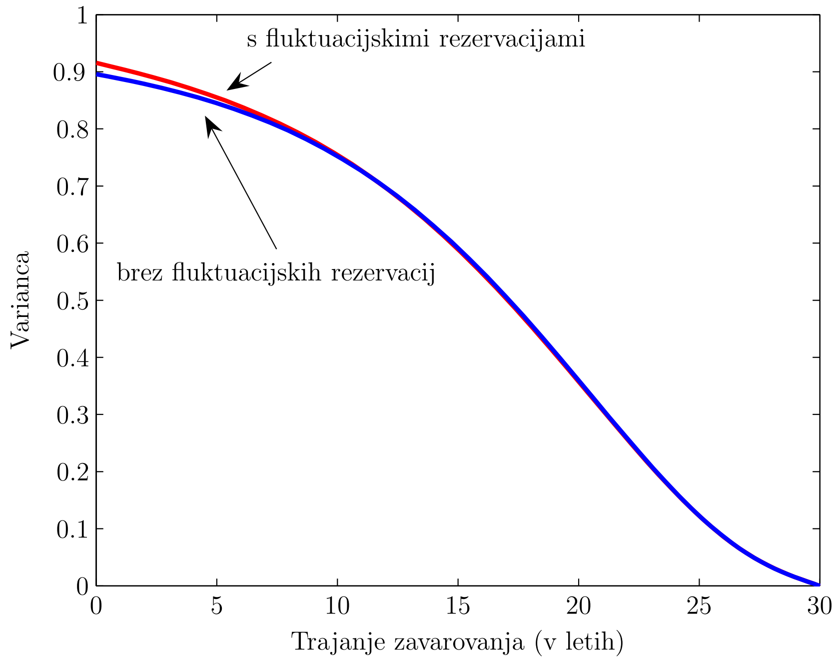
prispevke k fluktuacijski rezervaciji v višini 10% spremembe v varianci. Rezultate prikazuje tabela 2.5.

Primerjamo lahko tabeli 2.4 in 2.5, ki prikazujeta vrednosti momentov sedanjih vrednosti neto obveznosti brez in z dodanimi fluktuacijskimi rezervacijami. Najprej opazimo, da se premija pri zavarovanju s fluktuacijsko rezervacijo poveča, in sicer z 0.01503 na 0.01672, kar predstavlja kar 11% porast v premiji. Opazimo tudi, da je vrednost matematičnih rezervacij v tem primeru negativna na začetku. Razlog za to je, da mora zavarovalnica dati na stran znesek $em_1^{(2)}(0)$ ob sklenitvi zavarovanja za oblikovanje fluktuacijske rezervacije.

Sicer pa ta primer nima prave praktične vrednosti, saj se v praksi odločimo za določitev vrednosti fluktuacijskih rezervacij za celoten portfelj zavarovanj in ne za vsako posamezno polico posebej. Problem pri določanju višine fluktuacijskih rezervacij po policah pa je tudi, da bi v tem primeru morali rešiti sistem diferencialnih enačb za vse police v portfelju naenkrat, kar bi predstavljalo velik problem. V članku (Norberg, 1995a, str. 179) Norberg navaja, da je mogoče uporabiti predstavljeno tehniko v primeru, ko predpostavimo, da je portfelj zavarovalnih polic stacionaren skozi celotno obdobje obravnavanega zavarovanja. V tem primeru lahko namreč razstavimo fluktuacijske rezervacije za celoten portfelj linearno kot vsoto fluktuacijskih rezervacij individualnih zavarovalnih polic tako, da vzamemo konstantne koeficiente v razcepu.



Slika 2.9: Vrednost matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje brez in z oblikovanjem fluktuacijskih rezervacij. Zavarovanje krije zavarovalno vsoto 1 za smrt in zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Zavarovanec plačuje zvezno premijo, dokler je aktiven. Matematične rezervacije so nižje, ko zavarovalnica oblikuje fluktuacijske rezervacije, saj se premija poviša najbolj zaradi povečanja fluktuacijskih rezervacij v točki 0, ko fluktuacijske rezervacije narastejo od 0 do $m_1^{(2)}(0)$. Za $t > 0$ so prispevki k fluktuacijskim rezervacijam $dm_1^{(2)}(t)$ precej manjši oziroma skoraj ničelni (glej sliko 2.10), premija pa je še vedno enako visoka.



Slika 2.10: Vrednost variance sedanjih vrednosti za življenjsko zavarovanje brez in z oblikovanjem fluktuacijskih rezervacij. Zavarovanje krije zavarovalno vsoto 1 za smrt in zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Zavarovanec plačuje zvezno premijo, dokler je aktiven.

2.6.4 Primer življenjskega zavarovanja za dve osebi, modeliranega s štirimi stanji

Poglejmo si sedaj življenjsko zavarovanje, imenovano tudi vdovska pokojnina. Za zavarovanje se zvezno plačuje letna neto premija c, dokler sta živa oba zakonca. V primeru moževe smrti se prične ženi zvezno izplačevati vdovska pokojnina b letno. V kolikor je ob moževi smrti žena že pokojna, pa se zavarovalna vsota s izplača otrokom oziroma drugemu upravičencu. Zavarovanje ugasne po n letih. Markovski model za to zavarovanje je prikazan na sliki 2.11.

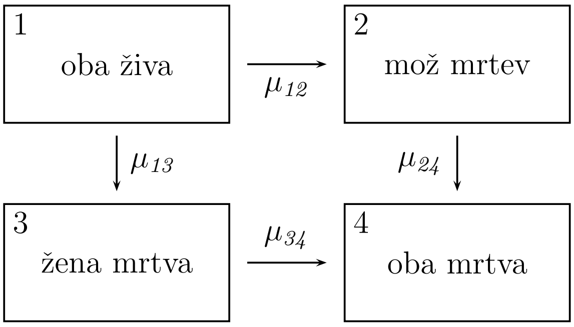
Za to zavarovanje želimo izračunati le vrednosti matematičnih rezervacij. Predpostavimo, da je jakost umrljivosti enaka za oba zakonca

$$\mu_x(t) = \mu_{12}(t) = \mu_{13}(t) = \mu_{24}(t) = \mu_{34}(t)$$

in da imamo konstantno obrestno mero

$$r = \ln(1.0275).$$

Sistem diferencialnih enačb, ki ga je potrebno rešiti, je naslednji:



Slika 2.11: Model za vdovsko pokojnino, pri kateri se izplačuje ob moževi smrti renta ženi oziroma, če je žena že pokojna, se zavarovalna vsota za smrt izplača otrokom.

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0.8019	0.7395	0.6152	0.4166	0.1645	0
$m_2^{(1)}(t)$	19.6616	16.8431	13.5826	9.8021	5.3673	0
$m_3^{(1)}(t)$	0.0921	0.0973	0.0980	0.0894	0.0624	0

Tabela 2.6: Vrednosti matematičnih rezervacij za vdovsko pokojnino brez upoštevanja premije.
Vir: Lastni

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1^{(1)}}{dt}(t) &= (r + 2\mu_x(t))V_1^{(1)}(t) - \mu_x(t)(V_2^{(1)}(t) + V_3^{(1)}(t)) + c,\\
\frac{dV_2^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_2^{(1)}(t) - b,\\
\frac{dV_3^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_3^{(1)}(t) - \mu_x(t)s.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

z robnim pogojem

$$dV_j^{(1)}(n) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

V sistem nismo vključili diferencialne enačbe za absorbirajoče stanje 4, saj je ničelna. Sistem diferencialnih enačb zopet rešimo z numerično metodo Runge-Kutta stopnje 4. Vrednosti matematičnih rezervacij za različna začetna stanja so prikazana v tabeli 2.6. V primeru smo vzeli $s = 1$ in $b = 1$.

Iz tabel 2.6 in 2.7 se vidi, da je zavarovanje vdovska pokojnina smiselno le, kadar se zavarovalna pogodba sklene v stanju 1 oziroma, ko sta oba zakonca še živa. Za začetno

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0	0.0547	0.0638	0.0174	-0.0567	0
$m_2^{(1)}(t)$	19.6616	16.8431	13.5826	9.8021	5.3673	0
$m_3^{(1)}(t)$	0.0921	0.0973	0.0980	0.0894	0.0624	0

Tabela 2.7: Vrednosti matematičnih rezervacij za vdovsko pokojnino z neto premijo 0.0425065 za začetno stanje, ko sta oba zakonca živa.
Vir: Lastni

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	0.8185	0.7545	0.6271	0.4235	0.1663	0
$m_2^{(1)}(t)$	19.6616	16.8431	13.5826	9.8021	5.3673	0
$m_3^{(1)}(t)$	0.0921	0.0973	0.0980	0.0894	0.0624	0

Tabela 2.8: Višina matematičnih rezervacij za vdovsko pokojnino z dodatnim izplačilom zavarovalne vsote v velikosti polovice trenutnih matematičnih rezervacij v primeru, ko žena umre pred možem. Premija se ne plačuje ($c = 0$).
Vir: Lastni

stanje 2 je to kar navadna renta ženi, za začetno stanje 3 pa je to življenjsko zavarovanje za smrt moža z zavarovalno vsoto s.

To zavarovanje lahko malo spremenimo in predpostavimo, da v primeru ko žena umre pred soprogom v času trajanja zavarovanja, zavarovanje izplača 50% trenutne vrednosti matematičnih rezervacij. To je smiselno, saj se v tem primeru vdovska pokojnina ne bo nikoli začela izplačevati. V tem primeru potrebujemo nov sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1^{(1)}}{dt}(t) &= (r + 1.5\mu_x(t))V_1^{(1)}(t) - \mu_x(t)(V_2^{(1)}(t) + V_3^{(1)}(t)) + c,\\
\frac{dV_2^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_2^{(1)}(t) - b,\\
\frac{dV_3^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_3^{(1)}(t) - \mu_x(t)s.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

z robnim pogojem

$$dV_j^{(1)}(t) = 0, \quad j = 1,\, 2,\, 3.$$

Če primerjamo tabelo 2.6 in tabelo 2.8, lahko opazimo, da se spremeni le $m_1^{(1)}(t)$, saj ima dodatno izplačilo vpliv le na matematične rezervacije v stanju, ko sta oba zakonca

Trajanje zavarovanja v letih (t)	0	6	12	18	24	30
$m_1^{(1)}(t)$	1.2192	1.0302	0.7867	0.4899	0.1783	0
$m_2^{(1)}(t)$	25.6870	20.9459	16.0487	10.9823	5.6894	0
$m_3^{(1)}(t)$	0.1345	0.1304	0.1209	0.1021	0.0665	0

Tabela 2.9: Matematične rezervacije za vdovsko pokojnino s dodanimi stroški 2% od trenutnih matematičnih rezervacij
Vir: Lastni

živa, v ostalih stanjih pa ne. Če primerjamo rezultate za $m_1^{(1)}(t)$ v tem primeru s prej obravnavanim primerom, vidimo, da se vrednosti malenkostno povečajo, kar je smiselno, saj imamo v slednjem primeru dodatno izplačilo zavarovalne vsote in mora zato tudi matematična rezervacija biti višja. Zvezna premija, določena po principu ekvivalence, se pri tako spremenjeni zavarovalni polici spremeni iz prejšnje vrednosti 0.0425065 na 0.0433829, kar pomeni povišanje premije za 2%.

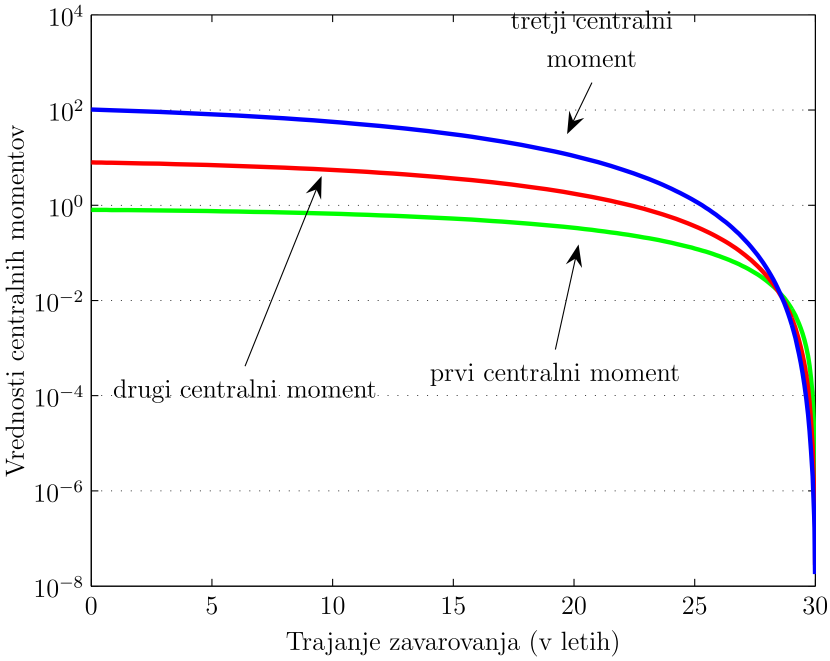
Osnovno polico lahko spremenimo tudi tako, da v izračun vrednosti matematičnih rezervacij vključimo tudi stroške, ki so odvisni od vrednosti trenutnih matematičnih rezervacij. Kot primer takih stroškov je upravljavska provizija povezana z upravljanjem kapitala za kritje matematičnih rezervacij. Predpostavimo torej, da se stroški obračunavajo zvezno v odstotku a od trenutnih matematičnih rezervacij skozi celotno trajanje zavarovanja $[0, n]$. Sistem diferencialnih enačb je sledeč:

$$\begin{aligned}\frac{dV_1^{(1)}}{dt}(t) &= (r + 1.5\mu_x(t))V_1^{(1)}(t) - \mu_x(t)(V_2^{(1)}(t) - V_3^{(1)}(t)) + c - aV_1^{(1)}(t),\\ \frac{dV_2^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_2^{(1)}(t) - b - aV_2^{(1)}(t),\\ \frac{dV_3^{(1)}}{dt}(t) &= (r + \mu_x(t))V_3^{(1)}(t) - \mu_x(t)s - aV_3^{(1)}(t).\end{aligned} \tag{2.47}$$

