UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

MITJA STEINBACHER

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

OCENA RAVNOVESNE KORISTNOSTI PRILAGOJENEGA HALLOVEGA MODELA Z UPORABO ČEBIŠEVIH POLINOMOV

LJUBLJANA, DECEMBER 2006

MITJA STEINBACHER

IZJAVA

Študent Mitja Steinbacher izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom doc. dr. Aljoše Feldina, in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 12. 12. 2006

Podpis:

KAZALO

1 UVOD 1

2 DINAMIČNI MODELI OBDAVČITVE 3
2.1 MODELI RAZNOVRSTNIH AGENTOV 3
2.1.1 Model življenjskega cikla z dvema obdobjema 3
2.1.2 Model življenjskega cikla z več obdobji 6
2.1.3 Ravnovesje modela 11
2.2 PRILAGOJEN HALLOV MODEL 11
2.3 NUMERIČNO REŠEVANJE DINAMIČNIH MODELOV 16
2.4 MODELIRANJE DAVČNIH REFORM 19

3 NUMERIČNE METODE OPTIMIZACIJE IN APROKSIMACIJE 23
3.1 NUMERIČNA OPTIMIZACIJA 23
3.1.1 Newtonova metoda 25
3.1.2 Kvazi – Newtonove metode 27
3.1.3 Metode vezanih naklonov 28
3.1.4 Metoda Nelderja in Meade-a 31
3.1.5 Simulirano ohlajanje 34
3.1.6 Optimizacija z omejitvami 36
3.2 NUMERIČNA APROKSIMACIJA 42
3.2.1 Lokalna aproksimacija 43
3.2.2 Ortogonalni polinomi 45
3.2.3 Interpolacija 50
3.2.4 Projekcijske metode 52

4 OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI HALLOVEGA MODELA 55
4.1 ALGORITEM APROKSIMACIJE 55
4.2 SIMULACIJE PRORAČUNSKO NEVTRALNIH DAVKOV 59
4.3 OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI 60
4.4 KOMENTAR REZULTATOV 61

5 SKLEP 63

6 LITERATURA 64

PRILOGE
SLOVAR POMEMBNEJŠIH POJMOV
DELOVNI ŽIVLJENJEPIS

SEZNAM TABEL, SLIK IN PRILOG

TABELA 1: WANGOVA KLASIFIKACIJA METOD NUMERIČNE OPTIMIZACIJE 24
TABELA 2: OSNOVNE DRUŽINE NEODVISNIH POLINOMOV 46
TABELA 3: PRIDOBIVANJE VREDNOSTI NEODVISNIH POLINOMOV 46
TABELA 4: KOLOKACIJSKI VOZLI IN KORISTNOSTI 58
TABELA 5: KVALITETA OCEN DOLGOROČNO RAVNOVESNE KORISTNOSTI 61
TABELA P.4.1: OSNOVNA IZVEDBA HALLOVEGA MODELA P6
TABELA P.4.2: NIČLE ČEBIŠEVIH POLINOMOV P6

SLIKA 1: ŠIRJENJE, KRČENJE IN PREMIKANJE SIMPLEKSA PRI AMEBI 33
SLIKA 2: LINEARNO PROGRAMIRANJE 38
SLIKA 3: ČEBIŠEVI POLINOMI $T_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,5$ 49
SLIKA 4: PROJEKCIJA S ČEBIŠEVIMI POLINOMI 55
SLIKA 5: ČEBIŠEVI POLINOMI T_8, T_{10} IN T_{12} 57
SLIKA P.3.1: GENERIRANJE VREDNOSTI S POLINOMI P_N, T_N, L_N IN H_N $n = 1,2,\ldots,5$ P5
SLIKA P.4.1: ALGORITEM OCENJEVANJA DOLGOROČNO RAVNOVESNE KORISTNOSTI HALLOVEGA MODELA P7
SLIKA P.4.2: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_8) P7
SLIKA P.4.3: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_{10}) P8
SLIKA P.4.4: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_{12}) P8

PRILOGA 1: TEHNIČNA POMOČ ZA HALLOV MODEL P1
PRILOGA 2: TEHNIČNA POMOČ ZA OPTIMIZACIJO P2
PRILOGA 3: TEHNIČNA POMOČ ZA METODE APROKSIMACIJE P4
PRILOGA 4: DOLGOROČNA KORISTNOST HALLOVEGA MODELA P6

1 UVOD

Numerične metode dajejo zelo natančne rezultate pri reševanju funkcijskih enačb, kot so ravnovesne Eulerjeve enačbe, Bellmanove enačbe ipd. Te enačbe so v veliki meri analitično nerešljive, saj ne iščemo samo točk v vektorskem prostoru, temveč celotne funkcije (Miranda, Fackler 2002). Numerične metode in s tem metode iskanja približnih funkcij izvirajo iz področij biologije, fizike in podobnih naravoslovnih znanosti, kjer veljajo za eno temeljnih orodij znanstvenega raziskovanja. Kot najbolj očiten primer uporabnosti numeričnih metod navaja Kenneth Judd (1998) simulacijo zadostne količine čistega urana, ki je potrebna za sprožitev verižne reakcije. Numerika se vedno bolj uvaja tudi na področje ekonomske znanosti.

Numerične metode v splošnem ne dajejo popolnoma natančnih rešitev, temveč približke, pri čemer je natančnost rezultatov odvisna predvsem od (i) značilnosti procesorja, s katerim delamo, (ii) vrste problema, ki ga rešujemo, (iii) kriterijev konvergence, ki jih eksogeno določimo, (iv) uporabljene metode ocenjevanja in od (v) uporabljenega algoritma reševanja.

Uvajanje numeričnih metod na področje teorije obdavčitve omogoča raziskovalcem, med drugim, simuliranje dolgoročnih učinkov različnih tipov obdavčitve v različnih teoretičnih okvirjih, med katerimi sta najpogosteje uporabljana Auerbach-Kotlikoffov model življenjskega cikla v povezavi z Arrow-Debreujevim konceptom splošnega ravnovesja, oba dopolnjena s stohastičnimi vplivi.

Pri raziskovanju davkov in njihovih vplivov na gospodarsko aktivnost uporabljajo znanstveniki različne kombinacije numeričnih metod reševanja dinamičnih modelov: (i) Gaussove iteracije (Altig et. al. 2001), (ii) Čebiševe približke in nevronske mreže (Auerbach, Hassett 2002), (iii) projekcijske metode (Judd 1996; Gaspar, Judd 1997), (iv) perturbacije in bifurkacije (Judd 1996; Judd et al. 2003), (v) metode nedoločenih koeficientov (Campbell 1994; Cassou, Lansing 2003), približke višjega reda (Schmitt-Grohe, Uribe 2004), idr.[1] Večina analiz nasprotuje obdavčevanju kapitala oziroma progresivnim davkom ter favorizira davke na potrošnjo oziroma linearne obdavčitve.

V nalogi ocenjujemo dolgoročne učinke neskončno mnogo optimalnih in proračunsko nevtralnih davčnih sistemov na blaginjo, in sicer z uporabo Čebiševih kolokacijskih vozlov. Model, ki ga uporabljamo, je prilagojen Hallov model neskončno živečega posameznika s štirimi vrstami davkov ter elastično ponudbo dela. Model je podoben tistemu, ki sta ga Cassou in Lansing (2003) rešila s pomočjo Christianove prilagojene metode nedoločenih koeficientov (1998). Pri uporabi razvrščanja sledimo Kennethu Juddu (1998). V modelu je ustaljeno stanje kapitala odvisno od proračunsko nevtralnih davkov, ki

[1] Več o numeričnih metodah najde zainteresirani bralec v: Christiano (1998), Gaspar in Judd (1997), Judd (1999), Miranda in Fackler (2002), Rust (1997; 1996) in v Rust et al. (2002).

jih za potrebe ocenjevanja endogeniziramo in pri iskanju optimalnih davčnih načrtov simuliramo z uporabo globalnega optimizacijskega algoritma simuliranega ohlajanja, in sicer s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1 ter procesorja Pentium 4 z 2.26GHz. Pričakujemo, da bo ocena funkcije ravnovesne koristnosti zelo natančna.

Cilji naloge so večplastni in sledijo njeni strukturi: (i) najprej želimo prikazati osnovni skupini modelov, ki se uporabljata pri proučevanju vplivov obdavčitve: OLG (*overlapping generations*) modele raznovrstnih agentov in modele rasti z neskončno-živečimi homogenimi posamezniki. Poglavju o modelih sledi (ii) predstavitev nekaterih metod numerične optimizacije, temu pa (iii) predstavitev nekaterih metod ocenjevanja funkcij s poudarkom na družinah neodvisnih polinomov.[2] Najpomembnejši cilj magistrske naloge je ocena koristnosti, kot izhaja iz Hallovega modela neskončno-živečih homogenih agentov, in sicer s pomočjo Čebiševe družine neodvisnih polinomov prvega reda, kjer pričakujemo, da bodo rezultati zelo natančni v primerjavi z naključnimi simulacijami na izvirnem modelu.

Podstat je esej Kennetha Judda (1997) o uporabnosti numerike ter Lucasova kritika (1976) statične paradigme, prispevek k znanosti pa je moč gledati v luči širjenja uporabe numeričnih metod ocenjevanja in optimizacije na področje teorije obdavčitve. Kar se tiče uporabljenega znanstvenega instrumentarija, so v prvem poglavju prevladujoče metode deskripcija, komparacija in kompilacija, drugi del pa je znanstveno-analitičen in temelji na metodi analitične indukcije.

[2] Slednje namreč potrebujemo pri simuliranju različnih davčnih načrtov v poglavju 4.

2 DINAMIČNI MODELI OBDAVČITVE

Poglavje prinaša matematičen razvoj osnovnih skupin modelov splošnega ravnovesja, ki v razlago vpeljujejo državo in merijo dinamične dolgoročne učinke njenega vstopanja v funkcijo koristnosti posameznika. Ob različnih predpostavkah se dinamični modeli s prisotnostjo države razvijajo v dveh skupinah: (i) v modelih s heterogenimi posamezniki in (ii) v modelih neskončno živečih homogenih posameznikov.[3,4]

2.1 Modeli raznovrstnih agentov

2.1.1 Model življenjskega cikla z dvema obdobjema

Predhodnik splošnega modela življenjskega cikla Auerbach – Kotlikoff (1992) je dinamičen OLG model z dvema obdobjema in dvema generacijama posameznikov živečih v enem obdobju.[5] Predpostavke modela so: (i) konstantno število prebivalstva, (ii) nespremenljiva produktivnost kapitala in dela, (iii) eksogena ponudba dela, (iv) ni medgeneracijskih transferov starejše generacije mladi, (iv) vse vrste kapitala so popolni substituti, (v) popolna konkurenca na vseh trgih.[6]

Posamezniki

Model izhaja iz maksimizacije posameznikove vseživljenjske funkcije koristnosti tipa Cobb-Douglas, kjer je koristnost U v času t odvisna od trošenja posameznika v njegovem aktivnem obdobju m in sedanji vrednosti trošenja v njegovem pasivnem obdobju s.

$$U_t = C_{mt}^{\beta} C_{s,t+1}^{1-\beta} \tag{2.1.1}$$

[3] OLG modeli so posebej uporabljani pri proučevanju teorije blaginje, demografske ekonomije in javnih financ (Ljungqvist, Sargent 2000), v splošnem pa na vseh področjih ekonomske znanosti, katera izhajajo iz raznovrstnih karakteristik posameznikov. Pri njihovi vsesplošni uporabi pa se raziskovalci premalo zavedajo, da niti najsodobnejši algoritmi za numerično reševanje modelov z veliko omejitvami in spremenljivkami niso sposobni dajati zadovoljivih rezultatov. Tako je nujno treba uporabiti metode iskanja približnih funkcij, s katerimi pospešimo konvergenco in se izognemo problemom prekletstva dimenzionalnosti.

[4] V nadaljevanju prikazujemo značilnosti obeh skupin modelov glede ustreznosti pri merjenju učinkov davčnih reform.

[5] V modelu hkrati nastopata mlada in stara generacija, pri čemer je posameznik tipičen predstavnik generacije v času t. Generaciji se ponavljajoče izmenjujeta. Model sodi v skupino modelov brez negotovosti – t.i. *perfect foresight* modelov.

[6] Model z dvema obdobjema prikazuje delovanje gospodarstva na zelo osnovni ravni in ga raziskovalci pri svojem delu več ne uporabljajo. Kot tak je dober pripomoček za lažje razumevanje zahtevnejših OLG modelov z več nehomogenimi generacijami in različnimi predpostavkami glede kapitala, trga dela, davkov ipd. (Auerbach 1979; Atkinson in Sandmo 1980; Feldstein 1978).

Ker posameznik troši v obeh obdobjih, služi pa samo v aktivni dobi, izrazimo njegovo proračunsko omejitev kot vsoto današnje potrošnje in sedanje vrednosti potrošnje v pasivnem obdobju $t+1$, ki jo diskontiramo s pričakovano obrestno mero r_{t+1}:

$$C_{mt} + \frac{C_{s,t+1}}{1+r_{t+1}} = W_t, \tag{2.1.2}$$

pri čemer je vsota enaka dohodku W_t. Ker omejitev trošenja velja tudi za starejšo generacijo, lahko s pomočjo (2.1.2) izrazimo le-to kot bodočo vrednost premoženja starejše generacije, ki predstavlja njegovo t.i. neto premoženje A_{t+1}.

$$C_{s,t+1} = A_{t+1}(1+r_{t+1}). \tag{2.1.3}$$

Iz pogojev prvega reda maksimizacije koristnosti (2.1.1) ob upoštevanju (2.1.2) dobimo povezavo med potrošnjo mlade generacije in plačo v času t: $C_{mt} = \beta W_t$.[7] S podobnim manipuliranjem in upoštevaje bodočo vrednost potrošnje stare generacije dobimo razpoložljiv kapital v času $t+1$, in sicer $A_{t+1} = (1-\beta)W_t$.

Podjetja

Proizvajajo po produkcijski funkciji tipa Cobb-Douglas, kjer Y_t predstavlja proizvodnjo na zaposlenega, K_t pa kapital na zaposlenega. S tem delo normaliziramo na 1 in model zreduciramo na dve spremenljivki.

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}. \tag{2.1.4}$$

---

[7] Imamo naslednji maksimizacijski problem:

max $U = C_{m,t}^{\beta} C_{s,t+1}^{1-\beta}$, pri pogoju $C_{m,t} + \frac{C_{s,t+1}}{1+r_{t+1}} = W_t$.

Rešimo ga z uporabo Lagrangiana:

$L = C_m^{\beta} C_S^{1-\beta} + \lambda\left(W - C_m - \frac{C_S}{1+r}\right)$.

Pogoji prvega reda:

$\frac{\partial L}{\partial C_m} = \beta C_m^{\beta-1} C_s^{1-\beta} - \lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial C_S} = C_S^{\beta}(1-\beta)C_S^{-\beta} - \lambda\frac{1}{1+r} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = W - C_m - \frac{C_S}{1+r} = 0$

Iz prvih dveh enačb dobimo: $\frac{\beta}{1-\beta}\frac{C_s}{C_m} = 1+r$. Sedaj izrazimo $C_m = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{C_s}{1+r}$ in le-to vstavimo v tretjo enačbo. Z malo manipulacije sledi: $C_S = W(1-\beta)(1+r)$, po zamenjavi s c_s iz enačbe za C_m dobimo želeno relacijo: $C_m = W\beta$.

Ker model predpostavlja popolno konkurenco, bodo podjetja najemala proizvodne dejavnike po ceni, ki je enaka vrednosti njihove mejne produktivnosti. Ko ob tem upoštevamo dejstvo, da je ponudba dela dana in se znotraj modela ne spreminja, dobimo z odvajanjem (2.1.4) sledeči funkciji povpraševanja po delu in povpraševanja po kapitalu:[8]

$$W_t = (1-\alpha)K_t^{\alpha} \tag{2.1.5}$$

$$r_t = \alpha K_t^{\alpha-1}, \tag{2.1.6}$$

Ob upoštevanju ravnovesnega pogoja $A_t = K_t$ dobimo po združitvi (2.1.5) in $A_{t+1} = (1-\beta)W_t$ naslednjo dinamiko gibanja kapitala v času *t*:

$$K_{t+1} = K_t^{\alpha}(1-\alpha)(1-\beta), \tag{2.1.7}$$

od koder izhaja dolgoročno ustaljeno stanje:[9]

$$K^* = [(1-\alpha)(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.1.8}$$

Očiten pogoj za konvergenco kapitala iz 2.1.7 v ustaljeno stanje 2.1.8 je $\alpha < 1$. Z združitvijo (2.1.7) in (2.1.8) ugotovimo, da se bo zaloga kapitala povečevala, če bo trenutna zaloga nižja od dolgoročnega ravnovesja K^* in obratno.[10]

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \left(\frac{K^*}{K_t}\right)^{1-\alpha} \tag{2.1.9}$$

Država

Vključitev države s svojimi aktivnostmi vpliva na model v dveh smereh: (i) spremeni proračunsko omejitev posameznika 2.1.2, ki sedaj vključuje davke in (ii) zaloga kapitala ob prisotnosti države ustreza skupnemu kapitalu zasebnega sektorja in države. Za katerokoli državno politiko velja predpostavka o tem, da mlada populacija pravilno napove donose ter davke za obdobje $t+1$.

---

8 $MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$; $MPL \frac{\partial Y}{\partial L} = K^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}$. Ko ponudbo dela postavimo na 1, dobimo: $MPK = \alpha K^{\alpha-1} = r$ in $MPL = K^{\alpha}(1-\alpha) = W$. V 2.1.5 in 2.1.6 so vse kategorije očiščene cen.

9 V dolgoročnem ravnovesju je $K_{t+1} = K_t$. Dobimo $K^{1-\alpha} = (1-\alpha)(1-\beta) \Rightarrow K = ((1-\alpha)(1-\beta))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

10 $\frac{K_{t+1}}{K_t} = K_t^{\alpha-1}(1-\alpha)(1-\beta) = K^{*1-\alpha}K_t^{\alpha-1} = \left(\frac{K^*}{K_t}\right)^{1-\alpha}$.

Poglejmo primer, ko država ne spreminja svoje potrošnje G_t in aktive A_t^g ter prilagaja višino davkov glede na spreminjanje zaloge kapitala K in posledično ustvarjenega dohodka Y. Skrajšano takšen model zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
&A_{t+1}^p = (1-\beta)(1-\tau_t)W_t \\
&K_t = A_t^p + A_t^g \\
&\tau_t = \frac{\left(G^* - r_t A^{*g}\right)}{Y_t} \\
&K_{t+1} = K_t^\alpha \left[1 - \frac{\left(G^* - \alpha K_t^{\alpha-1} A^{*g}\right)}{K_t^\alpha}\right](1-\alpha)(1-\beta) + A^{*g} \\
&\frac{dK_{t+T}}{dK_t} = \prod_{s=t}^{T}\left(\alpha - \eta_{\tau s}\left(\frac{K_s - A^{*g}}{K_s}\right)\right) \le 1
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Prva enačba iz (2.1.10) je zaloga kapitala, ki je na razpolago za ustvarjanje nove vrednosti.[11,12] Sledi ji pogoj ravnovesja na trgu ob prisotnosti državne lastnine ter prilagajanje davkov novemu produktu Y_t in donosnosti kapitala r_t ob pogoju konstantne potrošnje države G^* in konstantne zaloge kapitala A^{*g}. Upoštevaje optimalno obnašanje podjetij (2.1.5) združimo prve tri enačbe in dobimo dinamiko gibanja kapitala ob prisotnosti linearnega davka na dohodek.

Zadnja enačba je ravnovesni pogoj za konvergenco gibanja kapitala. Pomeni pa odzivnost davka τ glede na spreminjanje zaloge kapitala v času s. Če se država preveč zadolžuje in ima negativno stanje sredstev ($A^{*g} < 0$), je elastičnost $\eta_{\tau s}$ negativna, kar ogroža obstoj ravnovesja. Hkrati s tem je dinamika gibanja kapitala, kot vidimo iz predzadnje enačbe 2.1.10, nelinearna in ima lahko več stabilnih ter nestabilnih rešitev.[13]

2.1.2 Model življenjskega cikla z več obdobji[14]

Enostaven OLG model z dvema generacijama, ki smo ga predstavili, je osnova za bolj realističen prikaz gospodarstva s 55 generacijami in ki se v praksi pogosto uporablja. Model prav tako sestavljajo sektorji gospodinjstva, proizvodnje in države. Pri tem je vsak sektor določen s sistemom nelinearnih enačb. S simultano rešitvijo vseh treh sektorjev dobimo ravnovesno rešitev dinamičnega razvoja gospodarstva.

---

[11] V modelu je le-ta izključno v lasti starejše generacije in ne prehaja med generacijama.
[12] Dobimo jo analogno, kot smo izpeljali razpoložljiv kapital v modelu brez države.
[13] Dinamika kapitala (K_{t+1}) je nelinearna, kar pomeni, da lahko obstaja več (nestabilnih in stabilnih) dolgoročnih ravnovesij.
[14] Za podrobnejšo analizo modelov življenjskega cikla glej Rios-Rull (1995).

Gospodinjstva

V vsakem obdobju imamo 55 prehajajočih generacij odraslih posameznikov, starejših od 21 let s predvideno starostjo ob smrti 75 let. V modelu se posamezniki razlikujejo glede na percepcijo ekonomskih priložnosti, medtem ko so njihove siceršnje preference enake. Vse razlike izhajajo iz medgeneracijskih razlogov, znotraj generacije pa so posamezniki identični. V osnovni različici modela ni dedovanja.

Posameznik maksimira splošno CES obliko *aditivno separabilne* funkcije koristnosti, ki gnezdena predpostavlja nespremenljivo znotraj-generacijsko elastičnost zamenljivosti med posameznikovo potrošnjo in prostim časom ter nespremenljivo elastičnost zamenljivosti potrošnje med dvema obdobjema (Auerbach et. al. 1983, 6).[15]

$$U = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \sum_{t=1}^{55} (1+\delta)^{-(t-1)} \left(c_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \alpha l_t^{1-\frac{1}{\rho}} \right)^{\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{1-\frac{1}{\rho}}}, \tag{2.1.11}$$

kjer pomenijo α, γ, δ in ρ klasične parametre preferenc posamezne generacije in omogočajo analiziranje zelo širokega spektra njihovega obnašanja. Tako pomeni parameter α intenzivnost, s katero posamezna generacija preferira prosti čas relativno glede na potrošnjo. Parameter γ pomeni elastičnost substitucije potrošnje med dvema obdobjema; odstotna sprememba razmerja potrošnje med dvema obdobjema glede na odstotno spremembo relativnih cen potrošnje v teh dveh obdobjih. δ predstavlja parameter, ki meri časovno preferenco; stopnja, do katere gospodinjstvo preferira potrošnjo in prosti čas danes proti potrošnji in prostemu času v prihodnjih letih. ρ pa meri elastičnost razmerja med delom in prostim časom glede na spremembo plač.

---

[15] Podobno gnezdeno CES funkcijo koristnosti so pri numeričnih simulacijah vplivov različnih davčnih reform na primeru ZDA uporabili Altig et. al. (2001), s to razliko, da so v njo vključili učinek zadovoljstva ob dedovanju:

$$(1+\delta)^{-54} \mu^j b_{75,t+54}^{j1-\frac{1}{\gamma}},$$

medtem ko Ventura (1999) uporabi CRRA funkcijo koristnosti:

$$U(c,l) = \frac{\left[c^{\gamma}(1-l)^{1-\gamma}\right]^{(1-\sigma)}}{(1-\sigma)},$$

ki določa pričakovano sedanjo vrednost vseživljenjske funkcije koristnosti:

$$E\left[\sum_{j=1}^{N} \beta^j \left(\prod_{i=1}^{j} s_i\right) u\left(c_{j,t}, (1-l_{j,t})\right)\right].$$

V vsakem obdobju se gospodinjstvo odloča glede količine dela in potrošnje. Njegove odločitve potekajo upoštevaje ves življenjski horizont. Tako današnja odločitev vsebuje ves bodoči potek potrošnje in količine dela upoštevaje pri tem maksimizacijo koristnosti 2.1.11 in proračunsko omejitev, ki neupoštevaje davke in prispevke odvisna samo od današnje in prihodnjih obrestnih mer ter plač. Model zahteva, da današnja vrednost vseživljenjske potrošnje ne presega današnje vrednosti vseživljenjskih dohodkov:[16]

$$\sum_{t=1}^{55}\prod_{s=1}^{t}\left[1+r_s\right]^{-1}\left[w_t e_t\left(1-l_t\right)-c_t\right]\geq 0\,. \tag{2.1.12}$$

Razlike med posamezniki odraža dejavnik e_t, ki dovoljuje različne zaslužke gospodinjstev v posameznem letu glede na različne usposobnosti gospodinjstev različnih generacij.[17] Ostale spremenljivke so: r_s obrestna mera v času s in w_t plača v času t.

Poglejmo sedaj, kako se gospodinjstva odločajo glede potrošnje in ponudbe dela v odsotnosti posredovanja države. Maksimizacija (2.1.11) upoštevaje proračunsko omejitev (2.1.12) in omejenost razpoložljivosti dela, $l_t \leq 1$, definira pogoje prvega reda za optimalne odločitve glede potrošnje in prostega časa:[18]

$$\left(1+\delta\right)^{-(t-1)}\Omega_t c_t^{-\frac{1}{\rho}}=\lambda\left\{\prod_{s=2}^{t}\left[1+r_s\right]^{-1}\right\} \tag{2.1.13a}$$

$$\left(1+\delta\right)^{-(t-1)}\Omega_t \alpha l_t^{-\frac{1}{\rho}}=\lambda\left\{\prod_{s=2}^{t}\left[1+r_s\right]^{-1}\right\}w_t^{*}\,, \tag{2.1.13b}$$

pri čemer je λ Lagrangejev multiplikator vseživljenjske proračunske omejitve 2.1.12 in predstavlja sedanjo vrednost dodatne koristnosti, parametra Ω in w^* pa sta definirana kot:

$$\Omega_t=\left[c_t^{1-1/\rho}+\alpha l_t^{1-1/\rho}\right]^{(1/\rho-1/\gamma)/(1-1/\rho)} \tag{2.1.14}$$

$$w_t^{*}=w_t e_t+\mu_t\,. \tag{2.1.15}$$

---

[16] Altig et. al. (2001) pri proračunski omejitvi model posplošijo z vključitvijo nesimetrične obravnave kapitala in možnosti dedovanja. Dinamika posameznikove založenosti s kapitalom njihovega modela je:

$$a_{s+1,t+1}^{j}=\left(1+r_t\right)\left(a_{s,t}^{j}+g_{s,t}^{j}\right)+w_{s,t}^{j}\left(E_{s,t}^{j}-l_{s,t}^{j}\right)-c_{s,t}^{j}-\sum_{k=1}^{K}T^{k}\left(B_{s,t}^{j,k}\right)-Nb_{s,t}^{j}$$

[17] Auerbach in Kotlikoff (1992) imenujeta e profil človeškega kapitala posameznika.

