UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

UPORABA METOD PERTURBACIJE V MODELU GOSPODARSKE RASTI

Ljubljana, september 2006 MATJAŽ STEINBACHER

IZJAVA

Matjaž Steinbacher izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom doc. dr. Aljoše Feldina in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne__25. 09. 2006__

M. Stein

Podpis:______________________

UPORABA METOD PERTURBACIJE V MODELU GOSPODARSKE RASTI

Matjaž Steinbacher

POVZETEK

V magistrskem delu analiziramo stabilnost steady state v modelu gospodarske rasti s popolno gotovostjo z uporabo metod perturbacij. Metode perturbacij predstavljajo zelo uporabno orodje pri analiziranju lokalnih približkov, hkrati pa jih je relativno lahko numerično programirati. Njihova osnovna zamisel je preprosta. Po določitvi steady state v modelu, se njegova informacija uporabi kot izhodišče pri izračunavanju približkov rešitev bližnjih problemov. Pri tem opazujemo, kako majhne perturbacije kapitala povzročajo odmike od steady state stanja potrošnje. Najprej najdemo pogoje, ki zagotavljajo stabilnost steady state stopenj rasti, hkrati pa naredimo numerično simulacijo modela. Rezultat perturbacij pokaže, da je učinek zunanjega šoka na produktivni kapital na spremembe koristnosti posameznikov v vseh primerih višje od učinka šoka na vmesni kapital.

Ključne besede: gospodarska rast, steady state analiza, metode perturbacij.
JEL klasifikacija: C62, C63, O41.

ABSTRACT

The thesis examines the stability of the steady state in a perfect foresight model of economic growth using perturbation methods. Perturbation methods provide very powerful tool for analyzing local approximations and are easy to compute. Its basic idea is very simple. After finding a steady state in the model this information is taken as a starting point for computing approximate solutions to nearby problems. We observe how small perturbations of the model produce variations from the steady state growth rate. We find conditions that ensure the stability of the steady state. We do also the numerical simulation of the economic growth model. Results show that the effect of exogenous shock on the productive capital on individuals' utility is stronger than the effect of the maturing capital shock.

Keywords: economic growth, steady state analysis, perturbation methods.
JEL classification: C62, C63, O41.

Kazalo

Seznam tabel, slik in prilog

1.1 Opredelitev problema, namen in cilji

Glavni cilj makroekonomskih analiz je razvoj ustreznega instrumentarija, ki bi omogočal, da bi delovanje ekonomije ter odzive gospodarstva na specifične politike in različne oblike šokov s strani ponudbe in povpraševanja, ki povzročajo gospodarsko nestabilnost, izčrpno in celostno razumeli (Snowdon in Vane 2005, 3-4). Z razvojem dinamične ekonomije se je bistvo ekonomske analize premaknilo proti ocenjevanju učinkov ekonomske politike na blaginjo gospodarstva (Lucas 1987) oziroma k razumevanju napovedi, ki izhajajo iz ekonomskih modelov in približalo ciljem makroekonomskih analiz. V tej svoji funkciji se, podobno kot druge naravoslovne vede, ki temeljijo na analitičnem proučevanju pojavov, tudi ekonomija srečuje s primeri nedoločenih funkcij, kjer natančnih rešitev zastavljenih problemov analitično ni možno podati in smo omejeni na oceno njihovih približkov. Včasih je rešitve sicer možno analitično izračunati, vendar pri tem ni poznana njihova stabilnost. Pri reševanju ekonomskih problemov naletimo na dve skupini parametrov, ki vplivajo na gibanje posameznih spremenljivk: prvi določajo naravno gibanje spremenljivk, drugi pa določajo motnje v sistemu. Nezmožnost podajanja natančnih rešitev je lahko posledica bodisi preveč kompleksne narave ekonomskih modelov,[1] kar posledično pogojuje uporabo zapletenih diferenčnih enačb, ali se srečujemo z zapletenimi in nedoločenimi izhodiščnimi pogoji in različnimi zunanjimi stohastičnimi šoki, ki omejujejo analitično reševanje diferenčnih enačb. V tej smeri je uporaba numeričnih metod nujen pripomoček pri reševanju ekonomskih problemov, ki ga, kot pravi Díaz-Giménez (2004, 13), uporabimo kot »laboratorij za simulacijo učinkov ekonomske politike«. Pri tem pa nismo omejeni le na merjenje učinkov ekonomske politike, pač pa je z numerično analizo možno ocenjevati tudi učinke spremenjenih vzorcev vedenja ekonomskih subjektov na dogajanje v gospodarstvu, raznih tehnoloških in drugih realnih ali monetarnih šokov oziroma šokov v kakršnikoli obliki nasploh.[2]

Pri numeričnem reševanju ekonomskih modelov pogosto naletimo na pojav t.i. prekletstva dimenzionalnosti, ko z naraščanjem števila funkcijskih spremenljivk rasteta zahtevnost in potreben računalniški čas za rešitev proučevanega problema. V teh primerih je uporaba numeričnih algoritmov nesmiselna, saj bi potrebovali več računalniškega časa, kot pa ga imamo dejansko na voljo. Da se rešimo prekletstva dimenzionalnosti, je potrebna izbira ustrezne aproksimativne metode, hkrati pa tudi ustreznega numeričnega algoritma in računalniškega jezika. V zadnjem času so se pojavili poskusi, kako se rešiti prekletstva dimenzionalnosti (Rust 1997 in Rust in drugi 2002). Pri izboru aproksimativne metode je

[1] Ena osnovnih ovir, na katero naletimo pri ekonomskem modeliranju, je, kako zajeti različno vedenje posameznih ekonomskih udeležencev.

[2] Za Judda (1997) v eseju o nujnosti numeričnega preverjanja ekonomske teorije ni relevantno vprašanje, ali uporabljati metode aproksimacij, ampak, kje jih uporabljati.

treba upoštevati, da morajo te zadosti sledečim kriterijem: biti mora dovolj preprosta, da jo lahko uporabljamo, ob tem mora dajati dovolj kakovostne rezultate, v fazi priprave računalniškega algoritma in reševanja pa ne sme porabiti preveč računalniškega časa. Srečujemo se z izbiro med natančnostjo ocene in za to potrebnim računalniškim časom. Pri izboru računalniškega jezika pa smo predvsem osredotočeni na njegovo zmožnost reševanja zančnih problemov, ki jih uporabljamo v algoritmu. Predvsem v zadnjem času so se omenjeni kriteriji zelo izboljšali, saj je na voljo precej računalniških jezikov in druge programske opreme za reševanje numeričnih problemov: Mathematica, Matlab, C, Fortran in drugi, ki bistveno izboljšujejo učinkovitost reševanja zadanih problemov, na voljo pa je tudi učinkovita strojna oprema, ki dopolnjuje algoritme. Tako so nove tehnične izboljšave na različnih področjih prekinile dosedanjo prakso, ko se je ekonomija razvijala povsem ločeno od drugih naravoslovnih ved, kar jo je omejevalo od njenega poslanstva: biti čista veda. Z uveljavitvijo numerične ekonomije lahko danes čedalje več ekonomskih problemov in teorij proučujemo bistveno bolj poglobljeno, hkrati pa se povečujeta tako natančnost dobljenih analiz, kot tudi potrjevanje tistih pojavov, ki so pomembni pri razlagi določene teorije, in tistih, ki niso (Judd 1998, 3). Slednje še posebej velja v primerih stohastičnih dinamičnih modelov, kjer so neznanke funkcije, opredeljene na R^n, in ne vektorji v R^n. Hkrati se je treba zavedati, da zgolj uporaba numeričnih metod brez ustrezne teoretične podlage ne daje dovolj kakovostnih rezultatov. Lahko se celo zgodi, da sicer korektno dobljeni rezultati ostanejo brez prave ekonomske interpretacije. Da ne bi prihajalo do takšnih situacij, je pri modeliranju treba upoštevati strukturne metode.

V magistrskem delu se lotimo numeričnega ocenjevanja stabilnosti steady state v modelu gospodarske rasti.[3] Pri tem uporabimo poenostavljen Romerjev model gospodarske rasti (Romer 1990) znanja in tehničnega napredka, ki ga dopolnimo s konceptom *time to build* (Kydland in Prescott 1982), kjer investicije potrebujejo nekaj časa, da postanejo produktivni kapital.[4] Kot poudarjata Mulligan in Sala-i-Martin (1993, 739) modeli rasti predpostavljajo, da vse spremenljivke rastejo po konstantnih dolgoročnih stopnjah, ne preverjajo pa njihove vzdržnosti. Ravnovesje Romerjevega modela so preverjali mnogi avtorji. Asada, Semmler in Novak (1998) in Arnold (2000, 2000a) potrdijo, da ima steady state globalno stabilno sedliščno točko (*saddle-point stable*), medtem ko drugi pokažejo na njegovo nedoločenost

[3] Steady state stanje prikazuje neko stanje v ekonomiji, kamor konvergirajo posamezne spremenljivke.
[4] Razvoj modelov gospodarske rasti skozi zgodovino v različnih kombinacijah vseskozi gibal okrog dela, kapitala in tehničnega napredka, kot ključnih dejavnikov gospodarske rasti. V Bogastvu narodov Smith zajame delovno silo kot edini proizvodni dejavnik, vendar pri tem že izpostavi njeno produktivnost, kot posledico delitve dela in z njo povezane specializacije. V šestdesetih letih 20. stoletja se za ta aspekt delovne sile z Mincerjem (1958), Schultzem (1961) in Beckerjem (1964) uveljavi izraz človeški kapital. Danes, ko prevladuje endogena razlaga gospodarske rasti, ga ekonomska teorija postavlja na vodilno mesto med proizvodnimi dejavniki. Kljub pomembnosti človeškega kapitala v procesu gospodarske rasti, se v novejših prispevkih s področja uveljavlja tehnični napredek kot najpomembnejši dejavnik gospodarske rasti. Z metodo pripisovanja prispevkov rasti (*growth accounting*) Jones (2004) pokaže, da gre kar 80 odstotkov gospodarske rasti v ZDA med leti 1950 in 1993 pripisati novim idejam in le 20 odstotkov rasti prebivalstva.

(*indeterminacy*).[5] Pri ocenjevanju stabilnosti modela gospodarske rasti bomo njegovo stabilnost potrdili z linearnim razvojem modela okrog steady state po Taylorjevi vrsti, ki je sicer značilna pri uporabi metod perturbacije. Pri tem opazujemo, kako se z jakostjo šoka odmikamo od steady state stopenj gospodarske rasti. Kadar je odmik od steady state velik že pri majhnih spremembah, je sistem nestabilen in nasprotno. Hkrati bomo podali tudi učinke, ki jih na gospodarsko rast povzročata produktivni in vmesni kapital. Jakost učinkov prikažemo preko odmika od steady state. Pri tem ocenjujemo spremembe potrošnje posameznikov ob perturbaciji produktivnega in vmesnega kapitala. Z analizo pokažemo, da je pri zagotavljanju koristnosti posameznikov produktivni kapital bistveno bolj občutljiv na perturbacije od vmesnega kapitala. To pomeni, da jakost zunanjega šoka na produktivni kapital bistveno bolj spremeni njihovo koristnost od šoka na vmesni kapital.

Organizacija magistrske naloge je sledeča. Najprej predstavimo teorijo gospodarske rasti, kjer je poudarek dan dinamičnim modelom gospodarske rasti in metodam njihovega razreševanja. V okolju racionalnih posameznikov in nepredvidenega spreminjanja okolja presežemo statično obravnavo ekonomskih pojavov, ko se pri napovedovanju prihodnjih učinkov ne sklicujemo izključno na pretekle podatke. V nalogi sledimo izhodiščem moderne teorije poslovnih ciklov, ki dolgoročno rast in ciklična nihanja proučuje združeno (Cooley in Prescott 1995). Osredotočimo se tako na deterministične modele rasti, kot tudi na stohastične. Poglavje začnemo s teorijo dinamične ekonomije, ki sta jo pomembneje zaznamovala Kydland in Prescott (1982). Avtorja z uporabo neoklasičnega modela rasti prikažeta gospodarsko rast kot posledico realnih poslovnih ciklov, ki jih povzroča tehnični napredek. *Time to build* pomeni sintezo med proučevanjem procesa gospodarske rasti in cikličnih nihanj. Na koncu poglavja predstavimo še Romerjev model tehničnega napredka, ki ga v poenostavljeni obliki uporabimo pri končni analizi. V tem poglavju prikažemo različne metode reševanja dinamičnih modelov, katerim sta pomemben delež dala Taylor in Uhlig (1990), ki neoklasični model gospodarske rasti ocenita s kar štirinajstimi različnimi numeričnimi metodami in Magil (1977), ki opravi linearizacijo stohastičnega modela okrog steady state. Ta govori, kako se sistem giblje v okolici neke znane rešitve. Christiano (1988; 1990; 1990a) dalje razvija linearno-kvadratne aproksimacije vrednostne funkcije.

V tretjem poglavju se posvetimo metodam perturbacij, ki jih v četrtem uporabimo na modelu gospodarske rasti. Razvoj perturbacij je tesno povezan s Kennethom Juddom, ki v več prispevkih razvije vrsto aproksimativnih, perturbativnih in projekcijskih metod za reševanje različnih ekonomskih modelov. Bensoussan (1988) razvije perturbativne metode pri reševanju tako stohastičnih, determinističnih, kot tudi zveznih in diskretnih modelov gospodarske rasti. Pri metodah perturbacij najprej predstavimo njihovo zgodovino in značilnosti. Matematične osnove metod perturbacije podajo Hinch (1995), Holmes (1995), Kevorkian in Cole (1981, 1996), njeno ekonomsko implementacijo pa Judd (1998) in Bensoussan (1988) in drugi.

[5] Glej Benhabib in Farmer (1994), Benhabib in Perli (1994), Boldrin in Rustichini (1994), Boldrin in drugi (2001). In Benhabib, Perli in Xie (1994)

Izmed perturbativnih metod prikažemo regularne perturbacije, bifurkacije in na kratko omenimo še hibridne perturbacije. Med njimi največji poudarek podamo regularnim perturbacijam, ki jih uporabimo v četrtem poglavju. Model gospodarske rasti simuliramo pod tremi različnimi predpostavkami vrednosti koeficienta α. Na koncu podamo še sklepne ugotovitve.

1.2 Metode proučevanja in zasnova

Magistrsko delo je sestavljeno iz dveh delov. Najprej predstavimo teorijo gospodarske rasti, ki je sklenjena z dinamičnim pristopom modeliranja gospodarske rasti. V tej fazi magistrskega dela bodo prevladujoče metode pri primerjanju modelov gospodarske rasti deskripcija, komparacija in kompilacija. Te bodo predstavljale izhodišče pri oblikovanju modela gospodarske rasti. Sklepna faza bo vsebovala numerično rešitev preoblikovanega Romerjevega modela gospodarske rasti, pri čemer bo uporabljena metoda perturbacij.

Na koncu uvodne misli bi izkoristil še priložnost, da se zahvalim vsem tistim, ki so mi pri izdelavi magistrskega dela pomagali z nasveti in komentarji. Najprej je tukaj mentor, dr. Aljoša Feldin, ki mu dolgujem zahvalo za strokovne napotke pri pisanju naloge, kot tudi za to, da so mnogi strokovni izrazi, za katere v slovenskem jeziku še nimamo prevoda, vseeno napisani v domačem jeziku. Pri numeričnem reševanju modela moram izpostaviti brata Mateja in Mitjo, katerih (ne)umestni komentarji so se izkazali kot koristni nasveti predvsem pri reševanju linearne algebre in računalniškem programiranju. Pri tem pa celotna odgovornost za nastale napake v tekstu ostaja izključno avtorjeva.

2.1 Teorija proizvodnje skozi čas od Adama Smitha[6]

Dolgo časa je veljalo, da ima proučevanje gospodarske rasti dva različna vidika, ki ju je treba proučevati ločeno: dolgoročne ravnovesne stopnje gospodarske rasti in kratkoročne oscilacije od teh dolgoročnih stopenj, ki so posledica različnih naključnih šokov, ki zadenejo gospodarstvo (Slutsky 1937).[7] Tako se je teorija poslovnih ciklov, ki je proučevala razloge oscilacij, razvijala ločeno od dolgoročne teorije gospodarske rasti, ki so jo zanimali dejavniki rasti. Slednje pa je na podlagi zgodovinskih opazovanj vplivalo na razvoj t.i. stiliziranih dejstev, ki jih »mora« upoštevati vsaka analiza dolgoročne rasti (Kaldor 1961).

Do tridesetih let 20. stoletja je v teoriji gospodarske rasti prevladovala klasična teorija, ki je s Smithom, Ricardom, Ramseyem in drugimi k moderni teoriji gospodarske rasti prispevala mnogo njenih osnovnih elementov. Smith v procesu gospodarske rasti med prvimi izpostavi produktivnost delovne sile, ki se pojavi kot eksterni učinek delitve dela in z njo povezane specializacije. Na drugi strani se Malthus osredotoči na kratkoročno dinamiko gospodarstva in povezavo med stopnjami gospodarske rasti in rastjo prebivalstva, kar na dolgi rok poveže s konvergenco k stacionarnemu, steady state dohodku. Iz časov klasične ekonomije prihaja tudi Ricardova interpretacija gospodarske rasti, kjer pogoji ponudbe določajo agregatni proizvod. Za primerjavo med stanji Ricardo že uporablja metode komparativne statike. Klasična ekonomija v ekonomsko analizo vnese mnoge pojme: padajočih donosov akumulacije proizvodnih dejavnikov; v grobem izpostavi pomen tehničnega napredka; medtem ko Ramsey že izpostavi elemente dinamične ekonomije, na katerih danes temelji praktično vsa ekonomija. Njegov prispevek iz leta 1928 pa velja za izhodiščno točko dinamičnega modeliranja (Ramsey 1928). Solow (1994) poudari, da so za drugo polovico 20. stoletja v teoriji gospodarske rasti prevladovali trije valovi: i) neokeynesianski model, podprt z modeli Harroda in Domarja; ii) neoklasični val, ki je izpodrinil neokeynesianskega v petdesetih letih 20. stoletja in iii) teorija endogene rasti, ki sta jo sprožila modela Romerja in Lucasa v poznih osemdesetih in zgodnjih devetdesetih letih 20. stoletja.

[6] Razširjen zgodovinski pregled ekonomskih doktrin je prikazan v Snowdon in Vane (2005).

[7] Podobno kot Slutsky tudi Frisch ciklična nihanja poveže z naključnimi šoki v gospodarstvu. Medtem Schumpeter poveže tehnološke šoke tako s kratkoročnimi cikli, kot z dolgoročnimi stopnjami gospodarske rasti. Slabost vseh analiz iz tega obdobja je bila v tem, da so zaradi pomanjkanja ustreznih metod za razreševanje dinamičnih modelov temeljile le na zgodovinskih podatkih in opazovanjih.

Neokeynesianski model

Model Harroda in Domarja poveže gospodarsko rast z akumulacijo kapitala in temelji na sistemu multiplikatorja in akceleratorja. Pri tem povsem zanemari tako vlogo investicij kot instrumenta povečanja dolgoročne produktivnosti, kot tehničnega napredka.[8] Pri keynesiancih delo in kapital nista zamenljiva proizvodna dejavnika, ampak temelji model na konstantnih faktorskih deležih v gospodarstvu in konstantnem kapitalnem koeficientu. Tako je stopnja gospodarske rasti določena z deležem varčevanja v kapitalnem koeficientu, zmanjšano za amortizacijo. Kot pravi Solow (1994) zahteva njun model ravnovesje, ki se giblje »na robu noža«, kjer je $sa = m + n$. Pri tem je s stopnja varčevanja, a koeficient produktivnosti kapitala, m stopnja rasti produktivnosti dela in n stopnja rasti delovne sile. Večje kot je varčevanje v gospodarstvu, hitrejša bo tudi gospodarska rast. Keynesianska gospodarska rast se tudi na dolgi rok nahaja povsem na robu optimalnosti, skladno z njunim modelom pa odmiki od eksogeno določenih parametrov povzročajo v gospodarstvu ciklična nihanja med brezposelnostjo in inflacijo. V modelu gospodarsko rast zagotavlja naravna rast, kot posledica stopnje rasti prebivalstva, in zagotovljena rast, kot posledica eksogeno določene stopnje varčevanja, ki preko multiplikatorja in akceleratorja določa raven investicij. Ker je *ex-post* stopnja varčevanja enaka deležu investicij v proizvodnji, zmnožek sa dejansko določa stopnjo kapitala in posredno tudi proizvodnje. Iz enačbe Harrod-Domarjevega modela izhaja, da mora biti pri dani vrednosti m stopnja rasti delovne sile enaka $sa - m$, s čimer učinek gospodarske rasti ne bi povzročal sprememb brezposelnosti. Iz enačbe izhaja tudi, da rast deleža investicij preko rasti s trajno spodbuja gospodarsko rast. Solow poudari, da omenjeni posledici, ki izhajata iz enačbe, nista dobili zgodovinske potrditve in da je za resno analizo modela gospodarske rasti treba endogenizirati vsaj eno spremenljivko, pri čemer se mu kot idealna kandidata zdita ravno a in s.

Prispevek Harroda in Domarja je doživel svojo slavo predvsem zaradi tega, ker je datiral v obdobje gospodarske krize. Čeprav je v tistem obdobju Harrod-Domarjev model predstavljal *mainstream* ekonomskega modeliranja gospodarske rasti, je njegova današnja vrednost zelo majhna.

Neoklasični model

Neoklasični model gospodarske rasti Solowa (1956; 1957) in Swana (1956) v celoti zavrne model Harroda in Domarja, ki jima avtorja očitata, da (Solow 1956, 66) »…za proučevanje dolgoročnih problemov uporabljata kratkoročna orodja…«. Solow opozori, da dolgoročne rasti ni možno proučevati preko multiplikatorjev, akceleratorjev in kapitalnih koeficientov. Obenem so rezultati modela preveč odvisni od nekaterih ključnih predpostavk, ki so

[8] Kritika keynesianskemu modelu poudarja, da investicije pripomorejo h gospodarski rasti le, če povečajo produktivnost v gospodarstvu.

nerealistične.[9] V keynesianskem gospodarstvu pa niti steady state ravnovesje ni stabilno.[10] V neoklasičnem modelu sta delo in kapital povsem zamenljiva, pri tem pa mejna produktivnost posameznega proizvodnega dejavnika določa njegovo plačo. V proizvodnji sta oba proizvodna dejavnika polno zaposlena. Z uporabo Cobb-Douglasove proizvodne funkcije $Y_t = F(K_t, L_t)$ je gospodarska rast prikazana kot posledica kapitalske opremljenosti dela.[11] V gospodarstvu se tekoči proizvod v vsakem obdobju razdeli med potrošnjo in investicije $C_z + I_t = Y_t$, pri tem pa je tok kapitala podan kot nepotrošen del proizvodnje, zmanjšan za amortizacijo: $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t$. Zakon gibanja kapitalne opremljenosti dela je opredeljen kot $\dot{k}_t = s \cdot f(k_t) - \delta k_t$.[12] Model gospodarske rasti Solowa in Swana ne upošteva posameznikovih preferenc, niti njihovih pričakovanj in predpostavi konstantno stopnjo varčevanja s.[13] Neoklasična proizvodna funkcija je strogo konkavna funkcija, kjer velja: $f(k) > 0$, $f'(k) > 0$ in $f''(k) < 0$ in izpolnjuje Inadovim pogojem (Inada 1963): $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$ in $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$ (slika 2.1).

Iz slike je vidno stabilno in enolično določeno ravnovesno stanje, podano pri $\dot{k} = 0$, kjer je $s \cdot f(k) = \delta k$, ki ga prikazuje točka k^*.[14] Pri tem puščici prikazujeta konvergenco k steady state. V ravnovesnem stanju so investicije potrebne le za ohranjanje ravnovesne kapitalne opremljenosti dela. Pri tem predpostavimo nično rast prebivalstva.[15] V neoklasičnem modelu je dolgoročna stopnja gospodarske rasti odvisna od tehničnega napredka, ki ga model predpostavi kot linearno rastočega v času. Zaradi padajočih donosov kapitala stopnja varčevanja v modelu ne pripomore k trajnemu dvigu stopenj rasti, ampak vpliva le na kratkoročne oscilacije. Solow (1994) opozori, da se v tem primeru dolgoročni vpliv varčevanja pokaže le v dvigu konkavne krivulje $s \cdot f(k)$ na črtkano krivuljo $s_1 \cdot f(k)$ in posledično dvigu ravnovesnega položaja iz točke k^* na k^*_1. V modelu podoben učinek povzroči tudi prisotnost tehničnega napredka (Solow 1957), ki je opredeljen kot eksogeno

---

9 Najpomembnejša predpostavka, ki je bila zavržena, govori o nezamenljivosti med proizvodnima faktorjema delom in kapitalom in o njunih konstantnih deležih.

10 Naravna in zagotovljena rast sta v modelu posledica predpostavke konstantnih količin proizvodnih dejavnikov.

11 Poleg Cobb-Doglasove proizvodne funkcije (Cobb in Douglas 1928) sta v teoriji gospodarske rasti pogosteje uporabljani še CES (Arrow in drugi 1962) in VES (Revankar 1971) oblika proizvodne funkcije.

12 $k = \frac{K}{L}$. Ravnovesno stanje je stabilno in enolično določeno le v primeru konkavne proizvodne funkcije.

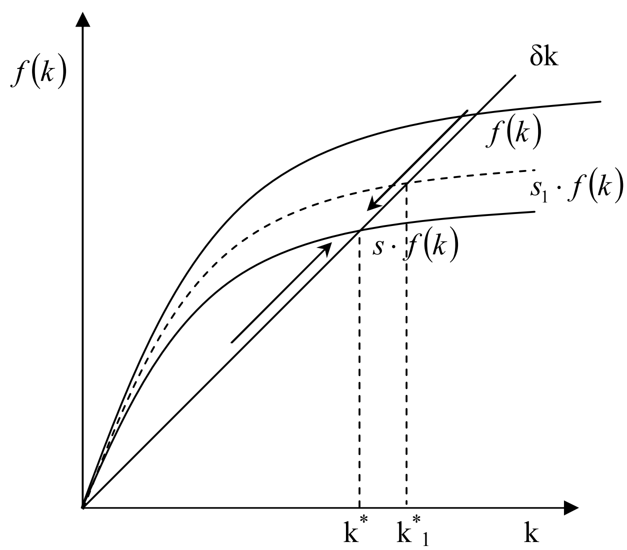
13 Dinamični deterministični neoklasični model z endogeno stopnjo varčevanja podata Cass (1965) in Koopmans (1965). V njem uporabita Ramseyevo teorijo varčevanja.

14 Drugo ravnovesno stanje, ki se nahaja v izhodišču koordinatnega sistema, ekonomsko ni relevantno, saj proizvodne funkcije v točki singularnosti, ko se eden izmed proizvodnih dejavnikov približuje vrednosti nič, niso definirane. V kolikor bi to bilo mogoče, potem bi se vrednost proizvodne funkcije asimptotično približevala nič, kar je z vidika ekonomije nesmiselno.

15 Neoklasični model gospodarske rasti je tudi odziv na slabosti Malthusovega modela, ki se navezuje na rast prebivalstva. V neoklasičnem modelu je prilagoditveni dejavnik na ravnovesni steady state fizični kapital.

dan, splošna oblika proizvodne funkcije pa se preoblikuje v $Y_t = f(K_t, L_t, A_t)$.[16] V nasprotju z linearno rastjo tehničnega napredka teorija realnih poslovnih ciklov poudarja, da je tehnični napredek predmet nerednih tokov (*erratic stream*), ki povzročajo ciklična nihanja v gospodarstvu (Kydland in Prescott 1982; Plosser 1989).[17]

Slika 2.1: *Neoklasični model gospodarske rasti*



V nasprotju z modelom Solowa in Swana sodobna teorija dinamičnega modeliranja gospodarske rasti upošteva t.i. Ramseyev problem (1928). Ramsey z njim opredeli varčevanje tako, da gospodarsko ravnovesje prikaže preko funkcije koristnosti posameznih ekonomskih agentov. Pri tem je optimalna stopnja varčevanja podana v tisti točki, kjer je neto koristnost posameznikov najvišja možna.[18] V Ramseyevem problemu tekoča zaloga kapitala preko varčevanja inducira optimalno raven investicij, ki tako določa proizvodne možnosti v naslednjem obdobju. Hkrati se z rastjo kapitala povečuje posameznikova koristnost, ki se približuje svoji zgornji meji. Do nje se posameznik približuje iz dveh razlogov: kadar nadaljnja rast kapitala ne poveča več posameznikovega dohodka oziroma njegovega prostega časa, ki bi mu omogočal povečati njegovo potrošnjo in tako koristnost; ter, kadar posamezniki že dosežejo maksimalno raven koristnosti. Ob tem prisotnost raznih nepričakovanih šokov v vsakem obdobju spreminja pričakovanja in odločitve posameznikov, hkrati pa oblikuje produktivnost proizvodnih dejavnikov.

---

[16] Razprava glede ustreznosti uporabe eksogenega oziroma endogenega pristopa k proučevanju procesa gospodarske rasti se je leta 1994 razvnela med glavnima protagonistoma teorije gospodarske rasti, Robertom Solowim (1994), zagovornikom eksogenega pristopa, in Paulom Romerjem (1994), zagovornikom endogenega pristopa, v *Journal of Economic Perspectives*.

[17] Kasneje so se pojavili poizkusi, kako bi preko stabilizacije nihanj spodbudili obete za dolgoročno rast (Blackburn 1999).

[18] Neto koristnost je razlika med koristnostjo, ki jo posameznikom prinaša potrošnja in »stroškom«, ki ga posameznikom prinaša delo (Ramsey 1928, 544).

2.2 Razvoj modelov endogene rasti

Učenje skozi delo - learning by doing

Od osemdesetih let 20. stoletja so modeli endogene rasti izpodbili neoklasične modele. Do tega je prišlo tako zaradi teoretičnih, kot tudi empiričnih slabosti neoklasičnega modela (Abramovitz 1986).[19] Prvotni modeli endogene rasti so bili modeli učenja skozi delo (*learning by doing*). Na izhodišču koncepta *learning-by-doing* Kennetha Arrowa (1962) je Paul Romer (1986) razvil model endogene rasti, kjer znanje vstopa v proizvodnjo kot dejavnik z naraščajočo mejno produktivnostjo. Tako proizvodna funkcija ni več linearno homogena, ampak za vrednosti $\lambda > 1$ velja $f(\lambda x_1, \lambda x_2) > \lambda \cdot f(x_1, x_2)$. V modelu je akumulacija kapitala (znanja) povezana s pozitivnimi eksternimi učinki tehnologije.[20] Procesa investiranja in učenja sta v modelu povezana, saj povečanje zaloge kapitala sproži proces učenja in z njim povezano hitro rast produktivnosti v gospodarstvu. Kot merilo tehnologije uporabi Arrow bruto investicije, ki so v povezavi s stopnjo varčevanja v gospodarstvu. Tako lahko rečemo, da gospodinjstva v gospodarstvu spontano določajo stopnjo gospodarske rasti. Kasneje Romer (1987) dopolni svoj predhodni model z modelom specializacije. V njem z uporabo Dixit-Stiglitzeve monopolistične konkurence (Dixit in Stiglitz 1977), diferenciranih proizvodnih dejavnikov (Ethier 1982) in dinamičnega modela trgovanja Grossmana in Helpmana (1989) pokaže gospodarsko rast predvsem kot posledico ekonomij obsega in z njo povezane specializacije ter proizvodnje patentov.[21] V modelu sta za nastajanje inovacij potrebna pogoja količina patentov, ki jih proizvaja človeški kapital, in tržna moč ekonomskih subjektov, ki jo zagotavlja monopolistična konkurenca. Mulligan in Sala-i-Martin (1993) potrdita stabilnost modela in tudi vseh sorodnih modelov konkavnih funkcij. Evans, Honkapohja in Romer (1998) pokažejo, da se v primeru racionalnih pričakovanj in komplementarnosti med inovacijami gospodarstvo ciklično spreminja med stanjema visokih in nizkih stopenj gospodarske rasti. Avtorji še pokažejo, da v primeru, ko posamezniki pričakujejo nizke stopnje gospodarske rasti, donosi na investicije padejo, kar zmanjša njihov obseg in nasprotno, kadar se pričakujejo visoke stopnje gospodarske rasti (tudi Evans in Honkapohja 1995; 1998). Matsuyama (1995; 1999) pokaže na možnost determinističnih cikličnih nihanj v gospodarstvu, kadar bi proizvajalci imeli popolno monopolno moč v gospodarstvu, s čimer bi bile na trgu povzročene distorzije in cene ne bi izražale mejne produktivnosti proizvodnih

[19] Zaradi eksogene narave tehničnega napredka, ki ga Solow ne poskuša pojasniti, ga Abramovitz ironično imenuje kar mera ignorance (1956). Z razvojem t.i. *growth accountinga* (Solow 1957; Jorgenson in Griliches 1967) se namreč pokaže, da je tehnični napredek (TFD) najpomembnejši dejavnik gospodarske rasti, medtem ko se akumulacija dela in kapitala postavi ob bok TFD. Prav tako neoklasični model ne ustreza stiliziranemu dejstvu, da se stopnje rasti med državami razlikujejo.