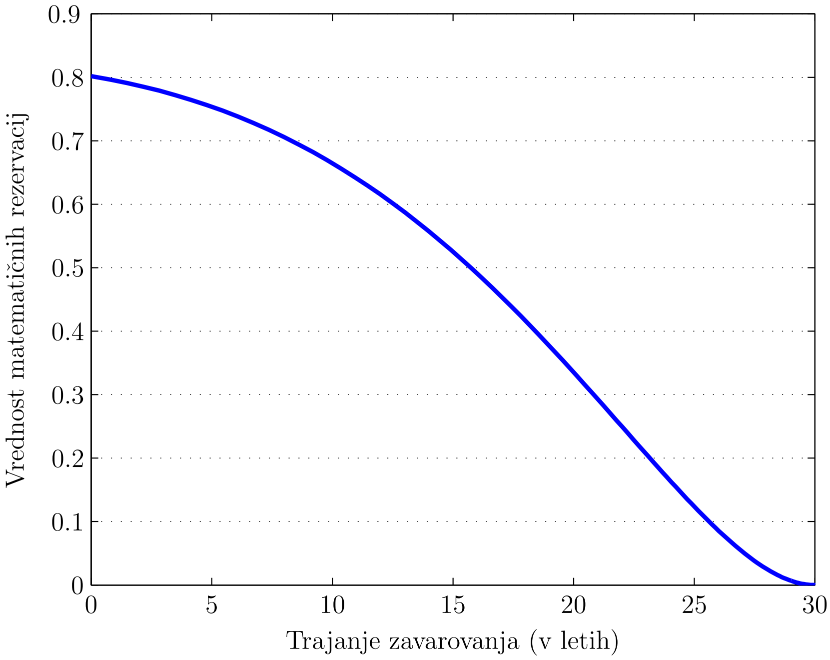
z robnim pogojem

$$dV_j^{(1)}(n) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

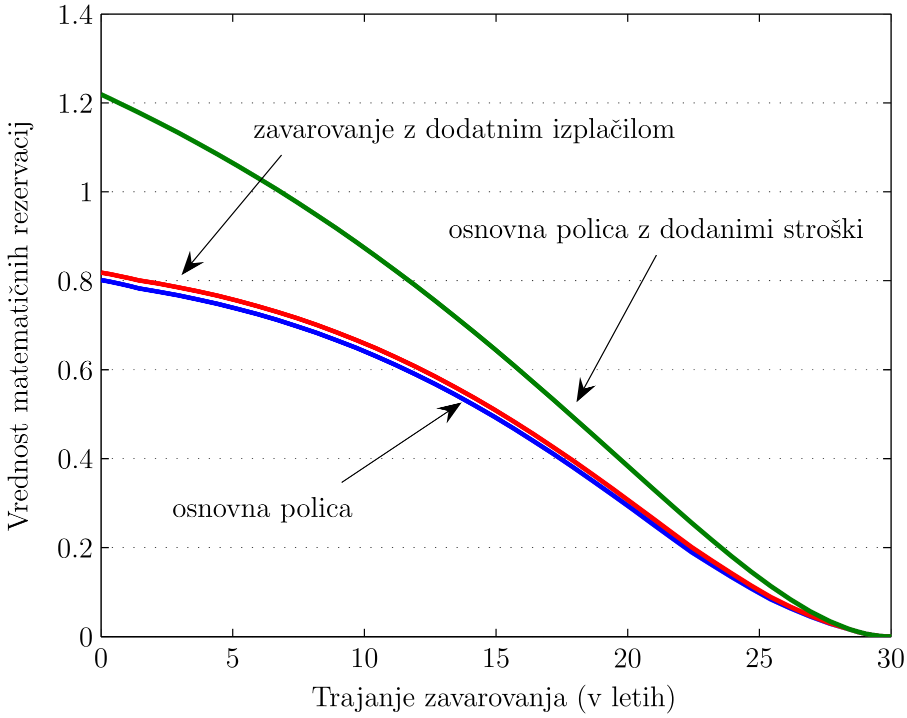
Iz sistema diferencialnih enačb (2.47) opazimo, da imata upoštevanje stroškov v matematičnih rezervacijah v odstotku a od trenutnih matematičnih rezervacij in znižanje obrestne mere r za vrednost a enak vpliv na višino matematičnih rezervacij.



Slika 2.12: Vrednost prvega, drugega in tretjega centralnega momenta sedanjih vrednosti bodočih neto izplačil za vdovsko pokojnino v primeru, ko sta oba zakonca živa ob sklenitvi zavarovanja. Premija se ne plačuje.



Slika 2.13: Odvisnost matematičnih rezervacij od trajanja zavarovanja za vdovsko pokojnino v primeru, ko sta oba zakonca živa ob sklenitvi zavarovanja. Premija se ne plačuje.



Slika 2.14: Vrednosti matematičnih rezervacij za različne oblike vdovskih pokojnin, če je polica sklenjena, ko sta oba zavarovanca živa. Premija se ne plačuje.

Poglavje 3

Modeliranje v okolju stohastičnih obrestnih mer

V tem poglavju bomo razširili modele iz prejšnjega poglavja tako, da bomo vključili stohastično obrestno mero. Uporabili bomo Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR) za stohastično modeliranje obrestne mere v prihodnosti. Stohastično generirano pot obrestne mere bomo aproksimirali s stopničasto funkcijo in tako določili niz možnih vrednosti (stanj) za obrestno mero. Predpostavili bomo, da se obrestna mera lahko premakne le za eno stanje levo ali desno, in sicer z enako verjetnostjo, iz stanj na skrajni levi (desni) pa je mogoč le skok v desno (levo).

Tako bomo imeli dve markovski verigi, eno za model zavarovalne police in drugo za model obrestnih mer. Predpostavili bomo, da sta ti dve med seboj neodvisni, in tako pokazali, da obstaja posplošen sistem diferencialnih enačb za momente sedanje vrednosti denarnega toka, povezanega s privzetim zavarovanjem.

Ponazorili bomo uporabo predstavljenega modela na primerih iz prejšnjega poglavja. Ker pa je za izračun višine matematičnih rezervacij pomembna tudi izbira primernih parametrov, si bomo v tem poglavju ogledali, kako analizirati občutljivost matematičnih rezervacij na parametre in teorijo podkrepili s primeri.

3.1 Klasični modeli stohastičnih obrestnih mer

V model želimo vpeljati še negotovost, povezano z bodočimi obrestnimi merami. Naravna pot je, da obrestno mero modeliramo kot slučajno spremenljivko. Pri vrednotenju matematičnih rezervacij dolgoročnih zavarovanj je to še posebno pomembno, saj lahko sprememba obrestnih mer veliko prispeva k variabilnosti matematičnih rezervacij.

Modelov, ki generirajo pot obrestne mere, je veliko, vsak model ima svoje posebne lastnosti. Naštejmo le nekaj modelov:

- Vasičkov model
- Dothanov model
- Cox, Ingersoll in Ross (CIR) model
- Eksponentni Vasičkov model

Opisi in glavne lastnosti teh modelov so povzeti po (Brigo, Mercurio, 2001, str. 50-63).

3.1.1 Vasičkov model

Vasiček je predstavil ta model že leta 1977. Predpostavil je, da se zvezna trenutna obrestna mera giblje kot afina transformacija Ornstein-Uhlenbeckovega procesa[1] s konstantnimi koeficienti.

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0, \tag{3.1}$$

kjer so r_0, k, θ in σ pozitivne konstante.

Integriranje enačbe (3.1) nam da za vsak $s \leq t$,

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u), \tag{3.2}$$

kar pomeni, da je $r(t)$ glede na verjetnostni prostor $\mathcal{F}_s$ normalno porazdeljena z

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \\ \text{Var}\,[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Iz zgornjih enačb lahko opazimo, da je obrestna mera $r(t)$ lahko tudi negativna s pozitivno verjetnostjo. To je glavna slabost tega modela. Lastnost tega modela je tudi, da teži k povprečni obrestni meri, saj matematično upanje teži k vrednosti θ, ko gre t v neskončnost. To lahko vidimo tudi iz enačbe (3.1). Zaradi tega dejstva imenujemo konstanto θ kar dolgoročno povprečje obrestne mere. Sprememba obrestne mere je pozitivna vedno, ko je konstanta θ večja od trenutne obrestne mere $r(t)$ in sicer negativna.

3.1.2 Dothanov model

Dinamika obrestne mere je sledeča

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t), \tag{3.4}$$

kjer je a realna konstanta.

[1]Ornstein-Uhlenbeckov proces je modeliran kot $dr = -r(t)dt + dW$.

Integriranje enačbe (3.4) nam da za vsak $s \leq t$,

$$r(t) = r(s)e^{(a-\frac{1}{2}\sigma)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))}, \tag{3.5}$$

kar pomeni, da je $r(t)$ glede na verjetnostni prostor $\mathcal{F}_s$ lognormalno porazdeljena z

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)e^{a(t-s)}, \\ \mathrm{Var}\,[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r^2(s)e^{2a(t-s)}(e^{\sigma^2(t-s)} - 1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Zaradi tega, ker je $r(t)$ lognormalno porazdeljen, je $r(t)$ vedno pozitiven za vsak t.

3.1.3 Cox-Ingersoll-Rossov (CIR) model

Cox, Ingersoll in Ross so v svojem modelu vrinili koren obrestne mere v difuzijski člen Vasičkovega modela. Tako je postal dobljeni model najbolj priljubljen, predvsem zaradi njegove analitične preglednosti in dejstva, da je za razliko od Vasičkovega modela tu obrestna mera vedno pozitivna:

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0, \tag{3.7}$$

kjer so r_0, k, θ in σ pozitivne konstante.

V modelu moramo zadostiti pogoju

$$2k\theta > \sigma^2,$$

če želimo, da ostane $r(t)$ pozitiven. Matematično upanje in varianca sta naslednja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}), \\ \mathrm{Var}\,[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s)\frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)} + \theta\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-k(t-s)})^2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.1.4 Eksponentni Vasičkov model

Naravna pot, da za proces obrestne mere dobimo lognormalno porazdelitev, ki je alternativa Dothanovemu modelu, je, da predpostavimo, da logaritem r sledi Ornstein-Uhlenbeckovem procesu y, ki je definiran z

$$dy(t) = [\theta - ay(t)]dt + \sigma dW(t), \quad y(0) = y_0, \tag{3.9}$$

kjer so θ, a in σ pozitivne konstante, y_0 pa je poljubno realno število. Če tako postavimo $r(t) = e^{y(t)}$ za vsak t, dobimo naslednjo dinamiko za obrestno mero:

$$dr(t) = r(t)[\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a\ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t). \tag{3.10}$$

Ta model je zelo podoben Vasičkovem modelu, in če se spomnimo enačbe (3.2), je proces r za vsak $s \leq t$, eksplicitno podan kot

$$r(t) = e^{\ln r(s) e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1-e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW(u)}. \tag{3.11}$$

To pomeni, da je $r(t)$ pogojno na $\mathcal{F}_s$ lognormalno porazdeljena z

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{\ln r(s) e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1-e^{-a(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{4a}[1-e^{-2a(t-s)}]}, \\ \mathbb{E}[r^2(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{2\ln r(s) e^{-a(t-s)} + 2\frac{\theta}{a}(1-e^{-a(t-s)}) + \frac{\sigma^2}{a}[1-e^{-2a(t-s)}]}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Opazimo lahko, da, za razliko od Dothanovega modela, obrestna mera v tem modelu vedno teži k povprečni vrednosti procesa obrestne mere. To je res zaradi

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[r(t)|\mathcal{F}_s] = e^{\frac{\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{4a}}.$$

Opazimo lahko tudi, da varianca teži h končni vrednosti

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}\,[r(t)|\mathcal{F}_s] = e^{\frac{2\theta}{a} + \frac{\sigma^2}{2a}}[e^{\frac{\sigma^2}{2a}} - 1].$$

3.2 Aproksimacija stohastičnih obrestnih mer z Markovskimi verigami v zveznem času

3.2.1 Model za obrestne mere

Predpostavimo, da se da ekonomija oziroma vsaj tisti del ekonomije, ki vpliva na obrestne mere predstaviti kot homogena zvezna markovska veriga Y na končnem prostoru stanj $\mathcal{J}^Y = \{1, \ldots, J^Y\}$, z jakostmi prehodov λ_{ef}, $e, f \in \mathcal{J}^Y$, $e \neq f$. Ko smo v stanju e, je zvezna obrestna mera enaka r_e. To lahko opišemo z

$$r(t) = \sum_e I_e^Y(t) r_e,$$

kjer je $I_e^Y(t) = 1_{\{Y(t)=e\}}$ indikator slučajnega dogodka, da je Y v stanju e v trenutku t. Predpostavka homogenosti ni nujno potrebna in rezultati v tem poglavju ostanejo nespremenjeni tudi, ko se λ_{ef} spreminjajo po času. Glavni razlog za to predpostavko je, ker le ta vodi v dolgoročno stabilnost slučajnega procesa obrestnih mer (Norberg, 1995b, str. 247).

3.2.2 Model za izplačila po zavarovalni polici

Za modeliranje denarnih tokov za poljubno zavarovalno polico uporabimo standardni model markovskih verig, kot smo ga definirali v prejšnjem poglavju z dodatno oznako za indikator in proces šteja Z, ki loči omenjeni proces od slučajnega procesa za obrestno mero.

3.2.3 Model za izplačila po zavarovalni polici s stohastično obrestno mero

Predpostavimo, da sta procesa Y in Z neodvisna. Po lemi (3.2.1) sledi, da je (Y, Z) markovska veriga na verjetnostnem prostoru $\mathcal{J}^Y \times \mathcal{J}^Z$ z jakostjo prehodov

$$\kappa_{ej,fk}(t) = \begin{cases} \lambda_{ef}(t) & e \neq f,\, j = k, \\ \mu_{jk}(t) & e = f,\, j \neq k, \\ 0 & e \neq f,\, j \neq k. \end{cases} \tag{3.13}$$

Definirajmo za poljubni $g = 1, \ldots, G$ markovsko verigo $X^g = \{X^g(t)\}_{t \geq 0}$ na končnem prostoru stanj $\mathcal{J}^g = \{1, \ldots, J^g\}$ in definirajmo njeno prehodno porazdelitev z $p^g_{j^g,k^g}$, $j^g, k^g \in \mathcal{J}^g$. Definirajmo G-dimenzionalni proces $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ na prostoru $\mathcal{J} = \mathcal{J}^1 \times \cdots \mathcal{J}^G$ kot $X(t) = (X^1(t), \ldots, X^G(t))$.