[18] Auerbach et. al. (1983) so simulirali prilagojen model s progresivnimi davki na plače in na potrošnjo. V njihovem primeru je dinamika potrošnje enaka:

$$c_t=\left(\frac{\left(1+r_t\right)}{\left(1+\delta\right)}\frac{\left(1+\tau_{ct-1}\right)}{\left(1+\tau_{ct}\right)}\right)^{\gamma}\frac{\left(1+\alpha^{\rho}w_{t+1}^{*\rho-1}\right)}{\left(1+\alpha^{\rho}w_t^{*\rho-1}\right)}c_{t-1}$$

Pri tem je μ_t senčna plača (*shadow wage*) v letu t in je relevantna samo ob upokojitviv letu t, pomeni pa dodatno plačilo, ki bi ga ob upokojitvi posamezno gospodinjstvo zahtevalo, da bi sprejelo delo in izstopilo iz upokojitve.

Iz 2.1.13 dobimo razmerje med potrošnjo in prostim časom:

$$l_t = \left(w_t^* / \alpha\right)^{-\rho} c_t \,. \tag{2.1.16}$$

Sedaj lahko z malo manipulacije končno definiramo dinamiko potrošnje c_t in prostega časa l_t:

$$c_{t+1} = \left[(1+r_t)/(1+\delta)\right]^{\gamma} \left[\nu_{t+1}/\nu_t\right] \cdot c_t \tag{2.1.17}$$

$$l_{t+1} = \left[(1+r_t)/(1+\delta)\right]^{\gamma} \left[\nu_{t+1}/\nu_t\right]^{-\rho} \left(w_{t+1}^* / w_t^*\right)^{-\rho} \cdot l_t \,, \tag{2.1.18}$$

kjer je

$$\nu_t = \left[1 + \alpha\rho w_t^{*(1-\rho)}\right]^{\left[(\rho-\gamma)/(1-\rho)\right]} \tag{2.1.19}$$

V primeru, ko imamo $\alpha = 0$ oziroma, ko se efektivna plača w^* v času ne spreminja, rasteta potrošnja iz 2.1.17 in prosti čas iz 2.1.18 po enakih stopnjah. Če pa se w^* spreminja, pa je dinamika odvisna od razmerja med parametroma znotraj – časovne substitucije ρ in med – časovne substitucije γ. Obe enačbi je moč rešiti samo z uporabo numeričnih metod, kot je denimo iteriranje po Bellmanovi enačbi, ki jo prikazujemo na koncu poglavja, saj nimata analitične rešitve.[19]

Podjetja

Podjetja proizvajajo v skladu s CES produkcijsko funkcijo:[20]

$$Y_t = A\left(\varepsilon K_t^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\varepsilon) L_t^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}} , \tag{2.1.14}$$

[19] Ker v nadaljevanju predstavitve modela sledi tudi kratek opis sektorja države, ki ga pri obnašanju gospodinjstev zaradi obsežnosti, kompleksnosti in nerelevantnosti za magistrsko nalogo nismo posebej predstavljali, je treba omeniti, da je moč izpeljavo za dinamiki potrošnje in prostega časa v primeru progresivnih davkov na potrošnjo in progresivnih davkov na dohodek najti v Auerbach in Kotlikoff (1987).

[20] V svojem članku Auerbach et. al. (1983) poudarijo odvisnost ponudbe dela kot eno temeljnih predpostavk, saj bi v nasprotnem primeru, ob hkratni prisotnosti tehničnega napredka, ustaljeno stanje bilo mogoče samo v primeru Cobb-Douglasove funkcije koristnosti, kar bi pomenilo $\rho = 1$. Altig et. al. (2001) pri simulaciji A-K modela upoštevajo klasično Cobb-Douglasovo produkcijsko funkcijo kot v (2.1.4).

kjer ε meri intenzivnost uporabe kapitala, σ pa stopnjo zamenljivosti proizvodnih dejavnikov dela in kapitala, pomeni pa odstotno spremembo kapitalne opremljenosti dela glede na odstotno spremembo razmerja cen obeh faktorjev.

S pomočjo predpostavk o popolni konkurenci in o konstantnih donosih obsega, lahko iz (2.1.14) izpeljemo funkciji povpraševanja po delu w_t in kapitalu r_t ter razmerje med stroški uporabe produkcijskih faktorjev (Auerbach et. al. 1983, 9; Auerbach, Kotlikoff 1992, 36):[21]

$$w_t = (1-\varepsilon)A\left[\varepsilon K_t^{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} + (1-\varepsilon)L_t^{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right]^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)} L_t^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.1.15}$$

$$r_t = \varepsilon A\left[\varepsilon K_t^{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} + (1-\varepsilon)L_t^{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}\right]^{\left(\frac{1}{\rho-1}\right)} K_t^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.1.16}$$

$$\frac{w_t}{r_t} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.1.17}$$

Država

Na dolgi rok ni zadolževanja. Država vstopa v model, tako da za svoje delovanje pobere del dohodka posameznikom.[22] Njeno dolgoročno proračunsko omejitev je moč zapisati kot:

$$\sum_{t=0}^{N}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}T_t = \sum_{t=0}^{N}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}G_t + D_0 - \prod_{s=0}^{N}(1+r_t)^{-1}D_N. \tag{2.1.18}$$

Ker na dolgi rok državno zadolževanje ne sme rasti hitreje od obresti, se zadnji del enačbe giblje proti nič.[23] Proračunska omejitev (2.1.18) postane:

$$\sum_{t=0}^{N}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}T_t = \sum_{t=0}^{N}\prod_{s=0}^{t}(1+r_s)^{-1}G_t + D_0. \tag{2.1.19}$$

---

[21] $w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}; r_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}$

Posebej velja poudariti, da A-K model pri poganjanju investicij ne upošteva stroškov njihove zamenjave, ki so pomembni pri analiziranju kratkoročnih posledic vplivanja na investicijsko aktivnost podjetij. Teorija priporoča kot bistveno mero vrednosti kapitala uporabo Tobinovega q koncepta vrednotenja podjetja, ki predvideva investiranje podjetij do točke, ko se njihova tržna vrednost izenači s stroški zamenjave kapitala. V OLG okvirju so Tobinov q koncept uporabili Auerbach (1983), Feldstein (1978), Summers (1980) in drugi.

[22] Model ne meri učinkov transferov prebivalstvu.

[23] t.i. pogoj transverzalnosti.

2.1.3 Ravnovesje modela

Koncept ravnovesja je enak statičnim modelom splošnega ravnovesja s to razliko, da je obnašanje posameznikov, podjetij in države v dinamičnem modelu skladno z gibanjem današnjih in prihodnjih cen na vseh trgih, ki se vedno izpraznijo.

Tako sta potrošnja in ponudba dela optimalna upoštevaje prihodnje gibanje obrestnih mer, osebnih dohodkov in davkov, odločitve podjetij glede investiranja ustrezno odražajo prihodnje obnašanje obrestnih mer in siceršnje gibanje trga kapitala, medtem ko država s svojo politiko zasleduje strogo medčasovno proračunsko omejitev.

Metoda reševanja modela mora torej istočasno obravnavati sedanje in prihodnje stanje spremenljivk ter ne sme dovoliti delnega reševanja ravnovesij za posamezno obdobje brez popolnega zajetja današnjega stanja in prihodnjega razvoja vseh trgov.

Ker večina dinamičnih ravnovesnih ekonomskih modelov nima analitične rešitve, moramo uporabiti numerične metode, s pomočjo katerih najprej ocenimo obnašanje spremenljivk in model iteriramo, dokler ne doseže zadovoljive stopnje konvergence. Na koncu poglavja sledi kratek opis numeričnih metod reševanja dinamičnih ekonomskih modelov.

2.2 Prilagojen Hallov model

V nadaljevanju prikazujemo prilagojen Hallov model rasti (1971) s homogenimi posamezniki, s prisotnostjo davkov in s spremenljivo ponudbo dela, ki bo služil kot temelj za ocenjevanje dolgoročne ravnovesne koristnosti s pomočjo Čebiševih polinomov. Pri razvoju modela sledimo uveljavljeno proceduro, kot jo predlagata Ljungqvist in Sargent (2000).[24] V modelu ni negotovosti.

Osnovna struktura modela

Posamezniki se obnašajo v skladu s CRRA (*constant relative risk aversion*) značilnostmi potrošnje c_t in prostega časa $1-l_t$:[25]

[24] Po drugi strani Cassou in Lansing (2003) sledita Hercowitza in Sampsona (1991), medtem ko njun model temelji na delu Stokeyjeve in Rebela (1995). Na tem mestu posebej poudarjamo, da stohastičnih elementov v model nismo vgrajevali, saj želimo v prvi vrsti stestirati obnašanje Čebiševih polinomov pri oceni dolgoročne koristnosti v odvisnosti od neskončno mnogo optimalnih davčnih načrtov, kot izhajajo iz ravnovesnih Eulerjevih enačb Hallovega modela rasti z davki.

[25] Alternativno se kot funkcijo koristnosti uporablja katerokoli zvezno in dvakrat odvedljivo, strogo konkavno funkcijsko obliko. Tako sta Cassou in Lansing (2003) pri merjenju učinkov davčnih reform na gospodarsko rast predpostavljala logaritemske preference:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c^{\gamma}(1-l)^{1-\gamma}}{1-\rho} \right)^{1-\rho} ; \quad \beta, l \in (0,1) \tag{2.2.1}$$

Tehnologija spreminjanja stanja v modelu je:

$$c_t + g_t + I_t \leq F(k_t, l_t) \tag{2.2.2a}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + I_t \,. \tag{2.2.2b}$$

Pomeni spremenljivk v 2.2.1 in v 2.2.2 so standardni in so v realnih kategorijah: c je potrošnja dobrin povprečnega gospodinjstva, g je potrošnja države, I so bruto investicije, F je linearno homogena produkcijska funkcija s pozitivnimi in padajočimi mejnimi produktivnostmi dela in kapitala, k je zaloga fizičnega kapitala, konstanti iz funkcije koristnosti pa izražata znotraj-časovne preference γ oziroma med-časovne preference ρ posameznega gospodinjstva do potrošnje in prostega časa ter se v času ne spreminjata.

Z združitvijo 2.2.2a in 2.2.2b lahko tehnologijo modela zapišemo tudi kot:

$$c_t + g_t + k_{t+1} \leq F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t \,. \tag{2.2.3}$$

Vse aktivnosti v modelu potekajo v času 0: gospodinjstva imajo v posesti ves kapital, ki ga poleg dela posojajo podjetjem v zameno za plačilo. Podjetja ta kapital in delo uporabljajo za proizvodnjo dobrin po proizvodni funkciji F. V modelu imamo tri zaporedja različnih vrst cen: p_t, r_t in w_t, kjer je p davkov očiščena cena investicijskih oziroma potrošnih dobrin, r davkov prosta cena za posojanje kapitala in w neto cena, ki jo gospodinjstva dobijo od podjetij v zameno za enoto opravljenega dela v času t. Državni izdatki so enaki pobranim davkom, tako je serija splošnih ravnovesij v času dopolnjena z izravnanimi proračuni države.

Reprezentativno gospodinjstvo je lastnik kapitala, ki ga zraven dela posoja reprezentativnemu podjetju v zameno za plačilo. Zraven tega sprejema to gospodinjstvo tudi odločitve glede potrošnje in investicij. Ker na dolgi rok ni zadolževanja, lahko proračunsko omejitev gospodinjstev zapišemo kot:

$$\sum_{t=0}^{\infty} [p_t(1+\tau_{ct})c_t + (1-\tau_{it})p_t[k_{t+1} - (1-\delta)k_t]] \leq \sum_{t=0}^{\infty} [r_t(1-\tau_{kt})k_t + w_t(1-\tau_{lt})l_t] \tag{2.2.4}$$

$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, ln(c_t - h_t l_t^{\gamma})$.

V teoriji poslovnih ciklov precej pogoste so tudi druge podobne specifikacije: $U = ln\, c + \alpha\, ln(1-l)$ oziroma $U = ln\, c + \alpha(1-l)$ (Hansen, 1985).

Hallov model predvideva tudi vlogo države, od katere zahteva, da ima vzdržen proračun, kjer ni zadolževanja in so pobrani davki vselej enaki državni potrošnji:[26]

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t T_t \leq \sum_{t=0}^{\infty} \left[\tau_{ct} p_t c_t - \tau_{it} p_t \left[k_{t+1} - (1-\delta)k_t\right] + r_t \tau_{kt} k_t + w_t \tau_{lt} l_t\right]. \tag{2.2.5}$$

Državi torej dopuščamo precejšen nabor davkov za svoje delovanje: τ_c so davki na potrošnjo, τ_i so investicijske olajšave, τ_k so davki na dohodek kapitala in τ_l davki na dohodek od dela.

Zapišimo še sedanjo vrednost dobička podjetij:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left[p_t F(k_t, l_t) - r_t k_t - w_t l_t\right]. \tag{2.2.6}$$

Obnašanje gospodinjstev v modelu

Enačbo za stroške uporabe kapitala bomo izpeljali s pomočjo predpostavke o neobstoju arbitraže. Kot smo že dejali, v modelu ni negotovosti in trgi so vedno v ravnovesju. V ta namen omejitev gospodinjstev 2.2.4 preuredimo v:

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} p_t \left[(1+\tau_{ct})c_t\right] \leq \sum_{t=0}^{\infty} w_t (1-\tau_{lt}) l_t + \sum_{t=1}^{\infty} \left[r_t (1-\tau_{kt}) + p_t (1-\tau_{it})(1-\delta) - p_{t-1}(1-\tau_{i,t-1})\right] k_t \\ + \left[r_0 (1-\tau_{k0}) + (1-\tau_{i0}) p_0 (1-\delta)\right] k_0 - \lim_{T\to\infty} (1-\tau_{iT}) p_T k_{T+1}\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

V izogib nestabilnosti sistema v ravnovesju je treba v 2.2.7 uvesti naslednji pogoj transverzalnosti, in sicer $\lim_{T\to\infty} (1-\tau_{iT}) p_T k_{T+1} = 0$.

Ker so sredstva v gospodarstvu omejena, je treba desno stran 2.2.7 v ravnovesju omejiti. Upoštevaje našo funkcijo koristnosti in njeno šibko lastnost, da je naraščajoča v obeh parametrih (c in l), postavimo cenovne parametre pri k_t na nič, in sicer za vse $t \geq 1$. Drugače namreč gospodinjstvo ne maksimira svoje koristnosti.

$$p_t (1-\tau_{it}) = p_{t+1}(1-\tau_{it+1})(1-\delta) + r_{t+1}(1-\tau_{kt+1}) \tag{2.2.8}$$

Dokler veljajo takšne razmere je posedovanje kapitalnih dobrin gospodinjstvom nepomembno. Njihovi pogoji prvega reda upoštevajo torej samo potrošnjo c in delo l ter znašajo:

[26] Ni t.i. Ponzi financiranja.

$$\beta^t U_{ct} = \mu p_t (1+\tau_{ct}) \tag{2.2.9a}$$

$$\beta^t U_{Lt} = \mu w_t (1-\tau_{lt}); \quad 0 < L_t < 1, \tag{2.2.9b}$$

kjer je μ Lagrangov multiplikator funkcije koristnosti gospodinjstva 2.2.1, U_{ct} parcialni odvod funkcije koristnosti po potrošnji c, U_{Lt} parcialni odvod funkcije koristnosti po prostem času L_t ($L_t = 1 - l_t$).

Obnašanje podjetij

Pogoje o neobstoju arbitraže imenujemo tudi pogoji ničelnega dobička. To pomeni, da moramo uvesti dodatne omejitve tudi za ravnovesne cene in količine pri delovanju podjetij.

Alternativno lahko 2.2.6 zapišemo kot:

$$\sum_{t=0}^{\infty} [(p_t F_{kt} - r_t)k_t + (p_t F_{lt} - w_t)l_t], \tag{2.2.10}$$

iz česar neposredno sledita pogoja ničelnega dobička, ki sta tudi optimizacijska pogoja za podjetja:

$$\begin{aligned} r_t &= p_t F_{kt} \text{ in} \\ w_t &= p_t F_{lt}. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Ravnovesje modela

Gospodinjstvo izbere takšno zaporedje potrošnje, količine posojenega dela in kapitala, da maksimira svojo koristnost, ki je v našem primeru definirana v 2.2.1. Potrošnja gospodinjstva mora biti znotraj proračunske omejitve 2.2.4. Naslednji element ravnovesja je zaporedje količin dela in kapitala, ki podjetjem maksimira 2.2.6, medtem ko mora država v vsakem obdobju zadovoljiti 2.2.5. Izvedljivo ravnovesno zaporedje je takšen izbor potrošnje, investicij, dela in kapitala, ki zadovoljuje tehnologijo modela 2.2.3.

Ravnovesje modela z davki lahko torej definiramo kot proračunsko izvedljivo politiko države $\{g_t, \tau_t\} = \{g_t, \tau_{ct}, \tau_{lt}, \tau_{kt}, \tau_{it}\}$, uresničljivo alokacijo gospodinjstev in podjetij $\{c_t, l_t, k_{t+1}\}$ter sistem cen $\{p_t, r_t, w_t\}$, tako da izbrana alokacija $\{c_t, l_t, k_{t+1}\}$ gospodinjstvom in podjetjem omogoči, da rešijo svoj optimizacijski problem. To pomeni, da moramo najti takšna zaporedja, ki rešijo sistem nelinearnih diferenčnih enačb, sestavljen iz 2.2.3, 2.2.8, 2.2.9 in 2.2.11, upoštevaje začetni pogoj, da je k_0 dan in pogoj transverzalnosti, kakor izhaja iz 2.2.7.

Sedaj lahko izpeljemo splošno ravnovesje modela. V ta namen vstavimo 2.2.9, 2.2.11 in gibanje kapatala k_{t+1} iz tehnologije 2.2.3 v 2.2.8. Dobimo naslednjo diferenčno enačbo:

$$U_c(c_t, 1-l_t) = \beta U_c(c_{t+1}, 1-l_{t+1})\left(\frac{1+\tau_{ct}}{1+\tau_{ct+1}}\right)\left[\left(\frac{1-\tau_{it+1}}{1-\tau_{it}}(1-\delta)+\frac{1-\tau_{kt+1}}{1-\tau_{it}}F_k(k_{t+1}, l_{t+1})\right)\right], \tag{2.2.12}$$

Ker naša funkcija koristnosti upošteva tudi prosti čas in se delo giblje med 0 in 1, je treba 2.2.12 dopolniti še z drugo Eulerjevo enačbo, ki izhaja iz pogojev prvega reda gospodinjstva, torej iz 2.2.9.

$$\frac{U_L(c_t, L_t)}{U_c(c_t, L_t)} = \frac{(1-\tau_{lt})}{(1+\tau_{ct})}F_l(k_t, l_t); \quad L_t = 1-l_t\,. \tag{2.2.13}$$

Ravnovesje modela je rešitev enačb 2.2.12 in 2.2.13 ob upoštevanju začetnega pogoja k_0 in pogoja transverzalnosti. S pomočjo ustrezne davčne politike določimo, da se sistem zapre, s čimer pridemo do ravnovesnega kapitala k_∞.

Ker bomo v četrtem poglavju poiskali enačbo dolgoročne koristnosti U v odvisnosti od ustaljenega stanja kapitala, ki ga poganja neskončno mnogo simuliranih optimalnih davčnih načrtov, je treba definirati ustaljeno stanje modela.[27]

Ustaljeno stanje modela

Iščemo stanje, v katerem se spremenljivke modela v času ne spreminjajo več in postanejo konstantne. Glede na zgradbo modela je to dolgoročno ravnovesno stanje moč doseči, če že na začetku predpostavimo nespremenjeno obnašanje države in vse davke osvobodimo časovne dimenzije.

Zapis ustaljenega stanja ravnovesnega sistema enačb 2.2.12 in 2.2.13 je torej sledeč:

$$\beta^{-1} = (1-\delta) + \left(\frac{1-\tau_k}{1-\tau_i}\right)F_k(k^*, l^*) \tag{2.2.14a}$$

$$\frac{U_L(c^*, L^*)}{U_c(c^*, L^*)} = \frac{(1-\tau_l)}{(1+\tau_c)}F_l(k^*, l^*) \tag{2.2.14b}$$

Če v 2.2.14 vključimo linearno homogeno Cobb-Douglassovo produkcijsko funkcijo, dobimo verzijo modela, ki nam bo v nadaljevanju služila kot osnova za simuliranje optimalnih davčnih načrtov in s tem za oceno dolgoročne koristnosti U.

[27] Vse dodatne izpeljave, ki jih pri oceni dolgoročn ravnovesne koristnosti v poglavju 4 potrebujemo, se nahajajo v poglavju samem oziroma v prilogah.

$$\left(\left(\beta^{-1}-(1-\delta)\right)\frac{(1-\tau_i)}{\alpha(1-\tau_k)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}k^*=l^* \tag{2.2.15a}$$

$$c(k^*,l^*)=\frac{\gamma(-1+l)(-1+\alpha)(-1+\tau_l)k^{*\alpha}l^{*-\alpha}}{(-1+\gamma)(1+\tau_c)} \tag{2.2.15b}$$

Za to, da iz sistema 2.2.15 dokončno izluščimo kapital kot funkcijo davkov si pomagamo z združitvijo tehnologije modela 2.2.3 in proračunske omejitve države 2.2.16, ki jo dobimo, če 2.2.5 po kombinaciji z 2.2.11 očistimo cen:

$$T\le\tau_c C(k)-\tau_{inv}(k-(1-\delta)k)+\tau_k F_k k+\tau_l F_l L(k) \tag{2.2.16}$$

Če sedaj združimo 2.2.3 in 2.2.16 ter ob tem upoštevamo zgoraj omenjeno Cobb-Douglasovo tehnologijo proizvodnje, dobimo novo enačbo potrošnje *c*:

$$c(k^*,l^*)=\frac{k^{*\alpha}l^{*(1-\alpha)}(1-\tau_k\alpha-\tau_l(1-\alpha))-\left(k^*-(1-\delta)k^*\right)(1-\tau_i)}{(\tau_c+1)}. \tag{2.2.17}$$

Ob izenačitvi 2.2.17 z 2.2.15b in zamenjavi ustaljenega stanja dela l^* z 2.2.15a, je dolgoročni kapital k^*, kakor ga bomo v nadaljevanju potrebovali, naslednji:[28]

$$k^*=\frac{\gamma(-1+\alpha)\left(\frac{-1+\beta^{-1}+\delta}{\alpha-\alpha\tau_{cap}}\right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(-1+\tau_{lab})}{(-1+\gamma)\left(\delta-\delta\tau_{inv}+\frac{\gamma(-1+\alpha)\left(\frac{-1+\beta^{-1}+\delta}{\alpha-\alpha\tau_{cap}}\right)(-1+\tau_{lab})}{-1+\gamma}+\frac{(1+\beta(-1+\delta))(-1+\tau_{inv})(-1+\alpha\tau_{cap}-(-1+\alpha)\tau_{lab})}{\alpha\beta(-1+\tau_{cap})}\right)} \tag{2.2.18}$$

S tem izpeljavo Hallovega modela za sedaj zaključujemo. K njemu se vračamo v poglavju 4, kjer s pomočjo Čebiševih polinomov ocenimo njegovo dolgoročno koristnost v odvisnosti od kapitala, ki ga vodijo odvisni davčni načrti. Sledi kratek opis nekaterih numeričnih metod reševanja obeh tipov dinamičnih modelov.

2.3 Numerično reševanje dinamičnih modelov

Zaradi njihove kompleksnosti večina dinamičnih ravnovesnih ekonomskih modelov nima analitične rešitve. Zato je za njihovo reševanje treba uporabiti numerične metode, s

[28] To enačbo bomo v nadaljevanju potrebovali, ko bomo iskali proračunsko nevtralne davčne načrte, in sicer za posamezne stopnje dolgoročnega kapitala (Čebiševe razporeditvene vozle), katerim bomo fiksirali dolgoročne koristnosti.

pomočjo katerih lahko spremljamo obnašanje spremenljivk v času. Na tem mestu je treba poudariti, da z numeričnimi metodami ne dobimo natančnih rešitev, ampak njihove bolj ali manj dobre približke. V tem poglavju prikazujemo nekatere metode iteriranja, ki se pri simulacijah dinamičnih modelov tipa gornjih dveh zelo pogosto uporabljajo.

Najpreprostejši način reševanja dinamičnih modelov je iteracija vrednostne funkcije (*value function iteration*), ki je utemeljena na podlagi lastnosti Bellmanove enačbe. Za njeno reševanje je treba sestaviti zaporedje vrednostnih funkcij in pripadajočih odločitvenih funkcij

$$V_{j+1}(x) = \max_u \left(r(x,u) + \beta V_j(\tilde{x}) \right), \tag{2.4.1}$$

z danim začetnim stanjem in znanim zakonom gibanja $\tilde{x} = g(x,u)$.[29]

Metoda je kljub svojim prednostim, kot sta preprosta uporaba in lastnost konvergence, manj uporabna, saj je zelo počasna (Rust 1996, 1997; Rust et al. 2002). Še posebej v primeru neskončnih problemov, saj konvergira linearno s stopnjo *k*, pri vsaki ponovitvi pa rešuje toliko optimizacijskih problemov, kolikor je stanj. Govorimo o problemu prekletstva dimenzionalnosti. Judd (1998) s tem v zvezi daje širok spekter metod ocenjevanja približkov funkcij, kot so na primer lokalna aproksimacija s pomočjo Taylorjeve vrste, interpolacije z ortogonalnimi polinomi ipd., s katerimi nadomestimo izvirno funkcijo stanja z njeno preprostejšo oceno, kar pospeši stopnjo konvergence sistema.

Nekoliko boljša je metoda iteriranja na odločitveni funkciji (*policy function iteration*),[30] ki se v primeru vrednosti diskontnega faktorja blizu 1 obravnava kot ena hitrejših iterativnih metod, kar še posebej velja za njene modernejše oblike (Rust 1996, 654). Za razliko od metode iteriranja po vrednostni funkciji, ohranja iteracija odločitvene funkcije vse vrednosti, izračunane v posameznih korakih, s čimer se zniža število opravljenih ocenjevanj. Povedano drugače, pri vsakem izračunu vrednostne funkcije se predpostavlja, da se ne premaknemo iz posamezne odločitvene funkcije. Za reševanje je treba podati zgolj želeno vrednost napake $\varepsilon > 0$ in začetno vrednost odločitvene funkcije $u = h_0(x)$.[31]

Vrednostno funkcijo izračunamo kot

$$V_{h_j}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r\left[x_t, h_j(x_t)\right], \tag{2.4.2}$$

[29] Izrek operatorja, ki krči prostor (*contraction mapping operator*), zagotavlja, da bo vrednost problema asimptotično konvergirala k pravi vrednosti.
[30] Imenujemo jo tudi metoda Howardovega algoritma izboljšanja (*Howard's improvement algorithm*).
[31] Namesto začetne vrednosti odločitvene funkcije lahko podamo tudi štartno vrednost vrednostne funkcije, iz katere potem izračunamo začetno vrednost odločitvene funkcije. S tem preskočimo prvi korak.

z zakonom gibanja $x_{t+1} = g[x_t, h_j(x_t)]$. Novo odločitveno funkcijo $u = h_{j+1}(x)$ dobimo z maksimiranjem

$$\max_u \left(r(x,u) + \beta V_{h_j}[g(x,u)] \right) \quad \forall x . \tag{2.4.3}$$

Končno rešitev dobimo z vrtenjem obeh enačb dokler ne dosežemo kriterija konvergence $\varepsilon > 0$.

