UNIVERZA V LJUBLJANI

EKONOMSKA FAKULTETA

# MAGISTRSKO DELO

## MODELI STOHASTIČNIH OBRESTNIH MER PRI VREDNOTENJU ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJ

Ljubljana, september 2006

Aleš Tomažin

## IZJAVA

Študent Aleš Tomažin izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom prof. dr. Mihaela Permana in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 01.09.2006 Podpis:

# Kazalo

# 1 UVOD

Ljudi, njihovo premoženje in dejavnost so že od nekdaj ogrožale različne nevarnosti. Temu je sledilo spoznanje, da se človek kot posameznik ne more upreti delovanju naravnih sil, niti nevarnostim, ki ogrožajo njegovo življenje in premoženje. Zgodovina zavarovalništva sega že v babilonski čas kralja Hamurabija.

Vse oblike zavarovanj imajo en cilj: omiliti oziroma odpraviti posledice škod prizadetemu. V tem sklopu deluje tudi aktuar. To je oseba, ki rešuje finančne probleme in s svojim delom ter svetovanjem pripomore k finančnim odločitvam v zavarovalništvu in bančništvu.

## 1.1 Opredelitev problema in cilj

Zavarovalništvo je kot panoga med prvimi po akumuliranju kapitala. Predvsem velja izpostaviti življenjska ter pokojninska zavarovanja. V Sloveniji je v letu 2004 obračunana premija predstavljala 5,6% BDP za leto 2004 (Statistični zavarovalniški bilten 2005, str. 7). Na področju življenjskih zavarovanj zavarovalnice tekmujejo s ponujanjem novih zavarovalnih produktov, kjer trenutno najbolj izstopajo produkti z naložbenim tveganjem. V BDP predstavlja premija življenjskih zavarovanj 1,7%, pred desetletjem jo je bilo komaj za pol odstotka. Pri pokojninskih zavarovanjih velja izpostaviti prostovoljna dodatna pokojninska zavarovanja, ki se v Sloveniji razvijajo razmeroma hitro, saj se zavedanje prebivalstva o potrebni skrbi za varnost na stara leta veča. Posledica gibanja kapitalskega trga v Sloveniji je razcvet zavarovanj z naložbenim tveganjem. V letu 2004 je zbrana premija za omenjena zavarovanja predstavljala 40% vse premije življenjskih zavarovanj (Statistični zavarovalniški bilten 2005, str. 45).

Aktuar pri svojem delu uporablja matematične modele. Z modeli oceni sedanjo vrednost prihodnjih slučajnih dogodkov. Aktuarsko modeliranje je tako temelj zavarovalništva in bančništva. Delo aktuarja sloni na matematičnih orodjih, poleg tega mora slediti še demografskim, ekonomskim in zakonodajnim spremembam ter trendom. Takšen pristop reševanja problemov je večplasten, kar je dodatna prednost aktuarjev. Poleg zavarovalniških področij aktuarsko delovanje sega še na področje nadzora, upravljanja investicij in izobraževanja.

Aktuar torej trdi, da se tveganje in negotovost lahko nadzirata ter s preučevanjem preteklosti načrtuje prihodnost. Z vrednotenjem zavarovalnih produktov in obveznosti, ki bo kmalu zakonsko dorečeno, se aktuarjem razširja področje delovanja. Govorimo o nastanku tretje generacije aktuarjev. Aktuar prve generacije je tradicionalni življenjski aktuar, ki pri svojem delu uporablja konstantne procese smrtnosti ter obrestnih mer. Aktuar druge generacije pri svojem delu predpostavlja stohastične procese pri škodnem dogajanju. Aktuar tretje generacije pri svojem delu uporablja poleg stohastičnih procesov pri škodnem dogajanju tudi slučajnost ekonomskega okolja. V ta namen je razvoj finančne matematike postregel s kopico modelov za vrednotenje finančnih instrumentov. Aktuarjem ni potrebno razumeti in poznati vseh modelov za vrednotenje eksotičnih izvedenih finančnih instrumentov. Zadostuje razumevanje osnovnih modelov, iz katerih se lahko izpeljejo tudi bolj zapleteni, če je to potrebno za razvoj zavarovalnih produktov.

Model je v splošnem imitacija oz. posnetek nekega realnega sistema ali procesa. Modeliramo lahko različne stvari: dobičkonosnost zavarovalnega produkta, ki ga mislimo začeti prodajati ali prihodnji denarni tok zavarovalnice, ali verjetnost propada zavarovalnice... Seveda lahko modeliramo tudi procese, ki niso v direktni povezavi z zavarovalništvom npr. gospodarstvo, delovanje človeškega srca (Povh, 1998, str 7.)

Namen magistrskega dela je predstaviti osnovne oblike klasičnih življenjskih zavarovanj in v modele vrednotenja le teh vključiti stohastične obrestne mere. Tako bomo dobili vpogled v samo koristnost oziroma uporabnost modelov stohastičnih obrestnih mer v povezavi z vrednotenjem klasičnih življenjskih zavarovanj. Uporaba stohastičnih obrestnih mer pri vrednotenju je zagotovo radikalna poteza, vendar jo omili dejstvo, da bodo slovenska finančna podjetja kmalu privzela prenovljene mednarodne računovodske standarde, ki za namen vrednotenja v zavarovalnicah predpostavljajo zelo kompleksne stohastične modele (princip poštene oziroma tržno konsistentne vrednosti).

Cilj dela je definirati osnovne modele stohastičnih obrestnih mer in jih analizirati pri vrednotenju klasičnih življenjskih zavarovanj. S tem bomo neposredno preverili trditev Hansa Gerberja, ki trdi, da modeliranje obrestnih mer s stohastičnimi procesi, pri vrednotenju življenjskih zavarovanj, ni smiselno (Gerber, 1996, str. 67). Dobljene rešitve bodo uporabne tudi za slovenski zavarovalni trg.

## 1.2 Zasnova dela

Magistrsko delo bomo razdelili na štiri poglavja. V prvem delu bomo opredelili problem ter cilj magistrskega dela. V drugem delu bomo predstavili aktuarska izhodišča, ki bodo uporabljena v magistrskem delu. Predstavili bomo temelje aktuarskega modeliranja ter model preživetja, ki je osnova aktuarskega modeliranja in vrednotenja zavarovalnih produktov v življenjski zavarovalnici. Predstavili bomo tudi formulacijo življenjskih zavarovanj ter mere tveganja, ki so pokazatelj kvalitete določenega modela vrednotenja. Na koncu drugega poglavja bomo podali še osnove finančne matematike, na katerih sloni izpeljava modelov obrestnih mer. V osrednjem delu bodo analizirani različni modeli stohastičnih obrestnih mer, kjer bomo podali lastnosti ter uporabnost posameznega modela. Sledila bo analiza uporabnosti določenih modelov pri vrednotenju določenih oblik življenjskih zavarovanj. V zaključnem delu bomo predstavili rezultate simulacije, do katerih bomo prišli med izdelavo magistrskega dela.

V delu bomo uporabili izrazoslovje, ki je značilno za aktuarsko ter matematično stroko in zavarovalništvo. Vsak izraz bomo ob vpeljavi natančno obrazložili, kasneje pa uporabili brez posebnih obrazložitev.

# 2 AKTUARSKA IZHODIŠČA

Aktuarski modeli so ključno orodje za ocenjevanje sedanje vrednosti prihodnjih slučajnih dogodkov (plačilo premije, izplačilo obveznosti zavarovancem, delitev dobička zavarovancem...). Kot smo uvodoma privzeli je model posnetek nekega realnega sistema ali procesa. Tako modeli in analiza njihovih rezultatov omogočata, da se spremembe vrednosti določenih parametrov prouči, še preden jih v realnosti implementiramo.

Če bi model implementirali brez ustrezne analize rezultatov, se bi lahko dobiček spremenil v izgubo, gospodarska rast bi zašla v recesijo, po najbolj črnem scenariju pa bi to lahko pomenilo tudi smrt pacienta. Tako moramo pri modeliranju procesov v življenjski zavarovalnici definirati povezave med zakonodajo, davčno politiko ter zavarovalnimi pogoji. Kompleksnost povezav med posameznimi parametri modela je v tem primeru odvisna tudi od prihodnjih dogodkov, ki bodo vplivali na obrestne mere, inflacijo, umrljivost, stroške poslovanja, obseg poslovanja.

Slabosti in prednosti določenega modela se pokažejo v praksi. S pomočjo korakov modeliranja (Core Reading 103, enota 1) že narejeni model izboljšamo oz. prilagodimo dejanskim zahtevam. Že pri sami definiciji modela je potrebno upoštevati predvsem cilje naloge, uporabnost modela, pravilnost podatkov, možnost napak, ki izvirajo iz vrednosti parametrov modela, možnost predstavitve modela in rezultatov.

Iz zgornjega izhajajo tudi prednosti ter slabosti modeliranja. Prednosti so predvsem analiza dolgoročnih procesov v kratkem času, analiza sprememb vrednosti parametrov pred samo implementacijo, zapis kompleksnih realnih sistemov z enostavnimi modeli. Glavni slabosti sta tako kot v večini primerov čas ter stroški. Poleg tega so vprašljivi še rezultati, razumljivost modela, vhodni podatki, ocene rezultatov...

Modele delimo na stohastične in deterministične. Že iz same delitve izhaja, da stohastični modeli opisujejo naravo določene slučajne spremenljivke, medtem ko deterministični modeli ne vsebujejo slučajnosti. Tako rezultate pri determinističnemu modelu dobimo takoj, ko definiramo množico fiksnih vhodnih parametrov in njihovih povezav. Rezultate pogosto dobimo z direktnim izračunom, včasih pa uporabimo numerične metode. Nasprotno je pri stohastičnem modelu rezultat slučajen, kot so vhodni parametri, ki so praviloma slučajne spremenljivke. Rezultati so v obliki analitične formule, seveda, če sam model to dopušča. Tako proučujemo in natančno analiziramo spremembe vrednosti vhodnih parametrov. Takšno analizo bomo naredili v zadnjem poglavju, kjer bomo kot rezultat dobili porazdelitev sedanje vrednosti denarnega toka (porazdelitev enkratne premije) pri uporabi stohastičnih obrestnih mer.

Stanje modela je množica spremenljivk, ki opisuje sistem v določeni časovni točki. Stanja so lahko zvezna ali diskretna. Diskretna stanja so posledica diskretnih vrednosti spremenljivk v času. Kot primer navedimo življenjska zavarovanja, kjer zavarovanec preide iz stanja živ v stanje mrtev. Tudi spremljanje števila polic v portfelju zavarovalnice pomeni diskretne vrednosti. Nasprotno so zvezna stanja rezultat zveznega spreminjanja spremenljivke v času. Kot primer lahko podamo spremembe vrednosti premoženja zavarovalnice, ki se teoretično (pri zveznem obrestovanju) spreminja zvezno v času.

Podobno je v modelu obravnavan tudi čas - diskretno ali zvezno. Kako natančno razdelimo čas je odvisno od narave modela. Zavedati se je potrebno, da gostejša razdelitev botruje daljšemu času, ki je potreben za izvedbo samega procesa. Po drugi strani je odločitev odvisna od pogoja ali morajo biti rezultati modela podani (samo) v diskretnih časovnih točkah ali ne.