Lema 3.2.1. *Če so markovski procesi X^g, $g = 1, \ldots, G$, med seboj neodvisni, potem je tudi proces $X = (X^1, \ldots, X^G)$ markovski proces in njegove prehodne verjetnosti so podane s formulo*

$$p_{j^1 \ldots j^G, k^1 \ldots k^G}(t, u) = \prod_{g=1}^{G} p^g_{j^g k^g}(t, u). \tag{3.14}$$

Prav tako, če ima vsak posamezen proces X^g jakosti prehodov podane z $\mu^g_{j^g k^g}(t)$, potem so jakosti prehodov za X enake

$$\mu_{j^1 \ldots j^G, k^1 \ldots k^G}(t) = \begin{cases} \mu^g_{j^g k^g}(t) & \textit{če } j^g \neq k^g \textit{ in } j^h = k^h \textit{ za poljubne } h \neq g, \\ 0 & \textit{za vse ostale } (j^1 \cdots j^G) \neq (k^1 \cdots k^G). \end{cases} \tag{3.15}$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da za produkt med seboj neodvisnih markovskih verig velja markovska lastnost. Predpostavimo, da imamo $t_1 < \cdots < t_p$, $t_1, \ldots, t_p \in [0, n]$ in naj bodo $x_1, \ldots, x_p$ stanja procesa X, $j^g_1, \ldots, j^g_p$ pa stanja procesov X^g.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X(t_p) = x_p | X(t_h) = x_h,\, h = 1, \ldots, p-1] = \\ &= \mathbb{P}\big[(X^1(t_p), \ldots, X^G(t_p)) = (j^1_p, \ldots, j^G_p) | (X^1(t_h), \ldots, X^G(t_h)) \\ &\qquad\qquad\qquad = (j^1_h, \ldots, j^G_h),\, h = 1, \ldots, p-1\big] \\ &= \prod_{m=1}^{G} \mathbb{P}[X^m(t_p) = j^m_p | X^m(t_h) = j^m_h,\, h = 1, \ldots, p-1] \qquad (3.16) \\ &= \prod_{m=1}^{G} \mathbb{P}[X^m(t_p) = j^m_p | X^m(t_{p-1}) = j^m_{p-1}] \\ &= \mathbb{P}[X(t_p) = x_p | X(t_{p-1}) = x_{p-1}]. \end{aligned}$$

V enačbi (3.16) je drugi enačaj posledica tega, da so procesi komponent X^g med seboj neodvisni, tretja enakost pa velja, ker so procesi komponent markovske verige in zadoščajo markovski lastnosti.

Enačba (3.14) je trivialna in je posledica tega, da so komponente procesa X neodvisne markovske verige.

Pokazati moramo še lastnost (3.15). Vemo, da je jakost prehoda iz stanja $j_1 \dots j_G$ v stanje $k_1 \dots k_G$ definirana kot

$$p_{j_1 \dots j_G, k_1 \dots k_G}(t, t+dt) = \mu_{j_1 \dots j_G, k_1 \dots k_G}(t)dt + o(dt)$$

oziroma

$$p_{j_1 \dots j_G, j_1 \dots j_G}(t, t+dt) = 1 - \mu_{j_1 \dots j_G \cdot}(t)dt + o(dt).$$

Pokažimo, da ta enakost drži za proces X:

$$\begin{aligned} p_{j_1 \dots j_G, k_1 \dots k_G}(t, t+dt) &= \prod_{g=1}^{G} p^g_{j^g k^g}(t, t+dt) + o(dt) \\ &= \prod_{g=1}^{G} (\mu^g_{j^g k^g}(t)dt)^{1-\delta_{j^g k^g}} (1 - \mu^g_{j^g \cdot}(t)dt)^{\delta_{j^g k^g}} + o(dt) \\ &= \prod_{g=1}^{G} (\mu^g_{j^g k^g}(t)dt)^{1-\delta_{j^g k^g}} + o(dt). \end{aligned}$$

Enačba zgoraj je enaka $(\mu^g_{j^g k^g}(t)dt)^{1-\delta_{j^g k^g}} + o(dt)$, ko je vsaj en $j^g \neq k^g$, sicer pa je velikosti $o(dt)$.

□

3.3 Izračun matematičnih rezervacij

Za tako podan splošni model zavarovalne police lahko določimo pogodbeno obveznost, ki jo nosi zavarovalnica. Pogodbeno obveznost določimo kot pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke sedanje vrednosti bodočih neto izplačil po dani polici in jo označimo kot

$$V^{(q)}_{ej}(t) = \mathbb{E}[(\frac{1}{v(t)} \int_t^n v dB)^q | Y(t) = e, Z(t) = j].$$

Izrek 3.3.1. *Funkcije $V^{(q)}_{ej}(t)$ so določene z diferencialnimi enačbmi*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V^{(q)}_{ej}(t) &= (q r_e(t) + \mu_{j\cdot}(t) + \lambda_{e\cdot}) V^{(q)}_{ej}(t) - q b_j(t) V^{(q-1)}_{ej}(t) \\ &\quad - \sum_{k; k \neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} (b_{jk}(t))^l V^{(q-l)}_{ek}(t) - \sum_{f; f \neq e} \lambda_{ef} V^{(q)}_{fj}(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

ki so dobro definirane na $(0, n) \setminus \mathcal{D}$. *Robni pogoj je*

$$V_{ej}^{(q)}(t) = \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} (B_j(t) - B_j(t-))^l V_{ej}^{(q-l)}(t),\ t \in \mathcal{D}. \tag{3.18}$$

Dokaz je zelo podoben dokazu izreka 2.5.1 v 2. poglavju, zato ga tu ne bomo ponavljali. Glavna sprememba, ki jo je potrebno narediti, je, da r_t razumemo kot $r_t = \sum_j r^j I_j(t)$ in zamenjamo konstanto r v izreku z r^j. Upoštevati je tudi potrebno posebno strukturo jakosti prehodov in izplačil oziroma vplačil, saj so le ti odvisni le od procesa Z, kar pomeni, da ni izplačil ob spremembi stanja v procesu obrestne mere.

Centralni momenti $m_{ej}^{(q)}(t)$ se določijo na osnovi necentralnih momentov $V_{ej}^{(q)}(t)$, in sicer

$$\begin{aligned} m_{ej}^{(1)}(t) =& V_{ej}^{(1)}(t), \\ m_{ej}^{(q)}(t) =& \sum_{p=0}^{q} (-1)^{q-p} \binom{q}{p} V_{ej}^{(p)}(t) (V_{ej}^{(1)}(t))^{q-p}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.4 Ocena tveganja

Tradicionalno se matematične rezervacije za dan zavarovalni portfelj določijo kot matematično upanje neto bodočih obveznosti zavarovalnice. Ker pa se v realnosti parametri, potrebni za izračun matematičnih rezervacij, v večini primerov ne ujemajo z uporabljenimi parametri, je potrebna dodatna rezervacija, ki izravnava nihanja v odstopanjih v izračunih. Enostavno pravilo je, da je dobro imeti kapital za kritje matematičnih rezervacij vsaj v višini

$$R = \mathbb{E}V + 2\sqrt{\operatorname{Var} V},$$

kar je po neenakosti Čebiševa zadosti za kritje diskontiranih bodočih obveznosti z verjetnostjo vsaj 0.75. Če je porazdelitev V simetrična, je ta verjetnost vsaj 0.875, in v kolikor je porazdelitev blizu normalni porazdelitvi, je verjetnost okoli 0.975. Za podrobnosti glej članek (Norberg, 1993, str. 824).

Naredimo oceno tveganja za naš model. Bodoča izplačila in vplačila naj bodo modelirana z

$$dB(t) = \sum_k I_k(t) dB_k(t) + \sum_{l;l \neq k} b_{kl}(t) dN_{kl}(t).$$

Izplačilo oziroma vplačilo, narejeno v majhnem časovnem intervalu dt okoli časovne točke t, označimo z $dB(t)$.

Presežek, ki je bil ustvarjen zaradi vplačil, je trenutno investiran in prinaša obresti s trenutno obrestno mero $r(t)$ v času t. Funkcija diskontiranja je

$$v(t) = e^{-R},$$

kjer je

$$R = \int_0^t r(\tau) d\tau$$

akumulirana obrestna mera. Seveda predpostavimo, da je obrestna mera stohastična. Označimo naslednje vrednosti

$$\phi_1(t) = \mathbb{E}(v(t)) = \mathbb{E}e^{-R(t)}, \tag{3.20}$$

$$\phi_2(t) = \mathbb{E}(v(t)^2) = \mathbb{E}e^{-2R(t)}, \tag{3.21}$$

$$\phi_2(s,t) = \mathbb{E}(v(s)v(t)) = \mathbb{E}e^{-R(s)-R(t)}. \tag{3.22}$$

V enačbi (3.21) smo skrajšali $\phi_2(t) = \phi_2(t,t)$. Prav tako predpostavimo, da sta procesa B in r stohastična in med seboj neodvisna.

Matematične rezervacije so definirane kot

$$V = \int_0^\infty v(\tau) dB(\tau).$$

Predpostavimo tudi, da sta neodvisna tudi procesa B in v. Potem velja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V &= \mathbb{E}\int_0^\infty v(\tau) dB(\tau) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}(v(\tau))\mathbb{E}(dB(\tau)) \\ &= \int_0^\infty \phi_1(\tau)\mathbb{E}(dB(\tau)), \\ &= \mathbb{E}_{\phi_1} V, \end{aligned} \tag{3.23}$$

kjer je $\mathbb{E}_{\phi_1} V$ matematično upanje z determinističnо funkcijo diskontiranja enako ϕ_1. Izrazimo še varianco

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} V &= \mathbb{E}(\int v(\tau) dB(\tau)^2) - \mathbb{E}(V)^2 \\ &= \mathbb{E}(\int\int v(\theta)v(\tau) dB(\theta) dB(\tau)) - \mathbb{E}(V)^2 \\ &= \int\int \mathbb{E}(v(\theta)v(\tau))\mathbb{E}(dB(\theta)dB(\tau)) - \mathbb{E}(V)^2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Če vstavimo v zadnjo enačbo $\mathbb{E}(v(\theta)v(\tau)) = \operatorname{Cov}(v(\theta)v(\tau)) + \phi_1(\theta)\phi_1(\tau)$, dobimo

$$\operatorname{Var} V = \int\int \operatorname{Cov}(v(\theta)v(\tau))\mathbb{E}(dB(\theta)dB(\tau)) + \operatorname{Var}_{\phi_1}(V), \tag{3.25}$$

kjer je $Var_{\phi_1}(V)$ varianca izračunana z determinističnо diskontirano funkcijo ϕ_1.

Predpostavimo, da se zvezna obrestna mera $r(t)$ giblje po Vasičkovem modelu. Z diskretno aproksimacijo se da pokazati (Norberg, 1993, str. 825), da ima proces $R(t) = \int_0^t r(\tau)d\tau$, ki predstavlja akumulirane obresti, zvezno normalno porazdelitev

$$R(t)|_{r_0} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2),$$

z

$$\begin{aligned}\mu_t &= t\theta + \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)(r_0 - \theta),\\ \sigma_t^2 &= \frac{\sigma^2}{k^3}\left(tk - 2(1 - e^{-kt}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2kt})\right)\\ &= \frac{\sigma^2}{k^3}\left(tk + \frac{1}{2}(1 - (2 - e^{-kt})^2)\right),\end{aligned}$$

kjer so r_0, k, θ in σ pozitivne konstante določene s procesom r. Vsota ima ravno tako zvezno normalno porazdelitev z

$$R(s) + R(t)|_{r_0} \sim N(\mu_{s,t}, \sigma_{s,t}^2),$$

z

$$\mu_{s,t} = (s+t)\theta + \frac{1}{k}\left(2 - e^{-ks} - e^{-kt}\right)(r_0 - \theta)$$

in za $0 < s \leq t$, in $r = t - s$

$$\begin{aligned}\sigma_{s,t}^2 =& \frac{\sigma^2}{k^3}\Bigg((r + 4s)k + \frac{1}{2}(1 + e^{-kt})^2(1 - e^{-2ks}) -\\ & -4(1 + e^{-kr})(1 - e^{-ks}) + \frac{1}{2}(1 - (2 - e^{-kt})^2)\Bigg).\end{aligned}$$

Spomnimo se, da če imamo normalno slučajno spremenljivko $R(t) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, potem ima slučajna spremenljivka $Y = e^{-R_t}$ lognormalno porazdelitev ($y \sim \text{Logn}(\mu_t, \sigma_t^2)$) z

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= e^{-\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}},\\ \text{Var}\,(Y) &= (e^{\sigma_t^2} - 1)e^{-2\mu_t + \sigma_t^2}.\end{aligned}$$

Če to vstavimo v enačbe (3.20), (3.21) in (3.22), dobimo sledeče

$$\phi_1(t) = \mathbb{E}(v(t)) = \mathbb{E}e^{-R(t)} = e^{-\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}}, \tag{3.26}$$

$$\phi_2(t) = \mathbb{E}(v(t)^2) = \mathbb{E}e^{-2R(t)} = e^{2(\sigma_t^2 - \mu_t)}, \tag{3.27}$$

$$\phi_2(s,t) = \mathbb{E}(v(s)v(t)) = \mathbb{E}e^{-R(s)-R(t)} = e^{-\mu_{s,t} + \frac{\sigma_{s,t}^2}{2}}. \tag{3.28}$$

Končno lahko zapišemo formulo za matematične rezervacije

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V &= \int_0^\infty e^{-\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}}\, \mathbb{E}(dB(\tau)),\\ \operatorname{Var} V &= \int\int e^{-\mu_{\theta,\tau} + \frac{\sigma_{\theta,\tau}^2}{2}}\, \mathbb{E}(dB(\theta)dB(\tau)) - \mathbb{E}(V)^2.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Oglejmo si primer ocene tveganja za portfelj življenjskih zavarovanj za smrt, v katerem predpostavimo, da so zavarovalne police med seboj neodvisne. Zavarovalna pogodba določa, da zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto takoj ob smrti, če se to dogodi v času trajanja zavarovanja in da se za to zavarovanje zvezno plačuje premija, dokler je zavarovanje aktivno. Neto izplačila po zavarovalni polici bomo modelirali z markovskimi verigami na dveh stanjih (glej Slika 2.1). Za posamezno zavarovanje označimo naslednje:

x starost zavarovanca ob sklenitvi pogodbe,
t' čas sklenitve pogodbe,
n zavarovalna doba,
$t'' = t' + n$ čas, ko zavarovalna pogodba poteče,
b zavarovalna vsota,
c^* zvezna zavarovalna letna premija.

Predpostavimo, da so premije določene z naslednjimi parametri:

μ_x^* jakost umrljivosti za x let starega zavarovanca s pripadajočo funkcijo preživetja ${}_xp_0^*$,
r^* obrestna mera, pripadajoča funkcija diskontiranja je $v^*(t) = e^{-r^*t}$,
α^* stroški, odvisni od zavarovalne vsote, se obračunajo ob sklenitvi zavarovanja,
β^* stroški, odvisni od premije, se obračunajo ob vsakem plačilu premije,
γ^* administrativni stroški, odvisni od zavarovalne vsote, se obračunavajo zvezno, dokler je zavarovanje aktivno.