[20] Ker prihaja do pozitivnih eksternih učinkov kot posledica investiranja, Barro in Sala-i-Martin koncept learning-by-doing poimenujeta *learning-by-investing* (Barro in Sala-i-Martin 1995, 146).

[21] V modelu traja učinek patentov neskončno dolgo, kar je Romer povzel po Juddu (1985). Kot edini proizvajalec posameznega proizvodnega dejavnika, lahko lastnik patenta z določitvijo cene pokrije stroške njegovega nastanka. Vendar je pri cenovni politiki lastnik patenta do določene mere omejen z monopolistično konkurenco na trgu patentov.

dejavnikov. Gali (1995) na primeru endogeniziranih pribitkov k cenam (*mark-up*) pokaže, da so mnogotera steady state stanja posledica inverzne povezave med dodatkom in agregatno zalogo kapitala. Pri tem uporabi metodo linearizacije okrog steady state. Na prisotnost lokalne nedoločenosti steady state pokažeta še Benhabib in Farmer (1994), ki pa jima Evans, Honkapohja in Romer očitajo nekonsistentnost z ekonomsko teorijo.[22]

Modeli človeškega kapitala

Med proizvodne dejavnike je človeški kapital (*human capial*) eksplicitno uvrstil Robert Lucas (1988).[23] V modelu, kjer potekata akumulacija fizičnega in človeškega kapitala znotraj dveh različnih sektorjev, je akumulacija slednjega odvisna od časa, ki ga posamezniki namenjajo izobraževanju in ne v tekočo proizvodnjo drugih končnih dobrin. Bistvena predpostavka modelov človeškega kapitala je ta, da so donosi človeškega kapitala z njegovo rastjo naraščajoči. Kot mero človeškega kapitala uporabi Lucas koncept strokovne usposobljenosti prebivalstva, ki jo ti povečujejo na različne načine: preko formalnega izobraževanja, vadbe, raziskovanj, po principu *learning-by-doing* in preko drugih oblik neformalnega izobraževanja. V nasprotju z Uzawo (1965), ki prikaže akumulacijo človeškega kapitala z linearno premico, uporabi Lucas za njegovo akumulacijo konkavno krivuljo. Akumulacija človeškega kapitala je najintenzivnejša v mladosti in v času pada. V modelu sočasna akumulacija vseh proizvodnih dejavnikov zagotavlja vzdržno gospodarsko rast, četudi vsak posamezen dejavnik v proizvodnji končnih dobrin izkazuje padajoče donose obsega. Do eksternih učinkov človeškega kapitala prihaja, ko posameznikovo investiranje v človeški kapital ustvarja koristi tudi za druge agente v gospodarstvu.[24] Jovanovic in Nyarko (1996) opozorita, da lahko v primeru tehnološkega preskoka človeški kapital tudi depreciira, kar povzroči upad stopenj gospodarske rasti. Večji kot je tehnološki preskok, večji je upad izkušenj, ki so jih akumulirali zaposleni. Korekturni dejavnik je pri tem stopnja prilagoditve novim okoliščinam. Stabilnost modela potrdita Mulligan in Sala-i-Martin (1993), vendar Caballe in Santos (1993), Benhabib in Perli (1994) in Xie (1994) pokažejo, da v primerih učinkov prelivanja (*spillover effects*), ki izhajajo iz človeškega kapitala, lahko prihaja do lokalne nedoločenosti steady state. To pomeni, da sicer obstaja enovito določen steady state, vendar vanj vodi neskončno trajektorij. Caballe in Santos (1993) tudi pokažeta, da se v Lucasovem modelu v primeru povečanja človeškega kapitala gospodarstvo premakne na višji steady state, kjer sta raven potrošnje in

---

[22] Benhabib in Farmer predpostavita naraščajoče mejne donose dela.

[23] Sicer je pojem človeški kapital v tesni povezavi z Jacobom Mincerjem (1958) in Garryjem Beckerjem (1964), ki pri njegovem ocenjevanju uporabi princip neto sedanje vrednosti, in Theodorjem Schultzem, ki prvi uporabi pojem človeški kapital (Schultz 1961).

[24] Prisotnost naraščajočih donosov obsega človeškega kapitala na mikro ravni, ki se aplicirajo na agregatno raven, potrdi Acemoglu (1996; 1997). Do pojava naraščajočih donosov na ravni podjetij prihaja zato, ker se podjetja na podlagi pričakovane zaloge človeškega kapitala, ki oblikuje profil zaposlenih, odločajo za investiranje, na drugi strani pa posamezniki v fazi izobraževanja še ne vedo, po kakšnem delu bodo povpraševala podjetja. Tako se posamezniki izobražujejo, kar podjetjem zagotavlja, da bo na trgu dovolj kakovostne delovne sile, zaradi česar se ti odločajo v tehnološko investiranje.

fizičnega kapitala višja. Ob tem poudarita, da v primeru eksogene rasti gospodarstva, ko je alokacija človeškega kapitala neelastična na spremembe fizičnega kapitala, vsako zvišanje fizičnega kapitala ne pripomore k premiku gospodarstva k višjemu steady state, ampak povzroči, da gospodarstvo konvergira nazaj k prejšnjemu stanju.[25] Chamley (1993) pokaže, da mnogotera steady state stanja v modelu povzroča učinek učenja oziroma eksterni učinek časa, ki ga posamezniki namenijo izobraževanju. Mnogotera steady state stanja pa so lahko tudi posledica endogenizacije prebivalstva, na kar opozorijo Becker, Murphy in Tamura (1990). V kolikor predpostavimo model brez eksternalij, omenjeni avtorji potrdijo obstoj enovitega steady state (tudi Barro in Sala-i-Martin 1995 in Arnold 1998, 2000b).

Modeli raziskav in razvoja

Od prispevka Lucasa dalje nastopata v modelih endogene rasti dve različni kapitalni dobrini. Pri tem je ena praviloma fizični kapital, druga pa se med avtorji razlikuje: človeški kapital, utelešeno in neutelešeno znanje, javne dobrine, horizontalne inovacije, vertikalne inovacije, finančni kapital idr. V devetdesetih letih 20. stoletja se pojavijo zametki modelov raziskav in razvoja (R&R), ki v modele gospodarske rasti vnašajo schumpeteriansko teorijo kreativne destrukcije, kjer novo znanje iz trga izrinja staro, tako v proizvodnji, kot tudi v potrošnji. V modelih horizontalnih inovacij (Romer 1990) v proizvodni proces vstopajo vedno novi tipi kapitalnih dobrin, kot posledica investiranja v R&R. V procesu razvijanja R&R loči Romer tri sektorje, izmed katerih ima t.i. *raziskovalni sektor*, kjer nastaja novo znanje, najpomembnejšo vlogo. V njem je stopnja rasti novega znanja predvsem odvisna od zaloge obstoječega znanja in od količine človeškega kapitala, ki je angažiran v sektorju. Čeprav je raziskovalni sektor bistven pri nastajanju novega znanja in gospodarske raste, dajeta sektorja *končnih dobrin* in *kapitalnih dobrin* temeljni impulz za nastanek novega znanja. Dopolnitev Romerjevega modela horizontalnih inovacij predstavlja model vertikalnih inovacij, kjer nastopa konstantno število segmentov kapitalnih dobrin, znotraj katerih prihaja do kakovostnih izboljšav. Tudi kot posledica t.i. *business stealing* učinka (Aghion in Howitt 1992; Grosmann in Helpman 1989; 1991).[26] V obeh modelih je značilnost inovacijskega procesa variiranje glede na sledeči okoliščini (Barro in Sala-i-Martin 1995, 249-250): (i) pričakovani donos novega znanja, ki se s stopnjo inovativnosti in rastjo kakovosti povečuje in (ii) stopnjo možnosti izpopolnitve obstoječega znanja (proizvoda).

Kritiko modelom R&R poda Jones (1995), ki na podlagi rezultatov empirične analize opozori na nevzdržnost učinkov obsega (t.i. *scale effects*) v modelih, ki jih povzroča investiranje v R&R. Poudari, da je gospodarska rast v večji meri posledica rasti eksogeno pogojenih dejavnikov, tudi rasti prebivalstva. Kritiko učinkom obsega podata tudi Young (1998), ki poudari, da se v modelu R&R učinek inovacijskih spodbud izniči v enaki meri kot se izniči

[25] Eksogenost stopenj gospodarske rasti podpira empirična študija Mankiwa, Romerja in Weila (1992).
[26] Zasnova koncepta vertikalnih inovacij temelji na Schumpetrovi ideji kreativne destrukcije (Schumpeter 1951).

učinek rasti prebivalstva[27] in Howitt (1999), ki na primeru modela vertikalnih inovacij pokaže na ravnovesno steady state stanje, kljub rasti prebivalstva in inovacijskih spodbud. Medtem ostajajo dejavniki gospodarske rasti enaki kot v modelu vertikalnih inovacij (Aghion in Howitt 1992). Obstoj stabilne in enovite trajektorije v modelu Jonesa s konstantnimi donosi dela v sektorju raziskav in razvoja potrdi Arnold (2006).

2.3 Rekurzivna formulacija modela gospodarske rasti

2.3.1 Uvod v dinamično optimizacijo

Kadar v gospodarstvu strukturne spremembe spreminjajo zakone gibanja tistih spremenljivk, na podlagi katerih posamezniki sprejemajo svoje odločitve, vzorci njihovega vedenja niso konstantni. V tem primeru je treba upoštevati *Lucasovo kritiko* (Lucas 1976), uporaba statičnih modelov gospodarske rasti pa ni ustrezna. Zato jih nadomestimo z dinamičnimi. Njihova uporaba je v sodobni ekonomiji značilna v analizah časovnih vrst, kjer v času prihaja do sprememb med stanji v procesu. Ideja dinamičnega programiranja[28] je v tem, da interpretira nahajanje sistema v času t_0, kje bi lahko bil v času t_1 in kako se posamezni ekonomski agenti v času t_0 odzivajo na stanje sistema v času t_1.[29] Ključni element dinamičnega programiranja je *Princip optimalnosti* in proučuje dinamiko posredno preko sistema para funkcij: funkcije vrednosti (*value function*), ki označuje nahajanje v stanju v času $t = (0, T)$, in odločitvene funkcije (*policy function*), ki vsebuje elemente odločitev posameznikov, ki vplivajo na prehajanja med stanji in maksimirajo vrednostno funkcijo v času.[30] Princip optimalnosti razloži Bellman (1957) kot

> *»Optimalna politika ima lastnost, da ne glede na izhodiščno stanje in izhodiščno odločitev, vse naslednje odločitve določajo optimalno politiko glede na stanje, do katerega je privedla prva odločitev.«*

[27] Večje gospodarstvo preko večje potencialne ponudbe človeškega kapitala in možnosti izkoriščanja ekonomij obsega sicer ponuja možnosti za višje stopnje gospodarske rasti, vendar mora biti v večjem gospodarstvu tudi večji delež človeškega kapitala zaposlenega v raziskovalnem sektorju, da se ohranjajo konstantne stopnje rasti produktivnosti.

[28] Poleg dinamičnega programiranja, ki predstavlja zadostne pogoje za obstoj maksimuma, se v dinamični ekonomiji uporablja tudi Pontryaginov princip maksimuma, ki predstavlja potrebne pogoje za obstoj maksimuma. Ker se pri uporabi regularnih perturbacij priporoča uporaba dinamičnega programiranja (Bensoussan 1988), Pontryaginov princip maksimuma zgolj omenimo. Sicer uporaba obeh pristopov da iste zaključke.

[29] »Po načelu optimalnosti ima optimalna odločitev lastnost, da so v nekem stanju vse nadaljnje odločitve podane v neodvisnosti od nahajanja v tem stanju, obenem pa odločitve v tem stanju tvorijo optimalno politiko glede na stanje, v katerega je privedla prvotna odločitev« (Lancaster 1987, 176).

[30] Za rešitev problema mora biti odločitvena funkcija zvezna (Araujo 1991; Benveniste in Scheinkman 1979; Santos 1991; 1999).

Za dinamično programiranje je značilen markovski proces prvega reda, kjer na premik iz stanja v času t_0 v stanje v času t_1 vpliva izključno informacija v stanju t_0. Markovski proces temelji na zaporednih problemih, ki so časovno neodvisni in v katerih nastopa diskontni količnik $\beta \in (0,1)$. V diskretnem času je neskončno zaporedje odločitvenih funkcij u_t, ki maksimira problem, podano kot

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \tag{2.1}$$

Pri dani vrednosti začetnega stanja x_0 je trajektorija gibanja spremenljivke x_t podana kot funkcija stanj in kontrol v času $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$. Ob tem velja predpostavka, da je $r(x_t, u_t)$ konkavna funkcija, medtem ko je množica $\{(x_{t+1}, x_t): x_{t+1} \leq g(x_t, u_t), u_t\}$ konveksna in kompaktna na R^k. Rešitev dinamičnega problema je časovno neodvisno zaporedje odločitvenih funkcij h_t, kjer je odločitvena funkcija za prehod v novo stanje odvisna od trenutnega stanja. Akcija posameznikov v trenutnem stanju pa porine sistem v naslednjem obdobju v novo stanje, ki je glede na trenutne okoliščine in posameznikovo časovno trajektorijo optimalno. Pri tem ni nujno, da se sistem v vsakem časovnem obdobju nahaja v optimalni točki, ampak je pomembno izključno to, da posamezniki maksimirajo svojo koristnost na celotni trajektoriji. Formulacija dinamičnega problema je podana kot

$$\begin{aligned} u_t &= h_t(x_t) \\ x_{t+1} &= g(x_t, u_t) = g(x_t, h(x_t)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

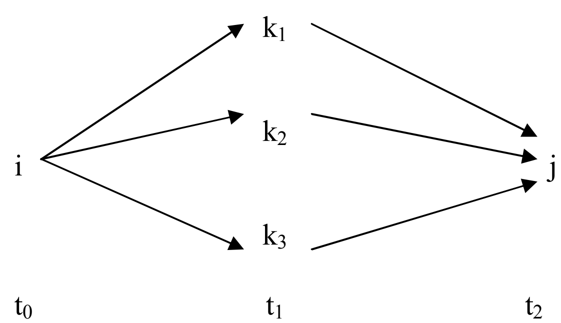
2.3.2 Markovski proces

Za stacionarni markovski proces je značilno, da posameznik, ki se v času t nahaja v stanju x_t, sprejme odločitev a_t, ki določa njegovo trenutno koristnost $u(x_t, a_t)$ in hkrati vpliva na njegovo stanje v prihodnjem obdobju x_{t+1}.[31] Ko se posamezniki premaknejo v novo stanje x_{t+1}, na podlagi novih informacij sprejmejo novo odločitev, a_{t+1}, ki jim maksimira njihovo koristnost v obdobju t+1 in jih vodi v novo stanje x_{t+2}, itd. Pri tem je stohastični sistem vektorjev stanj $\{x_t\}$ v diskretnem času t neodvisen od časa, kar pomeni, da so odločitve posameznikov v času med seboj neodvisne. Od tod izhaja lastnost stacionarnega markovskega procesa prvega reda, ki pravi, da je pri napovedovanju stanja sistema v času t_1 pomembna izključno informacija o stanju sistema v času t_0. Velja torej, da ima stohastični proces $\{x_t\}$ markovsko lastnost, če za vsaka $k \geq 1$ in t velja $\Pr(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-k}) = \Pr(x_{t+1} | x_t)$. Ker je v verigi odločitev posameznika vsaka njegova odločitev odvisna izključno od njegove pretekle odločitve in od

[31] Kadar bi določeno stanje povzročil nek proces z markovsko lastnostjo, ki ga posamezniki ne bi zaznali, ampak bi zaznali le stanje, in bi na podlagi tega stanja sprejeli odločitev za premik v novo stanje, govorimo o t.i. skritem markovskem procesu (Rabiner in Juang 1986; Ljungqvist in Sargent 2000).

stanja, v katerem se nahaja, govorimo o markovski verigi, ki jo podamo kot $\pi\left(x_{t+1} \middle| x_t, a_t\right)$. Kadar markovski proces ni odvisen od časa, govorimo o stacionarnem markovskem procesu. Za stacionaren markovski proces v splošnem velja $\pi_{t+1,\ldots,t+n}\left(x \middle| a_{t-k}, \ldots, a_{t-1}, a_t\right) = \pi_{t+1,\ldots,t+n}\left(x \middle| a_t\right)$. Pri tem spremenljivke tečejo na intervalih $t = 2,3,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots$ in $k = 1,2,\ldots,t-1$. V primeru, ko imajo tudi vsi prehodi med stanji stacionarno lastnost in so neodvisni od časa t, ima markovski proces stacionarno dinamiko (Stokey in drugi 1999, 223-224). Asimptotično stacionaren markovski proces s časovno neodvisno in enolično porazdelitvijo definiramo takrat, kadar se pri poljubni začetni porazdelitvi π_0 brezpogojne porazdelitve π_t približujejo stacionarni porazdelitvi $\lim\limits_{t\to\infty} \pi_t = \pi_\infty$ in končna porazdelitev ni odvisna od začetnega stanja.

Slika 2.2: *Prehod med stanji*



V markovskem procesu se posameznik v posameznem obdobju srečuje z izborom takšnega optimalnega odločitvenega pravila α, ki vsebuje vse bodoče odločitve $\alpha \equiv \left(a_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_T\right)$, da reši sistem $V(x) \equiv \max\limits_{\alpha} E_\alpha\left(\sum\limits_{t=0}^{T} \beta^t u\left(x_t, a_t\right) \middle| x_0 = x\right)$, kjer E_α prikazuje pričakovanja glede na stohastični proces, ki ga tvori odločitveno pravilo α. Prehajanje med stanji slikovno ponazorimo tako, da si predpostavimo, da posameznik v času t_0 izbira svojo optimalno pot, ki ga bo peljala v želeno stanje j v času t_2. Kot je razvidno iz slike 2.2, ima posameznik v času t_1 na voljo tri vmesne poti, ki ga vodijo v ciljno stanje j. Pri tem izbere tisto pot, ki mu v času t_0 maksimira korist oziroma minimizira izgubo. V zvezi z markovskim procesom nastane problem, ker zaradi stacionarnosti posamezniki ne morejo maksimirati svojih *ex-ante* odločitvenih zaporedij, ampak za rešitev problema maksimirajo svoje odločitve za nazaj (*ex-post*), ki so v danem stanju predstavljale najboljšo izbiro (Rust 1996, 620). Metode dinamičnega programiranja rešijo omenjeni problem preko Bellmanove enačbe, ki v vsakem obdobju oblikuje problem, ki ga rešuje posameznik.

Z vidika numeričnega reševanja problemov je pomembno, ali gre za diskreten in zvezni markovski proces. V primeru diskretnega markovskega procesa zajemajo spremenljivke stanja in kontrol končno število možnih vrednosti, medtem ko jih v primeru zveznega markovskega procesa neskončno (Rust 1996, 621). Iz tega izhaja sledeča lastnost rešitev markovskega procesa, ki je v primeru diskretnega markovskega procesa natančna, v primeru zveznega pa lahko njegovo vrednost le ocenimo. Ker ocenjenih rešitev ni možno podati analitično, pri tem uporabimo različne metode numeričnega integriranja (Judd 1998; Press in drugi 2002).

2.3.3 Dinamična optimizacija

Bellmanova enačba

Za iskanje odločitvenih funkcij $\{h(x_t)\}_{t=0}^{\infty}$ je treba poznati funkcijo vrednosti – *value function*. Ta predstavlja maksimalen možen pričakovan rezultat od časa t_0 in nahajanja v stanju x_0 dalje. Funkcija vrednosti izraža optimalno vrednost izvirnega problema v odvisnosti od odločitvenih funkcij u_t, ki začne iz poljubnega začetnega stanja iz prostora stanj $x \in X$. Pri pogoju, da je $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$ in dani vrednosti začetnega stanja x_0, je funkcija vrednosti definirana kot

$$V(x_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \tag{2.3}$$

V enačbi 2.3 prikazuje x_t matriko posameznih stanj sistema, u_t pa neskončno zaporedje izbir, ki maksimirajo vrednostno funkcijo.[32] Iz zastavljenega problema zapišemo Bellmanovo enačbo kot

$$V(x) = \max_{u} \{ r(x, h(x)) + \beta V(g(x,u)) \} \tag{2.4}$$

V (2.4) prikazuje $V(g(x,u))$ nahajanje v naslednjem obdobju, ki je odvisno od stanja v času t_0 in od odločitve v času t_0, ki pripelje v novo stanje. Na njo vpliva nahajanje v stanju t_0. Ob tem upoštevamo tudi diskontni faktor β. Ob upoštevanju stacionarnega markovskega procesa prvega reda je nahajanje v naslednjem obdobju odvisno od trenutnega stanja in »akcije« v danem stanju (slika 2.2). Za zagotovitev obstoja optimalne točke mora biti Bellmanova enačba $V(x)$ v vsaki točki konkavna funkcija. Ta lastnost zagotavlja veljavnost izreka o operatorju, ki krči (*contraction mapping theorem*),[33] ko z iteriranjem po Bellmanovi enačbi prihaja do oženja prostora rešitev. Izrek zagotavlja konvergenco s fiksno točko, ki je tudi rešitev optimizacijskega problema. Omenjena lastnost ponuja številne možnosti za njeno numerično programiranje. Eksplozivne funkcije v času niso rešljive. Ključni vidik pri

[32] Vrednostna funkcija je najmanjša zgornja meja možnih izidov (*supremum*).

[33] Pri tem mora biti funkcija koristnosti posameznikov konkavna funkcija. Izrek o operatorju, ki krči (*contraction mapping theorem*) je prikazan v Stokey in drugi (1999, 50-52), Denardo (1967), Blackwell (1965). Rust in drugi (2002) rešijo problem prekletstva dimenzionalnosti v primeru več dimenzij, ki so sicer zelo pogoste v financah, kjer imamo lahko na voljo tudi prostor 10.000 dimenzij.

reševanju Bellmanove enačbe je njeno maksimiranje. Maksimira jo odločitvena funkcija $u = h(x)$, ki predstavlja optimalno odločitev v času. Če je $V(x)$ odvedljiva, je odločitvena funkcija $g(x)$ podana implicitno z odvajanjem $V(x)$. Araujo (1991) in Araujo in Scheinkman (1977) pokažejo, da mora za rešitev Bellmanove enačbe pri naraščajoči odločitveni funkciji, ki je C^1 zvezno odvedljiva, funkcija vrednosti biti C^2 zvezno odvedljiva (tudi Santos 1991; 1999). V kolikor je odločitvena funkcija C^2 zvezno odvedljiva, bi morala biti funkcija vrednosti C^3 zvezno odvedljiva. V kolikor ni zadoščeno tem zahtevam, Bellmanove enačbe ne moremo rešiti z njenim odvajanjem.

Z odvajanjem Bellmanove enačbe dobimo nahajanje sistema, posameznika v stanju, ki je enako redu odvoda.[34] Za markovsko verigo prvega reda je pri tem pomemben prvi odvod, ki prikazuje nahajanje sistema v stanju t+1. Pri odvajanju $V(x)$ se uporablja Benveniste-Scheinkmanova (1979) verzija izreka o ovojnici, ki pravi, da je v vsaki točki $(x, h(x))$ funkcija $V(x)$ odvedljiva glede na x, od koder izhaja $V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, h(x)) + \beta \frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)) V'(g(x, h(x)))$. V primeru, ko je $g(x,h(x))$ neodvisen od r in velja, da je $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, je odvod enačbe podan preko izreka o ovojnici $V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, h(x))$. Ker zakon gibanja vrednostne in odločitvene funkcije prikažemo z njunima odvodoma, morata obe funkciji zadostiti kriterijem gladkosti funkcije (*smoothness properties*). Santos (1991) pokaže, da za izpolnitev kriterijem gladkosti vrednostne in odločitvene funkcije ni dovolj le odvedljivost prvega reda in potrdi, da je odvod vrednostne funkcije določen s kvadratnim razvojem Bellmanove enačbe po optimalni poti. Stokey in drugi (1999) pokažejo, da je v tem primeru kvadratnega optimizacijskega problema vrednostna funkcija linearna, pri tem pa pogoje prvega reda za rešitev problema dobimo preko sistema Eulerjevih enačb.

Kadar v funkciji nastopajo razni šoki, ki so bodisi markovski ali i.i.d. porazdeljeni,[35] se problem maksimiranja funkcije vrednosti preoblikuje v maksimiranje pričakovane koristnosti posameznikov $\max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \right]$, pri pogoju $x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})$, kjer je ε_{t+1} stohastični šok v obdobju t+1. Stohastični šok je realiziran v času t+1, medtem ko je E_t pogojno pričakovanje glede na informacije v času t. V primeru stohastičnega šoka dobi Bellmanova enačba obliko $v(x) = \max_u [r(x,u) + \beta E[v(g(x,u,\varepsilon)) | x]]$.

Pri proučevanju diskretnih problemov je markovski proces predstavljen s končnim številom vrednosti odločitvenih in vrednostnih funkcij, ki maksimirajo Bellmanovo enačbo. Vrednostne funkcije so podane v končnem evklidskem prostoru, zaradi česar jih je možno

[34] Prvi odvod pokaže stanje v času t+1, drugi odvod v stanju t+2 itd.

[35] Značilnosti in lastnosti i.i.d. porazdelitve so podrobneje prikazane v Hamilton (1994).

natančno rešiti. Kadar pa opazujemo spremenljivke ali stanja v zveznem času, pa se nahajamo v neskončno dimenzijskem evklidskem prostoru, kjer analitične rešitve Bellmanove enačbe niso možne in jih je treba oceniti (Rust 1996, 621). V zveznem času je pogostost prekletstva dimenzionalnosti večja, kot v diskretnih primerih, zaradi česar je konvergenca bistveno upočasnjena.[36]

Hamiltonian

Med načini reševanja dinamičnih večdimenzionalnih problemov v zveznem času se najpogosteje uporablja t.i. Hamiltonova enačba – *hamiltonian*.[37] Njegova uporaba je pogosta v primerih, kjer ekonomski agentje posedujejo zalogo kapitala (tudi človeškega kapitala) in hkrati porabljajo dobrine, oboje pa vpliva na njihovo koristnost na dva načina. Neposreden vpliv na posameznikovo koristnost se kaže v vrednosti spremenljivk stanja, z izbiro spremenljivk kontrol pa posamezniki posredno določajo zalogo spremenljivk stanja, ki neposredno vplivajo na končno vrednost problema, ki ga maksimiramo. Pri tem predpostavimo, da posamezniki ne morejo neposredno spreminjati spremenljivk stanja, ampak na njih vplivajo preko kontrole.

V splošnem oblikujemo problem tako, da problem maksimiramo po kontrolah u v času od nič do T, kar prikažemo

$$\begin{aligned} &V(x,t) = \max_u = \int_0^T e^{-\rho t}\pi(x,u,t)dt + W(x(T)) \\ &\dot{x} = f(x,u,t) \\ &x(0) = x_0 \end{aligned} \qquad (2.5).$$

Kjer predstavlja u kontrolo, x spremenljivke stanja, $\dot{x}$ dinamiko spremenljivk stanja. t prikazuje čas, ki teče na intervalu (0, T) in x_0 začetne pogoje. Hkrati velja $V(x,T) = W(x)$. $W(x)$ prikazuje končno vrednost funkcije stanja v odvisnosti od časa T in jo dobimo tako, da seštejemo vsa vmesna stanja funkcije. Če dodamo še izhodiščne pogoje za spremenljivke stanja x_0, potem $W(x)$ predstavlja celotno vrednost problema pri danih kontrolah in izhodiščnih pogojih. Za rešitev problema najprej oblikujemo Hamiltonian

[36] Če s $comp(d)$ označimo minimalno število operacij, ki jih opravi računalnik za rešitev najtežjega diskretnega problema in s $comp(\varepsilon,d)$ minimalno število računalniških operacij pri reševanju problema d-dimenzij, pri dani napaki ε, potem govorimo o prekletstvu dimenzionalnosti diskretnega problema, kadar $comp(d) = 2^d$ in kadar v zveznem primeru zahtevnost problema raste po stopnji $comp(\varepsilon,d) = \left(\frac{1}{\varepsilon^d}\right)$ (Rust 1997).

[37] Ekonomsko interpretacijo teoriji optimalne kontrole poda Dorfman (1969). Še posebej v povezavi s teorijo kapitala in gospodarske rasti.

$$H(x,u,\lambda,t) = \pi(x,u,t) + \lambda' f(x,u,t) \tag{2.6}$$

Pri tem pa enačbe kostanja prikazujejo trajektorije gibanja odločitvenih spremenljivk in so podane kot

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - (\pi x + \lambda' f_x) \tag{2.7}$$

Po principu maksimuma je optimalna rešitev problema podana pri $u(t) \in \arg\max_u H(x,u,\lambda,t)$. Če je funkcija strogo konkavna, imamo le eno maksimalno točko. V primeru, ko pa funkcija ne bi bila strogo konkavna, pa bi bil maksimum prikazan kot korespondenca. Če predpostavimo strogo konkavno funkcijo kontrole, je po principu maksimuma odvod Hamiltoniana po kontroli *u* enak nič: $H_u(x,u,\lambda,t) = 0$. Kadar se nahajamo v optimalni točki, je gibanje hamiltoniana po času enako parcialnemu odvodu hamiltoniana po času, ki je enak nič. V tem primeru je problem časovno neodvisen in ima markovsko lastnost prvega reda.

Pri optimizaciji hamiltoniana je treba upoštevati pogoje tranzverzalnosti, ki dajejo potrebne pogoje za obstoj maksimuma $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0$ in $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)x(t) = 0$. V kontekstu gospodarske rasti ti pokažejo, da racionalni agentje po koncu obdobja ne želijo imeti nobenega premoženja, s katerim bi si lahko povečali blaginjo.

2.3.4 Metode reševanja Bellmanove enačbe

Ker odločitvena pravila niso znana, se Bellmanova enačba rešuje z uporabo numeričnih metod, ki dajo približne rešitve. Numerična analiza ponuja mnogo različnih metod, ki se med seboj razlikujejo po tem (Novales in drugi 2004): (i) kako oblikujejo različne stabilne rešitve modelov, (ii) kako v modelih programirajo pričakovanja in koliko informacij dajo o njih in (iii) koliko nelinearnosti ohranijo pri numerični rešitvi modelov. Poleg teh se metode razlikujejo še po natančnosti dobljenih rešitev, preprostosti uporab in porabi računalniškega časa, odvisne pa so tudi od uporabljenega modela.