## 2.1 Model pričakovane življenjske dobe

Verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ določa okvirje, znotraj katerih poteka tako vrednotenje zavarovalniških produktov kot tudi sama konstrukcija modelov, ki opisujejo življenjska zavarovanja.

Model pričakovane življenjske dobe, oziroma model preživetja, je osnovna točka modeliranja v aktuarstvu. Model temelji na dejstvu, da nam pričakovana življenjska doba opazovane osebe ni znana. Definirajmo slučajno spremenljivko $T$ kot prihodnjo življenjsko dobo novorojene osebe. Slučajna spremenljivka $T$ je zvezna na intervalu $[0, \omega]$, kjer je $0 < \omega < \infty$ in $\omega$ predstavlja maksimalno starost ljudi.

Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $T$ označimo z $F(t)$,

$$F(t) \;=\; \mathrm{P}(T \le t),\; t \ge 0. \tag{2.1}$$

Za vsak $t$ porazdelitvena funkcija $F(t)$ predstavlja verjetnost, da bo novorojena oseba umrla v naslednjih $t$ letih. Verjetnost nasprotnega dogodka, da bo novorojena oseba preživela naslednjih $t$ let, predstavlja funkcija preživetja

$$S(t) \;=\; \mathrm{P}(T > t) = 1 - F(t). \tag{2.2}$$

Obe funkciji določata porazdelitev slučajne spremenljivke $T$. Funkcija preživetja se uporablja v aktuarstvu in demografiji, medtem ko se v teoriji verjetnosti in statistiki po sami definiciji uporablja porazdelitvena funkcija.

Pri vrednotenju zavarovalniških produktov imamo v praksi opravka z osebo staro $x$ let. V tem primeru označimo prihodnjo življenjsko dobo $x$ let stare osebe s $T_x$, kjer je $0 \le x \le \omega$. $T_x$ je tudi zvezna slučajna spremenljivka.

Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $T_x$ označimo z $F_x(t)$,

$$F_x(t) \;=\; \mathrm{P}(T_x \le t),\; t \ge 0,\; 0 \le x \le \omega. \tag{2.3}$$

Porazdelitvena funkcija $F_x(t)$ predstavlja verjetnost, da bo $x$ let stara oseba umrla v naslednjih $t$ letih. Funkcija preživetja je definirana na podoben način

$$S_x(t) \;=\; \mathrm{P}(T_x > t),\; t \ge 0,\; 0 \le x \le \omega. \tag{2.4}$$

V nadaljevanju privzemimo, da je porazdelitvena funkcija $F_x(t)$ zvezna funkcija in z $f_x(t)$ označimo verjetnostno gostoto. Tako izraz

$$f_x(t)\; dt \;=\; \mathrm{P}(t < T_x < t + dt), \tag{2.5}$$

predstavlja verjetnost, da bo $x$ let stara oseba umrla v starosti med $x + t$ in $x + t + dt$ oziroma v infinitezimalnem časovnem intervalu.

S pomočjo funkcij $F_x(t)$ in $f_x(t)$ lahko izrazimo poljubne verjetnosti, momente in druge vrednosti, ki nas zanimajo. V aktuarskih krogih so se udomačile oznake, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju. S ${}_tq_x$ označimo verjetnost, da bo $x$ let stara oseba umrla v naslednjih $t$ letih, s ${}_tp_x$ označimo verjetnost nasprotnega dogodka. Sledita relaciji

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= F_x(t), && (2.6)\\
{}_tp_x &= S_x(t). && (2.7)
\end{aligned}
$$

S pomočjo povezav med $F_x(t)$, $S_x(t)$, $F(t)$ in $S(t)$ lahko zapišemo mnogo enakosti. Pomembni enakosti sta

$$
\begin{aligned}
{}_{s+t}p_x &= S_x(s+t) = (1-F_x(s))\frac{1-F_x(s+t)}{1-F_x(s)} = {}_sp_x\ {}_tp_{x+s}, && (2.8)\\
{}_{s|t}q_x &= F_x(s+t) - F_x(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x = {}_sp_x\ {}_tq_{x+s}. && (2.9)
\end{aligned}
$$

Prva enakost pomeni, da je verjetnost preživetja $x$ let stare osebe nadaljnjih $s+t$ let enaka produktu verjetnosti preživetja $x$ let stare osebe $t$ let in verjetnosti, da bo opazovana oseba preživela še nadaljnjih $s$ let. Druga enakost prikazuje takoimenovano odloženo verjetnost smrti, torej produkt verjetnosti preživetja $x$ let stare osebe $s$ let in verjetnosti smrti v naslednjih $t$ letih.

Matematično upanje slučajne spremenljivke $T_x$ označimo z $\mathring{e}_x$. Matematično upanje predstavlja pričakovan preostanek življenjske dobe $x$ let stare osebe. Po definiciji matematičnega upanja velja

$$
\mathring{e}_x = \int_0^\infty t f_x(t)\ dt. \qquad (2.10)
$$

Z uporabo porazdelitvene funkcje ga zapišemo kot

$$
\mathring{e}_x = \int_0^\infty [1-F_x(t)]\ dt = \int_0^\infty {}_tp_x\ dt. \qquad (2.11)
$$

### 2.1.1 Jakost smrtnosti

Jakost smrtnosti je količina, ki ima v modelu preživetja osrednjo vlogo. Laično jakost smrtnosti predstavlja hitrost umiranja oseb v določenem časovnem intervalu. Jakost smrtnosti $x$ let stare osebe (v starosti $x$ let) definiramo kot

$$
\mu_x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathrm{P}(T \le x+h | T > x), \qquad (2.12)
$$

pri čemer predpostavljamo, da limita obstaja. Za majhne vrednosti $h$ izraz preide v

$$ {}_hq_x \simeq h\mu_x, \tag{2.13} $$

kjer smo upoštevali, da je verjetnost $\mathrm{P}(T \leq x+h|T>x)$ enaka ${}_hq_x$. Dobili smo vrednost verjetnosti, da bo $x$ let stara oseba umrla v zelo kratkem času $h$.

Jakost smrtnosti lahko izrazimo tudi s pomočjo porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke $T$

$$ \begin{aligned} \mu_x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathrm{P}(T \leq x+h|T>x) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{F'(x)}{1-F(x)} = -[\ln(1-F(x))]'. \end{aligned} \tag{2.14} $$

Jakost smrtnosti $x$ let stare osebe v starosti $x+t$ definiramo kot

$$ \mu_{x+t} = \frac{f_x(t)}{1-F_x(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(1-F_x(t)), \tag{2.15} $$

kar zapišemo z aktuarskimi simboli

$$ \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln\ {}_tp_x. \tag{2.16} $$

Integracija (2.16) nam da

$$ {}_tp_x = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_{x+s}\ ds}, \tag{2.17} $$

kar je ključna povezava med verjetnostjo preživetja in časom $t$ (pri integraciji smo upoštevali robni pogoj ${}_0p_x = 1$).

S pomočjo jakosti smrtnosti lahko zapišemo gostoto ter matematično upanje slučajne spremenljivke $T_x$. Gostota je enaka

$$
\begin{aligned}
f_x(t) &= \frac{d}{dt}F_x(t) \\
&= -\frac{d}{dt}\ {}_tp_x \\
&= \mu_{x+t}\ {}_tp_x.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Posledično je matematično upanje slučajne spremenljivke $T_x$ enako

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \mathrm{E}(T_x) \\
&= \int_0^\infty t f_x(t)\ dt = \int_0^{\omega-x} t\mu_{x+t}\ {}_tp_x\ dt \\
&= -t\ {}_tp_x\Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\ dt \\
&= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\ dt.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

### 2.1.2 Analitična porazdelitev pričakovane življenjske dobe

Pravimo, da je poljubna funkcija $h$ analitična (matematična) verjetnostna porazdelitev, če jo lahko izrazimo z enostavno formulo. Zgodovinsko gledano je vedno obstajala težnja po splošnem (analitičnem) izrazu za porazdelitveno funkcijo $F_x(t)$, ki bo temeljil na osnovnih naravnih zakonih in bo praktičen za uporabo.

V nadaljevanju sta predstavljena primera analitičnih porazdelitev. *De Moivre* je predpostavljal obstoj maksimalne starosti človeške rase $\omega$ in enakomerno porazdelitev slučajne spremenljivke $T_x$ med 0 in $\omega - x$. Gostoto takšne porazdelitve zapišemo kot $f_x(t) = \frac{1}{\omega-x}$, jakost smrtnosti je enaka

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+t} &= -\frac{d}{dt}[\ln(1 - F_x(t))] \\
&= -\frac{d}{dt}[\ln\frac{1-t}{\omega-x}] \\
&= \frac{1}{\omega-x-t},
\end{aligned}
$$

kar je naraščajoča funkcija časa. Verjetnost preživetja v tem primeru zapišemo kot

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \mathrm{e}^{-\int_0^t \frac{1}{\omega-x-s}\ ds} \\
&= 1 - \frac{t}{\omega-x}.
\end{aligned}
$$

*Makeham* je predlagal jakost smrtnosti oblike

$$\mu_{x+t} \;=\; A + B\ c^{x+t}, \quad t,\ A,\ B > 0,\ c > 1.$$

Ta zakon kaže proces staranja boljše kot se vidi pri De Moivrejevem zakonu, hkrati pa odpravlja predpostavko o obstoju maksimalne starosti $\omega$. Konstanta $A$ predstavlja smrti zaradi nezgod, neodvisnih od starosti.

Verjetnost preživetja je v tem primeru enaka

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \mathrm{e}^{-\int_0^t A+B\ c^{x+s}\ ds} \\ &= z^t g^{c^x(c^t-1)}, \end{aligned}$$

pri čemer je $g = \mathrm{e}^{-B/\ln c}$ in $z = \mathrm{e}^{-A}$. Poseben primer dobimo, če izberemo $B = 0$. Dobimo eksponentno porazdelitev slučajne spremenljivke $T_x$, kar pa ne odraža realne smrtnosti ljudi.

### 2.1.3 Tablice smrtnosti

Zakoni smrtnosti obravnavani v prejšnjem razdelku bolj ali manj natančno določajo porazdelitev slučajne spremenljivke $T_x$. Da bi porazdelitev slučajne spremenljivke definirali čim bolj eksaktno, definirajmo slučajni spremenljivki $K_x$ in $S_x$, pri čemer velja

$$T_x \;=\; K_x + S_x. \tag{2.20}$$

Slučajna spremenljivka $K_x$ predstavlja število dopolnjenih let, ki jih bo preživela $x$ let stara oseba, spremenljivka $S_x$ pa predstavlja del leta v katerem je bila $x$ let stara oseba še živa. Iz same definicije izhaja, da je $K_x$ diskretna slučajna spremenljivka, medtem ko ima $S_x$ zvezno porazdelitev med 0 in 1.

