

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

**VPLIV UPORABE GENERATORJA EKONOMSKIH SCENARIJEV NA
IZRAČUN ZAVAROVALNO-TEHNIČNIH REZERVACIJ V OKVIRU
SOLVENTNOSTI II**

Ljubljana, december 2015

ZALA ŠTENTA

IZJAVA O AVTORSTVU

Spodaj podpisana Zala Štenta, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, izjavljam, da sem avtorica magistrskega dela z naslovom Vpliv uporabe generatorja ekonomskih scenarijev na izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij v okviru Solventnosti II, pripravljenega v sodelovanju s svetovalcem izr. prof. dr. Alešem Berk Skokom.

Izrecno izjavljam, da v skladu z določili Zakona o avtorski in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami) dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

S svojim podpisom zagotavljam, da

- je predloženo besedilo rezultat izključno mojega lastnega raziskovalnega dela;
- je predloženo besedilo jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem
 - poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam v magistrskem delu, citirana oziroma navedena v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, in
 - pridobila vsa dovoljenja za uporabo avtorskih del, ki so v celoti (v pisni ali grafični obliki) uporabljena v tekstu, in sem to v besedilu tudi jasno zapisala;
- se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku (Ur. l. RS, št. 55/2008 s spremembami);
- se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predložene magistrskega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom.

V Ljubljani, dne _____

Podpis avtorice: _____

KAZALO

UVOD	1
1 SOLVENTNOST 2	3
1.1 Vrednotenje sredstev in obveznosti zavarovalnice v okviru S2	6
1.1.1 Zavarovalno-tehnične rezervacije	6
1.1.2 Najboljša ocena	7
1.1.2.1 Projekcija denarnih tokov	7
1.1.2.2 Tehnike izračuna najboljše ocene ZTR	7
1.1.3 Marža za tveganje	7
1.2 Izračun ZTR za zavarovalniške produkte	8
2 GENERATOR EKONOMSKIH SCENARIJEV	8
2.1 Priprava ESG za potrditev	10
2.2 Načrt uporabe ESG	11
3 IZBIRA FAKTORJEV TVEGANJA IN USTREZNIH MODELOV	12
3.1 Osnovne definicije	12
3.1.1 Stohastični proces in stohastična diferencialna enačba	13
3.1.2 Afine terminske strukture (angl. <i>affine term structure</i>)	14
3.1.3 Sprotna obrestna mera (angl. <i>spot interest rate</i>), terminska obrestna mera (angl. <i>forward interest rate</i>) in kratkoročna obrestna mera (angl. <i>short rate</i>)	14
3.2 Model kratkoročnih obrestnih mer	15
3.2.1 Rešitev HW diferencialne enačbe	16
3.2.2 Cena obveznice v HW modelu	17
3.2.3 Cena evropske opcije na obveznico v HW modelu	19
3.2.4 Zamenjava in opsijska zamenjava	20
3.2.5 Vrednotenje opsijske zamenjave v okviru HW modela	21
3.3 Kapitalski model	22
3.3.1 Black-Scholesov model	23
3.3.2 Obrestna mera v Black-Scholes modelu	24
3.3.3 Vrednotenje evropske nakupne opcije v BSHW modelu	24
3.4 Model nepremičnin	25
3.4.1 Trg nepremičnin	26
3.4.2 Metoda odglajevanja (angl. <i>unsmoothing method</i>)	26

4 OCENJEVANJE PARAMETROV MODELOV IN KORELACIJ MED FAKTORJI TVEGANJ	27
4.1 Model obrestnih mer	27
4.1.1 Termenska struktura obrestne mere	27
4.1.2 Parametra.....	29
4.2 Kapitalski model	30
4.3 Model nepremičnin	30
5 SIMULACIJA	31
5.1 Projekcija prihodnjih scenarijev obrestne mere	32
5.2 Projekcija prihodnjih scenarijev kapitala	35
5.3 Projekcija prihodnjih scenarijev nepremičnin.....	38
5.4 Primerjava rezultatov simulacij prihodnjih scenarijev zgornjih modelov	41
6 IZRAČUN ZTR ZA PRODUKTE	46
6.1 Naložbeno zavarovanje (investicija na en trg)	46
6.2 Naložbeno zavarovanje (investicija na več trgov)	49
6.2.1 Primerjava produktov glede na izbrani portfelj	55
SKLEP	56
LITERATURA IN VIRI	59

KAZALO SLIK

Slika 1: Stebri in streha S2	5
Slika 2: Bilanca stanja v okviru S1 in S2.....	6
Slika 3: Primer rezultata ESG	9
Slika 4: Diagram korakov uporabe tržno vzdržnega ESG za izračun ZTR zavarovalniških produktov	12
Slika 5: Ekstrapolirana termenska struktura netvegane obrestne mere s popravkom nestanovitnosti	28
Slika 6: Interpolirana krivulja na mesečni osnovi.....	29
Slika 7: Prihodnji scenariji gibanja obrestne mere.....	32
Slika 8: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja obrestne mere	33
Slika 9: Kvartili in škatle z brki za model obrestne mere	33
Slika 10: Prihodnji scenariji gibanja cene delnice	35
Slika 11: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja cene delnice	36
Slika 12: Kvartili in škatle z brki za kapitalski model	36
Slika 13: Prihodnji scenariji gibanja cene nepremičnine	38
Slika 14: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja cene nepremičnin.....	39

Slika 15: Kvartili in škatle z brki za nepremičninski model	39
Slika 16: Primerjava normiranih povprečnih vrednosti scenarijev za BSHW1 in BSHW2	42
Slika 17: Primerjava bodočih scenarijev za model HW (zgoraj), model BSHW1 (sredina) in model BSHW2 (spodaj).....	43
Slika 18: Medkvartilni razmik za BSHW1 in BSHW2.....	44
Slika 19: Primerjava razpršenosti podatkov pri vseh modelih	45
Slika 20: Povprečna vrednost ZTR v času	48
Slika 21: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij.....	48
Slika 22: Povprečna vrednost ZTR v času za konzervativni portfelj	51
Slika 23: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za konzervativni portfelj	51
Slika 24: Povprečna vrednost ZTR v času za uravnoteženi portfelj	52
Slika 25: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za uravnoteženi portfelj.....	53
Slika 26: Povprečna vrednost ZTR v času za dinamični portfelj	54
Slika 27: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za dinamični portfelj	54
Slika 28: Najboljša ocena ZTR za konzervativni, uravnoteženi in dinamični portfelj	55
Slika 29: Najboljša ocena ZTR za konzervativni, uravnoteženi in dinamični portfelj za obdobje sedmih let.....	56

KAZALO TABEL

Tabela 1: Razlike med S1 in S2	4
Tabela 2: Parametra HW modela obrestnih mer	29
Tabela 3: Parametri BSHW kapitalskega modela	30
Tabela 4: Parametri BSHW nepremičninskega modela	30
Tabela 5: Parametri za generiranje projekcij z ESG	31
Tabela 6: Variančno-kovariančna matrika	31
Tabela 7: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo obrestnih mer	34
Tabela 8: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo cen delnic	37
Tabela 9: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo cen nepremičnin	40
Tabela 10: Povprečne vrednosti in normirane povprečne vrednosti za scenarije vseh treh modelov	41
Tabela 11: Kvartili porazdelitev ZTR v času	47
Tabela 12: Lastnosti treh portfeljev	50
Tabela 13: Kvartili porazdelitev ZTR v času za konzervativni portfelj.....	50
Tabela 14: Kvartili porazdelitev ZTR v času za uravnoteženi portfelj	52
Tabela 15: Kvartili porazdelitev ZTR v času za dinamični portfelj	53
Tabela 16: Vrednosti najboljših ocen ZTR za produkt glede na izbiro portfelja	55

UVOD

Namen zavarovalnic in pozavarovalnic je prevzeti tveganja strank, ki z njimi sklenejo zavarovalno oziroma pozavarovalno pogodbo, in jih nato čimbolj razpršiti. Zaradi finančne krize in slabitve gospodarstva so finančne inštitucije primorane sprejemati različne ukrepe, s katerimi se želijo obvarovati pred insolventnostjo in nelikvidnostjo. V Evropski uniji se za zavarovalniško panogo uvaja direktiva **Solventnost 2** (angl. *Solvency 2*, v nadaljevanju S2), ki bo predvidoma sprejeta 1. januarja 2016, ko bo nadomestila sedanjo Solventnost 1 (v nadaljevanju S1). Njen cilj je povečanje zaščite zavarovancev. Pravila S2, ki jih bomo v magistrskem delu upoštevali, so zbrana v tehnične specifikacije za kvantitativno analizo QIS5. Slednje bodo temeljna literatura magistrskega dela.

S2 delimo na tri stebre. S prvim je definirana zadostna količina kapitala, ki ga mora imeti zavarovalnica. Pri tem sta uvedena nova pojma – **zahtevani solventnostni kapital** (angl. *solvency capital requirement*, v nadaljevanju SCR) in **zahtevani minimalni kapital** (angl. *minimal capital requirement*, v nadaljevanju MCR). Drugi steber vsebuje zahteve za dobro vodenje in obvladovanje tveganj ter aktivnosti nadzornikov in regulatorjev. Zadnji steber prinaša zahteve glede preglednosti poslovanja zavarovalnice.

V skladu z določili S2 mora zavarovalnica vrednotenje obveznosti in sredstev opraviti na tržno vzdržen način (angl. *market-consistent approach*). To pomeni, da morajo biti obveznosti in sredstva zavarovalnice vrednotene s takim zneskom, za katerega bi jih lahko zamenjali oziroma prenesli na drugo stranko. Temu znesku pravimo **zavarovalno-tehnične rezervacije** (angl. *technical provision*, v nadaljevanju ZTR), ki morajo biti enake vsoti **najboljše ocene** (angl. *best estimate*) in **marži za tveganje** (angl. *risk margin*).

Za izračun ZTR moramo svoje obveznosti najprej razdeliti glede na tipe tveganj, ki lahko vplivajo na njih. Vrednost najboljše ocene ZTR je enaka matematičnemu upanju vseh prihodnjih denarnih tokov.

Cilj magistrskega dela je izračun ZTR za (enostavni) zavarovalniški produkt (v nadaljevanju produkt) z garantirano stopnjo donosa po pravilih S2. Premijo, ki jo zavarovalnica prejme od prodaje produkta, investira v trg obveznic, delniški trg in nepremičninski trg. Za izračun ZTR moramo pridobiti vse možne scenarije projekcij prihodnjih denarnih tokov portfelja, v katerega premijo investiramo, in izračunati njihovo matematično upanje.

Orodje, ki ga uporabimo za pripravo možnih naborov scenarijev, je **tržno vzdržni generator ekonomskih scenarijev** (angl. *market consistent economic scenario generator*, v nadaljevanju ESG). Ker želimo ZTR izračunati za produkt, katerega premijo investiramo v portfelj, ki ga sestavljajo obveznice, delnice in nepremičnine, moramo projekcije prihodnjih denarnih tokov pripraviti za vsak trg posebej – uporabiti moramo ustrezne modele, s katerimi lahko opišemo gibanje faktorjev tveganj.

Model obrestnih mer je temelj vsem ostalim, saj obrestna mera vpliva na vse trge, ki sestavljajo portfelj. V magistrskem delu bomo za model obrestnih mer uporabili različico Hull-Whitove razširitve Vasičkovega modela (1977) iz leta 1993 (v nadaljevanju HW). Le-ta gibanje stohastične obrestne mere opiše s stohastično diferencialno enačbo, ki ji pravimo proces vračanja k povprečju (angl. *mean-reverting process*). Model nam da konsistentne rezultate pri vrednotenju finančnih instrumentov ter omogoča popolno prileganje strukturi obrestnih mer. V okviru HW bomo razvili formulo za vrednotenje opcijske zamenjave.

Kapitalski model, ki ga bomo uporabili za gibanje cene delnice, je Black-Scholesov (1973), pri čemer bo predpostavka o konstantnosti obrestne mere sproščena. Rešitev bo združila modela za gibanje cene delnice in stohastično obrestno mero. Ker za slednjega uporabimo HW, združena modela imenujemo Black-Scholes-Hull-Whitov model (v nadaljevanju BSHW). V njegovem okviru bomo razvili enačbo za vrednotenje nakupne evropske opcije na delnico.

Za opis nepremičninskega modela bomo (tako kot za kapitalskega) uporabili BSHW. Za razliko od trgovanja na delniškem trgu in trgu obveznic je trgovanje na trgu nepremičnin redkejše in v večini primerov poteka med dvema fizičnima osebama. Posledično so informacije o cenah nepremičnin slabe, zato bomo za namen modeliranja uporabili vrednosti cenitve nepremičnin. Tudi pri kalibraciji tega modela imamo spremembo: opravili jo bomo z uporabo zgodovinskih podatkov nestanovitnosti cenitev nepremičnin. Le-ta je s strani S2 odobrena v primeru, ko za finančni instrument likvidni trg ne obstaja.

Za vsak model s kalibracijo na tržne cene oz. zgodovinske podatke bomo pridobili ustrezne parametre modelov in nato ob upoštevanju korelacij med njimi pripravili projekcije prihodnjih denarnih tokov in izračunali matematično upanje. Ob upoštevanju lastnosti produkta (višina zagotovljene stopnje donosa, deleži sredstev v portfelju) bomo nato pripravili izračun ZTR.

Magistrsko delo bo razdeljeno na dva dela, teoretičnega in empiričnega. V prvem bodo predstavljene vse potrebne definicije in formule za izbrane modele, v drugem pa bosta z uporabo podatkov izvedeni njihova kalibracija ter projekcija prihodnjih denarnih tokov. Zatem bo sledil izračun ZTR za produkte.

Tržne cene za modele bodo prevzete iz baze Bloomberg, uporabljeni zgodovinski podatki pa iz baz ustreznih državnih institucij. V empiričnem delu bomo uporabili računalniško orodje R z vgrajenimi primernimi knjižnicami.

Vsebina poglavij magistrskega dela bo torej naslednja: v prvem bodo predstavljene S2 in zahteve za način izračuna ZTR na tržno vzdržan način, v drugem bo predstavljeno ustrezno orodje, ki bo uporabljeno za tržno vzdržno vrednotenje (tržno vzdržni ESG). Načrt njegove uporabe bo predmet tretjega poglavja. V četrtem bodo nato pripravljeni vsi modeli za opis gibanja faktorjev tveganj in izpeljane formule za vrednosti izbranih finančnih instrumentov. V petem in šestem poglavju bosta prikazana ocenjevanje parametrov modela ter simulacija

prihodnjih denarnih tokov. V zaključnem, sedmem poglavju, bo nato izračunan ZTR za izbrani produkt.

1 SOLVENTNOST 2

Zavarovanje je tip upravljanja s tveganji, pri katerem zavarovana oseba možne finančne izgube v zameno za vnaprej določeno denarno vsoto (premijo) prenese zavarovalcu. Fizične ali pravne osebe, ki se želijo zavarovati pred finančnimi izgubami, imajo na voljo veliko oblik zavarovanj. Tako se lahko družina zavaruje pred izpadom dohodka zaradi smrti družinskega člana ali sklene zdravstveno zavarovanje, podjetje se lahko zavaruje pred izpadom dobička, nepremičnina je lahko zavarovana pred poplavo ali požarom ipd. (Pareto, 2015).

V Sloveniji področje zavarovalništva ureja Zakon o zavarovalništvu (Ur. l. RS, št. 99/10-UPB7, v nadaljevanju ZZavar), kjer je zavarovalnica definirana kot pravna oseba, ki je od Agencije za zavarovalni nadzor (v nadaljevanju AZN) dobila dovoljenje za opravljanje zavarovalnih poslov. Mednje sodita sklepanje in izvrševanje pogodb o premoženjskem in življenjskem zavarovanju ali pozavarovanju, pri čemer je obvezno socialno zavarovanje izvzeto. Glede na glavne nevarnosti, ki jih krijejo, ZZavar zavarovanja razvršča na zavarovalne vrste, zavarovalnice pa ponujajo različne produkte, ki vključujejo eno ali več izmed njih.

V skladu s trenutno veljavno regulativo o solventnosti v zavarovalnicah (S1) se kapitalske zahteve določajo po enostavnih enačbah, kjer so zajete predvsem vrednosti premije in rezerv, niso pa zajeta tveganja, ki lahko zelo vplivajo na višino kapitala zavarovalnice (denimo tveganja v povezavi z investicijami v sredstva, izpostavljenost katastrofičnim dogodkom ipd.). O slabostih take ureditve lahko preberemo tudi na spletni strani AZN (2015): »Obstoječi evropski zavarovalni predpisi (Solventnost I), vpeljeni v zgodnjih sedemdesetih letih 20. stoletja, predstavljajo t.i. minimalno harmonizacijo in s tem dopuščajo možnosti odstopanj od predpisov, kar je vodilo v različne zavarovalne zakonodajne rešitve in prakse v državah članicah EU. Solventnost I je bila tudi prvenstveno osredotočena na kapitalsko ustreznost zavarovalnic in ni vključevala zahtev glede upravljanja tveganj in upravljanja v (po)zavarovalnicah.« To je nekatere zavarovalnice vzpodbudilo, da so razvile lastne solventnostne modele, ki so upravljanje tveganj zajemali. Ker v EU obstaja želja, da bi vse države članice sledile enotnemu solventnostnemu sistemu, ki bo upošteval profile tveganj, so pričeli pripravljati novo regulativo, imenovano S2 (Rufelt, 2011, str. 5).

Razlike med S1 in S2 so podrobneje prikazane v Tabeli 1.

V zadnjih letih se torej v evropsko zavarovalništvo zaradi nove direktive S2, ki bo nadomestila za sedaj še veljavno S1, vpeljujejo velike spremembe, katerih cilj je uporaba novih tehnik za varno poslovanje zavarovalnic in pozavarovalnic v Evropski uniji (v nadaljevanju EU). Direktiva S2 je bila novembra 2009 potrjena s strani Evropskega parlamenta in Sveta Evropske unije, ki je decembra istega leta določil, da jo morajo zavarovalnice vpeljati do 1. januarja 2016 (Solvency II, 2015).

Tabela 1: Razlike med S1 in S2

	S1	S2
Vrednotenje sredstev	Tržna/računovodska vrednost.	Tržno vzdržno.
Vrednotenje obveznosti	Tržna/računovodska vrednost.	Tržno vzdržno.
Razpoložljivi kapital	Delno priznan.	Temelji na ekonomski vzdržnosti za absorpcijo šokov.
Diverzifikacija	Ne.	Da.
Zmanjševanje tveganj	Delno.	Da.
Kontrolne stopnje solventnosti	Le ena.	SCR in MCR.
Kalibracija	Subjektivno!	Temelji na ekonomskem stanju – uporaba tržnih/zgodovinskih vrednosti. Bolj objektivno!

Vir: R. Care & J. Fenech, *Solvency II: Challenges and industry impact (handout)*, 2006.

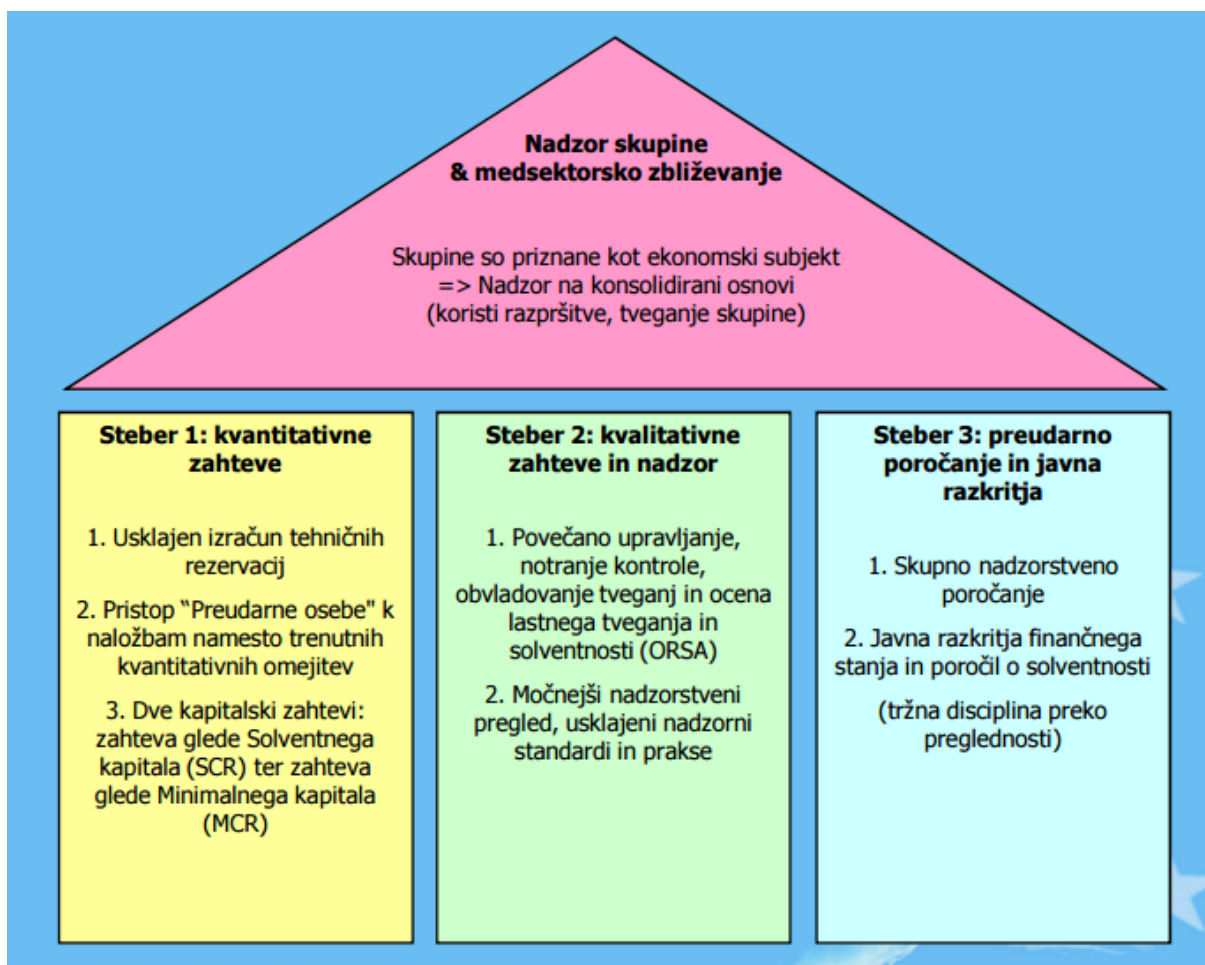
Poglavitni cilji nove direktive so (What is Solvency II?, 2015):

- **Boljše varstvo potrošnikov.** S2 bo zagotovila enotno in višjo raven varstva zavarovancev po vsej EU, ki bodo tako bolj zaupali zavarovalniškemu produktu.
- **Modernizacija nadzora.** Nadzorniki se bodo osredotočili na profile tveganj in kakovost upravljanja le-teh.
- **Povezanost trga EU zaradi usklajenosti nadzornega režima.**
- **Povečanje mednarodne konkurenčnosti zavarovalnic v EU.**

Zahteve S2 vsebinsko delimo na tri področja oz. **stebre**. V okviru prvega je definirana zadostna količina lastnega kapitala (angl. *own funds*), ki ga mora imeti zavarovalnica. Drugi prinaša zahteve za dobro vodenje in obvladovanje tveganj ter aktivnosti nadzornikov in regulatorjev. Z zadnjim, tretjim stebrom pa so urejene zahteve glede preglednosti poslovanja

zavarovalnice (Solvency II Overview, 2015). Razdelitev S2 na stebre prikazuje tudi Slika 1, kjer so vsebine stebrov še bolj podrobno navedene.