Izmed metod reševanja ekonomskih modelov so se najprej pojavile linearno-kvadratne (LQ) aproksimacije, ki dajejo rešitve pri kvadratnem razvoju funkcije koristnosti okrog steady state, ki prikazuje stabilno trajektorijo stopenj rasti. LQ aproksimacija sodi v skupino linearnih metod in je še posebej pogosto uporabljana v primerih razširjenega neoklasičnega modela gospodarske rasti. Poleg LQ aproksimacij sodijo v skupino linearnih metod še dekompozicija lastnih vrednosti (*eigenvalue decomposition*) (Blanchard in Kahn 1980; Sims 2001; King, Plosser in Rebelo 2002), generalizirana Schurova dekompozicija (Klein 2000 in Sims 2001). Izmed linearnih metod so najpomembnejše prispevke LQ aproksimacij podali Brock in Mirman (1972), Kydland in Prescott (1982; 1988), Christiano (1988; 1990; 1990a), Taylor in

Uhlig (1990), Magil (1977), McGrattan (1990), Dotsey in Mao (1992), Schmitt-Grohe in Uribe (2004) in drugi.[38] Poleg LQ metod je pogosta uporaba Eulerjevih enačb (Christiano in Fisher 2000; Coleman 1990), t.i. kvadraturnih metod (Tauchen 1990; Tauchen in Hussey 1991), ki se posebej dobro izkažejo pri reševanju *asset pricing* modelov in temeljijo na uporabi različnih metod numerične integracije (trapezoidno, Gauss-Legendrovo, Gauss-Hermitovo, Chebyshevo, Newton-Cotesovo), metod tehtanih rezidualov (*weighted residual methods*) (McGrattan 1996; 2004; Taylor in Uhlig 1990) in metod zamenjave spremenljivk (Judd 2002; Fernandez-Villaverde in Rubio-Ramirez 2006). Za rešitev modela racionalnih pričakovanj uporabi Sims (1990) t.i. *backsolving solution* metodo, medtem ko Imrohoroglu (1994) t.i. *forward solution* metodo. Duffy in McNelis (2001) uporabita metodo genetskih algoritmov, ki pa se izkaže za manj učinkovito in časovno zelo potratno.[39]

Iteracija vrednostne funkcije

Iteracija vrednostne funkcije temelji na izreku o operatorju, ki krči prostor, in zagotavlja konvergenco vrednostne in odločitvene funkcije pri poljubni začetni vrednosti V_0. Operator je določen z vrednostjo diskontnega faktorja β. Sama iteracija začenja s konstruiranjem zaporedja vrednostnih funkcij in pripadajočih odločitvenih funkcij.

Zaporedje je konstruirano z iteracijo enačbe $V_{j+1}(x) = \max_u \left(r(x,u) + \beta V_j \left(g(x,u) \right) \right)$ v začetni vrednosti V_0 in nadaljuje, dokler V_j ne konvergira. Ker Bellmanova enačba konvergira le asimptotično, se v praksi postopek konvergence zaključi takrat, ko odločitvena funkcija konvergira, nato pa konvergiramo vrednostno funkcijo, dokler njena vrednost ni znotraj predpisane napake: $\left| V_{j+1} - V_j \right| < \varepsilon$. Tak postopek zagotavlja, da se vrednost vrednostne funkcije prilagaja glede na konvergenco odločitvene funkcije. Ko dosežemo konvergenco znotraj napake, ocenimo končne optimalne vrednosti.

Ker gre pri iteraciji vrednostne funkcije za tehnike odvajanja vrednostne in odločitvene funkcije, je odvedljivost ključna lastnost, ki ju je treba zagotoviti. Blume, Easley in O'Hara (1982), Santos (1999, 2000) in Santos in Vigo (1995) proučujejo lastnosti drugih odvodov vrednostne in odločitvene funkcije. Pri tem nastane problem, ker lastnosti funkcij, ki bi dovoljevale uporabo odvodov višjih redov, niso povsem poznane. Metoda namenjena

[38] Numerične metode za reševanje determinističnih in stohastičnih LQ modelov so podali Amman (1996), Press in drugi (2002). Aruoba in drugi (2003) pokažejo, da je morajo različne linearne metode dati isti rezultat. Torej je izbira za njihovo uporabo le stvar preferenc posameznika in zahtevnosti numeričnega reševanja problema.

[39] Podrobnejši pregled numeričnih metod je na voljo v Judd (1998; 1996), Rust (1996), Arouba in drugi (2003), Taylor in Uhlig (1990), numerične algoritme za njihovo rešitev v programskem jeziku C podajo Press in drugi (2002), v MATLABU pa Miranda in Fackler (2004). Metode reševanja Bellmanove enačbe je mogoče najti v Rust (1996), Santos (1999), Ljungqvist in Sargent (2000), Judd (1998), Cooley (1995), Hansen in Sargent (2005).

izključno reševanju diskretnih funkcij, zato je v primeru zveznih funkcij najprej treba opraviti diskretizacijo strukture. V tem primeru je zaradi zelo kratkih časovnih intervalov konvergenca zelo počasna, kar zmanjšuje njeno aplikativno uporabnost.[40]

Logika iteracije vrednostne funkcije je podobna Gauss-Jacobijevi iteraciji, kjer v vsaki fazi iteracije vrednostne funkcije uporabimo novo vrednost odločitvene funkcije. Zaradi tega je procedura zelo počasna in potrebuje veliko računalniškega spomina. Za numerično rešitev zvezne odločitvene funkcije obstaja več algoritmov, Aruoba in drugi (2003) uporabijo Newtonovo metodo. Vendar je iteracija vrednostne funkcije zelo počasna metoda za iskanje optimalnih rešitev, saj je podvržena prekletstvu dimenzionalnosti.

Kot primer uporabe iteracije Bellmanove enačbe uporabimo neoklasični model gospodarske rasti Brocka in Mirmana (1972). V gospodarstvu, ki ga sestavljajo heterogeni posamezniki, ti rešujejo problem maksimiranja svoje koristnosti oblike $\ln(C_t)$, kar zapišemo

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(C_t) \qquad (2.8),$$

pri čemer proizvodnjo opredelita kot

$$C_t + K_{t+1} = Ak_t^{\alpha} \qquad (2.9).$$

Avtorja predpostavljata popolno amortizacijo kapitala v času t, zaloga kapitala v časovnem obdobju t+1 (K_{t+1}) pa je enaka nepotrošeni proizvodnji v času t, kar izhaja s preoblikovanjem enačbe. Tako dobimo $K_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - C_t$. To pomeni, da v času t posamezniki z odločitvijo glede potrošenih dobrin določajo agregatno zalogo kapitala v naslednjem obdobju. Tako zapišemo Bellmanovo enačbo kot

$$V(k) = \max_C [\ln(C) + \beta V(k')] \qquad (2.10).$$

pri pogoju

$$k' = Ak^{\alpha} - C \qquad (2.11).$$

Proceduro iteracije začnem tako, da najprej ugibam rešitev $V(k) = E + F\, ln\, k$, od koder zapišemo $V(k) = E + F \ln k = \max_c [\ln(c) + \beta(E + F \ln(k'))]$ pri pogoju $k' = Ak^{\alpha} - C$. Poenostavljeno zapišemo tudi

[40] Kar pomeni, da je vrednost diskontnega faktorja β blizu ena.

$$\max_{k'}\left[\ln\left(Ak^{\alpha}-k'\right)+\beta E+\beta F\ln\left(k'\right)\right] \tag{2.12}$$

Iz enačbe izpeljemo pogoje prvega reda (FOC), od koder po odvajanju po k' dobimo $\left(-1\right)\frac{1}{Ak^{\alpha}-k'}+\beta F\frac{1}{k'}=0$ in $\frac{\beta F}{k'}=\frac{1}{Ak^{\alpha}-k'}$. Enačbo lahko preoblikujemo v $\frac{k'}{\beta F}=Ak^{\alpha}-k'$ in $k'\left(1+\frac{1}{\beta F}\right)=Ak^{\alpha}$. Zakon gibanja kapitala dobimo tako, da izpeljemo za k' in preuredimo. Tako dobimo

$$k'=\frac{Ak^{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta F}}=\frac{\beta FAk^{\alpha}}{1+\beta F}.$$

Izpeljavo za gibanje kapitala vstavimo v Bellmanovo enačbo ter dobimo

$$\begin{aligned}V\left(k\right)&=\max_{k'}\left[\ln\left(Ak^{\alpha}-k'\right)+\beta E+\beta F\ln\left(k'\right)\right]\\&=E+F\ln k\\&=\ln\left(Ak^{\alpha}-\frac{\beta FAk^{\alpha}}{1+\beta F}\right)+\beta E+\beta F\ln\left(\frac{\beta FAk^{\alpha}}{1+\beta F}\right)\end{aligned}$$

Ko imamo podano preurejeno Bellmanovo enačbo, poiščemo rešitev za »umetno« spremenljivko *F*, iz katere kasneje izpeljemo ravnovesno steady state stopnjo gospodarske rasti. Tako zapišemo $F\,ln\,k=ln\,k^{\alpha}+\beta F\,ln\,k^{\alpha}$ in $F\,ln\,k=\alpha\,ln\,k+\alpha\beta F\,ln\,k$. Po deljenju z $ln\,k$ dobimo $F=\alpha+\alpha\beta F$, od koder je $F=\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$. Gibanje kapitala lahko zapišemo kot $k'=\frac{\beta FAk^{\alpha}}{1+\beta F}=\alpha\beta$ in v končni obliki $k'=\alpha\beta Ak^{\alpha}$.

Če predpostavimo, da v ravnovesju vse spremenljivke rastejo po isti stopnji, iz končne oblike potrdimo steady state ravnovesno rast, kamor konvergira gospodarstvo. V tem primeru je steady state določen enovito, hkrati pa je tudi stabilno.

Iteracija odločitvene funkcije

Iteracija odločitvene funkcije je bistveno hitrejša od iteracije vrednostne funkcije in poteka v treh korakih:

- najprej izberemo odločitveno funkcijo $u = h_0(x)$, s pomočjo katere iteriramo vrednostno funkcijo $V_{h_0}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, h_0(x_t))$. Pri tem predpostavimo, da se odločitvena funkcija ne bo spreminjala v nedogled. Hkrati velja, da je $x_{t+1} = g(x_t, h_0(x_t))$.
- v drugem koraku poiščemo novo odločitveno funkcijo $u = h_1(x)$, in jo ponovno vključimo v proceduro iteracije vrednostne funkcije. Ponovno predpostavimo, da se odločitvena funkcija ne spreminja. V tej fazi velja, da je $h_1(x) = g(x_t, h_0(x_t))$ in $V_1(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, h_1(x_t))$.
- postopka ponavljamo tako dolgo, dokler oba ne konvergirata.

Večja hitrost iteracije odločitvene funkcije v primerjavi z iteracijo vrednostne funkcije je posledica tega, da iteracija vrednostne funkcije predpostavi, da je nova odločitvena funkcija v uporabi le v naslednjem obdobju, medtem ko iteracija odločitvene funkcije predpostavi, da se odločitvena funkcija ne spreminja. Zaradi tega pri iteraciji vrednostne funkcije prihaja v vsakem obdobju do izračunavanja nove odločitvene funkcije, kar zelo upočasni konvergenco. Konvergenca bi bila še posebej počasna v primerih, ko bi imeli zelo kratke časovne intervale med opazovanji in bi bila vrednost diskontnega faktorja zelo blizu ena. Do tega pa zagotovo pridemo v primeru diskretizacije zveznega problema. Prednost uporabe iteracije odločitvene funkcije je tudi v tem, ker lahko podamo začetno vrednost bodisi za vrednostno funkcijo, bodisi za odločitveno funkcijo, kar lahko bistveno pripomore pri hitrosti konvergence.

Hitrost konvergence iteracije odločitvene funkcije je v povezavi z Newtonovo metodo, ki konvergira po kvadratni stopnji, medtem ko iteracija vrednostne funkcije konvergira po linearni stopnji.[41]

Gauss-Seidlova iteracija

Gauss-Seidlovo iteracijo je možno uporabiti tako v linearnih, kot tudi v nelinearnih enačbah in je podana kot

$$V_{j+1} = \max_u \frac{\pi(x_i, u) + \beta \sum_{j<i} r_{ij}(u) V_j^{l+1} + \sum_{j>i} r_{ij}(u) V_j^l}{1 - \beta r_{ii}(u)} \qquad (2.13).$$

Iteracija 2.13 uporabi novo informacijo o odločitveni funkciji takoj, ko je na voljo. Zaradi tega je tudi hitrejša metoda od iteracije vrednostne funkcije in od Gauss-Jacobijeve iteracije, ki je podana kot

[41] Ljungqvist in Sargent (2002, 4. poglavje).

Gauss-Jacobijeva iteracija

$$V_i^{l+1} = \max_u \frac{\pi(x_i, u) + \beta \sum_{j \neq i} r_{ij}(u) V_j^l}{1 - \beta r_{ii}(u)} \qquad (2.14).$$

Iz algoritma 2.14 je razvidno, da Gauss-Jacobijeva iteracijska metoda ne vzame nove informacije za odločitveno funkcijo, ko je ta na voljo, zaradi česar je bistveno počasnejša od Gauss-Seidlove metode. Pri uporabi obeh algoritmov je konvergenca zagotovljena z veljavnostjo izreka o operatorju, ki krči, in ga podaja diskontni faktor β v Bellmanovi enačbi, ki je manjši od ena.

Iteracija z uporabo Eulerjeve enačbe

Optimizacija funkcije z uporabo Eulerjevih enačb predstavlja kombinacijo pogojev prvega reda za Bellmanovo enačbo in $V'(x)$.

Pri reševanju Bellmanove enačbe, ko stanj in kontrol funkcije ni možno enovito določiti, saj x_t ne nastopa v funkciji vrednosti in velja $\frac{\partial g_t}{\partial x_t} = 0$, z uporabo Benveniste-Scheinkmanovega pravila izpeljemo Eulerjevo enačbo kot $\frac{\partial r_t}{\partial u_t}(x_t, u_t) + \frac{\partial g_t}{\partial u_t}(u_t) \cdot \frac{\partial r_{t+1}(x_{t+1}, u_{t+1})}{\partial x_{t+1}} = 0$. Ob tem še velja, da je $x_{t+1} = g_t(u_t)$ oziroma $u_t = f(x_{t+1})$. Ko vstavimo obrnjeno enačbo za izračun u_t v Eulerjevo enačbo, dobimo pogoje drugega reda za spremenljivko x_t, saj eliminacija u_{t+1} iz prve enačbe vanjo prinese spremenljivko x_{t+2}.

Za rešitev stohastične Bellmanove enačbe izpeljemo Eulerjevo enačbo, ki poteka po enakih korakih kot prej. Najprej z uporabo Benveniste-Scheinkmanovega izreka o ovojnici dobimo $v'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, h(x)) + \beta E\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x), \varepsilon) v(g(x, h(x), \varepsilon) | x)\right]$. Od koder pri pogoju, da velja $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, izpeljemo Eulerjevo enačbo $\frac{\partial r}{\partial u}(x, u) + \beta E\left[\frac{\partial g}{\partial u}(x, h(x), \varepsilon) \frac{\partial r}{\partial x}(x', u') | x\right] = 0$, kjer sta x' in u' stanje in kontrola v času t+1.

Kot primer reševanja modela gospodarske rasti z uporabo Eulerjevih enačb uporabimo Ramseyev model. Pri tem izhajamo iz neoklasične proizvodne funkcije *f(k)*, ki zadošča Inadovim pogojem. Problem maksimiranja izrazimo kot $\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$, pri pogojih $f(k_t) = c_t + k_{t+1}$, pri dani začetni vrednosti k_0. V modelu predpostavimo konkavno obliko funkcije koristnosti, ki prav tako zadošča Inadovim pogojem. Stanje v času t prikazuje *k*, medtem ko stanje v prihodnjem časovnem obdobju t+1 prikazuje odvod *k'*.

Funkcijo koristnosti, ki jo maksimiramo, preoblikujemo tako, da uporabimo *c = f(k) – k'* in izrazimo Bellmanovo enačbo kot $v(k) = \max_{k'}[u(f(k) - k') + \beta v'(k)]$. Eulerjevo enačbo izpeljemo v dveh korakih.

V prvem koraku z uporabo Benveniste-Scheinkmanovega izreka o ovojnici dobimo $v'(k) = u'[(f(k) - k')f'(k)]$, nato pa s parcialnim odvajanjem Bellmanove enačbe po kapitalu *k* dobimo $-u'[f(k) - k'] + \beta v'(k') = 0$. Po ponovnem parcialnem odvajanju, tokrat po stanju v prihodnjem časovnem obdobju *k'*, dobimo $u'[f(k) - k']\beta v'(k') = \beta[u'(f(k') - k'')f'(k')]$. Dobljeno enačbo lahko preuredimo tako, da dobimo Eulerjevo enačbo: $u'(f(k) - k') = \beta f'(k')u'(f(k') - k'')$. Po deljenju enačbe z levim delom dobimo $1 = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} f'(k_{t+1})$.[42] Dobljena enačba ni uporabljana le v teoriji gospodarske rasti, ampak tudi v financah in pri proučevanju poslovnih ciklov (Ljungqvist in Sargent 2000, 89). V njej ulomek na desni strani prikazuje mejno stopnjo substitucije.

Diskretizacija zveznega problema

Kadar v modelu nastopata funkcija vrednosti ali odločitvena funkcija v zveznem času, je za rešitev Bellmanove enačbe potrebna diskretizacija strukture. Z njo se problem, ki je opredeljen v zveznem času spremeni v »podobnega« v diskretnem času. Za rešitev izvirnega problema nato rešujemo diskretni problem po eni izmed metod. Uporabnost diskretizacije strukture je v tem, da se reši prekletstvu dimenzionalnosti.[43]

V večini primerov je diskretizacija strukture skoraj trivialna. Pri diskretizaciji najprej določimo končno vrednost za zvezni parameter. To storimo tako, da neskončno definicijsko območje, kjer je parameter opredeljen (npr. $\sum_{k=0}^{\infty}\ldots$) omejimo na obeh straneh (npr. $\sum_{k=0}^{K}\ldots$). Pri tem moramo biti pozorni, da z novo omejitvijo bistveno ne spremenimo izvirnega problema in da omejitev smiselno upoštevamo tudi npr. v vrednostni funkciji, kadar smo spremenili odločitveno funkcijo. Judd (1998, 424-428) prikaže diskretizacijo determinističnega modela gospodarske rasti, ki je opredeljen kot $\max_{c_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ pri pogoju $k_{t+1} = f(k_t) - c_t$, pri dani vrednosti k_0, od koder oblikujemo Bellmanovo enačbo kot $V(k) = \max_{c} u(c) + \beta V(f(k) - c)$. V

[42] Odvod označuje stanje spremenljivk v naslednjem obdobju.

[43] Med načini reševanja prekletstva dimenzionalnosti je med bolj uporabnimi tehnikami metoda Monte Carlo.

prikazanem primeru najprej omejimo k na končnem intervalu $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ in nato določimo še dopusten interval vrednosti za potrošnjo c, ki so odvisne od stanja k. Osnovni problem preoblikujemo v $\max_{I_t}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u\left(f\left(k_t\right)-I_t\right)$, kjer je kontrola v času t stanje v prihodnjem obdobju t+1: $k_{t+1}=I_t$. Tako se Bellmanova enačba spremeni v $V(k)=\max_{k^+}u\left(f(k)-k^+\right)+\beta V\left(k^+\right)$, v njej pa je prihodnja zaloga kapitala, k^+, današnja kontrola.

2.4 Primeri dinamičnih modelov gospodarske rasti

2.4.1 Deterministični modeli gospodarske rasti

Modeli gospodarske rasti se med seboj ločijo po tem, da je v enih stanje v obdobjih znano z gotovostjo – deterministični modeli, pri drugih pa nastopajo razni šoki, ki jih ni možno predvideti – stohastični modeli.[44] Deterministični modeli gospodarske rasti, ki so se razvili najprej, ne vsebujejo naključnih šokov. Zaradi tega so zanje značilna povsem predvidljiva stanja v prihodnjih obdobjih, ki jih posamezniki predvidijo na podlagi predhodnih stanj. Glede na predvidljivost se posamezniki pri reševanju svojega problema optimalnosti ne srečujejo z negotovostjo in sprejemajo povsem znane odločitve.

Cass-Koopmansova formulacija neoklasičnega modela rasti

Dinamično modeliranje neoklasičnega modela rasti z endogeno stopnjo varčevanja (Cass 1965; Koopmans 1965) upošteva Ramseyevo funkcijo koristnosti (Ramsey 1928). Ramsey opredeli varčevanje (in potrošnjo) kot funkcijo posameznikove koristnosti. Predpostavljal je, da posamezniki oblikujejo svojo potrošnjo in varčevanje v točki, kjer je »stopnja varčevanja, pomnožena z mejno koristnostjo denarja, enaka količini, kjer je neto povečanje koristnosti posameznikov enako njihovi maksimalni stopnji koristnosti« (Ramsey 1928, 543). V modelu je koristnost posameznikov $u(c)$ prikazana z omejeno, zvezno odvedljivo, strogo naraščajočo in strogo konkavno krivuljo, kjer je $u'(c)>0$ in $u''(c)<0$, pri čemer je $\lim_{c\to 0}u'(c)=\infty$. V modelu, kjer posamezniki ne vrednotijo svojega prostega časa, optimalnost sistema ni možna pri nični potrošnji posameznikov, kar izhaja iz limitnega pogoja. Pri tem predpostavljamo, da imajo vsi posamezniki enake preference, torej velja $u(c_0,c_1\ldots)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t)$.[45] Dinamična

[44] Razširjen pregled determinističnih in stohastičnih modelov gospodarske rasti je možno najti v Stokey, Lucas, Prescott (1999) in Barro, Sala-i-Martin (1995), Santos (1999). Jones in Manuelli (1997) naredita zgoščen povzetek metod in modelov endogene rasti gospodarstva.

[45] Ramsey (1928) je predpostavljal, da znaša vrednost diskontnega faktorja β ena.

oblika neoklasičnega modela gospodarske rasti izhaja iz Cobb-Douglasove proizvodne funkcije, ki zadovoljuje Inadovim pogojem. Dinamična formulacija modela je podana z rešitvijo optimizacijskega problema $\max_{c_t} \int_0^T e^{-\rho t} U(c_t) dt$ pri pogoju $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - \delta k_t$ ki predstavlja linearno povezavo med akumulacijo kapitala in potrošnjo. V modelu je k_0 začetna zaloga kapitala.

Za rešitev problema oblikujemo Hamiltonovo funkcijo, ki je podana v obliki $H(c,k,\lambda,t) = e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}\right) + \lambda\left[k^{\alpha} - c - \delta k\right]$. Pri tem je $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ t.i. CRRA[46] funkcija koristnosti. Pogoji prvega reda prikažejo časovno dinamiko za optimalno potrošnjo, od koder izhaja $\dot{c}_t = \frac{c_t}{\gamma}\left[\alpha k_t^{1-\alpha} - p - \delta\right]$. V modelu se potrošnja in kapital gibljeta proti svojima končnima ravnovesnima položajema, kjer velja $\lim_{t\to\infty} c_t = c_{SS} < \infty$ in $\lim_{t\to\infty} k_t = k_{SS} < \infty$. Ker sta oba ravnovesna položaja končna, se rast obeh spremenljivk približuje nič, torej velja $\lim_{t\to\infty} \dot{c}_t = 0$ in $\lim_{t\to\infty} \dot{k}_t = 0$. Od tod je ravnovesna zaloga kapitala enaka $k_{SS} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, ravnovesna potrošnja pa $c_{SS} = k_{SS}^{\alpha} - \delta k_{SS}$.

Deterministični model človeškega kapitala (Lucas 1988)

Na temelju dela Uzawe (1965) je Lucas (1988) ponudil alternativni model gospodarske rasti, kjer je človeški kapital bistveni dejavnik gospodarske rasti. S tem Lucas vzpostavi vzajemen odnos med človeškim kapitalom in rastjo produktivnosti. V modelu sta zakon gibanja človeškega kapitala in produktivnost podana kot markovski proces alokacije časa posameznikov. Alokacija časa posameznikov v času t_1 je odvisna od alokacije časa posameznikov v času t_0. Zalogo človeškega kapitala v gospodarstvu Lucas poveže s konceptom strokovne usposobljenosti posameznikov in uvede pojem učinkovito delo (Lucas 1988, 18). Pri Lucasu pridobivanje človeškega kapitala ne poteka izključno izven delovnega časa posameznikov, pač pa ti tudi del svojega delovnega časa $1-u(h)$ namenijo za njegovo pridobivanje, medtem ko je *u(h)* delež delovnega čas, ki ga posamezniki namenijo v tekočo proizvodnjo.

Zakon gibanja človeškega kapitala posameznikov je podan preko maksimiranja funkcije življenjskega dohodka posameznikov. Ob upoštevanju konstantne obrestne mere in konstantne višine plače, je sedanja vrednost življenjskega dohodka posameznikov enaka

[46] CRRA – *constant relative risk-aversion.*

$\sum_{t=1}^{N}\beta^t h_t k_t$. V enačbi upoštevamo, da se posamezniki upokojijo v obdobju N. Število ur, ki jih posamezniki v časovnem obdobju t porabijo za delo h_t, je padajoča funkcija rasti človeškega kapitala: $h_t = \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)$. V kolikor je celotni čas posameznikov namenjen izključno delu $(h_t = 1)$, njihov človeški kapital depreciira po stopnji δ. V primeru, ko bi posamezniki svoj celotni čas namenili pridobivanju človeškega kapitala in ne bi bili prisotni na trgu dela $(h_t = 0)$, pa njihov človeški kapital raste po stopnji λ.

Lucasova proizvodnja je odvisna od zaloge kapitala, človeškega kapitala in obstoječe tehnologije, ki je konstantna. Če proizvodnjo sestavljata potrošnja in investicije, Lucasovo proizvodno funkcijo zapišemo kot $C_t + \dot{K}_t = AK_t^{\alpha}(u_t h_t L_t)^{1-\alpha} h_E^{\xi}$, kjer spremenljivka h_E^{ξ} prikazuje eksterne učinke človeškega kapitala.

Pri izhodiščni ravni izobraženosti $k_t > 0$, posamezniki rešujejo problem maksimiranja funkcije

$$\max_{(k_{t+1})_{t=1}^{N}} \sum_{t=1}^{N}\beta^t k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right),$$

pri pogoju

$$(1-\delta)k_t \le k_{t+1} \le (1+\lambda)k_t \quad \text{za vsak t.}$$

Na podlagi posameznikovih odločitev glede razporeditve svojega časa med človeškim kapitalom in delom je problem optimalne gospodarske rasti podan kot

$$\max_{(k_{t+1})_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U\left(f\left(k_t \phi\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right)\right)\right),$$

pri pogoju

$$(1-\delta)k_t \le k_{t+1} \le (1+\lambda)k_t$$

za vsak t in pri dani vrednosti $k_0 > 0$. Od tod izhaja pripadajoča Bellmanova enačba

$$v(k) = \max_{(1-\delta)k \le y \le (1+\lambda)k}\left(U\left(f\left(k\phi\left(\frac{y}{k}\right)\right)\right) + \beta v(y)\right).$$

V enačbi je funkcija koristnosti posameznikov podana kot $U(c)=\frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$. Preference posameznikov so strogo naraščajoče, strogo konkavne in zvezno odvedljive. Pri izbiri posameznikov glede razdelitve dobrin med potrošnjo in varčevanjem se posamezniki odločijo za tisto kombinacijo, kjer imata potrošnja in varčevanje isto mejno koristnost. Hkrati poteka tudi razdelitev časa med proizvodnjo in akumulacijo človeškega kapitala po principu izenačitve mejnih koristnosti.

Razširitev Lucasovega modela človeškega kapitala opravita Caballe in Santos (1993), ki izpostavita sledeče vplive povečanja fizičnega kapitala, ko se gospodarstvo že nahaja v ravnovesnem stanju:

a) v normalnem primeru rasti fizičnega kapitala sledi tudi povečanje človeškega kapitala, kar povzroči, da gospodarstvo konvergira proti novemu ravnovesnemu položaju pri višji vrednosti fizičnega kapitala;
b) v paradoksalnem primeru se raven človeškega kapitala zniža, kar povzroči konvergenco gospodarstva pri nižji vrednosti kapitala in
c) pod predpostavko eksogene stopnje rasti ostane raven človeškega kapitala nespremenjena in gospodarstvo konvergira nazaj proti izhodiščnemu ravnovesnemu položaju.

Caballe in Santos (1993) navedeta dva razloga. Nenadna rast fizičnega kapitala dvigne produktivnost zaposlenih, kar dvigne oportunitetni strošek formalnega pridobivanja človeškega kapitala. Na drugi strani pa nenadna rast fizičnega kapitala zniža stopnjo rasti potrošnje in akumulacije kapitala. Predvsem nižja stopnja rasti potrošnje spodbudi akumulacijo človeškega kapitala. Tako je kumulativni učinek nasprotujočih si sil odvisen od jakosti posameznega učinka.

V model človeškega kapitala je akumulacijo človeškega kapitala možno vključiti tudi preko koncepta učenja skozi delo (Romer 1986). Torej ni nujno, da se človeški kapital in zaposlenost izključujeta. Ampak nasprotno, zaposlenost pospešuje akumulacijo človeškega kapitala. Model implicitno privzema, da posamezniki začnejo delati z določeno zalogo človeškega kapitala, ki ga pridobijo s formalnim izobraževanjem.

Model monopolistične konkurence (Romer 1987)

Delitev dela in z njo povezana specializacija je že od časa Adama Smitha veljala za instrument, ki povečuje produktivnost gospodarstva. Kljub temu je bila dinamična formulacija modela gospodarske rasti s specializacijo oblikovana šele v osemdesetih letih 20. stoletja

(Romer 1987).[47] V modelu se Romer osredotoči na tržno moč podjetij in prost vstop v panogo, kar povzroči, da v panogi nastopa mnogo podjetij. S specializacijo povezane naraščajoče donose obsega je Romer povzel po statičnem modelu Ethierja (1982). Z vključitvijo Ethierjevega modela v model monopolistične konkurence Dixita in Stiglitza (1977) je pokazal, da so naraščajoči donosi obsega stranski produkt specializacije proizvodnje.

V modelu je proizvodnja končnih dobrin naraščajoča funkcija števila specializiranih proizvodnih dejavnikov, z upoštevanjem Harrodovega tipa tehničnega napredka A pa ima obliko $Y_t = (L,(M_t, N_t)) = M_t^{1-\alpha}(L^{1-\alpha}N_t^{\alpha}) = AZ_tL^{1-\alpha}$. Pri tem spremenljivki M in N označujeta število specializiranih proizvodnih dejavnikov in količino uporabljenih specializiranih proizvodnih dejavnikov v času t.[48]

V gospodarstvu posamezniki razdelijo ustvarjen dohodek med potrošnjo c_t in investicije v povečanje zaloge primarnih kapitalnih dobrin v naslednjem obdobju Z_{t+1}.[49] Čeprav kapital nastopa v modelu kot edini proizvodni dejavnik, Romer izpostavi njegovo specializacijo. Torej v modelu nastopa več različnih oblik kapitalnih dobrin, drugi proizvodni dejavnik delo pa je normaliziran z ena. Pri dani zalogi primarnih kapitalnih dobrinah Z_t je za gospodarstvo pomembno, kakšen spekter različnih vmesnih kapitalnih dobrin M_t ima na voljo in v kolikšnih količinah x_t so te posamezne vmesne kapitalne dobrine proizvedene za nadaljnjo proizvodnjo končnih dobrin. V modelu je trg vmesnih dobrin specializiran in urejen po pravilih monopola, kjer samo posamezni proizvajalec proizvaja določeno obliko vmesnih dobrin,[50] medtem pa so proizvajalci končnih dobrin *price-takerji* na vseh trgih.

Zakon gibanja kapitala je podan kot

$$Z_{t+1} - Z_t = Y_t - c_t,$$

pri omejitvi

$$\int_R h(x_t(i))di \leq Z_t.$$

S specifikacijo stroškovne funkcije je dosegljiva množica vmesnih dobrin končna.

---

[47] V svojem predhodnem delu je Romer eksternalije povezal s konceptom *learning by doing*, ki povzroča investiranje podjetij. Hkrati je znanje podjetij označil z lastnostjo proste dobrine (Romer 1986).

[48] $x(i) = N/M$, kjer zaseda i vrednosti na [0, M], prikazuje količino uporabljenih vmesnih dobrin i.

[49] Primarne kapitalne dobrine Z so potrebne za proizvodnjo vmesnih kapitalnih dobrin $x(i)$. Zaradi poenostavitve Romer predpostavi, da pri proizvodnji vmesnih dobrin $x(i)$ nastopajo samo primarne kapitalne dobrine Z, ne pa tudi delovna sila L.

[50] Vendar pa so proizvajalci vmesnih dobrin *price-takerji* na trgu povpraševanja po primarnih dobrinah Z, kjer je njihova najemna cena R.