Verjetnostna porazdelitev slučajne spremenljivke $K_x$ je podana z

$$\mathrm{P}(K_x = k) \;=\; \mathrm{P}(k \leq T_x < k) = {}_kp_x\ q_{x+k}, \tag{2.21}$$

za $k = 0, 1, \ldots$ S pomočjo (2.21) zapišemo matematično upanje slučajne spremenljivke $K_x$

$$
\begin{aligned}
e_x &= \sum_{k=1}^{\infty} k \; \mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \; {}_kp_x \; q_{x+k} && (2.22) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \; {}_kp_x, && (2.23)
\end{aligned}
$$

pri čemer smo upoštevali identiteto $\sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(K_x \geq k)$. Matematično upanje $e_x$ imenujemo odrezana pričakovana prihodnja življenjska doba $x$ let stare osebe. Že iz same definicije je razvidno, da je lažje izračunati (2.22) ali (2.23) kot (2.11) ali (2.19). Druga prednost je v tem, da za izračun potrebujemo samo verjetnostno porazdelitev za $K_x$.

V praksi se za izračun pričakovane življenjske dobe $x$ let stare osebe pogosto uporablja aproksimacija

$$
\mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}, \qquad (2.24)
$$

pri čemer se predpostavlja, da je matematično upanje slučajne spremenljivke $S_x$ približno enako $\frac{1}{2}$.

Porazdelitev slučajne spremenljivke $T_x$ lahko skonstruiramo, če privzamemo primerne tablice smrtnosti. To so tabele enoletne verjetnosti $q_x$, ki natanko določajo porazdelitev slučajne spremenljivke $K_x$. Do porazdelitve slučajne spremenljivke $T_x$ pridemo preko interpolacije tablic smrtnosti.

Tablice smrtnosti so najstarejša in najbolj znana oblika demografskih tablic. Opredelimo jih kot sistem medsebojno povezanih kazalnikov, ki na modelu sto tisoč v danem trenutku rojenih otrok z različnih vidikov prikazuje proces njihovega umiranja, odvisno od starosti (Malačič, 2000, str. 128).

Tablice so izdelane na osnovi statističnih podatkov. Sama konstrukcija je narejena na podlagi tehnik izravnave in ekstrapolacije (Gerber, 1979, str. 33). V splošnem so v tablicah smrtnosti naštete naslednje funkcije (Malačič, 2000, str. 200):

- število živih ($l_x$) na začetku starostnega razreda $x$,
- tablično število umrlih ($d_x$),
- preživeta leta ($L_x$), ki nam pove kolikšno število oseb se nahaja v starostnem razredu $x$ let (od $x$ do $x + 1$ let),

- vsotna funkcija ($T_x$), ki pove število let, ki jih bodo preživeli živi na začetku starostnega razreda $x$ do konca svojega življenja,
- koeficient doživetja ($P_x$), ki pove delež oseb v starosti od $x$ do $x+1$ let bo doživel starost od $x+1$ do $x+2$ leti,
- življenjsko pričakovanje ($\overset{\circ}{e}_x$), ki smo ga že omenili (pričakovana prihodnja življenjska doba $x$ let stare osebe).

Tablice definiramo tako, da izberemo najnižjo starost $\alpha$, ki bo predstavljena v tablicah. Nato izberemo število $l_\alpha$, ki ga imenujemo koren tablic (pogosto sto tisoč). Število živih definiramo kot

$$l_x = l_\alpha \cdot {}_{x-\alpha} p_\alpha, \tag{2.25}$$

pri čemer predpostavljamo, da verjetnosti ${}_{x-\alpha}p_\alpha$ obstajajo. Z uporabo (2.8) pridemo do rezultata

$${}_tp_x = \frac{{}_{t+x-\alpha}p_\alpha}{{}_{x-\alpha}p_\alpha} = \frac{l_{x+t}}{l_\alpha}\,\frac{l_\alpha}{l_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \tag{2.26}$$

Torej, če poznamo vse vrednosti funkcije $l_x$, $\alpha \leq x \leq \omega$, lahko izračunamo vsako verjetnost ${}_tp_x$ ali ${}_tq_x$.

Tablično število mrtvih definiramo kot

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \tag{2.27}$$

kar nas pripelje do naslednjega rezultata

$$q_x = 1 - p_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}. \tag{2.28}$$

S tem smo dokazali, da tablice smrtnosti natanko določajo porazdelitev slučajne spremenljivke $K_x$.

Tablice smrtnosti so narejene za točno določeno skupino ljudi, razdeljeno po faktorjih, kot so spol, generacija, tip zavarovancev... Začetna starost $x$ ima v tablicah pomembno vlogo, kar lahko pokažemo na primeru življenjskega zavarovanja. Dejstvo je, da je oseba, ki sklene danes življenjsko zavarovanje, boljšega zdravja kot oseba, ki ga je kupila pred več leti, kljub enakim faktorjem (starost). Ta učinek upoštevajo selektivne tablice smrtnosti, kjer so verjetnosti smrti razdeljene glede na pristopno starost. Z $q_{[x]+t}$ označimo verjetnost smrti v naslednjem letu za $x+t$ let staro osebo ob pristopni starosti $x$ let. Selekcija vodi do naslednje neenakosti

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots \tag{2.29}$$

Učinek selekcije običajno oslabi po nekaj letih, recimo $r$ letih, kar imenujemo selektivna perioda. Tablice, ki jih uporabljamo potem, ko poteče to obdobje, se imenujejo ultimativne tablice smrtnosti. V primeru, ko so tablice smrtnosti odvisne samo od starosti $x$, jih imenujemo agregatne tablice smrtnosti. Prednost agregatnih tablic je tudi v tem, da so enodimenzionalne.

Kot smo omenili pridemo do porazdelitve slučajne spremenljivke $T_x$ s pomočjo tablic smrtnosti ter interpolacije. Za ta namen potrebujemo vrednosti za ${}_sq_x$ $(0 \leq s \leq 1)$ ali $\mu_{x+s}$ $(0 < s < 1)$.

V teoriji obstaja več modelov za ocenjevanje ${}_sq_x$ ali $\mu_{x+s}$. Eden izmed njih predpostavlja enakomerno porazdelitev smrti oziroma, da je za celo število $x$ in $0 \leq t \leq 1$ produkt ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ konstanten. Od tod sledi definicija modela

$${}_sq_x = \int_0^s q_x\ dt = s\ q_x. \tag{2.30}$$

Vrednosti $q_x$ so predstavljene v tablicah, torej nam model (2.30) vrne vse vrednosti ${}_sp_x$ in ${}_sq_x$ $(0 \leq s \leq 1)$ in s tem je določena verjetnostna porazdelitev za $T_x$ na intervalu $[x,\ x+1]$, za $0 \leq x \leq \omega$. Posledično smo dobili aproksimacijo za celotno porazdelitev $T_x$.

Slabosti omenjenega modela se kažejo predvsem v predpostavkah enakomerne smrtnosti znotraj leta, česar realni podatki ne potrjujejo ter nezveznost jakosti smrtnosti v celoštevilčnih točkah. Zadnje dokažemo z naslednjima enakostma

$$\begin{aligned} \mu_{x+s}\big|_{s=1} &= \frac{q_x}{1-q_x} \\ \mu_{x+1+s}\big|_{s=0} &= q_{x+1}, \end{aligned}$$

pri čemer smo za jakost smrtnosti uporabili izraz $\mu_{x+s} = \frac{q_x}{1-sq_x}$, ki sledi direktno iz (2.16) in (2.30).

## 2.2 Matematična formulacija življenjskih zavarovanj

V prejšnjem razdelku smo definirali model preživetja in prišli do porazdelitve slučajne spremenljivke $T_x$. V splošnem pa slučajno spremenljivko $T_x$ lahko obravnavamo v širšem smislu, tako da razširimo model, v katerem jo obravnavamo.

Oseba s pristopno starostjo $x$ naj se nahaja v točno določenem stanju (stanje je odvisno od modela, ki ga obravnavamo). Oseba zapusti omenjeno stanje v času $T_x$ zaradi enega od $m$ medsebojno izključujočih vzrokov. Tako smo v bistvu definirali par slučajnih spremenljivk: $T_x$ in $J$, pri čemer slučajna spremenljivka $T_x$ prikazuje preostanek časa v specifičnem stanju (pristopna starost osebe v omenjeno stanje je $x$ let) in slučajna spremenljivka $J$ prikazuje vzrok izločitve.

V praksi se uporablja kar nekaj razširjenih modelov preživetja. Recimo pri življenjskem zavarovanju, ki krije tudi rizike težkih bolezni, je začetno stanje *zdrav*, ki preide v stanje *mrtev* ali *bolan*. Podobno je tudi invalidsko zavarovanje, kjer začetno stanje *aktiven* preide v stanje *invaliden* ali *mrtev*. Poznamo tudi variacijo modela preživetja, ki loči tip smrti: *smrt zaradi nezgode* in *smrt zaradi drugih vzrokov*. Zadnji model se uporablja tam, kjer se zaradi nezgodne smrti izplača večkratnik zavarovalne vsote.

### 2.2.1 Splošna definicija

Model, ki smo ga opisali zgoraj, je podan s skupno porazdelitvijo slučajnih spremenljivk $T_x$ in $J$. Skupno porazdelitev lahko opišemo z gostotami porazdelitev $f_{1,x}(t), \ldots, f_{m,x}(t)$, pri čemer je

$$f_{j,x}\, dt \quad = \quad \mathrm{P}(t < T_x < t + dt,\ J = j), \tag{2.31}$$

verjetnost, da je izločitev med $t$ in $t + dt$ posledica vzroka $j$. Velja

$$f_x(t) \quad = \quad f_{1,x}(t) + \cdots + f_{m,j}(t). \tag{2.32}$$

Z uvedbo aktuarskih oznak zapišemo

$${}_tq_{j,x} \quad = \quad \mathrm{P}(T_x < t,\ J = j) \tag{2.33}$$

ali splošneje

$$ {}_tq_{j,x+s} \;=\; \mathrm{P}(T_x < s+t,\ J = j | T_x > s). \tag{2.34} $$

Podobno kot pri modelu preživetja omenjeno verjetnost izračunamo kot

$$ {}_tq_{j,x+s} \;=\; \int_s^{s+t} f_{j,x}(z) \frac{dz}{1-F_x(z)}, \tag{2.35} $$

pri čemer je $F_x$ porazdelitev za $T_x$ in $J$.

V nadaljevanju bomo definirali jakost izločitve, s katero tudi pridemo do porazdelitve $T_x$ in $J$. Jakost izločitve osebe stare $x$ let zaradi vzroka $j$ je podana z

$$ \mu_{j,x+t} \;=\; \frac{f_{j,x}(t)}{1-F_x(t)} = \frac{f_{j,x}(t)}{{}_tp_x}. \tag{2.36} $$

Jakost izločitve dobimo podobno kot gostoto porazdelitve

$$ \mu_{x+t} \;=\; \mu_{1,x+t} + \cdots + \mu_{m,x+t}. \tag{2.37} $$

Izraz (2.31) zapišemo kot

$$ \mathrm{P}(t < T_x < t+dt,\ J = j) \;=\; {}_tp_x\ \mu_{j,x+t}\ dt. \tag{2.38} $$

Zaključimo lahko s tem, da če so znane jakosti zaradi posameznih vzrokov, potem porazdelitev za $T_x$ in $J$ dobimo s pomočjo (2.37) in (2.17), s čimer določimo verjetnost ${}_tp_x$. Nato preko (2.36) dobimo $f_{j,x}(t)$.