Slika 1: Stebri in streha S2

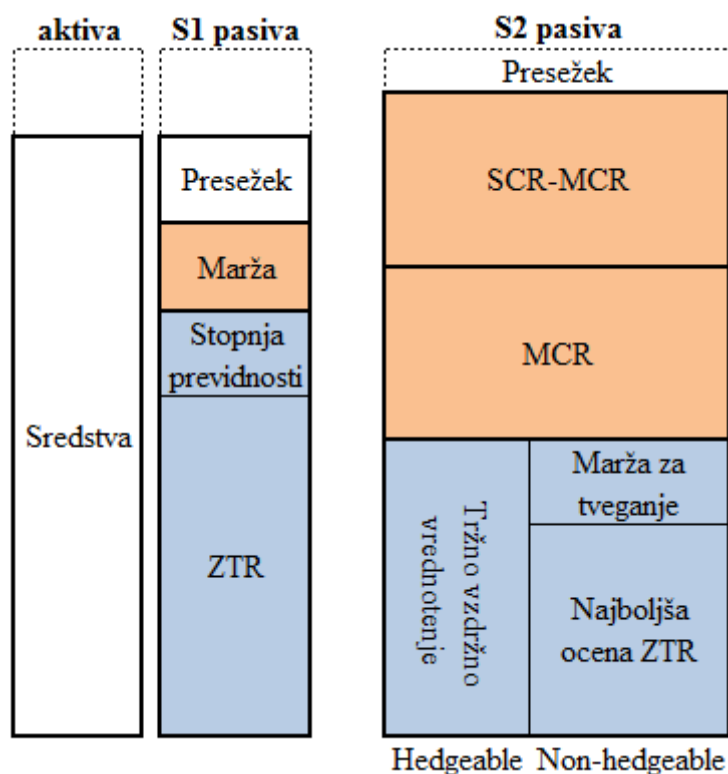


Vir: K. van Hulle, Uvajanje direktive Solventnosti II v Evropi, 2011.

Ob definiciji zadostne količine kapitala sta v prvem stebru opredeljeni dve vrsti kapitala, SCR in MCR. SCR izračunamo z uporabo standardne formule ali z uporabo internega modela, ki je potrjen s strani regulatorja. MCR izračunamo kot linearno funkcijo določenih spremenljivk. Njegova vrednost ne sme biti nižja od 25% oziroma višja od 45% vrednosti SCR. S prvim stebrom S2 so definirani tudi standardi za vrednotenje sredstev in obveznosti zavarovalnice (What is Solvency II?, 2015).

Razdelitev aktivne in pasivne strani bilance stanja v zavarovalnici po S1 in S2 prikazuje Slika 2, kjer je razvidna razlika na strani kapitala in obveznosti. Po S2 je pasivna stran bolj razdelana – vpeljene so nove vrednosti, ki jih po S1 ne poznamo (SCR, MCR, marža za tveganje, najboljša ocena ZTR ipd.).

Slika 2: Bilanca stanja v okviru S1 in S2



Vir: Solvency II Update, 2010.

1.1 Vrednotenje sredstev in obveznosti zavarovalnice v okviru S2

S2 določa, da mora biti vrednotenje obveznosti in sredstev zavarovalnice opravljeno na tržno vzdržen način in da mora pri tem uporabljen pristop z vidika tveganj. To pomeni, da morajo biti sredstva in obveznosti zavarovalnice vrednotena z zneskom, po katerem bi jih lahko zamenjali oz. prenesli na drugo stranko (EIOPA, 2014b, str. 6).

Pri vrednotenju sredstev in obveznosti zavarovalnice moramo upoštevati naslednjo prednostno lestvico: (1) Če je le mogoče, za vrednotenje uporabimo cene enakih ali podobnih (z upoštevanjem popravkov) sredstev in obveznosti s trga s pogostimi transakcijami. (2) Če take cene niso na razpolago, moramo uporabiti modele vrednotenja, ki jih kalibriramo na tržne vrednosti sredstev oz. obveznosti. Prvo metodologijo v angleškem jeziku imenujemo *mark-to-market*, drugo pa *mark-to-model* (EIOPA, 2014b, str. 7).

1.1.1 Zavarovalno-tehnične rezervacije

Znesek, ki ga mora zavarovalnica plačati, če želi svoje obveznosti prenesti na drugo stranko, imenujemo ZTR. Z drugimi besedami: zavarovalnica mora oblikovati ZTR, da lahko izpolni svoje obveznosti do strank oziroma zavarovancev, pri čemer bi moral biti njihov znesek enak vsoti najboljše ocene in marži za tveganje. Kljub temu, da je znesek ZTR vsota obojega, ga moramo v določenih primerih vrednotiti kot celoto. Pred njihovim izračunom mora

zavarovalnica svoje obveznosti razdeliti na oblike tveganj oz. zavarovalne vrste in ZTR izračunati za vsako skupino posebej (EIOPA, 2014b, str. 46).

1.1.2 Najboljša ocena

Ko obveznosti zavarovalnice razdelimo na skupine glede na faktorje tveganj, se lotimo izračuna najboljše ocene ZTR. Vrednost le-te ustreza z verjetnostmi uteženemu povprečju prihodnjih denarnih tokov oz. matematičnemu upanju (EIOPA, 2014b, str. 51).

1.1.2.1 Projekcija denarnih tokov

Za izračun najboljše ocene moramo pridobiti vse možne scenarije projekcije prihodnjih denarnih tokov in nato izračunati njihovo matematično upanje. Najboljša ocena mora biti izračunana v kosmatih zneskih, brez odštevanja pozavarovalnih deležev; za te je treba najboljšo oceno izračunati ločeno. Pri projekciji moramo upoštevati bodočo inflacijo, pri čemer se za vrsto inflacije, ki jo bomo uporabili (indeks plač ali indeks cen), odločimo glede na tip denarnih tokov. Prav tako moramo pri projekciji upoštevati časovne strukture netveganih obrestnih mer (EIOPA, 2014b, str. 52, 53).

1.1.2.2 Tehnike izračuna najboljše ocene ZTR

Na voljo imamo več metod izračuna najboljše ocene ZTR: tehniko simulacije, analitično tehniko, deterministično tehniko ter tehniko, ki kombinira vse naštetе. V nadaljevanju bo podrobneje predstavljena **tehnika simulacije**, ki bo nato tudi uporabljena (EIOPA, 2014a, str. 5-8).

O tehniki simulacije govorimo takrat, ko se pri simulaciji vseh scenarijev bodočih denarnih tokov odločimo samo za tiste, ki so reprezentativni. Simulacijo lahko naredimo na več načinov: poznamo Monte Carlo simulacijo, kljukčevo metodo (angl. *bootstrap method*), simulacijo škod nad določeno mejo in Bayezov pristop. Pri Monte Carlo simulaciji vrednost obveznosti izračunamo iz velikega nabora scenarijev, pri čemer za vsakega izmed njih spremenimo eno ali več predpostavk. S takim modelom dobimo porazdelitev možnih rezultatov, s pomočjo katere lahko nato izračunamo matematično upanje. Metoda je primerna za uporabo pri življenjskih zavarovalniških (ali pozavarovalniških) produktih, ki vsebujejo izvedene finančne inštrumente, saj nam deterministične in analitične metode zaradi svoje narave ne dajo dovolj dobrih rezultatov (EIOPA, 2014a, str. 6).

1.1.3 Marža za tveganje

Marža za tveganje je del ZTR, s katerim poskrbimo, da je njihova vrednost enaka vrednosti, ki jo zavarovalnica potrebuje za izpolnitev vseh obveznosti. Maržo za tveganje lahko opredelimo kot strošek, ki ga ima zavarovalnica zaradi zagotavljanja zadostnih lastnih sredstev oz. zahtevanega solventnostnega kapitala (EIOPA, 2014b, str. 85, 86).

1.2 Izračun ZTR za zavarovalniške produkte

Pri izračunu najboljše ocene ZTR za produkte moramo upoštevati dvoje: (1) Zajeti moramo vse finančne garancije in opcije, ki jih produkti vsebujejo, in (2) upoštevati vse faktorje tveganj, ki vplivajo na odločitev imetnika police glede izvršitve opcije oziroma pogodbe (EIOPA, 2014b, str. 67).

Opcija daje lastniku (v našem primeru imetniku police) pravico, da jo izvrši po vnaprej določenih pogojih, s finančno garancijo pa prenesemo izgubo drugi stranki oz. zaradi razvoja vnaprej definiranih spremenljivk pridobimo dodaten zaslužek. Za razliko od opcij je pri garancijah razvoj dogodkov neodvisen od odločitve lastnika polic (EIOPA, 2014b, str. 67).

Cilj magistrskega dela je izračun ZTR za produkt na način, kot ga zahteva S2. V ta namen bomo uporabili produkte, ki stranki garantirajo vnaprej definirano stopnjo donosa. Pri prodaji produkta zavarovalnica prejme premijo, ki jo investira v portfelj s sredstvi iz različnih trgov. Lastnost produkta je naslednja: vsako leto preverimo, kolikšen je donos portfelja v primerjavi z garantirano stopnjo donosa produkta. Če je donos portfelja večji od zagotovljene stopnje donosa, lastnik produkta prejme presežek, preostali del pa pripada zavarovalnici. V nasprotnem primeru, ko je donos portfelja nižji od zagotovljene stopnje donosa, mora zavarovalnica poskrbeti, da lastniku produkta izplača toliko, kolikor znaša zagotovljeni donos in ob tem manjkajoči del zagotoviti sama.

V naslednjih poglavjih bodo predstavljeni vsi potrebni koraki za izračun ZTR za opisane produkte. Izračun ZTR za različne stopnje zagotovljene donosnosti in različne sestave portfelja bo prikazan v poglavju 5.4.

2 GENERATOR EKONOMSKIH SCENARIJEV

Direktiva S2 od zavarovalnic zahteva, da finančne pogodbe in opcije, vsebovane v produktih, vrednotijo na tržno vzdržen način. Za to imajo na voljo velik nabor možnih scenarijev, iz katerih izračunajo vse svoje obveznosti. Eno od orodji, ki uporablja to tehniko, je ESG (Central bank of Ireland, 2011, str. 3).

Z ESG lahko pripravimo projekcije za prihodnje denarne tokove več faktorjev tveganj, ki vplivajo na obveznosti zavarovalnice. Faktorji, ki jih lahko v ESG zajamemo, so (Worthington, 2011):

- obrestna mera,
- tveganje kreditnega razpona (angl. *credit spread*),
- kapitalski donosi,
- donosi nepremičnin,
- donosi depozitov,

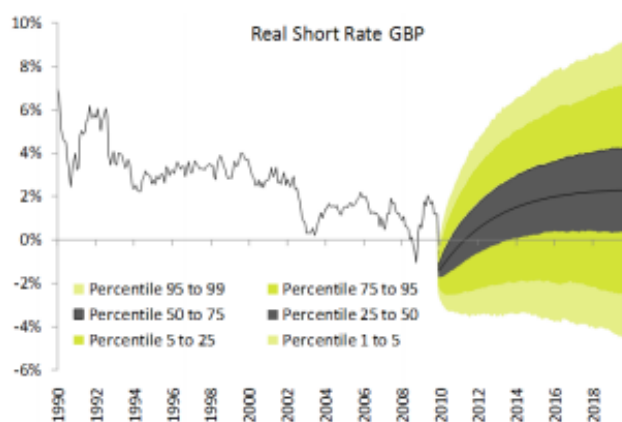
- valutni tečaji,
- inflacija itd.

Z ESG možen nabor scenarijev kalibriramo na finančne instrumente s trga, ki najboljše opišejo obveznosti zavarovalnice. Ko lahko najdemo ustrezen finančni instrument iz likvidnega kapitalskega trga, je kalibracijo zelo enostavno izvesti, v nasprotnem primeru pa je tržno vzdržno vrednotenje težko doseči (Central bank of Ireland, 2011, str. 3).

Težave pri tržno vzdržnem vrednotenju se pojavijo predvsem pri dolgoročnih zavarovalnih produktih, saj je težko najti dolgoročni finančni instrument (za ročnosti daljše od petih let), za katerega lahko trdimo, da je dovolj likviden (Central bank of Ireland, 2011, str. 3).

Z ESG dobimo časovne vrste za vse faktorje tveganj, ki smo jih vključili v izračun, in za vse možne scenarije (Moody's Analytics, 2013, str. 6). Če smo npr. uporabili 5 faktorjev tveganja in nabor 1000 scenarijev za prihodnjih 10 let, je rezultat ESG 5000 časovnih vrst za obdobje 10 let. Ena od možnosti rezultata ESG za en faktor tveganja je predstavljena na Sliki 3, ki prikazuje gibanje kratkoročne obrestne mere od leta 1990 do 2010 in projekcijo prihodnjih gibanj za obdobje 20 let. Slednja so ponazorjena s srednjo vrednostjo in kvartili porazdelitve vseh možnih scenarijev.

Slika 3: Primer rezultata ESG



Vir: Moody's Analytics, Economic Scenario Generator, 2013.

ESG je lahko dveh vrst: realni ESG (angl. *real-word economic scenario generator*) in tržno vzdržni ESG (angl. *market consistent economic scenario generator*). Z realnim ESG pripravimo projekcije faktorjev tveganj, katerih porazdelitve so skladne s preteklimi porazdelitvami le-teh. Ta vrsta ESG se uporablja predvsem za vrednotenje SCR (Maudiki, 2014, str. 1).

Tržno vzdržni ESG, ki bo uporabljen tudi v nadaljevanju, je ena od možnosti za izračun najboljše ocene vrednosti ZTR. S tržno vzdržnim ESG izdelamo prihodnje projekcije faktorjev tveganj, ki so skladne s tržnimi cenami, opazovanimi na dan vrednotenja. To

pomeni, da pri tržno vzdržnih simulacijah izdelamo projekcije faktorjev tveganj pod tveganju nevtralno verjetnostno mero (angl. *risk-neutral probability measure*), medtem ko pri realnem ESG uporabimo zgodovinske verjetnosti (Maudiki, 2014, str. 1).

2.1 Priprava ESG za potrditev

Regulator od zavarovalnic, ki želijo za izračun SCR delno ali v celoti uporabiti interni model, zahteva, da opravijo sedem testov; šele nato je tak model potrjen kot ustrezen. Testi, ki jih mora zavarovalnica opraviti, so naslednji (CEIOPS, 2009):

- uporabnost,
- statistična kakovost,
- kalibracija,
- pripis dobička in izgube,
- validacija,
- dokumentacija,
- zunanji modeli.

Naj v nadaljevanju podrobneje predstavimo vsakega izmed njih in pojasnimo, kako bodo vplivali na uporabo ESG kot del internega modela.

Uporabnost. Zavarovalnice in pozavarovalnice morajo dokazati, da se njihov interni model pogosto rabi in da ima pomembno vlogo v sistemu upravljanja: upravljanje s tveganji, sprejemanje odločitev, določanje ekonomskih in solventnostnih ocen ter alokacij. Zagotoviti morajo, da interni model odraža ves profil njihovih tveganj (Knava, 2009, str. 1).

Statistična kakovost. Če (po)zavarovalnica v internem modelu uporabi ESG, mora dokazati, da so podatki, uporabljeni za kalibracijo, primerni in dovolj natančni. Pri uporabi tržno vzdržnega ESG (njegov rezultat so tržne cene) mora biti zavarovalnica previdna pri kalibraciji sredstev, na katera ni pisan noben izveden finančni inštrument. Previdna mora biti tudi, če takšen inštrument obstaja, pa ni trgovan na dovolj likvidnem trgu. V takih primerih mora biti uporaba izbranih podatkov jasno razložena in dokumentirana (Knava, 2009, str. 2).

Kalibracija. Oceniti želimo, ali ima SCR, ki ga pridobimo iz internega modela, ustrezno stopnjo preudarnosti (angl. *level of prudence*). Pri tem imamo dve možnosti: (1) Za mero tveganja izberemo 99,5% VaR in časovni interval 1 leto. (2) Če standardna mera tveganj in časovni interval nista primerna, lahko appetite zavarovalnic po tveganju izrazimo z drugimi merami (npr. Tail VaR), drugimi verjetnostmi (npr. 99,75%) in drugimi časovnimi intervali (npr. do 25 let). Zavarovalnice se lahko za drugo možnost odločijo, če s tem imetnikom police zagotavljajo enako stopnjo varnosti kot s prvo (CEIOPS, 2009, str. 127, 128).

Pripis dobička in izgube. (Po)zavarovalnice morajo vsaj enkrat letno razkriti vzroke in vire za dobičke in izgube posameznih večjih poslovnih enot in jih pojasniti s tveganji, zajetimi v internem modelu (CEIOPS, 2009, str. 139).

Validacija. (Po)zavarovalnice morajo imeti regulirani cikel za validacijo internega modela, ki vsebuje spremljanje izvedbe, pregled ustreznosti in testiranje njegovih rezultatov. S testom validacije (po)zavarovalnice regulatorju pokažejo, da so izračunane kapitalske zahteve primerne (CEIOPS, 2009, str. 143).

Dokumentacija. Za potrditev internega modela je potrebno podrobno opisati in razložiti izbrani ESG, teorijo modelov in kalibracijo, pri čemer se je treba zavedati, da tudi najzahtevnejši modeli ne morejo v celoti pokriti obnašanja trga. Zato moramo pri popisu postopka navesti omejitve pri njihovi uporabi in zapisati, zakaj alternativne rešitve niso primerne (Knava, 2009, str. 3).

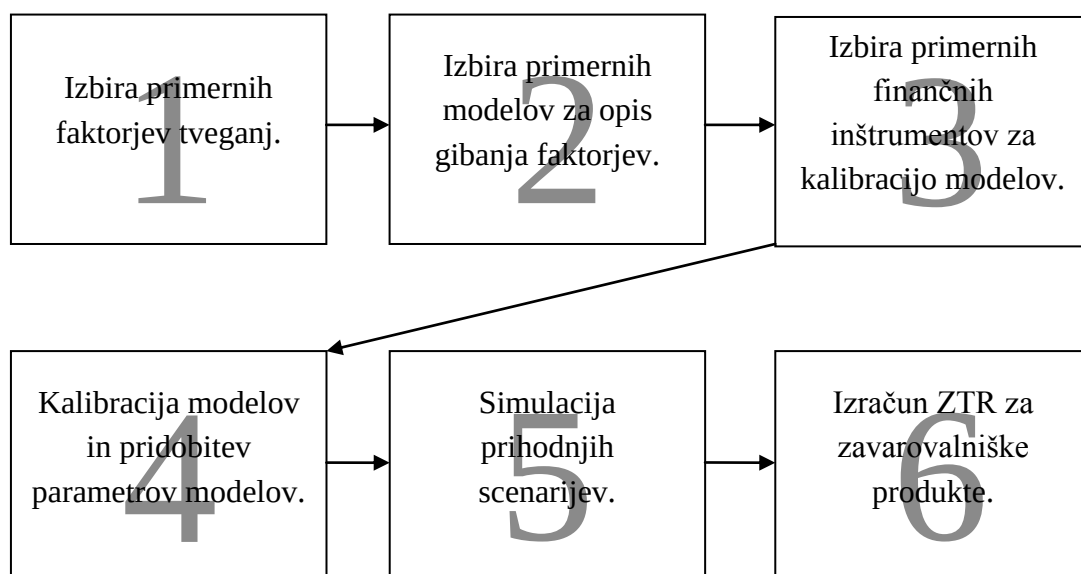
Zunanji modeli. Če (po)zavarovalnica za sestavo ESG izbere zunanjega izvajalca, mora zadostiti zahtevam, ki jih S2 postavlja glede zunanjih modelov. Čeprav ima uporaba zunanjega modela (kot del internega) lahko prednosti, pa njegova uporaba prinaša tudi dodatne izzive (razumevanje eksternega modela, dokumentacija prilagoditev eksternega modela ipd.) (Knava, 2009, str. 3).

2.2 Načrt uporabe ESG

Po izbiri primernega orodja za vrednotenje ZTR produkta, ESG, bo ZTR za produkte izračunan v šestih korakih (njihova vsebina je prikazana na Sliki 4). Le-ti sovpadajo z zahtevami S2.

Izbira primernih faktorjev tveganj, izbira primernih modelov za opis njihovih gibanj in izbira primernih finančnih instrumentov za njihovo kalibracijo (prvi, drugi in tretji korak) bodo obravnavani v 4. poglavju. Četrty korak, kalibracija modelov in pridobitev parametrov modelov, bo predstavljen v 4., simulacija prihodnjih scenarijev, ki je vsebina petega koraka, pa v 5. poglavju. Zaključni korak, kjer izračunamo ZTR za produkte, bo obsegal 5.4. poglavje.