Proizvajalci vmesnih dobrin maksimirajo dobiček v odvisnosti od najemne cene primarnih dobrin *R* in trgu ponudijo količino vmesnih dobrin *x(i)*. Zaradi simetrije so vse vmesne dobrine proizvedene na enaki tehnološki stopnji. Pri tem so proizvajalci vmesnih dobrin omejeni s stroškovno funkcijo.

O razdelitvi dobrin med potrošnjo in investicijami se posamezniki odločajo skladno z maksimiranjem svoje CRRA funkcije koristnosti $U(c)=\frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$. Ker je potrošne dobrine možno spremeniti v kapitalne dobrine, sta v ravnovesju najemna cena enote primarne dobrine Z in cena enote potrošne dobrine enaki, od koder sledi, da je $M_t = Z_t$.

Pri tem je uravnotežena rast gospodarstva podana pri konstantni rasti potrošnje po stopnji $\frac{1-\rho}{\gamma}$, kjer diskontni faktor ρ zaseda vrednosti med [0, 1). Ker je proizvodnja linearna v *Z*, je to dosegljivo le, kadar *Z* raste po isti stopnji kot potrošnja, pri tem pa je potrošnja proporcionalna zalogi kapitala *Z*.

2.4.2 Stohastični modeli gospodarske rasti

V stohastičnih modelih gospodarske rasti so vplivi šokov vključeni, kar pomeni, da v modelih nastopa negotovost. Čeprav sta model rasti z neodvisnimi šoki prva podala Brock in Mirman (1972),[51] prihaja zelo intuitiven stohastični model iz proizvodnje kmetijskih proizvodov. V t.i. modelu zalog predstavlja vreme stohastično komponento, ki vpliva tako na odločitve kmetovalcev glede oblikovanja zalog, kot tudi na njihove odločitev glede investiranja v kapitalne dobrine, ki bodo uporabljene pri žetvi (Danthine 1977; Scheinkman in Schechtman 1983). Donaldson in Mehra (1983) sta razširila stohastični model Brocka in Mirmana (1972), v katerem sta analizirala vplive koreliranih proizvodnih šokov na optimalno varčevanje in potrošnjo posameznikov. Lucas in Prescott (1971) sta avtorja modela investiranja v razmerah negotovosti, ko v gospodarstvu predpostavita stohastično povpraševanje, Kydland in Prescott (1982) pa v modele gospodarske rasti vključita realne šoke. Lucas (1972) se omeji od predpostavke, da je šoke možno v celoti zaznati in predstavi t.i. model otočkov (*island model*), kjer z uporabo OLG modela v analizo rasti vključi tako realne, kot tudi monetarne šoke.

Model realnih poslovnih ciklov (Kydland in Prescott 1982)

Kydland in Prescott (1982) razvijeta ravnovesni model rasti, kjer pri akumulaciji kapitala izpostavita investicijske časovne odloge, s čimer razložita ciklično nihanje gospodarstva. V

[51] Kasneje sta avtorja negotovost vključila tudi v Ramseyev deterministični model rasti (Brock in Mirman 1973).

modelu podjetja maksimirajo svoj realni dobiček $C_t + q_t I_t - w_t L_t - r_t K_t$, pri tem pa se srečujejo z omejitvijo, ki jo predstavlja proizvodna funkcija $f(K_t, L_t)$. V enačbi spremenljivka C_t prikazuje potrošnjo prebivalstva v času t, q_t ceno investicijskih dobrin v času t, w_t najemno ceno dela v času t in r_t najemno ceno kapitala v času t. Posamezniki maksimirajo funkcijo koristnosti $u(c_t, \alpha(L)I_t) = \frac{\left[c_t^{1/3}(\alpha(L)I_t)^{2/3}\right]^{\gamma}}{\gamma}$, kjer je $\gamma < 1$ in $\gamma \neq 0$, I_t prikazuje čas posameznikov, ki ga ti ne namenijo delu, αL pa časovni operator.[52] Pri tem α prikazuje vse pretekle učinke, ki vplivajo na oblikovanje današnjih in prihodnjih preferenc posameznikov. Po definiciji je vsota vseh teh učinkov enaka ena. Od tod izhaja zapis Bellmanove enačbe

$$V_{j+1}(x_t, z_t) = \max_{d_t}\left(U(x_t, z_t, d_t) + \beta V_j(x_{t+1}, z_{t+1})\right),$$

pri omejitvah:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + s_{1t}, \\
s_{j,t+1} &= s_{j+1,t}, \qquad\qquad j = (1,\ldots,J-1) \\
x_{t+1} &= Ax_t, \\
a_{t+1} &= (1-\eta)a_t + n_t
\end{aligned}$$

Enačbe omejitev prikazujejo zakon gibanja omenjenih spremenljivk. V modelu je izbor spremenljivk n_t, s_J poljuben. Trajni in začasni šoki so vsebovani v spremenljivki x_t, medtem ko so spremenljivke, ki vplivajo na odločitveno funkcijo posameznikov vsebovane v spremenljivki d_t. Spremenljivka $z_t = (k_t, y_t, a_t, s_{1t}, \ldots, s_{J-1,t})$ vsebuje tiste opazovane spremenljivke, ki oblikujejo funkcijo vrednosti in niso vsebovane v spremenljivki x_t. Vrednost determinističnega problema v izhodiščnem stanju (x, z) prikazuje $v(x, z)$. Zakon gibanja kapitala prikazuje spremenljivka k_{t+1}. V gospodarstvu investicije potrebujejo nekaj časa, da postanejo produktivni kapital. V kolikor je za konstrukcijo kapitalnih dobrin potrebno le eno časovno obdobje, je zakon gibanja kapitala podan kot $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_t$, kjer s_t prikazuje investicije v izgradnjo kapitala v času t. V splošnem odločitveno spremenljivko glede zaloge kapitala v času t prikazuje s_J. Omejitev za spremenljivko j izhaja iz časa, ki je potreben, da se investicija zaključi ter se vključi v proizvodni proces. Spremenljivka a_t združuje tiste učinke predhodnih odločitev posameznika za nedelo, ki vplivajo na trenutne in prihodnje preference posameznika o tem koliko časa bo delal in koliko časa bo posvetil nedelu. Koeficient η v enačbi prikazuje stopnjo zamenljivosti nedela, medtem ko $n_t = (1 - I_t)$ prikazuje čas posameznika, ki ga ta ne nameni gospodinjskim aktivnostim.

[52] Christiano (1990) je potrdil ustreznost uporabe kvadratne-linearne metode v primerih, kot sta ga uporabila Kydland in Prescott.

V ekonomiji nastopa $J-1$ različnih kapitalnih oblik, ki združujejo tiste predhodne učinke, ki vplivajo na odločitve glede trenutnih in prihodnjih proizvodnih zmožnosti v gospodarstvu. V modelu se pri odločanju o novih investicijah v času t_0 posamezniki odločajo na podlagi stanja zalog v obdobju t_1.

Dinamični model rešita linearni funkciji $s_{Jt} = s(x_t, z_t)$ in $n_t = (x_t, z_t)$. V ekonomiji se v vsakem časovnem obdobju t na podlagi stanj v predhodnih obdobjih in informacijske matrike posameznikov oblikuje pogojno pričakovanje o stanju ekonomije, hkrati pa se oblikujejo tudi pričakovanja o tehnoloških šokih, ki zaključujejo ravnovesni sistem, ki vpliva na rast gospodarstva. Pri tem gre za markovski proces.

Kritika na uporabo kvadratno-linearnega pristopa k reševanju dinamičnega modela rasti, ki sta ga aplicirala Kydland in Prescott, se nanaša na težavnost izračunavanja približkov višjega reda, kajti rešitev člena prvega reda zahteva numerično rešitev kvadratne matrične enačbe (Judd in Jin 2002, Marcet 1994).

Model učenja skozi delo v razmerah negotovosti

De Hek (1999) preoblikuje Romerjev deterministični model učenja skozi delo (Romer 1986) na način, da v proces učenja skozi delo uvede *i.i.d.* porazdeljeno negotovost. Pri tem uporabi Romerjevi predpostavki, da povečanje kapitala v podjetjih privede do povečanja znanja (učinek učenja skozi delo), vso znanje v ekonomij pa ima lastnost javne dobrine.

V gospodarstvu nastopa neskončno veliko identičnih gospodinjstev, ki imajo aditivno separabilne preference. Pri dani obliki proizvodne funkcije in diskontnem faktorju β posamezniki izbirajo raven potrošnje, da maksimirajo problem pričakovane koristnosti $\max\limits_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t EU(c_t)$, pri tem pa ne vedo z gotovostjo, kakšen bo učinek učenja skozi delo.

$$y_t = k_t + c_t$$
$$y_{t+1} = \eta k_t^{\alpha} (\gamma_t K_t)^{1-\alpha}$$
$$c_t \geq 0; k_t \geq 0$$

in dani vrednosti y_0.

Za posamezno podjetje i je proizvodna funkcija podana kot $y_i = \eta k_i^{\alpha} (\gamma K)^{1-\alpha}$, kjer y_i predstavlja proizvodnjo na prebivalca, γ tehnološko spremenljivko, k_i pa kapitalno opremljenost dela. Ker model predpostavlja konstantno število prebivalstva L_i in K, se vsako podjetje srečuje s padajočimi donosi obsega, medtem ko so na donosi obsega na agregatni ravni konstantni. Avtor predpostavi popolno amortizacijo kapitala v vsakem obdobju, kar pomeni, da posamezniki z nepotrošeno proizvodnjo v vsakem obdobju neposredno določajo zalogo kapitala v gospodarstvu. Preference posameznikov so predstavljene kot CRRA. Avtor pokaže, da je enovita maksimalna vrednost problema podana pri $k_t = \pi(y_t)$ in $c_t = y_t - \pi(y_t)$. Od tod izpelje Eulerjevo enačbo za rešitev problema

$$\left[\eta k_{t-1}^{\alpha}\left(\gamma_{t-1}K_{t-1}\right)^{1-\alpha} - k_t\right]^{-\alpha} = E\left\{\left[\eta k_t^{\alpha}\left(\gamma_t K_t\right)^{1-\alpha} - k_{t+1}\right]^{-\alpha}\beta\alpha\eta k_t^{\alpha-1}\left(\gamma_t K_t\right)^{1-\alpha}\right\},$$

v katero vstavi ravnovesno stanje $K_t = Lk_t$, od koder izhaja, da je maksimalna vrednost enačbe, $k_t = \pi(y_t)$, linearna v proizvodnji. Velja namreč $\pi(y_t) = \left\{\beta\alpha\eta^{1-\alpha}E\left[\left(\gamma_t L\right)^{(1-\theta)(1-\alpha)}\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}} y_t$. Iz limitnega pogoja $\lim_{t\to\infty} E\beta^t U'(c_t)k_t = 0$ izhaja, da je za optimalno vrednost prejšnje enačbe potreben pogoj $\frac{1}{\beta} > \frac{E\left(y_{t+1}^{1-\theta}\right)}{\left(y_t^{1-\theta}\right)}$.[53] V modelu je zaradi konstantnih donosov obsega kapitala na agregatni ravni in dejstva, da so investicije linearne proizvodnji, stopnja gospodarske rasti v času t neodvisna od stopnje rasti v predhodnem obdobju t-1 in je podana kot $\frac{y_{t+1}}{y_t} = \left\{\beta\alpha\eta E\left[\gamma_t L\right]^{(1-\theta)(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\left(\gamma_t L\right)^{1-\alpha}$. Ker stopnja rasti v modelu ni odvisna od predhodnih stopenj rasti, jo je možno posplošiti na vsa obdobja t.

Z modelom de Hek pokaže, da imajo preference posameznikov odločilen vpliv na učinek tehnoloških šokov na gospodarsko rast. Kadar imajo posamezniki v času padajočo (naraščajočo) koristnost, vsako povečanje negotovosti tehnološke komponente γ privede do povečanja (zmanjšanja) potrošnje in posledično do zmanjšanja (povečanja) investiranja, kar mnogo prej pokažeta že Levhari in Srinivasan (1969). To posledično pomeni, da pri padajoči (naraščajoči) koristnosti posameznikov večja negotovost vodi v manjšo (večjo) pričakovano gospodarsko rast. Učinek negotovosti na stopnje gospodarske rasti je posledica tega, da model predpostavlja, da sta ključna dejavnika produktivnosti γ in gospodarske rasti investicije in učinek učenja skozi delo. Pri tem je slednji odvisen od ravni investiranja v gospodarstvu (Romer 1987).

Poleg omenjenih avtorjev tudi Hamilton (1989) in Ramey in Ramey (1995) potrdijo negativno povezavo med negotovostjo tehnoloških šokov in gospodarsko rastjo. Hamilton pokaže, da je vpliv tehnoloških šokov iz kvartalnega AR(4) modela večji v primeru, ko se je v predhodnem obdobju gospodarstvo nahajalo v recesiji. Medtem Ramey in Ramey na vzorcu dvaindevetdesetih držav in držav OECD pokažeta, da države z večjo volatilnostjo dosegajo nižje stopnje gospodarske rasti. Vzrok za negativne učinke so predvsem negotovost glede gibanja inovacij, ki spodbujajo gospodarsko rast. Torej negotovost tehničnega napredka.

[53] V modelu θ prikazuje koeficient časovne preference posameznikov. Če je $0 < \theta < 1$, porast volatilnosti γ zniža raven investicij in poviša raven potrošnje. Če je $\theta = 1$, porast volatilnosti γ ne spreminja ravni investicij in potrošnje. Če pa velja $\theta > 1$, porast volatilnosti γ poviša raven investicij in zniža raven potrošnje (de Hek 1999).

2.4.3 Model tehničnega napredka

Model

Pri modelu gospodarske rasti izhajamo iz Romerjevega modela tehničnega napredka (1990), ki gospodarstvo razdeli na tri sektorje: *sektor kapitalnih dobrin*, kjer se proizvajajo kapitalne dobrine za proizvodnjo končnih dobrin, *sektor končnih dobrin*, kjer se z uporabo kapitalnih dobrin in delom človeškega kapitala proizvaja končne dobrine in *raziskovalni sektor*, kjer človeški kapital proizvaja novo znanje, ki se kaže v obliki patentov. V modelu ima na gospodarsko rast ključno vlogo inovativna sposobnost gospodarstva, ki jo določa agregatna raven človeškega kapitala. Za stopnje gospodarske rasti je pomembna količina človeškega kapitala, ki je zaposlena v raziskovalnem sektorju in njegova produktivnost.

Gospodarstvo sestavlja mnogo identičnih, neskončno živečih gospodinjstev, ki imajo v vsakem časovnem obdobju identične preference glede potrošnje, in maksimirajo svojo koristnost. Če predpostavimo, da so preference gospodinjstev aditivno separabilne, so podane v obliki $u(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$. V modelu posamezniki ne vrednotijo svojega prostega časa, hkrati predpostavimo, da je njihovo število konstantno. Funkcijo maksimiranja njihove koristnosti zapišemo v zveznem času kot

$$max \int_0^{\infty} \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt \qquad (2.15).$$

V funkciji je β diskontni faktor, ki meri stopnjo časovnih preferenc posameznikov in je določen na intervalu (0, 1). Funkcija $U(c_t)$ je strogo konkavna, strogo naraščajoča in zvezno odvedljiva, za njo pa veljajo Inadovi pogoji. Potrošnja posameznikov mora biti končna, kar zahteva, da γ teče na odprtem intervalu $(0, \infty)$. V kolikor bi bila $\gamma = 0$, bi posamezniki vse svoje premoženje takoj potrošili in ne bi nič privarčevali. Drugo skrajno točko dobimo takrat, ko bi se γ oddaljevala v neskončnost. V tem primeru posamezniki ne trošijo nič in svojo celotno potrošnjo hranijo na neskončni datum v prihodnosti.

V gospodarstvu je proizvodni proces opredeljen kot funkcija dela *L*, kapitala *K*, človeškega kapitala *H*, ki predstavlja rivalsko komponento znanja, in tehničnega napredka, ki ga predstavlja zaloga patentov *A* (nerivalska komponenta znanja). Kapital merimo v enotah potrošnih dobrin, delo je enako številu zaposlenih, enota za človeški kapital prikazujejo dopolnjena leta izobraževanja, znanje pa merimo s številom patentov. Koncept merjenja človeškega kapitala preko let izobraževanja je omejena različica modela človeškega kapitala, ki ga posamezniki pridobivajo tudi preko neformalnega izobraževanja (Lucas 1988; Becker, Murphy in Tamura 1990) in preko procesa učenja skozi delo (Romer 1986). V modelu je količina človeškega kapitala konstantna, v gospodarstvu pa se spreminjata zaloga znanja in kapitala. Kljub predpostavki, da je zaloga človeškega kapitala konstantna, lahko količina znanja v gospodarstvu raste brez omejitve, na agregatni ravni pa se povečuje skladno z enačbo

$$\dot{A}_{t+1} = \xi H_{A,t} A_t \qquad (2.16),$$

kjer ξ prikazuje produktivnost človeškega kapitala.[54] V enačbi predstavlja $H_{A,t}$ količino človeškega kapitala, ki je v času t zaposlen v inovacijskem sektorju pri proizvodnji novega znanja. Pri tem velja omejitev, da je celotna količina človeškega kapitala v času t zaposlena bodisi v inovacijskem sektorju H_A, bodisi v sektorju končnih dobrin H_Y in velja $H_t = H_{A,t} + H_{Y,t}$. Skladno s predpostavko o konstantni količini človeškega kapitala in Juddove predpostavke, da je na področju patentne politike družbeno ravnovesno stanje doseženo takrat, kadar patenti živijo neskončno dolgo oziroma, da patentna zaščita ni omejena (Judd 1985). Juddova predpostavka omogoča monopolistično konkurenco na trgu vmesnih dobrin, medtem ko na drugih trgih velja popolna konkurenca. Vstop v sektor raziskav in razvoja je prost, pri tem pa se vsi trgi čistijo. V modelu Romer izpostavi nerivalsko komponento patentov, ki ga povzroča prost dostop do njih. Ker v gospodarstvu pri proizvodnji novega znanja patenti nastopajo skupaj s človeškim kapitalom, iz modela izhaja, da dosegajo gospodarstva, ki imajo večjo založenost človeškega kapitala, višji potencial v procesu rasti in nasprotno za gospodarstva z nizko založenostjo s človeškim kapitalom. Analogno veljata isti trditvi tudi za založenost gospodarstev s patenti (znanjem).

V gospodarstvu je vloga patentov (znanja) dvoplastna. V kombinaciji s človeškim kapitalom, ki je zaposlen v inovacijskem sektorju, vplivajo na rast novega znanja (patentov), hkrati pa njegovemu lastniku dajejo monopolno pravico pri njegovi uporabi za proizvodnjo vmesnih kapitalnih proizvodov, ki jih sektor končnih dobrin uporablja za končno proizvodnjo. Na trgu patentov se oblikuje cena P_A, na trgu dela pa je cena človeškega kapitala enaka w_A. Ker predpostavljamo, da ima človeški kapital prost dostop do znanja, podamo njegovo najemno ceno kot

$$w_A = P_A \xi A \qquad (2.17).$$

Iz enačbe 2.17 je razvidna povezava med najemno ceno človeškega kapitala in ceno patentov. Za podjetja iz sektorja končnih dobrin je cena patentov P_A dana, kupci patentov pa si zagotovijo monopolno pravico do njegove uporabe. Pri tem maksimirajo svoj dobiček. Cena patentov je enaka najemni ceni kapitala r. Kadar je v proizvodnji končnih dobrin zaposlenega H_Y enot človeškega kapitala, L dela in x_i enot kapitalnih dobrin, podjetja maksimirajo sledeči problem

[54] Generalizirano obliko agregatne akumulacije znanja kot $\dot{A}_t = \xi H_{A,t}^{\lambda} A_t^{\phi}$ poda Jones (1995). V primeru Romerja sta indeksa λ in ϕ enaka 1.

$$\max_{x} \int_{x=0}^{\infty} \left(H_Y^{\alpha} L^{\beta} x_i^{1-\alpha-\beta} - p_i x_i \right) di \qquad (2.18).$$

Z rešitvijo integrala pridemo do inverzne funkcije povpraševanja po kapitalni dobrini *i*, ki je za posamezna podjetja, ki proizvajajo vmesne kapitalne dobrine, eksogeno dana z enačbo

$$p_i = (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x_i^{1-\alpha-\beta} \qquad (2.19).$$

Na trgu kapitalnih dobrin podjetja med seboj tekmujejo po principu monopolistične konkurence (Dixit in Stiglitz 1977). Pri danem povpraševanju s strani proizvajalcev končnih dobrin in pri danih vrednostih spremenljivk H_Y, L in r se proizvajalci kapitalnih dobrin srečujejo še s fiksnimi stroški investicij kapitalnih dobrin, ki nastanejo pred začetkom proizvodnje. Na tej podlagi rešujejo podjetja svoj problem maksimiranja dobička, ki je enak

$$\begin{aligned} \pi &= \max_{x} p(x)x - r\eta x \\ &= \max_{x} (1-\alpha-\beta) H_Y^{\alpha} L^{\beta} x^{1-\alpha-\beta} - r\eta x \end{aligned} \qquad (2.20).$$

Iz enačbe je razvidno, da proizvajalci vmesnih dobrin prejemajo dohodke z oddajanjem kapitalnih dobrin, pri tem pa se srečujejo s stroški nakupa patentov r in s stroški proizvodnje kapitalnih dobrin, na katere ima učinkovitost vpliv preko spremenljivke η. η prikazuje število dobrin, ki so potrebne za proizvodnjo enote kapitalne dobrine x. V modelu Romer predpostavlja, da je začetni strošek nakupa patenta edini sunk cost podjetja vmesnih kapitalnih dobrin. Predpostavi, da je kapital brez dodatnih stroškov možno spremeniti v osnovni kapital, v primeru, ko želi podjetje trgu ponuditi manjšo količino kapitalnih dobrin. Povpraševanje po kapitalnih dobrinah je stacionarno.

Za izkoriščanje ekonomij obsega proizvajalci vmesnih dobrin le-te dajejo v zakup velikemu številu proizvajalcev končnih dobrin. Pri tem so omejeni v tem, da ne morejo popolnoma nadzirati uporabe vmesnih dobrin, danih v najem, zaradi česar maksimirajo svoj dohodek tako, da postavijo monopolno ceno. Monopolna cena je sestavljena iz dodatka na mejne stroške, določa pa ga elastičnost povpraševanja, $\overline{p} = r\eta(1-\alpha-\beta)$. Pri tem je monopolni dobiček podan kot $(\alpha+\beta)\overline{px}$, kjer je $\overline{x}$ količina vmesnih dobrin pri ceni $\overline{p}$. Proizvajalci vmesnih dobrin se o proizvodnji novih odločajo na podlagi neto sedanje vrednosti prihodkov, ki jim jih nudi nova dobrina, in stroškov njene proizvodnje. Vmesne dobrine pa nato prodajajo proizvajalcem v sektorju končnih dobrin. Ker je vstop v sektor končnih dobrin prost, gre za princip ničnega donosa (*zero profit*): $\pi_t = r_t P_A$ (Grossman in Helpman 1989). Model temelji na neskončno živečih patentih (Judd 1985), pri čemer je vrednost patenta konstantna.

Na agregatni ravni je celotni kapital, s katerim razpolaga gospodarstvo, enak vsoti različnih kapitalnih dobrin, ki vstopajo v proizvodni proces $K = \eta\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \eta\sum_{i=1}^{A} x_i$. Ker predpostavimo model horizontalnih inovacij, so različne kapitalne oblike med seboj popolni substituti. Torej imamo v gospodarstvu *i* različnih vmesnih dobrin. Vse so patentirane in prikazujejo celotno zalogo znanja A_t v času t. Za razliko od Romerjevega modela Segerstrom, Anant in Dinopoulus (1990), Aghion in Howitt (1992) ter Grossman in Helpman (1991) uporabijo model, kjer v gospodarstvu prihaja do vertikalnih inovacij in je A_t sinonim za različne kakovostne spremembe enakih skupin dobrin v času t in kjer za vsako dobrino obstaja kakovostna lestvica z njenimi različicami. Sintezo med modeli horizontalnih in vertikalnih inovacij pa naredi Howitt (1999). Zaradi poenostavitve modela uporabimo predpostavimo, da je za vsako kapitalno dobrino potrebna ista količina potrošnih dobrin. Začetna zaloga kapitala v obdobju t_0 je enaka K_0. Na agregatni ravni je sprememba kapitala, ki poveča agregatno zalogo kapitala v sledečem obdobju, enaka nepotrošeni proizvodnji:

$$\dot{K}_t = Y_t - C_t \qquad (2.21).$$

Pri tem predpostavimo, da v gospodarstvu nič proizvodnje ni izgubljene in je celotna namenjena ali za potrošnjo, ali investicije. Če zalogo kapitala izrazimo kot funkcijo tehničnega napredka A, ki predstavlja količino vmesnih dobrin, η, ki prikazuje potrebno količino kapitala za izgradnjo enote vmesne dobrine, v enačbo pa tudi vključimo količino vmesnih dobrin $\bar{x}$, proizvodno funkcijo zapišemo kot

$$\begin{aligned} Y(H_A, L, x) &= H_Y^{\alpha} L^{\beta} \int_0^{\infty} x_i^{1-\alpha-\beta} di \\ &= H_Y^{\alpha} L^{\beta} A \bar{x}^{1-\alpha-\beta} \\ &= H_Y^{\alpha} L^{\beta} A \left(\frac{K}{\eta A} \right)^{1-\alpha-\beta} \\ &= (H_Y A)^{\alpha} (LA)^{\beta} K^{1-\alpha-\beta} \eta^{\alpha+\beta-1} \end{aligned} \qquad (2.22).$$

Podobno kot v neoklasičnih modelih gospodarske rasti tudi tukaj predpostavljamo padajoče donose obsega faktorja kapitala. V kolikor v model vključimo še predpostavko o konstantni količini tehničnega napredka *A*, ki je prav tako značilna za neoklasične modele rasti, je ravnovesna rast kapitala *K* podana v točki, kjer se diskontni faktor kapitala izenači z najemno ceno. Prav tako se model obnaša kot neoklasični v primerih eksogeno določene ravni tehničnega napredka *A*, ko je stopnja rasti v gospodarstvu enaka stopnji rasti *A*.

Vendar pa v modelu predvidevamo, da je zaradi eksternih učinkov znanja, količina znanja *A* naraščajoča funkcija v času (2.16), odvisna od trenutne zaloge znanja in od količine človeškega kapitala, angažiranega v sektorju raziskav in razvoja ter njegove produktivnosti. V modelu je ravnovesje podano v točki, kjer: (i) posamezni ekonomski agenti pri dani obrestni meri izberejo, koliko potrošiti in koliko varčevati, (ii) se posamezni ekonomski agentje, ki posedujejo človeški kapital, pri dani zalogi znanja A, ceni patentov P_A in plači v predelovalnem sektorju w_A, odločijo, ali delati v R&R sektorju ali v predelovalnem sektorju, (iii) se proizvajalci v sektorju končnih dobrin pri danih cenah odločijo, koliko proizvodnih dejavnikov dela L, človeškega kapitala H_Y in vmesnih dobrin x_i zaposliti, (iv) podjetje, ki poseduje patente in z njim proizvaja vmesne dobrine, maksimira dobiček, pri čemer jemlje obrestne mere in padajočo krivuljo povpraševanja kot dane, in določa cene vmesnih dobrin, (v) za podjetja, ki se odločajo za vstop v panogo za proizvodnjo vmesnih dobrin, so cene patentov dane in (vi) je ponudba posameznih dobrin enaka povpraševanju.

Ravnovesje v modelu

Romer reši model tako, da najprej stopnje rasti proizvodnje poveže z donosom na investicije, s čimer v model vključi obrestne mere. V stanju ravnovesne rasti ostaja razmerje kapitala K do tehničnega napredka (patentov) A konstantno, kar pomeni, da je tudi $\bar{x}$ konstanten. Ker v modelu dopustimo akumulacijo kapitala K in patentov A, raste plača človeškega kapitala v sektorju končnih dobrin skladno z enačbo $\dot{A} = \xi A$. Prav tako skladno z A raste produktivnost človeškega kapitala, angažiranega v sektorju raziskav in razvoja. Pri tem raste produktivnost človeškega kapitala v obeh sektorjih, kjer je zaposlen, po istih stopnjah, kar pomeni, da v primeru, da cene patentov P_A ostajajo nespremenjene, ostaja tudi razmerje H_Y in H_A konstantno.

Iz enačbe maksimiranja dobička (2.20) izhaja, da je cena patenta enaka diskontirani vrednosti dobička, od koder lahko zapišemo

$$P_A = \frac{1}{r}\pi = \frac{\alpha+\beta}{r}\overline{px} = \frac{\alpha+\beta}{r}(1-\alpha-\beta)H_Y^{\alpha}L^{\beta}\bar{x}^{1-\alpha-\beta} \qquad (2.23).$$

Ker velja, da je med sektorjema, kjer sodeluje človeški kapital, možno prosto prehajanje, ob tem pa predpostavljamo, da produktivnost človeškega kapitala raste v obeh sektorjih po isti stopnji, je v ravnovesju plača človeškega kapitala v obeh sektorjih enaka in znaša $P_A \xi A$. Od tod zapišemo enakost:

$$w_H = P_A \xi A = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^{\beta} \int_0^{\infty} \bar{x}^{1-\alpha-\beta} di = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^{\beta} A \bar{x}^{1-\alpha-\beta} \qquad (2.24).$$

Če v 2.24 vstavimo izpeljavo za P_A iz 2.23, dobimo

$$\frac{\alpha+\beta}{r}(1-\alpha-\beta)H_Y^{\alpha}L^{\beta}\bar{x}^{1-\alpha-\beta} \cdot \xi A = \alpha H_Y^{\alpha-1} L^{\beta} A \bar{x}^{1-\alpha-\beta} \qquad (2.25),$$

od koder za H_Y izpeljemo

$$H_Y = \frac{1}{\xi}\frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}r \tag{2.26}$$

Ker je v gospodarstvu pri konstantni obrestni meri r tudi $\bar{x}$ konstanten, izhaja iz (2.22), da tudi proizvodnja raste po isti stopnji kot A, v kolikor so L, H_Y in $\bar{x}$ konstantni. V tem primeru je stopnja rasti kapitala K enaka stopnji rasti tehničnega napredka A, kajti celoten kapital je enak zmnožku $A\bar{x}\eta$. Če z g označimo stopnjo rasti spremenljivk A, K in L in je delež kapitala v proizvodnji $\frac{K}{Y}$ konstanten, mora biti konstantno tudi razmerje $\frac{C}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{Y} = 1 - \frac{\dot{K}}{K}\frac{K}{Y}$. Zaradi tega so v gospodarstvu vsa razmerja $\frac{\dot{C}}{C}$, $\frac{\dot{K}}{K}$, $\frac{\dot{Y}}{Y}$ in $\frac{\dot{A}}{A}$ konstantna. Ker pa količina patentov raste po stopnji $g = \xi H_A$, morajo za zagotovitev konstantnih razmerij po isti stopnji rasti tudi vse ostale spremenljivke. Če upoštevamo, da je človeški kapital razdeljen med obema sektorjema, podamo količino človeškega kapitala, ki je zaposlen v sektorju končnih dobrin, kot $H_Y = H - H_A$. Tako lahko podamo povezavo med stopnjo gospodarske rasti g in obrestno mero r kot

$$g = \xi H_A = \xi H - \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}r = \xi H - \Lambda r \tag{2.27}$$

kjer je $\Lambda = \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$ konstanta, ki je odvisna od tehnoloških spremenljivk α in β.

Romer zapre model tako, da v razmerje med stopnjo gospodarske rasti in obrestno mero vstavi še preference

$$g = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{r-\rho}{\gamma} \tag{2.28}$$

od koder sledi, da je stopnja gospodarske rasti podana kot

$$g = \frac{\xi H - \Lambda\rho}{\gamma\Lambda + 1} \tag{2.29}$$

Izpeljava steady state je podana v prilogi. Za obstoj rešitve mora biti stopnja rasti tekoče koristnosti prebivalstva manjša od diskontnega faktorja ρ. Veljati mora, da je za $\gamma \in [0,1)$ $\frac{(1-\gamma)\xi H}{\Lambda+1} < \rho$. V ravnovesju podjetja maksimirajo dobiček, posamezniki pa svojo koristnost.