Tretja možnost za definicijo porazdelitve $T_x$ in $J$ je preko števila dopolnjenih let v specifičnem stanju ($K_x = [T_x]$). Ob predpostavki, da so enoletne verjetnosti izločitve ($q_{j,x+k}$) znane (tablice izločitev), lahko definiramo porazdelitev za $K_x$ in $J$.

Enoletne verjetnosti izločitve definiramo kot

$$ q_{i,x+k} \;=\; \mathrm{P}(T_k + 1,\ J = j | T \geq k). \tag{2.39} $$

Skupna enoletna verjetnost izločitve je definirana

$$q_{x+k} \;=\; q_{1,x+k} + \cdots + q_{m,x+k}, \tag{2.40}$$

iz česar lahko izračunamo ${}_kp_x$. Sledi

$$\mathrm{P}(K_x = k,\ J = j) \;=\; {}_kp_x\ q_{j,x+k}, \tag{2.41}$$

za $k = 0, 1, \ldots$ in $j = 1, \ldots, m$.

Porazdelitev za $T_x$ in $J$ dobimo ob upoštevanju določenih predpostavk za verjetnost izločitve med letom. Pogosto se uporablja predpostavka, da je ${}_uq_{j,x+k}$ linearna funkcija argumenta $u$ na intervalu $0 < u < 1$ in $k$ je naravno število. Torej

$${}_uq_{j,x+k} \;=\; u\ q_{j,x+k}. \tag{2.42}$$

Sledi

$$f_{j,x}(k+u) \;=\; {}_kp_x\ q_{j,x+k}, \tag{2.43}$$

kar pripelje do rezultata

$$\mu_{j,x+k+u} \;=\; \frac{q_{j,x+k}}{1 - u\ q_{x+k}}, \tag{2.44}$$

pri čemer smo uporabili formulo ${}_{k+u}p_x = {}_kp_x(1 - u\ q_{x+k})$. Omenjeno predpostavko (linearnost) smo uporabili tudi v razdelku 2.1.3. Prednosti te predpostavke sta neodvisnost $K_x$ in $S_x$ ter enakomerna porazdelitev $S_x$ med 0 in 1.

Zdaj lahko definiramo splošno zavarovanje. Predpostavimo, da plačilo zavarovalne vsote $c_{j,k+1}$ zapade na koncu leta $k+1$, če se je med letom zgodil dogodek $j$. Sedanja vrednost izplačila je slučajna spremenljivka

$$Z \;=\; c_{J,K_x+1}\ v^{K_x+1}, \tag{2.45}$$

pri čemer je $v$ diskontni faktor pri letni efektivni obrestni meri $r$, $v = 1/(1+r)$.

Enkratna neto premija je enaka matematičnemu upanju slučajne spremenljivke $Z$ (dovolj velik portfelj zavarovancev omogoča zanesljivo aproksimacijo škod)

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k+1}\; v^{k+1}\; {}_k p_x\; q_{j,k+1}. \tag{2.46}$$

Definirali smo izraz za enkratno neto premijo splošnega zavarovanja, pri katerem se izplačilo zavarovalne vsote $c_{j,k+1}$ zgodi ob koncu leta, v katerem je nastal dogodek $j$. Na začetku razdelka smo našteli nekaj morebitnih dogodkov: smrt, invalidnost, upokojitev, bolezen...V nadaljevanju se bomo omejili na zavarovanja, kjer je dogodek izločitve smrt ali doživetje.

### 2.2.2 Primeri življenjskih zavarovanj

Življenjska zavarovanja v teoriji razdelimo na kapitalska zavarovanja, življenjske rente ter zavarovanja, pri katerih zavarovanec prevzema določeno naložbeno tveganje. Ponekod v teoriji se med življenjska zavarovanja uvršča tudi zavarovanja, ki so vezana na stanje zavarovanca v smislu bolezni, odsotnosti z dela, starosti. Tako poznamo zavarovanje za določene hude bolezni, zavarovanje delovne nezmožnosti zaradi daljše bolezni ter zavarovanje za nego in oskrbo za stara leta.

Pri kapitalskih zavarovanjih se zavarovalna vsota (obveznost zavarovalnice) običajno izplača v enkratnem znesku. V splošnem sta tako čas kot višina izplačila funkciji slučajne spremenljivke $T_x$, torej sta prav tako slučajni spremenljivki. Sedanjo vrednost izplačila označimo z $Z$, enkratno neto premijo pa predstavlja pričakovana sedanja vrednost slučajne spremenljivke $Z$ ($\mathrm{E}(Z)$). Seveda to ni pokazatelj tveganja, ki ga sprejme zavarovatelj. V ta namen je potrebno izračunati višje momente slučajne spremenljivke $Z$.

Začeli bomo z zavarovanjem za primer smrti. Zavarovalna vsota $c_j$ zapade v plačilo ob koncu leta, v katerem je nastopila smrt. Sedanja vrednost izplačila je odvisna od slučajne spremenljivke $K_x = [T_x]$,

$$Z \;=\; c_{K_x+1}\; v^{K_x+1}. \tag{2.47}$$

Neto enkratna premija je enaka

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\; v^{k+1}\; {}_k p_x\; q_{x+k}. \tag{2.48}$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi višje momente slučajne spremenljivke $Z$

$$\mathrm{E}(Z^h) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}^h \; v^{h(k+1)} \; {}_kp_x \; q_{x+k}. \tag{2.49}$$

Naslednja posplošitev je izplačilo zavarovalne vsote takoj po smrti, kar pomeni, da je zavarovalna vsota funkcija časa, $c(t)$, $t \geq 0$. v tem primeru slučajno spremenljivko $Z$ zapišemo kot

$$Z \;=\; c(T_x) \; v^{T_x}. \tag{2.50}$$

Neto enkratna premija je enaka

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \int_0^{\infty} c(t) \; v^t \; {}_tp_x \; \mu_{x+t} \; dt, \tag{2.51}$$

pri čemer smo za gostoto slučajne spremenljivke uporabili izraz (2.18). Seveda lahko iz omenjenega zveznega modela izpeljemo tudi diskretni model ob določeni predpostavki

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(Z|K_x = k) \; \mathrm{P}(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k + S_x) \; v^{k+S_x}|K_x = k) \; \mathrm{P}(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(c(k + S_x) \; v^{S_x-1}|K_x = k) \; v^{k+1} \; \mathrm{P}(K_x = k).
\end{aligned}$$

Ob predpostavki

$$c_{k+1} \;=\; \mathrm{E}(c(k + S_x) \; v^{S_x-1}|K_x = k),$$

dobimo

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \; v^{k+1} \; {}_kp_x \; q_{x+k}.$$

Za izračun zavarovalnih vsot $c_{k+1}$ potrebujemo pogojno porazdelitev $S_x$ pri pogoju $K_x = k$. V ta namen lahko uporabimo predpostavke o porazdelitvi $T_x$ znotraj leta - razdelek 2.1.3.

V praksi se zavarovanja za primer smrti večinoma uporabljajo za kritje tveganja smrti, ob predpostavki, da ima zavarovanec sklenjeno kreditno pogodbo. Omenjeno zavarovanje tako krije morebitne finančne obveznosti v primeru zavarovančeve smrti. Poznamo dosmrtno zavarovanje za primer smrti (večinoma se uporablja za kritje stroškov pogreba) ter začasno zavarovanje za primer smrti, ki krije zgoraj omenjeno tveganje.

Predpostavimo, da se zavarovalna vsota pri dosmrtnem zavarovanju izplača ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl. Privzemimo še, da je zavarovalna vsota enaka 1, kar bo poenostavilo zapis enačb. Torej je slučajna spremenljivka $Z$ odvisna samo od časa izplačila $(K_x + 1)$

$$Z = v^{K_x+1}. \tag{2.52}$$

Kot rečeno je porazdelitev slučajne spremenljivke $Z$ določena s porazdelitvijo slučajne spremenljivke $K_x$

$$\mathrm{P}(Z = v^{k+1}) = \mathrm{P}(K_x = k) = {}_kp_x\ q_{x+k}, \tag{2.53}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$ Aktuarski simbol za enkratno neto premijo je $A_x$,

$$A_x = \mathrm{E}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}. \tag{2.54}$$

Varianco slučajne spremenljivke $Z$ zapišemo kot

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - A_x^2, \tag{2.55}$$

pri čemer je

$$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(v^{2(K_x+1)}), \tag{2.56}$$

kar lahko interpretiramo kot enkratno premijo pri jakosti obresti $2\delta$. Jakost obresti $\delta$ je definirana kot $\delta = \ln(1 + r)$, od koder sledi $v = e^{-\delta}$. Definicija je rezultat zmanjševanja obdobja obrestovanja (zvezno obrestovanje). Tako varianco razlagamo kot razliko dveh enkratnih premij, prvo izračunano pri dvakratniku osnovne jakosti obresti, drugo pa pri normalni jakosti obresti.

Začasno zavarovanje za primer smrti v trajanju $n$ let, krije riziko smrti, če zavarovanec umre v prvih $n$ letih (zavarovalna vsota se izplača ob koncu leta smrti). Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ 0, & K_x \geq n \end{cases} \tag{2.57}$$

Enkratno neto premijo označimo z $A^{1}_{x:\overline{n}|}$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \; {}_kp_x \; q_{x+k}. \tag{2.58}$$

Za izračun variance moramo izračunati drugi moment slučajne spremenljivke $Z$. Podobno kot pri dosmrtnem zavarovanju je drugi moment enak enkratni neto premiji, izračunani pri dvakratniku osnovne jakosti obresti.

V praksi si želijo zavarovalnice čim bolj približati potrebam zavarovancev. V ta namen se na zavarovalnem trgu ponuja standardno padajoče začasno zavarovanje za primer smrti, pri katerem zavarovalne vsote $c_j$ linearno padajo do 0. S takšnim zavarovanjem natančneje pokrijemo tveganje kreditne pogodbe, kjer se glavnica načeloma linearno zmanjšuje s časom. Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} (n - K_x) \; v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ 0, & K_x \geq n \end{cases} \tag{2.59}$$

Enkratno neto premijo označimo z $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \; v^{k+1} \; {}_kp_x \; q_{x+k}. \tag{2.60}$$

V tujini je praksa, da banka zavarovalnici mesečno sporoča vse nezapadle obveznosti kreditojemalcev ter povprečno starostno strukturo za posamezen spol. Zavarovalnica na podlagi omenjenih podatkov izračuna premijo za primer smrti za obdobje enega meseca. Banka omenjeno premijo obračuna preko večje efektivne obrestne mere kreditne pogodbe in kreditojemalec v bistvu ne ve, da je zavarovan za primer smrti. Banka tako zmanjšuje tveganje nepoplačila obveznosti iz naslova smrti kreditojemalca, hkrati pa je omenjen način poslovanja ugoden tudi za kreditojemalca, saj v primeru njegove smrti dediči ne pridobijo finančnih obveznosti iz naslova kreditnih pogodb.

Nakazan prehod od splošnega zavarovanja za primer smrti, kjer je izplačilo zavarovalne vsote funkcija slučajne spremenljivke $K_x$ $(T_x)$, do zavarovanja, kjer je zavarovalna vsota 1, lahko naredimo tudi za ostala kapitalska zavarovanja.