Zelo priljubljene so tudi t.i. Gaussove metode iteriranja. Tako Auerbach, Kotlikoff (1987) in Altig et al. (2001) pri reševanju modelov obdavčitve uporabijo Gauss-Seidlovo metodo iteriranja, ki je izpopolnjena verzija Gauss-Jacobijeve, ki je v splošnem definirana kot:

$$V_l^{i+1} = \max_u \frac{\pi(x_i, u) + \beta \sum_{j \neq i} q_{ij}(u) V_j^i}{1 - \beta q_{ii}(u)} . \tag{2.4.4}$$

Gauss-Jacobijeva metoda ne upošteva nove informacije, dokler ne izračunamo vseh komponent vrednostne funkcije V^{i+1}. To dopolni Gauss-Seidlova metoda, zaradi česar je v primerjavi z Gauss-Jacobijevo hitrejša. Splošen potek Gauss-Seidlove metode lahko matematično zapišemo kot:

$$V_l^{i+1} = \max_u \frac{\pi(x_i, u) + \beta \sum_{j<i} q_{ij}(u) V_j^{i+1} + \beta \sum_{j>i} q_{ij}(u) V_j^i}{1 - \beta q_{ii}(u)} , i = 1,2,... . \tag{2.4.5}$$

Konvergenco obeh metod zagotavlja operator $\beta < 1$, ki krči prostor. Z nadaljnjimi izboljšavami se je hitrost konvergence pri obeh metodah še povišala (Judd 1998).

Zraven omenjenih iteracij se pri reševanju zahtevnejših dinamičnih modelov uporabljajo naslednje kombinacije metod numerične analize: (ii) Čebiševi približki in nevronske mreže (Auerbach, Hassett 2002), (iii) projekcijske metode (Judd 1996; Gaspar, Judd 1997), (iv) perturbacije in bifurkacije (Judd 1996; Judd et al. 2003), (v) metode nedoločenih koeficientov (Campbell 1994; Cassou, Lansing 2003), približki višjega reda (Schmitt-Grohe, Uribe 2004), idr.[32]

[32] Več o numeričnih metodah reševanja dinamičnih modelov je moč najti v: Christiano (1998), Gaspar in Judd (1997), Judd (1999), Miranda in Fackler (2002), Rust (1997; 1996) in v Rust et al. (2002).

2.4 Modeliranje davčnih reform

Ker imata obe vrsti opisanih dinamičnih ekonomskih modelov v svoji strukturi močno poudarjeno vlogo države, nadaljujemo našo razpravo s kratkim prikazom nekaterih temeljnih raziskav na temo prehodov iz progresivnih in dohodkovnih na linearne in potrošne davke ter njihovih učinkov na gospodarstvo. Ravno na področju davčnih reform se namreč omenjeni OLG modeli heterogenih posameznikov in modeli Hallovega tipa, neskončno živečih in homogenih posameznikov, zelo intenzivno uporabljajo in prepletajo.

Sodobno preučevanje davčnih sistemov namreč preseže statično razreševanje in temelji na medčasovni optimizaciji. S tem se poudarja pomen dolgoročnih posledic ekonomskih reform na ekonomske spremenljivke in ne le enkratnih učinkov, kot to predpostavljajo statični modeli, katerih slabost izhaja iz njihove nezmožnosti povezave vpliva sedanjih odločitev na prihodnje, saj ne daje odgovora o vzrokih gibanja proučevanih spremenljivk. Pri modeliranju je te treba upoštevati, še posebej v primerih, ko prihaja v gospodarstvu do velikih strukturnih sprememb, ki ta zakon gibanja spremenijo, saj spremembe politik vplivajo na spremembe vzorcev obnašanja posameznikov.

Sistematično preučevanje obdavčitve se v ekonomski teoriji začne že v prvem četrtletju prejšnjega stoletja s Frankom Ramseyem (1927), ki v svojem temeljnem delu *A Contribution to the Theory of Taxation* postavi vprašanje oblikovanja različnih stopenj proporcionalnih obdavčitev potrošnje in sicer tako da bi s tem najmanj negativno vplivali na koristnost, ki iz te potrošnje izhaja. Pri tem ugotovi, da je enako obdavčevanje različnih vrst potrošnje zmotno in predlaga, da se bolj obdavči potrošnjo z nižjo cenovno elastičnostjo.[33]

Analiziranje modelov, ki v svojo strukturo aktivno vključujejo vlogo države doseže svoj pravi razmah šele koncem sedemdesetih in traja vse do danes, ko je modeliranje davčnih sistemov priljubljeno predvsem zaradi merjenja učinkov različnih tipov davčnih reform.

Med prvimi ekonomisti, ki so začeli raziskovati modele z aktivno vlogo države v svoji strukturi štejemo: Diamonda (1973), Auerbacha (1979), Atkinsona in Sandma (1980), Feldsteina in Metcalfa (1987), kateri negativne vplive obdavčitve dohodkov kapitala dokazujejo z reševanjem OLG modelov tipa A-K. Po drugi strani Judd (1985) z uporabo

[33] Hkrati je Ramsey z matematično teorijo varčevanja (1928) začetnik razvoja dinamičnih ekonomskih modelov sploh. S tem v zvezi velja omeniti, da so v ekonomski znanosti vseskozi prevladovale predpostavke ekonomskega determinizma, ki so ideje po dinamičnem in interdisciplinarnem pristopu k reševanju aktualnih ekonomskih vprašanj, predvsem uvajanju dognanj s področja fizike in numerike, vneto zavračali. Z vse večjim prebojem znanstvenikov omenjenih področij v ekonomsko znanost se ta sicer čvrsto zakoreninjena miselnost spreminja in dinamično-numeričen pristop k reševanju ekonomskih vprašanj dobiva mesto, ki mu pripada. Pri ekonomiji namreč, tako kot pri ostalih znanostih, razmerja niso vnaprej determinirana, temveč se v času spreminjajo.

modela neskončno živečih in homogenih posameznikov dokaže, da je optimalna dolgoročna obdavčitev kapitala enaka nič.[34]

Kasneje Judd (1999) svoj predhodni model (1987a, 1987b) posploši z možnostjo vključitve investicij v človeški kapital, državnih izdatkov in različnih oblik rasti.[35] S posodobljenim modelom potrdi, da je kapital nesmotrno obdavčiti tudi takrat, ko se zaloga kapitala oziroma njena stopnja zviševanja ne gibljeta v smeri dolgoročno ustaljenega stanja. Prav tako je nesmotrno obdavčiti človeški kapital in to v primerih, ko le-ta ni končna dobrina, ampak nastopa v produkciji nove vrednosti. Judd v tem članku predlaga obdavčitev dohodkov od dela in/ali potrošnje.

Negativen vpliv obdavčitve dohodkov kapitala na gospodarsko rast in blaginjo že na srednji rok pokažejo tudi numerične simulacije, ki jih Jones et. al. (1993) opravijo na treh endogenih modelih rasti neskončno živečih in homogenih posameznikov: (i) modelu s simetričnim fizičnim in človeškim kapitalom, (ii) modelu z elastično ponudbo dela ter (iii) na modelu, ki državne izdatke vključuje kot produktivne. V slednjem primeru, ko se državi dovoli vstopanje v formacijo kapitala, avtorji zavrnejo ničelno obdavčitev dohodkov kapitala, medtem ko so negativni učinki na rast in blaginjo v vseh treh primerih podobni.[36]

V zadnjem času je precejšen del raziskav s področja teorije optimalne obdavčitve usmerjen v proučevanje reformiranja davčnih sistemov. Tako se pojavjo številni prispevki, ki s pomočjo ustreznih dinamičnih ekonomskih modelov razlagajo ekonomske učinke različnih davčnih reform.[37] Tako simulacije Jorgensona in Yuna (1990) glede učinkov davčne reforme Reaganove administracije iz leta 1986 pokažejo, da bi prehod na davke, ki bi vse vrste kapitala obravnavali enako, imel bistveno močnejše učinke od dejansko sprejete davčne reforme.

Prispevke o vplivu posameznih tipov davčnih sistemov na gospodarsko aktivnost dopolnijo raziskave o posledicah dinamičnih učinkov uvedbe davčne reforme tipa Hall – Rabushka (1995).[38] Ventura (1999) s pomočjo prirejenega OLG modela pokaže, da bi proračunsko nevtralna davčna reforma, kjer bi ameriško davčno zakonodajo na področju obdavčitve

[34] Za model homogenih posameznikov se je Judd odločil, ker razlike, ki jih različni davčni sistemi dodatno povzročajo med posamezniki niso pomembne, saj izhaja iz podmene o tem, da smo si ljudje pač različni.
[35] Kot zanimivost omenjamo, da sta na 12. konferenci o numerični ekonomiji, ki jo vsako leto organizira Society for Computational Economics in je med 22. in 24. junijem potekala na Cipru, Judd in Su (2006) zavrnila splošno Mirleesovo tezo teorije obdavčitve o neobstoju negativnih mejnih davčnih stopenj za najvišje razrede obdavčitve.
[36] Prva dva vključujeta davke eksogeno.
[37] Pomen uporabe dinamičnih metod pri izračunu vpliva davčne reforme na gospodarstvo poudarja celo ameriški Wall Street Journal, ki v članku *Dynamic Treasury*, objavljenim 13. 2. 2006, piše, o predlogu predsednika Busha, ki za fiskalno leto 2007 namenja US$ 500.000 za ustanovitev skupine, ki bo na podlagi dinamičnega modela proučevala dolgoročne fiskalne vplive na gospodarstvo.
[38] V nadaljevanju H-R.

dohodka in obdavčitve kapitala preoblikovali v skladu s H-R davčno reformo.[39] Avtor analizira vpliv takšne reforme na akumulacijo kapitala in na ponudbo dela ter njene posledice na distrubicijo dohodka. Pri tem ugotovi, da ima ukinitev obdavčitve kapitalskih dohodkov pozitiven vpliv na akumulacijo kapitala, da se povprečna ponudba dela bistveno ne spremeni, da se poviša produktivnost dela ter da se poviša koncentracija distribucije dohodka. Izpostaviti velja tudi študijo Cassou-a in Lansinga (1996), ki simulirata posledice H-R reforme na dinamičnem modelu splošnega ravnovesja ter analizo Gonzales-Torrabadelle in Pijoan-Masa (2006), ki uvedbo H-R davčne reforme simulirata na primeru Španije.[40]

Morda najbolj celostna je raziskava, ki so jo opravili Altig et. al. (2001). Raziskovalci A-K model življenjskega cikla razširijo na 12 heterogenih generacij (kohort) in simulirajo učinke na blaginjo in druge makroekonomske učinke uvedbe petih vrst davčnih reform: (i) linearne dohodnine, (ii) linearnega davka na potrošnjo, (iii) enotne davčne stopnje, (iv) enotne davčne stopnje s prehodno olajšavo in (v) Bradfordovega X – davka. Pri tem ugotovijo, da omenjene reforme nudijo precej prostora za intenzivnejšo makroekonomsko ekspanzijo s pozitivnimi učinki za blaginjo mnogih, vendar ne brez poslabšanja standarda predvsem starejšim skupinam. Reforme, ki poskušajo slednje učinke omejiti in uvajajo prehodne olajšave, imajo nižje agregatne učinke.

Pri prehodu iz sistema progresivne obdavčitve na linearne davke lahko torej upravičeno pričakujemo pozitivne učinke pri rasti produktivnosti, kar je osnova doseganja višjih stopenj rasti na dolgi rok. Ta je posledica zmanjšanja presežnega davčnega bremena (*excess tax burden*) oziroma mrtve izgube (*deadweight loss*), kar povzroča nižjo raven ekonomske učinkovitosti. Potencialne vzroke teh distorzij vidi Diewert (1988) v štirih virih: (i) različni davčni obravnavi končnih dobrin, (ii) obdavčitvi kapitala, (iii) različni obdavčitvi poslovnega sektorja in (iv) obdavčitvi obresti.[41]

Zaradi zadnjih predlogov reformiranja slovenskega davčnega sistema je postala sodobna teorija optimalne obdavčitve pomembna tudi za Slovenijo. Predlogi reform so posledica visoke davčne obremenitve slovenskega gospodarstva, kar kažejo mednarodne primerjave. Poleg tega veljajo slovenskemu podobni davčni sistemi za precej kompleksne, netransparentne, neučinkovite in zapletene, kar so denimo razlogi, zaradi katerih sta Hall in Rabushka (1995) predlagala reformiranje ameriškega davčnega sistema v smeri enotne davčne stopnje (EDS).[42]

---

[39] Model dejansko ni OLG, saj ne predpostavlja gotovosti pri zamenjavi generacije, temveč jo simulira s pomočjo matrike verjetnosti s_i.

[40] Relevantne študije so tudi: Auerbach 1997; Auerbach, Kotlikoff 1987; Conesa, Krueger 2005; Fullerton, Rogers 1993; Judd 2001; Stokey, Rebelo 1995 in druge.

[41] Na prisotnost mrtve izgube v ameriškem gospodarstvu pokaže tudi Feldstein (1995).

[42] Čeprav se Hall-Rabushkov tip EDS večkrat pojmuje kot potrošni davek, ga v pravem pomenu besede ne moremo obravnavati kot takšnega, saj je pristranski do investicij v človeški kapital (Judd 1998, 1999).

Sklenimo ta pregled. Modele, s katerimi raziskovalci proučujejo posledice uvajanja davčnih reform je smiselno deliti v tri skupine: modeli, ki temeljijo na OLG formulaciji (na primer: Altig et al. 2001, Auerbach, Kotlikoff 1987, Altig, Carlstrom 1999, Fullerton, Rogers 1993), modeli neskončno živečega, reprezentativnega agenta (Judd 1985, 1999) oziroma modeli raznovrstnih posameznikov (Ventura 1999). Hkrati velja poudariti, da analize v splošnem nasprotujejo obdavčevanju kapitala in progresivnim davkom ter favorizirajo davke na potrošnjo in/ali linearne davke.

3 NUMERIČNE METODE OPTIMIZACIJE IN APROKSIMACIJE

Naša osrednja naloga je ocena ravnovesne koristnosti Hallovega modela. To storimo v četrtem poglavju, in sicer z uporabo projekcijskega algoritma, temelječega na optimalnih davčnih načrtih in Čebiševih polinomih. Prve simuliramo s pomočjo numerične metode globalne optimizacije z omejitvami, slednji pa so inštrument Čebiševe interpolacije, ki je ena izmed metod numerične aproksimacije.

V nadaljevanju zato najprej prikazujemo nekatere standardne algoritme numerične optimizacije in numerične aproksimacije, ki se pri numeričnem reševanju različnih ekonomskih problemov najpogosteje uporabljajo, vendar s poudarkom na metodah globalne optimizacije z omejitvami in na Čebiševih polinomih. Poglavje je nekoliko širše zastavljeno, saj je namen seznaniti bralca s temeljnimi značilnostmi obeh vrst metod in s širokimi možnostmi njihove uporabe.

3.1 Numerična optimizacija

Optimalno obnašanje posameznikov je splošno uveljavljena predpostavka pri raziskovanju ekonomskih fenomenov; potrošniki maksimirajo koristnost, podjetja maksimirajo dobiček in minimirajo stroške, socialni planer maksimira blaginjo ipd. Poleg tega se optimizacijske metode uporabljajo pri ekonometričnih analizah, saj so na primer vključene v metode najmanjših kvadratov, metode momentov, metode najvišjega verjetja ipd. Optimizacija je torej ena osrednjih kategorij ekonomske analize.

Najprej obravnavamo nekatere lokalne in globalne metode optimizacije brez omejitev, ki jih v nadaljevanju nadgradimo s pristopi, ki omogočajo vključitev linearnih in nelinearnih omejitev. Minimalen teoretičen okvir obeh vrst optimizacijskih metod je predstavljen v prilogah.

Za lažjo predstavo glede značilnosti in uporabnosti različnih metod numerične optimizacije prikazujemo v tabeli 1 Wangovo klasifikacijo z nekaterimi osnovnimi značilnostmi najbolj uporabljanih metod lokalne in globalne optimizacije.

TABELA 1: WANGOVA KLASIFIKACIJA METOD NUMERIČNE OPTIMIZACIJE

Formulacija problema	Strategija iskanja	Metoda iskanja	Dosežena optimalnost	Lastnosti konvergence	Zmožnost vključitve nelinearnih funkcij oz. omejitev	Zahteva zveznost in/ali odvedljivost funkcij oz. omejitev
Princip kaznovanja	Lokalno iskanje	Padajoči nakloni	Lokalna	Ne	Da	Da
		Vezani nakloni	Lokalna	Ne	Da	Da
		Newtonove metode	Lokalna	Ne	Da	Da
		Metode simpleksa	Lokalna	Ne	Da	Da
		Metode neposrednih nizov	Lokalna	Ne	Da	Da
	Globalno iskanje	Metode trajektorij	Lokalna	Ne	Da	Da
		Metode sledenja	Lokalna	Ne	Da	Da
		Lokalno penaliziranje	Lokalna	Ne	Da	Da
		Metode učenja	Lokalna	Ne	Da	Ne
		Naključno večkratno ponavljanje	Lokalna	Ne	Da	Ne
		Prilagodljivo večkratno ponavljanje	Lokalna	Ne	Da	Ne
		Nadzirano lokalno iskanje	Lokalna	Ne	Da	Ne
		Bayesove metode	Lokalna	Ne	Da	Ne
	Globalna optimizacija	Naključno iskanje	Globalna	Dosegljiva	Da	Ne
		Popolnoma prilagodljivo iskanje	Globalna	Dosegljiva	Da	Ne
		Nadzirano poljubno iskanje	Globalna	Dosegljiva	Da	Ne
		Genetski algoritmi	Globalna	Dosegljiva	Da	Ne
		Simulirano ohlajanje	Globalna	Asimptotična	Da	Ne
Lagrangev princip		Metode pogojev prvega reda	Lokalna	Ne	Da	Da
		Newtnovim podobne metode	Lokalna	Ne	Da	Da
		SQP	Lokalna	Ne	Da	Da
		FSQP	Lokalna	Ne	Da	Da

Vir: Wang (2001, 33).

3.1.1 Newtonova metoda

Sodi v skupino metod iskanja po premici (*line – search methods*).[43] Newtonov pristop je precej preprost in učinkovit pri reševanju dvodimenzionalnih optimizacijskih problemov.[44] Metoda upošteva informacije o gradientu kriterijske funkcije in temelji na njenem približku drugega reda. Algoritem v vsaki ponovitvi zamenja obstoječ približek kriterijske funkcije z novo, narejeno okrog kritične točke prejšnjega približka. Pri tem izhaja iz Taylorjeve ocene drugega reda.[45]

Oceno kriterijske funkcije okrog točke x^k torej definiramo kot

$$f(x) \cong f\left(x^k\right) + \nabla f\left(x^k\right)\left(x - x^k\right) + \frac{1}{2}\left(x - x^k\right)^T H_k \left(x - x^k\right), \tag{3.1.1}$$

kjer je

$$\nabla f\left(x^k\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^k\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^k\right)\right) \tag{3.1.2}$$

gradient kriterijske funkcije v točki x^k in

$$H\left(x^k\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{x_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{x_{1,n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{x_{1,n}} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{x_{n,n}} \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

Hessova matrika v točki x^k. V primeru, ko je slednja pozitivno definitna, ima ocena kriterijske funkcije *f* okrog točke x^k ekstrem v

$$x^{k+1} = x^k - H\left(x^k\right)^{-1}\left(\nabla f\left(x^k\right)\right)^T, \tag{3.1.4}$$

kar je točka ocenjevanja za naslednji korak.[46] V izogib računanju obratne matrike za vsako iteracijo posebej, lahko uporabimo trik z Newtonovim korakom $p^k \equiv x^{k+1} - x^k$, ki ga rešujemo iz linearnega sistema

$$H\left(x^k\right)p^k = -\left(\nabla f\left(x^k\right)\right)^T. \tag{3.1.5}$$

---

[43] V nadaljevanju *LSM*.

[44] Pri predstavitvi Newtonovih in kvazi-Newtonovih metod sledimo Juddu (1998), Nocedalu in Wrightu (1999) ter Kelleyu (1999).

[45] Značilnosti Taylorjeve vrste kot metode lokalnega ocenjevanja funkcij so v poglavju 3.2.1.

[46] Iterativno shemo uporabljamo tudi, ko Hessova matrika ni pozitivno definitna. To je ena večjih slabosti Newtonovega algoritma.

in sicer s pomočjo katerekoli izmed metod reševanja linearnih enačb tipa $Ax = b$.[47] Novo točko dobimo, tako da p^k prištejemo k x^k: $x^{k+1} = x^k + p^k$ in ponavljamo s ponovitvami, dokler se zaporedje x^k ne ustali do želene stopnje:

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon\left(1 + \left\| x^k \right\|\right), \tag{3.1.6}$$

kvaliteto rezultata pa preverimo s testom pogoja prvega reda:[48]

$$\left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| \le \delta\left(1 + \left| f\left(x^k\right) \right|\right). \tag{3.1.7}$$

Kot že rečeno je osnovna različica Newtonove metode posebna vrsta *LSM* algoritmov, kjer v vsaki ponovitvi naredimo poln korak v izbrano smer p^k. *LSM* algoritmi v splošnem potekajo takole:

(i) Najprej določi začetne vrednosti za x^0 in parametra ustavljanja algoritma $\delta \wedge \varepsilon > 0$.

(ii) Določi smer iskanja p^k.

(iii) Reši $\alpha_k = arg\, min_\alpha\, f\left(x^k + \alpha p^k\right)$.[49]

(iv) $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$.

(v) Če je $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon(1 + \|x_k\|)$, nadaljuj s korakom (vi), v nasprotnem primeru se vrni v korak (ii).

(vi) Če je $\|\nabla f(x_k)\| < \delta(1 + |f(x_k)|)$, ustavi algoritem in javi, da je le-ta uspešno našel ekstrem, sicer ustavi in javi nezadovoljivo konvergenco.

Če v (ii) uporabimo Newtonov korak iz 3.1.5 in izberemo takšno dolžino koraka iz (iii), ki minimira kriterijsko funkcijo v Newtonovi smeri, dobimo kombiniran Newtonov algoritem, ki se od osnovnega Newtonovega algoritma razlikuje v tem, da jamči gibanje v smeri zniževanja kriterijske funkcije. Umirjanje kombiniranega algoritma je nekoliko počasnejše, saj je treba v vsakem koraku izvajati iskanje po premici. S tem algoritem preseže lokalne karakteristike Newtonovega koraka. Judd v začetni fazi predlaga uporabo

[47] Gaussova eliminacija, QR faktorizacija, Cholesky-jeva faktorizacija, diagonalne metode in druge.

[48] Pogoji optimizacije prvega in drugega reda ter nekateri temeljni izreki s tem v zvezi so v prilogah.

[49] Dolžina koraka posamezne iteracije α_k mora ustrezati Wolfovim pogojem, ki so zadostni pogoji za to, da se gibljemo v smeri zniževanja funkcijske vrednosti (Nocedal in Wright, 1999, 39):

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$$

$$\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T s_k \ge c_2 \nabla f_k^T p_k$$

$$0 < c_1 < c_2 < 1$$

kombiniranega algoritma, v fazi približevanja optimalni točki pa preskok na poln Newtonov korak ($\alpha_k = 1$),[50] ki jamči kvadratno stopnjo konvergence.[51]

Bistvena slabost metod, ki uporabljajo Newtonov korak, je izračunavanje Hessovih matrik, ki jih je, še posebej ko so obsežne, težko procesirati in shranjevati ter z njihovo pomočjo računati Newtonov korak. Slabost odpravljajo t.i. kvazi - Newtonove metode, ki oceno Hessove matrike ponavljajoče osvežujejo.

3.1.2 Kvazi – Newtonove metode

Algoritmi so kombinacija Newtonovega koraka in *LSM* algoritmov, s to razliko, da ne uporabljajo pravih Hessovih matrik, temveč jih iterirajo. Matrike so vedno pozitivno semidefinitne, kar zagotavlja gibanje v smeri padanja kriterijske funkcije.

Ena bolj uporabljanih kvazi-Newtonovih metod je Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannov algoritem BFGS:

(i) Najprej določi začetne vrednosti za x_0, Hessovo matriko $H_0 = 1$ in želeno stopnjo ustalitve oziroma pravili ustavljanja algoritma $\delta \wedge \varepsilon > 0$.

(ii) Reši $H_k p_k = -(\nabla f(x_k))^T$ za smer iskanja p_k.

(iii) Reši $\alpha_k = arg\,min_\alpha\, f(x_k + \alpha p_k)$.[52]

(iv) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

(v) Osveži Hessovo matriko H_k :[53]

$$z_k = x_{k+1} - x_k$$

$$y_k = (\nabla f(x_{k+1}))^T - (\nabla f(x_k))^T$$

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k z_k z_k^T H_k}{z_k^T H_k z_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T z_k}$$

---

[50] V bližini optimuma (globalnega oziroma lokalnega) je α_k vedno enaka 1, saj je poln Newtonov korak iz 3.1.5 izračunan iz optimizacijskih pogojev ocene kriterijske funkcije *f*.

[51] Več o konvergencah Newtonovih metod najde zainteresiran bralec v Kelley (1999).

[52] Dolžina koraka posamezne iteracije α_k mora ustrezati Wolfovim pogojem, ki so zadostni pogoji za to, da se gibljemo v smeri zniževanja funkcijske vrednosti (Nocedal in Wright, 1999, 39):

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$$

$$\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T s_k \ge c_2 \nabla f_k^T p_k$$

$$0 < c_1 < c_2 < 1$$

[53] Alternativa je uporaba ocenjene inverzne Hessove matrike:

$$H_{k+1}^{-1} = \left(I - \rho_k z_k y_k^T\right) H_k^{-1} \left(I - \rho_k z_k y_k^T\right) + \rho_k z_k z_k^T$$

$$\rho_k = \left(y_k^T z_k\right)^{-1}$$

S tem znižamo strošek števila operacij z $O(n^3)$ na $O(n^2)$.

(vi) Če je $\|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon(1+\|x_k\|)$, nadaljuj s korakom (vii), v nasprotnem primeru se vrni v korak (ii).

(vii) Če je $\|\nabla f(x_k)\| < \delta(1+|f(x_k)|)$, ustavi algoritem in javi, da je le-ta uspešno našel ekstrem, sicer ustavi in javi nezadovoljivo konvergenco.