Slika 4: Diagram korakov uporabe tržno vzdržnega ESG za izračun ZTR zavarovalniških produktov



3 IZBIRA FAKTORJEV TVEGANJA IN USTREZNIH MODELOV

Ker tipičen portfelj zavarovalnice sestavljajo **obveznice**, **delnice** in **nepremičnine**, bomo za namen modeliranja uporabili te tri faktorje tveganj (Djehiche & Hörfelt, 2004, str. 4).

Ker je potrebno prihodnje denarne tokove ustrezno popraviti za inflacijo (EIOPA, 2014b, str. 53), jih bomo pred izračunom ZTR za produkte tudi valorizirali. Pri tem modela za projekcijo prihodnje inflacije ne bomo uporabili.

Kot vidimo, ESG scenarijev v pričujočem magistrskem delu zajame le faktorje tveganj, ki izhajajo iz negotovosti prihodnjih denarnih tokov zaradi tržne vrednosti. Osredotoča se namreč le na tveganja, ki izhajajo iz sredstev in obveznosti zavarovalniškega portfelja.

Zavarovalnico lahko poleg tveganj zaradi vrednosti sredstev in obveznosti pestijo tudi druge oblike tveganj. Izpostavljena je tudi mortalitetnemu tveganju (angl. *mortality risk*), tveganju večjih prekinitev polic (angl. *surrender risk*), tveganju večjih odpovedi polic (angl. *lapses risk*), pozavarovalnemu tveganju (angl. *reinsurance risk*) ipd. (Djehiche & Hörfelt, 2004, str. 2).

3.1 Osnovne definicije

Za potrebe razumevanja vsebine v poglavjih z modeli faktorjev tveganj naj najprej predstavimo nekatere temeljne definicije s področja časovnih vrst in stohastičnih procesov. Definirali bomo tudi pojma terminske in sprotne obrestne mere, ostali pojmi pa bodo definirani sproti, ob njihovi uporabi.

3.1.1 Stohastični proces in stohastična diferencialna enačba

Gibanje cen sredstev si lahko predstavljamo kot zaporedje slučajnih spremenljivk v času oziroma kot časovno vrsto. To pomeni, da jih modeliramo kot stohastične procese v zveznem času in pri tem uporabimo difuzijske procese in stohastične diferencialne enačbe (Björk, 2009, str. 40).

Kot pojasni Björk (2009, str. 40-42), je **stohastični proces** X difuzijski, če lahko njegovo dinamiko aproksimiramo s **stohastično diferencialno enačbo** (v nadaljevanju SDE) naslednje oblike:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t). \quad (1)$$

Pri tem je $Z(t)$ normalno porazdeljen člen nestanovitnosti (angl. *volatility*), ki je neodvisen od vsega, kar se je zgodilo pred časom t . Enačba (1) pravi, da proces X v intervalu $[t, t + \Delta t]$ usmerjata dva ločena člena, ki sta deterministični funkciji:

- lokalna deterministična hitrost $\mu(t, X(t))$, ki ga imenujemo prirast (angl. *drift*), in
- Gaussov člen nestanovitnosti $\sigma(t, X(t))$, ki ga imenujemo difuzijski člen (angl. *diffusion*).

Če želimo modelirati Gaussov člen nestanovitnosti, moramo vpeljati pojem **Wienerjevega procesa**. Stohastični proces $W(t)$ imenujemo Wienerjev proces, če ima naslednje lastnosti:

- $W(0) = 0$,
- $W(t)$ je zvezna funkcija spremenljivke t ,
- W ima neodvisne in normalno porazdeljene skoke: Naj bo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ in $Y_1 = W(t_1) - W(t_0)$, $Y_2 = W(t_2) - W(t_1)$, ... $Y_n = W(t_n) - W(t_{n-1})$, potem so $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ neodvisni in normalno porazdeljeni z matematičnim upanjem $E(Y_j) = 0$ in varianco $\text{var}(Y_j) = t_j - t_{j-1}$ za vsak j .

Če uporabimo Wienerjev proces, lahko enačbo (1) zapišemo kot stohastično diferencialno enačbo:

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

To enačbo imenujemo geometrično Brownovo gibanje.

Če SDE v (2) rešimo, dobimo:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \quad (3)$$

kjer je prvi integral običajen Riemannov, drugi pa stohastični, ki ga lahko rešimo z uporabo Itôve formule, ki jo Wilmott (2007) zapiše kot:

$$dF = \frac{dF}{dX} dX + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dX^2} dt, \quad (4)$$

pri čemer je $F(X(t))$ funkcija stohastičnega procesa $X(t)$. Za natančnejšo razlago glej Wilmott (2007), Shreve (1996) ali Björk (2009).

3.1.2 Afine terminske strukture (angl. *affine term structure*)

Če lahko terminsko strukturo:

$$\{p(t, T); 0 \leq t \leq T, T > 0\} \quad (5)$$

zapišemo v obliki:

$$p(t, T) = F(t, r(t); T), \quad (6)$$

kjer je:

$$F(t, r(t); T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r}, \quad (7)$$

in sta A in B deterministični funkciji, potem pravimo, da je ta proces afina terminska struktura (Björk, 2009, str. 377).

3.1.3 Sprotna obrestna mera (angl. *spot interest rate*), terminska obrestna mera (angl. *forward interest rate*) in kratkoročna obrestna mera (angl. *short rate*)

Naj najprej definiramo pojma sprotne in terminske obrestne mere v diskretnem in nato v zveznem času, nato pa podajmo še definiciji trenutne terminske (angl. *instantaneous forward interest rate*) in kratkoročne obrestne mere. Vse definicije so povzete po Björk (2009, str. 352).

V diskretnem času terminsko obrestno mero $[S, T]$ v času t definiramo kot:

$$L(t; S, T) = -\frac{p(t, T) - p(t, S)}{(T - S)p(t, T)} \quad (8)$$

in sprotno obrestno mero $[S, T]$ kot:

$$L(S, T) = -\frac{p(S, T)}{(T - S)p(S, T)}. \quad (9)$$

V zveznem času je terminska obrestna mera za interval $[S, T]$ v času t :

$$R(t; S, T) = -\frac{\log p(S, T) - \log p(t, S)}{T - S} \quad (10)$$

in sprotno obrestno mero za interval $[S, T]$:

$$R(S, T) = -\frac{\log p(S, T)}{T - S}. \quad (11)$$

Trenutno terminsko obrestno mero z dospelostjo v času T in začetkom v t definiramo kot:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log p(S, T)}{\partial T}. \quad (12)$$

Trenutno kratkoročno obrestno mero v času t lahko izrazimo s trenutno terminsko obrestno mero:

$$r(t) = f(t, t). \quad (13)$$

V enačbah (8)–(12) je $p(t_1, t_2)$ oznaka za ceno obveznice v času t_1 in dospelostjo v času t_2 .

3.2 Model kratkoročnih obrestnih mer

Finančnih inštrumentov, ki so odvisni od gibanja kratkoročnih obrestnih mer (angl. *interest-rate-contingent claims*), je veliko. Njihova uporaba je zelo razširjena, zato je tudi modelov za njihovo vrednotenje veliko (Hull & White, 1990, str. 573).

Hull in White (1990, str. 573, 574) opažata, da modeli obrestnih mer predpostavljajo log-normalno porazdelitev terminske obrestne mere (angl. *forward interest rate*) ali cene obveznice, odvisno od tipa izvedenega finančnega inštrumenta, in uporabita Black-Scholesovo formulo za vrednotenje opcij, ki so pisane na obrestno mero. V pričujočem poglavju je obravnavan model, s katerim želimo priti do dobrega prileganja terminski strukturi obrestne mere (angl. *initial term structure of the interest rates*).

V literaturi najdemo modele obrestnih mer naslednjih avtorjev: Brennan in Schwartz (1979, 1982), Courtadon (1982), Cox, Ingersoll in Ross (1985), Dothan (1978), Langetieg (1980), Longstaff (1989), Richard (1979) in Vasiček (1977). Hull in White (1990, str. 574) opažata, da modeli naštetih avtorjev dajejo konsistentne rezultate pri vrednotenju finančnih inštrumentov, ki so odvisni od obrestne mere, a imajo kljub temu dve slabosti: vsebujejo parametre, ki jih ne moremo določiti, in ne omogočajo popolnega prileganja strukturi obrestne mere.

Kasneje so avtorji razvili tudi take modele, ki so to omogočili. Prva med njimi sta bila Ho in Lee (1986), njuno delo so nato nadaljevali še Black, Derman in Toy (1990), Dybvig (1988), Milne in Turnbull (1989) ter Heath, Jarrow in Morton (1987). Model zadnjih treh omogoča tudi prileganje nestanovitnosti strukturi.

Hull in White (1990) sta razvila razširitvi dveh modelov zgoraj omenjenih avtorjev, in sicer tistih, ki so ju predstavili Vasiček (1977) in Cox, Ingersoll in Ross (1985). Obe sta konsistentni s trenutno strukturo obrestnih mer, razširitev Vasičkovega modela je konsistentna še z nestanovitnostno strukturo sprotnih obrestnih mer, razširitev Coxovega, Ingersollovega in

Rossovega modela pa z nestanovitnostno strukturo terminskih obrestnih mer. Hull in White (1990) sta pokazala, da lahko z omenjenima razširitvama vrednotimo katerekoli finančne instrumente, ki so odvisni od obrestnih mer.

V magistrskem delu bo za model obrestnih mer uporabljena različica Hull-Whitove razširitve Vasičkovega modela. Tega opišemo s SDE:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma r^\beta(t)dW(t), \quad (14)$$

kjer so a , b , σ in β pozitivne konstante, $dW(t)$ pa Wienerjev proces. V tako zastavljenem modelu obrestna mera, r , narašča proti meji b s stopnjo a in varianco $\sigma^2 r^{2\beta}$. Taki obliki procesa pravimo **proces vračanja k povprečju** (angl. *mean-reverting process*). Vasiček (1977) je raziskal obnašanje enačbe v primeru, ko je $\beta=0$.

Hull in White (1990, str. 576) sta model najprej razširila tako, da sta enačbi (14) dodala še časovno komponento: v enačbo sta dodala časovno odvisni prirast $\theta(t)$ ter stopnjo a in nestanovitnostjo σ spremenila iz konstant v časovno odvisni funkciji. Raziskala sta obnašanje enačbe, ko je $\beta = 0$ (razširitev Vasičkovega modela) ter $\beta = 0,5$ (razširitev modela Coxa, Ingersolla in Rossa).

Različico, ki bo uporabljena (v nadaljevanju HW), sta Hull in White predstavila leta 1993. Zapišemo jo s SDE:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dW(t), \quad (15)$$

v kateri je a konstanta vračanja k povprečju (angl. *mean-reverting constant*), σ je nestanovitnost obrestne mere in $dW(t)$ je Wienerjev proces.

V tem modelu izberemo a in σ tako, da dobimo ustrezno strukturo nestanovitnosti, $\theta(t)$ pa izberemo tako, da se teoretične cene obveznic $\{p(0,T); T > 0\}$ prilegajo opazovani krivulji $\{p^*(0,T); T > 0\}$ (Björk, 2009, str. 384).

3.2.1 Rešitev HW diferencialne enačbe

SDE (15) rešimo s pomočjo izpeljave, kot jo navaja Carr (2005, str. 2–3); v njej je uporabljena Itôva formula.

Odvajamo izraz $e^{at}r(t)$:

$$d(e^{at}r(t)) = e^{at}dr + ae^{at}r dt. \quad (16)$$

V enačbo (16) vstavimo (15):

$$d(e^{at}r(t)) = e^{at}\theta(t)dt - e^{at}ardt + e^{at}\sigma dz + e^{at}ardt \quad (17)$$

$$= e^{at}\theta(t)dt + e^{at}\sigma dz. \quad (18)$$

Če enačbo (18) integriramo na območju $[0, t]$, dobimo:

$$e^{at}r(t) = r(0) + \int_0^t \theta(s)e^{as}ds + \sigma \int_0^t e^{as}dz(s). \quad (19)$$

Enačbo (19) delimo z e^{at} in dobimo:

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)}ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}dz(s), \quad (20)$$

kar poenostavimo in dobimo enačbo za gibanje kratkoročne obrestne mere v HW modelu:

$$r(t) = e^{-a(t-s)} \left(r(s) + \int_s^t \theta(u)e^{au}du + \sigma \int_s^t e^{au}dz(u) \right). \quad (21)$$

S tem je opravljen drugi korak za prvi faktor tveganj: izbran je eden od možnih modelov za kratkoročne obrestne mere. V naslednjem koraku mora biti izbran primeren finančni inštrument, na katerega bo HW model kalibriran: odločimo se za finančni inštrument **opcijska zamenjava** (angl. *swaption*). Do enačbe za njegovo vrednost v okviru HW modela pridemo postopoma: najprej je potrebno razviti enačbo za ceno obveznice (poglavje 3.2.2) in nato enačbo za ceno evropske nakupne opcije (poglavje 3.2.3). Izpeljava formule za vrednotenje opcijske zamenjave je zaključena v poglavju 3.2.5.

3.2.2 Cena obveznice v HW modelu

Brezkuponska obveznica (angl. *zero-coupon bond*) je finančna pogodba, pri kateri je lastniku na vnaprej določen datum (t. i. dospelost obveznice) izplačan fiksni znesek. Pri **kuponski obveznici** (angl. *coupon-bearing bond*) pa so lastniku (ob znesku, ki ga dobi ob dospelosti le-te), ob vnaprej določenih datumih izplačane tudi manjše vsote (kuponi) (Wilmott, 2007, str. 320–321).

Zapišimo v nadaljevanju izpeljavo enačbe za ceno obveznice v okviru HW modela, kot jo navaja Björk (2009, str. 383–386). V afinih terminskih strukturah lahko **ceno obveznice v času t in z dospelostjo v času T** zapišemo kot:

$$p(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}, \quad (22)$$

kjer A in B dobimo tako, da rešimo sistema enačb (23) in (24) ter (25) in (26):

$$B_t(t, T) = aB(t, T) - 1, \quad (23)$$

$$B(T, T) = 0, \quad (24)$$

$$A_t(t, T) = \theta(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T), \quad (25)$$

$$A(T, T) = 0. \quad (26)$$

Rešitvi zgornjih sistemov enačb sta funkciji A in B z enačbama:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad (27)$$

$$A(t, T) = \int_t^T \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s, T) - \theta(s)B(s, T) \right\} ds. \quad (28)$$

Želimo, da se teoretična cena obveznice (22) najboljše prilega opazovanim cenam. Da pridemo do tega rezultata, uporabimo terminske obrestne mere – poskrbimo, da se teoretična krivulja terminskih obrestnih mer $\{f(0, T); T > 0\}$ prilega opazovani krivulji $\{f^*(0, T); T > 0\}$, kjer je f^* definirana kot:

$$f^*(t, T) = -\frac{\partial \log p^*(t, T)}{\partial T}. \quad (29)$$

V afinih terminskih strukturah terminsko obrestno mero definiramo kot:

$$f(0, T) = B_T(0, T)r(0) - A_T(0, T). \quad (30)$$

Če v (30) uporabimo enakosti iz (27) in (28), dobimo

$$f(0, T) = e^{-aT}r(0) + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2. \quad (31)$$

Cilj je, da za opazovano strukturo terminskih obrestnih mer f^* , najdemo funkcijo θ , ki reši enačbo:

$$f^*(0, T) = e^{-aT}r(0) + \int_0^T e^{-a(T-s)}\theta(s)ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2, \text{ za vsak } T > 0. \quad (32)$$

Ena od možnosti reševanja enačbe (32) je, da opazovano strukturo terminskih obrestnih mer zapišemo kot vsoto dveh funkcij:

$$f^*(0, T) = x(T) + g(T), \quad (33)$$

kjer sta x in g definirani z:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + \theta(t), \quad (34)$$

$$x(0) = r(0), \quad (35)$$

$$g(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 = \frac{\sigma^2}{2} B^2(0, t). \quad (36)$$

Iz sistema enačb (34) in (35) izrazimo $\theta(t)$ in uporabimo še vrednost v (33):

$$\theta(T) = \dot{x}(T) + a x(T) = f_T^*(0, T) + \dot{g}(T) + a x(T) \quad (37)$$

$$= f_T^*(0, T) + \dot{g}(T) + a(f^*(0, T) + g(T)). \quad (38)$$

Če vrednost v (38) uporabimo v (32) in integriramo ter vstavimo v (22), dobimo ceno obveznice v HW modelu (pri fiksnih a in σ ter izbranim θ , tako da se prilega krivulji donosnosti):

$$p(t, T) = \frac{p^*(0, T)}{p^*(0, t)} \exp \left\{ B(t, T) f^*(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T) (1 - e^{-2at}) - B(t, T) r(t) \right\}, \quad (39)$$

kjer je vrednost B kot smo jo definirali v (27).

3.2.3 Cena evropske opcije na obveznico v HW modelu

Cena **evropske nakupne opcije** (angl. *European call option*) v času t z dospelostjo v T in izvršilno ceno v K na brez-kuponsko obveznico z dospelostjo v S ($T < S$) v HW modelu z oznakami iz prejšnjega poglavja definiramo kot:

$$c(t, T, K, S) = p(t, S) \Phi(d) - p(t, T) K \Phi(d - \sigma_p), \quad (40)$$

kjer so:

$$d = \frac{1}{\sigma_p} \log \left\{ \frac{p(t, S)}{p(t, T)} \right\} + \frac{1}{2} \sigma_p, \quad (41)$$

$$\sigma_p = \frac{1}{a} \{1 - e^{-a(S-T)}\} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} \{1 - e^{-2a(T-t)}\}} \quad (42)$$

in Φ označuje standardno normalno porazdelitveno funkcijo (Björk, 2009, str. 383).

Iz enačbe za ceno nakupne opcije na brez-kuponsko obveznico lahko z uporabo **prodajno-nakupne opsijske paritete** (angl. *put-call parity*) dobimo enačbo za ceno prodajne opcije na obveznico (Hull & White, 1990, str. 580).

Prodajno-nakupno pariteto oziroma povezavo med ceno nakupne in prodajne evropske opcije (obe z izvršilno ceno K z dospelostjo v T ; opciji sta pisani na obveznico z dospelostjo v S , $T < S$) zapišemo z naslednjo enakostjo:

$$p(t, T, K, S) = K e^{-r(T-t)} + c(t, T, K, S) - p(t, S), \quad (43)$$

kjer je $p(t, T, K, S)$ cena prodajne opcije, $c(t, T, K, S)$ cena nakupne opcije in $p(t, T)$ cena obveznice v času t (Wilmott, 2007, str. 44–46).

Če enačbo (43) nekoliko preuredimo in jo zapišemo kot:

$$c(t, T, K, S) - p(t, T, K, S) = p(t, S) - Ke^{-r(T-t)}, \quad (44)$$

lahko vidimo, da je portfelj dolge pozicije v nakupni opciji in kratke pozicije v prodajni opciji (leva stran enačbe) enak portfelju z dolgo pozicijo v obveznici in kratko denarno pozicijo, ki je v času dospelja T vredna K . Ta enakost drži za vse čase t , $0 \leq t \leq T$. Če ta enakost ne drži, imamo na trgu arbitrarne možnosti (Wilmott, 2007, str. 44–46).

Če v enačbo (43) vstavimo enačbo (40), ki predstavlja ceno nakupne opcije v okviru HW modela, dobimo enačbo za ceno prodajne opcije v okviru HW modela:

$$p(t, T, K, S) = Ke^{-r(T-t)} + c(t, T, K, S) - p(t, S) \quad (45)$$

$$= Ke^{-r(T-t)} + p(t, S)\Phi(d) - p(t, T) K \Phi(d - \sigma_p) - p(t, S) \quad (46)$$

$$= Ke^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d - \sigma_p)) - p(t, S)(1 - \Phi(d)) \quad (47)$$

$$= Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d + \sigma_p) - p(t, S)\Phi(-d), \quad (48)$$

kjer d in σ_p ustrezata enačbam (41) in (42).

3.2.4 Zamenjava in opcijska zamenjava

Finančni inštrument **zamenjava** (angl. *swap*) je dogovor med dvema strankama o zamenjavi prihodnjih denarnih tokov. Velikost le-teh je dogovorjena vnaprej, še pred začetkom veljavnosti pogodbe. Poznamo več oblik zamenjav, izmed katerih je trenutno najbolj uporabljena **obrestna zamenjava** (angl. *interest rate swap*). Gre za dogovor med dvema strankama, v okviru katerega prva na znan denarni tok plača vnaprej določeno fiksno obrestno mero, druga pa na isti denarni tok plača spreminjajočo se obrestno mero (angl. *floating rate*). Za slednjo v obrestnih zamenjavah pogosto uporabljamo LIBOR, ki je oznaka za London Interbank Offer Rate (Wilmott, 2007, str. 350).

Opcijska zamenjava je izvedeni finančni inštrument z vnaprej določeno izvršilno obrestno mero (angl. *strike rate*). Ta je fiksna, a bo v primeru, če bo opcija izvršena, zamenjana za spreminjajočo se. Pri nakupni opcijski zamenjavi ima kupec pravico, da postane plačnik s fiksno obrestno mero. Pri prodajni opcijski zamenjavi ima kupec pravico, da postane plačnik s spreminjajočo se obrestno mero (Wilmott, 2007, str. 392).

Lastnik **evropske opcijske zamenjave** ima pravico, da v času njene dospelosti vstopi v zamenjavo. Vrednosti nakupne in prodajne opcijske zamenjave lahko povežemo v skupno enačbo z upoštevanjem prodajno-nakupne paritete, kot smo v poglavju 3.2.3 pokazali za nakupno in prodajno opcijo na brez-kuponsko obveznico (Back, 2005, str. 257).

Vrednost nakupne opcijske zamenjave z dospelostjo v času T na zamenjavo s plačili v $t_1, \dots, t_N$ in začetkom veljave v $t_0 = t_1 - \Delta t \geq T$ in fiksno obrestno mero r_s lahko napišemo s formulo:

$$\max \left\{ 0, [CF(t, t_0) - CF(t, t_N)] - \left[r_s \Delta t \sum_{i=1}^N CF(t, t_i) \right] \right\}, \quad (49)$$

kjer je

$$[CF(t, t_0) - CF(t, t_N)] \quad (50)$$

plačilo po spreminjajoči se obrestni meri in

$$\left[r_s \Delta t \sum_{i=1}^N CF(t, t_i) \right] \quad (51)$$

plačilo po fiksni obrestni meri (Back, 2005, str. 257).