Najprej določimo premijo za poljubno zavarovalno polico i

$$\begin{aligned}c^*\bar{a}_{x:\bar{n}|} &= b\alpha^* + b\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} + \beta^* c^* \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \gamma^* b\bar{a}_{x:\bar{n}|}\\ c^* &= \frac{b}{1-\beta^*}\frac{(\alpha^* + \bar{A}^1_{x:\bar{n}|} + \gamma^*\bar{a}_{x:\bar{n}|})}{\bar{a}_{x:\bar{n}|}}.\end{aligned}$$

Sedaj se osredotočimo na celoten portfelj polic življenjskih zavarovanj, ki so aktivne v času 0. V portfelju oštevilčimo vsako zavarovalno polico od 0 do n. Pri računanju višine matematičnih rezervacij bomo uporabljali realne parametre, znane v trenutku izračuna, ki se bodo razlikovali od parametrov, uporabljenih za izračun premij ob sklenitvi zavarovanja. Za realne parametre ne bomo uporabili $*$. Model neto bodočih izplačil za i-to zavarovalno polico je dan $dB_i(t) = (b_i dN^i(t) - c_i I^i(t)dt)I_{(0,t_i'')}(t)$, kjer i označuje zavarovalno polico i, c_i, je zavarovalna premija

$$c_i = (1-\beta)c_i^* - b_i\gamma.$$

Naj $p_i(t)$ označuje pogojno verjetnost preživetja do časa t in $\mu_i(t)$ jakost umrljivosti v času t za zavarovanca, kjer je $t \in (0, t'')$. Določiti želimo $\mathbb{E}(dB(t))$, $\mathbb{E}(dB(t))$ in $\mathbb{E}(dB(s)dB(t))$. Najprej

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(dB(t)) &= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n}(b_i dN^i(t) - c_i I^i(t)dt)I_{(0,t_i'')}(t)) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(b_i\mathbb{E}(dN^i(t)) - c_i\mathbb{E}(I^i(t))dt)I_{(0,t_i'')}(t)) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(b_i p_i(t)\mu_i(t) - c_i p_i(t))dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)dt = Q(t)dt.
\end{aligned}$$

Izpeljimo še formulo za kovarianco.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(dB_i(s), dB_i(t)) &= \mathbb{E}((b_i dN^i(s) - c_i I^i(s)ds)(b_i dN^i(t) - c_i I^i(t)dt)) - Q_i(s)Q_i(t)\,ds\,dt \\
&= \mathbb{E}(-c_i I^i(s)ds(b_i dN^i(t) - c_i I^i(t)dt)) - Q_i(s)Q_i(t)\,ds\,dt \\
&= -c_i Q_i(t)dsdt - Q_i(s)Q_i(t)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

To enačbo bomo uporabili za izračun $\mathbb{E}(dB(s)dB(t))$. Za $0 < s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(dB(s)dB(t)) &= \mathbb{E}(dB(s))\mathbb{E}(dB(t)) + \operatorname{Cov}(dB(s), dB(t)) \\
&= Q(s)Q(t)\,ds\,dt + \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Cov}(dB_i(s), dB_i(t)) \\
&= Q(s)Q(t)\,ds\,dt - \sum_{i=1}^{n}(c_i + Q_i(s))Q_i(t)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Končno lahko zapišemo enačbe za matematično upanje in varianco slučajne spremenljivke sedanjih vrednosti bodočih neto izplačil za portfelj življenjskih zavarovanj. Ravnokar izpeljane formule ustavimo v enačbo (3.29):

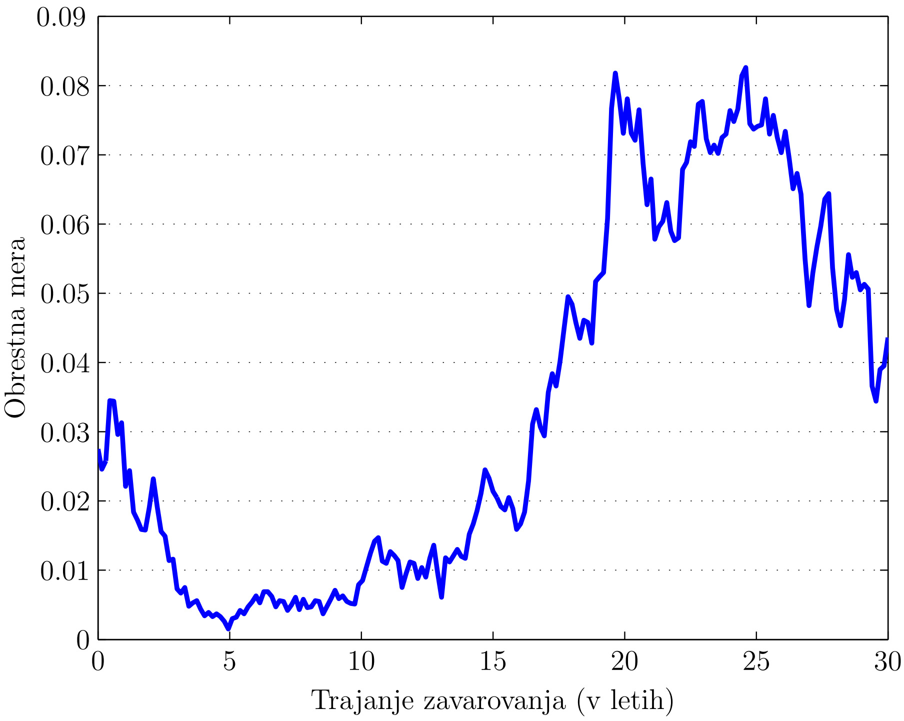
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}V &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty e^{-\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{2}} p_i(\tau)\,(b_i\mu_i(\tau) - c_i)d\tau, \\
\operatorname{Var}V &= \int\int e^{-\mu_{\theta,\tau} + \frac{\sigma_{\theta,\tau}^2}{2}}\left(Q(\theta)Q(\tau) - \sum_{i=1}^{n}(c_i + Q_i(\theta))Q_i(\tau)\right)d\theta\,d\tau - \mathbb{E}(V)^2.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Integrale v enačbah (3.30) lahko izračunamo numerično in tako določimo oceno tveganja za portfelj zavarovalnih polic.

3.5 Numerični izračuni

Poglejmo si nekaj primerov zavarovanj, predstavljenih v Poglavju 2, vendar sedaj s stohastično obrestno mero.

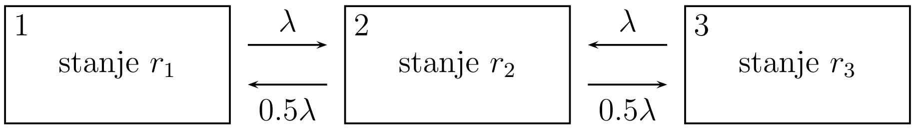
Začnimo najprej z življenjskim zavarovanjem za riziko smrti in invalidnosti na treh stanjih. Izberimo CIR model za generiranje obrestne mere. Možno trajektorijo prikazuje slika 3.1.



Slika 3.1: Generirana pot za obrestno mero z modelom CIR

S pomočjo tako generirane poti obrestnih mer določimo željeno število stanj obrestnih mer, in sicer tako, da določimo povprečja vrednosti obrestnih mer na enakomerno razdeljenih časovnih intervalih. Kot primer predpostavimo, da želimo tri stanja za obrestne mere na časovnem intervalu $[0, 30]$. Časovni interval razdelimo enakomerno na tri enake dele ($T_1 = [0, 10)$, $T_2 = [10, 20)$, $T_3 = [20, 30]$) in določimo povprečje vrednosti obrestnih mer po modelu CIR na vsakem od intervalov. V našem primeru dobimo na intervalu T_1 povprečje obrestnih mer $r_1 = 1.01\%$, na intervalu T_2 povprečje obrestnih mer $r_2 = 2.66\%$ in na intervalu T_3 povprečje obrestnih mer $r_3 = 6.39\%$. Tako smo dobili tri željena stanja obrestnih mer.

Naslednji korak je reševanje sistema diferencialnih enačb. Uporabimo enačbo (3.17) iz izreka 3.3.1, da dobimo sistem devetih diferencialnih enačb, in sicer tri enačbe za stanja zavarovalne police in za vsako od teh še tri enačbe za stanja obrestnih mer. Potrebujemo še jakosti prehodov za proces obrestnih mer. Predpostavimo, da se lahko obrestne mere spreminjajo, kot kaže slika 3.2.



Slika 3.2: Markovski proces za model obrestne mere s tremi stanji.

Ta predpostavka je smiselna, saj smo generirali ta stanja kot povprečje zvezne trajektorije obrestne mere in imajo zato stanja, ki so bolj oddaljena od trenutnega stanja, ničelno verjetnost v primerjavi s stanji, ki so bližje. Predpostavka nam da naslednjo matriko prehodov

$$\Lambda = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

kjer λ predstavlja povprečno število prehodov na časovno enoto. To pomeni, da je to volatilnost obrestne mere.

Vzemimo primer moškega, ob sklenitvi zavarovanja starega 30 let , ko sklene 30-letno življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost, pri katerem so po zavarovalni pogodbi predvidena naslednja izplačila: zavarovalna vsota za smrt v višini 1 ($b_{13} = b_{23} = 1$) in zvezna letna invalidska renta v v višini 0.5 ($b_2 = 0.5$); zvezno pa se plačuje premija $-b_1$, ki se določi po principu ekvivalence, za začetno stanje $(2, 1)$. To pomeni stanje 2 za obresti in stanje 1 za model izplačil zavarovanja. Tabela 3.1 prikazuje prve tri centralne momente za sedanje vrednosti v $t = 0$ v primeru, ko je $\lambda = 0$, kar pomeni, da je obrestna mera vseskozi enaka $r_2 = 2.66\%$. Podoben primer smo že obravnavali v drugem poglavju.

Najprej opazimo, da vrednosti drugih in tretjih centralnih momentov sedanjih vrednosti bodočih neto izplačil pri naraščajočih začetnih stanjih obrestne mere padajo, torej so višji momenti zelo odvisni od višine predpostavljene obrestne mere. To se da pojasniti, saj je sedanja vrednost ob višji obrestni meri manjša kot pri nižji obrestni meri, torej enako velja tudi za momente sedanjih vrednosti.

V tabelah 3.1 do 3.5 lahko tudi opazimo, da ko λ narašča, se razlike med tremi pari stolpcev manjšajo in na koncu razlik skoraj ni več. Razlog za to je, da ko se obrestna mera zelo veliko spreminja, začetna obrestna mera nima velikega vpliva na izračun.

Stanja (e,j)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
$m^{(1)}_{e,j}(0)$	0.0503	11.6296	0.0000	9.3865	-0.0504	6.1946
$m^{(2)}_{e,j}(0)$	1.7163	8.6447	0.9137	4.8270	0.2579	1.4833
$m^{(3)}_{e,j}(0)$	11.7808	-59.4513	4.9486	-26.7025	0.8916	-5.4293

Tabela 3.1: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0$. e predstavlja stanja obrestnih mer, j pa stanja police. Premija se določi po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $P = 0.01509$.
Vir: Lastni

Stanja (e,j)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
$m^{(1)}_{e,j}(0)$	0.0260	10.7769	0.0000	9.2061	-0.0251	7.0496
$m^{(2)}_{e,j}(0)$	1.3611	7.9152	0.8902	5.7414	0.4390	3.4005
$m^{(3)}_{e,j}(0)$	8.8526	-42.3782	4.9385	-22.6584	1.8846	-5.7786

Tabela 3.2: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0.05$, e predstavlja stanja obrestnih mer, j pa stanja police. Premija se določi po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $P = 0.01488$.
Vir: Lastni

Stanja (e,j)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
$m^{(1)}_{e,j}(0)$	0.0011	9.2595	0.0000	8.9149	-0.0013	8.4172
$m^{(2)}_{e,j}(0)$	0.8621	5.2305	0.7935	4.8756	0.7009	4.3694
$m^{(3)}_{e,j}(0)$	4.7191	-23.2660	4.1760	-20.3632	3.4757	-16.6613

Tabela 3.3: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost v času $t = 0$, ko je $\lambda = 0.5$, e predstavlja stanja obrestnih mer, j pa stanja police. Premija se določi po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $P = 0.01456$.
Vir: Lastni

Stanja (e,j)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
$m^{(1)}_{e,j}(0)$	0.0000	8.8597	0.0000	8.8219	0.0000	8.7660
$m^{(2)}_{e,j}(0)$	0.7644	4.1810	0.7578	4.1453	0.7482	4.0938
$m^{(3)}_{e,j}(0)$	3.8968	-21.1605	3.8451	-20.8312	3.7735	-20.4868

Tabela 3.4: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost v času $t = 0$, ko je $\lambda = 5$, e predstavlja stanja obrestnih mer, j pa stanja police. Premija se določi po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $P = 0.01448$.
Vir: Lastni

Stanja (e,j)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)
$m^{(1)}_{e,j}(0)$	0.0000	8.8096	0.0000	8.8096	0.0000	8.8095
$m^{(2)}_{e,j}(0)$	0.7533	4.0410	0.7533	4.0410	0.7533	4.0409
$m^{(3)}_{e,j}(0)$	3.8035	-20.9459	3.8034	-20.9446	3.8033	-20.9453

Tabela 3.5: Centralni momenti za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost v času $t = 0$, ko je $\lambda = 5,000$, e predstavlja stanja obrestnih mer, j pa stanja police. Premija se določi po principu ekvivalence za začetno stanje $(2, 1)$ in je enaka $P = 0.014476$. Vir: Lastni

3.6 Občutljivost na spremembe parametrov

Pogosto se v zavarovalništvu pojavlja vprašanje, kateri so optimalni parametri za izračun premij in vrednosti matematičnih rezervacij. Običajno se določa parametre konzervativno. To pomeni, da nam izbrani parametri kvečjemu povečajo verjetnost, da tako oblikovane matematične rezervacije zadoščajo za pokritje bodočih obveznosti. Zelo pomembno pri tem pa je, da znamo oceniti, kakšen vpliv ima določeni parameter na matematične rezervacije oziroma premije in kateri parametri so bolj pomembni od ostalih. Preprost način analiziranja občutljivosti parametrov je, da analiziramo, kako se spreminja odvod dane spremenljivke v odvisnosti od izbranega parametra. Metoda analiziranja občutljivosti parametrov je podana v članku (Kalashnikov, Norberg, 2003), ki služi kot osnova za ta razdelek.

3.6.1 Premije in matematične rezervacije

Označimo prospektivno matematično rezervacijo v stanju j v času t z $V_j(t, \theta, b - c)$ in tako poudarimo odvisnost vrednosti matematičnih rezervacij od parametra θ in izplačil (b ponazarja izplačane škode za zavarovalno polico, c pa premije). Premija se določi po principu ekvivalence

$$V_1(0, \theta, b - c) = \Delta C_1(0, \theta),$$

kjer je $\Delta C_1(0, \theta)$ znesek predplačila ob sklenitvi zavarovanja.

Oblikovanje zavarovalne pogodbe in izračun matematičnih rezervacij in premij poteka na naslednji način. Najprej oblikujemo zavarovalno pogodbo glede na potrebe bodočega zavarovanca. Nato glede na izbrano zavarovanje določimo premije in sicer v multiplikativni obliki

$$\Delta C_1(0, \theta) = \pi(\theta)\Delta \bar{C}_1(0, \theta), \qquad c_j(t, \theta) = \pi(\theta)\bar{c}_j(t, \theta), \tag{3.31}$$

kjer ponazarjata $\Delta \bar{C}_1(0, \theta)$ in $\bar{c}_j(t, \theta)$ osnovni premijski plan, upoštevajoč finančno situacijo sklenitelja pogodbe po principu ekvivalence in zakonske podlage, ki urejajo to področje zavarovalništva; $\pi(\theta)$ je premija, ki je nato fiksirana za čas zavarovanja in je določena po principu ekvivalence.