3.1.3 Metode vezanih naklonov

V primerih obsežnih več-dimenzionalnih problemov imamo navadno opraviti z obsežnimi Hessovimi matrikami in njihovimi približki, ki jih procesor ni sposoben vedno znova shranjevati in procesirati. Sodobni računalniki so sicer brez težav sposobni manipulirati z vektorji dimenzije $1x1000$ in obratno, medtem ko imajo z matrikami $1000x1000$ precej več težav. Tako je treba za reševanje obsežnejših problemov uporabiti prijeme, ki zahtevajo manj prostora od Newtonovih in Kvazi – Newtonovih metod. Ker temeljijo na ponavljajočem osveževanju naklonov, jih imenujemo metode vezanih naklonov (*conjugate gradient methods*).[54]

CGM algoritmi ne zahtevajo računanja matrik. Linearno *CGM* sta prva predstavila Hestenes in Stiefel (1952), in sicer kot metodo reševanja linearnih sistemov s pozitivno definitnimi matrikami.[55] Fletcher in Reeves (1962) sta linearno *CGM* posplošila, tako da je njun algoritem sposoben najti minimum tudi v primerih splošnih konveksnih funkcij. Obstaja več različic njunega algoritma, od katerih se je najbolj uveljavila metoda Polaka in Ribière. Poglejmo najprej osnovne značilnosti linearnih *CGM* algoritmov, kot jih navajata Nocedal in Wright (1999).

Linearna metoda CGM

V osnovi gre za iterativno metodo reševanja linearnih sistemov enačb tipa $Ax = b$, kjer je A simetrična in pozitivno definitna matrika. Enak vektor x dobimo, če linearni sistem preuredimo v preprost kvadratni konveksni optimizacijski problem:

$$\underset{min}{f(x)} = \frac{1}{2} x^T Ax - b^T x . \tag{3.1.8}$$

Metode *CGM* so zgrajene na vezanih smernih vektorjih in zaporedni eno-dimenzionalni minimizaciji v posamezno smer.[56] Paleti ne-ničelnih in neodvisnih vektorjev

[54] V nadaljevanju *CGM*.
[55] Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko linearne *CGM* prikažemo kot algoritme minimiranja kvadratnih konveksnih funkcij.
[56] Podobno kot pri Newtonovem koraku, vendar s to razliko, da pri *CGM* ne iteriramo Hessovih matrik, smerni vektorji pa so vezani in med seboj ortogonalni.

$\{p_0, p_1, \ldots, p_l\}$ rečemo, da je vezana na simetrično in pozitivno definitno matriko A, če za vsak par $i \neq j$ velja, da je[57]

$$p_i^T A p_j = 0 . \tag{3.1.9}$$

Začnimo minimizacijo 3.1.8 v točki x_0 iz n dimenzionalnega prostora realnih števil in s setom vezanih smernih vektorjev $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$. Nocedal in Wright pokažeta, da je operator α, ki vzdolž smeri p_k

$$x_{k+1} = \alpha_k p_k \tag{3.1.10}$$

minimira 3.1.8, moč izraziti kot

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{p_k^T A p_k} . \tag{3.1.11}$$

Takšen sistem doseže želeno ustalitev v največ n korakih.[58]

Primer ustreznih vezanih vektorjev so lastni vektorji matrike A. Ker je pri zahtevnejših problemih mnogih dimenzij računanje kompletnega seta lastnih vektorjev dolgotrajno, saj zahteva veliko računalniških operacij, so se pojavile različice *CGM* algoritmov, ki vezane smerne vektorje p_k generirajo z iteriranjem:

$$p_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k p_{k-1} . \tag{3.1.12}$$

Medsebojno neodvisnost vektorjev in njihovo vezanost na matriko A dosežemo, če v 3.1.21 vključimo pogoj 3.1.9; 3.1.12 pomnožimo s $p_{k-1}^T A$, upoštevamo $p_i^T A p_j = 0$ in dobimo dinamiko parametra β_k:[59]

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x_k)^T p_{k-1} A}{p_{k-1}^T A p_{k-1}} \tag{3.1.13}$$

Enačbe od 3.1.10 do 3.1.13 tvorijo jedro osnovne različice algoritma:

(i) Določi izhodiščno točko x_0 in določi kriterije ustavljanja.
(ii) Definiraj $r_0 = Ax_0 - b$, $p_0 = -r_0$ in $k = 0$.
(iii) Začni z algoritmom:

[57] Takšna smerna vektorja sta med seboj po definiciji neodvisna.
[58] Dokaz je v Nocedal in Wright (1999, 103).
[59] Intuitivno se za začetno vrednost β_k predlaga $\nabla f(x_0)$.

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$
$$r_{k+1} = A x_{k+1} - b$$
$$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$$
$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$$

(iv) Števec ponavljanj k povečaj za 1.

(v) Izvajaj algoritem, dokler ne dosežeš želene konvergence, ki je lahko podobna kot jih navajamo pri Newtonovih in kvazi-Newtonovih algoritmih.[60]

Ker so ostanki r_k med seboj neodvisni in ker sta smer iskanja p_k in r_k del Krylovega podprostora k-te stopnje za r_0

$$K(r_0;k) = span\{r_0, Ar_0, \ldots, A^k r_0\}, \tag{3.1.14}$$

lahko gornji algoritem prevedemo v bolj ekonomično obliko, tako da poenostavimo iteraciji za α_k in β_k v:[61]

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} \tag{3.1.15a}$$

$$\beta_{k+1}^T = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \tag{3.1.15b}$$

Kot smo videli, je algoritem linearne *CGM* uporaben za minimizacijo kvadratnih konveksnih funkcij tipa 3.1.8. Sledi logično vprašanje, če je moč gornji pristop vezanih smeri posplošiti do tolikšne mere, da bo uporaben tudi za minimizacijo katerih koli konveksnih funkcij oziroma nelinearnih funkcij v splošnem.

Algoritem Fletcherja in Reevesa

Avtorja pokažeta, da je to mogoče z dvema posplošitvama gornjega linearnega *CGM* algoritma: (i) dolžino koraka α_k spremenimo v iskanje minimuma v smeri p_k[62] in (ii) ostanek r_k postane $\nabla f(x_k)$ nelinearne kriterijske funkcije f.

[60] Pravila ustavljanja povzemamo po Juddu (1998).

[61] Izpeljavo in dokaze najde bralec v Nocedal in Wright (1999), podobno verzijo kode algoritma pa v Kelley (1999). V omenjenih delih avtorji podajo tudi natančno razlago lastnosti konvergence linearnega *CGM* algoritma in navajajo bogat spekter literature s tem v zvezi.

Njun algoritem je sledeč:

(i) Določi izhodiščno točko x_0 in določi kriterije ustavljanja.
(ii) Definiraj $p_0 = -\nabla f(x_0)$, in postavi števec k na 0.
(iii) Začni z algoritmom:

(a) $\alpha_k = arg\, min_\alpha\, f(x_k + \alpha p_k)$.
(b) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.
(c) $p_{k+1} = -(\nabla f(x_{k+1}))^T + \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2} p_k$.

(iv) Števec ponavljanj k povečaj za 1.
(v) Izvajaj algoritem, dokler ne dosežeš želene konvergence.

Ker algoritem implicitno ohranja oceno kriterijske funkcije in je ne osvežuje kot Newtonovi in kvazi-Newtonovi algoritmi, se po več zaporednih ponovitvah lahko zgodi, da se smeri v toliko poslabšajo, da niso več neodvisne.[63] V izogib takšnemu nekontroliranemu iskanju optimalne točke, avtorji priporočajo ponoven zagon ponavljanj na vsake toliko časa, s smerjo gibanja, ki je definirana podobno kot v začetni točki x_0. Po kn ponovitvah bi to pomenilo začetek novega iskanja v smeri $p_{kn} = -\nabla f(x_{kn})$.

V literaturi so se pojavile številne različice gornjega splošnega *CGM* algoritma, ki se med seboj večinoma razlikujejo glede na definicijo parametra β, ki usmerja iskanje proti zadnji uporabljeni smeri. Denimo metoda Polaka in Ribière, ki za β uporabi nekoliko splošnejšo obliko:

$$\beta_{k+1} = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T (\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))}{\|\nabla f(x_k)\|^2}, \tag{3.1.16}$$

V primeru strogo konveksnih in kvadratnih kriterijskih funkcij, kjer so smeri iskanja med seboj neodvisne, sta obe metodi enaki.

3.1.4 Metoda Nelderja in Meade-a

Sodi med metode neposrednega iskanja (*direct search methods*), ki pri reševanju ne zahtevajo parcialnih odvodov funkcij.[64,65] Temeljijo na sistematičnem premikanju po

[62] Podobno kot pri Newtonovih in kvaz-Newtonovih metodah je dolžina koraka $\alpha_k = arg\, min_\alpha\, f(x_k + \alpha p_k)$
[63] Rečemo, da smeri degenerirajo.
[64] V nadaljevanju DSM.

definicijskem območju in neposrednem ocenjevanju in primerjanju vrednosti ciljnih funkcij v različnih točkah. Odvisno od učinkovitosti algoritmov iskanja in premikanja po prostoru, lahko s pomočjo *DSM* algoritmov bistveno skrajšamo čas procesiranja optimizacije, ki je pri reševanju zahtevnejših problemov lahko zelo pomemben.

Algoritem Nelderja in Meade-a je je bolj poznan kot ameba.[66] Temelji na simpleksu,[67] s pomočjo katerega poskušamo s krčenjem in premikanjem po osnovni ploskvi ujeti minimum funkcije.

Splošen algoritem amebe je sledeč (Mathews 1992, 1995):[68]

(i) Definiraj simpleks: simpleks S v $\Re^n$ je konveksna ovojnica, ki jo definira $n+1$ točk $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$, kjer je x_j j-ti rob simpleksa S.

(ii) Izračunaj vrednosti funkcije v robovih množice S in jih razvrsti od najnižje do najvišje, tako da bo veljalo $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_{n+1})$.

(iii) Definiraj začetno vrednost števca iteracij $fcount = n+1$

(iv) Zunanja zanka algoritma: $While\ f(x_{n+1}) - f(x_1) > \varepsilon$

(a) Izračunaj srednjo točko (*centroid*) konveksne lupine simpleksa: $\bar{x} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ in preko njega prezrcali x_{n+1}: $x(\mu_r) = (1+\mu_r)\bar{x} - \mu_r x_{n+1}$. Izračunaj vrednost funkcije $f_r = f(x(\mu_r))$ v tej novi robni točki S. Prištej narejeni korak: $fcount = fcount + 1$.

(b) Če je $f(x_1) \leq f_r < f(x_n)$, zamenjaj x_{n+1} z $x(\mu_r)$ in razvrsti vse vrednosti od najnižje do najvišje. Če število iteracij v tem koraku doseže eksogeno določen maksimum ponovitev, prekini z algoritmom.

(c) Če je $f_r < f(x_1)$, izračunaj $f_e = f(x(\mu_e))$. Če je $f_e < f_r$, zamenjaj x_{n+1} z $x(\mu_e)$, drugače zamenjaj x_{n+1} z $x(\mu_r)$. Prištej iteracijo in razvrsti vrednosti od najnižje do najvišje. Če število iteracij v tem koraku doseže eksogeno določen maksimum ponovitev, prekini z algoritmom.

---

[65] Pri uporabi numeričnih metod se odvodov poskušamo kar se da izogibati, saj so načeloma zelo zahtevni za procesiranje.

[66] Prva različica amebe je delo avtorjev Spendleya, Hexta in Himswortha (1962) ter upošteva pravilno obliko simpleksa, sestavljenega iz enakostraničnega trikotnika, ki ga z ustreznimi koraki premikamo po dvodimenzionalnem prostoru.

[67] Na tem mestu je treba opozoriti na morebitno zamenjavo z metodo linearnega programiranja (simpleks), ki jo je leta 1947 iznašel ameriški matematik Gregory B. Dantzig (1963). Linearno programiranje obravnavamo v poglavju 3.1.5.

[68] Pri reševanju optimizacijskih problemov s pomočjo amebe predlagamo uporabo Mathewsovega priročnika (1995), in sicer poglavja 8.2, kjer avtor razvije C kodo za algoritem amebe.

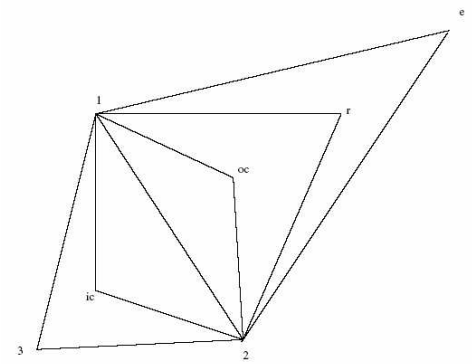
(d) Če je $f(x_n) \leq f_r < f(x_{n+1})$, izračunaj $f_c = f(x(\mu_{oc}))$. Prištej narejeni korak. Če je $f_c \leq f_r$, zamenjaj x_{n+1} z $x(\mu_{oc})$ in preuredi vrednosti, v nasprotnem primeru pojdi v (f). Če število ponovitev preseže maksimum, prekini z algoritmom.

(e) Če je $f_r \geq f(x_{n+1})$, izračunaj $f_c = f(x(\mu_{ic}))$. Prištej narejeni korak. Če je $f_c < f(x_{n+1})$, zamenjaj x_{n+1} z $x(\mu_{ic})$ in ponovno preuredi vrednosti. v nasprotnem primeru pojdi v (f). Če je doseženo maksimalno število iteracij, prekini.

(f) Če je $fcount \geq k\,max - n$, izstopi iz zanke in prekini z algoritmom. Za $2 \leq i \leq n+1$ določi nova oglišča: $x_i = x_1 - (x_i - x_1)/2$. Izračunaj $f(x_i)$.

Ameba je zelo uporabna metoda optimizacije, saj ne potrebuje parcialnih odvodov funkcij. Quandt (1983) opozarja na slabost, ki je po njegovem v tem, da ameba temelji na eksogenih koeficientih, širjenja, krčenja in zrcaljenja, ki jih je načeloma težko učinkovito določiti. Po drugi strani navaja Kelley (1999) McKinnonov primer, ko metoda odpove celo pri gladkih funkcijah. Vendar Kelley hkrati priznava, da je metoda v splošnem dobra, saj se da v primeru obtičanja algoritma okoli neoptimalne točke sestaviti t.i. shemo njegovega ponovnega zagona, s katero se da doseči premik iz stanja stagnacije (prav tam, 141).

SLIKA 1: ŠIRJENJE, KRČENJE IN PREMIKANJE SIMPLEKSA PRI AMEBI



Opomba: za pomen točk *ic*, *oc*, *r*, in *e* glej opis algoritma spodaj.
Simboli: številke pomenijo naraščajočo razvrstitev vrednosti namišljene kriterijske funkcijske v robovih simpleksa.
Vir: Kelley (1999, 137).

3.1.5 Simulirano ohlajanje

Prištevamo jo med metode globalne optimizacije in ravno tako kot ameba sodi v skupino metod neposrednega iskanja. Simulirano ohlajanje je zelo robustno in je sposobno najti optimum tudi v primerih zelo zapletenih nelinearnih problemov. Najnovejša različica metode, t.i. prilagodljivo simulirano ohlajanje (*adaptive simulated annealing*), je čas, ki je potreben za uspešno ustalitev algoritma simuliranega ohlajanja še dodatno skrajšala in s tem metodo popularizirala, tako da je danes ena najbolj uporabljanih numeričnih metod globalne optimizacije.[69]

Simulirano ohlajanje sta prva neodvisno razvila Kirkpatrick et al. (1983) in Černy (1985). Lahko ga opredelimo kot posplošitev Monte Carlo metode za preučevanje enačb stanja in zamrznjenih stanj sistemov z n telesi (Metropolis et al. 1953). Vzporednice ima s termo – dinamičnimi procesi kristalizacije iz segrete raztopine, kjer s hitrim segrevanjem povzročimo prosto gibanje atomov. Tako segreto raztopino nato počasi in kontrolirano ohladimo. S postopnim ohlajanjem začnejo atomi izgubljati svojo energijo ter počasi kristalizirajo in s tem dosežejo optimalno stanje. Ob prehitrem ohlajanju se lahko zgodi, da dobimo poli-kristalin nepravih oblik.

Za razliko od nekaterih konvencionalnih metod, simulirano ohlajanje ne išče samo po hribu navzgor oziroma navzdol, temveč preišče vso funkcijsko območje s premikanjem v vse smeri. Algoritem je sposoben uiti lokalnim ekstremom in je neodvisen od začetnih vrednosti.[70] Kot takšna je metoda uporabna, ker statistično jamči dosego optimalne rešitve. Zraven vsega je od ostalih algoritmov nelinearne optimizacije relativno manj zahtevna za uporabo (Ingber 1993).

Metodo so na področje ekonomije intenzivno prenašali: Goffe et al. (1992, 1994) na področju ekonometrije, Bowlus et al. (1995), Bunzel et al. (2001) so jih aplicirali na področju modelov iskanja in zaposlenosti[71], Ingber (1996) jih je vpeljal na področje financ, Wu in Wang (1998) pa sta jih uporabila pri iskanju splošnega ravnovesja.

Obris algoritma sestavlja ocena kriterijske funkcije v začetni točki x in njena primerjava z vrednostjo v novi, naključno izbrani točki x' iz okolice x. Simulirano ohlajanje načeloma izbere nižjo vrednost od obeh, kar jo potiska proti minimumu. Hkrati algoritem dovoljuje preskok v višje vrednosti, s čimer se izogne pasti morebitnega lokalnega minimuma. To stori s pomočjo funkcije Metropolis, ki temelji na verjetnosti skoka v novo vrednost relativno glede na trenutno stanje:

---

[69] V nadaljevanju *ASA*.
[70] To je ena pogostejših slabosti večine optimizacijskih algoritmov.
[71] Angl. *job-search models*.

$$P(x \to x', t) = exp\left(-\frac{f(x') - f(x)}{t}\right). \tag{3.1.17}$$

V primeru, ko je verjetnost iz 3.1.17 višja od naključno izbrane *i.i.d.* porazdeljene verjetnosti P', sprejmemo x', sicer pa ne. Poseben pomen v gornji enačbi ima temperatura t, ki viša oziroma niža verjetnost prehoda k novemu stanju x'. Izkaže se, da je dobro definirana začetna temperatura ključnega pomena za učinkovito približevanje algoritma k optimalni točki, saj previsoko nastavljena podaljšuje čas konvergence, prenizka pa lahko povzroči, da se algoritem ujame v lokalni minimum, saj ovira skok k višjim vrednostim.

Zelo pomembna za učinkovito delovanje algoritma je tudi strategija ohlajanja. Tako imamo opraviti z izbiro med verjetnostjo ujetja v lokalni minimum in hitrostjo konvergence. Logika ohlajanja je v tem, da v primerih, ko dana temperatura nekajkrat zaporedoma ne uspe najti nižje vrednosti funkcije, upočasni njeno preskakovanje k višjim vrednostim ter s tem pospešuje umirjanje algoritma. Temperatura je v sistemu ohlajanja nenaraščajoča funkcija trenutnega koraka n.

Raziskovalci uporabljajo različne funkcijske oblike ohlajanja, kot so logaritmične: $t' = t - t_0 \frac{ln\, n_0}{n(ln\, n)^2}$, eksponentne: $t' = \alpha t;\ \alpha \in (0,1)$ in podobne. Bistvo ohlajanja je, da omogoča sprejemanje nižjih vrednostih kriterijske funkcije v fazah, ko so temperature visoke.[72]

Kot sta ugotovila Geman in Geman (1984), je lahko algoritem simuliranega ohlajanja pri počasnem ohlajanju sicer sposoben najti globalen minimum, vendar je v tem primeru hitrost ustaljevanja zelo nizka. Tako so se pojavili učinkovitejši algoritmi, ki so čas konvergence skrajšali. Enega takšnih sta predlagala Szu in Hartley (1987), ki sta namesto klasične Boltzmanove verjetnostne porazdelitve uporabila Cauchy-jevo. V literaturi se najpogosteje uporablja Ingberjev (1989, 1993, 1996; Ingber, Rosen 1992) algoritem *ASA*.[73]

ASA temelji na generiranju vrednosti $\alpha_k^i \in [A_i, B_i]$, kjer i predstavlja dimenzijo v času hlajenja k:

$$\alpha_{k+1}^i = \alpha_k^i + y^i (A_i - B_i). \tag{3.1.18}$$

Pri tem je $y^i \in [-1,1]$ *i.i.d.* porazdeljena naključna spremenljivka.

[72] Za podrobnejšo razpravo o tem glej v Laarhoven in Aarts (1987).
[73] Ingber je algoritem *ASA* napisal v programskem jeziku C. Izvirnik kode je prosto dostopen na naslednjem naslovu na spletu: www.ingber.com.
Pri raziskovanju se precej uporablja tudi Sakatinova rutina za programski paket Matlab, ki je tudi prosto dostopna, in sicer na naslednjem naslovu: http://www.econ.lsa.umich.edu/~sakata/software.

V primerih D dimenzionalnih problemov je verjetnostna porazdelitvena funkcija naključnih števil y^i in temperature T_i, naslednja:[74]

$$g^i = \left(y^i, T_i\right) = \prod_i^D \left(2\left(\left|y^i\right| + T_i\right) ln\left(1 + T_i^{-1}\right)\right)^{-1} . \tag{3.1.19}$$

Temperatura i-tega parametra (T_i) s časom ohlajanja k eksponentno pada, in sicer po naslednji dinamiki in upoštevaje začetno temperaturo posameznega parametra T_{0i}:

$$T_i(k) = T_{0i}\, exp\left(-c_i k^{\frac{1}{D}}\right), \tag{3.1.20}$$

kjer je c_i zunanji parameter, ki ga je moč nastaviti, tako da nam *ASA* statistično jamči ustalitev v globalen ekstrem (Ingber 1996), D pa je število dimenzij. Pomembna značilnost algoritma je ta, da le-ta dopušča spreminjanje programa strjevanja 3.1.20, kar je lahko uporabno pri iskanju ekstremov več-dimenzionalnih problemov.
ASA pri prehajanju iz lokalnih minimumov upošteva *t.i.* Boltzman-ov test, kjer takrat prehajamo v višje vrednosti, ko je:

$$exp\left(-\frac{f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)}{t_{\text{cost}}}\right) > U \in [0,1). \tag{3.1.21}$$

Pri tem je U enakomerno porazdeljeno naključno število, t_{cost} pa temperatura Boltzmanovega testa[75], ki jo lahko prilagajamo, podobno kot v 3.1.20.[76]

Ingber v navodilih za uporabo njegove *ASA* C kode opozarja, da le-ta ni nujno vedno učinkovita ter poudarja pomembnost izbire med učinkovitostjo in potrebami.[77] Izkaže pa se, da jo lahko učinkovito uporabimo za iskanje globalnih ekstremov, ko imamo opravka z več-dimenzionalnimi problemi z več omejitvami, ki imajo mnogo lokalnih ekstremov.

3.1.6 Optimizacija z omejitvami

V ekonomiji imamo pogosto opraviti z večdimenzionalnimi linearnimi in nelinearnimi optimizacijskimi problemi, ki vključujejo bodisi linearne bodisi nelinearne tipe omejitev. Do sedaj smo obravnavali lokalne in globalne algoritme optimizacije brez omejitev.

---

[74] Poljubno spreminjanje te verjetnostne porazdelitve je ena prednosti *ASA* kode.
[75] Angl. *cost temperature*.
[76] Za podrobnejši opis načina spreminjanja sistema ohlajanja temperature generiranja novih parametrov iz 3.1.20 in temperature sprejemanja oziroma zavračanja parametrov iz 3.1.21 v Ingberjevem *ASA* algoritmu glej priročnik k njegovi C kodi.
[77] Pri paraboličnih funkcijah je denimo preprosta Newtonova metoda iskanja najverjetneje hitrejša.

Pri proučevanju ekonomskih fenomenov imamo opraviti z različnimi vrstami omejitev; optimizacija potrošnikovega vedenja upošteva njegovo omejitev dohodkov, problemi optimalne obdavčitve vključujejo omejitve proračunskih prihodkov, problemi principala in agenta vključujejo omejitve, ki izhajajo iz morebitnih nagrad (*incentive constraints*), problemi optimalnih portfeljev vključujejo minimizacijo tveganja oziroma maksimizacijo donosa ipd.

Tudi pri optimizacijskih algoritmih, ki vključujejo omejitve imamo grobo delitev na lokalne algoritme in na globalne algoritme.[78] Med prve sodijo: linearno programiranje (*linear programming*), kvadratno programiranje (*quadratic programming*), zaporedno kvadratno programiranje (*sequential quadratic programming*), metode kaznovanja oziroma penaliziranja (*penalty methods*) in druge. Po drugi strani se kot učinkovite pristope k iskanju globalnih ekstremov z omejitvami uporablja simulirano ohlajanje z omejitvami, genetske algoritme (*genetic algorithms*), nevronske mreže (*neural networks*) in druge.

V nadaljevanju predstavljamo osnovne značilnosti obeh skupin algoritmov, pri čemer bomo od lokalnih metod optimizacije z omejitvami izpostavili linearno programiranje, kvadratno programiranje, zaporedno kvadratno programiranje in metodo penaliziranja, medtem ko bomo od globalnih metod predstavili kombinacijo pristopa penaliziranja s simuliranim ohlajanjem.[79]

Linearno programiranje

Linearni programi so najpreprostejši optimizacijski problemi, sestavljeni iz linearnih kriterijskih funkcij in linearnih omejitev. Klasičen zapis linearnega programa je

$$\min_x a^T x$$

pri pogojih (3.1.22)

$$\begin{aligned} Bx &= c \\ x &\geq 0 \end{aligned},$$

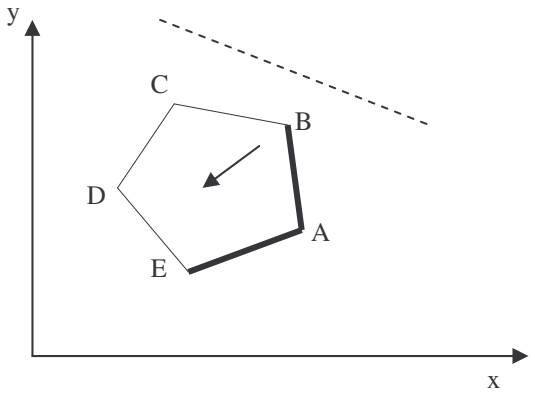
kjer sta a in x vektorja v $\Re^n$, c je vektor v $\Re^m$, B pa je matrika velikosti $m \times n$. Osnovno logiko reševanja tovrstnih problemov v primeru optimizacije v dveh dimenzijah prikazuje slika 2.

[78] Algoritmi optimizacije z omejitvami lahko podobno kot algoritmi optimizacije brez omejitev, ki smo jih obravnavali v prejšnjem poglavju, temeljijo na iskanju po premici (*line search methods*) oziroma na neposrednem iskanju (*direct search*).