3.1 Računalniška natančnost

Pri računalniškem programiranju nismo omejeni le z napako aproksimacije, ki je odvisna od uporabljene numerične metode, ampak tudi z računalniško napako, ki je posledica računalniškega shranjevanja števil v njegovem internem spominu (npr. Judd (1998) in Press in drugi (2002)). Napak, ki jih procesira računalniški program, se ponavadi niti ne zavedamo, saj program programira točno po uporabljeni proceduri in na koncu izvrže »pričakovani« rezultat.

Popolna natančnost shranjevanja števil je zagotovljena le pri uporabi celih števil. Pa še v tem primeru ne vseh. Cela števila so lahko poljubno velika, medtem ko je omejenost računalniškega pomnilnika odvisna od strukture računalnika in od uporabljenega prevajalnika. Pri programiranju v programskem jeziku C s tipom *int* s popolno natančnostjo shranimo cela števila med -32768 in 32767, medtem ko za večja cela števila uporabljamo tip *long*, ki lahko cela števila z natančnostjo prikaže na intervalu -2147483648 in 2147483647. Nekateri sodobnejši prevajalniki že za tip *int* omogočajo to zalogo vrednosti.

Večji problem nastane pri uporabi realnih števil, kjer uporabljamo tipa *double* in *float*. Pri tem smo omejeni tako z velikostjo prikazanega števila, kot tudi z njegovo natančnostjo. Maksimalna računalniška natančnost ε_M je opredeljena kot tista vrednost, ki jo pri številu tipa *float* še lahko dodamo številu 1.0 in jo računalnik še lahko zazna. Press in drugi (2002, 28) ocenijo, da ta za tip *float* znaša $3 \cdot 10^{-8}$. Torej je računalniška natančnost dokaj velika, ampak pomembnost napake pride do izraza pri matematičnih operacijah, ko se velikost napake akumulira. Gre za napako zaokroževanja (*roundoff error*). Meyer (2000) na primeru pokaže, kako prenizko določena računalniška natančnost proizvede povsem napačne rezultate. Naslednja zelo pogosta napaka pri uporabi numerične ekonomije je napaka trunkacije (*truncation error*). Do nje prihaja zaradi tega, ker so nekatere funkcije opredeljene v limiti, zaradi česar jih je treba oceniti. Ker napaka predstavlja razliko med natančno vrednostjo problema in njenim približkom, jo je možno zmanjšati s povečanim številom simulacij oziroma z njenim umetnim zmanjšanjem preko predpisane napake. Slabost zmanjšanja napake trunkacije je v tem, da hitrost algoritma tako bistveno upočasnimo, pri tem pa kakovosti rezultata morda niti ne izboljšamo bistveno.

3.2 Zgodovina metod perturbacije

Začetki metod perturbacije so povezani z razreševanjem fizikalnih pojavov: aerodinamike, valovanja, astronomskih pojavov, pojavov iz kvantne fizike, kvantne elektrodinamike, meteorologije in mnogih drugih področij naravoslovnih ved. Pri reševanju teh problemov so se raziskovalci srečevali z zapletenostjo proučevanih teorij in nelinearnih ter stohastičnih funkcijskih oblik, ki zaradi tega z uporabo klasičnih metod reševanja v praksi niso bili rešljivi. Kljub temu je bilo treba najti ustrezne načine, ki bi reševali probleme nelinearnosti proučevanih modelov. Pri tem so se kot uporabne še posebej izkazale numerične in aproksimativne metode, ki izvirne probleme rešujejo na podlagi njihovih bližnjih pojavov, ki jih je možno identificirati in oceniti; Kevorkian in Cole (1981; 1996), Hinch (1995), Holmes (1995), Bensoussan (1988).

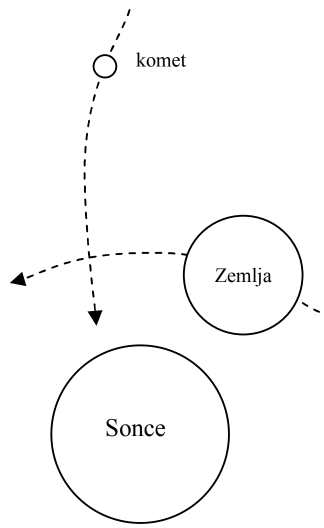
Z uveljavitvijo dinamične ekonomije se tudi v ekonomiji pojavlja veliko modelov, ki jih ni možno rešiti drugače kot numerično oziroma jih je možno analitično rešiti, ni pa poznana stabilnost rešitve v primerih oscilacij posameznih spremenljivk. V teh primerih so metode aproksimacij nujen analitični pripomoček pri njihovi razlagi. To še posebej velja v primerih stohastičnih dinamičnih modelov, kjer negotovost in strukturne spremembe v gospodarstvu, ki spreminjajo zakone gibanja proučevanih spremenljivk, na podlagi katerih posamezniki sprejemajo svoje odločitve, otežujejo reševanje ekonomskih modelov (upoštevati je treba *Lucasovo kritiko*) in Ramseyev koncept dinamike. V nasprotju z naravoslovnimi vedami je za numerično ekonomijo značilno, da se nahaja šele v svoji zgodnji razvojni fazi.

Slika 3.1: Saturnov obroč

Vir: NASA.

Analogijo za uporabo metod perturbacije ponazarja Saturnov obroč. Kakor je za planet značilen obroč, ki ga obkroža, tako tudi pri perturbacijah izhajamo iz osnovne rešitve, ki je poznana (npr. planet), nato pa z oddaljevanjem od nje gradimo nove rešitve, ki predstavljajo približke osnovni rešitvi (Saturnov obroč). Sicer ne na popolnoma enak način, kot ga prikazuje planet, saj se lahko nove rešitve nahajajo v vseh dimenzijah okrog osnovne rešitve in ne nujno le v eni dimenziji, kot v primeru planeta.

Slika 3.2: Vpliv približevanja kometa Zemlji na njeno gibanje okrog Sonca



V ekonomiji je zelo pogost način, da se oddaljujemo od osnovne funkcije ta, da ciljno spremenljivko zmotimo z nenadnim šokom in nato rešujemo nov problem. Pri občutljivosti portfeljev ne moremo z gotovostjo vedeti, kakšne bodo cene nafte, obrestne mere in podobne spremenljivke, ki sicer vplivajo na donosnost našega portfelja. Prav tako v primeru analize gospodarske rasti ne vemo z gotovostjo, ali bo gibanje spremenljivk točno takšno, kot ga predpostavi steady state. Na podlagi dobljenih novih rešitev lahko kasneje sklepamo, kako stabilen je osnovni sistem v odvisnosti od jakosti določenega šoka. Na podlagi rezultatov pa lahko postavimo relacije med pojavi, s čimer ovrednotimo določeno teorijo, ali preverimo posamezen model. Iz astronomije vzet primer, ki je podoben našemu, je približevanje kometa določenemu planetu, npr. Zemlji.

V primeru približevanja kometa predstavlja komet nenaden šok za gibanje Zemlje okrog Sonca. S perturbacijami tako ocenimo, ali in kako se bo s približevanjem kometa Zemlji njeno gibanje okrog Sonca spreminjalo. Vpliv kometa na gibanje Zemlje je odvisno od tega, kako blizu Zemlje se bo komet gibal, od njegove hitrosti in njegove mase. Če vzamemo, da je masa Zemlje konstantna, je učinek kometa odvisen od spremenljivk, ki oblikujejo njegovo gravitacijo, ki spreminja gravitacijo Zemlje in njeno gibanje okrog Sonca. Kakor v primeru Saturna, tudi v tem primeru približke o nepoznanih funkcijah pridobivamo z generiranjem informacij o neznani funkciji. V splošni obliki je podana kot $A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots$. V enačbi je A_0 znana rešitev problema, A_1, A_2,… pa so členi višjih redov, ki jih dobimo z različnimi iterativnimi postopki, ε pa predstavlja motnjo, perturbacijo. A_0 predstavlja osnovno maso Zemlje, ki jo členi višjih redov »popravljajo« za učinke približevanja kometa.

Pri analizi modela imamo lahko opravka s slabo pogojenim sistemom. Primer slabo pogojenega sistema prikazuje preprost sistem dveh enačb za dve neznanki (Meyer 2000, 33)

$\begin{matrix} 835x + 667y = 168 \\ 333x + 266y = 67 \end{matrix}$, ki ima stabilno in enolično rešitev $x = 1$ in $y = -1$. Slaba pogojenost sistema pride do izraza s perturbiranjem sistema tako, da v drugi vrstici 67 zmanjšamo na 66. Vidimo, da se rešitev sistema drastično spremeni že pri tako majhni perturbaciji. Novi rešitvi sta namreč: $x = -666$ in $y = 834$. Problem slabo pogojenih sistemov je v tem, da že majhna negotovost glede vrednosti posameznih koeficientov bistveno spremeni rešitev. To je še posebej treba upoštevati v primerih, ko vrednosti koeficientov, vhodnih podatkov v neko funkcijo, predstavljajo rezultat neke druge analize in kot taki že vsebujejo statistične oziroma računalniške napake.

3.3 Oblike metod perturbacij

Glede na značilnost opazovanega problema se priporoča uporaba različnih metod perturbacij. Pri tem je značilnost nekaterih metod, da v ekonomiji niso bile mnogo uporabljane, kar predvsem velja za napredne asimptotične metode bifurkacij in še posebej hibridne perturbacije. Med razlogi za takšno stanje je možno izpostaviti zahtevnost pri numeričnem razreševanju tako determinističnih, kot tudi stohastičnih ekonomskih modelov, kar povečuje tudi zahtevnost programiranja ustreznih računalniških algoritmov in problema prekletstva dimenzionalnosti. Glavne oblike metod perturbacij so:

- regularne perturbacije,
- bifurkacije in
- hibridne perturbacije

3.3.1 Regularne perturbacije

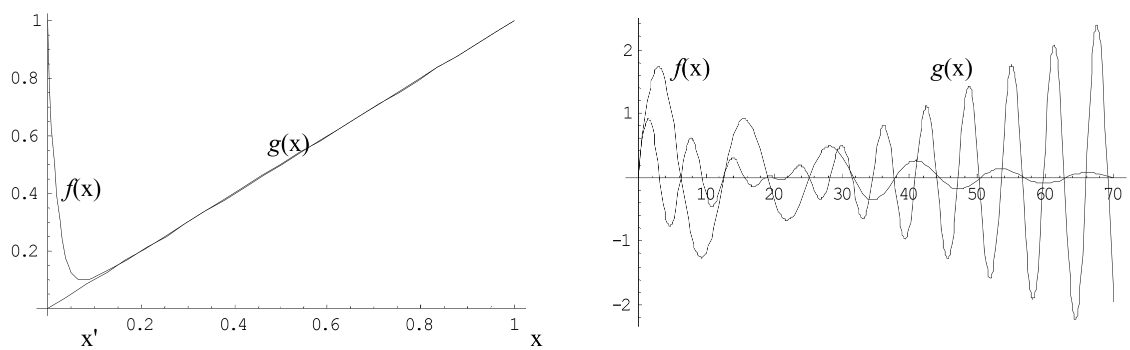
Regularne perturbacije sodijo med najpreprostejše perturbativne metode, ki so opredeljene v Banachovem prostoru funkcij. Za njih je značilno, da pri odmikih od steady state, za vrednosti $\varepsilon > 0$, matematični model, ki ga proučujemo, ostaja enak. Osnovni matematični pripomočki, ki se uporabljajo pri regularnih perturbacijah, so (Judd 1996; 1998): približek funkcije, Taylorjev in Padéjev približek in izrek o implicitnih funkcijah.

Opredelitev približka funkcije

Pri opredelitvi približka funkcije imamo na voljo številne metode, pri čemer moramo upoštevati, da za ujemanje osnovne funkcije z njenim približkom ni dovolj le ujemanje funkcij v določeni točki. Treba je zagotoviti, da se funkciji ujemata tudi v odvodih. V splošnem velja, da je »nova« funkcija tem boljši približek izvirni funkciji, v čim višjem odvodu se z njo ujema. Pri tem je treba upoštevati, da se z generiranjem odvodov višjih redov zahtevnost numerične rešitve problema povečuje. V numerični ekonomiji so največkrat uporabljani linearni približki, kjer se funkciji ujemata v prvih odvodih. V splošnem velja, da je g(x) približek reda n od f(x) v $x = x_0$, kadar je $\lim_{x \to x_0} \frac{\|g(x) - f(x)\|}{\|x - x_0\|^n} = 0$.[55] Funkcija *g(x)* je linearen približek funkcije *f(x)*, kadar se funkciji ujemata v prvem odvodu in velja $g'(x) = f'(x)$. V splošnem rečemo, da ko sta f(x) in g(x) C^n zvezno odvedljivi, pri čemer teče k na intervalu od (0, n), je *g(x)* n-ti približek funkcije *f(x)*, kar zapišemo $f^n(x_0) = g^n(x_0)$.[56]

Pri danih f(x) in g(x) je g(x) asimptotični približek f(x), ko gre x → x_0 in izračunamo limito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Pri tem je kakovost približka odvisna od vrednosti limite. V primeru, ko je vrednost limite ena, je približek funkcije identičen izhodiščni funkciji.

Slika 3.3: *Primerjava funkcije f(x) in njenega približka g(x)*



(a) (b)

Vir: Holmes (1995, 8 in 107).

Slika 3.3a prikazuje primerjavo izvirne funkcije f(x) in njenega asimptotičnega približka g(x), ki je ravna premica.[57] Iz slike je razvidno, da sta funkciji od točke x' dalje identični, vendar se zelo razlikujeta v okolici intervala $x_0 = 0$. Slika 3.3b pa prikazuje izvirno funkcijo f(x) in njen približek g(x) v primeru, ko se z naraščanjem vrednosti x njeni vrednosti razhajata.[58] V tem primeru je približek izvirne funkcije na intervalu $x \in (0, \infty)$ neučinkovit.[59]

[55] Ker se limita asimptotično približuje vrednosti nič, je od subjektivne presoje odvisno, kdaj je približek dovolj dober izvirni funkciji.

[56] Pomeni, da je prvih n odvodov obeh funkcij enakih.

[57] Izvirna funkcija je oblike $f(x) = x + e^{-x/\varepsilon}$, njen približek pa oblike $g(x) = x$. Slika je prikazana pri vrednosti ε = 0,01.

[58] Izvirna funkcija je oblike $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2/4}} e^{-\varepsilon x/2} sin\left(x\sqrt{1-\varepsilon^2/4}\right)$, pri uporabi navadne perturbacije pa je njen približek podan v obliki $g(x) = sin(x) - 0{,}5 \cdot \varepsilon \cdot x\, sin(x)$. Slika je prikazana pri vrednosti ε = 0,1. Do

Taylorjev približek

Taylorjev teorem predstavlja teoretično izhodišče pri uporabi skoraj vseh metod lokalnih približkov v okolici poljubne točke x_0 (Judd 1998, 196). Približek funkcije $f(x)$ v točki x_0 z uporabo Taylorjevega teorema temelji na odvajanju funkcije v točki x_0, pri čemer vrednost odvoda v točki uporabi pri oblikovanju polinomskega približka. Bistvo Taylorjevega teorema je v tem, da lahko z n-kratnim odvajanjem funkcije v poljubni točki x_0 dobimo polinomski približek vrednosti funkcije $f(x)$ v tej točki. Razvoj funkcije po Taylorjevi vrsti je mogoč ob predpostavki, da ima funkcija potrebne odvode.

Splošni zapis funkcije $f(x)$, ki se razvije po Taylorjevi vrsti, je podan kot $f(x) \doteq f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + O_{n+1}$, kjer je ostanek definiran kot $O_{n+1} = \frac{(x - x_0)^{n+1} f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$ in ξ predstavlja točko med x in x_0. V Taylorjevi vrsti izraža ostanek napako približka, ki je velikosti $|x - x_0|^{n+1}$ in je asimptotično manjši od katerega koli člena v Taylorjevi vrsti. Z vidika numerične napake pa napako trunkacije. Pri razvoju funkcije po Taylorjevi vrsti sta vrednosti izvirne funkcije in njenega približka identični le v točki, okrog katere razvijamo novo funkcijo, v okolici x_0.[60] Zaradi tega so ocenjene vrednosti dobri približki dejanskim vrednostim le v majhni okolici x_0. Funkcija je analitična, če je $f(x)$ enaka neskončnemu členu v Taylorjevi vrsti.

Kljub temu, da Taylorjeva vrsta ponuja eleganten pripomoček za ocenjevanje funkcijskih vrednosti, pa je njena slabost v tem, da ni uporabna v primerih, ko imamo prisotno singularnost. V tem primeru Taylorjeva vrsta v okolici točke x_0 ne more z večjo natančnostjo oceniti vrednosti funkcije $f(x)$ kot v točki singularnosti. Singularnost je še posebej prisotna v proizvodnih funkcijah in funkcijah koristnosti, ki večinoma zadovoljujejo Inadovim pogojem v posameznih točkah.[61]

---

vrednosti x = 10 sta si funkciji relativno blizu, z nadaljnjim naraščanjem x pa se njuni vrednosti bistveno razlikujeta.

[59] V tem primeru je razlog za neučinkovitost ta, da je drugi člen pri razvoju funkcije za vrednosti εx = 1 enako močan kot prvi. Zaradi tega prihaja do tega, da ko izvirna funkcija pada, prvi člen v njeni aproksimativni obliki raste. Medtem ko želi drugi člen v funkciji g(x) kompenzirati rast prvega člena, postane tudi sam enako velik kot prvi člen. Posledično se funkciji z naraščanjem x ne obnašata enako. Rešitev problema je podana v Holmes (1995, 107-110).

[60] V primeru racionalnih funkcij predstavlja Padéjev približek alternativno metodo Taylorjevemu. Njena uporaba je priporočljiva predvsem pri uporabi trigonometričnih, eksponentnih in drugih podobnih funkcijah (Judd in Guu 1997, 1029). V teh primerih je natančnost približka zagotovljena bistveno izven dosega konvergence serije (Press in drugi 2002, 202). V primeru trigonometričnih ali eksponentnih funkcij je nadomestek Taylorjevi vrsti Maclaurinova vrsta (Holmes 1995, 3). Podrobneje je opredeljena v Chiang (1985, 254-256) in Abramovitz in Stegun (1970).

[61] Inadove pogoje opredeljujejo sledeče zahteve: $f(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$ in $f'(1) = \infty$ (Inada 1963).

Padéjev približek

V primerih singularnosti predstavlja Padéjev približek alternativno metodo Taylorjevi vrsti. Sama aproksimacija uporablja enake informacije kot Taylorjeva, vendar za izračun približka funkcije *f(x)* uporabi racionalno funkcijo. Zaradi tega se za Padéjev približek v literaturi pojavlja tudi pojem racionalna aproksimacija (Judd 1996, 516). Padéjev približek (m, n) funkcije *f*(x) je v točki x_0 racionalna funkcija, podana kot $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kjer sta p(x) in q(x) polinoma stopnje največ *m* in *n*. Hkrati velja $0 = \frac{d^k}{dx^k}(p - fq)(x_0)$ za vrednosti k = 0, …, m + n. Padéjev približek rešuje problem singularnosti s poljubnim izborom stopnje polinomov *n* ali *m*.[62] Če je funkcija *f*(x) aproksimirana s $\frac{p(x)}{q(x)}$, potem je prvih n-odvodov funkcije $q(x)f(x) - p(x)$ enakih nič, kar povzroča linearne omejitve koeficientov *p* in *q* (Judd in Guu 1993, 82). Pri tem obstaja omejitev, ki se nanaša na stopnji *p* in *q*, ki ne smeta biti večji od *n*, kar pomeni, da obstaja n + 2 neznanih koeficientov *p* in *q*. N odvodov funkcije *f*(x) v točki x_0 in vrednost funkcije v točki x_0 povzročita n + 1 pogojev, izmed katerih je za nadaljnjo analizo relevanten le $\frac{p}{q}$. Zaradi tega lahko brez izgube splošnosti vodilni koeficient *q* enačimo z ena, s čimer je razmerje $\frac{p}{q}$ enovito določeno.[63] Generalizacijo razvoja različnih funkcij po Padéjevi vrsti je podal Phillips (1982), ki se v prispevku bolj posveti tudi približkom verjetnostne gostote funkcij, ki so še posebej uporabne v ekonometriji.

Teorem implicitnih funkcij

Kadar oblika izvorne funkcije ne more biti natančno specificirana in ne more biti eksplicitno rešena, uporabimo teorem implicitnih funkcij. Teorem daje pogoje, pod katerimi sistem nelinearnih enačb v neki okolici doseže lokalno enovito rešitev, ki v limiti sicer ni nujno edina. Z uporabo Taylorjevega teorema predstavlja splošni teorem implicitnih funkcij, definiran na R^n, pomembno orodje metod perturbacije za implicitno odvajanje *h* okrog točke x_0.

[62] Primerjava natančnosti približka z uporabo Taylorjeve vrste in Padéjevega približka je podana v Judd (1998, 198-199). V splošnem velja, da uporaba Padéjevega približka daje boljše globalne približke od globalnih približkov, pridobljenih z uporabo Taylorjeve vrste, saj pri uporabi Padéjevega približka z odmikanjem od izhodišča napaka raste počasneje (Judd in Guu 1997, 1029; Judd 1996, 517).

[63] Načeloma sta p in q enake stopnje oziroma je koeficient p eno stopnjo večji od q (Judd in Guu 1993, 82).

V splošnem zapišemo primer kot $H(x_0, y_0) = 0$, pri čemer je zahtevan pogoj, da $H_y(x_0, y_0)$ ni singularna.[64] Če je $H(x, y): R^n \times R^m \to R^m$ C^k zvezno odvedljiva in velja pogoj nesingularnosti, potem $H(x, h(x)) = 0$ implicitno definira funkcijo $h: R^n \to R^m$ za x v okolici x_0, da je $y_0 = h(x_0)$. Pri tem vsebuje implicitno določena funkcija h le en argument, medtem ko ima njena eksplicitna oblika H dva.[65] Kadar bi eksplicitno določena funkcija H vsebovala več elementov in bi veljalo $H(y, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, bi bila njena implicitno določena funkcija definirana kot $h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.[66] Če je H je C^k, potem je tudi h C^k, kar pomeni, da njene odvode lahko izračunamo z implicitnim odvajanjem enakosti $H(x, h(x)) = 0$. Tako dobimo $D_x H(x, h(x)) = H_x(x, h(x)) + H_y(x, h(x)) h_x(x)$. Pri tem je odvod funkcije podan kot $h_x(x_0) = -H_y^{-1}(x, h(x)) H_x(x, h(x))$. Če H_y ni singularna, poenostavimo odvod v $h_x^0 = -(H_y^0)^{-1} H_x^0$. Če prvi odvod ne daje zadovoljivih rezultatov, izrazimo člene višjih redov z nadaljnjim odvajanjem $D_{xx} H(x, h(x)) = H_{xx} + 2H_{xy} h_x + H_{yy} h_x h_x + H_y h_{xx}$. In v točki $x = x_0$ $h_{xx}^0 = -(H_y^0)^{-1} (H_{xx}^0 + 2H_{xy}^0 h_x^0 + H_{yy}^0 h_x^0 h_x^0)$. Izrek o implicitni funkciji ima širšo uporabnost tudi v drugih področjih, predvsem analitičnega proučevanja. Njegova nekoliko širša aplikacija je na voljo v Zeidler (1995; 1997).

Tenzorski zapis v večdimenzionalnem prostoru

Enodimenzionalni problemi predstavljajo osnovo tudi za reševanje problemov v več dimenzijah. V večdimenzionalnem prostoru, kadar imamo v modelih več različnih spremenljivk stanja, npr. več različnih vrst kapitala (fizični kapital in človeški kapital), heterogene agente ipd., zaradi večje preglednosti uporabimo posplošeno obliko izreka o implicitni funkciji, ki temelji na uporabi tenzorjev.[67] Ti predstavljajo posplošeno obliko matrik in vektorjev, sama notacija tenzorjev pa temelji na Einsteinovem pristopu. Njihova uporabnost se poveča predvsem v primerih, ko imamo zaradi veliko dimenzij veliko seštevanja, kar zmanjšuje preglednost reševanja, hkrati pa so tenzorji uporabni predvsem pri numeričnem programiranju. Izmed računalniških programov poznata tenzorje Mathematica in

---

[64] Zahteva izhaja z odvajanjem enačbe $H(x, h(x)) = 0$, ki znaša $H_x + H_y h_x = 0$. Od koder izhaja $h_x = -(H_y)^{-1} H_x$, ki terja, da je matrika H_y obrnljiva. Če bi imeli problem singularnosti, matrike ne bi mogli obrniti.

[65] Elementa izvirne funkcije H sta x in y, medtem ko implicitno določena funkcija h vsebuje le element x.

[66] Funkcija $H(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ je definirana le v koordinatnem izhodišču zaradi česar nima implicitno določene funkcije (Chiang 1985, 205).

[67] Tenzorski zapis večdimenzionalnega problema podaja Judd (1996; 1998, 488-490), medtem ko Bensoussan (1988) uporablja klasični zapis tudi v primerih večdimenzionalnih problemov.

Maple. Za razliko od matrik vrstni red členov pri uporabi tenzorjev ni pomemben. V notaciji nadpisan indeks pomeni stolpec in podpisan indeks vrstico člena.

Tabela 3.1: *Einsteinova notacija za tenzorje*

a_i	=	$\{a_i\}_{i=1}^{n}$
a_{ij}	=	$\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$
x^i	=	$\{x_i\}_{i=1}^{n}$
$a_i x^i$	=	$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$
$a_{ij} x^i y^j$	=	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j$
$c_{j_3,i_4}^{i_3,j_4} = a_{j_1,j_2,j_3}^{i_1,i_2,i_3} b_{i_1,i_2,i_4}^{j_1,j_2,j_4}$	=	$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} a_{j_1,j_2,j_3}^{i_1,i_2,i_3} b_{i_1,i_2,i_4}^{j_1,j_2,j_4}$
$a_{j_1,j_2,\ldots,j_m}^{i_1,i_2,\ldots,i_l}$	=	splošni tenzor

Vir: Judd (1998, 488-490).

Opomba: ponavadi se zaradi preglednosti ne uporablja nadpisanih in podpisanih indeksov, ampak se uporabljajo le podpisani (Judd 1998).

Z uporabo tenzorjev preoblikujemo tudi Taylorjevo vrsto. Če v tenzorskem zapisu zapišemo odvod funkcije f po x_j kot f_j, dobi multivariatna Taylorjeva vrsta obliko

$$f = f(x_0) + f_i\left(x^i - x_0^i\right) + \frac{1}{2} f_{ij}\left(x - x^0\right)^i \left(x - x^0\right)^j + \frac{1}{3!} f_{ijl}\left(x - x^0\right)^i \left(x - x^0\right)^j \left(x - x^0\right)^l + \ldots$$

kjer je $f_i \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$ in $f_{ij} \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0)$ itd.

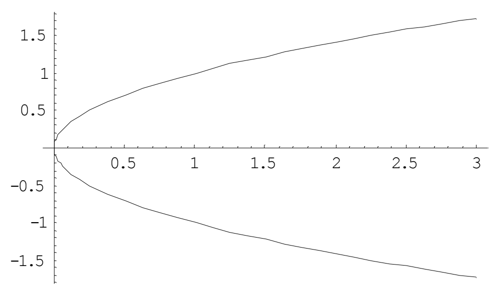
V razširjenem tenzorskem zapisu predstavljajo zgornji indeksi komponente in spodnji indeksi odvode. Prednost uporabe tenzorjev je vsekakor večja preglednost reševanja problemov, hkrati dosežemo tudi, da se n-dimenzionalni problem transformira v n-kratni tenzorski produkt enodimenzionalnih problemov. Slabost uporabe tenzorjev je v tem, da z njim ne odpravimo prekletstva dimenzionalnosti, saj število elementov v dimenziji in potreben čas za oceno rešitve rasteta eksponentno (Judd 1996).

3.3.2 Bifurkacije

Z regularnimi perturbacijami je možno proučevati stabilnost proučevanih problemov izključno pri stabilnih funkcijah, ko veljata izreka o implicitni funkciji in Taylorjevi (Padéjevi) vrsti. V teh primerih v majhni okolici okrog steady state točke obstaja enovito določeno stanje. Kadar pa z rahlim odmikom od steady state točke, $(\varepsilon > 0)$, nimamo enovito določenega stanja, ampak imamo več novih steady state točk,[68] pa metode regularnih perturbacij niso učinkovite. V teh primerih je za ocenjevanje stabilnosti proučevanih problemov treba uporabiti metode bifurkacij, ki rešujejo problem singularnosti v točkah bifurkacij. Procedura reševanja z uporabo metod bifurkacije se začne z identifikacijo točk bifurkacije, iz katerih določimo različne steady state stanja. V naslednji fazi z razvojem po Taylorjevi vrsti ocenjujemo dosegljivost in stabilnost najdenih steady state točk.

Za iskanje točk bifurkacije se najpogosteje uporablja Lyapunov-Schmidtova metoda. Metoda temelji na razvoju funkcije okrog točke bifurkacije po Taylorjevi vrsti za majhne vrednosti odmika ε, od koder razberemo, pri katerih vrednostih izhodiščnih parametrov določimo točke bifurkacije. Primer nestabilne funkcije prikazuje slika 3.4,[69] kjer iz točke bifurkacije vodita dve trajektoriji, ki določata različne steady state točke. Pri tem pa nas zanima, katera, če sploh katera, trajektorija je dosegljiva.

Slika 3.4: *Diagram bifurkacije*



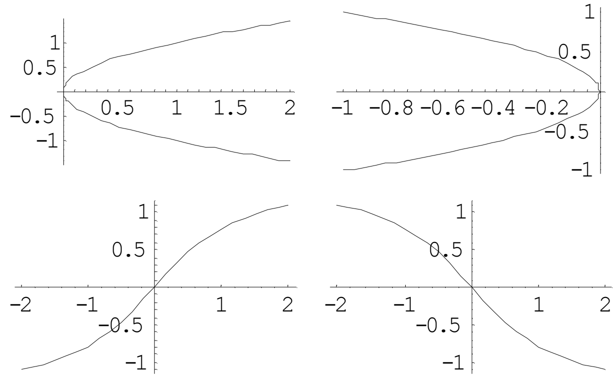
Vir: Holmes (1995, 250).

V primeru 3.4 gre za t.i. *pitchfork* točko bifurkacije, ki je v izhodišču koordinatnega sistema singularna (Holmes 1995, 250). Pitchfork bifurkacije so pogoste v modelih portfeljev, še posebej pri CAPM modelih, ime pa so dobile po svoji značilni obliki. Glede na obliko bifurkacije ločimo (Benhabib in Nishimura 1979; Zeidler 1988, 856; He in Barnett 2006): superkritične bifurkacije (slika 3.5, levo zgoraj), subkritične bifurkacije (slika 3.5, desno zgoraj) in transkritične bifurkacije (slika 3.5, spodaj). Pri tem prikazujeta zgornji sliki že omenjene pitchfork bifurkacije.

[68] Matematični model, ki ga perturbiramo, se spreminja.

[69] $y = \pm\sqrt{x}$. Holmes pokaže, da imamo v konkretnem primeru tri steady state rešitve: 0, ±1, od katerih sta stabilni le ±1 (Holmes 1995, 250-251).

Slika 3.5: *Strukture bifurkacij*



Vir: Holmes (1995, 254).

Ko določimo točke bifurkacije in steady state točke, njihovo stabilnost preverjamo tako, da perturbiramo točko bifurkacije in nato opazujemo gibanje sistema. Če se perturbiran sistem vrne v steady state, rečemo, da je steady state stabilen. Nasprotno pa je steady state točka nestabilna, če se perturbiran sistem vanj ne vrne.