Matematične rezervacije se dajo razčleniti

$$V_j(t,\theta,b-c) = V_j(t,\theta,b) - \pi(\theta)V_j(t,\theta,\bar{c}), \tag{3.32}$$

kjer sta $V_j(t,\theta,b)$ in $V_j(t,\theta,\bar{c})$ pričakovani vrednosti diskontiranih bodočih izplačil in osnovnih premij. Obe kot funkciji časa zadoščata Thielejevim diferencialnim enačbam:

$$\frac{\partial}{\partial t}V_j(t,\theta,b) = r_j(t,\theta)V_j(t,\theta,b) - b_j(t,\theta) - \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}(t,\theta)R_{jk}(t,\theta,b), \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}V_j(t,\theta,\bar{c}) = r_j(t,\theta)V_j(t,\theta,\bar{c}) - c_j(t,\theta) - \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}(t,\theta)R_{jk}(t,\theta,\bar{c}), \tag{3.34}$$

kjer so R_{jk} imenovane vsote rizika glede na prehod iz stanja j v stanje k:

$$\begin{aligned}
R_{jk}(t,\theta,b) &= b_{jk}(t,\theta) + V_k(t,\theta,b) - V_j(t,\theta,b),\\
R_{jk}(t,\theta,\bar{c}) &= V_k(t,\theta,\bar{c}) - V_j(t,\theta,\bar{c}).
\end{aligned}$$

Numerično reševanje zgornjih enačb začnemo pri robnih pogojih

$$V_j(T-,\theta,b) = \Delta B_j(T,\theta), \tag{3.35}$$

$$V_j(T-,\theta,\bar{c}) = 0, \tag{3.36}$$

za $j = 1,\ldots,J$. Ko določimo funkcije $V_j(\cdot,\theta,b)$ in $V_j(\cdot,\theta,\bar{c})$ vse do začetnega časa $t = 0$, določimo še premijo $\pi(\theta)$ po principu ekvivalence, in sicer

$$\pi(\theta)(\Delta\bar{C}_1(0,\theta) + V_1(0,\theta,\bar{c})) = V_1(0,\theta,b) \tag{3.37}$$

oziroma

$$\pi(\theta) = \frac{V_1(0,\theta,b)}{\Delta\bar{C}_1(0,\theta) + V_1(0,\theta,\bar{c})}. \tag{3.38}$$

3.6.2 Odvodi po parametru θ in diferencialne enačbe

Označimo odvode po parametru θ kot

$$V_j'(t,\theta,b) = \frac{\partial}{\partial\theta}V_j(t,\theta,b), \qquad V_j''(t,\theta,b) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}V_j(t,\theta,b).$$

Če odvajamo enačbi (3.33), (3.34) in robna pogoja (3.35), (3.36) po parametru θ, dobimo diferencialne enačbe, katerih rešitvi sta funkciji $V_j'(\cdot,\theta,b)$ in $V_j'(\cdot,\theta,\bar{c})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}V_j'(t,\theta,b) = {}& r_j'(t,\theta)V_j(t,\theta,b) + r_j(t,\theta)V_j'(t,\theta,b) - b_j'(t,\theta)\\
&- \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}'(t,\theta)R_{jk}(t,\theta,b) - \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}(t,\theta)R_{jk}'(t,\theta,b),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} V_j'(t,\theta,\bar{c}) &= r_j'(t,\theta) V_j(t,\theta,\bar{c}) + r_j(t,\theta) V_j'(t,\theta,\bar{c}) - b_j'(t,\theta) \\ &- \sum_{k;k\neq j} \mu_{jk}'(t,\theta) R_{jk}(t,\theta,\bar{c}) - \sum_{k;k\neq j} \mu_{jk}(t,\theta) R_{jk}'(t,\theta,\bar{c}),\end{aligned} \tag{3.40}$$

s pripadajočima robnima pogojema

$$V_j'(T-,\theta,b) = \Delta B_j'(T,\theta), \tag{3.41}$$

$$V_j'(T-,\theta,\bar{c}) = 0. \tag{3.42}$$

Da določimo funkcije V_j in njegove odvode V_j', naredimo sledeče: najprej rešimo simultano sistem diferencialnih enačb (3.33), (3.34), (3.39) in (3.40). Nato določimo premijo $\pi(\theta)$ po enačbi (3.38). Odvod $\pi'(\theta)$ dobimo tako, da odvajamo (3.37) in rešimo

$$\pi'(\theta) = \frac{V_1'(0,\theta,b) - \pi(\theta)(\Delta \bar{C}_1'(0,\theta) + V_1'(0,\theta,\bar{c}))}{\Delta \bar{C}_1(0,\theta) + V_1(0,\theta,\bar{c})}. \tag{3.43}$$

Končno, vrednosti matematičnih rezervacij $V_j(t,\theta,b-\bar{c})$ se izračunajo po (3.32), odvodi matematičnih rezervacij pa po formuli

$$V_j'(t,\theta,b-\bar{c}) = V_j'(t,\theta,b) - \pi'(\theta) V_j(t,\theta,\bar{c}) - \pi(\theta) V_j'(t,\theta,\bar{c}) \tag{3.44}$$

za tiste čase t, ki so potrebni za rešitev.

3.6.3 Obstoj odvodov

Metoda, predstavljena v razdelku 3.6.2, je odvisna od obstoja parcialnih odvodov, ki so prisotni v diferencialnih enačbah (3.39) in (3.40). V tem razdelku bomo na kratko komentirali ta problem. Natančen dokaz obstoja odvodov po parametru θ najdemo v razdeleku 3.6.7.

Integral za prospektivne matematične rezervacije za stanje j v času t za zavarovalno pogodbo s predvidenimi bodočimi izplačili b je

$$V_j(t,\theta,b) = \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma,\theta)d\sigma} \sum_g p_{jg}(t,\tau,\theta) \left(b_g(\tau,\theta) + \sum_{h,h\neq g} \mu_{gh}(\tau,\theta) b_{gh}(\tau,\theta) \right) d\tau. \tag{3.45}$$

Diferenciabilnost funkcij $V_j(t,\theta,b)$ glede na spremenljivko t je odvisna od zveznosti funkcij pod integralskim znakom. Za reševanje enačb z numeričnimi metodami potrebujemo le, da so funkcije $V_j(t,\theta,b)$ kosoma odvedljive. Diferenciabilnost po parametru θ, ki je povezana z obrestno mero oziroma z oblikovanjem zavarovalne pogodbe, je enostavno preverljiva, saj se taki parametri pojavijo neposredno pod integralom v (3.45).

Težje je preveriti diferenciabilnost glede na nek parameter θ verjetnostnega modela, kot na primer $\mu_{jk}(t,\theta)$. Problem je v tem, da prehodne verjetnosti pod integralom (3.45) niso v splošnem eksplicitne funkcije parametra θ in se običajno določijo kot rešitve diferencialnih enačb Kolmogorova. V razdelku 3.6.7 pokažemo, da v kolikor predpostavimo zadostno gladkost jakosti prehodov, odvodi funkcij V_j glede na parameter θ obstajajo in so dani kot

$$V_j'(t,\theta,b) = \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} \sum_g p_{jg}(t,\tau,\theta) \sum_{h;h\neq g} \mu_{gh}'(\tau,\theta) R_{gh}(\tau,\theta,b)d\tau. \tag{3.46}$$

(Glede na to, da obravnavamo primer, ko se parameter θ nahaja le v jakostih prehodov, smo v zgornji enačbi izpustili parameter v obrestih in plačilih.)

Iz enačbe (3.46) opazimo, da če povečamo dano jakost prehoda, s tem povečamo tudi vse $V_j'(t,\theta,b)$, seveda ob predpostavki, da so vsi pripadajoči $R(\tau,\theta)$ pozitivni. Težje je priti do ustreznih zaključkov za premijske rezervacije $V_j(t,\theta,b-\bar{c}) = V_j(t,\theta,b) - \pi(\theta)V_j(t,\theta,b-\bar{c})$, saj ne vemo, kako se spremeni premija $\pi(\theta)$.

3.6.4 Razširitev metode na višje momente

Prilagodimo formulo (2.5.1), izpeljano v podpoglavju 2.5, tako da vpeljemo v enačbe parameter θ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}V_j^{(q)}(t,\theta,b-\bar{c}) &= (qr_j(t,\theta)+\mu_{j\cdot}(t,\theta))V_j^{(q)}(t,\theta,b-\bar{c}) \\ &\quad - q(b_j(t,\theta)-\pi(\theta)\bar{c}_j(t,\theta))V_j^{(q-1)}(t,\theta,b-\bar{c}) \\ &\quad - \sum_{k;k\neq j}\mu_{jk}(t,\theta)\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}(b_{jk}(t,\theta))^p V_k^{(q-p)}(t,\theta,b-\bar{c}),\end{aligned} \tag{3.47}$$

in za robni pogoj

$$V_j^{(q)}(T-,\theta,b-\bar{c}) = (\Delta B_j(T,\theta))^q. \tag{3.48}$$

Iz necentralnih momentov lahko določimo centralne momente. Na primer, da dobimo varianco za stanje j, moramo dopolniti naš sistem diferencialnih enačb in dodati še dve

$$\mathrm{Var}_j(t,\theta,b-\bar{c}) = V_j^{(2)}(t,\theta,b-\bar{c}) - V_j^2(t,\theta,b-\bar{c}) \tag{3.49}$$

in

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}_j(t,\theta,b-\bar{c}) = \frac{\partial}{\partial t}V_j^{(2)}(t,\theta,b-\bar{c}) - 2V_j(t,\theta,b-\bar{c})\frac{\partial}{\partial t}V_j(t,\theta,b-\bar{c}). \tag{3.50}$$

3.6.5 Primeri

Oglejmo si sedaj primer življenjskega zavarovanja, modeliranega s tremi stanji, ki smo ga že obravnavali v poglavju 2. Vzemimo kombinirano življenjsko zavarovanje za smrt z zavarovalno vsoto 1 in zvezno letno invalidsko rento 0.5. Premija se plačuje zvezno v konstantni višini, dokler je zavarovanec v aktivnem stanju.

Oglejmo si, kako je višina matematičnih rezervacij za to zavarovanje občutljiva na obrestno mero. Predpostavimo, da je $\bar{c} = 1$. Sistem diferencialnih enačb, ki ga moramo rešiti, je

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt}(t,r,b) &= (r(t)+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1(t,r,b) - \sigma_x(t)(V_2(t,r,b)+b_{12}) - \mu_x(t)b_{13}\\
\frac{dV_1}{dt}(t,r,\bar{c}) &= (r(t)+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1(t,r,\bar{c}) - 1 - \sigma_x(t)V_2(t,r,\bar{c})\\
\frac{dV_1'}{dt}(t,r,b) &= (r(t)+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1'(t,r,b) + V_1(t,r,b) - \sigma_x(t)V_2'(t,r,b)\\
\frac{dV_1'}{dt}(t,r,\bar{c}) &= (r(t)+\sigma_x(t)+\mu_x(t))V_1'(t,r,\bar{c}) + V_1(t,r,\bar{c}) - \sigma_x(t)V_2'(t,r,\bar{c})\\
\frac{dV_2}{dt}(t,r,b) &= (r(t)+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2(t,r,b) - b_{22} - \rho_x(t)(V_1(t,r,b)+b_{21}) + \nu_x(t)b_{23}\\
\frac{dV_2}{dt}(t,r,\bar{c}) &= (r(t)+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2(t,r,\bar{c}) - \rho_x(t)V_1(t,r,\bar{c})\\
\frac{dV_2'}{dt}(t,r,b) &= (r(t)+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2'(t,r,b) + V_2(t,r,b) - \rho_x(t)V_1'(t,r,b)\\
\frac{dV_2'}{dt}(t,r,\bar{c}) &= (r(t)+\nu_x(t)+\rho_x(t))V_2'(t,r,\bar{c}) + V_2(t,r,\bar{c}) - \rho_x(t)V_1'(t,r,\bar{c})
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

z robnimi pogoji

$$
\begin{aligned}
V_1(T-,r,b) &= V_1'(T-,r,b) = 0\\
V_1(T-,r,\bar{c}) &= V_1'(T-,r,\bar{c}) = 0\\
V_2(T-,r,b) &= V_2'(T-,r,b) = 0\\
V_2(T-,r,\bar{c}) &= V_2'(T-,r,\bar{c}) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Sistem rešimo numerično z metodo Runge-Kutta.

Premijo $\pi(r)$ dobimo kot kvocient $\pi(r) = \frac{V_1(0,r,b)}{V_1(0,r,\bar{c})} = 0.28957/19.26662 = 0.01503$. Formulo za odvod premije $\pi'(r)$ iz enačbe (3.43)

$$\pi'(r) = \frac{V_1'(0,r,b) - \pi(r)V_1'(0,r,\bar{c})}{V_1(0,r,\bar{c})} = -0.12032.$$

Ker je odvod premije negativen, pomeni, da sta premija in obrestna mera nasprotno korelirani. Če se obrestna mera poveča, se premija zmanjša. Sedaj lahko določimo vrednosti matematičnih rezervacij in prve odvode matematičnih rezervacij po parametru r s pomočjo formul (3.32) in (3.44). Rezultate prikazuje tabela 3.7.

Iz tabele 3.7 lahko razberemo, da vsako povečanje obrestne mere v stanju invalidnosti povzroči zmanjšanje vrednosti matematičnih rezervacij za to stanje za vse čase t.