3.2.5 Vrednotenje opcijske zamenjave v okviru HW modela

V poglavju 3.2.2 smo navedli formuli za vrednotenje evropskih opcij na brez-kuponske obveznice, s pomočjo katerih lahko v nadaljevanju razvijemo formulo za ceno evropske opcije na kuponsko obveznico. Takšna povezava nastane zaradi lastnosti brez-kuponske obveznice, ki je padajoča funkcija obrestne mere (Hull & White, 1990, str. 580).

Spodnja povezava med vrednostjo opcije na kuponsko obveznico in vrednostjo opcije na brez-kuponsko obveznico je prevzeta po Hullu in Whitu (1990, str. 580). Naj bo nakupna evropska opcija z izvršilno vrednostjo K in dospelostjo v T , zapisana na kuponski obveznici, ki izplačuje kupone c_i v časih $s_i > T$, $1 \leq i \leq n$. Opcija bo izvršena, ko bo $r(T) < r^*$, kjer r^* reši enačbo

$$\sum_{i=1}^n c_i P(r^*, T, s_i) = K. \quad (52)$$

Izplačilo opcije je enako

$$\max \left[0, \sum_{i=1}^n c_i P(r, T, s_i) - K \right], \quad (53)$$

kar lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^n c_i \max[0, P(r, T, s_i) - K_i], \quad (54)$$

kjer je

$$K_i = P(r^*, T, s_i). \quad (55)$$

Iz enačbe (54) vidimo, da je vrednost opcije na kuponsko obveznico vsota n opcij na brez-kuponsko obveznico z izvršilno vrednostjo K_i za i -to opcijo, $1 \leq i \leq n$.

Podobno kot smo zgoraj naredili za opcijo na kuponsko obveznico, lahko z vsoto več opcij na brez-kuponsko obveznico izrazimo tudi opsijsko zamenjavo. Opcijsko zamenjavo si lahko predstavljamo kot portfelj prodajnih opcij na brez-kuponsko obveznico. Definicija enačbe je povzeta po Baldvinsdóttir in Palmborg (2011, str. 12–13), kjer je uporabljen Jamshidianov trik (1989). Cena nakupne opsijske zamenjave z izvršilno obrestno mero K , dospelostjo v T in nominalno vrednostjo N je:

$$PS(t, T, t_1, \dots, t_n, N, K) = N \sum_{i=1}^n c_i ZBP(t, T, t_i, K_i). \quad (56)$$

Lastnik nakupne opsijske zamenjave ima pravico, da v času T vstopi v zamenjalno pogodbo s plačili v časih $t_1, \dots, t_n$, $t_1 > T$, kjer plača fiksne zneske K in dobi spreminjajoči se znesek. V enačbi sta

$$c_i = K\tau_i \quad (57)$$

za $i = 1, \dots, n-1$ in

$$c_n = 1 + K\tau_n, \quad (58)$$

kjer je

$$\tau_i = t_i - t_{i-1}. \quad (59)$$

3.3 Kapitalski model

Trgovanje s prvo opcijo na kapital leta 1973 je sovpadlo z izdajo znanstvenega članka Blacka in Scholesa, v katerem sta predstavila matematični model za vrednotenje nakupne opcije na delnico. Black-Scholesova formula je postala temelj za vrednotenje izvedenih finančnih inštrumentov in spodbudila rast trga z opcijami (Brach, 2003, str. 13). Kljub temu, da so kasneje dokazali nerealnost njenih predpostavk, je Black-Scholesova enačba pomembna tako v teoriji kot tudi v praksi (Willmot, 2007, str. 140).

Naslednji faktor tveganj, ki bo uporabljen v ESG, je tveganje gibanja kapitala (delnice). V tem primeru bomo uporabili Hull-White-Black-Scholesov model (v nadaljevanju HWBS), ki je klasičen Black-Scholesov kapitalski model, vendar s stohastično obrestno mero iz HW namesto konstantne obrestne mere.

Za finančni inštrument, na katerega bomo model kalibrirali, izberemo evropsko opcijo na kapital, zato bomo v nadaljevanju razvili formulo za ceno evropske opcije na delnico pod HWBS modelom.

3.3.1 Black-Scholesov model

Black in Scholes (1973) sta razvija formulo za vrednotenje opcije na delnice, pri čemer sta predpostavila idealne pogoje na trgu delnic in opcij (Black & Scholes, 1973, str. 640):

1. predpostavka: Kratkoročna obrestna mera je znana, konstantna funkcija časa in netvegana.
2. predpostavka: Porazdelitev cen delnice na koncu vsakega končnega intervala je lognormalna. Varianca donosa delnice je konstantna.
3. predpostavka: Delnica ne izplačuje dividend.
4. predpostavka: Opcija je evropska, torej je lahko izvršena samo v času dospelosti.
5. predpostavka: Transakcijskih stroškov, ki nastanejo pri nakupu/prodaji delnice ali opcije, ni.
6. predpostavka: Investitorji si lahko izposodijo ali pa posodijo denar po isti netvegani konstantni kratkoročni obrestni meri.
7. predpostavka: Na trgu ni arbitrarnih priložnosti.

Pri upoštevanju zgornjih predpostavk je cena opcije odvisna samo od cene delnice, časa in vrednostih, ki so po zgornjih trditvah konstantne. Kar pomeni, da obstaja hedge pozicija, ki je sestavljena iz dolge pozicije v delnicah in kratke v opcijah, katere vrednost ne bo odvisna od cene delnice, ampak samo od časa in od konstantnih vrednosti (Black & Scholes, 1973, str. 641).

Black in Scholes (1973) sta z zgoraj opisano idejo prišla do enačbe za ceno evropske nakupne opcije:

$$O(t, T, K) = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (60)$$

kjer je $\Phi(\cdot)$ standardna normalna porazdelitvena funkcija, S_0 trenutna cena delnice ter d_1 in d_2 določata naslednji formuli:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (61)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (62)$$

Do formule za ceno evropske prodajne opcije pridemo z uporabo nakupno-prodajne paritet tako, kot smo to naredili v poglavju 3.2.3.

3.3.2 Obrestna mera v Black-Scholes modelu

Black in Scholes (1973) sta razvila formulo za vrednotenje evropskih obveznic, pri čem sta predpostavila, da delnica sledi geometričnemu Brownovemu gibanju s konstantnim prirastom in nestanovitnostjo in da je kratkoročna obrestna mera konstantna ves čas obstoja opcije. Za potrebe ESG ne bomo upoštevali predpostavke o konstantni kratkoročni obrestni meri (1. predpostavka).

S kapitalnim modelom v ESG želimo generirati scenarije, ki jih lahko uporabljamo za vrednotenje dolgoročnih zavarovalniških produktov. To pomeni, da mora kapitalni model temeljiti na stohastični in ne na deterministični obrestni meri. Zato izberemo Black-Scholesov kapitalni model, vendar konstantno obrestno mero nadomestimo s stohastično, ki se giblje v skladu z modelom HW, predstavljenim v poglavju 3.2.

3.3.3 Vrednotenje evropske nakupne opcije v BSHW modelu

Za kapitalni model izberemo BSHW model, ki združi geometrično Brownovo gibanje cene delnice

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t) \quad (63)$$

s stohastičnim procesom obrestne mere

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma_2 dW_2(t), \quad (64)$$

ki ustreza HW modelu. Ker model združi dva Wienerjeva procesa, moramo med njima definirati korelacijo. Predpostavimo, da je korelacijski koeficient konstanten v času:

$$d\langle W_1(t), W_2(t) \rangle = \rho. \quad (65)$$

Ker kapitalni model v ESG kalibriramo na cene evropske nakupne opcije na delnico, moramo navesti formulo za njeno vrednost v okviru BLHW modela.

Yoon (2014) trdi, da je formula za vrednost nakupne evropske opcije na obveznico s stohastično obrestno mero razvita s pomočjo Mellinove transformacije. Nearbitrarno ceno evropske nakupne opcije lahko zapišemo kot pričakovano vrednost pod tveganju nevtralno mero:

$$P(t, s, r) = E^* \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_{t^*} dt^* \right) h(S_T) \mid S_T = s, r_t = r \right\}, \quad (66)$$

kjer je $h(\cdot)$ funkcija izplačil opcije. Nearbitrarno ceno brezkuponske obveznice je:

$$B(t, r; T) = E^* \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_{t^*} dt^* \right) \mid r_t = r \right\}. \quad (67)$$

Z uporabo zgornjih oznak definirajmo ceno evropske nakupne opcije s Hull-Whiteovo stohastično obrestno mero kot:

$$P(t, s, r) = P(T - \tau, s, r) \quad (68)$$

$$= s\Phi(d_1) - KB(T - \tau, r; T)\Phi(d_2), \quad (69)$$

kjer so:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{KB(t, r; T)} + \frac{1}{2} \int_0^\tau \hat{\sigma}^2(t^*) dt^*}{\sqrt{\int_0^\tau \hat{\sigma}^2(t^*) dt^*}}, \quad (70)$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\int_0^\tau \hat{\sigma}^2(t^*) dt^*}, \quad (71)$$

$$\hat{\sigma}(t) = \sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 X(t) + \sigma_2^2 X^2(t)}, \quad (72)$$

$$X(t) = -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \quad (73)$$

in $\Phi(\cdot)$ je standardna normalna porazdelitvena funkcija.

Enako formulo lahko uporabimo tudi za evropsko nakupno opcijo na delnico. Enačbo (69) bomo uporabili za izračun vrednosti evropske nakupne opcije na delnico, na katero bomo kalibrirali model BSHW.

3.4 Model nepremičnin

Nepremičnine so klasična oblika sredstev v portfelju zavarovalnice. Investicija vanje prinaša razpšitev tveganj in zaščito pred inflacijo. Za model nepremičnin izberimo prav takega, kot smo ga izbrali za modeliranje kapitala, saj sta si investiciji v nepremičnine in delnice podobni (Djehiche & Hörfelt, 2004, str. 10).

Prav zato lahko za gibanje cene nepremičnin uporabimo enako diferencialno enačbo, kot smo jo uporabili pri obravnavi gibanja cene delnice:

$$dRE(t) = RE(t)r(t)dt + \sigma_3 RE(t)dW_3 t. \quad (74)$$

Tudi za gibanje cen nepremičnin uporabimo stohastično obrestno mero, njeno gibanje opišemo z:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma_2 dW_2(t). \quad (75)$$

3.4.1 Trg nepremičnin

Kljub temu, da sta si investicija v delnice in nepremičnine podobni, se njuno modeliranje razlikuje, in sicer predvsem zaradi neobstoja centralnega trga nepremičnin, pa tudi zato, ker se prodaja nepremičnin največkrat odvije med privatnima strankama (Baldvinsdóttir & Palmborg, 2011, str. 17).

Med izvedenimi finančnimi inštrumenti obstajajo tudi taki, ki so pisani na nepremičnine. Ker trgi nepremičnin niso likvidni, take finančne inštrumente namesto z uporabo dejanskih nepremičninskih cen pogosto vrednotimo z uporabo nepremičninskih indeksov (Djehiche & Hörfelt, 2004, str. 10).

Trgovanje z izvedenimi finančnimi inštrumenti, ki so pisani na nepremičnine, ni pogosto; v veliko primerih jih je tudi nemogoče kupiti. Zato bomo za namen modeliranja namesto vrednosti finančnega inštrumenta uporabili zgodovinske podatke cen nepremičnin oziroma nepremičninskih indeksov (Baldvinsdóttir & Palmborg, 2011, str. 17).

Razlikovanje med obojimi je pomembno, saj je nepremičninski indeks določen glede na ocenjene vrednosti nepremičnin. To povzroči bolj gladke časovne vrste nepremičninskih indeksov. Če želimo, da nepremičninski indeksi odražajo bolj realno stanje vrednosti nepremičnin, jih moramo odgladiti (angl. *unsmooth*) (Djehiche & Hörfelt, 2004, str. 10).

3.4.2 Metoda odglajevanja (angl. *unsmoothing method*)

Za postopek odglajevanja uporabimo metodo, ki so jo predstavili Fusher, Geltner in Webb (1994). Zglajen indeks v času t opišemo z enačbo:

$$r_t^* = w_0 r_t + w(B) r_{t-1}, \quad (76)$$

kjer so r_t prava vrednost indeksa v času t , w_0 je utež, ki zaseda vrednosti med 0 in 1 in

$$w(B) = w_1 + w_2 B + w_3 B^2 + \dots, \quad (77)$$

kjer je B lag operator. Če enačbo (76), ki predstavlja vrednost indeksa v času t , izrazimo z vrednostjo indeksa v času $t-1$, dobimo enačbo:

$$r_t^* = \phi(B) r_{t-1}^* + e_t, \quad (78)$$

kjer je

$$\phi(B) = \phi_1 + \phi_2 B + \phi_3 B^2 + \dots, \quad (79)$$

lag polinomski operator in

$$e_t = w_0 r_t \quad (80)$$

slučajna spremenljivka, ki je po predpostavki normalno porazdeljena z matematičnim upanjem 0 in konstantno varianco σ^2 . To pomeni, da je tudi r_t^* porazdeljena normalno z matematičnim upanjem $\phi(B)r_{t-1}^*$ in varianco σ^2 .

Iz enačbe (78) izrazimo odglajane vrednost od r_t^* in dobimo

$$r_t = \frac{(r_t^* - \phi(B)r_{t-1}^*)}{w_0}. \quad (81)$$

Za določitev vrednosti deleža w_0 uporabimo še eno predpostavko: prava vrednost nestanovitnosti vrednosti nepremičnin na osnovi ocenjenega indeksa σ zavzema približno polovico vrednosti nestanovitnost na trgu delnic $\sigma^{delnica}$. Sedaj lahko w_0 izrazimo kot:

$$w_0 = \frac{2\sigma(r_t^* - \phi(B)r_{t-1}^*)}{\sigma^{delnica}}. \quad (82)$$

4 OCENJEVANJE PARAMETROV MODELOV IN KORELACIJ MED FAKTORJI TVEGANJ

V tem poglavju so predstavljeni podatki, ki bodo uporabljeni za kalibracijo modelov gibanj obrestne mere, cene delnic in cene nepremičnin. S tem izračunamo parametre modelov, ki bodo uporabljeni za simulacijo prihodnjih scenarijev.

4.1 Model obrestnih mer

V okviru HW modela smo za kalibracijo razvili formulo za vrednost opsijske zamenjave. Z njeno uporabo pridobimo parametre za model obrestnih mer, kar pomeni, da moramo za model, ki je v poglavju 3.2 opisan z enačbo (56), pridobiti ustrezne vrednosti za funkcijo $\theta(t)$ ter konstanti a in σ .

4.1.1 Termenska struktura obrestne mere

Funkcija $\theta(t)$ predstavlja termensko strukturo obrestne mere, model HW pa omogoča popolno prilaganje le-tej. Ker želimo, da je model obrestnih mer skladen s S2, moramo upoštevati tehnične specifikacije EIOPA, ki določajo smernice za pravilno izbiro krivulje.

V delu bo uporabljena krivulja obrestne mere zamenjalne pogodbe (angl. *swap-rate curve*) na 31. 12. 2014, ki pa jo je potrebno interpolirati, ekstrapolirati, ji odstraniti kreditna tveganja in popraviti nestanovitnost (EIOPA, 2015, str. 12–14).

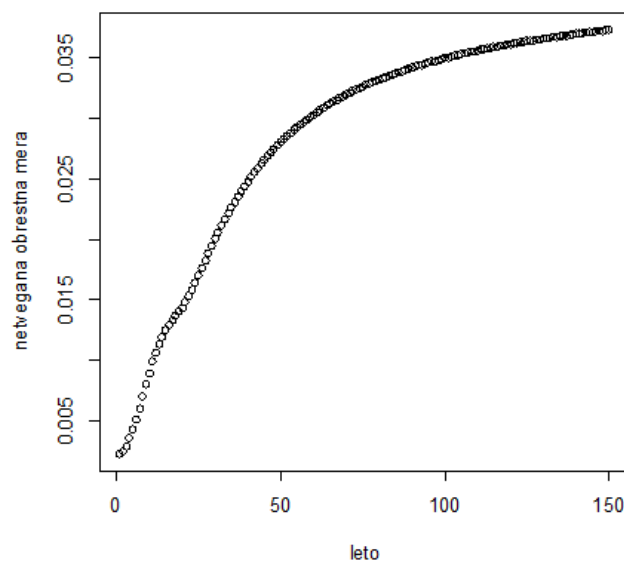
Po QIS5 za **ekstrapolacijo** in (kjer je to potrebno) **interpolacijo** uporabimo **Smith-Wilsonovo metodo**, kjer se moramo odločiti, katera je naša zadnja **likvidnostna točka** (angl. *last liquid point*, v nadaljevanju LLP), katera je **točka konvergence** in katera je **ultimativna termenska obrestna mera** (angl. *ultimate forward rate*, v nadaljevanju UFR). Za evro so določene naslednje vrednosti (EIOPA, 2015, str. 13-15):

- LLP je v letu 20,
- konvergenčno obdobje traja 40 let,
- krivulja mora konvergirati k UFR od 60. leta naprej,
- UFR je enaka 4,2%.

V pričujočem magistrskem delu je uporabljena ekstrapolirana terminska struktura obrestne mere s popravljeno nestanovitnostjo ($\alpha = 0,127714$), ki je dostopna na spletnih straneh EIOPA (prikazuje jo Slika 5).

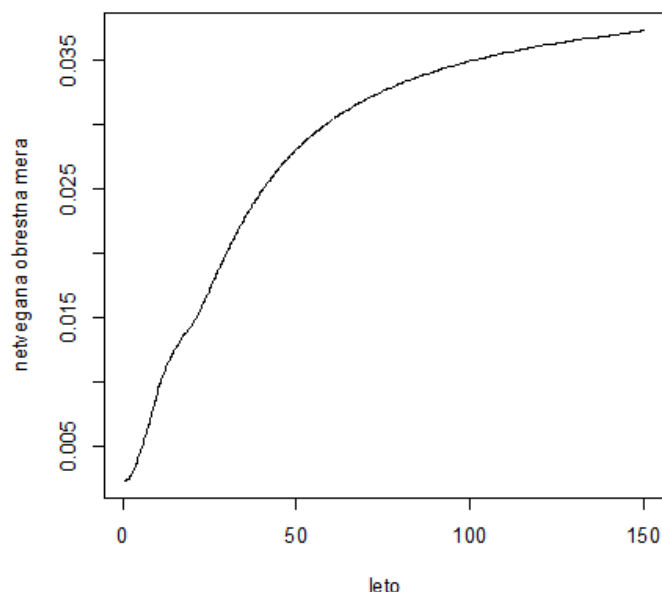
Za namen modeliranja potrebujemo krivuljo terminske strukture na mesečni osnovi, zato točke s Slike 5 interpoliramo na mesečno osnovo in narišemo krivuljo, ki se jim najbolj prilega. Rezultat interpolacije prikazuje Slika 6. Dobljena krivulja je funkcija $\theta(t)$, ki jo uporabimo v HW modelu.

Slika 5: Ekstrapolirana terminska struktura netvegane obrestne mere s popravkom nestanovitnosti



Vir: EIOPA, Risk-free interest rate term structures, 2014.

Slika 6: Interpolirana krivulja na mesečni osnovi



Vir: EIOPA, Risk-free interest rate term structures, 2014.

4.1.2 Parametra

Za pridobitev vrednosti parametrov a in σ , uporabimo podatke o 6-mesečnih Libor obrestnih zamenjavah na 31. 12. 2014. V sistemu Bloomberg so dostopni v obliki vgrajenih nestanovitnosti za različna dospelja in tenorje. Z njihovo pomočjo izračunamo cene opsijske zamenjave.

Ker so vgrajene nestanovitnosti, ki jih uporabimo samo za dospelosti do 10 let, moramo tudi te podatke ekstrapolirati. To naredimo zato, da bomo lahko podatke uporabili tudi za produkte, ki imajo dospelost daljšo od 10 let. Za ekstrapolacijsko metodo uporabimo Smith-Wilsonovo z enakimi predpostavkami, ki smo jih uporabili zgoraj.

Kalibracijo modela HW opravimo tako, da se tržne cene in cene, ki jih pridobimo z modelom, kar najboljše ujemajo. Ta postopek opravimo z metodo najmanjših kvadratov z računalniškim orodjem R. Rezultati kalibracije modela so predstavljeni v Tabeli 2.

Tabela 2: Parametra HW modela obrestnih mer

a (parameter vračanja k povprečju)	σ (nestanovitnost obrestne mere)
0,0702	0,0097

4.2 Kapitalski model

V okviru BSHW modela smo razvili formulo za vrednost evropske nakupne opcije na delnico, v nadaljevanju pa bomo z njeno kalibracijo pridobili ustrezne vrednosti parametrov za kapitalski model, ki združuje enačbi (63) in (64). Z enačbo (64) opišemo gibanje stohastične obrestne mere, za kar uporabimo parametre modela obrestnih mer, ki smo jih predstavili v 4.1, v enačbi (63), ki predstavlja gibanje delnice, pa potrebujemo parameter σ_2 . Ker sta v BSHW združena dva Wienerjeva procesa, je za napoved prihodnjih scenarijev potrebna tudi ustrezna vrednost korelacijskega faktorja med njima, ρ .

Za kalibracijo uporabimo podatke za evropsko nakupno opcijo na indeks S&P 500, pridobljene iz sistema Bloomberg, ki so v obliki vgrajene nestanovitnosti. Opravimo jo tako, da se tržne cene in cene, ki jih pridobimo z modelom, kar najboljše ujemajo. Pri tem uporabimo metodo najmanjših kvadratov z računalniškim orodjem R.