Zavarovanje za primer doživetja v trajanju $n$ let, predvideva izplačilo zavarovalne vsote ob koncu $n$-tega leta pri pogoju, da je zavarovanec živ. Sedanja vrednost je enaka

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.61}$$

Enkratno neto premijo označimo z $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \, {}_np_x, \tag{2.62}$$

varianco izračunamo kot

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - A^2_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \\ &= v^{2n} \, {}_np_x - v^{2n} \, {}_np_x^2 \\ &= v^{2n} \, {}_np_x \, {}_nq_x. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Mešano zavarovanje je kombinacija (vsota) zavarovanja za primer doživetja v trajanju $n$ let in začasnega zavarovanja za primer smrti v trajanju $n$ let. Do izplačila zavarovalne vsote pride v primeru smrti, če ta nastopi v prvih $n$ letih, sicer pa na koncu zavarovalnega obdobja. Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.64}$$

Enkratno neto premijo označimo z $A_{x:\overline{n|}}$. Izračunamo jo iz same definicije zavarovanja. Slučajno spremenljivko $Z$ lahko zapišemo kot

$$Z = Z_1 + Z_2, \tag{2.65}$$

pri čemer slučajna spremenljivka $Z_1$ predstavlja sedanjo vrednost izplačila pri zavarovanju za primer doživetja v trajanju $n$ let, slučajna spremenljivka $Z_2$ pa predstavlja sedanjo vrednost izplačila pri začasnem zavarovanju za primer smrti v trajanju $n$ let. Sledi

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} + A^1_{x:\overline{n}|} \\ &= v^n \ {}_np_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Varianca slučajne spremenljivke $Z$ je enaka

$$\mathrm{Var}(Z) \ = \ \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) + 2\ \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2).$$

Iz same definicije slučajnih spremenljivk $Z_1$ in $Z_2$ sledi $Z_1 Z_2 = 0$, od koder zaključimo

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) &= \mathrm{E}(Z_1 Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) \\ &= -A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \ A^1_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{2.67}$$

in

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(Z_1) + \mathrm{Var}(Z_2) - 2\ A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \ A^1_{x:\overline{n}|} \\ &= v^{2n} \ {}_np_x \ {}_nq_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \ {}_kp_x \ q_{x+k} - \left( \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} \right)^2 - \\ &\quad -2\ v^n \ {}_np_x \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Zadnji rezultat ima za zavarovalnice pomembno vlogo, saj pri mešanem zavarovanju zavarovalnica sprejme manj tveganja, kot če bi sklenila eno začasno zavarovanje za primer smrti in eno zavarovanje za primer doživetja za dve različni osebi enake starosti in spola.

V teoriji in praksi se uporabljajo variacije omenjenih zavarovanj:

- izplačilo zavarovalne vsote neposredno po smrti,
- izplačilo zavarovalne vsote ob koncu $m$-tega obdobja znotraj leta,

- naraščajoče, padajoče zavarovalne vsote,
- pristopne starosti zavarovancev pri neceli starosti,
- zavarovanja za več življenj.

Življenjske rente predstavljajo življenjsko zavarovanje, pri katerem se renta izplačuje tako dolgo, dokler je določena oseba, z začetno starostjo $x$ let, še živa. Življenjske rente se ponujajo na zavarovalnem trgu kot varianta izplačila zavarovalne vsote ob doživetju določenega zavarovanja ali pa predstavljajo varčevanje z namenom povečanja varnosti za stara leta.

Sedanja vrednost življenjske rente je slučajna spremenljivka, saj je odvisna od preostale življenjske dobe $x$ let stare osebe. Označimo jo z $Y$, matematično upanje $\mathrm{E}(Y)$ pa predstavlja enkratno neto premijo.

Splošna renta, ki predvideva plačila v višini $r_0, r_1, \ldots$ v časovnih točkah $0, \ldots, K_x$ je definirana z

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; r_k \; \mathrm{I}_{(K_x \geq k)}, \tag{2.69}$$

pri čemer smo z $\mathrm{I}_{(K_x \geq k)}$ označili indikator dogodka $\{K_x \geq k\}$. Enkratna neto premija je podana z

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; r_k \; {}_k p_x. \tag{2.70}$$

Nadaljnja posplošitev rente gre v smeri zgostitve izplačevanja rent in v končni fazi dobimo zvezno plačljivo rento. Seveda so lahko tudi višine rente funkcije slučajne spremenljivke $T_x$. V nadaljevanju bomo predstavili elementarne življenjske rente.

Dosmrtna prenumerandna življenjska renta predstavlja izplačila v višini 1 v časovnih točkah (letih) $0, \ldots, K_x$. Sedanja vrednost omenjenih izplačil je

$$Y = 1 + v + v^2 + v^{K_x}. \tag{2.71}$$

Enkratno neto premijo označimo z $\ddot{a}_x$

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= \mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \; {}_k p_x \; q_{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; {}_k p_x \; q_{x+k},
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

pri čemer smo z $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$ označili finančno prenumerandno rento v trajanju $k+1$ let. Na omenjeno rento lahko gledamo tudi kot zaporedje zavarovanj za primer doživetja (če je oseba živa na začetku vsakega leta, prejme izplačilo). V tem primeru velja

$$
Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; \mathrm{I}_{(K_x \geq k)} \tag{2.73}
$$

in

$$
\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \; {}_k p_x. \tag{2.74}
$$

Varianco dosmrtne prenumerandne rente dobimo s pomočjo dosmrtnega zavarovanja za primer smrti, kjer bomo sedanjo vrednost izplačila pri tem zavarovanju označili z $Z$. Velja

$$
Y = \frac{1-v^{K_x+1}}{1-v} = \frac{1-Z}{1-v}. \tag{2.75}
$$

Sledi

$$
\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{1-v} \tag{2.76}
$$

in

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{(1-v)^2} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} \; {}_k p_x \; q_{x+k} - \left( \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; {}_k p_x \; q_{x+k} \right)^2}{(1-v)^2}.
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

Pri $n$ let trajajoči začasni prenumerandni življenjski renti oseba prejema rentno izplačilo največ $n$ let oziroma do smrti, če ta nastopi pred letom $n$. Sedanja vrednost rente je

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}, & K_x < n, \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K_x \geq n. \end{cases} \tag{2.78}$$

Podobno kot pri dosmrtni prenumerandni življenjski renti lahko enkratno neto premijo ($\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$) izrazimo na dva načina

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_kp_x\ q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x \tag{2.79}$$

oziroma

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_kp_x. \tag{2.80}$$

Pri izpeljavi druge enakosti smo predpostavili, da je renta končno zaporedje zavarovanj za primer doživetja. Če s slučajno spremenljivko $Z$ označimo sedanjo vrednost izplačila pri mešanem zavarovanju, velja

$$Y = \frac{1-Z}{1-v}. \tag{2.81}$$

Z uporabo matematičnega upanja dobimo povezavo med enkratno neto premijo za $n$ let trajajočo začasno prenumerandno rento in enkratno neto premijo za $n$ let trajajoče mešano zavarovanje

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{1-v}. \tag{2.82}$$

Sledi tudi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\mathrm{Var}(Z)}{(1-v)^2} \\ &= \frac{1}{(1-v)^2}\Bigg(v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\ {}_kp_x\ q_{x+k} - \qquad (2.83) \\ &\quad - \left[\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\right]^2 - 2\ v^n\ {}_np_x \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}\Bigg) \end{aligned}$$

Tako kot pri kapitalskih zavarovanjih se tudi pri življenjskih rentah v teoriji in praksi uporablja več variacij življenjskih rent:

- odložene rente,
- postnumerandne rente,
- rente z zajamčenim obdobjem izplačevanja,
- rente, pri katerih so plačila $m$-krat znotraj leta (v limitnem primeru pridemo do zvezno plačljive rente)
- naraščajoče, padajoče rente,
- začetek plačevanja pri neceli starosti.

Zavarovanja z naložbenim tveganjem so življenjska zavarovanja, pri katerih je primarni cilj ustvariti donos na vložena sredstva. Zavarovalna komponenta je zgolj stranskega pomena. Zakon o zavarovalništvu tovrstna zavarovanja opredeli kot življenjska zavarovanja vezana na enote investicijskih skladov. V teoriji in praksi poznamo več vrst omenjenih zavarovanj:

- (klasično) naložbeno zavarovanje,
- naložbeno zavarovanje, kjer je izplačilo vezano na določen indeks,
- naložbeno zavarovanje z dodatkom klasičnega pripisa dobička,
- naložbeno zavarovanje z določenimi garancijami,
- hibridi naložbenih zavarovanj in kapitalskih zavarovanj.

V nadaljevanju bomo na primeru klasičnega naložbenega zavarovanja predstavili tok premije in pri tem izpostavili stroške, ki jih zavarovalnice praviloma obračunajo pri tovrstnem zavarovanju.

Zavarovanec premijo lahko naloži v enega ali več skladov. Naivno je pričakovati, da bi zavarovalnica celotno premijo namenila za nakup enot določenega sklada. Pri takoimenovanem vstopu (premije) v sklad zavarovalnica lahko obračuna dva stroška: delež alokacije in razliko v nakupni ter prodajni ceni enote premoženja. Z deležem alokacije definiramo kolikšen del premije bo namenjen za nakup enot sklada. V praksi je delež v začetnem obdobju zavarovanja (prvo leto) manjši kot v kasnejših obdobjih zavarovanja (po preteku prvega leta). Poznamo tudi primere, ko je delež konstanten skozi celotno zavarovalno obdobje, vendar je takšen način bolj redek, saj je zavarovalnici v interesu čim prej obračunati stroške. Razlika med nakupno ter prodajno ceno enote sklada se pogosto izrazi kot odstotek $\alpha$ prodajne cene. Nakupno ceno dobimo preko povezave

$$\text{nakupna cena}_t \;=\; (1-\alpha)\ \text{prodajna cena}_t.$$

Dejstvo je, da se premija pretvori v enote s pomočjo prodajne cene. Strošek za zavarovalnico pa je manjši, saj zavarovalnica načeloma te enote kupi po nakupni ceni. Tako se ustvari razlika, ki pripada zavarovalnici.

Sledijo letni stroški, ki pokrivajo upravljavsko provizijo (strošek upravljanja sklada) ter takoimenovane stroške police in stroške rizika smrti (riziko premija je funkcija slučajne spremenljivke $T_x$) oziroma drugih rizikov, ki jih zavarovanje krije. Upravljavska provizija se odrazi skozi vrednost enote premoženja sklada, saj jo upravljavec obračuna sam od celotnega premoženja sklada. Stroški police so fiksni in se obračunajo tako, da se proda določeno število zavarovančevih enot sklada. Analogno se obračuna tudi riziko premija. Na kakšen način zavarovalnica porabi omenjene stroške (provizija agentom,..) je odvisno od poslovne politike zavarovalnice, dejstvo pa je, da je pri naložbenih zavarovanjih možno definirati kar nekaj virov za obračun stroškov.