Čas t	$V_1(t,r,b)$	$V_1(t,r,\bar{c})$	$V_1'(t,r,b)$	$V_1'(t,r,\bar{c})$	$V_2(t,r,b)$	$V_2(t,r,\bar{c})$	$V_2'(t,r,b)$	$V_2'(t,r,\bar{c})$
0	0.2896	19.2666	-5.9274	-240.1394	9.3428	1.1601	-115.5708	-20.8525
5	0.2922	16.9509	-4.9131	-180.5500	8.3278	0.8796	-88.4943	-13.3875
10	0.2842	14.3513	-3.7483	-125.5010	7.1514	0.6170	-62.6809	-7.6359
15	0.2570	11.4403	-2.4783	-77.1202	5.7858	0.3827	-39.2320	-3.6129
20	0.1993	8.1733	-1.2405	-37.8536	4.1913	0.1895	-19.5604	-1.21382
25	0.1045	4.4499	-0.3092	-10.6674	2.3027	0.0536	-5.5553	-0.1752
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.6: Rešitev sistema diferencialnih enačb za analiziranje občutljivosti vrednosti matematičnih rezervacij glede na obrestno mero za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost.
Vir: Lastni

Čas t	$V_1(t,r,\mathbf{b}-\bar{c})$	$V_2(t,r,b-\bar{c})$	$V_1'(t,r,b-\bar{c})$	$V_2'(t,r,b-\bar{c})$
0	0.00000	9.32540	0.00000	-115.11783
5	0.03741	8.31459	-0.15997	-88.18730
10	0.06854	7.14210	-0.13538	-62.49190
15	0.08505	5.78006	0.05725	-39.13163
20	0.07649	4.18844	0.31184	-19.51935
25	0.03765	2.30185	0.38654	-5.54618
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

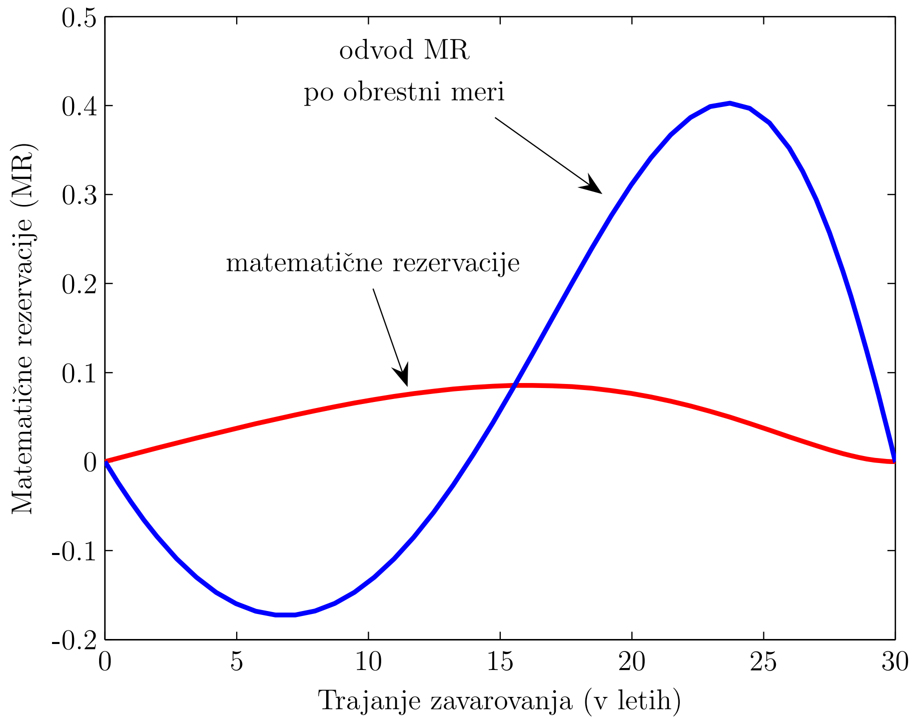
Tabela 3.7: Vrednosti matematičnih rezervacij in njegovih odvodov po parametru r v odvisnosti od časa za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost.
Vir: Lastni

To je tudi pričakovano, saj se v stanju invalidnosti izplačuje renta, ki pa je zelo odvisna od obrestnih mer. Odvod matematičnih rezervacij v aktivnem stanju po parametru r je najprej negativen, kasneje pa postane pozitiven. To pomeni, da ima spreminjanje obrestnih mer različen efekt na višino matematičnih rezervacij glede na čas poteka zavarovanja.

Podobno lahko občutljivost matematičnih rezervacij določimo v odvisnosti od umrljivosti. Jakost umrljivosti je podan po Gompertz-Makehamovi formuli kot

$$\mu(t,\theta) = \alpha + \beta e^{\gamma(x+t)}.$$

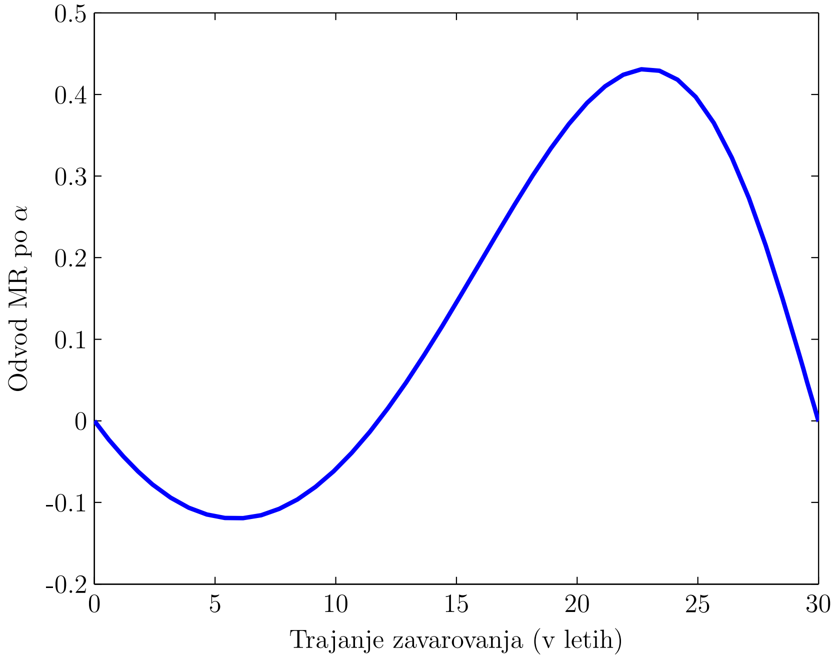
Parametri umrljivosti, za katere lahko analiziramo občutljivost matematičnih rezervacij, so α, β in γ. Parameter α predstavlja umrljivost, ki je neodvisna od starosti, parametra β in γ pa predstavljata stopnjo umrljivosti, ki je odvisna od starosti zavarovanca.



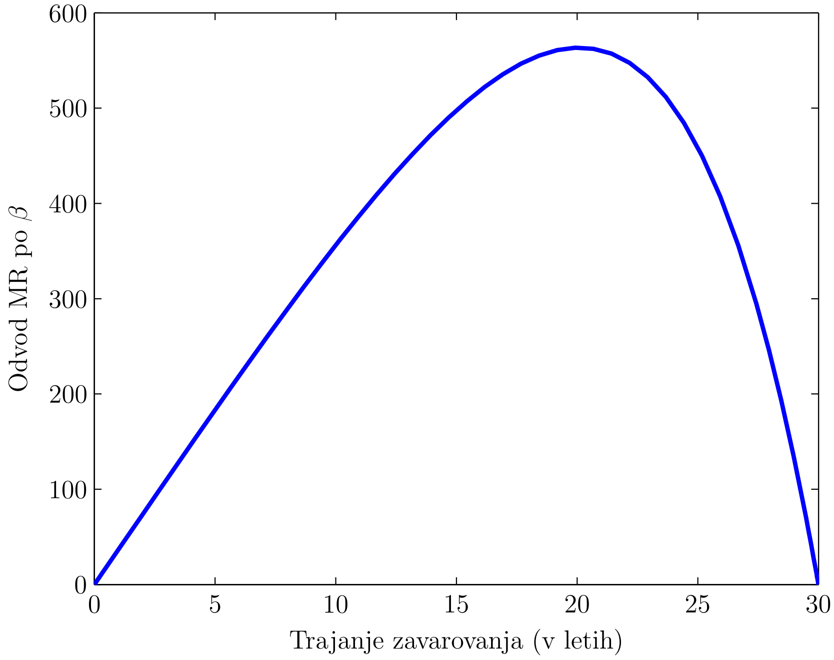
Slika 3.3: Matematične rezervacije v aktivnem stanju in njihov odvod po parametru obrestne mere.

Opazimo lahko, da bosta najverjetneje imela parametra β in γ podoben učinek na vrednosti matematičnih rezervacij. Če se bosta parametra povečala v nekem času t, se bo tako povečala tudi umrljivost za vse bodoče trenutke po t, in sicer bo imela sprememba parametra največji vpliv pri večjih starostih. To pa pomeni, da se bodo matematične rezervacije ravno tako povečale. Torej pričakujemo lahko, da bodo odvodi matematičnih rezervacij po parametrih β in γ pozitivni za vse čase $t \in (0, n)$.

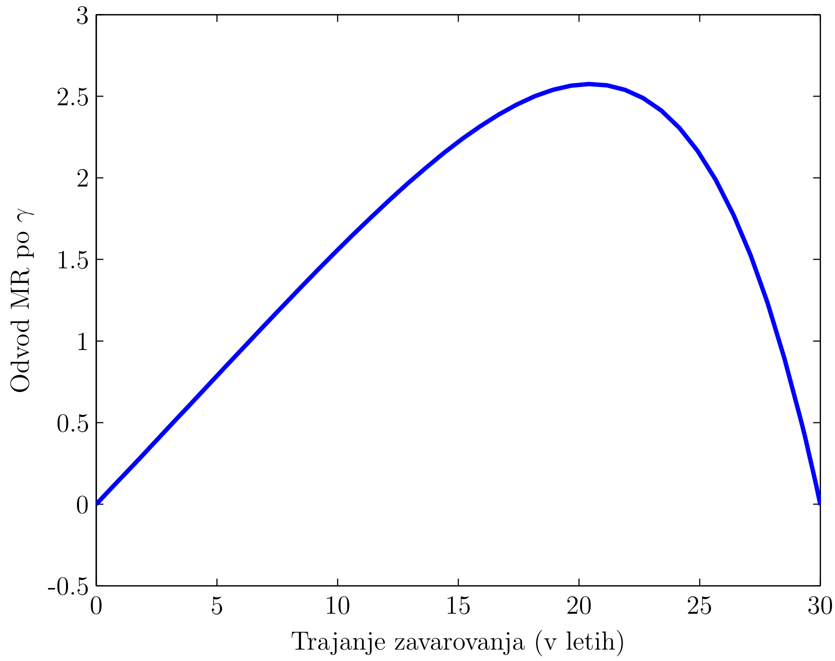
Parameter α ni odvisen od starosti zavarovanca, zato njegova sprememba ne bo tako močno vplivala na matematične rezervacije. Povečanje parametra α le premakne krivuljo umrljivosti navzgor enako skozi celotno trajanje zavarovanja. Sklepamo lahko, da bo taka sprememba manj opazna pri višji starosti, saj tam dominirata parametra β in γ, bolj pa bo zato opazna sprememba pri nižji starosti zavarovanca. Odvodi matematičnih rezervacij po različnih parametrih umrljivosti so prikazani na grafih 3.4, 3.5 in 3.6.



Slika 3.4: Odvod matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost po parametru α, ki nastopa v formuli jakosti umrljivosti v odvisnosti od trajanja zavarovanja.



Slika 3.5: Odvod matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost po parametru β, ki nastopa v formuli jakosti umrljivosti v odvisnosti od trajanja zavarovanja.



Slika 3.6: Odvod matematičnih rezervacij za življenjsko zavarovanje za smrt in invalidnost po parametru γ, ki nastopa v formuli jakosti umrljivosti v odvisnosti od trajanja zavarovanja.

3.6.6 Občutljivost glede na več parametrov

Naj bo sedaj $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ vektor elementov tehnične baze. Sprememba funkcije $dV_j(t, \theta, b - \bar{c})$ glede na spremembo parametrov $(d\theta_1, \ldots, d\theta_p)$ je približno enaka

$$dV_j(t, \theta, b - \bar{c}) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} V_j(t, \theta, b - \bar{c}) d\theta_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \theta_p} V_j(t, \theta, b - \bar{c}) d\theta_p.$$

S to formulo lahko ocenimo dejanski vpliv parametrov na matematične rezervacije, med drugim lahko določimo, kateri parametri imajo najmočnejši vpliv na določene matematične rezervacije.

3.6.7 Dokaz obstoja odvodov po parametru θ

Naj $\tau \geq 0$ predstavlja čas in naj bo θ parameter z vrednostmi na odprti množici Θ na končno dimenzionalnem evklidskem prostoru. Ker smo primarno zainteresirani za prve odvode, lahko vzamemo realen θ in za Θ odprt interval na realni osi. Za vsak τ in θ definirajmo $M(\tau, \theta) = (\mu_{jk}(\tau, \theta))$ končno dimenzionalno kvadratno matriko, in sicer tako, da je $\mu_{jk}(\tau, \theta) \geq 0$ za $j \neq k$ in

$$\mu_{jj}(\tau, \theta) = - \sum_{k; k \neq j} \mu_{jk}(\tau, \theta).$$

Torej, za fiksni θ, je $M(\tau, \theta)$ matrika za zvezno markovsko verigo, glej (Andersen et al., 1995). Označimo pripadajoče prehodne verjetnosti iz stanja j v času t v stanje k v času u $(\geq t)$ z $p_{jk}(t, u, \theta)$ in prehodno matriko s $P(t, u, \theta) = (p_{jk}(t, u, \theta))$. Prehodne verjetnosti zadoščajo enačbi Chapman-Kolmogorova

$$P(t, u, \theta) = P(t, \tau, \theta)P(\tau, u, \theta).$$

Brez škode za splošnost privzemimo, da je $M(\tau, \theta)$ desno-zvezna v času τ. Če je $M(\tau, \theta)$ (kosoma) zvezna v času τ, potem je matrika $P(t, u, \theta)$ (kosoma) zvezna v času t in v u in obstaja enolična rešitev leve ali desne diferencialne enačbe Kolmogorova . Desna diferencialna enačba Kolmogorova je

$$\frac{\partial}{\partial u} P(t, u, \theta) = P(t, u, \theta)M(u, \theta), \tag{3.53}$$

z robnim pogojem

$$P(t, t, \theta) = I, \tag{3.54}$$

kjer I predstavlja matriko identitete. Če integriramo enačbo (3.53) na intervalu od t do u in uporabimo robni pogoj (3.54), dobimo integralsko formo

$$P(t, u, \theta) = I + \int_t^u P(t, \tau, \theta)M(\tau, \theta)d\tau. \tag{3.55}$$

V primeru, ko je $M(\tau, \theta)$ zvezno odvedljiva glede na τ, nam enačba (3.53) pove, da je $P(t, u, \theta)$ dvakrat zvezno odvedljiva in velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(t, u, \theta) &= \frac{\partial}{\partial u} P(t, u, \theta)M(u, \theta) + P(t, u, \theta)\frac{\partial}{\partial u} M(u, \theta) \\ &= P(t, u, \theta)\left(M^2(u, \theta) + \frac{\partial}{\partial u} M(u, \theta)\right). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Iz razvoja v Taylorjevo vrsto

$$P(t, t+h, \theta) = P(t, t, \theta) + \frac{\partial}{\partial u} P(t, t, \theta)h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} P(t, u^*, \theta)h^2,$$

kjer je $u^* \in (t, t+h)$ in iz enačb (3.53), (3.54) in (3.56) sledi, da je

$$P(t, t+h, \theta) = I + M(t, \theta)h + Q(t, h, \theta)h^2, \tag{3.57}$$

kjer je vsaka komponenta v $Q(t, h, \theta)$ pripadajoča komponenta v matriki iz enačbe (3.56) izračunana v nekem $u^* \in [t, t+h]$ (ki je seveda odvisen od komponente). Sedaj povejmo osnovni rezultat diferenciabilnosti za prehodne verjetnosti glede na parameter θ.