Tabela 3: Parametri BSHW kapitalskega modela

parametra HW		parameter BS	korelacija med HW in BSHW
α (parameter vračanja k povprečju)	σ_2 (nestanovitnost obrestne mere)	σ_1 (nestanovitnost delnice)	ρ
0,0702	0,0097	0,253	-0,145

4.3 Model nepremičnin

Za nepremičninski model smo za namen kalibracije uporabili zgodovinske podatke vrednosti indeksa IPD za evropsko območje, ki smo jih odgladili z uporabo postopka, predstavljenega v poglavju 3.4.2; rezultati so zbrani v Tabeli 4.

Tabela 4: Parametri BSHW nepremičninskega modela

parametra HW		parameter BS	korelacija med HW in BSHW	
α (parameter vračanja k povprečju)	σ_2 (nestanovitnost obrestne mere)	σ_3 (nestanovitnost nepremičnine)	ρ (korelacija med obrestno mero in	ρ (korelacija med nepremičnino

			nepremičnino)	in delnico)
0,0702	0,0097	0,0621	-0,201	0,479

5 SIMULACIJA

Po ocenjevanju parametrov modelov in analizi korelacij med faktorji tveganj sledi generiranje prihodnjih scenarijev z metodo Monte Carlo z uporabo računalniškega orodja R. Pripravili bomo projekcije gibanja izbranih faktorjev tveganj za prihodnjih 20 let in za 1.000 možnih scenarijev ter jih prikazali na grafih. Rezultati ocenjevanj parametrov modelov in korelacij med posameznimi zgoraj predstavljenimi sredstvi so združeni v spodnjih tabelah (Tabela 5 in 6).

Za simulacijo prihodnjih scenarijev bomo uporabili računalniško orodje R s potrebnimi knjižnicami. Kot pomoč pri pisanju kode smo uporabili naslednjo literaturo: Croix, Moudiki, Planchet & Youssef (2015) ter Croix (2013).

Tabela 5: Parametri za generiranje projekcij z ESG

model obrestnih mer	$\alpha = 0,0702$	$\sigma = 0,0097$
kapitalski model	$\sigma = 0,253$	
nepremičninski model	$\sigma = 0,0621$	

Tabela 6: Variančno-kovariančna matrika

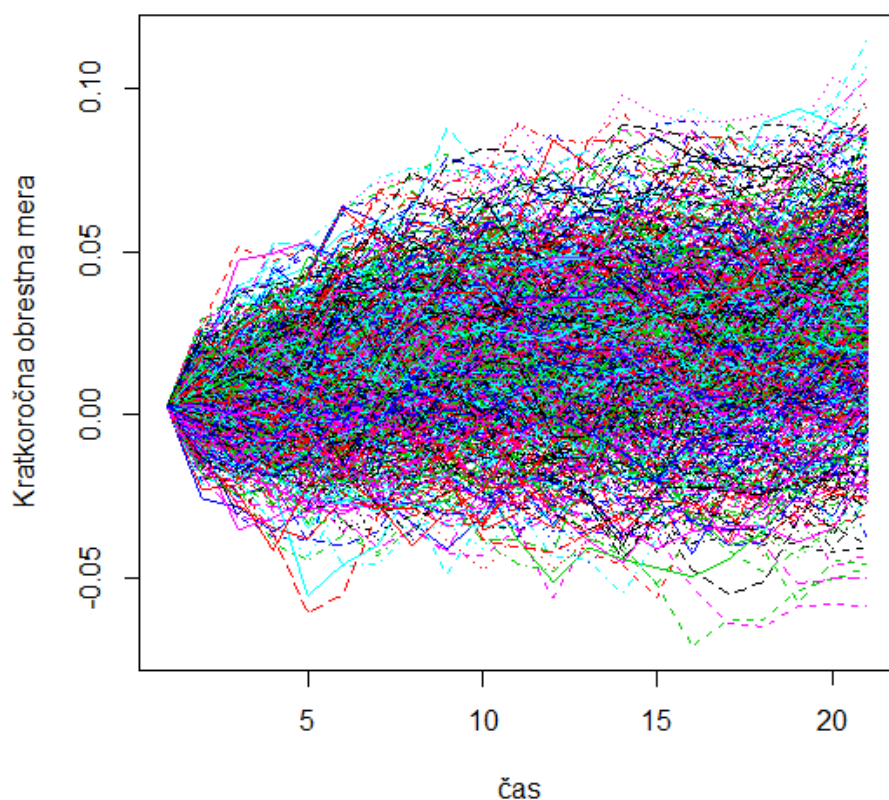
	Obresti	Delnice	Nepremičnine
Obresti	0,0097	-0,145	-0,201
Delnice	-0,145	0,253	0,479
Nepremičnine	-0,201	0,479	0,0621

V naslednjih treh poglavjih bodo najprej prikazani rezultati simulacij za posamezni izbrani model, nato pa v poglavju 5.4 sledi njihova primerjava.

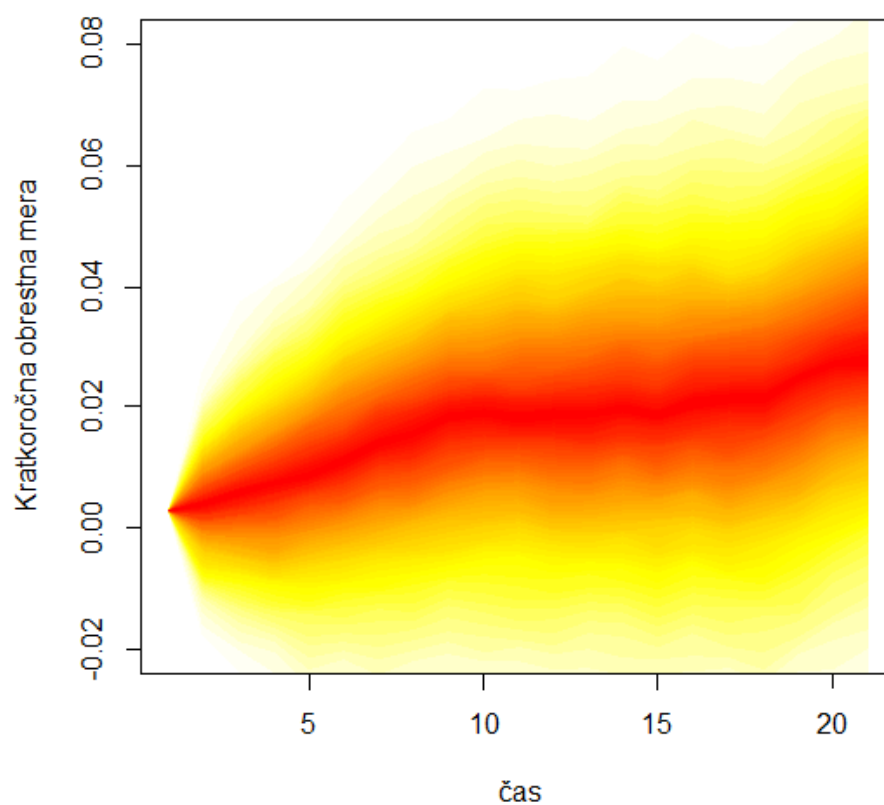
5.1 Projekcija prihodnjih scenarijev obrestne mere

Naslednje tri slike in tabela predstavljajo rezultate Monte Carlo simulacij za model obrestnih mer z zgornjimi parametri. Na Sliki 7 je pripravljenih 1.000 scenarijev za prihodnjih 20 let. Slika 8 predstavlja porazdelitev scenarijev z označenim povprečjem (rdeča barva) in centili (rumena barva). Na Sliki 9 so označena povprečja, škatle z brki (drugi in tretji kvartil) ter intervali razpona podatkov po posameznih letih. Tabela 7 prikazuje še številčne vrednosti nekaterih statistik porazdelitve prihodnjih scenarijev obrestnih mer.

Slika 7: Prihodnji scenariji gibanja obrestne mere



Slika 8: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja obrestne mere



Slika 9: Kvartili in škatle z brki za model obrestne mere

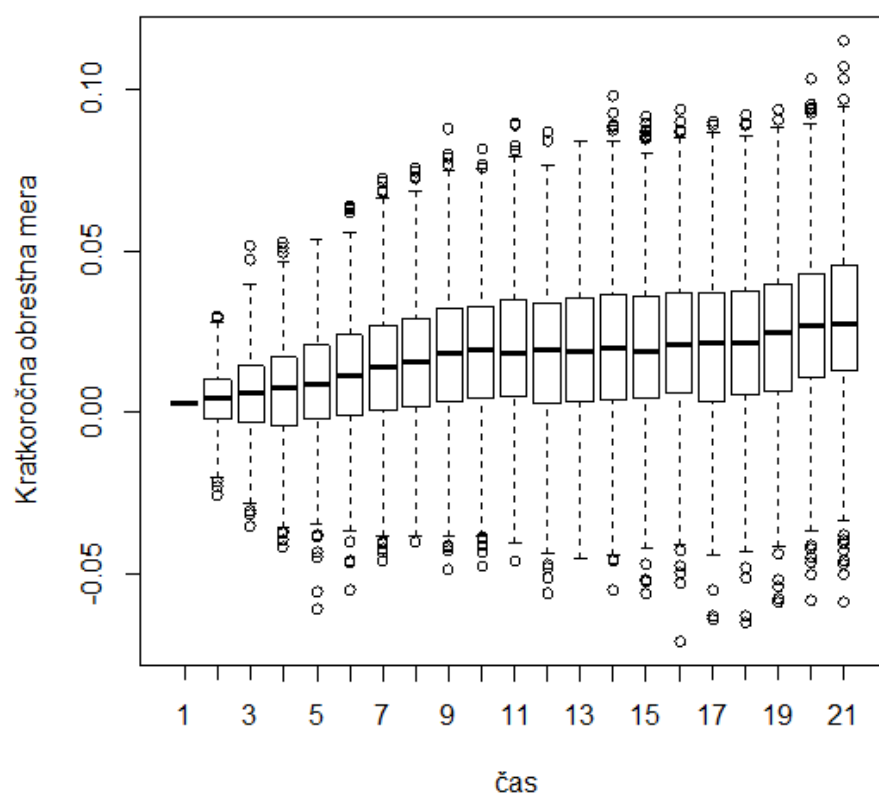


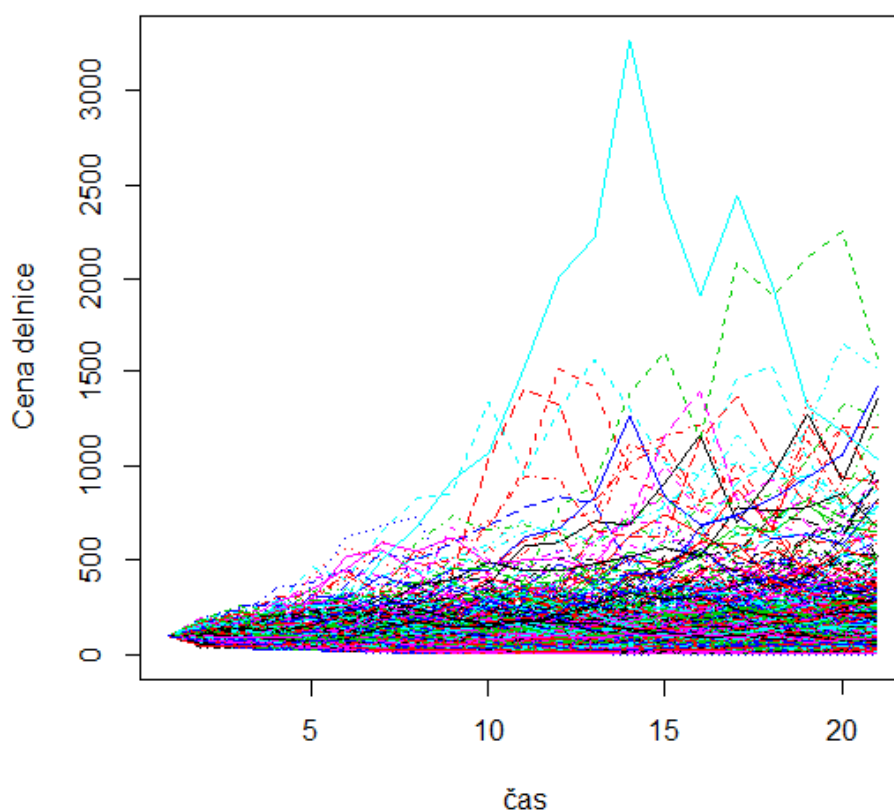
Tabela 7: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo obrestnih mer

Leto	Min	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil	Max
0	0,002725	0,002725	0,002725	0,002725	0,002725	0,002725
1	-0,02527	-0,001981	0,00411	0,003889	0,01035	0,02968
2	-0,03526	-0,002881	0,00582	0,005682	0,01423	0,05164
3	-0,04132	-0,004062	0,007345	0,007098	0,01713	0,05269
4	-0,06067	-0,001925	0,008833	0,008887	0,02066	0,05402
5	-0,05489	-0,0009336	0,01104	0,01143	0,02416	0,06413
6	-0,0456	0,0004743	0,01399	0,01368	0,02703	0,07271
7	-0,03988	0,001849	0,01547	0,01536	0,02955	0,07549
8	-0,0486	0,00341	0,01838	0,01769	0,03228	0,08801
9	-0,04727	0,004473	0,01905	0,01874	0,033	0,08153
10	-0,0458	0,004754	0,01809	0,01929	0,03499	0,08955
11	-0,05608	0,002943	0,01913	0,0187	0,03433	0,08711
12	-0,04517	0,003125	0,01864	0,01911	0,03581	0,08402
13	-0,05496	0,004009	0,01969	0,02025	0,03656	0,09799
14	-0,05578	0,004115	0,01858	0,01946	0,0361	0,09161
15	-0,0706	0,005667	0,02082	0,02115	0,03748	0,09396
16	-0,06381	0,003471	0,02139	0,0207	0,03716	0,09031
17	-0,06499	0,005326	0,02143	0,02124	0,03791	0,09213
18	-0,05879	0,006598	0,02482	0,02396	0,04004	0,09359
19	-0,05796	0,01058	0,02701	0,0268	0,04324	0,1034
20	-0,05865	0,01289	0,02768	0,02895	0,04566	0,115

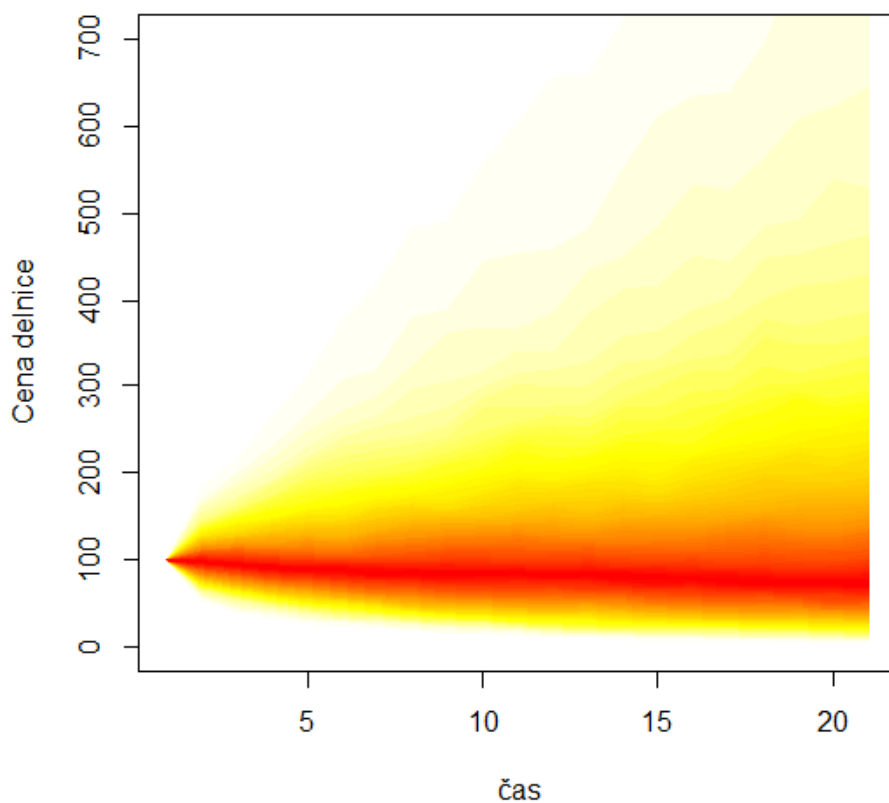
5.2 Projekcija prihodnjih scenarijev kapitala

Naslednje tri slike in tabela predstavljajo rezultate Monte Carlo simulacij za kapitalski model z zgornjimi parametri. Na Sliki 10 je pripravljenih 1.000 scenarijev za prihodnjih 20 let. Slika 11 predstavlja porazdelitev scenarijev z označenim povprečjem (rdeča barva) in centili (rumena barva). Na Sliki 12 so označena povprečja, škatle z brki (drugi in tretji kvartil) ter intervali razpona podatkov po posameznih letih. Tabela 8 prikazuje še številčne vrednosti nekaterih statistik porazdelitve prihodnjih scenarijev obrestnih mer.

Slika 10: Prihodnji scenariji gibanja cene delnice



Slika 11: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja cene delnice



Slika 12: Kvartili in škatle z brki za kapitalni model

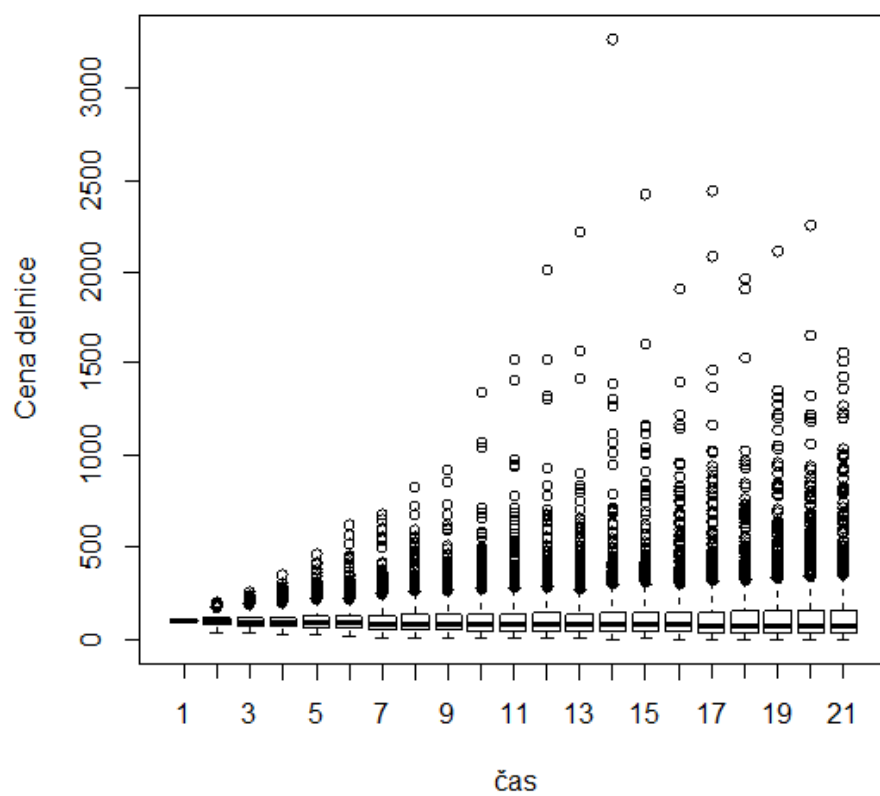


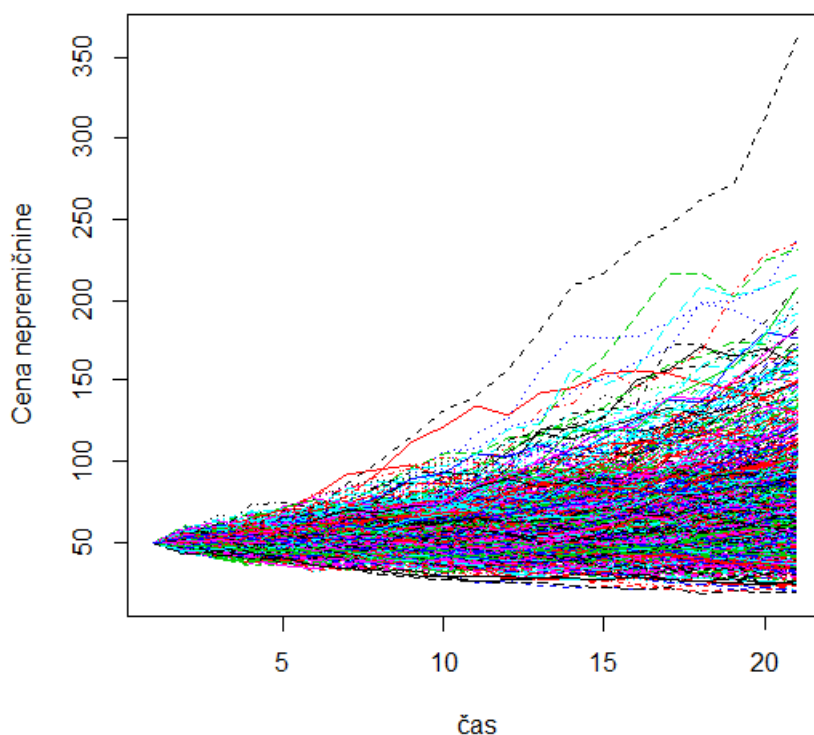
Tabela 8: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo cen delnic

Leto	Min	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil	Max
0	100	100	100	100	100	100
1	39,41	80,72	97,92	101,3	117,4	205,3
2	32,55	72,94	94,29	101,2	122,1	258,5
3	25,96	68,04	91,91	101,5	123,3	348,7
4	22,34	64,17	88,69	103,6	126,5	463,4
5	15,15	59,25	88,31	104,7	124,5	626,4
6	11,3	55,9	84,3	106,9	132,1	680,7
7	5,792	52,47	85,09	109	137,5	834,4
8	4,786	49,99	83,98	110,3	139	919,3
9	4,104	49,26	83,76	114,8	140,1	1349
10	5,376	46,43	84,77	117,7	142,2	1521
11	2,739	46,24	81,95	119,1	144	2010
12	2,936	48,15	83,27	120,4	138,9	2213
13	2,126	44,18	81,58	125,4	146,3	3261
14	2,902	41,86	78,96	125,1	145,8	2418
15	1,484	41,19	78,64	127	148,4	1905
16	1,598	38,75	75,9	130,5	150,4	2438
17	1,606	38,4	74,11	133	153	1963
18	1,628	38,22	72,23	135,9	157,4	2114
19	1,145	37,32	74,13	135,2	158,5	2253
20	1,281	35,14	72,35	139	161,2	1562