[79] Sodobni računalniški programi za reševanje optimizacijskih problemov z omejitvami (kot je npr. Ingberjeva C koda simuliranega ohlajanja) navadno upoštevajo ustrezne kombinacije različnih pristopov v kombinaciji z metodami aproksimacije, ki jih obravnavamo v poglavju 3.2.

Za namišljen primer iz slike 2 velja, da se optimalna rešitev nahaja v konveksni množici, ki jo definirajo točke *A*, *B*, *C*, *D* in *E*. Puščica kaže smer zniževanja kriterijske funkcije, ki je predstavljena s črtkano premico. Optimalna rešitev sistema je v točki *E*.

SLIKA 2: LINEARNO PROGRAMIRANJE



Vir: Nocedal, Wright (1999, 362).

Osnovna metoda linearnega programiranja je simpleks, ki ga je leta 1947 iznašel Gregory Dantzig. Njegovo bistvo je, da se sprehajamo po lupini dopustne množice rešitev, kot je to prikazano s poudarjenima črtama, in na njej iščemo oglišča z optimalnimi točkami. V vsaki iteraciji pošljemo algoritem v smer najmočnejšega znižanja funkcijske vrednosti. Če smo v sliki 2 začeli v oglišču *B* naše dopustne množice, nas algoritem pošlje v smeri oglišča *A*, saj je v njem znižanje močnejše kot v smeri *C*, ki je alternativna možnost. V točki *A* algoritem ugotovi nove omejitve, ki vežejo in nas po lupini dopustne množice rešitev pošlje v smer najmočnejšega znižanja funkcijske vrednosti, ki je sedaj proti oglišču *E*. Tukaj algoritem ugotovi, da sta oglišči *D* in *A*, ki sta sedaj mogoči, neustrezni, saj zvišujeta vrednost naše kriterijske funkcije. Algoritem se v točki *E* ustavi.[80]

Simpleks deluje tako, da ne zaide v oglišča, kjer je že bil. Ker je število oglišč in kombinacij dopustnih smeri omejeno, imamo lahko torej samo končno število korakov (Nocedal, Wright 1999, 375-376). Judd (1998, 121) ugotavlja, da je v veliki večini primerov konvergenca simpleksa linearna v odvisnosti od spremenljivk in omejitev.[81]

[80] Podrobna matematična predstavitev metode simpleksa presega namen magistrske naloge.
[81] V najslabšem primeru se zgodi, da je trajanje konvergence eksponentno.

Kvadratno programiranje

Poglejmo najprej kvadraten problem z omejitvami, ki strogo vežejo.

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T d$$

pri pogojih (3.1.23)

$$a_i^T x = b_i \,, \quad i \in S \,,$$

kjer je G simetrična $n \times n$ matrika, S končna množica indeksov, d, x in $\{a_i\}$ pa so vektorji z n elementi.

Z uporabo nujnih pogojev prvega reda o obstoju stacionarne točke x^*, ki je rešitev problema 3.1.23, dobimo takšen vektor λ^*, ki reši naslednji linearni sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} d \\ b \end{bmatrix}, \tag{3.1.24}$$

Matrika koeficientov iz 3.1.24 je bolj poznana kot Lagrange-jeva matrika. Standardna metoda za izračun vektorjev λ^* in x^* zahteva izračun obratne Lagrange-jeve matrike, kar je numerično zelo potratno, saj zahteva precej operacij.[82] Če iskan vektor x^* definiramo kot korak $x^* = x + p$, dobimo enakovreden sistem linearnih enačb: [83,84]

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_k \\ c \end{bmatrix}, \tag{3.1.25}$$

kjer je $c = Ax - b$ in $p = x^* - x$.

Obstaja več načinov reševanja sistema 3.1.25, ki jih na tem mestu ne bomo posebej obravnavali. Med drugimi se omenjajo (Nocedal, Wright 1999): (i) neposredno reševanje (*direct solution*) s pomočjo simetrične in nedefinitne faktorizacije (*symetric indefinite factorization*) *KKT* matrike, (ii) metode razvrščanja prostora (*range – space*), (iii) metoda ničelnega prostora (*null – space*), (iv) metoda vezanih naklonov (*conjugacy method*) in druge.

[82] Reševanje Lagrange-jeve metode je predstavljeno v Fletcher (1981).
[83] p je želen korak v smeri x^*.
[84] Sistem je bolj poznan kot Karush – Kuhn – Tucker-jev sistem.

Dodajmo gornjemu kvadratnemu problemu skupino omejitev z neenakostjo. Dobimo:

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T d$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} a_i^T x &= b_i\,, \quad i \in S \\ a_i^T x &\geq b_i\,, \quad i \in M \end{aligned} \quad . \tag{3.1.26}$$

V splošnem literatura za reševanje kvadratnih problemov tipa 3.1.26 priporoča uporabo: (i) metode aktivnih nizov (*active – set methods*), (ii) metode projekcij naklonov (*gradient – projection methods*), (iii) metode notranjih točk (*interior – points methods*), metode zaporednega kvadratnega programiranja (*sequential quadratic programming methods*), metodo penaliziranja (*penalty method*) in z njimi povezano metodo ocenjenih Lagrange-jevih multiplikatorjev (*augmented Lagrangian method*) ter druge. V nadaljevanju prikazujemo osnove delovanja metod zaporednega kvadratnega programiranja in metode penaliziranja.[85]

Zaporedno kvadratno programiranje [86]

Velja za eno učinkovitejših lokalnih metod optimizacije z omejitvami. Kot že ime pove, temelji *SQP* na zaporednem iteriranju novih kvadratnih pod-problemov. Predvsem se uporablja v primerih nelinearnih programov, ko imamo v optimizacijskih problemih prisotne tudi nelinearne omejitve.

Če 3.2.25 dopolnimo s shemo iteriranja Lagrangevih multiplikatorjev λ, dobimo naslednji sistem *KKT*, merjen v koraku k :

$$\begin{bmatrix} G_k & -A_k^T \\ A_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_k \\ p_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_k + A_k^T \lambda_k \\ -c_k \end{bmatrix}, \tag{3.1.27}$$

kjer sta p_k in p_λ Newtonova koraka k-te iteracije:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_k \\ p_\lambda \end{bmatrix}, \tag{3.1.28}$$

Alternativno Newtonovemu iteriranju 3.1.27 in 3.1.28 definiramo v stanju k nov kvadratni problem:

[85] Med raziskovalci so zelo priljubljene metode aktivnih nizov.
[86] Angl. *Sequential Quadratic Programming*. V nadaljevanju *SQP*.

$$\min_p q(p) = \frac{1}{2} p^T G p + \nabla f_k^T p$$

pri pogojih (3.1.29)

$$A_k p + c_k = 0 .$$

Pod veljavnostjo predpostavk optimizacije z omejitvami je rešitev kvadratnega pod-problema 3.1.29 moč zapisati kot[87]

$$\begin{bmatrix} G_k & -A_k^T \\ A_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla f_k \\ c_k \end{bmatrix} . \tag{3.1.30}$$

S pomočjo 3.1.29 in 3.1.30 lahko sedaj formaliziramo splošen potek osnovnega *SQP* algoritma.[88]

(i) Definiraj začetne vrednosti vektorjev x_0 in λ_0.

(ii) Izračunaj $f_k, \nabla f_k, W_k = W(x_k, \lambda_k), c_k$ in A_k.

(iii) Reši 3.1.30, da dobiš p_k in μ_k.

(iv) Korak *k* povečaj za 1 in prepiši $x_k + p_k$ na x_{k+1} ter μ_k na λ_{k+1}.

(v) Korake ponavljaj, dokler ne dosežeš zadovoljivih kriterijev konvergence.

Program 3.1.29 lahko spremenimo tudi tako, da zadnji člen $\nabla f_k p$ zamenjamo z $\nabla_x L(x_k, \lambda_k)^T p$. Tako dobimo problem minimizacije kvadratne ocene Lagrangeve funkcije ob linearnih omejitvah.[89]

Najpomembnejši del algoritma je tretji korak, kjer je treba izračunati smer in velikost premika vektorjev x_k in λ_k v nov korak. Glede na njegove vzporednice z Newtonovimi metodami, je algoritem *SQP* moč pospešiti s kvazi-Newtonovimi približki Hessovih matrik *W*.[90]

Metoda kaznovanja

Mnogo algoritmov numerične optimizacije uporablja princip kaznovanja. Intuicija kaznovanja je v tem, da je sleherno gibanje izven območja omejitev strogo prepovedano in

---

[87] Enako rešitev dobimo, če od Newtonovega problema 3.1.27 levi in desni strani enačbe odštejemo $A_k^T \lambda_k$.

[88] Sistem zaporednega kvadratnega programiranja 3.1.30 je soroden sistemu 3.1.27, kateri temelji na Newtonovih korakih, vendar je od njega bolj fleksibilen, saj omogoča vključitev omejitev z neenakostjo.

[89] Če slednje penaliziramo, dobimo sekvenčni kvadratni program z omejitvami, ki strogo vežejo. Dobimo kombinacijo pristopa sekvenčnega kvadratnega programiranja, metode ocenjevanja Lagrangevih multiplikatorjev (*augmented Lagrangean method*) in principa penaliziranja.

[90] Karakteristike različnih načinov prehajanja v nove iteracije so izven domene magistrske naloge in jih izpuščamo.

ga je treba kaznovati. Pristop je uporaben, ker probleme z omejitvami, ki ne vežejo, spreminja v optimizacijske probleme z omejitvami, ki strogo vežejo.

Če princip kaznovanja uporabimo na optimizacijskem problemu tipa 3.1.26, dobimo:

$$\min_x q(x) = q(x) + \frac{1}{2} P\left(\sum_i \left(a_i^T x - b_i\right)^2 + \sum_j \left(max\left[0, a_j^T x - b_j\right]\right)^2 \right), \tag{3.1.31}$$

kjer je $P > 0$ parameter, s katerim kaznujemo vrednosti *x*, ki so izven dovoljenega dosega, definiranega z omejitvami. S povečevanjem parametra *P* v neskončnost se približujemo natančni rešitvi problema 3.1.26.

S tem smo dobili optimizacijski problem brez omejitev, ki ga lahko rešimo s katerokoli metod optimizacije brez omejitev. Pri 3.1.31 se v primerih visokih vrednosti *P* v oddaljenosti od optimalne točke lahko zgodi, da so Hessove matrike slabo definirane. V izogib temu uporabimo metode, ki ne vsebujejo Hessovih matrik, kot na primer ameba oziroma katera koli kvazi – Newtonova metoda.

V primerih optimizacijskih problemov z linearnimi omejitvami in z več lokalnimi ekstremi lahko princip kaznovanja združimo s simuliranim ohlajanjem in dobimo algoritem globalne optimizacije za reševanje problemov z linearnimi omejitvami.[91]

3.2 Numerična aproksimacija

Metode aproksimacij (*ali ocenjevanja*) omogočajo sestavljanje približnih funkcij.[92] V numerični ekonomiji imamo namreč mnogokrat opraviti s kompleksnimi funkcijami, ki bi jih zaradi lažjega procesiranja radi ocenili, in sicer v poenostavljeni obliki. Tako je dovolj, če pravo vrednost izračunamo samo v nekaterih točkah, na ostalem definicijskem območju pa funkcijsko vrednost ugibamo. V mnogih primerih sploh nimamo funkcijske enačbe oziroma je le-ta neznana. Takrat poberemo vse razpoložljive informacije o tej funkciji in na njihovi osnovi sestavimo njeno oceno (Judd, 1998).

V nadaljevanju predstavljamo nekatere temeljne metode ocenjevanja, pri čemer osnovni teoretski okvir povzemamo po Judd-u (1992, 1996, 1998). Namen predstavitve je seznaniti bralca s širokimi možnostmi, ki jih tovrstne metode ponujajo. Najprej bomo predstavili osnove metod lokalnega ocenjevanja, ko funkcijo s pomočjo značilnosti prvih odvodov

[91] Precej zahtevnejši za reševanje so kvadratni optimizacijski problemi, kjer nekatere omejitve v optimalni točki niso nujno aktivne in problemi nelinearnih omejitev – t.i. nelinearno programiranje (*non-linear programming*), ki vsebujejo nelinearne kriterijske funkcije z nelinearnimi omejitvami. Nekaj zelo uporabnih v svoji disertaciji raziskuje Wang (2001).

[92] Metoda najmanjših kvadratov (*MNKVD*) je verjetno najbolj poznana od vseh linearnih metod aproksimacije. MNKVD sodi vmes med L^p aproksimacije in interpolacije.

ocenimo v neposredni okolici posamezne točke. Sledi prikaz interpolacije, ko za definiranje n neznanih parametrov funkcije uporabimo množico n vnaprej izbranih točk. Na koncu predstavljamo še splošen koncept projekcijskih metod, ki s svojo fleksibilno strukturo omogoča vzajemno uporabo različnih metod ocenjevanja in optimizacije za namene učinkovitega ocenjevanja neznanih funkcijskih enačb. Mi bomo pri ocenjevanju dolgoročne koristnosti Hallovega modela v koncept projekcijskih metod vključili Čebiševo kolokacijo, ki temelji na Čebiševi družini neodvisnih polinomov prvega reda in simulirano ohlajanje, s katerim bomo simulirali endogenizirane davke.

3.2.1 Lokalna aproksimacija

Gre za metode, ki analizirajo obnašanje funkcij v okolici posameznih točk. cilj je dobiti natančno oceno s kar se da malo truda. V primerih mnogih funkcijskih oblik se izkaže, da so lokalne lastnosti takšne ocene uporabne tudi na ostalem definicijskem območju in ne samo v okolici posameznih točk. Najpogostejši metodi lokalnega ocenjevanja sta Taylorjeva vrsta in Padéjev približek.

Taylorjeva vrsta

Metoda temelji na Taylorjevem izreku, ki s pomočjo informacij o odvodih funkcije v okolici posamezne točke ocenjuje obnašanje funkcije v okolici te točke. Večkrat se izkaže, da je tovrstna ocena lahko dovolj dobra tudi za pojasnjevanje obnašanja funkcij na njihovem celotnem definicijskem območju in ne samo v okolici posameznih točk.

Taylorjev izrek: naj bo $f: D \to \Re$ C^m funkcija, kjer je D odprt interval v $\Re$, m pa nenegativno celo število. Denimo, da za vsak z obstaja $m+1$ krat odvedljiva funkcija f. Takrat za vsak $\{x_0, x\} \in D$ obstaja $z \in (x_0, x)$, tako da velja (Sundaram, 1996)[93]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} \right) + \frac{f^{(m+1)}(z)(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!} . \tag{3.2.1}$$

Desna stran 3.2.1 predstavlja m – to stopnjo Taylorjeve ocene funkcije f. Ko gre $k \to \infty$, lahko 3.2.1 zapišemo v obliki geometrične vrste funkcije f v okolici točke x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \; ; \; a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (f(x_0)). \tag{3.2.2}$$

[93] Dokaz je moč najti v Rudin (1976) in v vsej podobni literaturi, ki obravnava lokalno obnašanje polinomov.

Judd (1998) pokaže, da je radij učinkovite ocene 3.2.1 okrog točke x_0 navzgor omejen z najbližjo točko singularnosti. Radij je sicer definiran kot najdaljša razdalja $|z|$, ki še omogoči ustalitev:

$$r = sup\left\{|z| : \left|\sum a_k z^k\right| < \infty\right\}. \tag{3.2.3}$$

Padéjev približek

Alternativno Taylorjevemu približku, ki za lokalno oceno funkcije f okrog x_0 uporablja polinom stopnje k, temelji Padéjev približek na racionalni funkciji

$$q(x-x_0) = \frac{p(x-x_0)}{r(x-x_0)} = \frac{p_0 + p_1(x-x_0) + \cdots + p_m(x-x_0)^m}{1 + r_1(x-x_0) + \cdots + r_n(x-x_0)^n}. \tag{3.2.4}$$

Za vsak infinitezimalen premik iz točke x_0 velja, da je

$$p^{(k)}(x_0) = (fr)^{(k)}(x_0)\ ; \quad k = 0,\ldots,m+n\ . \tag{3.2.5}$$

kjer za f pogosto uporabimo kar Taylorjevo vrsto funkcije, ocenjene v okolici točke x_0 in stopnje $m+n$, p in r pa sta polinoma iz 3.2.4.[94] Če Taylorjevo vrsto zapišemo v obliki iz 3.2.2 in funkcijo f ocenimo v okolici točke $x_0 = 0$, dobimo enakovreden sistem

$$\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m+n} x^{m+n}\right)\left(1 + r_1 x + \cdots + r_n x^n\right) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m\ . \tag{3.2.6}$$

Sistem 3.2.6 je po združitvi sorodnih koeficientov klasičen sistem linearnih enačb (Yang et al. 2005):[95]

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & & & & & = p_0 \\
a_1 & + a_0 r_1 & & & & = p_1 \\
a_2 & + a_1 r_1 & + a_0 r_2 & & & = p_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_m & + a_{m-1} r_1 & + a_{m-2} r_2 & \cdots & + a_{m-n} r_n & = p_m \\
a_{m+1} & + a_m r_1 & + a_{m-1} r_2 & \cdots & + a_{m-n+1} r_n & = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m+n} & + a_{m+n-1} r_1 & + a_{m+n-2} r_2 & \cdots & + a_m r_n & = 0
\end{array} \tag{3.2.7}$$

[94] Navadno izberemo $m = n$ oziroma $m = n+1$.
[95] Zapis v matrični obliki je v prilogah.

Padéjev približek funkcije *f* v okolici točke $x_0 = 0$ dobimo, tako da 3.2.7 razrešimo za *p* in *r*.

V splošnem je Padéjev približek dobro definiranih funkcij učinkovitejši od Taylorjeve vrste, saj napaka ocene, ko se premikamo stran od x_0, raste počasneje. Judd (1998) navaja, da lahko v primeru ocen višjega reda dobimo slabo definiran sistem linearnih enačb in predlaga ponovitev poskusa z znižanjem reda ocene ($m+n$) za ena.[96]

3.2.2 Ortogonalni polinomi

Funkcijske enačbe je moč ocenjevati tudi kot seštevke produktov neodvisnih polinomov ($\phi_j(x)$) s koeficienti (a_j):[97,98]

$$\hat{f}(x) \equiv \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x) \qquad (3.2.8).$$

Iz seštevka 3.2.8 izhaja, da potrebujemo dobro definirane skupine polinomov, ki bodo med seboj neodvisni. Logika je namreč podobna kot pri metodi najmanjših kvadratov, kjer želimo imeti kar se da neodvisne pojasnjevalne spremenljivke.

Za reševanje 3.2.8 je na voljo vrsta družin neodvisnih polinomov, temelječih na različnih funkcijah uteži. Definirajmo najprej prostor notranjega produkta (*inner product space*) dveh polinomov, ki ga poganja poljubna funkcija uteži $w(x)$:[99]

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx \qquad (3.2.9)$$

Polinoma $f(x)$ in $g(x)$ sta neodvisna, ko je prostor njunega notranjega produkta $\langle f, g \rangle$ enak nič. V tabeli 1 predstavljamo nekaj najbolj poznanih družin neodvisnih polinomov s pripadajočimi funkcijami uteži.[100]

---

[96] Judd za študij ocen višjega reda in lastnosti konvergenc Padéjevega približka predlaga knjigo Cuyt, Wuytack (1987).

[97] Podobno lahko zapišemo tudi navadno linearno regresijo:
$\min_{a_m} \sum_{i=1}^{n} \left(a_1\phi_1(x^i) + a_2\phi_2(x^i) + \cdots + a_m\phi_m(x^i) - y_i\right)^2$.

[98] S tem v zvezi velja omeniti konceptualno zelo pomemben Weierstrassov izrek, ki jamči dobro oceno 3.2.8 tudi na zveznih intervalih in ga prikazujemo v prilogah na koncu naloge.

[99] $w(x)$ je skoraj povsod pozitivna in ima na intervalu $[a,b]$ končen integral.

[100] Uteži pri Laguerrovih in Hermitovih družinah skrbita, da divergence polinomov, ko gre $|x| \to \infty$ nimajo posebnih učinkov na prostor notranjih produktov posamezne družine polinomov, saj uteži pri obeh družinah polinomov nad divergencami, ko gre $|x| \to \infty$ dominirata.

Pri pridobivanju vrednosti se v praksi uporabljajo posebne rekurzivne enačbe, saj bi bilo neposredno generiranje vrednosti iz gornjih definicij družin neodvisnih polinomov računalniško preveč zahtevno.[101] Omenjene družine ustrezajo rekurzivnim shemam iz tabele 3.

TABELA 2: OSNOVNE DRUŽINE NEODVISNIH POLINOMOV

Ime družine	$w(x)$	*Interval* $[a,b]$	*Definicija*
Legendre	1	$[-1,1]$	$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ *
Čebišev	$\left(1-\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)^2\right)^{-1/2}$	$[a,b]$	$T_n(x)=cos\left(n\,cos^{-1}x\right)$ $=T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$
Laguerre	exp^{-x}	$[0,\infty)$	$L_n(x)=\frac{exp^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\,exp^{-x}\right)$ *
Hermite	exp^{-x^2}	$(-\infty,\infty)$	$H_n(x)=(-1)^n\,exp^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(exp^{-x^2}\right)$ *

Simboli: *… Rodriguesova interpretacija.
Vir: Abramowitz, Stegun (1970); Judd (1998).

TABELA 3: PRIDOBIVANJE VREDNOSTI NEODVISNIH POLINOMOV

	Ime družine	$n=0$	$n=1$	*Rekurzivna shema*
Legendre		$P_0(x)=1$	$P_1(x)=x$	$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$
Čebišev		$T_0(x)=1$	$T_1(x)=x$	$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$
Laguerre		$L_0(x)=1$	$L_1(x)=1-x$	$L_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}(2n+1-x)L_n(x)-\frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$
Hermite		$H_0(x)=1$	$H_1(x)=2x$	$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

Opomba: V prilogah je izrek o obstoju rekurzivnih shem za družine neodvisnih polinomov.
Vir: Abramowitz, Stegun (1970); Judd (1998).

Čebiševi polinomi

Čebiševo družino polinomov prvega reda bomo v četrtem poglavju uporabili pri simulaciji vozlov in njihovi projekciji na dolgoročno ravnovesno funkcijo koristnosti Hallovega modela.

[101] Tako denimo izračun vsote 3.2.8 z uporabo prvih 10 Čebiševih polinomov ob upoštevanju rekurzivne sheme zahteva samo 16 operacij množenja in 8 operacij odštevanja. Osnovna enačba je v tem primeru mnogo zahtevnejša, saj zahteva po 8 trigonometričnih operacij *arccos* in *cos* ter 8 operacij množenja.

Ker je področje uporabnosti Čebiševih polinomov zelo široko, bomo v nadaljevanju prikazali zgolj tiste značilnosti, ki jih vežejo na metodo Čebiševega razvrščanja (*Chebyshev collocation*) kot spektralne metode ocenjevanja, ki sodi med metode interpolacije. Ostalih družin neodvisnih polinomov posebej ne bomo obravnavali.

Uporabnost Čebiševih polinomov lepo odraža misel, ki je med matematiki zelo pogosta, da so namreč Čebiševi polinomi v numerični analizi zelo čvrsti. Posebej veliko se uporablja njihova prva skupina oziroma Čebiševi polinomi prvega reda.[102]

Čebišev polinom prvega reda $T_n(x)$ je polinom n-te stopnje, definiran kot

$$T_n(x) = \cos n\theta \,, \tag{3.2.10}$$

kjer je $x = \cos\theta$. S pomočjo de Moivre-jevega izreka , ki pravi, da je $\cos n\theta$ polinom n-te stopnje in z uporabo osnovnih trigonometričnih razmerij, lahko 3.2.10 preoblikujemo v serijo polinomov

$$\begin{gathered} \cos 0\theta = 1\,,\ \cos 1\theta = \theta\,,\ \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1\,, \\ \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,,\ \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \ldots \end{gathered} \tag{3.2.11}$$

Upoštevaje 3.2.10 lahko sedaj definiramo prvih nekaj Čebiševih polinomov:

$$\begin{gathered} T_0(x) = 1\,,\ T_1(x) = x\,,\ T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x\,,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots \end{gathered} \tag{3.2.12}$$

Splošno enačbo za izračunavanje Čebiševih polinomov v odvisnosti od x^n sta izpeljala Clenshaw (1963) in Snyder (1968) in sicer kot

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_k^{(n)} x^{n-2k} \,, \tag{3.2.13}$$

kjer je

$$c_k^{(n)} = (-1)^k\, 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad 2k < n \,. \tag{3.2.14}$$

[102] Handscomb in Mason (2003) sicer ugotavljata obstoj štirih vrst Čebiševih polinomov: $T_n(x), U_n(x), V_n(x)$ in $W_n(x)$. Mi bomo sledili njuni terminologiji in bomo z izrazom Čebiševi polinomi mislili na družino polinomov prvega reda $T_n(x)$.

Handscomb in Mason (2003) za izračunavanje koeficientov Čebiševih polinomov iz 3.2.14 priporočata načrt ponavljanja 3.2.15.

$$c_{k+1}^{(n)} = -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)(n-k-1)} c_k^{(n)}, \quad 2k < n,\ n > 0,\ k \geq 0. \tag{3.2.15}$$

Alternativno načrtu 3.2.15, s pomočjo katerega lahko izračunamo vse Čebiševe polinome prvega reda, lahko s kombinacijo temeljne trigonometrične relacije

$$cos\, n\theta + cos(n-2)\theta = 2\, cos\, \theta\, cos(n-1)\theta, \tag{3.2.16}$$

in 3.2.10 dobimo osnovno rekurzivno shemo Čebiševih polinomov prvega reda, kot je prikazana v tabeli 3[103]

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{3.2.17}$$

Ob upoštevanju začetnih vrednosti $T_0(x) = 1$ in $T_1(x) = x$ je namreč 3.2.17 bistveno lažje procesirati od enačb 3.2.11 in 3.2.15, kjer je treba izračunati vsako serijo vrednosti posebej.

Čebiševi polinomi imajo na intervalu $[-1,1]$ n ničel in $n+1$ lokalnih ekstremov, ki se ciklično izmenjujejo. Izražene v radianih ustrezajo ničle Čebiševih polinomov naslednji shemi:

$$n\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{3.2.18}$$

Ko v 3.2.18 vstavimo $x = cos\,\theta$, je ničle Čebiševega polinoma $T_n(x)$ moč definirati kot[104]

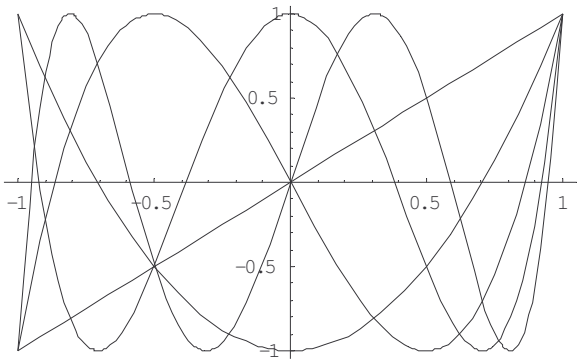
$$x_k = cos\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{3.2.19}$$

Pri 3.2.8 in s pomočjo Weierstrassovega izreka smo ugotovili, da lahko za oceno funkcije $\hat{f}(x)$ posamezne vrednosti x generiramo s pomočjo neodvisnih polinomov $\phi_j(x)$:

$$\hat{f}(x) \equiv \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j(x). \tag{3.2.20}$$

[103] S 3.2.17 lahko preverimo veljavnost 3.2.15 in obratno.
[104] Čebiševe ničle bomo potrebovali, ko bomo definirali vozle, v katere bomo fiksirali dolgoročne koristnosti Hallovega modela.