V tujini trend naložbenih zavarovanj pada, medtem ko je v Sloveniji trend ravno obraten. V uvodu smo omenili, da je v letu 2004 premija naložbenih zavarovanj predstavljala 40% celotne življenjske premije. Zadnje gre pripisati predvsem dogajanju na slovenskem kapitalskem trgu v zadnjem desetletju. Seveda bo zanimivo spremljati omenjeni trend tudi v prihodnosti, predvsem z mislijo, da zgodovinski donosi niso garancija za prihodnost.

Tako v tujini kot v Sloveniji pridobivajo na popularnosti naložbena zavarovanja z določenimi garancijami. Takšna zavarovanja imajo določena varovala, ki so zanimiva za zavarovance, vendar se je potrebno zavedati, da imajo garancije svojo ceno. Poznamo več vrst garancij:

- garancija najvišje vrednosti enote premoženja, kjer se vse enote kupljene do presečnega datuma, ko začne vrednost enote premoženja padati, ob doživetju izplačajo po najvišjem tečaju,
- garancija neto vrednosti, kjer se ob doživetju izplača natanko tolikšen znesek kot je bil vplačan v sklade (primerna garancija ob padanju vrednosti enote premoženja),
- garancija fiksnega donosa, ki je stala že marsikaterega upravljavca mnogo premoženja (Partnoy, 1999).

Omenjene garancije se dosegajo preko ustreznih naložbenih strategij upravljavcev skladov in se ovrednotijo ali preko same vrednosti enote sklada ali pa kot fiksen znesek.

Razdelek zaključimo z mislijo, da je ponudba življenjskih zavarovanj pestra in da bodo v prihodnosti zavarovanja še bolj pisana na kožo zavarovancem, saj bo le na takšen način možno ohranjati pozicije na zavarovalnem trgu.

## 2.3 Mere tveganja

Tveganje lahko opišemo kot dogodek, ki se lahko zgodi in ima za nas negativne (finančne) posledice. Navedeno predstavlja podlago za uporabo stohastičnega modeliranja tveganja (le to uporabljamo v celotnem 2. poglavju tako pri konstrukciji modela preživetja, kot pri formulaciji življenjskih zavarovanj in pri osnovah finančne matematike).

Primarna funkcija zavarovalnic in pozavarovalnic je prodaja kritij za določena tveganja. V zadnjih desetih letih, ko so se jim pridružile še banke in finančne institucije, se omenjena skupina ukvarja z zbiranjem in upravljanjem tveganja z namenom zagotoviti razviti trg, na katerem se lahko tveganja zaščitijo (prodajo). V primerih, ko trg ne obstaja, je treba tveganje izmeriti in zagotoviti dodatne rezerve (kapital), potrebne za kritje omenjenega tveganja. Tako se uprave zavarovalnic in drugih finančnih institucij soočajo z vse težjo nalogo: ustreči interesu zavarovancev in delničarjem. Zavarovance zanima predvsem finančna stabilnost zavarovalnice, medtem ko delničarji zahtevajo donos, ki je povezan s tveganjem njihovega vložka.

V zavarovalništvu in financah obstaja mnogo mer tveganj, ki se razvrščajo od povsem elementarnih do zelo izvedenih. V praksi še zmeraj poteka razprava, katera mera tveganja je prava za zavarovalniški sektor. Poznamo naslednje mere tveganja: VaR, tail VaR, pogojni VaR, *conditional tail expectation, expected shortfalls, zero-utility premiums*, Esscherjevo mero tveganja in (Yaari-)Wangovo mero tveganja (Denuit, 2005, str. 59).

**Definicija 2.3.1.** *Mera tveganja je funkcional $\rho$, ki preslika tveganje $X$ v nenegativno realno število $\rho(X)$, po možnosti končno, in predstavlja dodaten denar, ki ga je treba dodati tveganju $X$, da bo le to sprejemljivo.*

Ideja je v tem, da $\rho$ kvantificira tveganje $X$: tako nam velike vrednosti $\rho(X)$ povedo, da je $X$ nevarno tveganje. Ko predstavlja $X$ potencialno škodo posameznega finančnega portfelja skozi čas, interpretiramo $\rho(X)$ kot znesek kapitala, ki ga je treba dodati portfelju, da bo le ta ustrezen za notranji in zunanji nadzor tveganja. V tem primeru je $\rho(X)$ rizičen kapital portfelja. Takšne mere tveganja se uporabljajo za opredelitev rezerv in kapitalskih zahtev z namenom zagotovitve solventnosti.

Mere tveganja so v mnogih pogledih sorodne aktuarskim načelom določanja premije. Zavarovalnica, ki sprejme tveganje $X$, na podlagi načela določanja premije, določi minimalni znesek $\Pi(X)$, ki ga mora plačati zavarovanec, da ga bo zavarovalnica vzela v kritje (z omenjenim principom smo definirali vse enkratne neto premije v drugem razdelku tega poglavja). Tako je določanje premije pravzaprav primer možne mere tveganja. Seveda je lastnost takšnega načela, da je vrednost dobljena z mero tveganja za posamezno tveganje $X$, kar kandidat za premijo zavarovalne pogodbe, s katero krijemo $X$. Načelo določanja premije je širše načelo in zajema naslednje mere:

- načelo neto premije,
- načelo pričakovane vrednosti,
- načelo največje škode,
- načelo variance,
- načelo standardnega odklona.

V nadaljevanju bomo predstavili želene lastnosti, ki naj bi jih imela posamezna mera tveganja, in te lastnosti preverili na meri tveganja VaR, ki jo bomo uporabljali v zadnjem poglavju.

Kljub zelo splošni definiciji mere tveganja, mora le ta zadoščati nekaterim aksiomom. Med mnogimi statističnimi značilnostmi, ki jih lahko pripišemo matematičnemu upanju, varianci, mediani... se uvrščajo med sprejemljive mere tveganja le nekatere. Lastnosti mere tveganja povzemajo spodnje točke.

*Neprekomerni dodatek*

$$\rho(X) \quad \leq \quad \max(X) = F_X^{-1}(1),$$

pri čemer je $X$ poljubna slučajna spremenljivka. Jasno je, da je nesmiselno imeti več kapitala (rezerv), kot je vrednost največje škode.

*Nenegativni dodatek*

$$\rho(X) \geq \mathrm{E}(X),$$

pri čemer je $X$ poljubna slučajna spremenljivka. Minimalni kapital presega pričakovano škodo, sicer postane verjetnost propada očitna (pod pogoji izreka o velikih številih).

*Translativnost*

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c,$$

pri čemer je $X$ poljubna slučajna spremenljivka in $c$ poljubna konstanta. Mero tveganja smo definirali kot funkcional, ki poda vrednost varnostnega kapitala, ki ga mora investitor dodati tvegani poziciji, da bo le ta sprejemljiva. Tako je jasno, da vsako diskretno povečanje obveznosti za konstanto $c$ da enako povečanje pri kapitalu. Sledi

$$\rho(X - \rho(X)) = 0,$$

kar pomeni, da ko dodamo $\rho(X)$ začetni poziciji $-X$, dobimo "nevtralno pozicijo".

*Konstantnost*

$$\rho(c) = c.$$

Da bi zavarovatelj izplačal škodo v višini $c$, potrebuje enako količino kapitala. Velja $\rho(0) = 0$ in $\rho(X)$ lahko interpretiramo kot nujno vrednost, torej minimalni kapital, ki ga dodamo $X$ na začetni točki investiranja in vložimo v netvegano naložbo, da bo $X$ sprejemljivo tveganje.

*Subaditivnost*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

pri čemer sta $X$ in $Y$ poljubni slučajni spremenljivki. Racionalna razlaga subaditivnosti je lahko, da združevanje tveganj ne povzroča dodatnega tveganja. Subaditivnost odraža idejo, da je tveganje mogoče zmanjšati z razpršitvijo. V primeru enakosti govorimo o aditivnosti. V tem primeru je odvisna struktura med $X$ in

$Y$ pogosto določena: govorimo o aditivnosti neodvisnih tveganj ali aditivnosti komonotonih tveganj (definicija komonotonosti je podana v nadaljevanju).

Učinek razpršitve tako opredelimo kot razliko med vsoto vseh mer posameznih tveganj in celotno mero tveganja za vsa tveganja

$$\sum \rho(X_i) - \rho(\sum X_i).$$

Učinek razpršitve je za subaditivne mere tveganja vedno pozitiven.

**Definicija 2.3.2.** *Slučajni vektor* $\mathbf{X}$ *je komonoton, če in samo če obstaja slučajna spremenljivka* $Z$ *in nepadajoče funkcije* $t_1, t_2, \ldots, t_n$*, da velja*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (t_1(Z), t_2(Z), \ldots, t_n(Z))^t.$$

Komonotonost tako omogoča oceno tveganja.

*Komonotona aditivnost*

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y),$$

pri čemer sta $X$ in $Y$ poljubni komonotoni slučajni spremenljivki. To pomeni, da pri združevanju komonotonih tveganj ne zmanjšujemo tveganosti situacije (komonotona tveganja so v bistvu stave na isti dogodek, kar pa ne pomeni zaščite ene proti drugi).

*Pozitivna homogenost*

$$\rho(cX) = c\,\rho(X),$$

pri čemer je $X$ poljubna slučajna spremenljivka in $c$ pozitivna konstanta. Pozitivna homogenost je pogosto povezana z neodvisnostjo v povezavi z monetarno enoto, ki je uporabljena.

Pozitivna homogenost je povezana s komonotono aditivnostjo, in sicer

$$\rho(cX) = \rho(X + \cdots + x) = \rho(X) + \cdots + \rho(X) = c\,\rho(X).$$

*Monotonost*

$$P(X \leq Y) = 1 \ \ \rightarrow \ \ \rho(X) \leq \rho(Y),$$

pri čemer sta $X$ in $Y$ poljubni slučajni spremenljivki. To je naravna lastnost, saj za pokritje škode $X$ potrebujemo manj kapitala kot za pokritje škode $Y$, če je le ta večja.

*Zveznost v smislu porazdelitve*

Naj bo $\{X_n, \ n = 1, 2, \dots\}$ zaporedje slučajnih spremenljivk in $X_n \xrightarrow{d} X$. Velja

$$\lim_{n \to \infty} \rho(X_n) \ = \ \rho(X).$$

*Objektivnost*

$\rho(X)$ je odvisna od $X$ skozi porazdelitveno funkcijo $F_x$, kar pomeni, da $F_x$ vsebuje vse informacije, da lahko izrazimo tveganost $X$.

Kot zanimivost lahko povemo, da načelo določanja premije v splošnem ne zadošča zgornjim lastnostim. Tako zadošča pozitivni homogenosti in translativnosti le načelo neto premije.

**Definicija 2.3.3.** *Mera tveganja, ki je translativna, pozitivna homogena, subaditivna in monotona, je koherentna mera tveganja.*

V zadnjem desetletju je v praksi naraslo zanimanje za uporabo kvantilov pri verjetnostni porazdelitvi. Ker je kvantile preprosto interpretirati, so zelo popularni pri upravljanju tveganj. V tem pogledu je definirana tudi mera tveganja VaR. Sam koncept je zasnovan tako, da odgovori na naslednje vprašanje: koliko lahko pričakujemo, da bomo izgubili v enem dnevu, tednu, letu... pri dani verjetnosti (tveganja). V sodobnem finančnem svetu je postal VaR glavna mera tveganja oziroma referenčna vrednost: omenjeni koncept uporabljajo nadzorniki pri določanju kapitalskih rezerv za tržno izpostavljenost tveganju.