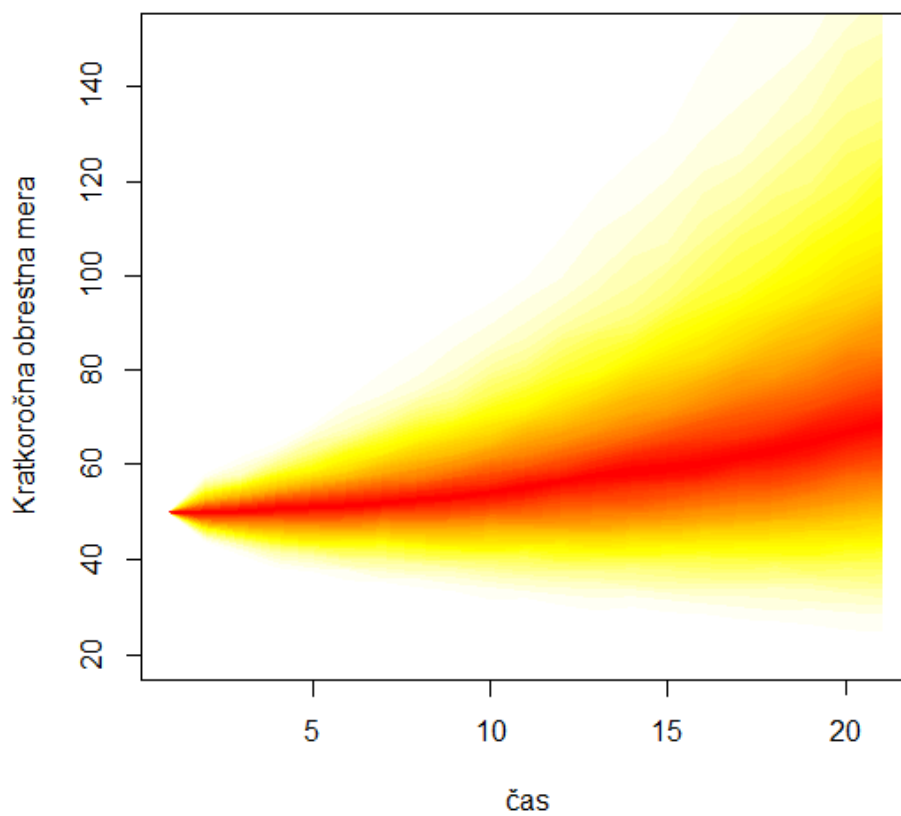
5.3 Projekcija prihodnjih scenarijev nepremičnin

Naslednje tri slike in tabela predstavljajo rezultate Monte Carlo simulacij za model nepremičnin z zgornjimi parametri. Na Sliki 13 je pripravljenih 1.000 scenarijev za prihodnjih 20 let. Slika 14 predstavlja porazdelitev scenarijev z označenim povprečjem (rdeča barva) in centili (rumena barva). Na Sliki 15 so označena povprečja, škatle z brki (drugi in tretji kvartil) ter intervali razpona podatkov po posameznih letih. Tabela 9 prikazuje še številčne vrednosti nekaterih statistik porazdelitve prihodnjih scenarijev obrestnih mer.

Slika 13: Prihodnji scenariji gibanja cene nepremičnine



Slika 14: Centili porazdelitev prihodnjih scenarijev gibanja cene nepremičnin



Slika 15: Kvartili in škatle z brki za nepremičninski model

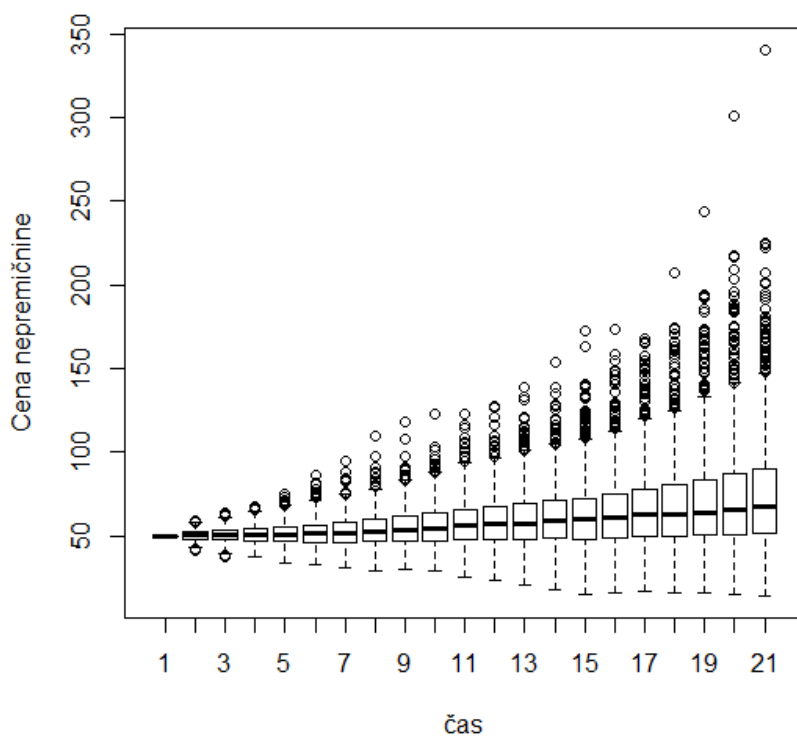


Tabela 9: Minimum, maksimum, povprečna vrednost in kvartili za projekcijo cen nepremičnin

Leto	Min	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil	Max
0	50	50	50	50	50	50
1	42,52	47,91	50,02	50,23	52,21	60,88
2	39,65	47,23	50,23	50,41	53,31	66,62
3	35,25	46,83	50,83	50,97	54,67	73,07
4	35,37	46,62	51,12	51,49	55,77	73,77
5	31,77	46,52	51,49	52,22	56,97	80,21
6	32,89	46,91	52,09	53,23	58,46	92,38
7	30,15	46,57	52,81	54,01	60,01	99,63
8	29,23	46,63	53,32	54,9	61,53	114,3
9	26,69	47,08	54,21	56,17	63,5	131,5
10	25,3	46,94	55,55	57,31	65,75	140,1
11	25,15	46,79	56,6	58,73	67,28	157,2
12	22,93	46,73	57,87	60,17	69,4	180,5
13	21,97	47,61	58,54	61,84	71,87	208,8
14	21,44	47,64	59,4	63,35	74,51	216,4
15	21,13	48,25	60,32	65,16	76,95	234,1
16	20,67	48,52	61,91	67,16	80,03	246,1
17	18,32	49,02	63,46	68,95	81,98	261,9
18	19,68	50	64,51	71	84,23	271,6
19	18,83	51,24	66,89	73,78	88,23	313,1
20	18,83	52,21	68,64	75,97	91,41	362,3

5.4 Primerjava rezultatov simulacij prihodnjih scenarijev zgornjih modelov

HW model je odvisen od terminske strukture obrestnih mer (prikazana je na Sliki 6) in od parametrov ($a = 0,0702$ in $\sigma = 0,0097$), ki smo jih pridobili s kalibracijo na ustrezen finančni inštrument. Kot je razvidno iz Slike 17 (levi prikaz), so vrednosti simulacij scenarijev prihodnjih denarnih tokov lahko tudi negativne, kar je nujno odvisno od vrednosti, ki jih uporabimo pri njihovi napovedi: če so uporabljene vrednosti obrestnih mer nizke, je tudi verjetnost, da bo nekaj scenarijev (pridobljenih s pomočjo obravnavanega modela) negativnih, večja. Zaradi tega bi lahko za izračun prihodnjih scenarijev obrestnih mer uporabili tudi kakšnega izmed ostalih modelov, a bi v tem primeru lahko dobili ekstremne vrednosti. Izbira je zato težavna: če želimo ohraniti enostavnost modela, se nam lahko pripeti, da z njim realno stanje na trgu ne bo opisano dovolj dobro. Če ga želimo izboljšati in se pri tem realnemu stanju bolj približati, pa lahko postane zapleten do te mere, da za razumevanje in uporabo ni več primeren (Back, 2005, str. 281).

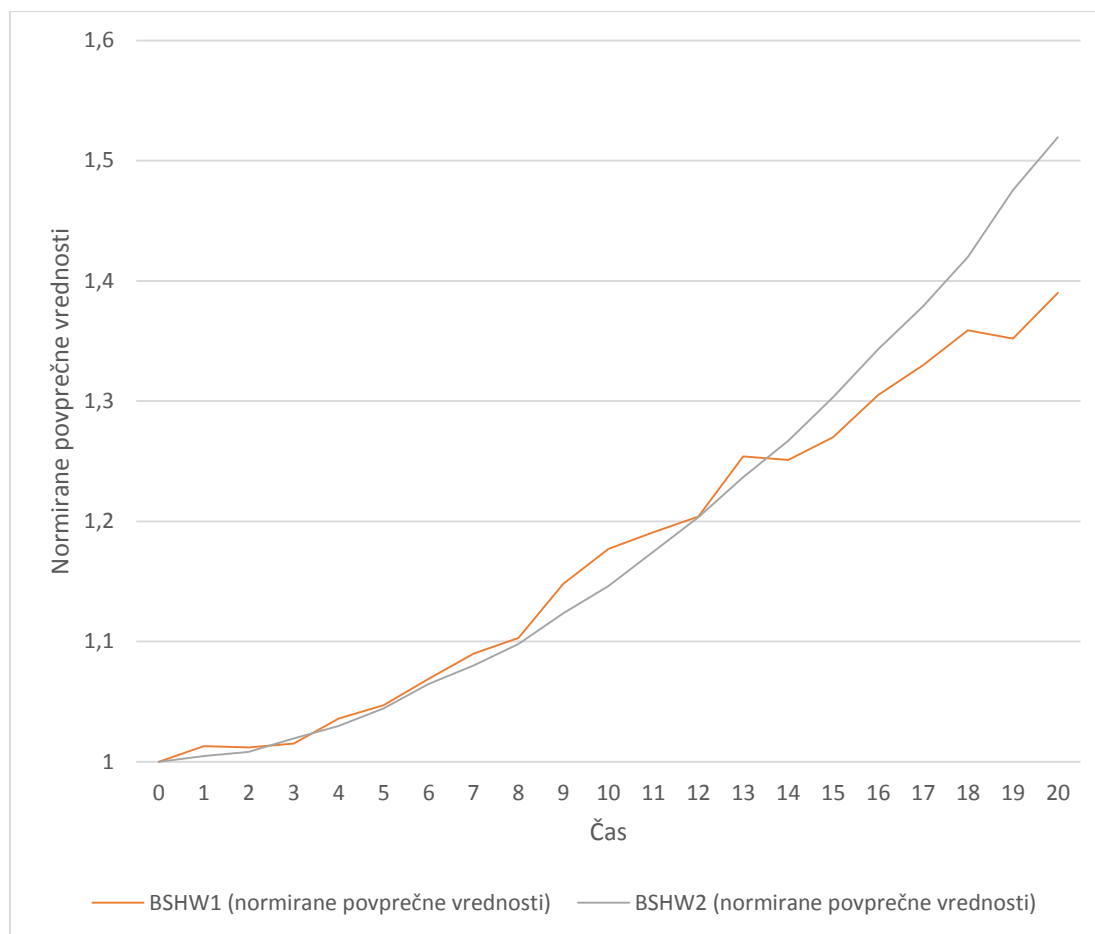
Tabela 10: Povprečne vrednosti in normirane povprečne vrednosti za scenarije vseh treh modelov

Leto	Povprečna vrednost			Normirane povprečna vrednost		
	HW	BSHW1	BSHW2	HW	BSHW1	BSHW2
0	0,0027	100	50	1	1	1
1	0,0039	101,30	50,23	1,4272	1,013	1,0046
2	0,0057	101,2	50,41	2,0851	1,012	1,0082
3	0,0071	101,5	50,97	2,6048	1,015	1,0194
4	0,0089	103,6	51,49	3,2613	1,036	1,0298
5	0,0114	104,7	52,22	4,1945	1,047	1,0444
6	0,0137	106,9	53,23	5,0202	1,069	1,0646
7	0,0154	109	54,01	5,6367	1,09	1,0802
8	0,0177	110,3	54,9	6,4917	1,103	1,098
9	0,0187	114,8	56,17	6,8771	1,148	1,1234
10	0,0193	117,7	57,31	7,0789	1,177	1,1462
11	0,0187	119,1	58,73	6,8624	1,191	1,1746
12	0,0191	120,4	60,17	7,0128	1,204	1,2034
13	0,0203	125,4	61,84	7,4312	1,254	1,2368
14	0,0195	125,1	63,35	7,1413	1,251	1,267
15	0,0212	127	65,16	7,7615	1,27	1,3032
16	0,0207	130,5	67,16	7,5963	1,305	1,3432
17	0,0212	133	68,95	7,7945	1,33	1,379
18	0,0240	135,9	71	8,7927	1,359	1,42
19	0,0268	135,2	73,78	9,8349	1,352	1,4756
20	0,0290	139	75,97	10,6239	1,39	1,5194

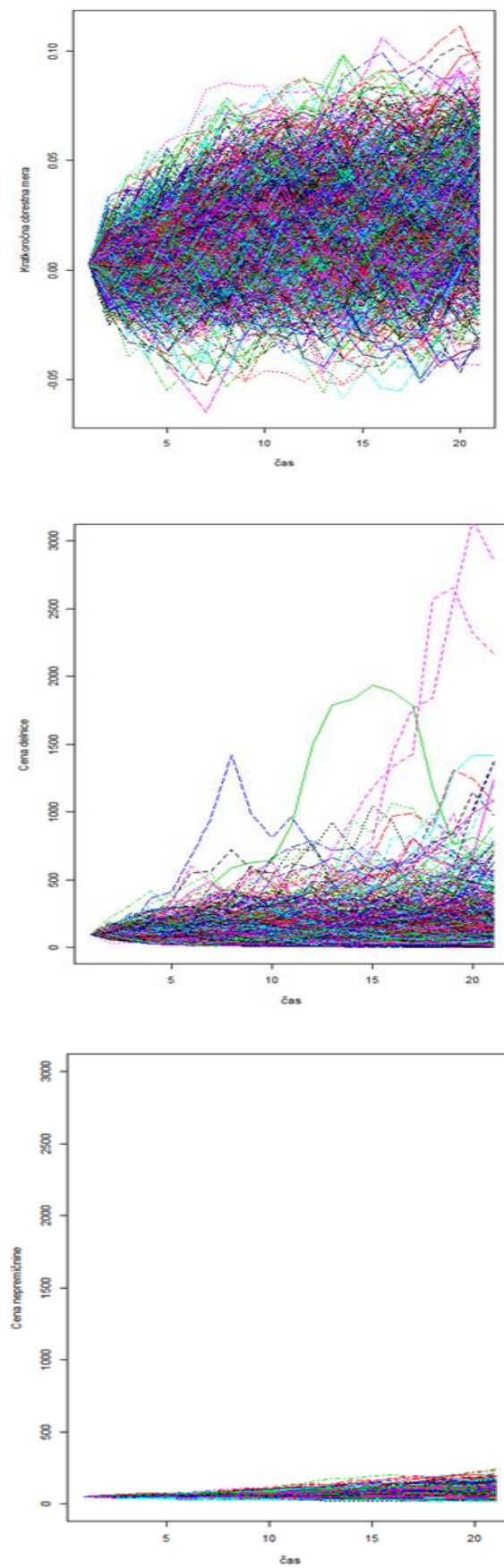
BSHW model je odvisen od gibanja obrestne mere (kar pravzaprav pomeni, da je odvisen od vrednosti HW modela), poleg tega pa zajema še parameter, ki opiše bodisi gibanje delnice (v nadaljevanju BSHW1) bodisi nepremičnine (v nadaljevanju BSHW2); v prvem primeru je njegova vrednost $\sigma = 0,253$, v drugem primeru pa $\sigma = 0,0621$. Ker oba modela sledita enaki SDE (spremenjena je le vrednost parametra, ki opiše nestanovitnost gibanja cen), ju lahko primerjamo: ob primerjavi srednjega (rezultati BSHW1) in desnega grafa (rezultati BSHW2) na Sliki 17, vidimo, da na prvem večja gmota scenarijev počasi narašča, a je med njimi nekaj takih, ki rezultirajo v ekstremne vrednosti in odstopajo od večine. Na drugem scenariji tvorijo nekakšno gmoto, ki v povprečju narašča, pri čemer takih, ki bi izstopali, ni. Vzrok za različni gibanji lahko iščemo v vrednosti parametra σ , ki je za model BSHW1 večja.

Če primerjamo povprečne vrednosti, ki jih dosegata modela, vidimo, da je v zadnjem obdobju povprečje pri BSHW2 nekoliko višje od tistega pri BSHW1. Vrednosti so zapisane v Tabeli 10, za lažjo primerjavo pa so na Sliki 16 prikazane še normirane povprečne vrednosti.

Slika 16: Primerjava normiranih povprečnih vrednosti scenarijev za BSHW1 in BSHW2



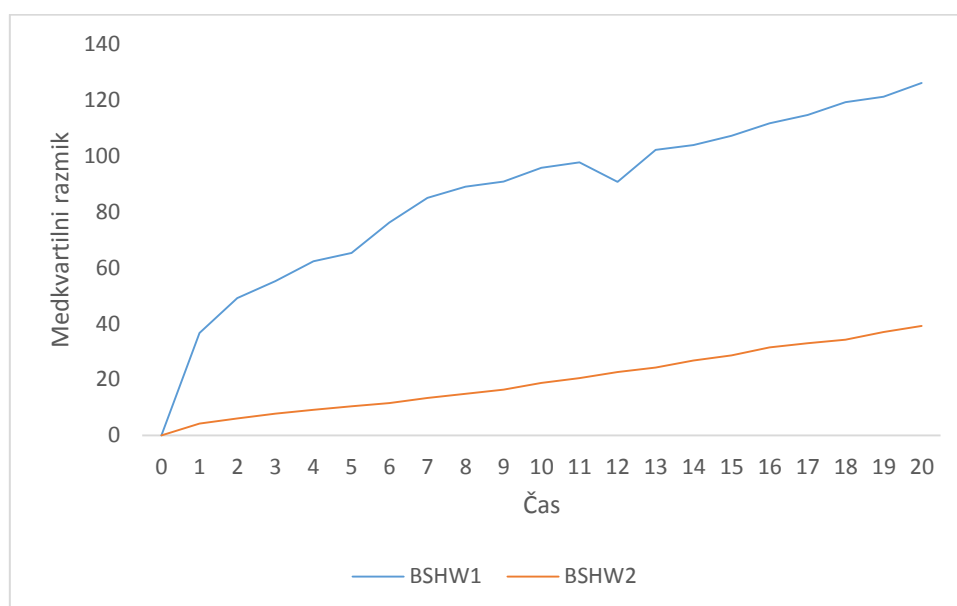
Slika 17: Primerjava bodočih scenarijev za model HW (zgoraj), model BSHW1 (sredina) in model BSHW2 (spodaj)



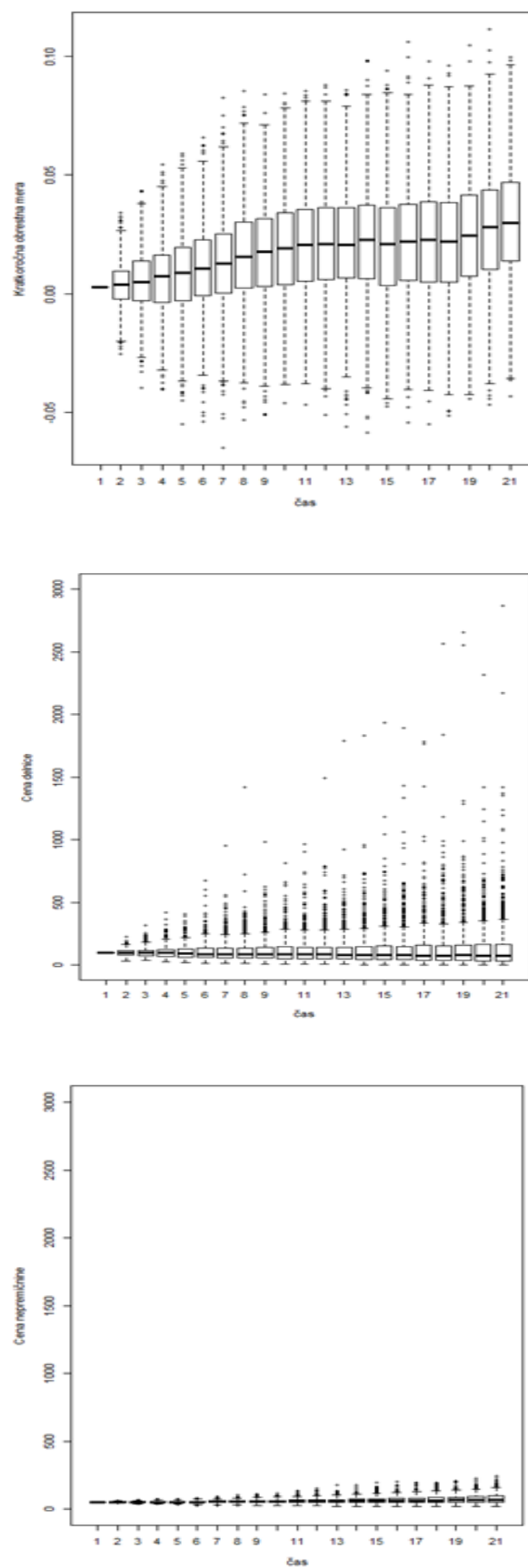
Na Sliki 19 je ponazorjena razpršenost podatkov, do katere smo prišli z uporabo kvartilov Q1, Q2 in Q3, ki podatke razdelijo na štiri številčno enake dele. Le-te lahko ponazorimo z grafom, ki ga imenujemo škatla z brki: na njem vsakemu letu pripada škatla, katere začetek označuje Q1, debelejša črta v njej označuje Q2, njen vrh pa Q3. Nad in pod njo so označeni še minimumi in maksimumi vrednosti scenarijev v vsakem letu. S kvartili lahko ocenimo razpršenost podatkov, ki jo dobimo z izračunom medkvartilnega razmika oziroma razlike Q3–Q1 (Quartiles, 2015).