Izrek 3.6.1. *1. Vzemimo poljuben končen, zaprt interval* $[t, u]$. *Predpostavimo, da za* $\tau \in [t, u]$ *in* $\theta \in \Theta$, *(i) $M(t, \theta)$ je zvezno odvedljiva matrika glede na spremenljivko τ (vsaj kosoma) in glede na parameter θ,*

(ii) Komponente v $M'(t, \theta)$, za $\tau \in [t, u]$, predstavljajo enakozvezno družino funkcij za θ.

Potem je $P(t, u, \theta)$ zvezno odvedljiva glede na parameter θ in

$$P'(t, u, \theta) = \int_t^u P(t, \tau, \theta) M'(\tau, \theta) P(\tau, u, \theta) d\tau. \tag{3.58}$$

2. *Vzemimo končen, polodprt interval $[t, u)$. Predpostavimo, da pogoji iz 1. točke izreka veljajo za vsak zaprt podinterval v intervalu $[t, u)$ in da integral $\int_t^u P(t, \tau, \theta) M(\tau, \theta) d\tau$ odvajan po spremenljivki θ pod integralskim znakom, obstaja. Potem je $P(t, u, \theta)$ zvezno odvedljiva glede na parameter θ in*

$$P'(t, u, \theta) = \int_t^u P(t, \tau, \theta) M'(\tau, \theta) P(\tau, u, \theta) d\tau.$$

3. *Če se lahko vsak časovni interval zapiše kot končna unija intervalov, za katere veljajo pogoji iz 2. točke izreka, potem je $P(t, u, \theta)$ zvezno odvedljiva glede na parameter θ in*

$$P'(t, u, \theta) = \int_t^u P(t, \tau, \theta) M'(\tau, \theta) P(\tau, u, \theta) d\tau$$

za vse prehodne verjetnosti.

Opomba. Točki (2) in (3) v izreku poskrbita za primere, ko so nekatere jakosti prehodov neomejene na končnem intervalu. To se zgodi v primeru, ko predpostavimo največjo starost. Pogoj v točki (2) se enostavno preveri za nekatere primere, ko lahko prehodne verjetnosti zapišemo eksplicitno. V bolj splošnih primerih pa to ni tako enostavno in bi bilo zato bolje najti bolj enostaven potreben pogoj (Kalashnikov, Norberg, 2003, str. 242-256).

Dokaz. 1. Najprej povejmo nekaj dejstev, ki sledijo iz predpostavk in jih bomo uporabili v nadaljevanju:

(i') Ker želimo dokazati odvedljivost po parametru θ, lahko izberemo fiksen θ v Θ in naredimo fiksen, nedegeneriran interval $[\theta - \vartheta, \theta + \vartheta]$ v Θ. Tak interval zagotovo obstaja, saj je Θ odprta množica. Po predpostavki (i) izreka sta funkciji $|\mu_{jk}|$ in $|\mu'_{jk}|$ zvezni na kompaktnem intervalu $[t, u] \times [\theta - \vartheta, \theta + \vartheta]$ in zato tam enakomerno omejeni.

(ii') Predpostavka (ii) izreka nam pove

$$\lim_{\theta^* \to \theta} \max_{j,k} \max_{\tau \in [t,u]} |\mu'_{jk}(\tau, \theta^*) - \mu'_{jk}(\tau, \theta)| = 0.$$

Zgolj za poenostavitev notacije vzemimo $t = 0$ in $u = 1$ in si oglejmo $P(0, 1, \theta)$. Če upoštevamo enačbo Chapman-Kolmogorova in enačbo (3.57), dobimo

$$\begin{aligned}
P(0,1,\theta) &= \prod_{j=0}^{n-1} P(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, \theta) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \left\{ I + M(\frac{j}{n}, \theta)\frac{1}{n} + Q(\frac{j}{n}, \frac{1}{n}, \theta)\frac{1}{n^2} \right\} \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \left\{ I + M(\frac{j}{n}, \theta)\frac{1}{n} \right\} + R_1 + \ldots + R_n,
\end{aligned}$$

kjer je R_k vsota $\binom{n}{k}$ členov, pri čemer je vsak od teh členov enak produktu $n-k$ matrik oblike $I + M(\frac{i}{n}, \theta)\frac{1}{n}$ in k matrik oblike $Q(\frac{i}{n}, \frac{1}{n}, \theta)\frac{1}{n^2}$. Kot smo obrazložili v točki (i') na začetku dokaza, so elementi matrik M in Q omejeni in so zato tudi elementi vsote $R_1 + \ldots + R_n$ omejeni s produktom konstante in velja

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^{2k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!n^{2k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right),$$

kar pomeni, da je

$$P(0,1,\theta) = \prod_{j=0}^{n-1} \left\{ I + M(\frac{j}{n}, \theta)\frac{1}{n} \right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right). \tag{3.59}$$

Tu in nadalje predstavlja $\mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$ matriko z elementi, ki so enakomerno omejeni na $[t, u] \times [\theta - \vartheta, \theta + \vartheta]$ s h krat poljubna konstanta.

Uporabimo enačbo (3.59) na $\theta + \eta \in [\theta - \vartheta, \theta + \vartheta]$ in uporabimo Taylorjev razvoj. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
P(0,1,\theta+\eta) &= \prod_{j=0}^{n-1} \left\{ I + M(\frac{j}{n}, \theta+\eta)\frac{1}{n} \right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} \left\{ I + \left(M(\frac{j}{n}, \theta) + M'(\frac{j}{n}, \theta^*)\eta \right) \frac{1}{n} \right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right),
\end{aligned}$$

kjer je θ^* poljubna vrednost na $[\theta, \theta + \eta]$ (ki je seveda lahko odvisna od elementov matrike). Pomnožimo člene in upoštevajmo dogovor $\prod_{j=0}^{-1} a_j = \prod_{j=n}^{n-1} a_j = 1$.

Dobimo

$$
\begin{aligned}
P(0,1,\theta+\eta) =& \prod_{j=0}^{n-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}+\\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}M'(\frac{k}{n},\theta^*)\frac{\eta}{n}\prod_{j=k+1}^{n-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}+\\
&+S_2+\ldots+S_n+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

kjer je S_k vsota $\binom{n}{k}$ členov, pri čemer je vsak od členov enak produktu $n-k$ matrik oblike $I+M(\frac{i}{n},\theta)\frac{1}{n}$ in k matrik oblike $M'(\frac{i}{n},\theta^*)\frac{\eta}{n}$. Po točki (i') in (ii') v dokazu je vsota $S_2+\ldots+S_n$ omejena s konstanto, pomnoženo z

$$
\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\eta}{n}\right)^k \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!n^k}\eta^k \leq \eta^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\eta^{k-2} = \eta^2 e^{\eta} = \mathrm{O}(\eta^2),
$$

torej je $S_2+\ldots+S_n=\mathrm{O}(\eta^2)$. Če to vstavimo v enačbo (3.60), odštejemo enačbo (3.59) in delimo z η, dobimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{P(0,1,\theta+\eta)-P(0,1,\theta)}{\eta}\\
=&\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=0}^{k-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}M'(\frac{k}{n},\theta^*)\prod_{j=k+1}^{n-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}+\\
&+\frac{1}{\eta}\left(\mathrm{O}(\eta^2)+\mathrm{O}(\frac{1}{\mathrm{n}})\right).
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

V enačbi (3.61) pošljemo η proti 0 in v istem hipu še n proti ∞ tako, da velja $\eta n \to \infty$. Ostanek na desni strani enačbe (3.61) gre proti 0. Prvi člen na desni strani enačbe (3.61) pa gre proti $\int_0^1 P(0,\tau,\theta)M'(\tau,\theta)P(\tau,1,\theta)d\tau$: vzemimo $\eta = 1/\sqrt{n}$, označimo pripadajoči θ^* z θ_n^* in prepišimo prvi člen na desni strani enačbe (3.61) kot $\int_0^1 F_n(\tau)d\tau$, kjer je

$$
F_n(\tau) = \prod_{j=0}^{[n\tau]-1}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}M'(\frac{[n\tau]}{n},\theta_n^*)\prod_{j=[n\tau]+1}^{n}\left\{I+M(\frac{j}{n},\theta)\frac{1}{n}\right\}.
$$

Zaporedje F_n je omejeno s konstantno matriko in po (3.59) in predpostavki (i), konvergira po točkah k $P(0,\tau,\theta)M'(\tau,\theta)P(\tau,1,\theta)$.

Če zamenjamo $t=0$, $u=1$ v t in u, dobimo enačbo (3.58).

2. $P'(t,\tau,\theta)$ obstaja za vse $\tau \in (t,u)$. Zaključek dobimo, če uporabimo enačbo (3.55).

3. To je enostavna posplošitev izreka točk (1) in (2) izreka, skupaj z enačbo Chapman-Kolmogorova.

□

Enostavno se da preveriti, da funkcije v enačbi (3.58) zadoščajo diferencialni enačbi, dobljeni z odvajanjem enačbe (3.55) po parametru θ:

$$\frac{\partial}{\partial u} P'(t,u,\theta) = P'(t,u,\theta)M(u,\theta) + P(t,u,\theta)M'(u,\theta).$$

S to diferencialno enačbo pa lahko numerično računamo $P(t,u,\theta)$.

Z obstojem prvega odvoda po parametru θ lahko hitro preverimo sledeče: če ima $M(\tau,\theta)$ zvezne odvode stopnje k, potem ima $P(t,u,\theta)$ zvezne odvode stopnje $k+1$. Diferencialne enačbe, dobljene z večkratnim odvajanjem enačbe (3.55) po θ, tvorijo bazo za numerično rešitev.

Korolar 3.6.2. *Pod pogoji izreka 3.6.1 odvod matematičnih rezervacij $V_j(t)$, definiranih z enačbo (3.45) po parametru θ, ki predstavlja jakost prehodov, obstaja in je dan z*

$$V_j'(t,\theta,b) = \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} \sum_g p_{jg}(t,\tau,\theta) \sum_{h;h\neq g} \mu_{gh}'(\tau,\theta) R_{gh}(\tau,\theta,b) d\tau.$$

Dokaz. Funkcijo

$$V_j(t,\theta,b) = \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} \sum_g p_{jg}(t,\tau,\theta) \left(b_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} \mu_{gh}(\tau,\theta) b_{gh}(\tau) \right) d\tau$$

lahko odvajamo pod integralskim znakom po parametru θ:

$$\begin{aligned} V_j'(t,\theta,b) = &\int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} \sum_g p_{jg}'(t,\tau,\theta) \left(b_g(\tau) + \sum_{h;h\neq g} \mu_{gh}(\tau,\theta) b_{gh}(\tau) \right) d\tau \\ &+ \int_t^T e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} \sum_g p_{jg}(t,\tau,\theta) \sum_{h;h\neq g} \mu_{gh}'(\tau,\theta) b_{gh}(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Prvi integral na desni strani enačbe (3.62) preuredimo tako, da uporabimo izrek 3.6.1. Ker smo predpostavili, da pogoji izreka veljajo, lahko po enačbi (3.58) $p_{jk}(t,\tau,\theta)$ zapišemo kot

$$p_{jk}'(t,\tau,\theta) = \int_t^\tau \sum_{g,h} p_{jk}(t,s,\theta) \mu_{gh}'(s,\theta) p_{hk}(s,\tau,\theta) d\tau.$$

Označimo

$$e^{-\int_t^\tau r(\sigma)d\sigma} = e^{-\int_t^s r(\sigma)d\sigma} e^{-\int_s^\tau r(\sigma)d\sigma},$$

uporabimo enačbo

$$\mu_{jj}(\tau, \theta) = -\sum_{k;k \neq j} \mu_{jk}(\tau, \theta)$$

ter zamenjamo vrstni red integriranja in vsote. Končno seštejemo oba integrala in tako dobimo željeno enačbo (3.46). $\square$

Poglavje 4

Sklep

V magistrskem delu sem predstavila Norbergovo metodo za izračun premij, višino matematičnih rezervacij in višjih momentov sedanjih vrednosti bodočih izplačil in vplačil za različne zavarovalne produkte. Potek denarnega toka je modeliran z

$$dB(t) = \sum_k I_k(t) dB_k(t) + \sum_{l;l \neq k} b_{kl}(t) dN_{kl}(t),$$

kjer je

$$dB_k(t) = b_k(t)dt + B_k(t) - B_k(t-), \quad \text{za vsak}\, k.$$

V delu so predstavljene markovske verige za različne oblike življenjskih zavarovalnih polic. Matematične rezervacije, višje momente sedanjih vrednosti in premije določimo tako, da rešimo sistem diferencialnih enačb

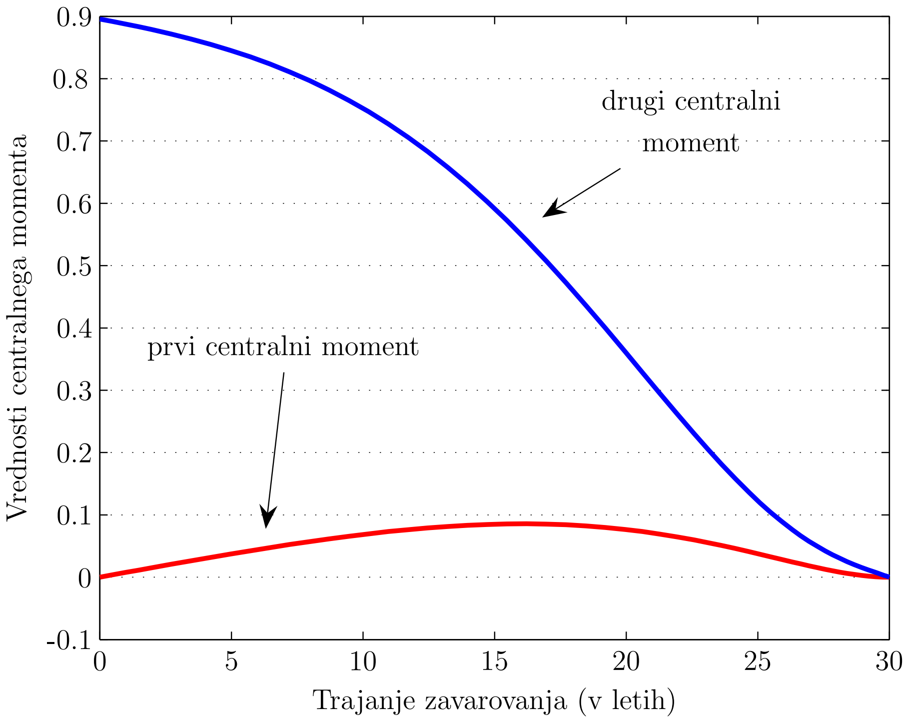
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} V_j^{(q)}(t) &= (qr(t) + \mu_{j\cdot}(t)) V_j^{(q)}(t) - q b_j(t) V_j^{(q-1)}(t) \\ &\quad - \sum_{k:k \neq j} \mu_{jk}(t) \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (b_{jk}(t))^p V_k^{q-p}(t),\end{aligned}$$

z robnimi pogoji

$$V_j^{(q)}(t-) = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} (B_j(t) - B_j(t-))^p V_j^{(q-p)}(t).$$

Premijo za izbrano zavarovalno polico nato določimo po principu ekvivalence, tako da seštejemo vse sedanje pričakovane vrednosti bodočih škod in delimo z sedanjo vrednostjo pričakovanih plačil velikosti 1 v točki $t = 0$. Vse vrednosti, ki jih potrebujemo za določitev premije, lahko dobimo ravno tako z reševanjem sistema diferencialnih enačb in s primerno izbiro koeficientov. Ko imamo celoten zavarovalni produkt, vključno s premijo, lahko določimo vrednosti matematičnih rezervacij in višje momente sedanjih vrednosti. Sisteme diferencialnih enačb rešujemo z numeričnimi metodami.