SLIKA 3: ČEBIŠEVI POLINOMI $T_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,5$



Opomba: Polinomi so narisani s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

V primeru uporabe Čebiševih polinomov prvega reda T_n, predstavlja 3.2.20 vsote Čebiševih polinomov v različnih točkah x, ki jo lahko formalno zapišemo kot

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x). \tag{3.2.21}$$

S preprostimi koraki je moč pokazati, da je vsota Čebiševih polinomov v posamezni točki x enaka

$$S_n = \frac{1}{2}(b_0 - b_2), \tag{3.2.22}$$

pri čemer je $b_k = 2xb_{k+1} - b_{k+2} + a_k$ in $k = n,\ldots,1,0$ (Handscomb, Mason 2003).

Čebiševi polinomi prvega reda $T_n(x)$ imajo zelo pomembno lastnost, ki jo imenujemo *mini – maks*, pomeni pa, da z njihovo pomočjo dosežemo najmanjši odklon iz množice največjih odklonov od polinoma x^n na definicijskem območju $x \in [-1,1]$:[105]

Mini – maks Čebiševih polinomov prvega reda

Za $n > 0$ naj velja:

$$s_n = inf\left[\max_{-1 \le x \le 1} \left| x^n + p(x) \right|\right] \tag{3.2.23}$$

pri pogojih

[105] Dokaz najde zainteresiran bralec v Powell (1981, 78). Več o uporabnosti *mini – maks* lastnosti Čebiševih polinomov je moč najti v Handscomb, Mason (2003).

$$deg(p) \leq n-1.$$

Takrat je $s_n = 2^{1-n}$ in ga dosežemo, ko je $x^n + p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} T_n(x)$.

3.2.3 Interpolacija

Pod interpolacije sodijo vse metode, ki s pomočjo končne množice pogojev izpeljejo ustrezno funkcijo, s katero zadovoljijo tem pogojem.

Če zgornjo omejitev napake ocene $f(x)$ s pomočjo interpolacije $p_n(x)$ definiramo kot

$$|f(x) - p_n(x)| = \Psi(x; x_1, \ldots x_n) \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}, \tag{3.2.24}$$

pri čemer je $\zeta \in [a,b]$, $x \in [a,b]$ in $\Psi(x; x_1, \ldots x_n) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$,

in le-to združimo z *mini – maks* lastnostjo Čebiševih polinomov prvega reda 3.2.23, dobimo optimizacijski problem 3.2.25, ki pomeni minimizacijo skupne napake ocene s pomočjo interpolacije.

$$\min_{x_1, \ldots, x_n} \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k), \tag{3.2.25}$$

Rešitev 3.2.25 mora v skladu s 3.2.23 biti $\Psi(x) = T_n 2^{1-n}$, kjer so x_k ničle Čebiševih polinomov $T_n(x)$.

S tem v zvezi je Rivlin (1990, 14) dokazal, da je asimptotična napaka interpolacije s pomočjo ničel Čebiševih polinomov, na kar nas navaja ugotovitev iz 3.2.25, asimptotično zelo blizu Jacksonovemu izreku o najmanjši napaki *mini – maks* ocene.

Jacksonov izrek:

Naj bo $f \in C^k$ na intervalu $[a,b]$ in naj bo $\rho_n(f) \equiv \inf_{deg(q) \leq n} \|f - q\|_\infty$. Takrat za vse $k \leq n$ velja

(Powell 1981, 197)

$$\rho_n(f) \leq \frac{(n-k)!}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \left\| f^{(k)} \right\|_\infty . \tag{3.2.26}$$

Iz 3.2.26 vidimo, da se natančnost ocene z višanjem stopnje ocenjevanja *n* izboljšuje in da je hitrost k ustaljevanju pri gladkih in lepo definiranih funkcijah hitrejša.

Rivlinov izrek:

Naj bo $f:[-1,1] \to \Re$ k – krat odvedljiva za nekatere $k \geq 1$, I_n pa naj bo interpolacija *n* – te stopnje funkcije *f* v ničlah $T_n(x)$. Takrat velja, da je [106]

$$\| f - I_n \|_\infty \leq \left(\frac{2}{\pi} log(n+1) + 1\right) \frac{(n-k)!}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^k \left\| f^{(k)} \right\|_\infty . \tag{3.2.27}$$

Ugotovimo torej, da nam *mini – maks* lastnost Čebiševih polinomov prvega reda omogoča uporabo njihovih ničel kot tistih vozlov interpolacije, ki v primeru ocenjevanja gladkih in dobro definiranih funkcij minimirajo polje nihanja napake ocene ter pomenijo asimptotično dobro definirano oceno.

Metoda Čebiševe kolokacije

Ravno zaradi *mini – maks* lastnosti je Čebiševa kolokacija, ki temelji na uporabi Čebiševih ničel, zelo uporabna metoda ocenjevanja neznanih funkcijskih enačb. Čebiševa kolokacija bo zraven simuliranja endogeniziranih davkov s pomočjo numerične optimizacije osrednji del projekcijskega algoritma pri oceni dolgoročne funkcije koristnosti Hallovega modela.

Kolokacija je strategija, ki v sistematično razporejene točke– vozle fiksira dejanske vrednosti funkcijskih enačb, ki jih želimo ocenjevati na nekem intervalu. V teh točkah je vrednost funkcije ostankov enaka nič. To dosežemo, tako da poiščemo vektor parametrov *c*, ki vrednosti v vozlih preslika v dejanske funkcijske vrednosti. Iščemo torej funkcijo $f(x)$, ki reši naslednji problem:

$$g(x_i, f(x)) = 0 , \tag{3.2.28}$$

pri čemer je $x \in [a,b]$. Problem 3.2.28 rešimo, tako da v omejenem definicijskem območju najdemo funkcijo $\hat{f}(x)$, ki približno reši $g(x_i, \hat{f}(x)) = 0$. Miranda in Fackler (2002) navajata,

[106] Dokaz je v Rivlin (1990, 14).

da je koristno, če lahko približek funkcijske enačbe $f(x)$ definiramo kot vsoto osnovne palete neodvisnih funkcij, podobno kot 3.2.8:

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) c_j = \phi(x) c \tag{3.2.29}$$

Problem 3.2.28 se s tem spremeni v

$$g(x, \phi(x)c) \approx 0 \text{ za } x \in [a,b]. \tag{3.2.30}$$

3.2.30 je moč rešiti s pristopom razvrščanja. V tem primeru je vrednost 3.2.30 enaka nič natanko v n vnaprej določenih točkah x. S tem dobimo iz neskončno dimenzionalnega sistema funkcijskih enačb problem n enačb, ki so enake nič.

Zaradi *mini – maks* lastnosti Čebiševih polinomov se v primerih dobro definiranih in gladkih funkcijskih enačb priporoča uporaba Čebiševega razvrščanja, kar pomeni, da najprej določimo približek funkcije $f(x)$, in sicer s pomočjo vsot Čebiševih polinomov

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T_i(x) \text{ za } x \in [-1,1], \tag{3.2.31}$$

ki ga nato fiksiramo v n ničel $T_n(x)$. S tem dobimo sistem n enačb z n parametri c, ki ga razrešimo s katerokoli izmed numeričnih metod reševanja linearnih sistemov enačb tipa $Ax = 0$. S tem nelinearen problem z neskončno dimenzijami skrčimo na preprost n dimenzionalen linearen sistem tipa $Ax = 0$.

3.2.4 Projekcijske metode

So splošen način reševanja neznanih funkcij. Logiko njihovega delovanja prikazujemo na preprostem primeru, povzetem po Juddu (1998).

Denimo, da iščemo rešitev $N(f) = 0$, kjer je $N : B_1 \to B_2$, B_1 in B_2 pa sta normirana vektorska prostora funkcij $f : D \subset R^n \to R^m$.[107] Pri tem so funkcije f lahko ravnovesne enačbe tipa odločitvenih funkcij, funkcij cen, različnih vrednostnih funkcij, pogojnih pričakovanj ipd., N pa je lahko operator, s katerim definiramo ravnovesna stanja, kot so: ravnovesni pogoji čiščenja trgov, ravnovesne Eulerjeve enačbe, Bellmanove enačbe, Hamilton-Jacobi-Bellmanove enačbe, enačbe racionalnih pričakovanj ipd.

[107] Več o normiranih vektorskih prostorih (*normed vector spaces*) v Sundaram (1996).

V primeru diferenčne enačbe tipa $y' - y = 0$, imamo $N(f) \equiv Ly = y' - y$. Če ima denimo enačba začetno stanje $y(0) = 1$, lahko s pomočjo Weierstrassovega izreka najdemo takšno oceno, da velja:

$$\hat{y}(x;a) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \tag{3.2.32}$$

Sedaj lahko s pomočjo operatorja *N* definiramo funkcijo $R(x;a)$ kot

$$R(x;a) \equiv Ly = -1 + \sum_{j=1}^{n} a_j \left(j x^{j-1} - x^j \right) \tag{3.2.33}$$

Ob vprašanju metode reševanja 3.2.33 ekonomisti najprej pomislimo na metodo najmanjših kvadratov. V tem primeru fiksiramo vrednosti parametrov a_j, tako da minimiramo kar kvadrate vrednosti $R(x;a)$:

$$\min_a \int_b^c R(x;a)^2 \ . \tag{3.2.34}$$

Vendar je tovrstna optimizacija lahko potratna, saj zahteva numerično integriranje. Alternativa je uporaba Čebiševega razvrščanja, kjer izkoristimo preprostost uporabe Čebiševih polinomov, predvsem pa njihovo *mini – maks* lastnost. Pri gladkih in lepo definiranih funkcijah lahko namreč pričakujemo vrednost funkcije 3.2.33 enako nič tudi izven vozlišč, ki so v tem primeru ničle Čebiševih polinomov in pomenijo tudi ničle funkcije 3.2.33, saj je v njih fiksirana dejanska vrednost funkcije $f(x)$.

Definirajmo sedaj splošen projekcijski algoritem, ki nam omogoča numerično reševanje 3.2.33 sorodnih problemov in katerega obliko bomo uporabili pri oceni ravnovesne koristnosti prilagojenega Hallovega modela v naslednjem poglavju.

Algoritem v grobem sestavlja pet oziroma šest korakov (Judd, 1996, 1998; Judd et al. 2003):

(i) Izbira ustreznih baz za B_1 in B_2 ter pripadajoče norme za B_1 in notranjega produkta za B_2.

(ii) Definiranje vrste in stopnje ocenjevanja: $\hat{f} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$.

(iii) V primerih, ko operator *N* vsebuje numerično integracijo, je treba uporabiti njegovo oceno $\hat{N}$: $R(x;a) \equiv \hat{N}\left(\hat{f}(\cdot;a)\right)(x)$.[108]

[108] S tem spremenimo sistem neskončnega števila dimenzij v sistem z omejenim številom dimenzij.

(iv) Sedaj definiramo dopusten odklon, ki ga $\hat{f}$ povzroči od rešitve $N(f)=0$. Bodisi izračunamo normo funkcije $R(\cdot;a)$: $\|R(\cdot;a)\| \equiv \langle R(\cdot;a), R(\cdot;a)\rangle$ oziroma izberi množico l testnih funkcij p_i iz B_2 in za vsako vrednost a izračunaj l projekcij na $R(\cdot;a)$: $P_i(\cdot) \equiv \langle R(\cdot;a), p_i(\cdot)\rangle$

(v) Najdi takšen $a \in R^n$, ki bodisi minimira normo funkcije $R(\cdot;a)$ bodisi postavi projekcije testnih funkcij preko $R(\cdot;a)$ na nič.

(vi) Testiraj kvaliteto ocene $N(\hat{f})$.

Pomembno je, da v prvem koraku izberemo zadosti fleksibilen vektorski prostor, ki omogoča ocenjevanje široke palete različnih funkcij. Če je naš prostor dobro definiran, bomo z višanjem stopnje ocenjevanja n dobili vedno boljše ocene funkcij. Baza mora biti relativno lahko izračunljiva, posamezni členi pa med seboj neodvisni glede na njihove medsebojne notranje produkte.

Mi bomo uporabili metodo kolokacije, ki bo temeljila na Čebiševih polinomih prvega reda $T_n(x)$. Ker je ravnovesna funkcija koristnosti Hallovega modela lepo definirana in odvedljiva, nam *mini – maks* lastnost Čebiševih polinomov jamči dobro oceno tudi izven kolokacijskih vozlišč.

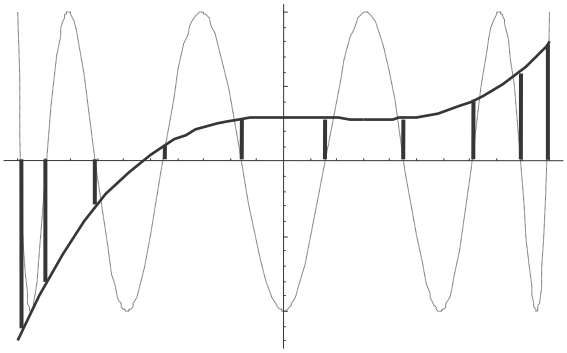
4 OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI HALLOVEGA MODELA

V prejšnjem poglavju smo najavili, da bomo pri oceni ravnovesne koristnosti Hallovega modela uporabili precej fleksibilen koncept projekcijskih metod, ki, kot smo videli, omogoča združevanje različnih metod numerične analize: metode aproksimacije (*ocenjevanja*), metode optimizacije, metode reševanja problemov končnih dimenzij (*finite dimensional methods*), numerično integriranje ipd.[109] V splošen koncept projekcijskih metod bomo vgradili globalno metodo optimizacije, t.j. simulirano ohlajanje, in Čebiševo kolokacijo.

4.1 Algoritem aproksimacije

Našo dolgoročno ravnovesno koristnost, upoštevaje pri tem neskončno mnogo proračunsko nevtralnih davčnih načrtov iz optimizacijskega problema 4.2.1, bomo ocenili z algoritmom Čebiševe kolokacije, ki ga lahko uvrstimo v družino projekcijskih metod (Judd, 1998). Kot smo namreč že ugotovili, nam Čebiševi polinomi omogočijo, da je nihanje okrog natančne vrednosti v primerih gladkih in lepo definiranih funkcij zaradi njihove *mini – maks* lastnosti najmanjše, ocena pa s tem najboljša možna. Osnovno logiko projekcije, kot jo bomo uporabili pri oceni dolgoročne koristnosti Hallovega modela prikazuje slika 4.

SLIKA 4: PROJEKCIJA S ČEBIŠEVIMI POLINOMI



Opomba: slika je narisana s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

Denimo, da želimo s pomočjo Čebiševe kolokacije oceniti namišljeno gladko in lepo definirano krivuljo, in sicer na intervalu $[-1,1]$, kjer so Čebiševi polinomi ortogonalni. V primeru iz slike 4 uporabimo prvih deset polinomov družine prvega reda. Pri tem potrebujemo ničle polinoma desete stopnje T_{10}, ki je prikazan s prekinjeno črto, v katerih

[109] Ravno zaradi interdisciplinarnosti se projekcijske metode le počasi prebijajo v ekonomsko znanost.

izračunamo dejanske vrednosti funkcije. Njeno oceno na celotnem intervalu dobimo, ko s pomočjo desetih točk in prvih deset Čebiševih polinomov izračunamo koeficiente iz vsote

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x). \tag{4.1.1}$$

Splošen algoritem Čebiševe kolokacije lahko torej zapišemo takole:

i) definiraj funkcijsko enačbo
ii) določi interval ocene,
iii) pretvori interval v $[-1,1]$,
iv) določi stopnjo Čebiševe družine $T_n(x)$ in generiraj n njenih ničel,
v) reši $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$.

Če gornji splošen algoritem prevedemo na naš konkreten primer in na oceno dolgoročne koristnosti v odvisnosti od kapitala, ki ga poganjajo endogenizirani davki, je postopek, ki ga bomo pri iskanju približka dolgoročne funkcijske enačbe koristnosti Hallovega modela uporabili, sledeč:

i) Definiraj funkcijo koristnosti kot funkcijo neskončno mnogo optimalnih proračunsko nevtralnih davčnih načrtov.

Naš model izhaja iz problema maksimiranja 2.2.1. Če vse spremenljivke v 2.2.1 prevedemo na davke, dobimo 4.2.1a, ki bo naša osrednja enačba, katero bomo s pomočjo fiksiranja n vrednosti koristnosti v n Čebiševih kolokacijskih vozlov tudi ocenjevali. Pri tem bo ocena veljala za vso definicijsko območje in ne samo za teh n vozlov. Tako bomo dejansko ocenili neznano funkcijsko enačbo, saj ne iščemo samo točke v evklidskem prostoru, temveč celotno funkcijo na vnaprej določenem intervalu. Koristnost v našem primeru poganjajo endogenizirani proračunsko nevtralni davčni načrti $\{\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\}$ iz optimizacijskega problema 4.2.1.

ii) Definiraj interval dolgoročnega ravnovesnega kapitala k v odvisnosti od davkov τ.

Za določitev definicijskega območja delovanja ocene moramo približno vedeti, kje se dolgoročna vrednost ustaljenega stanja kapitala giblje. Ker je Hallov model tako preprost, da se ga da analitično izračunati, bomo interval določili na podlagi dejanskih podatkov. Tako najprej določimo vrednosti parametrom osrednje enačbe modela 2.2.16 in izračunamo dolgoročno ustaljeno stanje zaloge kapitala. Če upoštevamo ocene parametrov iz tabele P.4.1, ki jo z izvirnim izpisom iz Mathematice 5.1 najdete v prilogah, je izhodiščno ustaljeno stanje kapitala enako 1,5802. Odločimo se, da bomo funkcijsko

enačbo dolgoročne koristnosti ocenili na intervalu ustaljenega stanja kapitala $k_j^* \in [0.5, 2]$. Interval predstavlja definicijsko območje delovanja ocene in vsebuje neskončno mnogo optimalnih in proračunsko nevtralnih davčnih načrtov. Ocena bo veljala samo za osnovno izvedbo modela iz tabele P.4.1.

iii) Pretvori ciljni interval v $[-1,1]$.

Ker so Čebiševi polinomi neodvisni na intervalu $[-1,1]$, je treba naše definicijsko območje preoblikovati, tako da bodo vrednosti kapitala v kolokacijskih vozlih odražale vrednosti *n* Čebiševih ničel. To storimo s preprosto linearno transformacijo $k_i^* = 0{,}75T_i + 1{,}25$, pri čemer je T_i *i*-ta ničla polinoma stopnje *n*, k_i^*, pa je *i*-ti ničli prirejena vrednost ustaljenega stanja kapitala oziroma njegova vrednost v *i*-tem kolokacijskem vozlu. In tem vrednostim kapitala moramo določiti ustrezen davčni načrt ter iz njega izhajajočo koristnost, katero bomo v ta vozel fiksirali.

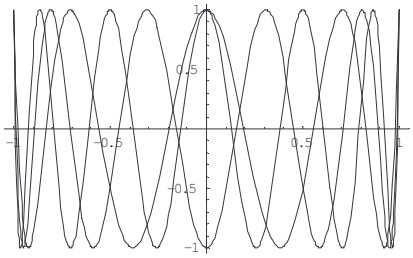
iv) Določi stopnjo Čebiševe družine $T_n(x)$ in izračunaj njene ničle.

Mi bomo opravili tri različne ocene funkcijske enačbe dolgoročne koristnosti, in sicer s pomočjo treh stopenj prve družine Čebiševih polinomov $T_n(x)$, pri čemer bo $n = \{8,10,12\}$. To pomeni, da rabimo ničle vseh treh stopenj polinomov, ki predstavljajo vrednosti vnaprej določenih ustaljenih stanj kapitala, katerim moramo določiti ustrezne davčne načrte. Ničle gornjih treh stopenj Čebiševih polinomov so prikazane v tabeli P.4.2 v prilogah k nalogi, njihov potek na definicijskem območju $[-1,1]$ pa prikazuje slika 5.

v) Vsaki ničli pripiši ustrezno vrednost kapitala.

S pomočjo linearne transformacije $k_i^* = 0{,}75T_i + 1{,}25$ priredimo ničlam vseh treh stopenj prve družine Čebiševih polinomov vrednosti ravnovesnega kapitala. Potek vseh treh polinomov je prikazan v sliki 5, ničle so v tabeli P.4.2, ustrezne vrednosti kapitala pa v tabeli 4.

SLIKA 5: ČEBIŠEVI POLINOMI T_8, T_{10} IN T_{12}



Opomba: Slika je narejena s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

vi) Simuliraj ustrezne davčne načrte in fiksiraj optimalne koristnosti v vrednosti kapitala. Pri tem so koristnosti odvisne od kapitala, ki ga poganjajo simulirani davčni načrti.

Za vsak nivo ustaljenega stanja kapitala iz kolokacijskih vozlov potrebujemo davčni načrt, iz katerega bomo nato dobili ustrezne vrednosti dolgoročne koristnosti, ki jo bomo fiksirali v Čebiševe razvrstitvene vozle in ocenili na celotnem definicijskem območju. Proračunsko nevtralne davke je treba prilagoditi vrednostim kapitala v Čebiševih vozliščih. To storimo s pomočjo optimizacijskega problema 4.2.1 in programskega paketa Mathematica 5.1. Rezultati tako pridobljenih dolgoročnih koristnosti so v tabeli 4.

vii) reši $U_j(k_j^*) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} T_i(k)$.

Ko imamo koristnosti v danih Čebiševih ničlah, dobimo ustrezno oceno za vso definicijsko območje $k_j^* \in [0.5, 2]$, tako da rešimo gornji sistem. Izračunati moramo torej takšne parametre α, ki nas bodo v vsakem razporeditvenem vozlu pripeljali do fiksirane koristnosti. V teh točkah je napaka enaka nič. Zaradi gladke in lepo definirane funkcije koristnosti ter *mini – maks* značilnosti Čebiševih polinomov predpostavljamo, da bodo odstopanja koristnosti tudi na preostalem definicijskem območju zelo majhna. S tem bomo ocenili funkcijsko enačbo koristnosti za ves interval, kjer imamo neskončno mnogo optimalnih proračunsko nevtralnih davčnih načrtov, in bomo iz relativno zapletenega ter nelinearnega dobili preprost linearen sistem. S pomočjo dobljenih parametrov in obnašanja Čebiševih polinomov bomo lahko izračunali katerokoli vrednost koristnosti na eksogeno določenem intervalu in funkcijsko enačbo na tem intervalu tudi grafično prikazali. Le-to bi sicer bilo nemogoče, saj bi morali simulirati neskončno mnogo davčnih načrtov s pripadajočimi dolgoročnimi koristnostmi.

TABELA 4: KOLOKACIJSKI VOZLI IN KORISTNOSTI

N	U_8	k_8	U_{10}	k_{10}	U_{12}	k_{12}
1	0.3866568000366232	0.514411039697527	0.3849801218069539	0.5092337445531073	0.3849367248913052	0.5064163539775837
2	0.4038622887174238	0.6263977907731636	0.38634889609319223	0.581745106862457	0.3739871733036118	0.5570903505891464
3	0.44709801863575355	0.8333223252356424	0.41825636760156015	0.7196699140917098	0.41316693081619976	0.654984994821204
4	0.48899085655061325	1.1036822584855852	0.45752074445473534	0.9095071252701249	0.43885251770834277	0.793428928303387
5	0.5226464589764137	1.3963177415201096	0.4949853854413814	1.1326741509738985	0.4710237465699141	0.9629874250486158
6	0.5438050975213659	1.6666776747471879	0.5159733772452181	1.3673258494123774	0.4976500288307137	1.1521053588220067
7	0.5531820075304914	1.8736022092491862	0.5400593300268599	1.5904928735717174	0.5186106090191398	1.3478946344810845
8	0.561029006474548	1.985588960291598	0.5512521494539833	1.780330087645029	0.5362864757510021	1.5370125991904615

9			0.5574818825483236	1.9182548914739044	0.546969034977919	1.706571021852285
10			0.5624263513462128	1.9907662561456745	0.5553739126612913	1.8450150788886623
11					0.5599637332009983	1.9429095771959672
12					0.5579496289752658	1.9935836768295978

Opomba: izračuni so narejeni s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

Rešujemo torej standarden sistem enačb $Ax = b$, pri čemer je *i*-ta vrstica $n \times n$ matrike *A* vektor vrednosti vseh *n* Čebiševih polinomov v razvrstitvenem vozlu k_i, *x* je $n \times 1$ vektor parametrov *a*, ki ga iščemo in *b* $n \times 1$ vektor v k_i fiksiranih koristnosti U_i iz tabele 4. Ko splošen $Ax = b$ zapis prevedemo na naš primer, dobimo sistem enačb za oceno koristnosti:

$$U(k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} T_i\left((k - 1.25)/0.75\right);\ n = \{8,10,12\}, \tag{4.1.2}$$

kjer je *n* stopnja aproksimacije. Za lažje razumevanje je v sliki P.4.1 v prilogah podrobnejši prikaz poteka algoritma.

4.2 Simulacije proračunsko nevtralnih davkov

Koristnost iz enačbe 4.1.2 temelji na kombinacijah takšnih proračunsko nevtralnih davkov, ki ob eksogenih kolokacijskih vozlih maksimirajo predpostavljeno funkcijo koristnosti 2.2.1.[110] Kot izhaja iz algoritma ocenjevanja, bomo potrebovali po en takšen davčni sistem za vsako *n* stopnjo ciljnega ustaljenega stanja kapitala k_j^*, ki je vezan na posamezno Čebiševo ničlo.

Rešujemo torej naslednji optimizacijski problem:[111]

$$max U_j^* = \left(\frac{\left(C_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right), L_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right)\right)^{\gamma} \left(1 - L_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right)^{1-\gamma}}{1-\rho} \right)^{1-\rho} \tag{4.2.1a}$$

pri pogojih

$$k_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right) = \cos\left(\frac{\pi(j - 0.5)}{n}\right) * 0.75 + 1.25; \quad j = 1,2,\ldots n = \{8,10,12\} \tag{4.2.1b}$$

$$T\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right) = 0.409219 \tag{4.2.1c}$$

[110] Pod proračunsko nevtralnimi davki je mišljen nespremenjen delež davkov v BDP.