**Definicija 2.3.4.** *Za dano tveganje $X$ in dano verjetnost $p \in (0,1)$, je pripadajoči* VaR, *ki ga označimo z* $\mathrm{VaR}(X,p)$, *definiran kot*

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}(X,p) &= F_X^{-1}(p) \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \ | F_X(x) \geq p\}. \end{aligned}$$

Kot alternativno definicijo lahko definiramo VaR pri tveganju $p$ kot $F_X^{-1+}(p)$, $F_X^{-1+}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,|F_X(x) > p\}$. Omenjena definicija se uporablja v nekateri literaturi. Tako je vsaka konveksna kombinacija $F_X^{-1}(p)$ in $F_X^{-1+}(p)$ kandidat za VaR.

Jasno je, da VaR vedno obstaja in ga lahko izrazimo v ustrezni enoti mere, ponavadi s pričakovano izgubo denarja. Ker je VaR definiran s kvantilno funkcijo $F_X^{-1}$, veljajo vse lastnosti te funkcije tudi za VaR. Velja

$$\mathrm{VaR}(X,p) \leq x \quad \Leftrightarrow \quad p \leq F_X(x).$$

V nadaljevanju bomo za VaR preverili lastnosti, ki smo jih izpeljali v tem razdelku.

VaR *nima neprekomernega dodatka*

Ker je $X \leq \max(X)$, velja tudi $\mathrm{VaR}(X,p) \leq \max(X)$ za poljubne $p$.

VaR *ne vsebuje nujno nenegativnega dodatka*

Definirajmo $p^\star = F_x(\mathrm{E}(X))$. Jasno je, da VaR ne presega pričakovane škode $\mathrm{E}(X)$ za verjetnosti manjše od $p^\star$.

VaR *je translativen in pozitivno homogen*

VaR vsebuje naslednjo stabilno lastnost: VaR nepadajoče funkcije $t$ poljubne slučajne spremenljivke dobimo tako, da funkcijo uporabimo na začetnem VaR.

VaR *ne vsebuje neupravičenega dodatka*

Za poljubno verjetnost $p > 0$ je $\mathrm{VaR}(c,p) = c$.

VaR *je komonotono aditiven*

Za komonotone slučajne spremenljivke velja, da je inverz porazdelitvene funkcije komonotonih slučajnih spremenljivk enak vsoti inverzov porazdelitvenih funkcij vsakega sumanda.

Za komonotona tveganja $X_1^c, X_2^c, \ldots, X_n^c$ zapišemo VaR njihove vsote $S^c$ kot

$$\mathrm{VaR}(S^c,p) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VaR}(X_i,p), \quad 0 < p < 1.$$

VaR *ni subaditiven*

VaR v splošnem ni subaditiven (razen v posebnih primerih, ko so npr. $X_i$ večrazsežno normalno porazdeljene). Tako ima VaR v splošnem dobro lastnost, da je VaR vsote lahko večji od vsote posameznih VaR. V takšnem primeru vodi razpršitev k večjemu tveganju.

Mogoča slaba posledica o nezadoščanju subaditivnosti je ta, da sistem decentraliziranega upravljanja tveganj lahko propade, ker VaR izračunan za posamezne portfelje, ne more v vsoti podati zgornje meje za VaR celotnega portfelja.

VaR *je monoton*

Jasno je, de če $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$, sledi $F_X(x) \geq F_Y(x)$ za vsak $x$. Zato sledi $\mathrm{VaR}(X, p) \leq \mathrm{VaR}(Y, p)$ za vsako verjetnost $p$.

VaR *je zvezen v smislu porazdelitve*

Poznano je, da šibka konvergenca porazdelitvenih funkcij zagotavlja konvergenco za kvantilne funkcije, če je $X$ porazdeljen zvezno.

VaR *je objektiven*

To je neposredna posledica definicije VaR, saj je odvisen od porazdelitvene funkcije X.

Za konec tega razdelka podajmo še par argumentov, zakaj VaR predstavlja optimalno zahtevani kapital za zavarovalnice.

V zavarovalništvu se premije plačujejo preden se izplača zavarovalnina. Tako lahko portfelj zaide v težave, če je njegova škoda $X$ pozitivna (oziroma njegov dobiček $-X$ negativen), ker obveznosti do zavarovancev ne moremo izpolniti do potankosti. Solventnost odraža finančno kapaciteto določenega tveganega posla, s katerim se morajo izpolniti pogodbene obveznosti. Tako nadzornik v želji, da bi varoval zavarovance, določi solventno kapitalsko zahtevo $\rho(X)$. Torej nadzornik zahteva, da je presežek kapitala (presežek vrednosti sredstev nad vrednostjo obveznosti - rezerv) najmanj enak $\rho(X)$. Ta kapital se uporablja kot varnostni dodatek proti tveganju, da bodo premije in rezerve kombinirane z donosom investicij premajhne za kritje prihodnjih škodnih zahtevkov. Načeloma bo $\rho(X)$ izbran tako, da bomo (skupaj z nadzornikom) povsem prepričani, da se dogodek $(X > \rho(X))$ ne bo zgodil.

Obravnavajmo portfelj s škodo $X$. Regulator želi imeti tako veliko zahtevo po solventni kapitalski ustreznosti (v odvisnosti od škode $X$), da bo izguba v portfelju dovolj majhna. Da bi dosegel ta cilj, meri izgubo $\mathrm{E}[(X - \rho(X))_+]$. Tako proces določanja kapitalskih zahtev vsebuje dve meri: mero tveganja za določitev solventnega kapitala in $E[(X - \rho(X))_+]$, da izmerimo padec.

Nadzornik želi minimizirati $E[(X-\rho(X))_+]$. Po drugi strani je jasno tudi, da večji kot je kapital zavarovalnice, boljša je osnova za minimiziranje $E[(X - \rho(X))_+]$ . Jasno je tudi, da ima ves presežek kapitala svojo ceno. Nadzornik lahko upošteva omenjeni učinek tako, da določi strošek presežnega kapitala. Kapitalska zahteva $\rho$ je lahko določena z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_{\rho(X)} \left\{ E[(X - \rho(X))_+] + \rho(X)\ \epsilon \right\}, \quad 0 < \epsilon < 1, \tag{2.84}$$

kar je uravnotežen pogoj dveh nasprotujočih si meril. Tukaj $\epsilon$ interpretiramo kot mero, do katere lahko upoštevamo strošek kapitala. Nadzornik lahko določi, da je $\epsilon$ odvisen od posameznega podjetja ali pa posameznega tveganja. Če je $\epsilon = 0$, se strošek kapitala ne upošteva in je solventnostni kapital enak $\rho(X) = \max(X)$. S povečevanjem $\epsilon$ nadzornik relativno povečuje pomembnost stroška kapitala in zato zmanjšuje optimalno rešitev problema.

**Lastnost 2.3.1** *Najmanjši kapital $\rho(X)$, ki zadošča* (2.84)*, je enak* VaR*, torej*

$$\rho(X) \;=\; \mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon).$$

**Dokaz.** Vpeljimo stroškovno funkcijo

$$C(X, d) \;=\; E[(X - d)_+] + d\epsilon$$

in predpostavimo na začetku, da je $\mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon) > 0$. Za $d > 0$ funkcija $C(X, d)$ ustreza površini med porazdelitveno funkcijo spremenljivke $X$ in horizontalno črto $y = 1$ od $d$ do $d\epsilon$. Podobna interpretacija za $C(X, d)$ drži tudi za $d < 0$. Lahko je preveriti, da je $C(X, d)$ padajoča funkcija $d$, če je $d \leq \mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon)$, medtem ko je $C(X, d)$ naraščajoča funkcija $d$, če je $d \geq \mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon)$. Od tod sledi, da je stroškovna funkcija minimizirana z izbiro $d = \mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon)$.

Zdaj predpostavimo še $\mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon) < 0$. Iz podobnih geometričnih razlogov sledi sklep, da je minimalna vrednost v tem primeru zavzeta pri $\mathrm{VaR}(X, 1-\epsilon)$.

□

Omenjena lastnost teoretično podpre uporabo VaR pri določanju solventne kapitalske ustreznosti. Tako do neke mere navedena lastnost podpira trenutno stanje, ki ga je določil *Basel II* in definira odvisnost kapitala od VaR. Kljub vsemu pa moramo imeti v mislih, da VaR v tem primeru nima funkcije mere tveganja, ampak se predpostavlja kot optimalna izbira kapitala.

Tveganje, ki ga želimo izmeriti in imeti pod nadzorom je $(X - \rho(X))_+$. Merimo ga z $\mathrm{E}[(X - \rho(X))_+]$. Omenjeni pristop tako ustreza klasičnemu aktuarskemu pristopu merjenja in primerjave tveganj z določitvijo oziroma primerjavo *stop-loss* premij.

## 2.4 Temelji finančne matematike

V nadaljevanju bomo podali snovne pojme obrestnih mer, ki smo jih uporabili tudi v drugem poglavju in osnove finančne matematike.

### 2.4.1 Obrestne mere

Pojem obrestne mere se vedno navezuje na časovno enoto, v kateri velja, ter periodo oziroma časovni interval, na koncu katerega se obresti pripišejo (kapitalizirajo).

*Efektivna* obrestna mera je tista, pri kateri sta časovna enota ter perioda konverzije identični. Če z $r$ označimo efektivno obrestno mero, potem imamo ob koncu prve periode na našem računu $1 + r$ sredstev, če smo na začetku vložili enoto sredstev. Torej je $1 + r$ *akumulacijski faktor*, oziroma *diskontni faktor* je enak

$$v = \frac{1}{1+r}. \tag{2.85}$$

V primeru, ko se perioda konverzije ne ujema z osnovno časovno enoto, govorimo o *nominalni* obrestni meri. Z $r^{(m)}$ označimo nominalne obresti, pripisane $m$-krat na leto, ki so ekvivalentne efektivni obrestni meri. Velja

$$\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + r. \tag{2.86}$$

Pri zveznem obrestovanju, ko se obresti teoretično zvezno pripisujejo na naš račun, dobimo *jakost obrestne mere* $\delta$, ki je ekvivalentna efektivni obrestni meri, torej

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} r^{(m)} &= \lim_{m\to\infty} \frac{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+r)}{\ln(1+\frac{1}{k})^k} \\
&= \ln(1+r) \\
&= \delta,
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

pri čemer smo upoštevali, da je $(1+r)^{1/m} = 1 + \frac{1}{k}$.

Akumulacijski faktor po $h$ letih je tako enak

$$
(1+r)^h = \mathrm{e}^{\delta h}, \tag{2.88}
$$

diskontni faktor za enako obdobje je enak

$$
v^h = \mathrm{e}^{-\delta h}, \tag{2.89}
$$

pri čemer je $h$ poljubno celo število. V nadaljevanju bomo podali bolj matematičen pogled zgoraj omenjenih osnov obrestnih mer.