Izrek o bifurkacijah

Pri navadnih bifurkacijah predpostavimo, da je $H(x,\varepsilon)$ C^2 zvezno odvedljiva. Če se število rešitev funkcije $H(x,\varepsilon)=0$ z odmikom od steady state položaja pri poljubni vrednosti *ε*, ki teče skozi x_0, spreminja, definiramo v ε_0 točko bifurkacije, kar je razvidno iz slike 3.5. Pri izreku o navadnih bifurkacijah predpostavimo, da je $H(x,0)=0$ za vsak x in je $H(x,\varepsilon)$ C^2 zvezno odvedljiva. Hkrati predpostavimo tudi, da je $H_x(x_0,0)=0=H_\varepsilon(x_0,0)$, pri čemer je odvod $H_{x\varepsilon}(x_0,0)$ različen od 0 za poljuben $(x_0,0)$. Kadar je tudi odvod $H_{\varepsilon\varepsilon}(x_0,0)$ različen od 0, obstajata odprta množica $\aleph$ od $(x_0,0)$ in funkcija $h(\varepsilon)\neq 0$ za $\varepsilon \neq 0$, da velja, da je na množici $\aleph$ $H(h(\varepsilon),\varepsilon)=0$ in je $H(x,\varepsilon)$ lokalno difeomorfna na $\varepsilon(\varepsilon - x)$ ali $\varepsilon(\varepsilon + x)$.[70] V nasprotnem primeru, ko pa $H_{\varepsilon\varepsilon}(x_0,0)=0\neq H_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(x_0,0)$, pa obstajata odprta množica $\aleph$ od $(x_0,0)$ in funkcija $h(\varepsilon)\neq 0$ za $\varepsilon \neq 0$, da velja, da je na množici $\aleph$ $H(h(\varepsilon),\varepsilon)=0$ in je $H(x,\varepsilon)$ lokalno difeomorfna na $\varepsilon^3 - x\varepsilon$ ali $\varepsilon^3 + x\varepsilon$. V obeh primerih predstavlja $\varepsilon = 0$ točko bifurkacije (Judd 1998, 512; Zeidler 1988).[71]

[70] Po definiciji je funkcija *f(x)* v točki $z = z_0$ difeomorfna na *g(x)*, če obstaja takšna odvedljiva funkcija *h(x)*, ki jo je v točki $z = z_0$ možno obrniti in v okolici $z = z_0$ velja $f(h(x)) = g(x)$ (Judd 1998, 512).

[71] V kolikor bi naleteli na probleme velikih dimenzij, lahko tudi neskončnih, jih z Lyapunov-Schmidtovo metodo transformiramo v probleme nizkih dimenzij, s čimer se uporabnost metod bistveno poveča (Judd 1996).

Poleg navadnih bifurkacij obstajajo še t.i. Hopf bifurkacije in tangentne bifurkacije (*saddle-node bifurcation*). Hopf bifurkacije imajo ime po matematiku Eberhardu Hopfu, ki metodo odkrije v štiridesetih letih 20. stoletja.[72] V literaturi so poznane tudi kot Poincaré-Andronov-Hopf bifurkacije, zanje pa je značilno, da z zunanjimi vplivi lahko prihaja do trajnih sprememb osnovnega stanja.

Izrek o Hopf bifurkacijah[73]

Hopf bifurkacije so opredeljene na vsaj dvodimenzionalnem vektorskem prostoru. Predpostavimo, da je $\dot{x} = F(x, \mu)$, pri čemer je $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ in $\mu \in [-c, c] \subset R$ ter je F C^k zvezno odvedljiva in obstajajo stacionarne rešitve: za $|\mu| < c$ obstaja $\tilde{x}(\mu)$, da velja $F(\tilde{x}(\mu), \mu) = 0$. Če ima Jacobijeva matrika prvih odvodov $F_x(\tilde{x}(\mu), \mu)$ parametričen par lastnih vrednosti (*eigenvalues*), ki jih prikažemo kot $\alpha(\mu) \pm \beta(\mu)i$, pri čemer je $\alpha(0) = 0, \beta(0) \neq 0, \alpha'(0) \neq 0$, potem v $\dot{x}(t, \varepsilon) = F(x(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon))$ obstaja družina parametričnih rešitev $x(t, \varepsilon)$ in $\mu(\varepsilon)$, da je $x(t, 0) = \tilde{x}(0)$, ampak za $\varepsilon \neq 0$ velja $x(t, \varepsilon) \neq \tilde{x}(\mu(\varepsilon))$. Pri tem je $\mu(\varepsilon)$ C^{k-1} zvezno odvedljiva, dolžina cikla pa je enaka $\frac{2\pi}{|\beta(0)|}$.

Aplikacija metod bifurkacij v ekonomiji

Aplikacijo metod bifurkacij na ekonomskem področju so med drugim opravili Benhabib in Nishimura (1979) in Zhang (1988), ki so z uporabo Hopf bifurkacij proučevali ciklična nihanja in njihovo stabilnost v večsektorskem modelu rasti. Feichtinger (1992) pa proučuje ciklično nihanje pri stroških oglaševanja podjetij. Medtem Judd in Guu (1996) predstavita proceduro reševanja stohastičnega modela portfelja s tveganji. Model rešita tako, da podata enačbo, ki prikazuje, kako se delež premoženja, ki je investiran v tvegane naložbe, spreminja s spreminjanjem tveganosti naložbe, pri čemer rešita sistem z uporabo linearne enačbe. Huffman (1987) prikaže deterministični OLG model naložb, v katerem proučuje vplive cikličnih nihanj na trgovanje z naložbami. V modelu šoki v gospodarstvu, npr. šok v založenosti s premoženjem (*endowment shock*), vplivajo tako na cene kapitala, kot tudi na obliko posameznikovega portfelja. Ker odločitve o portfelju vplivajo na cene kapitala v prihajajočih obdobjih, imajo enkratni šoki lahko trajnejši vpliv na trgu kapitala. Za razliko od

---

[72] Leta 1942 je Hopf odkril fenomen, do katerega pride, če na nek sistem deluje neka zunanja sila, ki s svojim vplivom povzroči, da prvotni mirujoči sistem začne oscilirati (Zeidler 1995, 369). Oscilacija sicer mirujočega sistema izraža nestabilnost sistema v osnovnem stanju.

[73] Izrek o Hopf bifurkacijah je vzet iz Benhabib in Nishimura (1979). Več o metodah bifurkacij je na voljo v Zeidler (1988), Holmes (1995), Judd (1995; 1999), Judd in Guu (1996), Chow in Hale (1982), He in Barnett (2006).

modela Judda in Guuja v modelu Huffmana njegove rešitve ni možno dobiti zgolj z linearno aproksimacijo. Z OLG modelom Chiappori, Geoffard in Guesnerie (1992) potrdijo obstoj t.i. *lokalnega stacionarnega sunspot ravnovesja* (*SSE*)[74] v okolici steady state. Avtorji pokažejo, da v primeru, ko je steady state nedoločen in obstaja neskončno trajektorij popolnih predvidevanj (*perfect foresight*), ki konvergirajo k steady state, v njegovi okolici obstaja neskončno končnih SSE.

Dosedanja praksa je pokazala, da se Hopf bifurkacije posebej izkažejo pri analiziranju determinističnih modelov, medtem ko so navadne bifurkacije bolj primerne pri reševanju stohastičnih modelov.

3.3.3 Hibridne perturbacije

Hibridne perturbacije odpravljajo slabosti metod regularnih perturbacij, hkrati pa v proceduro reševanja vključujejo tudi dobre lastnosti drugih metod. Osnovna ideja hibridnih perturbativnih-Galerkin metod je v tem, da združi perturbativne metode s projekcijskimi metodami. Zaradi tega omenjene metode predstavljajo zelo uporabno orodje pri analiziranju ekonomskih pojavov. Njihova uporaba je še v zelo zgodnji razvojni fazi, podrobneje pa jih proučuje Judd (1995; 1998).

Judd (2002) uporabi še posebno perturbativno metodo zamenjave spremenljivk, s katerimi je možno dokaj učinkovito rešiti probleme računalniškega programiranja pri iskanju členov višjih redov. Metoda je uporabna tako v enodimenzionalnem prostoru, kot tudi v prostoru več dimenzij. Aplikacijo metode zamenjave spremenljivk odločitvene funkcije na primeru stohastičnega neoklasičnega modela rasti opravita tudi Fernandez-Villaverde in Rubio-Ramirez (2006). Avtorja pokažeta, kako optimalna zamenjava spremenljivk zmanjša absolutno napako, ki nastane pri reševanju Eulerjevih enačb. S tem zgolj potrdita uporabnost omenjene metode.

3.4 Osnovne značilnosti metod perturbacij

Osnovna ideja uporabe metod regularnih perturbacij je, da se (Judd in Guu 1997, 1026; Judd 1998, 447):

- najprej oblikuje splošni problem (npr. stopnje gospodarske rasti);

[74] O *sunspot* govorimo, kadar je v ekonomiji podvržena nekim eksogenim markovskim signalom (podoben učinek, kot ga povzroči npr. živalski nagon, ali psihologija trga), ki ne vplivajo na osnovne spremenljivke v gospodarstvu, pač pa posamezniki verjamejo, da je trenutno stanje posledica teh signalov, ki ne samo, da povzročajo trenutno stanje, kakor tudi na verjetnostno porazdelitev prihodnjih spremenljivk (Cass in Shell 1983; Chiappori in drugi 1992, 1102). V teh primerih deterministični steady state ne obstaja.

- poišče posamezen primer oblikovanega problema, za katerega je rešitev poznana (npr. steady state točka);
- uporabi ta posamezni primer s poznano rešitvijo kot izhodišče za numerično aproksimacijo bližnjih problemov okrog te točke (npr. stanj v okolici steady state točke);
- pri čemer so približki izpeljani z uporabo izreka o implicitni funkciji in razviti po Taylorjevi vrsti.

Linearizacija multidimenzionalnega sistema

Pri reševanju večdimenzionalnega sistema uporabljamo tehniko linearizacije, tj. najprej poiščemo steady state, nato pa sistem perturbiramo okrog steady state. Zanima nas, kako se sistem odziva na majhne spremembe v spremenljivkah, ko ga lineariziramo okrog steady state – *impulse-response*.[75] V sistemu enačb nimamo več linearnih algebraičnih enačb, ampak imamo linearne diferenčne enačbe. Sistem zapišemo v kanonični obliki kot

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,\lambda,u) \\ \dot{\lambda} &= g(x,\lambda,u) \\ 0 &= h(x,\lambda,u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pri čemer spremenljivke predstavljajo sledeče:

x	vektor stanja
λ	vektor kostanja
u	implicitno določena kontrola
$x(0)=x_0$	začetni pogoj
$\lim\limits_{t\to\infty} \lvert x(t)\rvert, \lvert\lambda(t)\rvert < \infty$	končni pogoj

Pri oceni stabilnosti steady state nas zanima, kakšni so odmiki perturbiranega modela od steady state točke, zato si oblikujemo problem $(\dot{x}-\dot{x}^*) = A\cdot(x-x^*)$, ki ga rešujemo. Pri tem prikazuje A matriko modela v steady state, x vektor stanj in x^* vektor stanj v steady state. $\dot{x}$ in $\dot{x}^*$ prikazujeta trajektoriji stanj x in x^* in sta definirani kot diferenčni enačbi, definirani tako, kot prikazuje prva enačba v sistemu enačb (3.1). Ker lahko perturbiramo le tiste spremenljivke, ki jih lahko opazimo, je treba neopazljive spremenljivke podati v implicitni obliki. Če implicitno definirano kontrolo u zapišemo kot funkcijo $u = U(x,\lambda)$, sledi implicitno definirana funkcija $0 = h(x,\lambda,U(x,\lambda))$. Z implicitnim zapisom funkcije, ki vsebuje

[75] V ekonometriji učinke šokov proučujemo med drugim tudi z vektorsko avtoregresijo (VAR). Ko se v sistemu zazna šok, se odziv sistema na šok ocenjuje z metodo *impulse-response*, analizo napak variančne dekompozicije (*error variance decomposition*) in zgodovinske dekompozicije (Sims 1980; Hamilton 1994).

le opazljive spremenljivke, lahko perturbiramo sistem. Sistem v kanonični obliki (3.1) spremenimo v

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,\lambda,U(x,\lambda)) \\ \dot{\lambda} &= g(x,\lambda,U(x,\lambda)) \end{aligned} \qquad (3.2).$$

Tako dobimo stacionarno steady state stanje, ki ga po definiciji sestavlja trojček $(x^*,\lambda^*) \equiv Z^*$, u^* in λ^*, tako da velja $0 = f(Z^*,u^*) = g(Z^*,u^*) = h(Z^*,u^*)$.

Perturbiranje steady state

Naslednji korak v proceduri je ocena stabilnosti steady state, kar storimo tako, da se počasi odmikamo od njega, pri tem opazujemo, kaj se dogaja s steady state stanjem. Pri odmikanju od steady state implicitno predpostavljamo, da sistem (3.1) vodi nazaj v steady state.

Najprej definiramo izhodiščni problem $x(0,\varepsilon) = x^* + \varepsilon\xi_x(0)$, kjer x* prikazuje steady state stanje, ε pa koeficient perturbacije. Iz izhodiščnega problema nato parametriziramo rešitve $x(t,\varepsilon)$ in $\lambda(t,\varepsilon)$. Od tod izračunamo odmik x od njegovega steady state, ki je podan s trajektorijo $\xi_x(t) \equiv x_\varepsilon(t,0)$ in odmik λ od svojega steady state, ki ga podaja $\xi_\lambda(t) \equiv \lambda_\varepsilon(t,0)$. V obeh primerih računamo odmike pri povečevanju ε.

Trajektorije obeh spremenljivk določimo tako, da odvajamo tako enačbo (3.1), kot izhodiščni problem po ε. Pri odvajanju (3.1) po stanjih in kostanjih po ε dobimo:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x + f_u U_x & f_\lambda + f_u U_\lambda \\ g_x + g_u U_x & g_\lambda + g_u U_\lambda \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_\lambda \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

Če matriko iz (3.3) označimo z A, ki ga izračunamo v steady state, lahko celotni matrični zapis zapišemo v skrajšani obliki kot $\dot{\xi} = A \cdot \xi$.[76] V tem primeru je rešitev sistema (3.3) podana pri $\xi = \xi(0)e^{At}$, kjer ξ(0) prikazuje izhodiščno vrednost ξ. Pri dani vrednosti $\xi_x(0)$ fiksiramo vrednost $\xi_\lambda(0)$ tako, da zahtevamo asimptotično stabilnost (3.3). To zagotovimo s končno vrednostjo limite, ko velja $\lim_{t\to\infty}\left|\xi(0)e^{At}\right| < \infty$. V kolikor limita ne bi bila končna, bi imeli eksploziven model. Kot priporočata Mulligan in Sala-i-Martin (1991; 1993) je eksplozivnost problema možno rešiti z eliminacijo časa pri spremenljivkah. Drugi način

[76] Podrobnejša analiza matrik in linearne algebre je podana v Meyer (2000).

reševanja eksplozivnih spremenljivk je perturbacija stopenj rasti. Pri tem izhajamo iz predpostavke, da se stopnje rasti v času ne povečujejo in da konvergirajo k neki stopnji.

Tako rešujemo matrični sistem $A \cdot N = D \cdot N$, kjer *D* predstavlja lastne vrednosti in *N* lastne vektorje matrike *A*. Lasten vektor je vektor, ki ne spremeni smeri, kadar ga pomnožimo z matriko A, njegove pripadajoče lastne vrednosti pa nam povedo, za kakšno količino se krči oziroma širi v procesu. Ker rešitev *N* = 0 ne daje potrebnih informacij glede rešitve sistema enačb (3.3), preoblikujemo matrični sistem v $(A - D \cdot I)N = 0$, kjer je I identiteta s samimi enicami na glavni diagonali. Od tod je rešitev podana preko neničelnih lastnih vektorjev. To velja samo, kadar je $A - D \cdot I$ singularna oziroma so iskane vrednosti enake lastnim vrednostim *D*. Po izreku je kvadratna matrika singularna, če in samo če je vsaj ena od njenih lastnih vrednosti enaka nič (Khuri 2003, 37). Ekvivalentno zapišemo $\det(A - D \cdot I) = 0$. Ker imamo kombinacijo začetnih pogojev $\xi_x(0)$ in limitne pogoje asimptotične stabilnosti na (3.3), imamo t.i. *boundary value problem*, ko imamo parameter perturbacije prisoten na več mestih in rešujemo sistem

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = A\xi \\ &\xi \equiv \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \\ &x(0) = x_0, \lim_{t \to \infty} |\lambda(t)| < \infty \end{aligned} \qquad (3.4).$$

Zaradi tega rešitev v eni točki, časovnem horizontu, dimenziji ipd. vpliva na preostale rešitve drugod. Obstaja več metod, ki rešijo problem (Press in drugi 2002): metoda streljanja (*shooting*), metoda sprostitve (*relaxation method*). Judd (1998) priporoča uporabo Jordanovega matričnega zapisa matrike *A*.

Jordanova dekompozicija

Matriko *A* razcepimo v njeno Jordanovo kanonsko obliko $A = N^{-1}DN$, sistem (3.4) pa preoblikujemo v

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = N^{-1}DN\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ oziroma } \frac{d}{dt}\left(N\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}\right) = DN\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Pri tem iščemo stabilne in nestabilne lastne vrednosti matrike. Jordanovo matrično obliko preoblikujemo tako, da združimo stabilne in nestabilne lastne vrednosti matrike *A*. Brez izgube splošnosti sta novi dekompoziciji *D* in *N* v bločni obliki podani kot

$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$, kjer je D_1 stabilna in D_2 nestabilna. In

$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$ ter definiramo $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} \equiv N \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Pri tem je N_{11} zgornji levi del matrike N reda $j \times j$, N_{22} spodnji desni del matrike N reda $(n-j)\times(n-j)$ itd. Lastni vektorji so pomembni, ker z njimi naredimo razcep matrike. Tako sistem (3.5) skrčimo na $\frac{d\bar{\xi}}{dt} = D\bar{\xi}$, kar vsebuje rešitev

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{D_1 t} \\ e^{D_2 t} \end{pmatrix} = e^{Dt}$$

Tukaj se vprašamo, kako nestabilne lastne vrednosti odstranimo oziroma, kako jih stabiliziramo? Za rešitev sistema moramo izbrati takšno vrednost $\xi_\lambda(0)$, da je $\xi_\lambda(t)$ asimptotično omejena. Ker pa so lastne vrednosti D_2 pozitivne in nestabilne, je $\bar{\xi}$ lahko stabilna izključno v primeru, ko velja $0 = \bar{\xi}(0) = N_{21}\xi_x(0) + N_{22}\xi_\lambda(0)$. Pri tem x prikazujejo spremenljivke stanj, ki so opazljiva, λ pa spremenljivke kostanj, ki pa so neopazljive. Rešitev stabiliziramo v obliki $\xi_\lambda(0) = -N_{22}^{-1}N_{21}\xi_x(0)$. Od tod je $\xi_x = \left(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{21}\right)^{-1} e^{D_1 t}$. To je zveza, ki v povezavi z začetnimi pogoji vseskozi zagotavlja stabilno rešitev.

Če je N singularna, potem uporaba Jordanove kanonske metode pri razcepu matrike A ni možna, saj ne moremo izraziti inverzne matrike. V tem primeru se priporoča uporaba Schurove dekompozicije (Judd 1998; Press in drugi 2002; Meyer 2000 in drugi). Enačba tako prikazuje, kako majhna perturbacija x v bližini x^*, ki je enaka $\varepsilon\xi_x(0)$, povzroča majhne spremembe predeterminiranih spremenljivk, enakim $\varepsilon\xi_\lambda(0)$, v bližini steady state. Z uporabo pogoja stabilnosti je λ_0 v splošnem določena z x_0. Če izrazimo λ kot $\lambda = \Lambda(x)$, iz stabilizacije problema dobimo $\Lambda_x(x^*) = -N_{22}^{-1}N_{21}$. Na koncu rešimo še sistem za kontrolo u, ki jo podamo implicitno preko x kot $u(x) = U(x, \Lambda(x))$. Z odvajanjem u po x pri steady state dobimo linearno aproksimacijo $U(x)$ v $x = x^*$, kar zapišemo $\frac{\partial u}{\partial x}(x^*) = \frac{\partial U}{\partial x}(x^*, \lambda^*) - \frac{\partial U}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*)N_{22}^{-1}N_{21}$. Ker U_x in U_λ lahko določimo v steady state, z enačbo lahko izrazimo vse potrebne odvode v steady state in pri danih pogojih iz (3.1). Tako podamo ravnovesno dinamično gibanje spremenljivk stanja x in kontrole u v času izključno kot funkcijo stanja x

$$\dot{x} = f(x, \Lambda(x), u(x)) \tag{3.6}$$

Za x v bližini x^* ima enačba (3.6) linearno aproksimacijo, ki jo zapišemo kot $\dot{x} = B(x - x^*)$, kjer velja $B = f_x(x^*, \lambda^*, u^*) + f_\lambda(x^*, \lambda^*, u^*)\Lambda_x(x^*) + f_u(x^*, \lambda^*, u^*)u_x(x^*)$. Ker je njena rešitev podana kot e^{Bt}, je *impulse-response* funkcija glede na stanje x_i enaka *i*-ti komponenti vektorske funkcije e^{At} ter predstavlja celoten učinek šoka na spremenljivko stanja x v času pri $t = 0$.

3.5 Test kakovosti pri metodah perturbacije

Rezultati numeričnih metod so v veliki meri omejeni s pristranskostjo, ki jo povzroča uporaba numeričnih približkov. To še posebej velja za metode, ki dajejo lokalne približke. V teh primerih je lahko natančnost dobljenih ocen z oddaljevanjem od steady state zelo slaba. Lahko se zgodi, da imamo opraviti s kaotičnim procesom, ko je dobljena ocena že pri majhnih odstopanjih od steady state zelo slaba oziroma, da je proučevan model zelo nestabilen. V teh primerih je uporabnost takšnega modela zelo omejena, saj se njene rešitve bistveno spremenijo že pri zelo majhnih odstopanjih od osnovnih predpostavk. Na drugi strani pa je lahko model zelo stabilen in se tudi pri večjih odstopanjih od izhodiščnih predpostavk ocena steady state v modelu ne spreminja. V primerih ocenjevanja stabilnosti modela nas zanima, pri kateri vrednosti odmika ε od steady state točke je perturbirana funkcija še podobna osnovni in kako se z oddaljevanjem od steady state spreminjajo rešitve.

Kot poudarita Santos in Peralta-Valta (2005), se napake, ki nastajajo pri uporabi numeričnih približkov, v času konvergence akumulirajo in lahko drastično vplivajo na končne rezultate trajektorije. Če ob tem upoštevamo še napaki zaokroževanja in trunkacije, potem lahko postane kumulativna napaka že kar pomembna pri končnem rezultatu, ocenjena končna vrednost pa bistveno drugačna od dejanske. Za zagotovitev natančnosti dobljenih numeričnih simulacij avtorja poudarita, da je treba spremljati učinke numeričnih napak na asimptotično ravnovesno dinamiko, obenem pa je v markovskem procesu treba zagotoviti veljavnost zakona velikih števil. Natančnost numeričnih približkov je še posebej vprašljiva v primerih večdimenzionalnih ekonomskih problemov, ki sicer v večji meri ustrezajo realnosti, vendar, kot poudari Reiter (2000), praviloma na račun kakovosti dobljenih rezultatov.

Kot pravi Santos (2000), se omejitev pri oceni natančnosti numeričnih metod nanaša na nezmožnost, da bi numerično napako določili v popolnosti. Zaradi tega se za natančnost uporabe posameznih algoritmov pogosto uporabljajo primerjave z drugimi, počasnejšimi algoritmi. V kolikor bi že obstajale rešitve za probleme, ki jih proučujemo, bi bila takšna procedura uspešno dopolnilo, vendar pa se pogosto dogaja nasprotno, ko algoritmi za proučevani model ne obstajajo.

Pri oceni kakovosti numerične aproksimacije uporabijo Judd in Guu (1992; Judd 1998) ter den Haan in Marcet (1994) metodo, ki definira ostanek iteracije funkcije po Eulerjevi enačbi. Metoda definira rezidual $E(x)$ med perturbirano vrednostjo in vrednostjo v steady state osnovne funkcije. Preverjanje kakovosti približka funkcije zahteva, da morata biti izvorna funkcija $f(x)$ in njen perturbiran približek $g(x)$ podana brez enot. V proceduri najprej preverimo linearni približek $X^L(x_1)$ v poljubni točki x_1 in definiramo ostanek kot $r \equiv f\left(X^L(\varepsilon), x_1\right)$. Pri razvijanju členov z uporabo Taylorjevega ali Padéjevega približka se ustavimo v točki, kjer ocenimo, da je ostanek dovolj majhen.[77] Test temelji na ideji, da je dober numerični približek povezan z majhnimi odmiki od pogojev prvega reda, ki zagotavljajo optimalno rešitev. Če je ocenjena vrednost Eulerjevih ostankov enaka nič, potem smo dobili natančno rešitev brez napake. Santos (2000) pokaže, da je ocenjena napaka vrednostne funkcije istega reda kot ostanek pri iteraciji z uporabo Eulerjeve enačbe. Podoben pristop uporabita den Haan in Marcet (1994) v modelih racionalnih pričakovanj. Pri oceni natančnosti primerjata Collard in Juillard (2001) dobljeno rešitev z rešitvijo zaprtega (*closed-form*) modela.

3.6 Aplikacija metod perturbacije v ekonomiji

Uspešna aplikacija numeričnih metod v naravoslovnih vedah, kjer so postale stalnica pri analiziranju različnih učinkov šokov na naravne pojave, je vplivala tudi na njihovo uporabo v ekonomiji, kjer zahtevni modeli onemogočajo natančno analizo učinkov šokov na ekonomske parametre. To velja še posebej od prispevkov Kydlanda in Prescotta (1982) in Kinga, Plosserja in Rebela (1988) dalje, ko je linearizacija okrog steady state postala stalnica pri reševanju makroekonomskih modelov. Omenjeni avtorji sicer niso uporabljali metod perturbacije, pač pa so njihovi prispevki pomenili dobro izhodišče pri implementaciji perturbacij v ekonomiji. Smiselnost uporabe perturbacij v ekonomiji vidi Judd (1997) predvsem v tistih primerih, kjer razni šoki spreminjajo osnovne ekonomske atribute, s čimer se spreminja ravnovesno stanje v ekonomiji. Pri tem pa se s perturbacijami ocenjuje učinke teh šokov na stabilnost ravnovesja. Ne samo da s perturbacijami ocenjujemo učinke šokov, ampak so metode uporabne tudi za testiranje veljavnosti posameznih modelov in teorij.

V ekonomiji se perturbacije uporabljajo tako v stohastičnih modelih, kot tudi v determinističnih. Prvotne makroekonomske numerične rešitve so bile linealizirani približki determinističnih modelov aplicirane na stohastične modele, ki pa niso vključevale členov višjih redov Taylorjeve vrste (Magill, 1977; Kydland in Prescott, 1982). Drugi sklop predstavljajo modeli racionalnih pričakovanj. Judd in Gaspar (1997) predstavita perturbacije

[77] V kolikor bi pri testu kakovosti prvih n odvodov bilo enakih nič, se postopek preverjanja opravlja tako dolgo, dokler ne pridemo do prvega člena, kjer odvod ni enak nič.

na primeru večdimenzionalnega stohastičnega zveznega modela. Judd (1998) predstavi splošno metodo za reševanje determinističnih diskretnih modelov rasti. Z uporabo perturbacij Judd in Guu (1997) rešita deterministični enosektorski model gospodarske rasti. Na primeru LQ aproksimacije Chen in Zadrozny (2003) izpeljeta linearno enačbo perturbacij za izračunavanje ocen četrtih redov razvoja po Taylorjevi vrsti, ki temelji na drugih in četrtih momentih napake ε. Kakovost drugih in še posebej četrtih redov pri razvoju po Taylorjevi vrsti potrdita tudi Collard in Juillard (2001), ki razvijeta stohastični *asset pricing* model Burnside-a (1998). Aruoba in drugi (2003) ocenijo dinamični stohastični neoklasični ravnovesni model, pri tem pa testirajo veljavnost različnih numeričnih metod. Avtorji ugotovijo, da metode perturbacije predstavljajo zelo »atraktiven« kompromis med hitrostjo, natančnostjo in drugimi omejitvami pri programiranju. Kljub temu, da se pri izračunavanju odvodov višjega reda pokažejo njihove slabosti, avtorji njihovo uporabo zelo priporočajo.

4.1 Opredelitev modela

Pri modelu izhajamo iz Romerjevega koncepta endogene rasti, kjer v proizvodnem procesu sodeluje več različnih tipov proizvodnih (kapitalnih) dobrin in mu dodamo koncept *time to build* Kydlanda in Prescotta (1982), kjer investicije potrebujejo določen čas, da postanejo produktiven kapital. *Time to build* koncept prikazuje zelo realno sliko dejanskega poteka proizvodnega procesa. Tako kot je pri investicijah potreben čas za njihovo popolno izgradnjo in vključitev v proizvodni proces, tako je pri človeškem kapitalu potreben čas, ki ga običajno prikažemo preko trajanja izobraževalnega procesa. Pri tem gre cel postopek izgradnje produktivnega kapitala skozi več različnih faz. V modelu imamo dve vrsti kapitala: vmesni kapital k_1, ki se transformira v produktivni kapital in ne proizvaja končnih dobrin in produktivni kapital k_2. Proizvodnja končnih dobrin je funkcija $f(k_2)$ in je razdeljena med potrošnjo in investicije. Te so dvofazne in so sestavljene iz deleža vmesnega kapitala k_1 in stroška transformacije vmesnega kapitala v produktivnega. Če upoštevamo še izgube pri transformaciji in amortizacijo k_1, je dinamika k_1 podana kot

$$\dot{k}_1 = f(k_2) - c - \delta_1 k_1 - \beta k_1 \tag{4.1.}$$

Proizvodnja enote končne dobrine je podana kot $f(k_2)$. V enačbi c prikazuje potrošnjo in βk_1 strošek transformacije kapitala.

$$\dot{k}_2 = \delta_1 k_1 - \delta_2 k_2 \tag{4.2.}$$

Člen pri vmesnem kapitalu k_2 se zmanjšuje, ker se transformira v produktivnega, hkrati pa se ga še nekaj izgublja, kar prikažemo kot βk_1. Produktivni kapital se amortizira po stopnji δ_2, hkrati pa se vmesni kapital transformira v produktivnega po stopnji δ_1.

V gospodarstvu prikažemo problem maksimiranja koristnosti kot

$$\max \int_0^\infty u(c) e^{-\rho t} dt \tag{4.3}$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= f(k_2) - c - \delta_1 k_1 - \beta k_1 \\ \dot{k}_2 &= \delta_1 k_1 - \delta_2 k_2 \end{aligned} \tag{4.4.}$$

Za izpeljavo pogojev prvega reda oblikujemo hamiltonian

$$J = u(c) + \lambda_1 \left[f(k_2) - c - \delta_1 k_1 - \beta k_1 \right] + \lambda_2 \left[\delta_1 k_1 - \delta_2 k_2 \right] \qquad (4.5).$$

Hamiltonian predstavlja vseživljenjsko koristnost posameznikov v neskončnem časovnem horizontu. V njem je λ_1 shadow price povezana z dinamiko $\dot{k}_1$ in λ_2 shadow price za dinamiko $\dot{k}_2$. Optimalna alokacija maksimira hamiltonian v vsakem obdobju.