[111] Sistem 5.2.1 lahko rešimo s katerokoli globalne metode numerične optimizacije. Mi smo uporabili kar algoritem simuliranega ohlajanja programskega paketa Mathematica 5.1.

$$0 \le \{\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\} \le 0.9 \tag{4.2.1d}$$

Optimalne koristnosti smo simulirali s pomočjo algoritma simuliranega ohlajanja, kakor je vgrajen v programski paket Mathematica 5.1, koristnosti, ki smo jih s pomočjo optimizacijskega problema 4.2.1 dobili, pa so skupaj z eksogenimi stopnjami kapitala prikazane v tabeli 4 zgoraj. Velja poudariti, da se vse ocene nanašajo na parameterizacijo Hallovega modela iz tabele P.1 v prilogah in skušajo povzemati slovensko gospodarstvo.

4.3 Ocena dolgoročne koristnosti

Pri oceni ravnovesne dolgoročne koristnosti Hallovega modela na eksogeno določenem definicijskem območju rešujemo neznan vektor koeficientov α iz sistema linearnih enačb 4.1.2:

$$U(k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} T_i\left((k-1.25)/0.75\right);\ n = \{8,10,12\}, \tag{4.3.1}$$

ki ga v matrični obliki zapišemo kot:[112]

$$\underset{n\times 1}{U} = \begin{bmatrix} T_1\left((k_1-1.25)/0.75\right) & \cdots & T_n\left((k_1-1.25)/0.75\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1\left((k_n-1.25)/0.75\right) & \cdots & T_n\left((k_n-1.25)/0.75\right) \end{bmatrix} \underset{n\times 1}{a}\ ;\ n = \{8,10,12\}. \tag{4.3.2}$$

Iščemo torej tri različne $n \times 1$ vektorje spremenljivk a iz sistema linearnih enačb 4.3.1, katerega lahko rešujemo s poljubno metodo numeričnega reševanja preprostih linearnih sistemov enačb $Ax = b$.[113] Ko razrešimo 4.3.2, dobimo tri različice ocen za dolgoročno ravnovesno koristnost Hallovega modela v odvisnosti od proračunsko nevtralnih davkov, kjer so parametri vseh treh enačb ocen ravnovesne koristnosti Hallovega modela v odvisnosti od endogeniziranih proračunsko nevtralnih davkov naslednji:

a) $n = 8;\ a_i = \begin{Bmatrix} 0.488409, 0.0888675, -0.01802, 0.000576857, \\ 0.00201096, -0.000681087, 0.00170207, -0.000384796 \end{Bmatrix}$

b) $n = 10;\ a_i = \begin{Bmatrix} 0.486928, 0.0925079, -0.018407, -0.0000432243, 0.00298266, \\ -0.00327475, 0.0027527, -0.0000426984, 0.000808457, -0.00174093 \end{Bmatrix}$

[112] Matriko vrednosti Čebiševih polinomov v kolokacijskih vozlih iz sistema 4.3.2 dobimo s pomočjo rekurzivne sheme iz tabele 2, kjer so opisane nekatere družine neodvisnih polinomov, ki se v splošnem uporabljajo pri ocenah neznanih funkcijskih enačb.

[113] t.j. Gaussovo eliminacijo, QR faktorizacijo, Cholesky-jevo faktorizacijo, diagonalnimi metodami ipd.

c) $n = 12;\ a_i = \begin{Bmatrix} 0.487898, 0.0916169, -0.0212033, 0.00139836, 0.000690597, -0.00265955, \\ 0.00203479, -0.00324511, 0.00258226, -0.00353549, 0.00269839, -0.00137971 \end{Bmatrix}$

Natančnost dobljenih ocen prikazuje tabela 5. Kot lahko vidimo, se s pomočjo Čebiševe kolokacije, torej sistema 4.3.1, ocenjene vrednosti dolgoročne ravnovesne koristnosti za poljubne stopnje dolgoročno ravnovesnega kapitala od dejanskih vrednosti koristnosti pri teh istih stopnjah kapitala zelo malo razlikujejo.[114]

TABELA 5: KVALITETA OCEN DOLGOROČNO RAVNOVESNE KORISTNOSTI

k^*	U^*	U_8	e_8	U_{10}	e_{10}	U_{12}	e_{12}
0.80	0.440106	0.440581	0.00107929	0.435405	0.010682	0.439863	0.000552
1	0.474975	0.474885	0.00018948	0.474866	0.000229	0.477824	0.005998
1.2	0.503789	0.500871	0.00579211	0.502071	0.00341	0.502461	0.002636
1.4	0.523706	0.523018	0.00131371	0.519031	0.008927	0.524369	0.001266
1.6	0.538777	0.539857	0.00200454	0.541019	0.004161	0.540323	0.002869
1.8	0.550983	0.54986	0.00203818	0.551725	0.001347	0.552825	0.003343

Simboli: k^*… eksogeno določeno ustaljeno stanje kapitala
U^*… koristnost kot izhaja iz Hallovega modela
U_n… s pomočjo 4.2.1 ocenjena koristnost pri *n* Čebiševih polinomih.
e… napaka ocenjene koristnosti izražena kot razmerje med absolutno razliko ocenjene in prave koristnosti ter pravo vrednostjo koristnosti.

4.4 Komentar rezultatov

Po pričakovanjih smo dobili izredno natančne približke dejanskih ustaljenih stanj koristnosti. Posebej je treba poudariti, da ocene veljajo samo za definicijo parametrov Hallovega modela iz tabele P.4.1, ki poskuša povzeti slovensko gospodarstvo, in ne na splošno.

Ocene s Čebiševimi polinomi se dobro izkažejo, takrat ko želimo ocenjevati neznane funkcijske enačbe, ki izhajajo iz gladkih in dobro definiranih funkcij ter ko vrednosti na definicijskem območju bistveno ne nihajo. V našem primeru je bilo definicijsko območje ciljnega kapitala $k_j^* \in [0.5, 2]$, koristnosti v posameznih vozlih pa so se gibale na intervalu $U_j^* \in [0.3, 0.57]$ kar je zelo blizu intervalu $[-1,1]$, kjer so Čebiševi polinomi definirani. Hkrati je predpostavljena koristnost neznane funkcijske enačbe temeljila na dobro definirani in gladki CRRA funkciji koristnosti, kar je omogočilo Čebiševim polinomom, da povežejo

[114] Natančne vrednosti koristnosti dobimo iz sistema 4.2.1, in sicer ob predpostavki proračunsko nevtralnih davkov, kot izhajajo iz osnovne izvedbe Hallovega modela tabele P.4.1.

neskončno mnogo točk na ciljnem intervalu kapitala v zelo natančno oceno koristnosti. Iz večdimenzionalnega sistema neskončno mnogo endogeniziranih optimalnih davkov smo dobili preprost linearen sistem kapital – koristnost.

Iz tabele 5 se lepo vidi, da je korelacija med dolgoročno koristnostjo dinamičnega Hallovega modela rasti in stopnjo kapitala ob predpostavki proračunske nevtralnosti za slovensko gospodarstvo pozitivna. Če ob tem upoštevamo navedene študije iz drugega poglavja naloge, ki kažejo na to, da stopnja obdavčitve kapitala znižuje njegovo zalogo, lahko sklenemo, da bi nižja obdavčitev kapitala slovensko gospodarstvo pripeljala v višje stopnje agregatne koristnosti.

5 SKLEP

Magistrska naloga v svojem začetnem poglavju prinaša razvoj ključnih vrst dinamičnih ekonomskih modelov, ki v razlago delovanja gospodarstva vključujejo državo. Ugotovili smo, da se tovrstne analize največkrat opravljajo na dveh splošnih tipih dinamičnih ekonomskih modelov: (i) raznovrstnih posameznikov, kjer imamo opraviti z zelo zapletenimi algoritmi numeričnega reševanja dinamičnih ekonomskih modelov in paziti, da se ne ujamemo v prekletstvo dimenzionalnosti ter (ii) enakovrstnih oziroma homogenih posameznikov, ki so sicer mnogo bolj preprosti, vendar za ceno slabšega prikaza ekonomske stvarnosti. Znotraj prve skupine smo predstavili zelo razširjen Auerbach – Kotlikoff OLG model najprej z dvema in nato še s 55 generacijami, znotraj druge pa prilagojen dinamični Hallov model splošnega ravnovesja, katerega dolgoročno ravnovesno koristnost smo v nadaljevanju tudi ocenjevali. Ugotovili smo tudi, da študije v splošnem favorizirajo obdavčitev potrošnje oziroma linearne davke pred progresivnimi in pred obdavčitvijo kapitala.

Naša osrednja naloga je torej bila oceniti dolgoročno koristnost Hallovega dinamičnega modela splošnega ravnovesja enakovrstnih posameznikov v odvisnosti od kapitala, ki ga poganjajo endogenizirani optimalni davki. V ta namen smo najprej predstavili nekatere temeljne numerične metode optimizacije in aproksimacije neznanih funkcijskih enačb.

Po pričakovanjih se je izkazalo, da je zaradi svojih *mini – maks* lastnosti za ocenjevanje dolgoročno ravnovesne koristnosti Hallovega modela najbolje uporabiti Čebiševe polinome prvega reda, medtem ko smo zaradi kompleksnosti algoritmov optimizacije uporabili kar v programski paket Mathematica 5.1. vgrajeno metodo simuliranega ohlajanja. Z oceno dolgoročno ravnovesne koristnosti smo iz neskončno mnogo nelinearnih optimizacijskih problemov dobili preprost enodimenzionalen linearen sistem kapital koristnost, s pomočjo katerega lahko ocenimo spreminjanje dolgoročne agregatne koristnosti v odvisnosti od ravni kapitala, in sicer ob predpostavki nespremenjenega deleža pobranih davkov. Pri tem smo model parameterizirali za slovensko gospodarstvo.

Upoštevaje analize, ki kažejo na negativno korelacijo med stopnjo kapitala v gospodarstvu v odvisnosti od njegove obdavčitve in očitno pozitivno korelacijo med kapitalom in koristnostjo lahko sklenemo, da bi slovensko gospodarstvo, dosegalo višje ravni koristnosti, če bi znižalo stopnje obdavčitve kapitala, in sicer tudi ob predpostavki proračunske nevtralnosti.

V nalogi uporabljen algoritem ocenjevanja sodi v skupino projekcijskih metod, ki se zaradi svoje kompleksnosti in pomanjkanja splošnih programskih kod v ekonomsko znanost le počasi uvajajo.

6 LITERATURA

1. Abramowitz Milton, Stegun Irene: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York: Dover, 1970.
2. Altig David, Auerbach Alan J., Kotlikoff Laurence J., Smetters Kent A., Walliser Jan: Simulating Foundamental Tax Reform in the United States. *The American Economic Review*, Nashville 2001, 91(3), str. 574-595.
3. Arrow Kenneth J., Debreu Gerard: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, Evanston 1954, 22(3).
4. Atkinson A. B., Sandmo A.: Welfare Implications of the Taxation of Savings. *The Economic Journal*, Cambridge 1980, 90, str. 529-549.
5. Auerbach Alan J.: Wealth Maximization and the Cost of Capital. *Quarterly Journal of Economics*, Cambridge 1979, 93(3) str. 433-446.
6. Auerbach Alan J.: The Optimal Taxation of Heterogenous Capital. *Quarterly Journal of Economics*, Cambridge 1983, Nov., str. 589-612.
7. Auerbach Alan J., Kotlikoff Laurence J., Skinner Jonathan: The Efficiency Gains from Dynamic Tax Reform. *International Economic Review*, Philadelphia 1983, 24(1), str. 81-100.
8. Auerbach Alan J., Kotlikoff Laurence J.: *Dynamic Fiscal Policy.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
9. Auerbach Alan J., Hassett Kevin: Optimal Long Run Fiscal Policy: Constraints, Preferences, and the Resolution of Uncertainty. *National Bureau of Economic Research*, Cambridge 2002, Working Paper št. 9132.
10. Bowlus, Audra J., Kiefer Nicholas M., Neumann George R.: Estimation of Equilibrium Wage Distribution with Heterogeneity. *Journal of Applied Econometrics*, New York 1995. 10, str. 119-131.
11. Bunzel, H., B. Christensen J., Jensen P., Kiefer N. M., Korsholm L., Muus L., Neumann G. R., Rosholm M.: Specification and Estimation of Equilibrium Search Models. *Review of Economic Dynamics*, Orlando 2001, 4, 90-126.
12. Campbell, John Y.: Inspecting the Mechanism: An Analytical Approach to the Stochastic Growth Model. *Journal of Monetary Economics*, Amsterdam 1994, 33(3), str. 463-506.
13. Cassou Steven P., Lansing Kevin J.: Growth Effects of Shifting from a Graduated-Rate Tax System to a Flat Tax. *Federal Reserve Bank of San Francisco*, San Francisco 2003.
14. Cassou Steven P., Lansing Kevin J.: Growth Effects of a Flat Tax. *Federal Reserve Bank of Cleveland*, Cleveland 1996, Working Paper št. 9615.
15. Christiano, Lawrence: Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients. *National Bureau of Economic Research*, Cambridge 1998, Technical Working Paper št. 225.
16. Clenshaw C.W.: Chebyshev Series for Mathematical Functions. American Mathematical Society: *Mathematics of Computation* 1963 17(81), str. 88.

17. Conesa Juan Carlos in Krueger Dirk: On the Optimal Progressivity of the Income Tax Code. *National Bureau of Economic Research*, Cambridge 2005, Working Paper št. 11044, str. 1-26.
18. Cuyt Annie in Wuytack Luc: *Nonlinear Methods in Numerical Analysis*. Amsterdam: North Holland, 1987.
19. Černy, V.: Thermodynamical Approach to the Traveling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, New York 1985, 45(1), str. 41-51.
20. Dantzig, Gregory B.: *Linear Programming and Extensions*. New Yersey: Princeton University Press, 1963.
21. Diewert W. E.: On Tax Reform. *The Canadian Journal of Economics*, Toronto 1988, 21(1), str. 1-40.
22. Feldstein Martin S. in Metcalf G. E.: The Effect of Federal Tax Deductibility on State and Local Taxes and Spending. *Journal of Political Economy*, Chicago 1987, 95, str. 710–736.
23. Feldstein Martin S.: The Effects of Marginal Tax Rates on Taxable Income: A Panel Study of the 1986 Tax Reform Act. *Journal of Political Economy*, Chicago 1995, 103(3), str. 551-572.
24. Feldstein Martin S.: The Welfare Cost of Capital Income Taxation. *Journal of Political Economy*, Chicago 1978, 86, str. 29–51.
25. Fletcher R.: *Practical Methods of Optimization. Volume 2: Constrained Optimization.* New York: Willey-Interscience Publication, 1981.
26. Fletcher R. in Reeves C. M.: Function Minimization by Conjugate Gradients. *Computer Journal*, Oxford 1964. 7, str. 149–154.
27. Fullerton Don in Lim Rogers Diane: *Who Bears the Lifetime Tax Burden?* Washington DC: Brookings Institution Press, 1993.
28. Geman Stuart in Geman Donald: Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Washington DC 1984, 6, str. 721–741.
29. Goffe William L., Ferrier Gary D., Rogers John: Global Optimization of Statistical Functions with Simulated Annealing. *Journal of Econometrics*, Amsterdam 1994, 60, str. 65-99.
30. Goffe William L., Ferrier Gary D., Rogers John: Simulated Annealing: An Initial Application in Econometrics. *Computer Science in Economics and Management*, Amsterdam 1992, 5(2), str. 133-146.
31. Gonzales-Torrabadella Marta, Pijoan-Mas Josep: Flat Tax Reforms: a General Equilibrium for Spain. *CEMFI working paper.* MIMEO. 2006.
32. Hall Robert E., Rabushka Alvin: *The Flat Tax.* Third Edition. Stanford: Hoover Institution Press, 1995.
33. Hall Robert E.: The Dynamic Effects of Fiscal Policy in an Economy with Foresight. *The Review of Economic Studies*, Harlow 1971, 38(2), str. 229-244.

34. Hansen Gary D.: Indivisible Labor and the Business Cycle. *Journal of Monetary Economics* Amsterdam 1985, 16, str. 309–327.
35. Hercowitz Zvi in Sampson Michael: Output Growth, the Real Wage, and Employment Fluctuations. *American Economic Review*, Nashville 1991, 81 str. 1215-1237.
36. Hestenes M. R. in Stiefel E.: Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems, *National Bureau of Standards*, Washington DC 1952, 49, str. 409–436.
37. Ingber Lester in Rosen Bruce: Genetic Algorithms and Very Fast Simulated Re-Annealing: A Comparison. *Mathematical and Computer Modeling*, Amsterdam 1992, 16(11), str. 87-100.
38. Ingber Lester: Adaptive Simulated Annealing (ASA): Lessons Learned. *Control and Cybernetics*, Varšava 1996, 25(1), str. 33-54.
39. Ingber Lester: Simulated Annealing: Practise versus Theory. *Mathematical and Computer Modelling*, Amsterdam 1993, 18(11), str. 29-57.
40. Ingber Lester: Very Fast Simulated Re-Annealing. *Mathematical and Computer Modeling*, Amsterdam 1989, 12, str. 967-973.
41. Jones Larry E., Manuelli Rodolfo E., Rossi Peter E.: Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth. *Journal of Political Economy*, Chicago 1993, (101)3, str. 485-517.
42. Jorgenson Dale W., Yun Kun Young: Tax Reform and U.S. Economic Growth. *Journal of Political Economy*, Chicago 1990, 98(5), str. 151-193.
43. Judd Kenneth L. in Su Che-Lin: *Optimal Income Taxation with Multidimensional Taxpayer Types.* MIMEO 2006.
44. Judd Kenneth L., Gaspar Jess: Solving Large Scale Rational Expectations Models. *National Bureau of Economic Research*, Cambridge 1997, Technical Working Paper št. 207.
45. Judd Kenneth L., Kubler Felix in Schmedders Karl: Computational Methods for Dynamic Equilibria with Heterogeneous Agents. V *Advances in Economic Theory and Econometrics*, vol. III. Uredniki: Mathias Dewatripoint, Lars Peter Hansen, in Steven J. Turnovsky. New York: Econometric Society, 2003.
46. Judd Kenneth L.: A Dynamic Theory of Factor Taxation. *The American Economic Review*, Nashville 1987(a), 77(2), str. 42-48.
47. Judd Kenneth L.: Approximation, Perturbation, and Projection Solution Methods in Economics. V *Handbook of Computational Economics*, vol. I. Uredniki: Hans Amman, David Kendrick, in John Rust. Amsterdam: Elsevier-North-Holand 1996, str. 509-586.
48. Judd Kenneth L.: *Numerical Methods in Economics*. Cambridge: MIT Press, 1998.
49. Judd Kenneth L.: Optimal Taxation and Spending in General Competitive Growth Models. *Journal of Public Economics*, Amsterdam 1999, 71, str. 1-26.
50. Judd Kenneth L.: Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models. *Journal of Economic Theory*, New York 1992, 58(2), str. 410-452.

51. Judd Kenneth L.: Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model. *Journal of Public Economics*, Amsterdam 1985(a), 28, str. 59-83.
52. Judd, Kenneth L. Taxes, Uncertainty, and Human Capital. *American Economic Review*, Nashville 1998, 88(2), str. 289-292.
53. Judd Kenneth L.: The Impact of Tax Reform in Modern Dynamic Economies. V *Transition Costs of Fundamental Tax Reform*. Urednika: Kevin A. Hassett in Glenn R. Hubbard. Washington D.C.: AEI Press 2001, str. 5-53.
54. Judd Kenneth L.: The Welfare Cost of Factor Taxation in a Perfect Foresight Model. *Journal of Political Economy*, Chicago 1987(b), 95(4), str. 675-709.
55. Judd Kennteh L.: Computational Economics and Economic Theory: Substitutes or Complements? *Journal of Economic Dynamics and Control*, Amsterdam 1997, 21, str. 907-942.
56. Kelley, C. T.: *Iterative Methods for Optimization.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
57. Kirkpatrick S., Gelatt C. D. Jr. in Vecchi M.P.: Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 1983, 220(4598), str. 671-680.
58. Ljungqvist Lars, Sargent Thomas J.: *Recursive Macroeconomic Theory*, 2. izdaja. Massachusetts: MIT, 2000.
59. Lucas Robert: Econometric Policy Evaluation: A Critique. V *The Phillips Curve and Labor Markets.* Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, vol. I. Urednika: Karl Brunner in Allan Meltzer. Amsterdam: North-Holland 1976, str. 19-46.
60. Mason J.C. in Handscomb D.C.: *Chebyshev Polynomials*. New York: Chapman & Hall/CRC. 2003.
61. Mathews John H.: *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, 2. izdaja. New Yersey. Prentice Hall, Inc., 1992.
62. Mathews John H.: *Numerical Methods: C Programs.* Fullerton: California State University, 1995.
63. Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. H. in Teller E.: Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, New York 1953, 21, str. 1087–1092.
64. Miranda Mario J., Fackler Paul L.: *Applied Computational Economics and Finance*. Cambridge: MIT Press, 2002.
65. Nelder J. in Mead R.: A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, Kalispell 1965, 7, str.: 308-313.
66. Nocedal Jorge in Wright Steven J.: *Numerical Optimization*. New York: Springer Verlag, 1999.
67. Powell M.J.D.: *Approximation Theory and Methods.* Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
68. Quandt Richard E.: Computational Problems and Methods. V *Handbook of Econometrics*, vol. I. Urednika: Griliches Z. in Intriligator, M. D. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1983.

69. Ramsey Frank: A Contribution to the Theory of Taxation. *The Economic Journal*, Cambridge 1927, 37(145), str. 47-61.
70. Ramsey Frank: A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*, Cambridge 1928, 38(152), str. 543-559.
71. Rios-Rull Jose-Victor: Models With Heterogenous Agents. V *Frontiers of Business Cycle Research*. Urednik: Thomas F. Cooley. Princeton: Princeton University Press, 1995, str. 98-125.
72. Rivlin Theodore J.: *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, 2. izdaja. New York: Willey-Interscience Publication, 1990.
73. Rudin Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, 3. izdaja. Auckland: McGraw Hill. 1976.
74. Rust John, Traub J.F. in Wozniakowski H.: Is there a Curse of Dimensionality for Contraction Fixed Points in the Worst Case? *Econometrica*, Evanston 2002, 70(1), 285-329.
75. Rust John: Numerical Dynamic Programming in Economics. V *Handbook of Computational Economics*, vol. I. Uredniki: Amman Hans, Kendrick David, in Rust John. Amsterdam: Elsevier-North-Holand 1996, str. 619-729.
76. Rust John: Using Randomization to Break the Curse of Dimensionality. *Econometrica*, Evanston 1997, 65, št. 3, 487-516.
77. Schmitt-Grohe Stephanie in Uribe Martin: Solving Dynamic General Equilibrium Models Using Second Ordrer Approximation to the Policy Function. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Amsterdam 2004, 28, 4, str. 755-775.
78. Snyder Martin Avery. Chebyshev Methods in Numerical Approximation. *Mathematics of Computation*, Providence 1968, 22(104), str. 894-895.
79. Spendley W., Hext G. R., Himsworth F. R.: Sequential application of simplex designs in optimization and evolutionary operation. *Technometrics*, Rochester 1962(4), str.: 441-461.
80. Stokey Nancy L., Rebelo Sergio: Growth Effects of Flat-Rate Taxes. *The Journal of Political Economy*, Chicago 1995, 103(3), str. 519-550.
81. Summers Lawrence H.: Capital Taxation and Accumulation in a Life Cycle Growth Model. *American Economic Review*, Nashville 1981, 71(4), str. 533-544.
82. Sundaram K. Rangarajan: *A First Course in Optimization Theory.* Cambridge: Cambridge University Press. 1996.
83. Szu H in Hartley R.: Fast Simulated Annealing. *Physics Letters*, Amsterdam 1987, 122(3-4), str. 157-162.
84. van Laarhoven P. J. in Aarts E. H.: *Simulated Annealing: Theory and Practice.* Amsterdam: Reidel Pub. 1987.
85. Ventura Gustavo: Flat Tax Reform: A Quantitative Exploration. *The Journal of Economic Dynamics and Control*, Amsterdam 1999, 23, str. 1425-1458.
86. Wang Tao: *Global Optimization for Constrained Nonlinear Programming.* Urbana, 2001. University of Illinois.

87. Wu Lihua in Wang Yuyun: An Introduction to Simulated Annealing Algorithms for the Computation of Economic Equilibrium. *Computational Economics*. Amsterdam 1998, 12, str. 151-169.
88. Yang Y. Won, Cao Wenwu, Chung Tae-Sang, Morris John: *Applied Numerical Methods Using Matlab.* New Jersey: John Wiley and Sons, Inc. 2005.

PRILOGE

PRILOGA 1: TEHNIČNA POMOČ ZA HALLOV MODEL

Ravnovesna funkcija koristnosti

$$U_j^* = \left(\frac{\left(C_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right), L_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right)\right)^{\gamma} \left(1 - L_j^*\left(K_j^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right)^{1-\gamma}}{1-\rho} \right)^{1-\rho} \tag{P.1.1}$$

Ravnovesna proračunska omejitev države

$$\begin{aligned} T \le\ & \tau_c C\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right) - \tau_{inv}\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right) - (1-\delta) K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right) \\ & + \tau_k F_k\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right), L\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right) K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right) \\ & + \tau_l F_l\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right), L\left(\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right)\right) L\left(K\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right)\right) \end{aligned} \tag{P.1.2}$$

Ravnovesna količina dela

$$\left(\left(\beta^{-1} - (1-\delta)\right) \frac{(1-\tau_i)}{\alpha(1-\tau_k)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K^*\left(\tau_{inv}, \tau_{cap}, \tau_{lab}, \tau_{con}\right) = L^* \tag{P.1.3}$$

Ravnovesni kapital

$$k^* = \frac{\gamma(-1+\alpha)\left(\frac{-1+\beta^{-1}+\delta}{\alpha-\alpha\tau_{cap}}\right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(-1+\tau_{lab})}{(-1+\gamma)\left(\delta - \delta\tau_{inv} + \frac{\gamma(-1+\alpha)\left(\frac{-1+\beta^{-1}+\delta}{\alpha-\alpha\tau_{cap}}\right)(-1+\tau_{lab})}{-1+\gamma} + \frac{(1+\beta(-1+\delta))(-1+\tau_{inv})(-1+\alpha\tau_{cap}-(-1+\alpha)\tau_{lab})}{\alpha\beta(-1+\tau_{cap})}\right)} \tag{P.1.4}$$

PRILOGA 2: TEHNIČNA POMOČ ZA OPTIMIZACIJO

P.2.1 Optimizacija brez omejitev

Izrek P.2.1: Pogoji prvega reda

Denimo, da je $x^* \in int\, D \subset \Re^n$ *lokalni minimum funkcije f na definicijskem območju D. Denimo tudi, da je f v točki* x^* *odvedljiva. Takrat velja, da je* $Df(x^*) = 0$. *Enako velja v primeru, če je* x^* *lokalni maksimum funkcije f na D.*

Izrek P.2.2: Pogoji drugega reda

Denimo, da je funkcija f dvojno odvedljiva in ima lokalni minimum (*maksimum*) *v točki* x^*. *Takrat velja:*

1. $D^2 f(x^*)$ *je pozitivno (negativno) semi-definitna.*

2. *Če je* $Df(x^*) = 0$ *in če je* $D^2 f(x^*)$ *pozitivno* (*negativno*) *definitna, takrat je* x^* *strogo lokalen minimum* (*maksimum*).