Sliki 18 predstavlja medkvartilni razpon za oba modela, iz katere je razvidno, da za modela BSHW1 in BSHW2 le-ta z leti narašča. Pri drugem je naraščanje monotono, pri prvem pa na začetku opazimo velik skok, ki mu nato prav tako sledi (sicer nekoliko hitrejše) monotono naraščanje.

Slika 18: Medkvartilni razmik za BSHW1 in BSHW2



Slika 19: Primerjava razpršenosti podatkov pri vseh modelih



6 IZRAČUN ZTR ZA PRODUKTE

Namen sestave ESG, njegove kalibracije na tržne vrednosti in generiranje prihodnjih scenarijev je izračun ZTR za produkte. V tem poglavju bo z uporabo vseh do sedaj predstavljenih formul in vrednosti prikazan izračun ZTR za dve različici produktov. To pomeni, da bomo obveznosti zavarovalnice vrednotili po tržno vzdržni metodi – tako kot to zahteva S2. Po zahtevah S1, bi lahko take produkte vrednotili po njihovi knjigovodski vrednosti.

Zavarovalnice ponujajo veliko paletno produktov. Življenjsko zavarovanje je zavarovanje, ki obsega zlasti zavarovanje za primer doživetja ali za primer smrti. Življenjsko zavarovanje je lahko vezano na enote investicijskih skladov oz. na enote kritnega sklada. Pri takem zavarovanju, zavarovanec prevzame naložbeno tveganje, ki je povezano s spremembo vrednosti enot premoženja investirana v sklad (Ur. l. RS, št. 99/10-UPB7, 2. člen).

ESG bomo uporabili za izračun ZTR dveh naložbenih zavarovanj. Pri prvi bomo premijo investirali le na en (delniški), pri drugi pa na več trgov (obvezniškega, delniškega in nepremičninskega) in primerjali izračune za različne deleže investiranja. Pri tem tablic smrtnosti ne bomo uporabili.

6.1 Naložbeno zavarovanje (investicija na en trg)

Cilj je izračun najboljše ocene ZTR za enostavni produkt, katerega premijo zavarovalnica investira v nakup ene delnice. Njegove lastnosti so naslednje:

- Lastniku je vsako leto pripisan zagotovljen donos po določeni stopnji, ki jo označimo z $r_1 = 0,0275$.
- Ob dospelju prejme lastnik produkta celotno njegovo donosnost za zadnje leto.
- Trajanje produkta je 10 let.
- Premijo zavarovalnica investira v nakup ene delnice po ceni 1.

Pogoje za višino donosnosti lahko združimo v en izraz, ki opiše celotno donosnost produkta v obdobju i , $i = 1, 2 \dots N$ (v N je dospelost produkta):

$$r_i^{celotna} = (r_1) * I_{(i < N)} + 1 * I_{(i = N)}, \quad (83)$$

kjer je

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{če } x \in A \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}. \quad (84)$$

Zavarovalnica vsako leto trajanja pogodbe oblikuje ZTR v skladu z naslednjima formulama:

$$R_0 = 1, \quad (85)$$

$$R_i = R_{i-1} * \frac{S_i}{S_{i-1}} (1 - r_i^{celotna}). \quad (86)$$

Najboljšo oceno ZTR dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov:

$$BE = E^* \left[\sum_{i=1}^N e^{-\int_0^i r_u du} R_i \right]. \quad (87)$$

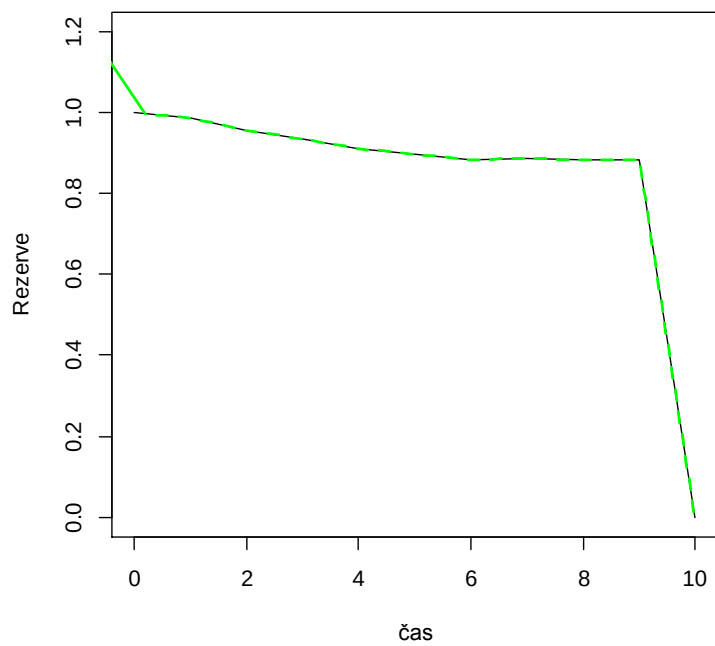
Rezultate pripravimo s pomočjo simulacij za gibanje delnice, ki smo jih prikazali zgoraj in z nastavitvijo vseh lastnosti produkta. V Tabeli 11 je prikazana porazdelitev ZTR v času od začetka trajanja produkta (leto 0) do konca trajanja produkta (leto 10). Prikazane so vrednosti 1. kvartila, mediane, povprečne vrednosti in 3. kvartila. Povprečna vrednost ZTR v času je prikazana tudi na Sliki 20.

Tabela 11: Kvartili porazdelitev ZTR v času

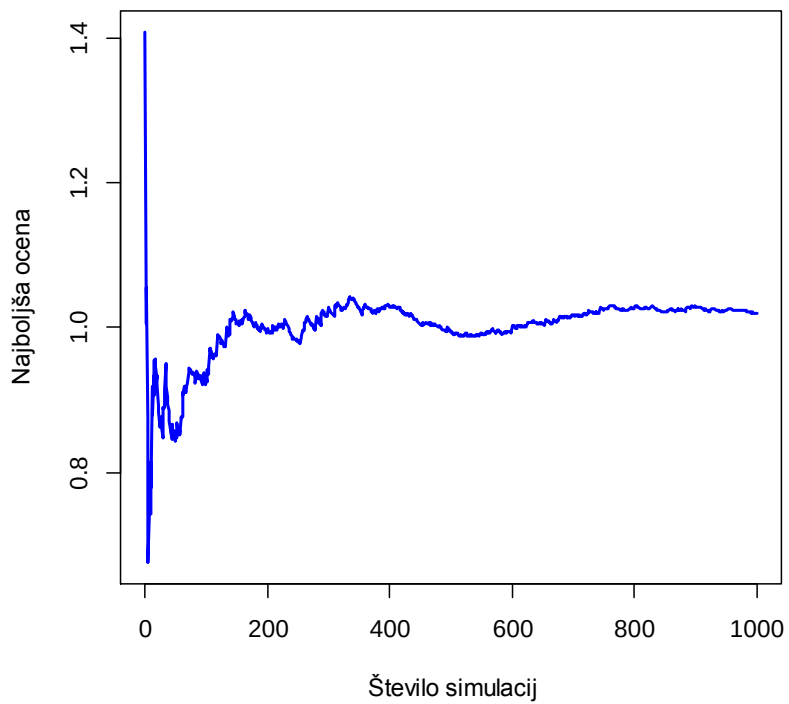
Leto	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil
0	1	1	1	1
1	0,814	0,945	0,988	1,130
2	0,706	0,879	0,955	1,110
3	0,634	0,860	0,937	1,120
4	0,578	0,799	0,912	1,120
5	0,527	0,775	0,896	1,100
6	0,482	0,721	0,885	1,130
7	0,443	0,694	0,887	1,130
8	0,403	0,670	0,885	1,100
9	0,395	0,648	0,884	1,130
10	0	0	0	0

Vrednost najboljše ocene, ki je za opisan produkt izračunana po formuli (87), je 1,018643. To vrednost smo dobili z uporabo 1.000 simulacij prihodnjih denarnih tokov. S Sliko 21 ponazorimo vrednosti najboljše ocene glede na število simulacij (modra barva) in konvergenčno vrednost najboljše ocene (rdeča barva).

Slika 20: Povprečna vrednost ZTR v času



Slika 21: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij



6.2 Naložbeno zavarovanje (investicija na več trgov)

Za drugi primer izračuna ZTR uporabimo produkt, pri katerem zavarovalnica premijo investira v portfelj, sestavljen iz različnih sredstev; predpostavimo, da ga sestavljajo investicije v nepremičnine, delnice in obveznice. Izračun bo pripravljen za različne deleže investicij v izbrana sredstva.

Lastnosti produkta so naslednje:

- Lastniku je vsako leto pripisan zagotovljen donos po določeni stopnji, ki jo označimo z r_1 .
- Ob dospetju prejme lastnik produkta celotno njegovo donosnost za zadnje leto.
- Premijo zavarovalnica investira v portfelj, ki ga sestavljajo delnice, nepremičnine in brezkuponske enoletne obveznice.
- Imetnik police ima možnost izbire med tremi različnimi portfelji, v katere investira premijo, ki jo plača ob začetku zavarovanja.
- Možnosti portfelja so naslednje: konzervativni (60% premije se investira v obveznice, 30% v nepremičnine in 10% v delnice), uravnoteženi (40% premije se investira v obveznice, 40% v nepremičnine in 20% v delnice) ter dinamični (10% premije se investira v obveznice, 30% v nepremičnine, 60% v delnice). Lastnosti vseh treh so prikazane v Tabeli 12.
- Zavarovanec plača premijo na začetku (v vrednosti 100 €), nato pa se ta porazdeli med sredstva glede na izbrani portfelj.
- Dobiček produkta zavarovalnica imetniku police izplača ob zapadlosti produkta, t. j. čez 10 let.

Tako kot pri prejšnjem produktu, želimo izračunati najboljšo oceno ZTR. Do izračuna pridemo s simulacijo 10.000 scenarijev po metodi Monte Carlo. Pri tem predpostavimo, da je $r_1 = 0,0275$.

V spodnjih Tabelah 13, 14 in 15 so zbrani rezultati kvartilov porazdelitev za vsakega izmed treh portfeljev. Na Slikah 22, 24 in 26 je prikazana povprečna vrednost ZTR v času za vsak portfelj. Za vsakega izmed slednjih so pripravljeni še grafi (Slike 23, 25 in 27), kjer je razvidna konvergenca najboljše ocene ZTR glede na število simulacij.

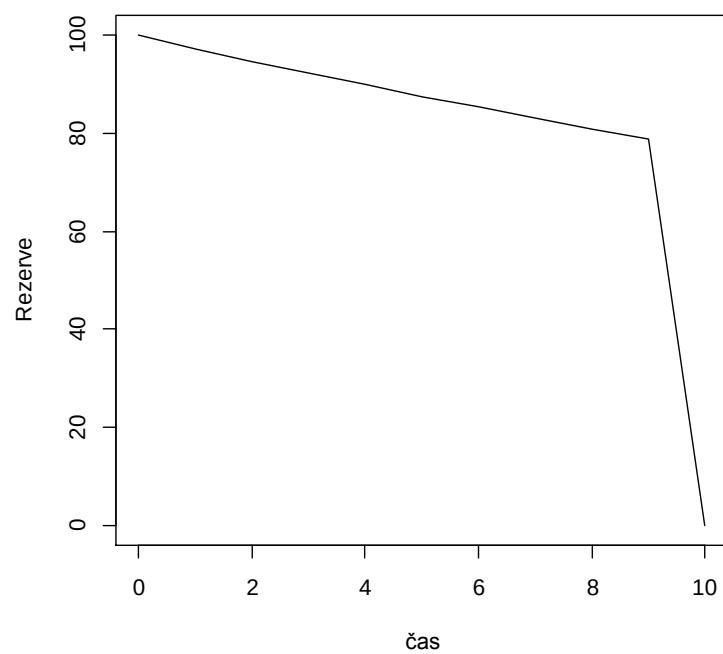
Tabela 12: Lastnosti treh portfeljev

	Obveznice	Nepremičnine	Delnice
Konzervativni portfelj	60%	30%	10%
Uravnoteženi portfelj	40%	40%	20%
Dinamični portfelj	10%	30%	60%

Tabela 13: Kvartili porazdelitev ZTR v času za konzervativni portfelj

Leto	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil
0	100,00	100,00	100,00	100,00
1	95,06	97,01	97,23	99,13
2	91,66	94,30	94,71	97,27
3	88,55	91,65	92,25	95,27
4	85,64	89,14	89,89	93,21
5	82,81	86,63	87,56	91,23
6	80,04	84,22	85,27	89,17
7	77,27	81,86	83,04	87,31
8	74,65	79,55	80,90	85,55
9	72,13	77,26	78,73	83,46
10	0,00	0,00	0,00	0,00

Slika 22: Povprečna vrednost ZTR v času za konzervativni portfelj



Slika 23: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za konzervativni portfelj

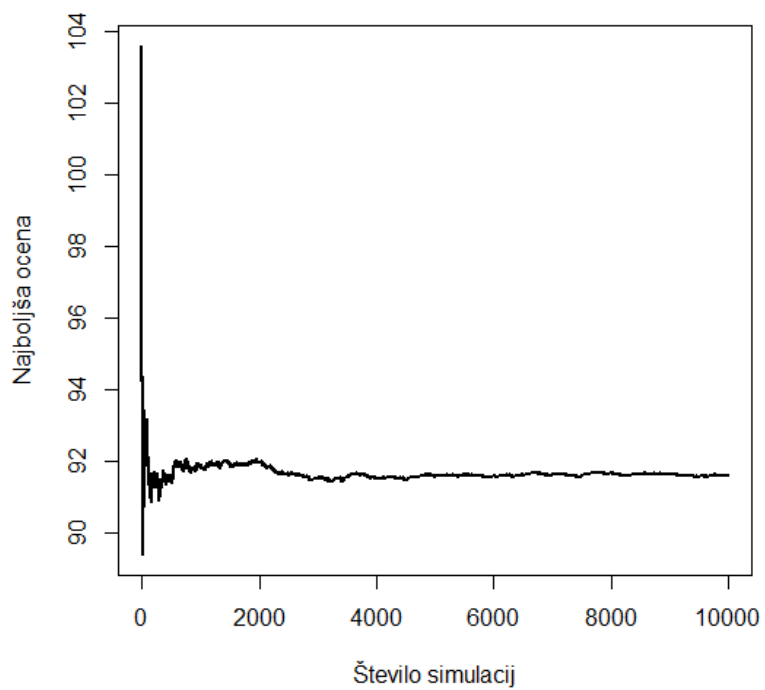
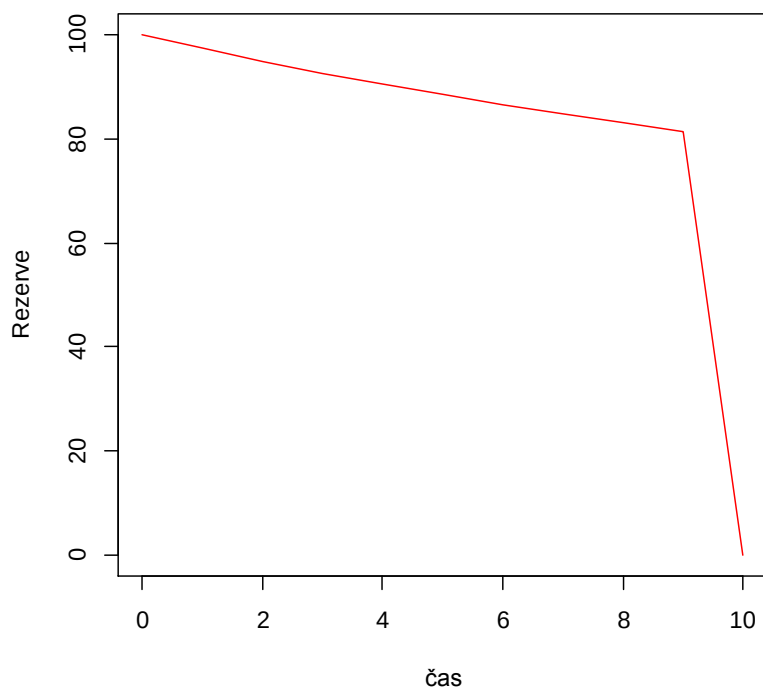


Tabela 14: Kvartili porazdelitev ZTR v času za uravnoteženi portfelj

Leto	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil
0	100	100	100	100
1	93,42	96,77	97,33	100,6
2	89,49	93,89	94,91	99,3
3	86,04	91,36	92,62	97,57
4	83,06	88,83	90,54	95,88
5	80,23	86,36	88,49	94,26
6	77,46	84,2	86,59	92,79
7	74,8	82,12	84,76	91,27
8	72,35	80,16	83,11	90,12
9	70,18	78,23	81,4	88,51
10	0	0	0	0

Slika 24: Povprečna vrednost ZTR v času za uravnoteženi portfelj



Slika 25: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za uravnoteženi portfelj

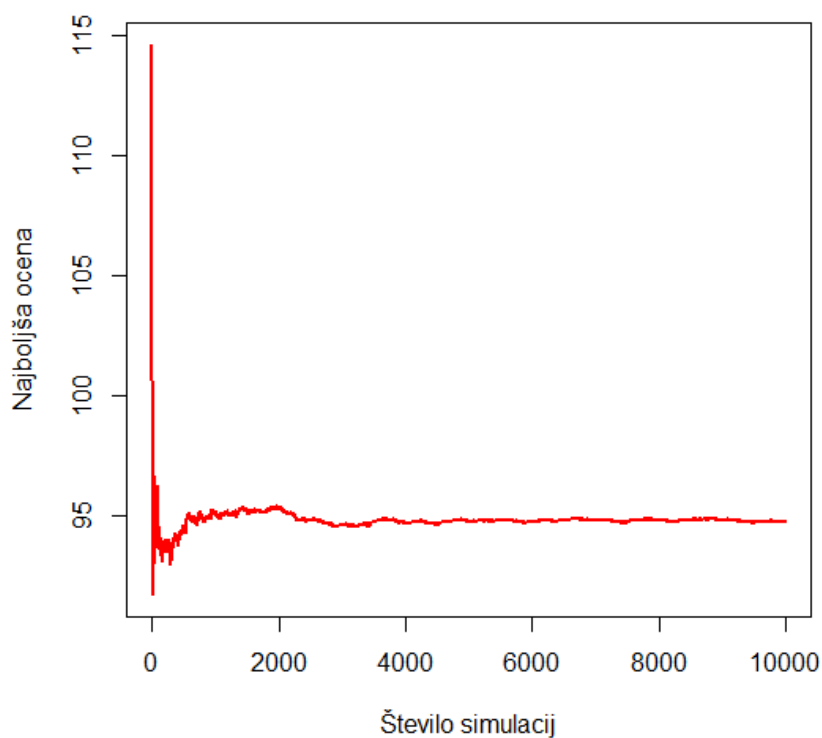
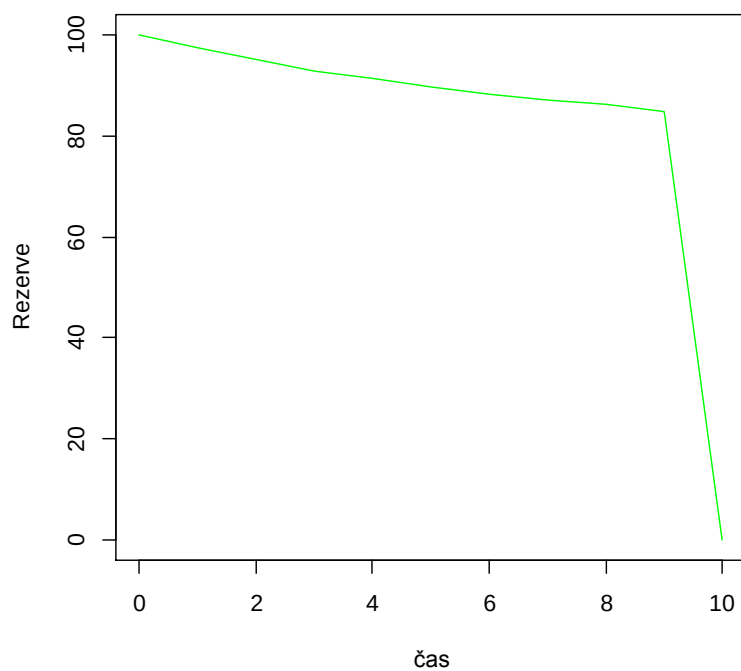


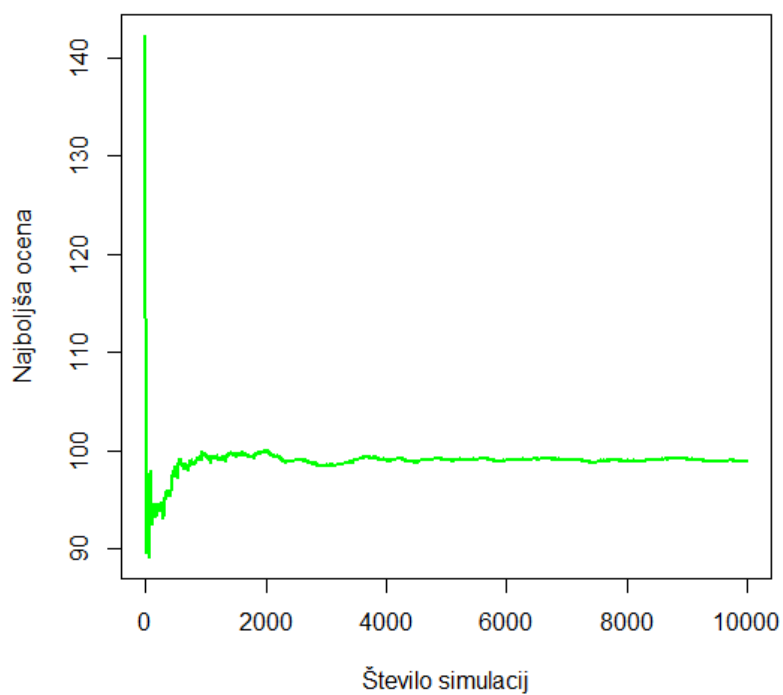
Tabela 15: Kvartili porazdelitev ZTR v času za dinamični portfelj