Časovno dinamiko kostanj hamiltoniana, ki predstavljajo potrebne pogoje za maksimiranje hamiltoniana dobimo z njegovim odvajanjem po obeh kapitalnih tipih k_1 in k_2. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \rho\lambda_1 - \frac{\partial J}{\partial k_1} \\ \dot{\lambda}_2 &= \rho\lambda_2 - \frac{\partial J}{\partial k_2} \end{aligned} \qquad (4.6).$$

Z odvajanjem po gibanjih obeh lagrangianovih množiteljev dobimo

$$\dot{\lambda}_1 = \rho\lambda_1 - \lambda_1(-\delta_1 - \beta) - \lambda_2\delta_1 \qquad (4.7)$$

in

$$\dot{\lambda}_2 = \rho\lambda_2 - \lambda_1 f'(k_2) - \lambda_2(-\delta_2) \qquad (4.8)$$

za gibanje multiplikatorja λ_2. Ker je v steady state stopnja rasti obeh lambd enaka 0, izpeljemo pogoje za steady state kot

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\lambda_1 - \lambda_1(-\delta_1 - \beta) - \lambda_2\delta_1 \\ 0 &= \rho\lambda_2 - \lambda_1 f'(k_2) - \lambda_2(-\delta_2) \end{aligned}$$

Po enačenju obeh enačb izpeljemo steady state enačbo za $f'(k_2^*)$ kot

$$f'(k_2^*) = \frac{(\rho + \delta_1 + \beta)(\rho + \delta_2)}{\delta_1} \qquad (4.9).$$

Enačbo rešimo za steady state zalogo vmesnega kapitala k_2^*. Po principu maksimuma velja, da z maksimiranjem hamiltoniana po kontroli dobimo optimalno akcijo, ki je v primeru strogo konkavne funkcije samo ena točka.[78] Pogoj prvega reda za maksimiranje hamiltoniana glede na c dobimo tako, da hamiltonian odvajamo po kontroli c in postavimo na 0.

$$\frac{\partial J}{\partial c}=0, u'(c)-\lambda_1=0 \qquad (4.10).$$

Z rezultatom (4.10) eliminiramo kontrolo iz problema in jo prikažemo kot funkcijo spremenljivke kostanja, $c=C(\lambda_1)$. Načeloma predpostavljamo, da je funkcija koristnosti konkavna in je enolično rešljiva. Tako izhaja rezultat iz racionalnosti posameznikov in pravi, da ti razdelijo svoje dobrine tako, da imajo isto mejno koristnost v vsakem obdobju. Pri tem ni pomembno, ali so te dobrine namenjene tekoči potrošnji ali preko investiranja prihodnji potrošnji. Pri tem posameznikom člen časovne preference zmanjšuje, lahko tudi povečuje, njihovo koristnost, ki jim jo nudi odložena potrošnja.

Iz (4.4-4.10) dobimo enačbe za steady state stanja drugih spremenljivk kot

$$k_1^*=\frac{\delta_2 k_2^*}{\delta_1} \qquad (4.11).$$

$$c^*=f(k_2^*)-\delta_1 k_1^*-\beta k_1^* \qquad (4.12).$$

Če predpostavimo, da je funkcija koristnosti CRRA oblike, $\max\int_0^\infty \frac{C^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}e^{-\rho t}dt$, izrazimo steady state vrednost λ_1 kot

$$\lambda_1^*=c^{*-\gamma} \qquad (4.13).$$

Ker predpostavljamo, da je γ = 1, se z uporabo L'Hopitalovega pravila CRRA funkcija koristnosti spremeni v $\log c$ (Meyer 2000, dokaz je podan v prilogah). Steady state vrednost za drugo spremenljivko kostanja pa prikažemo kot

$$\lambda_2^*=\frac{\lambda_1^* f'(k_2^*)}{\rho+\delta_2} \qquad (4.14).$$

4.2 Linearizacija okoli steady state

Iz enačbe (3.2) in iz trajektorij gibanja za spremenljivke stanja in kostanja (4.4), (4.7), (4.8) oblikujemo linearizacijsko matriko kot

[78] Če funkcija ni strogo konkavna, predstavlja rezultat maksimuma korespondenca.

$$A = \begin{pmatrix} -\delta_1 - \beta & f' & -C' & 0 \\ \delta_1 & -\delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho + \delta_1 + \beta & -\delta_1 \\ 0 & -\lambda_1 f'' & -f' & \rho + \delta_2 \end{pmatrix} \qquad (4.15).$$

Stabilnost steady state izhaja iz diagonalnih členov matrike A. Ker so vrednosti koeficientov po definiciji pozitivne, imamo v diagonalnih členih dve negativni in dve pozitivni lastni vrednosti, kar potrjuje stabilnost steady state. Tudi sicer je za konkavne funkcije značilna njihova stabilnost (Mulligan in Sala-i-Martin 1993).

Z uporabo izreka o implicitni funkciji transformiramo Hamiltonian tako, da se znebimo kontrole c. Tako transformirana funkcija vsebuje samo spremenljivke stanj in kostanj.

$$J = log\left(\lambda_1^{-1}\right) + \lambda_1\left[f\left(k_2\right) - \lambda_1^{-1} - \delta_1 k_1 - \beta k_1\right] + \lambda_2\left[\delta_1 k_1 - \delta_2 k_2\right] \qquad (4.16).$$

Z odvajanjem (4.16) po vseh štirih spremenljivkah dobimo zahtevane enačbe za rešitev problema. Te so enake

$$\frac{\partial J}{\partial k_1} = -\lambda_1\left(\delta_1 + \beta_1\right) + \lambda_2 \delta_1 \qquad (4.17a).$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \lambda_1 f'\left(k_2\right) - \lambda_2 \delta_2 \qquad (4.17b).$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_1} = -\lambda_1^{-1} - \lambda_1^{-2}\left(f\left(k_2\right) - \lambda_1^{-1} - \delta_1 k_1 - \beta_1 k_1\right) \qquad (4.17c).$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_2} = \delta_1 k_1 - \delta_2 k_2 \qquad (4.17d).$$

4.3 Numerična analiza in stabilizacija

Pri simulaciji se osredotočimo izključno na to, kakšen je učinek koeficienta α na perturbacijo modela, pri čemer se odločimo za tri različne variante. Za analizo učinka koeficienta α se odločimo zato, ker je delež kapitala v proizvodnji, ki ga prikazuje α, eden izmed pomembnejših dejavnikov proizvodnje in zaradi tega za analizo gospodarske rasti zelo občutljiv. V prvem primeru analiziramo model pri vrednosti $\alpha = 0.30$, pri drugem $\alpha = 0.35$ in v tretjem $\alpha = 0.25$. Vrednosti ostalih spremenljivk ostajajo v vseh primerih nespremenjene in so vzete iz splošne uporabe (npr. Judd 1998). Tako ocenimo stabilnost in vzdržnost modela ter učinke eksogenih šokov pri različnih deležih kapitala v gospodarstvu. Ker pričakujemo, da bo s perturbiranjem modela v vseh scenarijih prišlo do rahlih odmikov od steady state, vsak tak odmik interpretiramo kot učinek šoka na koristnost posameznikov pri različnih deležih kapitala. Ker se v vseh primerih nahajamo v zveznem času, postavimo diskontni faktor $\delta_1 = 1.0$.

1. primer

$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$, $f(k_2) = k_2^{\alpha}$, $\alpha = 0.3$, $\delta_1 = 1.0$, $\delta_2 = 0.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 1.0$ in $\rho = 0.05$. Iz (4.9) dobimo steady state vrednost za $f'(k_2^*)$, ki znaša 0.3125. Ker je $f(k_2) = k_2^{\alpha}$, znaša njen odvod $f'(k_2^*) = \alpha k_2^{\alpha-1} = 0.3125$. Tako dobimo vrednost za k_2^* kot 0.943351.[79] Ko imamo izračunano vrednost za k_2^* in jo vstavimo v (4.11), dobimo steady state vrednost za k_1^*, ki je enaka 0.18867. c^* dobimo z uporabo enačbe (4.12) in znaša 0.756253. Steady state vrednosti spremenljivk kostanja pa dobimo iz (4.13) in (4.14) $\lambda_1^* = 1.32231$ in $\lambda_2^* = 1.65289$. Ko vstavimo vrednosti koeficientov v sistem enačb, dobimo linearizacijsko matriko okrog steady state (4.15) kot[80]

$$A = \begin{pmatrix} -1.2 & 0.31 & 0.57 & 0 \\ 1.0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & -1.0 \\ 0 & 0.31 & -0.31 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Z razcepom matrike dobimo pripadajoče lastne vrednosti (*eigenvalues*) in lastne vektorje (*eigenvectors*) matrike *A*, sistem pa zapišemo v Jordanovi kanonični obliki, pri tem pa iščemo stabilne in nestabilne lastne vrednosti. To storimo z uporabo C kode in generatorjem Cgwyn. Stabilni lastni vrednosti in njima pripadajoči lastni vektorji so

$$\mu_1 = -1.41929,\ \upsilon_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 0.76624 \\ -0.62843 \\ 0.04699 \\ 0.12543 \end{pmatrix} \text{ in } \mu_2 = -0.267019,\ \upsilon_{\mu_2} = \begin{pmatrix} -0.04313 \\ 0.64354 \\ -0.42059 \\ -0.63804 \end{pmatrix}$$

Medtem ko sta dve nestabilni lastni vrednosti in njima pripadajoči lastni vektorji enaki

[79] Izračuni so bili opravljeni s pomočjo Mathematice 5.1 in C kode.

[80] $-C' = -\frac{c^*}{\lambda_1^*}$.

$$\xi_1 = 1.46929,\ \upsilon_{\xi_1} = \begin{pmatrix} -0.21690 \\ -0.12993 \\ -0.94551 \\ 0.20724 \end{pmatrix} \text{ in } \xi_2 = 0.317019,\ \upsilon_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0.32298 \\ 0.62469 \\ 0.51984 \\ 0.48500 \end{pmatrix}.$$

Na podlagi izračunanih lastnih vrednosti in njim pripadajočim lastnih vektorjev izberemo matriko N^{-1}, pri tem pa brez izgube splošnosti preuredimo vrstni red lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. Pri tem prvi stolpec v matriki ustreza lastnim vektorjem prve stabilne lastne vrednosti, drugi stolpec lastnim vektorjem druge stabilne lastne vrednosti, tretji stolpec lastnim vektorjem prvega nestabilne lastne vrednosti in zadnji stolpec lastnim vektorjem druge nestabilne lastne vrednosti.

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.766244 & -0.04313 & -0.21690 & 0.32298 \\ -0.62843 & 0.64354 & -0.12993 & 0.62469 \\ 0.04467 & -0.42059 & -0.94551 & 0.51984 \\ 0.12543 & -0.63804 & 0.20724 & 0.48500 \end{pmatrix}$$ od koder dobimo inverzno matriko N kot

$$N = \begin{pmatrix} 1.14 & -0.25 & -0.26 & -0.16 \\ 0.63 & 0.59 & -0.39 & -0.76 \\ 0.05 & 0.15 & -0.92 & 0.76 \\ 0.51 & 0.77 & -0.05 & 0.78 \end{pmatrix}$$

Od tod izrazimo $\Lambda^* = -N_{22}^{-1} N_{21} = \begin{pmatrix} -0.21 & -0.26 \\ -0.26 & -0.41 \end{pmatrix}$.

Iz *Principa optimalnosti* velja, da je odvod po funkciji koristnosti enak λ_1. Tako kontrolo c zapišemo tudi kot $c = U(k, \lambda) = \lambda_1^{-1}$, od koder potrošnjo zapišemo izključno kot funkcijo opazljivih spremenljivk stanja $C(k) = U(k, \Lambda(k))$. Ko imamo sistem podan izključno v obliki funkcije opazljivih spremenljivk, ga lahko lineariziramo. Tako dobimo

$$C_{k_1} = U_{k_1} + U_{\lambda_1} \Lambda_{11}^* + U_{\lambda_2} \Lambda_{12}^*$$
$$C_{k_2} = U_{k_2} + U_{\lambda_1} \Lambda_{21}^* + U_{\lambda_2} \Lambda_{22}^*$$

Končen učinek perturbacije podamo z uporabo enačb (4.17), od koder dobimo

$$C_{k_1} = 0.2249$$
$$C_{k_2} = 0.2793$$

Na podlagi uporabljenih podatkov zaključimo, da povečanje vmesnega kapitala za enoto poveča potrošnjo za 0.2249 enote, medtem ko povečanje produktivnega kapitala za enoto poveča potrošnjo posameznikov za 0.2793 enote.

2. primer

$u(c)=\dfrac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, $f(k_2)=k_2^{\alpha}$, $\alpha=0.35$, $\delta_1=1.0$, $\delta_2=0.2$, $\beta=0.2$, $\gamma=1.0$ in $\rho=0.05$. Tako dobimo steady state stanja $k_2^*=1.19047$; $k_1^*=0.2381$; $c^*=0.77721$; $\lambda_1^*=1.28665$ in $\lambda_2^*=1.60832$. Matrika A je enaka

$$A=\begin{pmatrix} -1.2 & 0.27 & 0.60 & 0 \\ 1.0 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & -1.0 \\ 0 & 0.08 & -0.27 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Stabilna lastna vektorja in njima pripadajoče lastne vrednosti so enaki

$$\mu_1=-1.41306,\ \upsilon_{\mu_1}=\begin{pmatrix} -0.77115 \\ 0.63570 \\ -0.01223 \\ -0.032565 \end{pmatrix} \text{ in } \mu_2=-0.1274,\ \upsilon_{\mu_2}=\begin{pmatrix} -0.06362 \\ -0.87627 \\ 0.28060 \\ 0.38649 \end{pmatrix}$$

Medtem sta dva nestabilna lastna vektorja in njima pripadajoče lastne vrednosti enake

$$\xi_1=1.46306,\ \upsilon_{\xi_1}=\begin{pmatrix} -0.22633 \\ -0.13609 \\ -0.943322 \\ 0.20010 \end{pmatrix} \text{ in } \xi_2=0.1774,\ \upsilon_{\xi_2}=\begin{pmatrix} -0.30659 \\ -0.81237 \\ -0.33826 \\ -0.36281 \end{pmatrix}.$$

Na podlagi izračunanih lastnih vrednosti in njim pripadajočim lastnih vektorjev izberemo matriko N^{-1} kot

$$N^{-1}=\begin{pmatrix} -0.77115 & -0.06362 & -0.22633 & -0.30659 \\ 0.63570 & -0.87627 & -0.13609 & -0.81237 \\ -0.01223 & 0.28060 & -0.94332 & -0.33826 \\ -0.03257 & 0.38649 & 0.20010 & -0.36281 \end{pmatrix}$$ in inverzna matrika

$$N = \begin{pmatrix} -1.59 & -0.34 & 0.38 & 0.23 \\ 0.53 & 0.70 & 0.18 & 0.96 \\ -0.06 & -0.06 & -0.89 & 0.76 \\ 0.68 & 0.75 & -0.34 & -1.34 \end{pmatrix}$$

Od tod izrazimo $\Lambda^* = -N_{22}^{-1}N_{21} = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.20 \\ 0.26 & 0.28 \end{pmatrix}$ in $\begin{matrix} C_{k_1} = 0.064 \\ C_{k_2} = 0.080 \end{matrix}$. To pomeni, da se pri povečanju vmesnega kapitala za enoto, potrošnja poveča za 0.064 enote. Pri povečanju produktivnega kapitala za enoto, pa se potrošnja poveča za 0.08 enote.

3. primer[81]

$u(c) = \dfrac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$, $f(k_2) = k_2^{\alpha}$, $\alpha = 0.25$, $\delta_1 = 1.0$, $\delta_2 = 0.15$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 1.0$ in $\rho = 0.05$. Tako dobimo steady state stanja $k_2^* = 1.0$; $k_1^* = 0.15$; $c^* = 0.82$; $\lambda_1^* = 1.2195$ in $\lambda_2^* = 1.5244$. Matrika *A* je enaka

$$A = \begin{pmatrix} -1.2 & 0.31 & 0.67 & 0 \\ 1.0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & -1.0 \\ 0 & 0.23 & -0.25 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Od tod sta stabilna lastna vektorja in njima pripadajoče lastne vrednosti enake

$$\mu_1 = -1.3721,\ \upsilon_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 0.76963 \\ -0.62980 \\ 0.03741 \\ 0.09810 \end{pmatrix} \text{ in } \mu_2 = -0.25715,\ \upsilon_{\mu_2} = \begin{pmatrix} -0.07754 \\ 0.72367 \\ -0.37915 \\ -0.57143 \end{pmatrix}$$

Medtem ko sta dva nestabilna lastna vektorja in njima pripadajoče lastne vrednosti enake

$$\xi_1 = 1.42201,\ \upsilon_{\xi_1} = \begin{pmatrix} -0.25550 \\ -0.16253 \\ -0.93925 \\ 0.16156 \end{pmatrix} \text{ in } \xi_2 = 0.45060,\ \upsilon_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0.32166 \\ 0.70361 \\ 0.46102 \\ 0.43467 \end{pmatrix}.$$

[81] Primer je povzet po Judd (1998). Zaradi zaokroževanja vmesnih rezultatov pri Juddu in tiskarskih napak, končni rezultati niso enaki.

Na podlagi izračunanih lastnih vrednosti in njim pripadajočim lastnih vektorjev izberemo matriko N^{-1} kot

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.76963 & -0.07754 & -0.2555 & 0.32166 \\ -0.6298 & 0.72367 & -0.16253 & 0.70361 \\ 0.03741 & -0.37915 & -0.93925 & 0.46102 \\ 0.0981 & -0.57143 & 0.16156 & 0.43467 \end{pmatrix} \text{ in}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1.18 & 0.20 & 0.32 & 0.20 \\ 0.57 & 0.54 & -0.40 & -0.88 \\ 0.47 & 0.71 & -0.01 & 0.90 \\ 0.05 & 0.12 & -0.96 & 0.79 \end{pmatrix}$$

Kar pomeni, da je $\Lambda^* = -N_{22}^{-1}N_{21} = \begin{pmatrix} -0.14 & -0.22 \\ -0.26 & -0.31 \end{pmatrix}$ in $\begin{matrix} C_{k_1} \\ C_{k_2} \end{matrix} = \begin{matrix} 0.19 \\ 0.23 \end{matrix}$.

Iz rezultata izhaja, da povečanje produktivnega kapitala k_2 za enoto poveča potrošnjo za 0.23 enote, medtem ko povečanje vmesnega kapitala k_1 za enoto poveča potrošnjo za 0.19 enote.

4.4 Komentar rezultatov

Pri perturbacijah modela gospodarske rasti pokažemo, da vsakršno povečanje kapitala poviša potrošnjo posameznikov. To je tudi pričakovan rezultat, če vemo, da z investiranjem povišujemo založenost gospodarstva s kapitalom, ki ga uporabimo v proizvodnem procesu. Pri tem je učinek povečanja potrošnje posameznikov višji pri povečevanju produktivnega kapitala in nekoliko manjše pri povečanju vmesnega kapitala. Če izhajamo iz modelov endogene rasti, ki izpostavljajo pomembnost produktivnega kapitala, vidimo, da lahko na podlagi dobljenih rezultatov pritrdimo tej tezi.

Iz simulacij izhaja, da je učinek perturbacije v veliki meri odvisen od uporabljenih vrednostih spremenljivke α. Zaradi tega tudi simuliramo učinke na primeru treh različnih scenarijev. Vprašanje pri tem je, kako zanesljive so dobljene številke in kakšna je njihova uporaba? Ker izhajamo iz specifikacije proizvodnih dejavnikov, simuliramo le različne vrednosti deležev kapitala: 0.25, 0.3 in 0.35. Pri tem ugotovimo, da je učinek eksogenega šoka največji v primeru, ko predpostavimo, da je delež kapitala v gospodarstvu enak 0.30 in najmanjši, ko je ta 0.35. V tem primeru je model hkrati tudi najbolj stabilen in najbolj učinkovito amortizira razne eksogene šoke. Za podrobnejšo simulacijo, ki bi upoštevala značilnosti slovenskega gospodarstva, bi bilo treba narediti več ekonometričnih ocen vrednosti uporabljenih koeficientov. Žal nam te niso bile na voljo, tako da smo uporabili mednarodno priznane in najbolj uporabljane vrednosti koeficientov. Glede na spreminjanje vzorcev vedenja posameznikov pri sprejemanju prihodnjih odločitev se takšna izbira zdi zelo racionalna, vendar se omejitev nanaša na različno družbeno okolje, ki se razlikuje od okolja drugih razvitih držav z dolgo demokratično tradicijo. Alesina in Fuchs-Schündeln (2005) namreč pokažeta, da se preference prebivalstva bivših socialističnih držav bistveno razlikujejo od drugih demokratičnih držav. Zaradi tega je uporaba že uveljavljenih vrednosti koeficientov rahlo omejena.

V vseh primerih smo upoštevali, da se nekaj kapitala v procesu transformacije izgubi, βk_1, pri čemer smo predpostavili, da je vrednost koeficienta β enaka 0.20. V kolikor bi želeli simulirati model na primeru slovenskega gospodarstva, bi potrebovali ocenjene vrednosti koeficienta izgube v slovenskem gospodarstvu, tako pa smo uporabili splošno uporabljano vrednost koeficienta. Ker se nahajamo v zveznem času, smo za vrednost amortizacije produktivnega kapitala vzeli 1.

Ker gre v primeru perturbacij za lokalno deterministično določen steady state, so vse ocene občutljivosti lokalne in veljajo izključno v okolici steady state. Tako se omejitev nanaša na izbor ustreznega modela gospodarske rasti, ki smo ga uporabili. Naslednja omejitev pri razlagi rezultatov se nanaša na osnovno predpostavko regularnih perturbacij, da se po učinku šoka steady state stanje modela ne spremeni in da se sistem simultano vrne nazaj v steady state. V kolikor bi posamezen šok imel trajne učinke, takšna predpostavka ni ustrezna, steady state pa bi se na dolgi rok lahko bistveno spremenil. Na kakovost rezultatov pa vpliva tudi prisotnost vseh napak, ki smo jih akumulirali preko procesa numerične analize.

SKLEPNE MISLI

V magistrskem delu simuliramo model gospodarske rasti. Pri tem uporabimo poenostavljen Romerjev dvosektorski model tehničnega napredka, ki ga povežemo s konceptom *time to build* Kydlanda in Prescotta. Izbira za uporabljen model je logična posledica razvoja teorije gospodarske rasti, kjer dominira teorija endogene rasti (glej tudi Steinbacher in Steinbacher 2005) in zahtevnosti numeričnega reševanja, ki se pri uporabi bolj realističnih modelov bistveno poveča. Koncept *time to build* vključimo z namenom, da se v največji možni meri približamo realni sliki proizvodnega procesa. S perturbiranjem okrog deterministično določenega steady state ocenimo, kako se spreminja potrošnja posameznikov ob spremembah produktivnega in vmesnega kapitala. Gre za t.i. koncept *impulse-response*, ki je namenjen ocenjevanju nihanj od neke stabilne rešitve. Pri tem predpostavimo, da je učinek šoka enkraten in se po njem stanje vrne v svoje dolgoročno ravnovesje.

Na podlagi analize je razvidno, da je učinek šoka na koristnost prebivalstva večji, kadar je delež vmesnega kapitala k_2 v gospodarstvu 0.30. V tem primeru pa je stabilnost modela največja. V vseh primerih je produktivni kapital najbolj občutljiv proizvodni dejavnik, ki ima največji vpliv na spremembo koristnosti posameznikov. Pri tem se postavlja vprašanje, kako zagotoviti visoke ravni kapitala v gospodarstvu, ne da bi pri tem povzročali nepotrebne in škodljive distorzije, ki jih nismo zajeli v modelu in bi kot takšne lahko spreminjale uporabljene atribute. Judd (1985a; 1987; 1999), Chamley (1986), Jones in drugi (1993) in mnogi drugi so mnenja, da je to možno storiti preko davčne politike. Omenjeni avtorji potrdijo, da je dolgoročno Pareto optimalna davčna stopnja na produktivni kapital enaka nič. S tem se močno približamo Ramseyevi optimalni obdavčitvi (Ramsey 1927), ki minimizira raven mrtve izgube. Ker pa bi s podrobnejšim poseganjem v davčno politiko in v politiko optimalnih davkov presegli namen magistrskega dela, sklepe nekaterih najbolj relevantnih avtorjev s področja optimalnih davkov zgolj omenimo.

Kljub obetavnim in pričakovanim rezultatom analize, pa se je treba zavedati, da je ekonomija mnogo kompleksnejši prostor, kot pa so možnosti za njeno razumevanje, kar nekoliko omejuje uporabnost matematičnih in numeričnih metod pri njeni analizi in interpretaciji. Obenem pa je z vse večjim razmahom računalniške tehnologije in njenim nadaljnjim izboljševanjem že v doglednem času možno pričakovati, da bo tudi ta slabost v veliki meri odpravljena. S tem pa bo sposobnost razlaganja tudi najzahtevnejših ekonomskih modelov bistveno lažja.

LITERATURA

1. Abramovitz Milton in Irene Stegun: Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1970, 1059 str.
2. Abramovitz Moses: Resource and Output Trends in the United States since 1870. American Economic Review. Nashville: American Economic Association, 46(1956), 2, str. 5-23.
3. Abramovitz Moses: Catching Up, Forging Ahead, and Falling Behind. Journal of Economic History. Wilmington: Economic History Association, 46(1986), 1, str. 385-406.
4. Acemoglu Daron: A Microfoundation for Social Increasing Returns in Human Capital Accumulation. Quarterly Journal of Economics. Massachusetts: MIT Press, 111(1996), 3, str. 779-804.
5. Acemoglu Daron: Training and Innovation in an Imperfect Labour Market. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 64(1997), 3, str. 445-464.
6. Aghion Phillipe in Peter Howitt: A Model of Growth Through Creative Destruction. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 60(1992), 2, str. 323-351.
7. Alesina Alberto in Nicola Fuchs-Schündeln: Good Bye Lenin (Or Not?): The Effect of Communism on People's Preferences. NBER Working Paper. Cambridge: NBER, 11700(2005), str. 1-44.
8. Amman Hans: Numerical Methods for Linear-Quadratic Models. V: Amman, Hans, David Kendrick in John Rust. (uredniki). Handbook of Computational Economics. Amsterdam: North-Holland, 1996, str. 587-618.
9. Araujo Aloisio: The Once But Not Twice Differentability of the Policy Function. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 59(1991), 5, str. 1383-1393.
10. Araujo Aloisio in Jose Scheinkman: Smoothness, Comparative Dynamics and the Turnpike Property. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 45(1977), 3, str. 601-620.
11. Arnold Lutz: Growth, Welfare, and Trade in an Integrated Model of Human Capital Accumulation and Research. Journal of Macroeconomics. Amsterdam: Elsevier, 20(1998), 1, str. 81-105.
12. Arnold Lutz: Stability of the Market Equilibrium in Romer's Model of Endogenous Technological Change: A Complete Characterization. Journal of Macroeconomics. Amsterdam: Elsevier, 22(2000a), 1, str. 69-84.
13. Arnold Lutz: Endogenous Technological Change: A Note on Stability. Economic Theory. New York: Springer Verlag, 16(2000b), str. 219-226.
14. Arnold Lutz: The Dynamics of the Jones R&D Growth Models. Review of Economic Dynamics. Amsterdam: Elsevier, 9(2006), 1, str. 143-152.
15. Arrow Kenneth: The Economic Implications of Learning by Doing. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 29(1962), 3, str. 155-173.

16. Arrow Kenneth, Hollis Chenery, Bagicha Mihnas in Robert Solow: Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics. Massachusetts: MIT Press, 43(1961), 3, str. 225-250.
17. Aruoba Boragan, Jesus Fernandez-Villaverde in Juan Francisco Rubio-Ramirez: Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper. No. 2003-27, 2003, str. 1:39.
18. Asada Toichiro, Willi Semmler in Andreas Novak: Endogenous Growth and the Balanced Growth Equilibrium. Ricerche Economiche. Venice: University of Venice, 52(1998), 2, str. 189-212.
19. Barro Robert in Xavier Sala-i-Martin: Economic Growth. New York: McGraw-Hill, 1995, 539 str.
20. Becker Gary: Human Capital. New York: Columbia University Press, 1964, 390 str.
21. Becker Gary, Kevin Murphy in Robert Tamura: Human Capital, Fertility, and Economic Growth. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 98(1990), 5, str. S12-S37.
22. Bellman Richard: Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957, 342 str.
23. Benhabib Jess in Roger Farmer: Indeterminacy and Increasing Returns. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 63(1994), 1, str. 19-41.
24. Benhabib Jess in Jordi Gali: On Growth and Indeterminacy: Some Theory and Evidence. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Amsterdam: North Holland, 43(1995), 1, str. 163-211.
25. Benhabib Jess in Kazuo Nishimura: The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 21(1979), 3, str. 421-444.
26. Benhabib Jess in Roberto Perli: Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 63(1994), 1, str. 113-142.
27. Benhabib Jess, Roberto Perli in Danyang Xie: Monopolistic Competition, Indeterminacy and Growth. Richerce Economiche. Venice: University of Venice, 48(1994), 4, str. 279-298.
28. Bensoussan Alain: Perturbation Methods in Optimal Control. New York: John Wiley, 1988, 573 str.
29. Benveniste Lawrence in Jose Scheinkman: On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 47(1979), 3, str. 727-732.
30. Blackburn Keith: Can Stabilisation Policy Reduce Long-Run Growth? Economic Journal. Cambridge: Royal Economic Society, 109(1999), 455, str. 67-77.
31. Blackwell David: Discounted Dynamic Programming. Annals of Mathematical Statistics. Baltimore: American Statistical Association, 36(1965), 1, str. 226-235.

32. Blanchard Olivier Jean in Charles Kahn: The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 48(1980), 5, str. 1305-1311.
33. Blume L, D. Easley, in M. O'Hara: Characterization of Optimal Plans for Stochastic Dynamic Programs. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 28(1982), 1, str. 221-234.
34. Boldrin Michele, Kazuo Nishimura, Tadashi Shigoka in Makoto Yano: Chaotic Equilibrium Dynamics in Endogenous Growth Model. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 96(2001), 1, str. 97-132.
35. Boldrin Michele in Aldo Rustichini: Growth and Indeterminacy in Dynamic Models with Externalities. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 62(1994), 2, str. 323-342.
36. Brock William in Leonard Mirman: Optimal Economic Growth and Uncertainty: the Discounted Case. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 4(1972), 2, str. 479-513.
37. Brock William in Leonard Mirman: Optimal Economic Growth and Uncertainty: the No Discounted Case. International Economic Review. Philadelphia: University of Pennsylvania, 14(1973), 2, str. 497-513.
38. Burnside Craig: Solving Asset Pricing Models with Gaussian Shocks. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 22(1998), 1, str. 329-340.
39. Caballe Jordi in Manuel Santos: On Endogenous Growth with Physical Human Capital. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 101(1993), 6, str. 1042-1067.
40. Cass David: Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 32(1965), 3, str. 233-240.
41. Cass David in Karl Shell: Do Sunspots Matter? Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 91(1983), 2, str. 193-227.
42. Chamley Christophe: Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 54(1986), 3, str. 607-622.
43. Chamley Christophe: Externalities and Dynamics in Models of Learning by Doing. International Economic Review. Philadelphia: University of Pennsylvania, 34(1993), 2, str. 1-27.
44. Chen Baoline in Peter Zadrozny: Higher-Moments in Perturbation Solution of the Linear-Quadratic Exponential Gaussian Optimal Control Problem. Computational Economics. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 21(2003), 1, str. 45-64.
45. Chiang Alpha: Fundamental Methods of Mathematical Economics. Third Edition. New York: McGraw-Hill, 1985, 788 str.
46. Chiappori Pierre Andre, Pierre Yves Geoffard in Roger Guesnerie: Sunspot Fluctuations around the Steady State: The Case of Multidimensional, One-Step Forward Looking

Economic Models. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 60(1992), 5, str. 1097-1126.
47. Chow Shui-Nee in Jack Hale: Methods of Bifurcation Theory. New York: Springer Verlag, 1982, 515 str.
48. Christiano Lawrence: Why Does Inventory Investment Fluctuate So Much? Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 21(1988), 1, str. 247-280.
49. Christiano Lawrence: Solving the Stochastic Growth Models by Linear-Quadratic Approximation and by Value-Function Iteration. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 23-26.
50. Christiano Lawrence: Linear-Quadratic Approximation and Value-Function Iteration: A Comparison. Journal of Business Economics and Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990a), 1, str. 99-113.
51. Christiano Lawrence in Jonas Fisher: Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 24(2000), str. 1179-1232.
52. Cobb Charles in Paul Douglas: A Theory of Production. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 18(1928), 1, str. 139-165.
53. Coleman Wilbur: Solving the Stochastic Growth Model by Policy-Function Iteration. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 27-30.
54. Collard Fabrice in Michel Juillard: Accuracy of Stochastic Perturbation Methods: The Case of Asset Pricing Model. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 25(2001), , str. 979-999.
55. Cooley Thomas: Frontiers of Business Cycle Research. Princeton: Princeton University Press, 1995, 419 str.
56. Cooley Thomas in Edward Prescott: Economic Growth and Business Cycle. V Frontiers of Business Cycle Research. Thomas Cooley (urednik). Princeton: Princeton University Press, 1995, str. 1-38.
57. Danthine Jean-Pierre: Martingale, Market Efficiency and Commodity Prices. European Economic Review. Amsterdam: European Economic Association, 10(1977), 1, str. 1-17.
58. den Haan Wouter in Albert Marcet: Accuracy in Simulations. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 61(1994), 1, str. 3-17.
59. de Hek Paul: On Endogenous Growth under Uncertainty. International Economic Review. Pennsylvania: University of Pennsylvania 40(1999), 3, str. 727-744.
60. Denardo Eric: Contraction Mappings in the Theory Underlying Dynamic Programming. SIAM Review 9(1967), 2, str. 165-177.
61. Diamond Peter in James Mirrlees: Optimal Taxation and Public Production: I – Production Efficiency. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 61(1971), 1, str. 8-27.
62. Diamond Peter in James Mirrlees: Optimal Taxation and Public Production: I – Production Efficiency. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 61(1971a), 3, str. 707-715.