P.2.2 Optimizacija z omejitvami, ki strogo vežejo

Izrek P.2.3: Lagrangev izrek oziroma pogoji prvega reda

Naj bodo $f : \Re^n \to \Re$ *in* $g_i : \Re^n \to \Re^k\, C^1$ *funkcije. Denimo, da je* x^* *lokalen ekstrem* (*maksimum oziroma minimum*) *funkcije f na setu* $D = U \cap \{x | g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k\}$, *kjer je* $U \subset \Re^n$ *odprt set. Denimo tudi, da so v točki* x^* *nakloni omejitev neodvisni:* $\rho(Dg(x^*)) = k$. *Takrat obstaja takšen vektor* $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_2^*) \in \Re^k$, *da velja* $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* Dg_i(x^*) = 0$. *Če par* (x^*, λ^*) *zadošča pogojema, da je* $g(x^*) = 0$ *in* $Df(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* Dg_i(x^*) = 0$, *potem par* (x^*, λ^*) *zadošča nujnim pogojem prvega reda optimizacije z omejitvami, ki strogo vežejo.*

Izrek P.2.4: Pogoji drugega reda

Denimo, da obstaja takšen x^*, da veljajo pogoji prvega reda iz izreka P.3.3. Definirajmo $Z(x^*)=\{z\in\Re^n \mid Dg(x^*)z=0\}$ in naj bo D^2L^* $n\times n$ matrika: $D^2L(x^*,\lambda^*)=D^2f(x^*)+\sum\lambda_i^* D^2 g_i(x^*)$.

Takrat velja:

1. *če je x^* lokalni minimum, takrat je $z'D^2L^*z\geq 0$ za vse vrednosti $z\in Z(x^*)$ oziroma $z'D^2L^*z\leq 0$ za vse vrednosti $z\in Z(x^*)$, ko je x^* lokalni maksimum.*

2. *če je $z'D^2L^*z>0$ za vse ne-ničelne vrednosti $z\in Z(x^*)$, potem je x^* strogo lokalni minimum funkcije f in obratno, ko za vse ne-ničelne vrednosti z-ja velja $z'D^2L^*z<0$.*

P.2.3 Optimizacija in omejitve z neenakostjo

Izrek P.2.5: Kuhn Tuckerjev izrek

Naj bodo $f:\Re^n\to\Re$ in $h_i:\Re^n\to\Re, i=1,\ldots,l$ C^l funkcije. Denimo, da je x^* lokalni minimum funkcije f na $D=U\cap\{x \mid h_i(x)=0, i=1,\ldots,l\}$, kjer je U odprt set v $\Re^n$. Naj bo $E\subset\{1,\ldots,l\}$ set učinkovitih omejitev v točki x^* in naj bo $h_E=(h_i)_{i\in E}$. Denimo, da so nakloni vseh učinkovitih omejitev v točki x^* med seboj neodvisni: $\rho(Dh_E(x^*))=[E]$. Takrat obstaja vektor $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_l^*)\in\Re^l$, tako da velja:

1. $\lambda_i^*\geq 0$ *in* $\lambda_i^* h_i(x^*)=0,\ i=1,\ldots,l$.

2. $Df(x^*)-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^* Dh_i(x^*)=0$.

Kuhn Tuckerjeva pogoja pod 1 in 2 sta nujna pogoja za obstoj lokalnega ekstrema. V primeru, ko iščemo maksimum, se pri drugem pogoju spremeni predznak pred učinkovitimi omejitvami.

P.3.1 Padéjev približek iz linearnega sistema enačb 3.2.7

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_{m-n} \\ a_{m+1} & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+n} & a_{m+n-1} & a_{m+n-2} & \cdots & a_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 & d_1 & \cdots & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots & d_2 & d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & d_n & \cdots & d_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1 & q_1 & a_1 + a_0 d_1 & \cdots & a_1 + a_0 d_1 & a_1 + a_0 d_1 & \cdots & a_1 + a_0 d_1 \\ a_2 & a_2 + a_1 d_1 & q_2 & \cdots & a_2 + a_1 d_1 + a_0 d_2 & a_2 + a_1 d_1 + a_0 d_2 & \cdots & a_2 + a_1 d_1 + a_0 d_2 \\ a_3 & a_3 + a_2 d_1 & a_3 + a_2 d_1 + a_1 d_2 & \cdots & a_3 + a_2 d_1 + a_1 d_2 + a_0 d_3 & a_3 + a_2 d_1 + a_1 d_2 + a_0 d_3 & \cdots & a_3 + a_2 d_1 + a_1 d_2 + a_0 d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & a_m + a_{m-1} d_1 & a_m + a_{m-1} d_1 + a_{m-2} d_2 & \cdots & q_m & q_m & \cdots & q_m \\ a_{m+1} & a_{m+1} + a_m d_1 & a_{m+1} + a_m d_1 + a_{m-1} d_2 & \cdots & a_{m+1} + a_m d_1 + \cdots + a_{m-n+1} d_n & 0 & \cdots & a_{m+1} + a_m d_1 + \cdots + a_{m-n+1} d_n \\ a_{m+2} & a_{m+2} + a_{m+1} d_1 & a_{m+2} + a_{m+1} d_1 + a_m d_2 & \cdots & a_{m+2} + a_{m+1} d_1 + \cdots + a_{m-n+2} d_n & a_{m+2} + a_{m+1} d_1 + \cdots + a_{m-n+2} d_n & \cdots & a_{m+2} + a_{m+1} d_1 + \cdots + a_{m-n+2} d_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m+n} & a_{m+n} + a_{m+n-1} d_1 & a_{m+n} + a_{m+n-1} d_1 + a_{m+n-2} d_2 & \cdots & a_{m+n} + a_{m+n-1} d_1 + \cdots + a_m d_n & a_{m+n} + a_{m+n-1} d_1 + \cdots + a_m d_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Izrek P.3.1: Izrek o obstoju rekurzivnih shem za ortogonalne polinome

Naj bo $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *družina ortogonalnih polinomov na intervalu* $[a,b]$, $\phi_0(x)=1$ *in* $\phi_1(x)=x-\langle x,1\rangle/\langle x,x\rangle$. *Takrat velja, da je rekurzivna shema družine polinomov* $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *enaka*

$$\phi_{n+1}(x)=(x-\delta_n)\phi_n(x)-\gamma_n\phi_{n-1}(x) \tag{P.3.1}$$

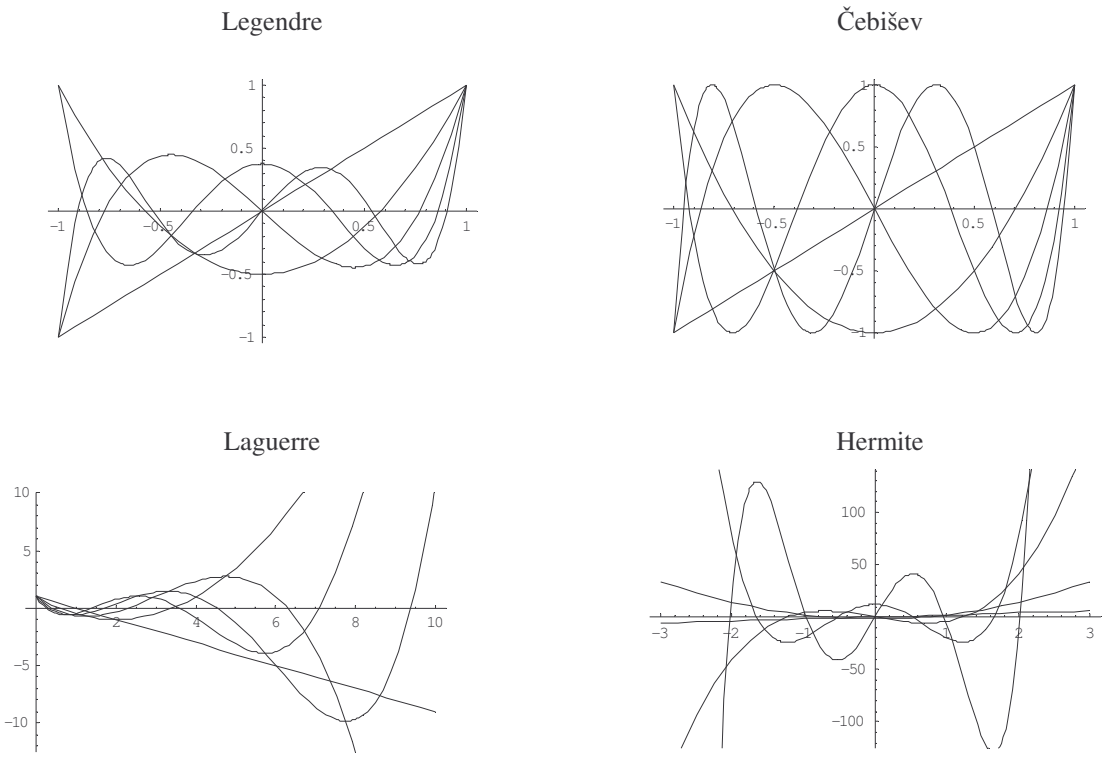
parametra δ_n *in* γ_n *pa sta definirana kot*

$$\delta_n=\frac{\langle x\phi_n,\phi_n\rangle}{\langle \phi_n,\phi_n\rangle},\quad \gamma_n=\frac{\langle \phi_n,\phi_n\rangle}{\langle \phi_{n-1},\phi_{n-1}\rangle} \tag{P.3.2}$$

Izrek P.3.2: Weierstrassov izrek o obstoju aproksimacije

Če je $f\in C[a,b]$, *takrat za vse* $\varepsilon>0$ *obstaja takšen polinom* $p(x)$, *da velja:* $\forall x\in[a,b], |f(x)-p(x)|\le\varepsilon$

SLIKA P.3.1: GENERIRANJE VREDNOSTI S POLINOMI P_N, T_N, L_N IN H_N $n=1,2,\ldots,5$



Opomba: Polinomi so narisani s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

PRILOGA 4: DOLGOROČNA KORISTNOST HALLOVEGA MODELA

TABELA P.4.1: OSNOVNA IZVEDBA HALLOVEGA MODELA

α	β	γ	δ	ρ	τ_{inv}	τ_{cap}	τ_{lab}	τ_{con}	k	T	U	τ_{flat}	U
0.35	0.95	0.85	0.15	0.2	0.15	0.25	0.45	0.13	1.5802	0.409219	0.534607	0.331625	0.555187

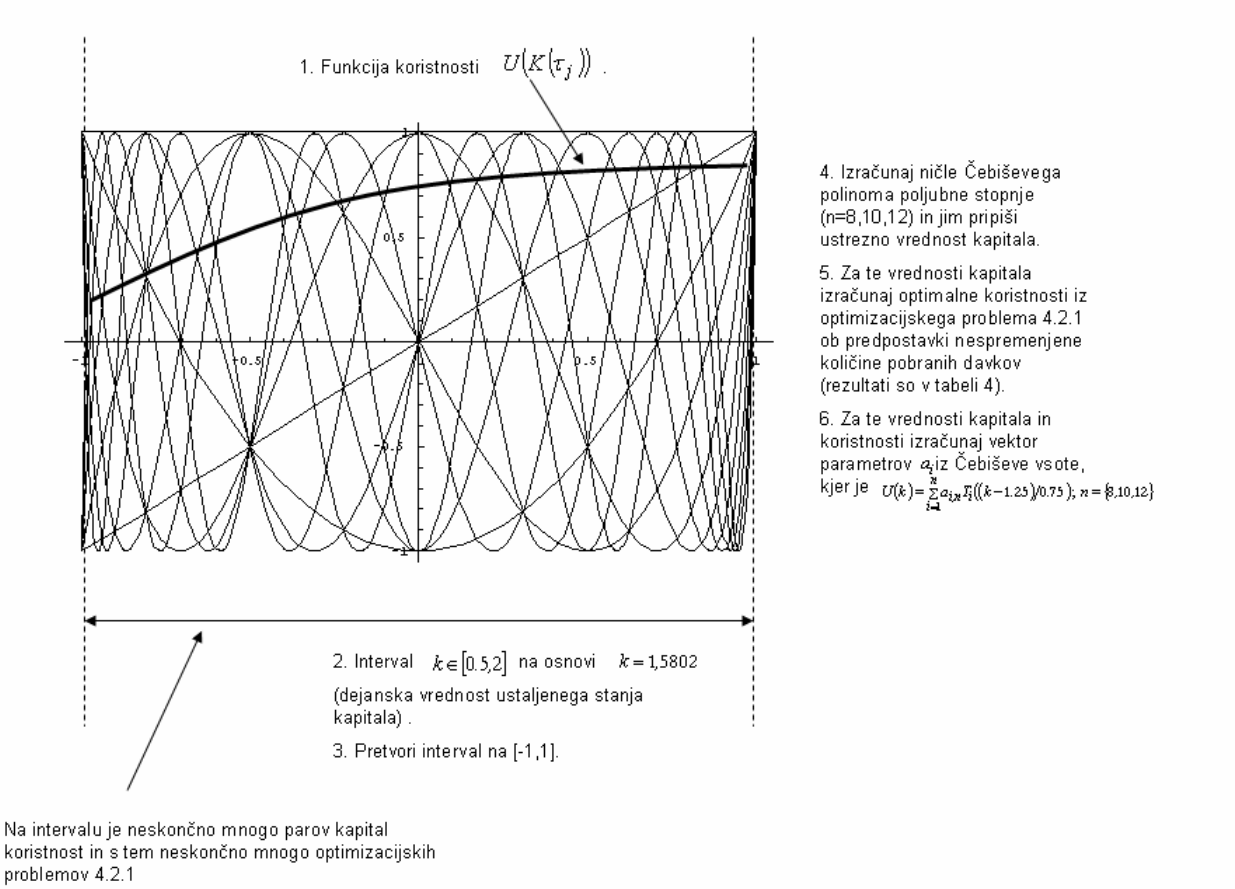
Simboli: α … delež fizičnega kapitala v gospodarstvu
β … časovna preferenca posameznikov v modelu
γ … parameter znotraj-časovne substitucije CRRA funkcije koristnosti
δ … povprečna stopnja amortizacije v gospodarstvu
ρ … med časovni parameter CRRA funkcije koristnosti
τ_{inv} ... povprečna stopnja investicijske olajšave
τ_{cap} … povprečna stopnja davka na dohodek od kapitala
τ_{lab} … povprečna stopnja davka na dohodek od dela
τ_{con} … povprečna stopnja davka na potrošnjo
k … dolgoročno ustaljeno stanje kapitala (*tehtano*)
T … ravnovesna proračunska omejitev države
U … dolgoročno ravnovesna koristnost
τ_{flat} …proračunsko nevtralna enotna davčna stopnja

TABELA P.4.2: NIČLE ČEBIŠEVIH POLINOMOV

n=8	0,555570233	n=10	0,707106781186547	n=12	0,382683432
	-0,555570233		-0,707106781186547		-0,382683432
	0,831469612		0,453990499739547		0,923879533
	-0,831469612		-0,453990499739547		-0,923879533
	0,195090322		0,891006524188368		0,130526192
	-0,195090322		-0,891006524188368		-0,130526192
	0,98078528		0,156434465040231		0,608761429
	-0,98078528		-0,156434465040231		-0,608761429
			0,987688340595138		0,79335334
			-0,987688340595138		-0,79335334
					0,991444861
					-0,991444861

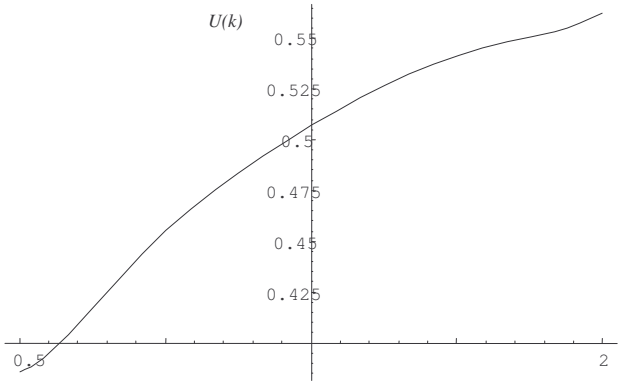
Opomba: ničle Čebiševih polinomov so generirane s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

SLIKA P.4.1: ALGORITEM OCENJEVANJA DOLGOROČNO RAVNOVESNE KORISTNOSTI HALLOVEGA MODELA

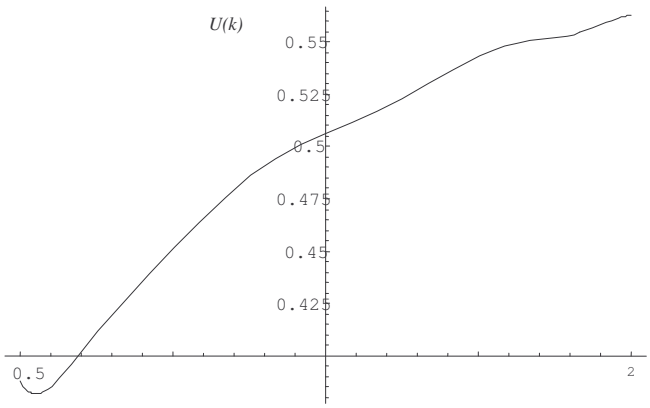


Opomba: Slika je narejena s programskim paketom Microsoft Office Powerpoint 11.

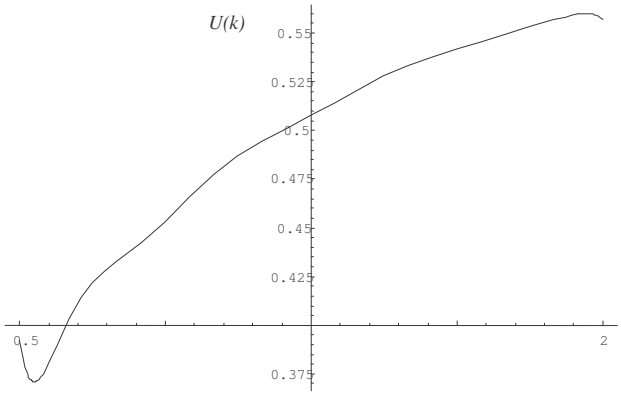
SLIKA P.4.2: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_8)



SLIKA P.4.3: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_{10})



SLIKA P.4.4: OCENA DOLGOROČNE KORISTNOSTI (U_{12})



Opomba: slike P.4.2 – P.4.4 so izrisane s pomočjo programskega paketa Mathematica 5.1.

SLOVAR POMEMBNEJŠIH POJMOV

A

Aditivna separabilnost preferenc – preference posameznika glede potrošnje in prostega časa so separabilne, t.j. odločitev o potrošnji ne vpliva na odločitev o prostem času in obratno (npr. CRRA funkcija koristnosti). Pri neseparabilnih koristnostih sta ti odločitvi med seboj povezani.

Ameba – metoda numerične optimizacije, kjer se s simpleksom, ki ima $n+1$ točk, pri čemer je n število dimenzij problema, gibljemo po osnovni ploskvi in iščemo minimum.

Analitična enačba – matematični zapis, ki neposredno pripelje do rešitve.

Analitična indukcija – znanstvena metoda, kjer s pomočjo analiziranja problema sklepamo na obstoj nekih splošnih dejstev.

Aproksimacija – ocena.

Asimptotično gibanje – gibanje v neskončnosti.

C

Cenovna elastičnost – relativna sprememba (navadno povpraševanja) glede na relativno spremembo cene.

Centroid – točka v sredini prostora. Pri geometričnih likih je to kar težišče likov.

CES funkcija – funkcija nespremenljivih elastičnosti zamenjave (substitucije) elementov, ki nastopajo v njej.

CRRA preference – v času nespremenjena Arrow–Prattova mera relativne nagnjenosti k tveganju $R_u(c) = cr_u(c) = -cu''(c)/u'(c)$.

Č

Čiščenje trgov – pojav, ko so trgi v ravnovesju in se torej izčistijo.

D

Deskripcija – metoda raziskovanja, ki pomeni opisovanje dejstev.

E

Endogenizirati – ponotranjiti; izven sistema prenesti v sistem; iz neodvisne spremenljivke narediti odvisno.

F

Faktorizacija – razbitje objekta (števila, polinoma, matrike) na produkte drugih objektov.

G

Genetski algoritmi – globalna tehnika iskanja optimalnih rešitev, kjer s pomočjo naključno izbrane populacije s pomočjo selekcije in reprodukcije prehajamo v vedno kvalitetnejše generacije populacij.

H

Hamilton-Jacobi-Bellmanova enačba – parcialna diferenčna enačba, ki se uporablja pri definiranju v času zveznih dinamičnih problemov.

Homogenost funkcije – lastnost, ki pomeni njeno multiplikativnost zrcaljenja; če npr. argument funkcije pomnožimo z nekim poljubnim številom, potem se njena preslikava spremeni za določeno potenco tega števila.

I

i.i.d. – enakomerna, identična porazdelitev; pomeni porazdelitev, kjer imajo vsi neodvisni elementi enako verjetnost, da se zgodijo in stalne premice enako oddaljene.

Infinitezimalen premik – neznaten premik.

Interpolacija – metoda, kjer s pomočjo vrednosti funkcije v dveh točkah definiramo vrednost funkcije med njima.

Iteracija – ponavljanje procesa; računanje, pri katerem se ponavlja vstavljanje približnega rezultata, da se s tem približuje pravemu rezultatu.

K

Kolokacija – razvrščanje (npr. Čebiševa kolokacija, kjer za razvrščanje uporabljamo ničle Čebiševih polinomov).

Kolokacijski vozel – točka, v katero fiksiramo vrednost funkcijske enačbe.

Komparacija – metoda raziskovanja, ki pomeni primerjanje dejstev med seboj.

Kompilacija – metoda raziskovanja, kjer povzemamo dognanja drugih avtorjev.

Konveksna množica – množica, ki vsebuje vse točke na poljubni razdalji med poljubnima točkama znotraj množice.

Konvergenca – v matematiki pomeni konvergenca asimptotično obnašanje neskončnih zaporedij.

M

Mrtva izguba – izguba ekonomske učinkovitosti, ker ni dosežen Pareto optimum; bodisi tisti, katerih mejna korist je v primeru nakupa višja od mejnih stroškov ne kupujejo blaga bodisi ga kupujejo tisti z višjimi mejnimi stroški nakupa od njegove mejne koristi.

Mrtvo davčno breme – z davki pobranemu denarju dodaten strošek, ki ga povzroči obdavčitev gospodarstvu, saj le-to prilagaja svoje obnašanje davčnemu sistemu.

N

Norma – v linearni algebri je to funkcija, ki vsakemu vektorju iz vektorskega prostora pripiše pozitivno dolžino oziroma velikost.

Normiran vektorski prostor – vektorski prostor z definirano normo.

O

OLG modeli – modeli, kjer generaciji nepretrgoma prehajata druga v drugo.

Ortogonalni polinomi – neodvisni polinomi.

P

Parabola – krivulja, katere točke so od stalne točke in stalne premice enako oddaljene.

Perfect foresight – v modelu ni negotovosti.

Pogoj transverzalnosti – pogoj, ki omeji rešitve dinamičnih optimizacijskih modelov v neskončnosti; npr. dolg v neskončnosti postavimo na nič.

Ponzi financiranje – financiranje z zadolževanjem.

Pozitivna (semi)definitnost – lastnost simetrične matrike, ko je njena kvadratna oblika strogo pozitivna (matrika je pozitivno definitna) oziroma ≥ 0 (matrika je semidefinitna).

Prekletstvo dimenzionalnosti – pojav povezan s kompleksnostjo reševanja več dimenzionalnih problemov; z dodajanjem novih dimenzij število potrebnih operacij za rešitev problema eksponentno raste.

R

Rekurzivna enačba – enačba znotraj enačbe, ki definira prejšnjo vrednost in ta spet prejšnjo itd. rekurzivna shema je obratna iteraciji.

S

Simpleks – lik z n robovi, ki ga sistematično premikamo po $n-1$ dimenzionalni ploskvi ter lovimo ekstrem sicer n dimenzionalnega problema.

Substitut – nadomestek.

T

Točka singularnosti – točka, kjer gre vrednost funkcije v neskončnost oziroma kjer je slednja kakorkoli drugače slabo definirana. V njej se podre struktura sistema.

Trajektorija – krivulja, ki jo opiše telo pri gibanju; tir.

V

Vektorski prostor – prostor sestavljen iz vektorjev, ki omogoča seštevanje vektorjev in skalarni produkt ter zadošča naslednjim aksiomom seštevanja: asociativnost, kumutativnost, obstoj ničle in obstoj inverza; ter množenja: asociativnost in distributivnost.

DELOVNI ŽIVLJENJEPIS

Osebni podatki:	Mitja STEINBACHER rojen 19. februarja 1978 v Mariboru Državljanstvo: slovensko
Kontakt::	Prvomajska ulica 7 SI – 2310 Slovenska Bistrica Tel.: +386 2 818 0 423 GSM.: +386 31 703 057 e-pošta: mitja.steinbacher@fsi-institute.si
Šolanje:	
1986-93	Osnovna šola Pohorskega odreda Slovenska Bistrica
1993-97	II. gimnazija Maribor
Študij:	
1997-2002	Ekonomsko-poslovna fakulteta Univerze v Mariboru Smer: splošna ekonomija
Diploma:	Vloga države v družbi in vpliv proračuna na gospodarsko rast
Podiplomski študij:	Ekonomska fakulteta Univerze v Ljubljani Program: magistrski študij Smer: ekonomija
Dodatno izobraževanje:	poletna šola Wirtschaftsuniversität Wien, Bol, Hrvaška, 2001
Posebna znanja:	tuji jeziki: angleški jezik (tekoče), srbsko-hrvaški jezik (tekoče), nemški jezik (pogovorno) Računalnička orodja za ekonometrično analiziranje & programiranje: Eviews, Matlab, programski jezik C, Mathematica, SPSS.
Metode Raziskovanja:	dinamično programiranje, numerične metode v ekonomiji, ekonometrija
Interesne dejavnosti:	član *The Society for Computational Economics*, ustanovni član *Društva za svobodno družbo* (angl. Free Society Institute).

Znanstvene konference:	Approximating Tax Effects in an Infinitely-lived Individual Model Using Chebyshev Collocation, 12th Conference on Computing in Economics and Finance, Limassol, Ciper, 2006.
Nerazporejeno:	Steinbacher, Mitja: Vloga države v družbi in vpliv proračuna na gospodarsko rast – diplomsko delo. 2002. Maribor: Ekonomsko-poslovna fakulteta.
	Steinbacher, Mitja. Simulacije dolgoročno vzdržne in proračunsko nevtralne enotne davčne stopnje za Slovenijo na dinamičnem nestohastičnem Hallovem modelu. MIMEO. 2006.
Raziskave v teku:	Steinbacher Matjaž, Steinbacher Mitja in Steinbacher Matej: *Game Theory in Politics: How to Beat Unions?*