Leto	1. kvartil	Mediana	Povprečna vrednost	3. kvartil
0	100	100	100	100
1	86,67	95,5	97,42	106,2
2	80,17	91,78	95,1	106,1
3	75,25	88,35	92,99	104,9
4	70,94	85,19	91,43	104,4
5	67,27	82,08	89,75	103,2
6	64,11	79,13	88,41	102,4
7	61,14	76,68	87,08	100,9
8	58,96	74,63	86,13	99,37
9	56,92	72,11	84,97	98,15
10	0	0	0	0

Slika 26: Povprečna vrednost ZTR v času za dinamični portfelj



Slika 27: Konvergenca najboljše ocene glede na število simulacij za dinamični portfelj



6.2.1 Primerjava produktov glede na izbrani portfelj

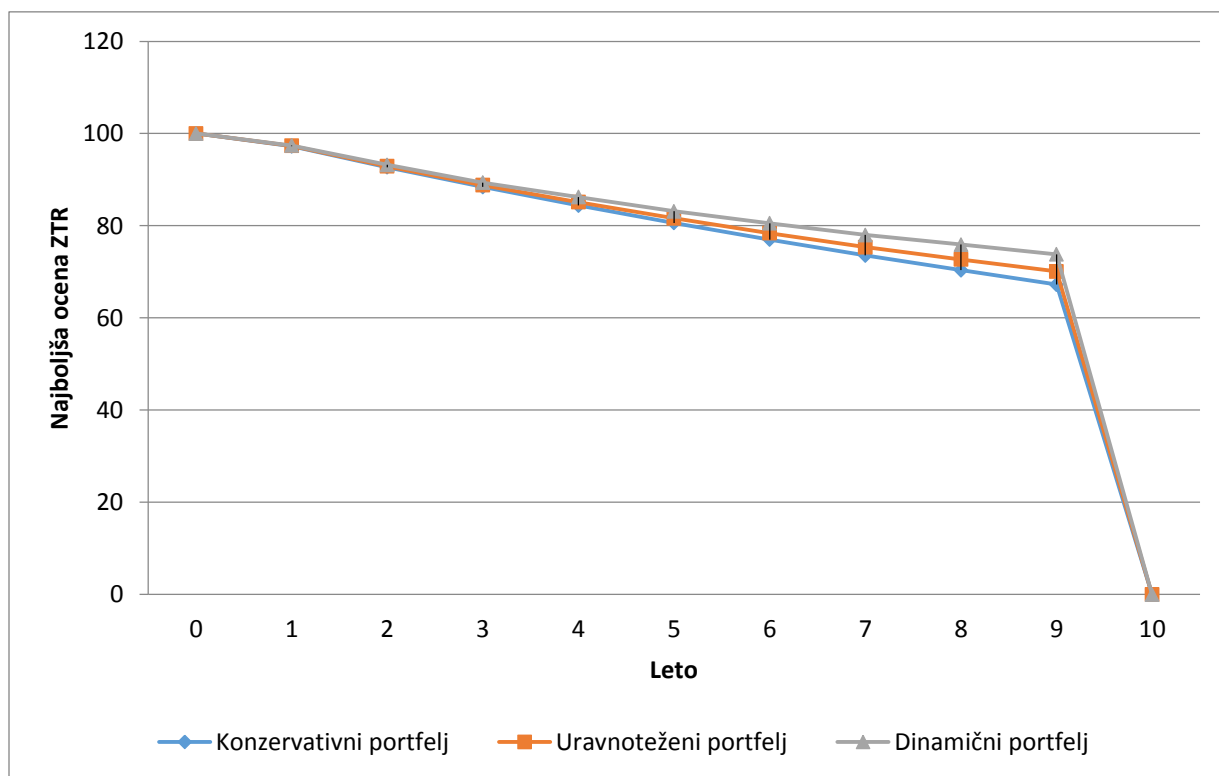
V Tabeli 16 so zbrani rezultati najboljše ocene ZTR za produkt glede na izbiro portfelja, v katerega se investira premija. Opazimo, da je vrednost najboljše ocene najnižja pri konzervativnem (91,62) in najvišja pri dinamičnem portfelju (98,91), ki ga izberejo tvegane najbolj naklonjeni zavarovanci.

Na Sliki 28 so hkrati prikazane povprečne vrednosti najboljše ocene vseh treh portfeljev (združeni so zgornji posamezni grafi). Kot je bilo pričakovati, je projekcija ZTR po letih najvišja za dinamični portfelj, sledita še uravnoteženi in konzervativni. Slika 29 podrobneje prikazuje povprečne vrednosti ZTR za prvih sedem let.

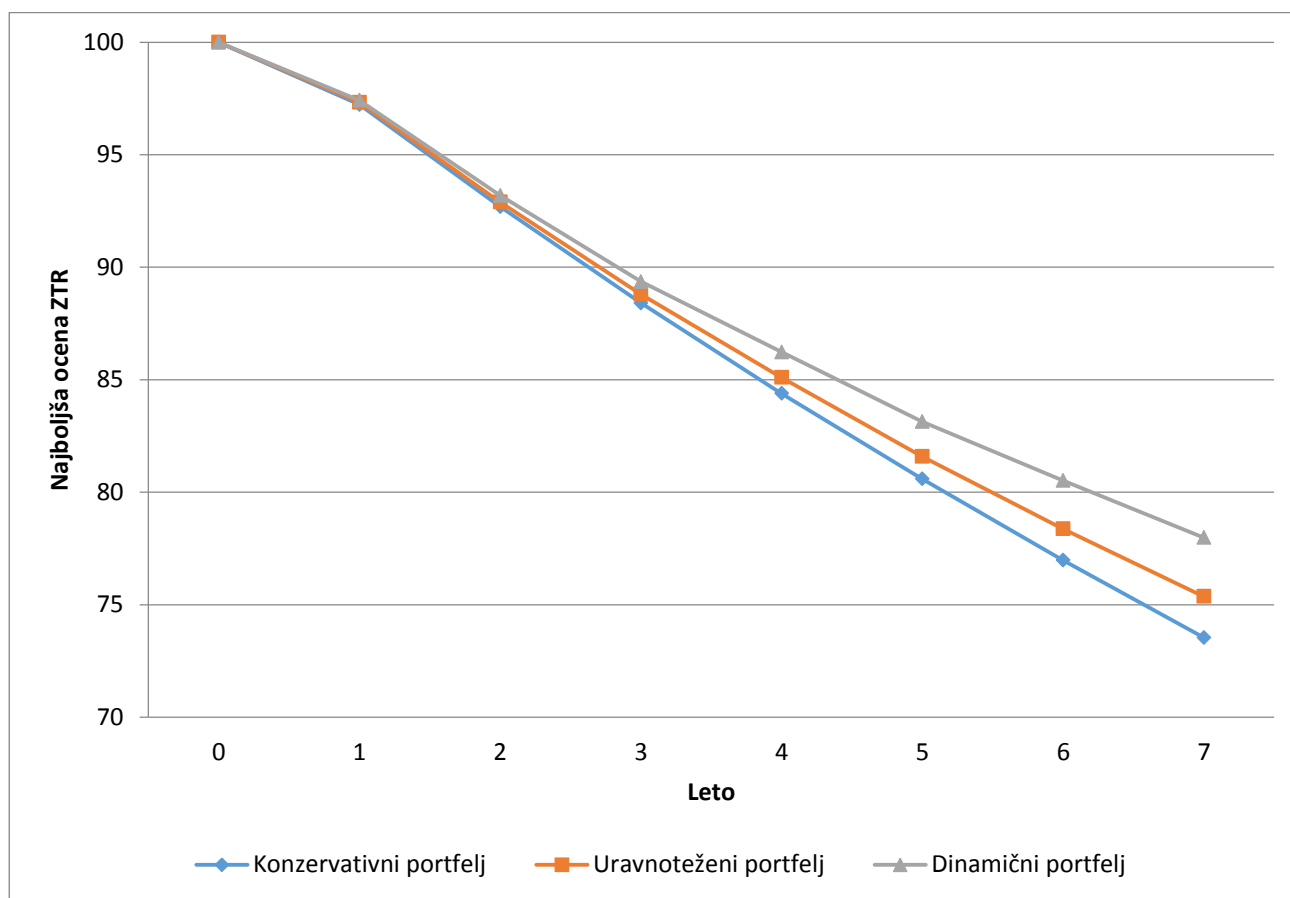
Tabela 16: Vrednosti najboljših ocen ZTR za produkt glede na izbiro portfelja

	Konzervativni portfelj	Uravnoteženi portfelj	Dinamični portfelj
Najboljša ocena	91,61784	94,76849	98,91354

Slika 28: Najboljša ocena ZTR za konzervativni, uravnoteženi in dinamični portfelj



Slika 29: Najboljša ocena ZTR za konzervativni, uravnoteženi in dinamični portfelj za obdobje sedmih let



SKLEP

Namen magistrskega dela je bila predstavitev ESG in njegove uporabe. V tem okviru smo pripravili izračune ZTR za izbrane produkte, ki bi jih z vključitvijo večih faktorjev tveganj v morebitnih nadaljnjih natančnejših obravnavah lahko še izboljšali. Sestavili smo tržno vzdržni ESG in s pomočjo kalibracije pripravili prihodnje scenarije za gibanje obrestne mere, delnic in vrednosti nepremičnin. Kalibracija je bila opravljena s pomočjo prileganja tržnim podatkom z metodo najmanjših kvadratov (model obrestnih mer in kapitalski model), kjer to ni bilo mogoče, pa s pomočjo zgodovinskih podatkov (model nepremičnin).

V ESG smo obravnavali tri faktorje tveganj, ki so v portfelju zavarovalnice najpogostejše prisotni: obveznice (obrestna mera), delnice in nepremičnine. Za vsakega od teh smo razvili model, ki opisuje njihovo gibanje. Za gibanje obrestne mere smo uporabili HW model, za gibanje delnic in nepremičnin pa BSHW model.

Ko so bili s pomočjo kalibracije pridobljeni vsi parametri modelov, smo pripravili prihodnje scenarije gibanj faktorjev tveganj. Razvoj prihodnjih scenarijev smo uporabili za izračun najboljših ocen ZTR za dva tipa produktov z zagotovljeno stopnjo donosa. Prvi, enostavnejši produkt je predpostavil investiranje samo na delniški trg: v tem primeru je bil izračun ZTR relativno enostaven in zato primeren za razvoj kodnega zapisa v računalniškem programu R,

ki smo ga nato nadgrajenega uporabili za izračun ZTR pri drugem, nekoliko kompleksnejšem produktu. Pri slednjem smo predpostavili, da zavarovalnica premijo investira v tri različne portfelje, sestavljene iz različnih deležev investicij v delnice, obveznice in nepremičnine. Ravno na podlagi primerjave izračunov, dobljenih pri obravnavi takega produkta, smo nato lahko prišli do sklepnega rezultata.

Izračuni so bili opravljeni po postopku, kot je zahtevan v okviru nove in aktualne S2. Taka tehnika izračuna je od tistih, ki jih predpisuje starejša in iztekajoča se S1, precej drugačna, saj zahteva upoštevanje tržne vzdržnosti izračunane najboljše ocene ZTR. Zaradi tega je nujno potrebno uporabiti simulacijo prihodnjih scenarijev, za kar smo v magistrskem delu izmed različnih možnosti izbrali metodo Monte Carlo. Na ta način smo za vsakega od portfeljev dobili svojo oceno ZTR. Ker so bili portfelji sestavljeni iz različnih deležev vložkov v delnice, obveznice in nepremičnine, so bile tudi izračunane ocene nujno različne: ocena konzervativnega (v delnice se investira 10 % sredstev) je 92,44, ocena uravnoteženega (v delnice se investira 20 % sredstev) je 95,31 in ocena dinamičnega, pri katerem je delež investicije v delnice največji (v delnice se investira 60 % sredstev) je 99,04. Dobljeni rezultati prikazujejo, kolikšne rezervacije mora zavarovalnica ob vplačilu enkratne premije 100 € in upoštevanju tudi vseh ostalih lastnosti produkta, navedenih v poglavju 6.2, oblikovati za posamezni tip portfelja.

Znano je, da je investicija v delniški trg bolj tvegana od investicij v obvezniškega ali nepremičninskega, zato ni preseneča, da to izkazujejo tudi dobljeni rezultati. Večji, kot je v portfelju delež delnic, večja je ocena ZTR, saj so le-te najbolj tvegana naložba in obratno: manjši, kot je delež, ki ga zavarovalnica investira v delnice, manjša je ocena. Ob primerjavi dobljenih rezultatov lahko torej zapišemo naslednjo zaključno ugotovitev: z izbiro različnih portfeljev, v katere zavarovalnica investira premijo, se spreminja tudi najboljša ocena ZTR – bolj kot je portfelj naklonjen tveganju (če je v njem večji procent investicij v delnice), večja je vrednost najboljše ocene ZTR.

Pri izračunu ocene ZTR se ob tem, kar je bilo predstavljeno v magistrskem delu, odpirajo še mnoge druge možnosti. V ESG bi bilo tako poleg zgoraj predstavljenih smiselno vključiti še modele za inflacijo, kreditno in valutno tveganje ter pri njegovem izračunu upoštevati mortalitetne tablice. Pomembno je, da vsaka zavarovalnica prepozna svoja tveganja in v ESG zajame modele, ki opišejo njihova gibanja. Tudi pri izbiri le-teh imamo na voljo veliko možnosti. V magistrskem delu smo pri obravnavi gibanja obrestne mere uporabili enofaktorski model, uporabili pa bi lahko tudi več-faktorskega. Prav tako smo pri obravnavi gibanja delnic in nepremičnin uporabili model, ki predpostavlja konstantno nestanovitnost in stohastično obrestno mero; v okviru podrobnejših raziskav bi lahko uporabili tudi bolj kompleksen model, ki predpostavlja spreminjajočo se nestanovitnost v času. Model mora biti izbran v skladu z lastnostmi portfelja in stanja na trgu, pred dokončno izbiro pa je potrebno testirati tudi njegovo uporabnost.

Veliko možnosti je na voljo tudi pri kalibraciji modelov, pri čemer smo se v magistrskem delu odločili za uporabo kalibracije s pomočjo vrednotenja opcij in zgodovinskih podatkov. Ob

izbiri finančnih instrumentov, na katere kalibriramo modele, je potrebno testirati njihovo ustreznost in izbiro prilagoditi naravi produktov, ki jim želimo določiti višino ZTR.

Namen tržno vzdržnega ESG je zajeti kompleksnost trga, a je pri tem treba paziti, da z implementacijo zahtevnejših modelov ne izgubimo enostavnosti, razumljivosti in preglednosti rezultatov, ki jih z njihovo uporabo pridobimo.

LITERATURA IN VIRI

1. Agencija za zavarovalni nadzor (AZN). Nove kapitalske zahteve za zavarovalnice in pozavarovalnice. Najdeno 16. julija 2015 na spletnem naslovu <http://www.a-zn.si/Default.aspx?id=154>.
2. Back, K. (2005). *A Course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation*. Berlin: Springer.
3. Baldvinsdóttir, E. K., & Palmborg, L. (2011, 4. marec). On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator. Najdeno 26. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.math.kth.se/matstat/seminarier/reports/M-exjobb11/110317a.pdf>
4. Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press.
5. Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
6. Bourke, P. (1999, december). Interpolation methods. Najdeno 12. avgusta 2015 na spletnem naslovu <http://paulbourke.net/miscellaneous/interpolation/>
7. Brach, M. A. (2003). *Real Options in Practice*. Hoboken: John Wiley & Sons.
8. Care, R., & Fenech, J. (2006). Solvency II: Challenges and industry impact (handout). Najdeno 17. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/solvency-ii-challenges-and-industry-impact-handout>
9. Carr, P. (30. marec, 2005). Interest Rate Models: Hull White. Najdeno 26. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.math.nyu.edu/~benartzi/Slides10.3.pdf>
10. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS). (2009). CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Articles 120 to 126, Tests and Standards for Internal Model Approval. Najdeno 17. junija 2015 na spletnem naslovu <https://eiopa.europa.eu/CEIOPS-Archive/Documents/Advices/CEIOPS-L2-Advice-on-Tests-and-Standards-internal-model-approval.pdf>
11. Central Bank of Ireland. (2011). Discussion Paper: Economic Scenario Generators and Market Consistency. Najdeno 20. avgust 2015 na spletnem naslovu <http://www.centralbank.ie/regulation/industry-sectors/insurance-companies/Documents/Discussion%20Paper%20-%20Economic%20Scenario%20Generators%20and%20Market%20Consistency.pdf>
12. Croix, J. A. (2013, 1. januar). Basic Economic Scenario Generator: Technical Specifications. Najdeno 26. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.ressources->

actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-
isfa.nsf/34a14c286dfb0903c1256ffd00502d73/a5e99e9abf5d3674c125772f00600f6c/\$FI
LE/Main_US.pdf

13. Croix, J.-A., Moudiki, T., Planchet, F., & Youssef, W. (2015, 19. februar). Package 'ESG'. Najdeno 15. marca 2015 na spletnem naslovu <https://cran.r-project.org/web/packages/ESG/ESG.pdf>
14. Djehiche, B., & Hörfelt, P. (2004, 5. november). Standard Approaches to Asset and Liability Risk. Najdeno 16. marca 2015 na spletnem naslovu [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/933ff6391d881d7ac1256f5e0035fae1/\\$FILE/ALM_risk%20final.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/933ff6391d881d7ac1256f5e0035fae1/$FILE/ALM_risk%20final.pdf)
15. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (30. april, 2014a). Annexes to the Technical Specifications for the Preparatory Phase (Part I). Najdeno 23. marca na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/C_-_Annexes_to_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf
16. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (30. april, 2014b). Technical Specifications for the Preparatory Phase (Part I). Najdeno 23. marca 2015 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf
17. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (2014c, december). Risk-free interest rate term structures. Najdeno 17. marca 2015 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA_RFR_20141231.zip
18. European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). (23. februar, 2015). Technical documentation regarding the risk free interest rate structure. Najdeno 5. junija 2015 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/EIOPA_RFR_Technical_Documentation.pdf
19. *Extrapolation: What is it?* Najdeno 12. avgusta 2015 na spletnem naslovu <http://www.statisticshowto.com/extrapolation/>
20. Fisher, J. D., Geltner, D. M., & Webb, R. B. (1994) Value Indices of Commercial Real Estate: A Comparison of Index Construction Methods. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 9, 137-164.
21. Hull, J., & White, A. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.
22. Hull, J., & White, A. (1993, junij). One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(2), 235-254.

23. Hulle, K. van. (2011, 9. junij). Uvajanje direktive Solventnosti II v Evropi. Najdeno 15. aprila 2015 na spletnem naslovu <http://www.zav-zdruzenje.si/wp-content/uploads/2013/01/Osrednje-predavanje-Uvajanje-direktive-Solventnost-II-v-Evropi.pdf>
24. Jamshidian, F. (1989, marec). Exact Bond Option Formula. *The Journal of Finance*, 44(1), 205-209.
25. Knava, V. (2009, december). Solvency II: Preparing your ESG for Internal Model Approval. Najdeno 17. junija 2015 na spletnem naslovu http://www.barrhibb.com/documents/downloads/Preparing_ESG_Solv_II_IM_Approval.pdf
26. Maudiki, T. (2014, 13. junij). ESGtoolkit, tools for Economic Scenarios Generatio. Najdeno 15. marca 2015 na spletnem naslovu https://cran.r-project.org/web/packages/ESGtoolkit/vignettes/ESG2toolkit_Intro_062014.pdf
27. Mc Hugh, M. (2014, januar). Reinsurance in the economic balance sheet. Najdeno 15. septembra 2015 na spletnem naslovu http://www.munichre.com/site/corporate/get/documents_E1180757095/mr/assetpool.shared/Documents/5_Touch/_Publications/302-08161_en.pdf
28. Moody's Analytics (27. marec 2013). Economic Scenario Generator. Najdeno 25. Marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.casact.org/community/affiliates/case/0313/Grandchamp.pdf>
29. Insurance. Intro to Insurance: What Is Insurance? V *Investopediji*. Najdeno 15. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.investopedia.com/university/insurance/insurance1.asp>
30. *Quartiles*. Najdeno 20. novembra 2015 na spletnem naslovu <https://www.mathsisfun.com/data/quartiles.html>
31. Rufelt, D. (2011, oktober). Methods for estimating premium risk for Solvency purposes. Najdeno 14. marca 2015 na spletni strani <http://www2.math.su.se/matstat/reports/master/2011/rep10/report.pdf>
32. *Solvency II*. Najdeno 10. marca 2015 na spletnem naslovu <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii>
33. *Solvency II Overview*. Najdeno 11. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.barclaysimpson.com/solvency-ii-overview>
34. Solvency II Update. (2010, 6. julij). Najdeno 18. marca 2015 na spletnem naslovu <http://www.slideshare.net/kingphilip1/solvency-ii-presentation-dublin-july-2010>

35. Vasiček, O. (1977, avgust). An Equilibrium Characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.
36. *What is Solvency 2?* Najdeno 14. marca 2015 na spletnem naslovu <https://www.lloyds.com/the-market/operating-at-lloyds/solvency-ii/about/what-is-solvency-ii>
37. Wilmott, P. (2007). *Poul Wilmott Introduces Quantitative Finance* (2nd ed.). Chichester: John Wiley & Sons.
38. Worthington, S. (2011, 1. julij). ERM Conference, Winning strategies in the Solvency II word, Calibrating the real-world ESG to your view: giving credibility to judgement. Najdeno 15. marca 2015 na spletnem naslovu <https://www.towerswatson.com/assets/pdf/events/14144/Calibrating-real-world-ESG-to-your-view.pdf>
39. Zakon o zavarovalništvu (ZZavar). *Uradni list RS* št. 99/10-UPB7 z dne 7.12.2010.