63. Díaz-Giménez Javier: Linear-Quadratic Approximations: An Introduction. V Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Ramon Marimon in Andrew Scott (urednika). Oxford: Oxford University Press, 2004, str. 13-29.
64. Dixit Avinash in Joseph Stiglitz: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 67(1977), 3, str. 297-308.
65. Donaldson John in Rajnish Mehra: Stochastic Growth with Correlated Production Shocks. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 29(1983), 2, str. 282-312.
66. Dorfman Robert: An Economic Interpretation of Optimal Control Theory. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 59(1969), 5, str. 817-831.
67. Dotsey Michael in Ching Sheng Mao: How Well do Linear Approximation Methods Work? Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 29(1992), 1, str. 25-58.
68. Duffy John in Paul McNelis: Approximating and Simulating the Stochastic Growth Model: Parameterized Expectations, Neural Networks, and the Genetic Algorithm. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 25(2001), str. 1273-1303.
69. Ethier Wilfred: National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 72(1982), 3, str. 389-405.
70. Evans George in Seppo Honkapohja: Local Convergence of Recursive Learning to Steady States and Cycles in Stochastic Nonlinear Models. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 63(1995), 1, str. 195-206.
71. Evans George in Seppo Honkapohja: Economic Dynamics with Learning: New Stability Results. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 65(1998), 1, str. 23-44.
72. Evans George, Seppo Honkapohja in Paul Romer: Growth Cycles. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 88(1998), 3, str. 495-515.
73. Feichtinger Gustav: Hopf Bifurcation in an Advertising Diffusion Model. Journal of Economic Behavior and Organization. Amsterdam: North Holland, 17(1992), 3, str. 401-411.
74. Fernandez-Villaverde Jesus in Juan Rubio-Ramirez: Solving DSGE Models with Perturbation Methods and a Change of Variables. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, (2006) prihajajoče, str. 1-23.
75. Gali Jordi: Product Diversity, Endogenous Markups, and Development Traps. Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 36(1995), 1, str. 39-63.
76. Gaspar Jesper in Kenneth Judd: Solving Large-Scale Rational Expectations Models. Macroeconomic Dynamics. New York: Cambridge University Press, 1(1997), 1, str. 45-75.
77. Greene William: Econometric Analysis. New Jersey: Prentice Hall, 2004, 1026 str.

78. Grossman Gene in Elhanan Helpman: Product Development and International Trade. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 97(1989), 4, str. 1261-1283.
79. Grossman Gene in Elhanan Helpman: Quality Ladders in the Theory of Growth. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 58(1991), 1, str. 43-61.
80. Hamilton James: A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 57(1989), 2, str. 357-384.
81. Hamilton James: Time Series Analysis. New Jersey: Princeton, 1994, 799 str.
82. Hansen Lars in Thomas Sargent: Recursive Models of Dynamic Linear Economies. Massachusetts: MIT, 2005, 519 str.
83. He Yijun in William Barnett: Singularity Bifurcations. Journal of Macroeconomics. Amsterdam: Elsevier, 26(2006), 1, str. 5-22.
84. Hinch E.J.: Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1995, 160 str.
85. Holmes Mark: Introduction to Perturbation Methods. New York: Springer Verlag, 1995, 337 str.
86. Howitt Peter: Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 107(1999), 4, str. 715-730.
87. Huffman Gregory: A Dynamic Equilibrium Model of Asset Prices and Transaction Volume. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 95(1987), 1, str. 138-159.
88. Imrohoroglu Selahattin: A Recursive Forward Simulation Method for Solving Rational Expectations Models. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 18(1994), 6, str. 1051-1068.
89. Inada Ken-Ichi: On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 30(1963), 2, str. 119-127.
90. Jones Charles: R&D-Based Models of Economic Growth. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 103(1995), 4, str. 759-784.
91. Jones Charles: Sources of U.S. Economic Growth in a World of Ideas. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 92(2004), 1, str. 220-239.
92. Jones Larry in Rodolfo Manuelli: The Sources of Growth. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland 21(1997), 1, str. 75-114.
93. Jones Larry, Rodolfo Manuelli in Peter Rossi: Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 101(1993), 3, str. 485-517.

94. Jorgenson Dale in Zvi Griliches: The Explanation of Productivity Change. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 34(1967), 3, str. 249-283.
95. Jovanovic Boyan in Yaw Nyarko: Learning by Doing and the Choice of Technology. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 64(1996), 6, str. 1299-1310.
96. Judd Kenneth: On the Performance of Patents. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 53(1985), 3, str. 567-586.
97. Judd Kenneth: Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model. Journal of Public Economics. Amsterdam: North Holland, 28(1985a), 1, str. 59-84.
98. Judd Kenneth: A Dynamic Theory of Factor Taxation. American Economic Review. Nashville: American Economic Association, 77(1987), 2, str. 42-48.
99. Judd Kenneth: Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 58(1992), 2, str. 410-452.
100. Judd Kenneth: Hybrid Galerkin-Perturbation Methods Applied to Economic Problems. Hoover Institute, 1995, 30 str.
101. Judd Kenneth: Approximation, Perturbation, and Projection Solution Methods in Economics. V: Amman, Hans, David Kendrick, in John Rust. (uredniki). Handbook of Computational Economics. Amsterdam: North-Holland, 1996, str. 508-585.
102. Judd Kenneth: Computational Economics and Economic Theory: Substitutes or Complements? Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 21(1997), 6, str. 907-942.
103. Judd Kenneth: Numerical Methods in Economics. Massachusetts: MIT Press, 1998, 633 str.
104. Judd Kenneth: Optimal Taxation and Spending in General Competitive Growth Models. Journal of Public Economics. Amsterdam: North Holland, 71(1999), 1, str. 1-26.
105. Judd Kenneth: Perturbation Methods with Nonlinear Changes in Variables. Stanford: Hoover Institute Computational Paper, 2002, str. 1-22.
106. Judd Kenneth in Sy-Ming Guu: Perturbation Solution Methods for Economic Growth Models. Varian Hal, (ed.), V Economic and Financial Modeling with Mathematica. New York: Springer Verlag, 1993, str. 80-103.
107. Judd Kenneth in Sy-Ming Guu: Bifurcation Approximation Methods Applied to Asset Market Equilibrium. Hoover Institution, 1996.
108. Judd Kenneth in Sy-Ming Guu: Asympthotic Methods for Aggregate Growth Models. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 21(1997), 6, str. 1025-1042.
109. Judd Kenneth in He-Hui Jin: Perturbation Methods for General Dynamic Stochastic Models. Stanford: Hoover Institute Computational Paper, 2002, str. 1-44.
110. Kaldor Nicholas: Capital Accumulation and Economic Growth. Lutz F. in D. Hague. (urednika). The Theory of Capital. London: Macmillan, 1961, str. 177-222.
111. Kevorkian Jack in Julian Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics. New York: Springer Verlag, 1981, 558 str.

112. Kevorkian Jack in Julian Cole: Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. New York: Springer Verlag, 1996, 632 str.
113. Khuri Andre: Advanced Calculus with Applications in Statistics. New York: John Wiley & Sons, 2003, 681 str.
114. King Robert, Charles Plosser in Sergio Rebelo: Production, Growth, and Business cycles I: the Basic Neoclassical Model. Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 21(1988), 2-3, str. 191-232.
115. King Robert, Charles Plosser in Sergio Rebelo: Production, Growth, and Business cycles: Technical Appendix. Computational Economics. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 20(2002), 1, str. 87-116.
116. Klein Paul: Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 24(2002), 10, str. 1405-1423.
117. Koopmans Tjalling: On the Concept of Optimal Economic Growth. Pontificiae Academiae Scientarium Scripta Varia. Rim: Pontificiae Academiae Scientarium, 28(1965), 1, str. 225-300.
118. Kydland Finn in Edward Prescott: Time to Build and Aggregate Fluctuations. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 50(1982), 6, str. 1345-1370.
119. Kydland Finn in Edward Prescott: The WorkWeek of Capital and its Cyclical Implications. Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 21(1988), 2, str. 343-360.
120. Lancaster Kelvin: Mathematical Economics. New York: Dover Publications, 1987, 411 str.
121. Levhari David in T. Srivinasan: Optimal Savings under Uncertainty. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 36(1969), 2, str. 153-163.
122. Ljungqvist Lars in Thomas Sargent: Recursive Macroeconomic Theory. Massachusetts: MIT, 2000, 1081 str.
123. Lucas Robert: Expectations and Neutrality of Money. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 4(1972), 2, str. 103-124.
124. Lucas Robert: Econometric Policy Evaluation: A Critique. V Brunner Karl in Allan Meltzer (urednika). The Phillips Curve and Labor Markets. Vol. 1. of Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Amsterdam: North-Holland, 1976, str. 19-46.
125. Lucas Robert: Models of Business cycle. New York: Basil Blackwell, 1987, 115 str.
126. Lucas Robert: On the Mechanics of Economic Development. Journal of Monetary Economics. Amsterdam: Elsevier Science, 22(1988), 1, str. 3-42.
127. Lucas Robert in Edward Prescott: Investment under Uncertainty. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 39(1971), 5, str. 659-681.
128. Magill Michael: A Local Analysis of N-Sector Capital Accumulation under Uncertainty. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 15(1977), 1, str. 211-219.

129. Mankiw Gregory, David Romer in David Weil: A Contribution to the Empirics of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics. Massachusetts: MIT Press, 107(1992), 2, str. 407-437.
130. Marcet Albert: Simulation Analysis of Dynamic Stochastic Models: Applications to Theory and Estimation. V: Chistopher Sims (urednik). Advances in Econometrics Sixth World Congress. Vol. II. Cambridge: Cambridge University Press, 1994, str. 91-118.
131. Marimon Ramon in Andrew Scott: Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Oxford: Oxford University Press, 2004, 280 str.
132. Matsuyama Kiminori: Complementarities and Cumulative Processes in Models of Monopolistic Competition. Journal of Economic Literature. Nashville: American Economic Association, 33(1995), 2, str. 701-729.
133. Matsuyama Kiminori: Growing through Cycles. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 67(1999), 2, str. 335-347.
134. McGrattan Ellen: Solving the Stochastic Growth Model by Linear-Quadratic Approximation. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 41-43.
135. McGrattan Ellen: Solving the Stochastic Growth Model with a Finite Element Method. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 20(1996), 1-3, str. 19-42.
136. McGrattan Ellen: Application of Weighted Residual Methods to Dynamic Economic Models. V: Ramon Marimon in Andrew Scott (urednika). Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Oxford: Oxford University Press, 2004, str. 114-142.
137. Meyer Carl: Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Philadelphia: SIAM, 2000, 718 str.
138. Mincer Jacob: Investment in Human Capital and Personal Income Distribution. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 66(1958), 4, str. 281-302.
139. Miranda Mario in Paul Fackler: Applied Computational Economics and Finance. MIT: MIT Press, 2004, 528 str.
140. Mirman Leonard in Itzhak Zilcha: On Optimal Growth under Uncertainty. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 11(1975), 3, str. 329-339.
141. Mulligan Casey in Xavier Sala-i-Martin: A Note on the Time-Elimination Method for Solving Recursive Dynamic Economic Models. NBER Technical Working Paper. Cambridge: NBER, 16(1991), str. 1-28.
142. Mulligan Casey in Xavier Sala-i-Martin: Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth. Quarterly Journal of Economics. Massachusetts: MIT Press, 108(1993), 3, str. 739-773.
143. Novales Alfonso, Emilio Domingues, Javier Perez in Jesus Ruiz: Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Eigenvalue-Eigenvector Decomposition. Marimon Ramon in Andrew Scott (urednika), Computational Methods for the Study of Dynamic Economies. Oxford: Oxford University Press, 2004, str. 62-92.

144. Phillips Peter: Best Uniform and Modified Padé Approximants to Probability Densities in Econometrics. Werner Hildebrand, ed., Advances in Econometrics. Cambridge: Cambridge University Press, 1982, str. 123-167.
145. Plosser Charles: Understanding Real Business Cycles. Journal of Economic Perspectives. Nashville: American Economic Association, 3(1989), 1, str. 51-78.
146. Press William, Saul Teukolsky, William Vetterling in Brian Flannery: Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press, 2002, 994 str.
147. Rabiner L. in B. Juang: An Introduction to Hidden Markov Models. IEEE ASSP Magazine. New York: Institute for Electrical and Electronic Engineers, 8(1986), 1, str. 4-16.
148. Ramey Garey in Valerie Ramey: Cross-Country Evidence on the Link Between Volatility and Growth. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 85(1995), 5, str. 1138-1151.
149. Ramsey Frank: A Contribution to the Theory of Taxation. Economic Journal. London: Royal Economic Society, 37(1927), 145, str. 47-61.
150. Ramsey Frank: A Mathematical Theory of Saving. Economic Journal. London: Royal Economic Society, 38(1928), 152, str. 543-559.
151. Reiter Michael: Estimating the Accuracy of Numerical Solutions to Dynamic Optimization Problems. Working Paper. Barcelona: Universitat Pompeu Fabra, (2000), str. 1-18.
152. Revankar Nagesh: A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 39(1971), 1, str. 61-71.
153. Romer Paul: Increasing Returns and Long-Run Growth. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 94(1986), 5, str. 1002-1037.
154. Romer Paul: Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 77(1987), 2, str. 56-62.
155. Romer Paul: Endogenous Technological Change. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 98(1990), 5, str. S71-S102.
156. Romer Paul: The Origins of Endogenous Growth. Journal of Economic Perspectives. Nashville: American Economic Association, 8(1994), 1, str. 3-22.
157. Rust John: Numerical Dynamic Programming in Economics. V: Amman Hans, David Kendrick in John Rust. (uredniki). Handbook of Computational Economics. Amsterdam: North-Holland, 1996, str. 619-729.
158. Rust John: Using Randomization to Break the Curse of Dimensionality. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 65(1997), 3, str. 487-516.
159. Rust John, J. Traub in H. Wozniakowski: Is There A Curse of Dimensionality for Contraction Fixed Points in the Worst Case? Econometrica. Evanston: Econometric Society, 70(2002), 1, 285-329.
160. Santos Manuel: Smoothness of the Policy Function in Discrete Time Economic Models. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 59(1991), 5, str. 1365-1382.

161. Santos Manuel: Numerical Solution of Dynamic Economic Models. V: John Taylor in Michael Woodford (urednika). Handbook of Macroeconomics. Vol. 1. Amsterdam: Elsevier, 1999, str. 311-389.
162. Santos Manuel: Accuracy of Numerical Solutions using the Euler Equation Residuals. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 68(2000), 6, str. 1377-1402.
163. Santos Manuel in Adrian Peralta-Alva: Accuracy of Simulations for Stochastic Dynamic Models. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 73(2005), 6, str. 1939-1976.
164. Santos Manuel in Jose Vigo: Accuracy Estimates for a Numerical Approach to Stochastic Growth Models. Discussion Paper No. 107. Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1995, str. 1-45.
165. Scheinkman Jose in Jack Schechtman: A Simple Competitive Model with Production and Storage. Review of Economic Studies. Stanford: The Review of Economic Studies, 50(1983), 3, str. 427-441.
166. Schmitt-Grohe Stephanie in Martin Uribe: Solving Dynamic General Equilibrium Models Using Second-Order Approximation to the Policy Function. Journal of Economic Dynamics and Control. Amsterdam: North-Holland, 28(2004), str. 755-775.
167. Schultz Theodore: Investment in Human Capital. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 51(1961), 1, str. 1-17.
168. Schumpeter Joseph: The Theory of Economic Development. Cambridge: Harvard University Press, 1951, 255 str.
169. Segerstrom Paul, T Anant in Elias Dinopoulus: A Schumpeterian Model of the Product Life-Cycle. American Economic Review. Nashville: American Economic Association 90(1990), 5, str. 1077-1091.
170. Semmler Willi: Solving Nonlinear Dynamic Models by Iterative Dynamic Programming. Computational Economics. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 8(1995), 2, str. 127-154.
171. Sims Christopher: Macroeconomics and Reality. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 48(1980), 1, str. 1-48.
172. Sims Christopher: Solving the Stochastic Growth Model by Backsolving with a Particular Nonlinear Form for the Decision Rule. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 45-47.
173. Sims Christopher: Solving Linear Rational Expectations Models. Computational Economics. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 20(2001), 1, str. 1-20.
174. Slutsky Eugen: The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 5(1937), 1, str. 105-146.
175. Snowdon Brian in Howard Vane: Modern Macroeconomics: Its Origins, Development, and Current State. Cheltenham: Edward Elgar, 2005, 826 str.
176. Solow Robert: A Contribution to the Theory of Economic Growth. Quarterly Journal of Economics. Massachusetts: MIT Press, 70(1956), 1, str. 65-94.
177. Solow Robert: Technical Change and the Aggregate Production Function. Review of Economics and Statistics. Massachusetts: MIT Press, 39(1957), 3, str. 312-320.

178. Solow Robert: Perspectives on Growth Theory. Journal of Economic Perspectives. Nashville: American Economic Association, 8(1994), 1, str. 45-54.
179. Steinbacher Matjaž in Matej Steinbacher: Dinamični modeli gospodarske rasti. Delovni zvezki ICK – ekonomska serija. Ljubljana: ICK, 1(2005), 4, str. 1-35.
180. Stokey Nancy, Robert Lucas in Edward Prescott: Recursive Methods in Economic Dynamics. Cambridge: Harvard University Press, 1999, 588 str.
181. Tauchen George: Solving the Stochastic Growth Model using Quadrature Methods and Value-Function Iteration. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 49-52.
182. Tauchen George in Robert Hussey: Quadrature Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to Nonlinear Asset Pricing Models. Econometrica. Evanston: Econometric Society, 59(1991), 2, str. 371-396.
183. Taylor John in Harald Uhlig: Solving Nonlinear Stochastic Growth Models: A Comparison of Alternative Solution Methods. Journal of Business and Economic Statistics. Washington: American Statistical Association, 8(1990), 1, str. 1-17.
184. Uzawa Hirofumi: Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. International Economic Review. Pennsylvania: University of Pennsylvania 6(1965), 1, str. 18-31.
185. Xie Danyang: Divergence in Economic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equilibria. Journal of Economic Theory. New York: Academic Press, 63(1994), 1, str. 97-112.
186. Young Alwyn: Substitution and Complementarity in Endogenous Innovation. Quarterly Journal of Economics. Massachusetts: MIT Press, 108(1993), 3, str. 775-808.
187. Young Alwyn: Growth without Scale Effects. Journal of Political Economy. Chicago: Chicago University Press, 106(1998), 1, str. 41-63.
188. Zeidler Eberhard: Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications. New York: Springer Verlag, 1995, 406 str.
189. Zeidler Eberhard: Nonlinear Functional Analysis and its Applications: IV Applications to Mathematical Physics. New York: Springer Verlag, 1997, 993 str.
190. Zhang Wei-Bin: Hopf Bifurcations in Multisector Models of Optimal Economic Growth. Economic Letters. Amsterdam: North Holland, 26(1988), 4, str. 329-334.

PRILOGE

Priloga 1: Izpeljava steady state v modelu tehničnega napredka

Pri izpeljavi steady state stopnje gospodarske rasti Romerjevega modela izhajamo iz problema maksimiranja koristnosti posameznikov

$$max\int_0^\infty \frac{C^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}e^{-\rho t}dt \tag{A.1}$$

Pri čemer dinamiko kapitala in znanja opredelimo kot

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}H_Y^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta}-C\\ \dot{A} &= \xi H_A A\\ H_Y+H_A &\leq H\end{aligned} \tag{A.2}$$

Za izpeljavo pogojev prvega reda oblikujemo hamiltonian, kjer imamo dve spremenljivki, agregatno potrošnjo C in količino človeškega kapitala, ki je zaposlen v sektorju raziskav in razvoja H_A, medtem ko λ_1 in λ_2 v hamiltonianu predstavljata Lagrangova multiplikatorja.

$$h(c,H_A)=\frac{C^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}+\lambda_1\left[\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(H-H_A)^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta}-C\right]+\lambda_2\xi H_A A \tag{A.3}$$

Optimalna alokacija maksimira hamiltonian v vsakem obdobju.

V odvisnosti od kontrol C in H_A izpeljemo pogoje za maksimiranje hamiltoniana. To storimo tako, da oblikujemo enačbi gibanja kostanja, ki ju dobimo z odvajanjem hamiltoniana po kapitalu K in tehničnemu napredku A.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \rho\lambda_1-\frac{\partial h}{\partial K}\\ \dot{\lambda}_2 &= \rho\lambda_2-\frac{\partial h}{\partial A}\end{aligned} \tag{A.4}$$

Z odvajanjem po gibanjih obeh lagrangianovih množiteljev dobimo

$$\dot{\lambda}_1=\rho\lambda_1-\lambda_1(1-\alpha-\beta)\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(H-H_A)^{\alpha}L^{\beta}K^{-\alpha-\beta} \tag{A.5}$$

in

$$\dot{\lambda}_2 = \rho\lambda_2 - \lambda_1(\alpha+\beta)\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta-1}(H-H_A)^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta} + \lambda_2\xi H_A \qquad \text{(A.6).}$$

za gibanje multiplikatorja λ_2. Stopnje rasti lagrangianovih množiteljev dobimo z deljenjem (A.5) z λ_1 in (A.6) z λ_2, kar zapišemo

$$g_{\lambda_1} = \rho - (1-\alpha-\beta)\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(H-H_A)^{\alpha}L^{\beta}K^{-\alpha-\beta} \qquad \text{(A.7)}$$

in

$$g_{\lambda_2} = \rho - \xi\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H - \frac{\beta}{\alpha}H_A\right) \qquad \text{(A.8).}$$

Po principu maksimuma velja, da z maksimiranjem Lagrangiana po kontroli dobimo optimalno akcijo, ki je v primeru strogo konkavne funkcije samo eno točko.[82] Pogoj prvega reda za maksimiranje hamiltoniana glede na C dobimo tako, da hamiltonian odvajamo po kontroli C in postavimo na 0. Ker v funkciji koristnosti ne nastopata stanji K in A, dobimo:

$$\begin{aligned} &h_C = 0, u'(C) = 0 \\ &C^{-\gamma} - \lambda_1 = 0 \\ &C^{-\gamma} = \lambda_1 \end{aligned} \qquad \text{(A.9).}$$

Z rezultatom (A.9) eliminiramo C, saj je enačba enolično rešljiva. Pogoj za to je njena konkavnost, iz katere z odvajanjem najdemo maksimum. Rezultat enačbe je pričakovan in izhaja iz racionalnosti posameznikov ter pravi, da posamezniki razdelijo svoje dobrine tako, da imajo isto mejno koristnost v vsakem obdobju. Pri tem ni pomembno, ali so te dobrine namenjene tekoči ali odloženi porabi (investicijam). Pogoje prvega reda za maksimiranje hamiltoniana glede na H_A dobimo z odvajanjem hamiltoniana po H_A. Romer predpostavi, da je proizvodnja patentov linearna tako v A, kot tudi v H_A.

$$\begin{aligned} &h_{H_A} = 0 \\ &\alpha\lambda_1\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(H-H_A)^{\alpha-1}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta} = \xi\lambda_2 A \end{aligned} \qquad \text{(A.10).}$$

Ko odvod enačbe na obeh straneh pomnožimo s $(H - H_A)$ in delimo z $\alpha\lambda_1$, dobimo

$$\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}(H-H_A)^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta} = (H-H_A)\frac{\xi\lambda_2}{\alpha\lambda_1}A \qquad \text{(A.11).}$$

[82] Če funkcija ni strogo konkavna, predstavlja rezultat maksimuma korespondenca.

Desno stran enačbe preuredimo v $\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta}\left(H-H_A\right)^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta}=\xi\left(\frac{H}{\alpha}-\frac{H_A}{\alpha}\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}A$. Ko dobljeno enačbo delimo z A in jo pomnožimo z multiplikatorjem λ_1, dobimo $\lambda_1\eta^{\alpha+\beta-1}A^{\alpha+\beta-1}\left(H-H_A\right)^{\alpha}L^{\beta}K^{1-\alpha-\beta}=\xi\left(\frac{H}{\alpha}-\frac{H_A}{\alpha}\right)\lambda_2$ in z njo delimo (A.6). Tako dobimo stopnjo rasti za iskan multiplikator λ_2 kot $\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}=\rho-\frac{\alpha+\beta}{\xi\left(\frac{H}{\alpha}-\frac{H_A}{\alpha}\right)}+\xi H_A$. Ulomek na desni strani enačbe pomnožimo in delimo z $(\alpha+\beta)$ in preuredimo, od koder izhaja $\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}=\rho-\xi\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H_A\right)+\xi H_A$. Če desno stran enačbe združimo, dobimo $\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}=\rho-\xi\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H-\frac{\alpha+\beta-\alpha}{\alpha}H_A\right)$, od koder dobimo končno obliko kot

$$\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}=\rho-\xi\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H-\frac{\beta}{\alpha}H_A\right) \qquad \text{(A.12).}$$

Ker morajo biti v ravnovesju dobrine enako donosne neodvisno od njene uporabe, velja $\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}=\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}$, od koder izhaja, da sta stopnji rasti potrošnje in tehničnega napredka enaki $\frac{\dot{C}}{C}=\frac{\dot{A}}{A}$.

Ker predstavlja -γ v (A.9) elastičnost potrošnje, lahko analogno zapišemo $-\gamma\frac{\dot{A}}{A}=\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}$. Z upoštevanjem, da je $\frac{\dot{A}}{A}=\xi H_A$ in ko vključimo še (A.12), dobimo enačbo

$$-\gamma\xi H_A=\rho-\xi\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H-\frac{\beta}{\alpha}H_A\right) \qquad \text{(A.13).}$$

Končno obliko steady state stopnje gospodarske rasti g^* dobimo tako, da stopnjo gospodarske rasti izrazimo kot $g=\xi H_A$, jo vključimo v (A.13) in jo rešimo tako, da se v končni obliki znebimo kontrole H_A.

Z razcepom oklepaja v enačbi (A.13) dobimo $-\gamma\xi H_A=\rho-\xi\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H+\xi\frac{\beta}{\alpha}H_A$. Ko postavimo $\xi\frac{\beta}{\alpha}H_A$ na levo stran in izpostavimo ξH_A ter upoštevamo, da velja $g^*=\xi H_A$, zapišemo $g^*\left(-\gamma-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\rho-\xi\frac{\alpha+\beta}{\alpha}H$. Enačbo za steady state stopnjo rasti dobimo z deljenjem enačbe, od koder izhaja $g^* = \frac{-\rho}{\gamma + \frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\xi H \frac{\alpha+\beta}{\alpha}}{\gamma + \frac{\beta}{\alpha}}$. Dobljeni zapis preoblikujemo v $g^* = \frac{-\alpha\rho}{\alpha\gamma + \beta} + \xi \frac{H(\alpha+\beta)}{\alpha\gamma+\beta}$. Ko oba ulomka na desni postavimo na skupen imenovalec ter števec in imenovalec delimo z $(\alpha+\beta)$, dobimo $g^* = \frac{\xi H - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\rho}{\gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)}$. Končno enačbo steady state (A.14) dobimo tako, da pri drugem oklepaju v imenovalcu prištejemo in odštejemo α in preoblikujemo.

$$g^* = \frac{\xi H - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\rho}{\gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} \qquad \text{(A.14).}$$

Q.E.D.

Priloga 2: Uporaba L'Hopitalovega pravila pri funkciji koristnosti

L'Hopitalovo pravilo se uporablja pri limitnih pogojih razmerja $\frac{f(x)}{g(x)}$, kjer velja $x \rightarrow a$ in kjer se tako imenovalec, kot tudi števec simultano približujeta nič ali neskončno, ko se $x \rightarrow a$. V obeh primerih imamo nedoločeno razmerje $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, ko se $x \rightarrow a$ (Khuri 2003, 103).

V našem primeru se srečujemo z nedoločenostjo števca in imenovalca za vrednosti $\gamma = 1$, ko imamo primer $\frac{0}{0}$. Z odvajanjem števca po γ dobimo

$$f(x) = c^{1-\gamma} - 1 \Rightarrow f'_{\gamma}(x) = -c^{1-\gamma}\, log(c) = -log(c) \qquad \text{(A2.1).}$$

Z odvajanjem imenovalca po γ pa dobimo

$$g(x) = 1 - \gamma \Rightarrow g'_{\gamma}(x) = -1 \qquad \text{(A2.2).}$$

Po združitvi enačb (A2.1) in (A2.2) dobimo $\frac{f'(x)}{g'(x)} = log(c)$.

Q.E.D.

DELOVNI ŽIVLJENJEPIS

Osebni podatki:	Matjaž Steinbacher Rojen 24. 10. 1979, Maribor (Slovenija) Državljanstvo: slovensko
E-pošta:	matjaz.steinbacher@fsi-institute.si

Šolanje:

1994-98	II. gimnazija Maribor

Študij:

1998-2003	Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta Diploma: *Dejavniki dolgoročne rasti gospodarstva*
2003-06	Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta, magistrski študij, ekonomija Potrjena tema: *Uporaba metod perturbacije v modelu gospodarske rasti*

Drugo izobraževanje:

2002	poletna šola Wirtschaftsuniversität Wien, Bol, Hrvaška

Dosedanja zaposlitev:

2006-	Društvo za svobodno družbo, Ljubljana
2005-06	Probanka d.d., Maribor, finančni analitik v direkciji za tveganja

Področja zanimanja:	ekonometrija numerična ekonomija in finance metode perturbacije in bifurkacije makroekonomija ekonomska politika
Drugo:	član *The Society for Computational Economics* občasni kolumnist v časniku *Finance*

BIBLIOGRAFIJA

Prispevki: Jus, Miran, Matej Steinbacher, in Matjaž Steinbacher. 2006. Subvencioniranje tujih naložb. *Naše gospodarstvo*, Vol. 52, No. 1-2: 96-105.

Steinbacher, Matjaž, in Matej Steinbacher. 2005. Dinamični modeli gospodarske rasti. *Delovni zvezki ICK – ekonomska serija*, No. 4 (november), 1-35.

Steinbacher, Matej, in Matjaž Steinbacher. 2005. Transformacija slovenskega davčnega sistema. *Delovni zvezki ICK – ekonomska serija*, No. 2 (september), 1-51.

Raziskave: Jus, Miran, Matej Steinbacher, in Matjaž Steinbacher. 2005. *Finančne spodbude za TNI*. Ljubljana: ICK.

Mrkaić, Mićo, Rado Pezdir, Matjaž Steinbacher, in Jan Zupanc. 2005. *Časovna konvergenca kazalnikov NRRP. Dohitevanje povprečja zgornje tretjine držav EU25 in mejne države zgornje tretjine EU25*. Ljubljana: ICK.

Nerazporejeno: Steinbacher, Matjaž. 2003. *Dejavniki dolgoročne rasti gospodarstva* (diplomsko delo). Maribor: Ekonomsko-poslovna fakulteta.

Steinbacher, Matej, Matjaž Steinbacher, in Mitja Steinbacher. 2006. *Transformation of Slovenian Tax System*. Mimeo.

Raziskave v teku: Steinbacher, Matjaž, Mitja Steinbacher, Matej Steinbacher, in Miha Majcen. *Game Theory in Politics: How to Beat Unions?*