Oglejmo si primer življenjskega zavarovanja za riziko smrti in invalidnosti z možnostjo ozdravitve, z zavarovalno vsoto za smrt 1 in zvezno invalidsko rento 0.5 letno, kjer je zavarovalna premija enaka 0.01503, dokler je zavarovanec aktiven. Glej sliko 2.5. Naj bo privzeta obrestna mera $r = 2.75\%$. Graf 4.1 prikazuje vrednosti matematičnih rezervacij (prvi centralni moment) in variance (drugi centralni moment) za to zavarovanje.



Slika 4.1: Vrednosti prvega in drugega centralnega momenta za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto za smrt enako 1 in zvezno invalidsko rento 0.5 letno. Premija se plačuje zvezno, dokler je zavarovanec aktiven in znaša 0.01503.

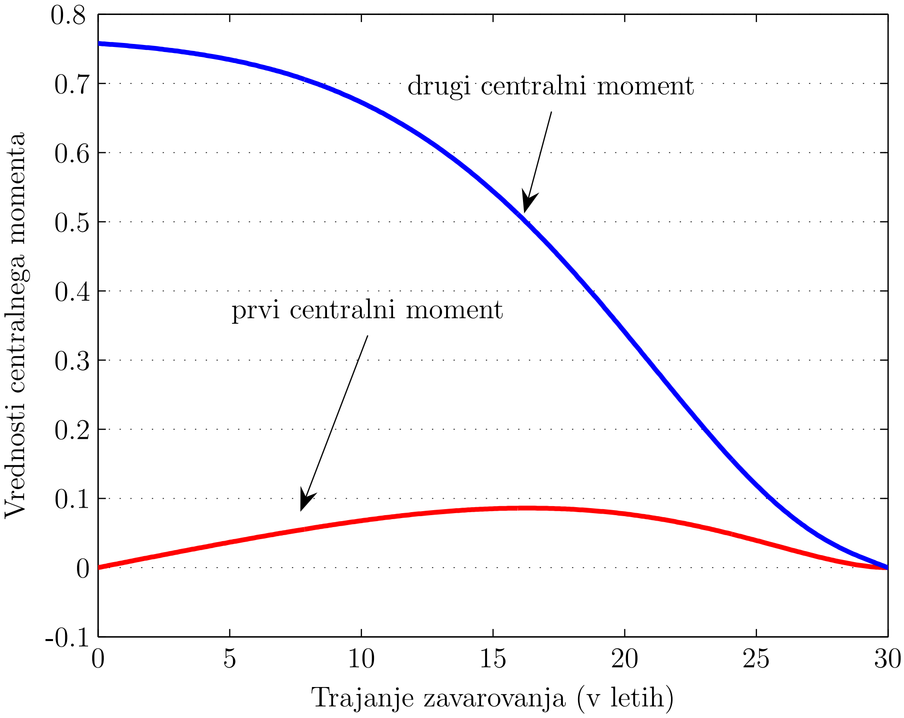
Ker je obrestna mera redko konstantna skozi celotno trajanje zavarovanja, je smiselno model razširiti tako, da vpeljemo stohastično obrestno mero. Le-to ravno tako modeliramo z markovsko verigo. Glej sliko 3.2. Pri tem seveda predpostavimo, da sta obe markovski verigi za zavarovanje in obrestno mero med seboj neodvisni. Da dobimo vrednosti matematičnih rezervacij, višjih momentov sedanjih vrednosti in premijo, moramo najprej določiti nov sistem diferencialnih enačb, ki pa je zaradi vpeljave stohastične obrestne mere posplošitev prejšnjega:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{ej}^{(q)}(t) &= (qr_e(t) + \mu_{j\cdot}(t) + \lambda_{e\cdot})V_{ej}^{(q)}(t) - qb_j(t)V_{ej}^{(q-1)}(t) \\ &\quad - \sum_{k:k\neq j}\mu_{jk}(t)\sum_{l=0}^{q}\binom{q}{l}(b_{jk}(t))^l V_{ek}^{(q-l)}(t) - \sum_{f:f\neq e}\lambda_{ef}V_{fj}^{(q)}(t),\end{aligned}$$

z robnim pogojem

$$V_{ej}^{(q)}(t) = \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} (B_j(t) - B_j(t-))^l V_{ej}^{(q-l)}(t).$$

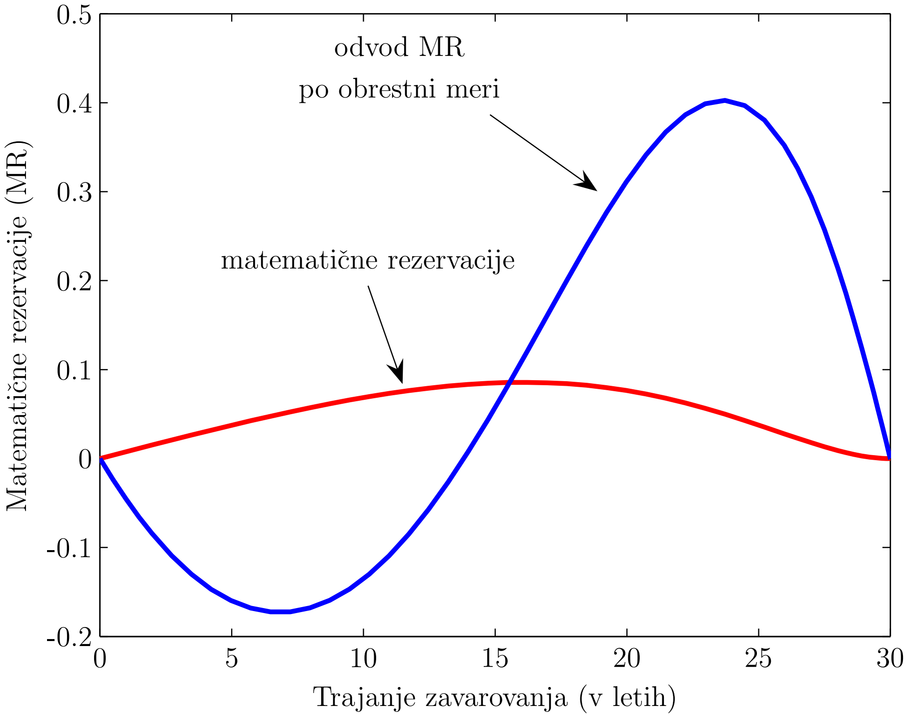
Premijo določimo podobno kot prej.



Slika 4.2: Vrednosti prvega in drugega centralnega momenta za življenjsko zavarovanje z zavarovalno vsoto za smrt enako 1 in zvezno invalidsko rento 0.5 letno, za začetno stanje $r = 2.66\%$ in aktivnega zavarovanca. Obrestna mera je stohastična, z varianco $\lambda = 5$. Premija se plačuje, dokler je zavarovanec aktiven in znaša 0.01448.

Grafa 4.1 in 4.2 sta si dokaj podobna, kar verjetno ni presenetljivo, saj je začetna obrestna mera v stohastičnem primeru blizu konstantni obrestni meri v nestohastičnem primeru, in tudi varianca za model obrestne mere pri stohastičnem primeru je relativno majhna, tako da so nihanja v obrestni meri majhna.

Na koncu magistrskega dela obravnavamo še, kako spremembe parametrov v modelu vplivajo na dobljene rezultate. Obravnavamo občutljivost modela na spremembe obrestne mere in na spremembe jakosti umrljivosti. Analiza občutljivosti je pomembna, saj nam pove, kateri parametri ključno vplivajo na spremembe matematičnih rezervacij, in pri določanju katerih parametrov mora biti zavarovalnica še posebej pozorna. To so seveda tisti parametri, pri katerih že majhna sprememba povzroči velike spremembe vrednosti matematičnih rezervacij. Primer vpliva spremembe obrestne mere na matematične rezervacije pri zavaravonju za smrt in invalidnost lahko vidimo na spodnjem grafu.



Slika 4.3: Matematične rezervacije v aktivnem stanju in njihov odvod po parametru obrestne mere.

Kot vidimo iz grafa, označenega z modrim, bo majhno povečanje obrestne mere povzročilo, da bo zavarovalnica v začetnem obdobju zavarovanja morala oblikovati nižje matematične rezervacije, medtem ko bodo kasneje morale biti matematične rezervacije višje.

Kot zaključek naj povemo, da nam Norbergova metoda analize življenskih zavarovanj nudi enostavno in natančno izračunavanje osnovnih zavarovalnih vrednosti, ki jih mora zavarovalnica pogosto določati za svoje produkte.

Literatura

[1] Aitken William H.: *Problem-solving Approach to Pension Funding and Valuation.* 2nd ed., Actex Publications, Winsted, Connecticut, 1996, 405 str.

[2] Andersen P.K., Borgan Ø., Gill R.D., Keiding N.: *Statistical Models Based on Counting Processes*, 3rd edition, Springer-Verlag, 1995, 770 str.

[3] Atkinson David B., Dallas James W: *Life Insurance Products and Finance.* Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, 2000, 1026 str.

[4] Biran A., Breiner M.: *Matlab for Engineers.* Addison-Wesley, 1995, 668 str.

[5] Björk Tomas: *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, Oxford, UK, 2004, 464 str.

[6] Blum E. K.: *Numerical analysis and computation.* Addison-Wesley, 1972, 612 str.

[7] Bodie Z., Kane A., Marcus A.J.: *Investments,* New York, McGraw-Hill, 1999, 967 str.

[8] Boncelj J.: *Zavarovalna ekonomika,* Maribor, Založba Obzorja, 1983, 351 str.

[9] Bowers N. L., Gerber H.U, Hickman J.C, Jones D.A., Nesbitt C.J.: *Actuarial Mathematics*, 2nd Edition, Society of Actuaries, 1997, -xxvi, 753 str.

[10] Brigo Damiano, Mercurio Fabio: *Interest Rate Models Theory and Practice.* Springer, Berlin, 2001, 518 str.

[11] Cox D.R., Miller H.D.: *The Theory of Stochastic Processes,* London, Chapman and Hall, 1965, 408 str.

[12] Cox John C., Ingersoll Jonathan E., Jr., Ross Stephen A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53 (1985), 2, str. 385–407.

[13] Dormand J.R., Prince P.J.: A family of embedded Runge-Kutta formulae, *Journal of Computational and Applied Math.*, 6 (1980), 1, str. 19–26.

[14] Gerber Hans U.: *Life insurance mathematics.* 3rd ed., Springer, Swiss Association of Actuaries, 1997, 217 str.

[15] Grimmet G.R., Stirzaker D.R.: *Probability and Random Processes*, 2nd ed., Oxford University Press Inc., New York, 1992, 541 str.

[16] Hanselman Duane: *Mastering Matlab*, Prentice-Hall, Upper Sadle River, New Jearsy, 1996, 542 str.

[17] Jones Bruce L.: Actuarial Calculations using a Markov Model. 1995. [URL: http://www.math.ucalgary.ca/ scollnik/Papers/acmm.ps]

[18] Koller Michael: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2000, 183 str.

[19] Kalashnikov Vladimir, Norberg Ragnar: On the sensitivity of premiums and reserves to changes in valuation elements. *Scand. Actuar. J.*, 2003, 3, str. 238–256.

[20] Norberg Ragnar: Reserves in life and pension insurance. *Scand. Actuar. J.*, 1991, 1, str. 3–24.

[21] Norberg Ragnar: A Solvency Study in Life Insurance. *Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium*, 1993, str. 821–830.

[22] Norberg Ragnar: Differential equations for moments of present values in life insurance. *Insurance Math. Econom.*, 17 (1995), 2, 171–180.

[23] Norberg Ragnar, A time-continuous Markov chain interest model with applications to insurance. *J. Appl. Stoch. Models and Data Anal.*, 1995, str. 245–256.

[24] Norberg Ragnar: A theory of bonus in life insurance. *Finance Stoch.*, 3 (1999), 4, str. 373–390.

[25] Norberg Ragnar: Financial Mathematics in Life and Pension Insurance. Summer School in Mathematical finance, Dubrovnik, 2001. 106 str.

[26] Norberg Ragnar: On bonus and bonus prognoses in life insurance. *Scand. Actuar. J.*, 2001, 2, str. 126–147.

[27] Norberg Ragnar: Life Insurance Mathematics 2002, Sixth International Conference on Insurance: Mathematics and Economics, Lisbon, 15-17 July 2002. [URL: http://pascal.iseg.utl.pt/˜cemapre/ime2002/main_page/papers/RagnarNorberg.pdf]

[28] Norberg Ragnar: The Markov chain market. *Astin Bull.*, 33 (2003), 2, str. 265–287.

[29] Norberg Ragnar: Life Insurance Mathematics, *Encyclopedia of Actuarial Science*, 2004 Edition, Willey, 2004. [URL: http://stats.lse.ac.uk/norberg/links/papers/LIM-eas.pdf]

[30] Norberg Ragnar: Vasiček beyond the normal. *Math. Finance*, 14 (2004), 4, str. 585–604.

[31] Norberg Ragnar: Dynamic greeks. Draft version January 2005. [URL: http://stats.lse.ac.uk/norberg/links/papers/greeks.pdf]

[32] Parker Gary: Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions. *Astin Bulletin*, 24 (1994), 2.

[33] Zakrajšek Egon: *Uvod v numerične metode*. Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 2000, 117 str.

Viri

[1] Direktiva 2002/83/ES evropskega parlamenta in sveta z dne 5. novembra 2002 o življenjskem zavarovanju.

[2] Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij, Uradni list RS št.3/01 in pozneje.

[3] Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnic, Uradni list RS št.3/01 in pozneje.

[4] Zakon o zavarovalništvu (ZZavar), Uradni list RS št.13/00 in naslednji.