Predpostavimo, da denar naložimo na račun, ki prinaša obresti. To pomeni, da denarna enota, ki jo naložimo na račun v času $u > 0$, prinese imetniku pravico, da v poljubnem času $t \geq u$ dvigne znesek $v(t,u)$, običajno različen od 1. Funkcija $v$ je strogo pozitivna in velja

$$
v(s,u) = v(s,t)v(t,u), \tag{2.90}
$$

pri čemer je $s \leq t \leq u$, od koder sledi $v(t,t) = 1$. Če imetnik računa investira 1 v času $u$, lahko dvigne znesek na levi strani (2.90) v času $s$. Lahko pa dvigne znesek $v(t,u)$ v času $t$ in ga ponovno reinvestira. Tako dobi znesek na desni strani (2.90). Da bi se ognili arbitraži, predpostavljamo, da omenjeni strategiji dajeta enak rezultat (ob predpostavki, da zanemarimo stroške).

Lahko se je prepričati, da $v(t,u)$ zadošča (2.90), če je naslednje oblike

$$
v(t,u) = v_t^{-1} v_u \tag{2.91}
$$

za neko strogo pozitivno funkcijo $v_t$, ki lahko zadošča pogoju

$$v_0 \quad = \quad 1. \tag{2.92}$$

Funkcija $v_u$ vrne vrednost enote v času 0, ki je bila investirana v času $u$, funkcija $v_t^{-1}$ pa vrne vrednost enote v času $t$, ki je bila investirana v času 0.

V praktičnih bančnih operacijah se uporablja

$$v_t = e^{-\int_0^t \delta_\tau d\tau}, \tag{2.93}$$

pri čemer je $\delta_\tau$ odsekoma zvezna funkcija, običajno pozitivna. Z (2.93) sta določeni dinamiki akumuliranja ter diskontiranja in sicer

$$\frac{d}{dt} e^{\int_0^t \delta_\tau d\tau} \quad = \quad e^{\int_0^t \delta_\tau d\tau} \delta_t, \tag{2.94}$$

$$\frac{d}{dt} e^{-\int_0^t \delta_\tau d\tau} \quad = \quad -e^{-\int_0^t \delta_\tau d\tau} \delta_t. \tag{2.95}$$

Relacija (2.94) pove, da so obresti zaslužene v majhnem intervalu, proporcionalne dolžini intervala in trenutni višini depozita. Proporcionalni faktor $\delta_t$ je, kakor smo že ugotovili, jakost obrestne mere ali (trenutna) obrestna mera v času $t$. V integralski obliki se (2.94) in (2.95) zapišeta kot

$$e^{\int_0^t \delta_\tau d\tau} \quad = \quad 1 + \int_0^t e^{\int_0^\tau \delta_s ds} \delta_\tau d\tau, \tag{2.96}$$

$$e^{-\int_0^t \delta_\tau d\tau} \quad = \quad 1 - \int_0^t e^{-\int_0^\tau \delta_s ds} \delta_\tau d\tau. \tag{2.97}$$

V nadaljevanju bomo predpostavljali, da se obresti služi v skladu z (2.93). Tako bomo za diskontni faktor uporabili izraz

$$v(t,u) \quad = \quad e^{-\int_t^u \delta_\tau d\tau}, \ t < u.$$

V primeru konstantne jakosti obrestne mere $\delta$, velja $v_t = v^t$, kjer je

$$v = e^{-\delta} = \frac{1}{1+r} \tag{2.98}$$

konstantni letni diskontni faktor in $r$ letna efektivna obrestna mera.

### 2.4.2 Obveznice in obrestne mere

Kupec obveznice posodi izdajatelju znesek $P$ (začetno ceno obveznice), v zameno za v naprej določeno zaporedje izplačil. Le ta so lahko fiksna v nominalnih okvirjih (govorimo o obveznicah s fiksno obrestno mero) ali pa so povezana s poljubnim indeksom.

Obveznice lahko izda država ali poljubno podjetje, vendar imajo obveznice z enakimi karakteristikami različnih izdajateljev načeloma različno ceno. To je posledica upoštevanja tveganja neizplačila obveznosti, ki jih vsebujejo obveznice in tveganje bankrota oziroma propada izdajatelja. Izkaže se tudi, da se cene obveznic z enakimi karakteristikami razlikujejo od države do države. Zadnje je posledica različnih davčnih pogojev in pogodbenih določil. V nadaljevanju se bomo osredotočili na državne obveznice s fiksno obrestno mero, ki ne vsebujejo tveganja neizplačila obveznosti.

Obveznico s fiksno obrestno mero definiramo na naslednji način: danes plačamo ceno $P$ v zameno za zaporedje izplačil $c_1, c_2, \ldots, c_n$ v časovnih točkah $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Zneski izplačil so fiksni ob dnevu izdaje obveznice. Za takšno obveznico z nominalno vrednostjo 100 veljajo naslednje oznake

$$
\begin{aligned}
g &= \text{kuponska obrestna mera za nominalno vrednost 100} \\
n &= \text{število (kuponskih) izplačil} \\
\Delta t &= \text{fiksno obdobje med dvema izplačiloma} \\
t_1 &= \text{čas prvega izplačila } (t_1 \leq \Delta t) \\
t_j &= t_{j-1} + \Delta t \quad j = 2, \ldots, n \\
t_n &= \text{čas do dospetja obveznice} \\
c_j &= g\Delta t \; j = 1, \ldots, n-1 \text{ kuponska izplačila} \\
c_n &= 100 + g\Delta t \text{ glavnica in zadnje kuponsko izplačilo}
\end{aligned}
$$

*Brezkuponska obveznica* ima kuponsko obrestno mero enako 0 in nominalno vrednost enako 1. V nadaljevanju bomo s $P(t,T)$ označili ceno brezkuponske obveznice v času $t$ z dospetjem v času $T$.

Sledi posledica, da je cena brezkuponske obveznice, ki dospe takoj, enaka 1, torej je $P(t,t) = 1$, za vse $t$.

*Trenutna obrestna mera (spot rate)* v času $t$ za dospelost v času $T$ je definirana kot donosnost do dospetja brezkuponske obveznice

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

torej je

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{-(T-t)R(t,T)}.$$

Trenutno obrestno mero $R(t,T)$ obrazložimo na naslednji način. Če investiramo 1 EUR v času $t$ v brezkuponsko obveznico za $T-t$ let, se bo investirani znesek akumuliral s povprečno stopnjo $R(t,T)$ skozi celotno obdobje.

*Terminska obrestna mera (forward rate)* v času $t$ (pri zveznem obrestovanju), ki velja med časoma $T$ in $S$, $(T \leq S)$, je definirana kot

$$F(t,T,S) = \frac{1}{S-T} \ln \frac{P(t,T)}{P(t,S)}. \tag{2.99}$$

Terminska obrestna mera se pojavlja pri izvedenih finančnih instrumentih, pri katerih se v času $t$ dogovori, da bomo investirali 1 EUR v času $T$ in dobili $\mathrm{e}^{(S-T)F(t,T,S)}$ v času $S$. Z drugimi besedami smo tako fiksirali obrestno mero med $T$ in $S$ v času $t$.

Če predpostavimo, da ne obstaja možnost arbitraže (razdelek 2.4.4), mora terminska obrestna mera zadoščati enačbi (2.99). To je poseben primer, kjer je cena oziroma povezava definirana neodvisno od modela obrestne mere.

V primeru, ko je datum zapadlosti izvedenega finančnega instrumenta $T$ enak $t$, sta terminska obrestna mera in trenutna obrestna mera enaki, $F(t,t,S) = R(t,S)$.

*Trenutna krivulja terminskih obrestnih mer (instantaneous forward-rate curve)* v času $t$ je za $T > t$ definirana kot

$$f(t,T) = \lim_{S \to T} F(t,T,S) = -\frac{d}{dT} \ln P(t,T) = -\frac{dP(t,T)/dT}{P(t,T)}$$

od koder sledi

$$P(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)\ du}.$$

Navedeno si razlagamo, da lahko sklenemo pogodbo v času $t$, pri čemer bomo zaslužili obresti $f(t,T)$ v časovnem intervalu od $T$ do $T+dT$.

*Netvegano obrestno mero (risk-free rate of interest)* v časovnem intervalu od $t$ do $T$ predstavlja $R(t,T)$. V praksi pa z netvegano obrestno mero mislimo na trenutno netvegano obrestno mero

$$r_f(t) \;=\; \lim_{T\to t} R(t,T) = R(t,t) = f(t,t).$$

Netvegano obrestno mero $r_f(t)$ si najlažje predstavljamo kot obrestno mero bančnega računa, ki jo lahko banka dnevno kontrolira. Včasih jo imenujemo tudi *kratkoročna obrestna mera (short rate).*

Velja naslednja povezava. Za vsak $t$

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{-R(t,T)(T-t)} = \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

### 2.4.3 Teorije obrestnih mer

Obrestne mere, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku, opisujejo teoretično ozadje, v katerem naj bi deloval kapitalski trg. Poznamo več teorij, ki postavljajo teoretične okvirje delovanja trgov.

*Teorija pričakovanj* se v praksi pojavlja v različnih definicijah. Najbolj priljubljena je naslednja

$$\mathrm{e}^{F(0,S,S+1)} \;=\; \mathrm{E}(\mathrm{e}^{R(S,S+1)}|\mathcal{F}_0), \tag{2.100}$$

pri čemer $\mathcal{F}_0$ predstavlja vse informacije v času $t$. Iz navedenega sledi, da je letna terminska obrestna mera za obdobje med $S$ in $S+1$ domnevno enaka pričakovani vrednosti enoletne obrestne mere v času $S$. Če predpostavimo, da domneva drži, sledi

- Ker je $\mathrm{e}^x$ konveksna funkcija, po Jensenovi neenakosti sledi $F(0,S,S+1) > \mathrm{E}(R(S,S+1)|\mathcal{F}_0)$.
- Ker je $2F(0,S,S+2) = F(0,S,S+1) + F(0,S+1,S+2)$, sledi

$$\mathrm{e}^{F(0,S,S+2)} \;=\; \mathrm{E}(\mathrm{e}^{R(S,S+1)})\mathrm{E}(\mathrm{e}^{R(S+1,S+2)}).$$

Teorija tudi predpostavlja, da je $e^{2F(0,S,S+2)} = \mathrm{E}(e^{R(S,S+1)})$, kar pomeni, da sta $e^{R(S,S+1)}$ in $e^{R(S+1,S+2)}$ nekorelirani, kar pa je malo verjetno.

Alternativna verzija teorije je osnovana na zveznem obrestovanju in predpostavki

$$F(0,T,S) = \mathrm{E}(R(T,S)),\ T < S$$

Omenjena verzija dopušča korelacijo med $R(T,U)$ in $R(U,S)$ za vsak $T < U < S$.

*Teorija likvidnih preferenc* temelji na dejstvu, da ima investitor raje kratkoročne kot dolgoročne naložbe, kar z drugimi besedami pomeni, da ne želi vezati kapitala za daljše obdobje. V posebnem lahko manjši investitorji dobijo kazen, ker so predčasno prodali dolgoročne naložbe. V praksi trg vodijo veliki investitorji. Nadalje obstaja še zelo likviden trg obveznic poljubnih zapadlosti.

Za omenjeno teorijo obstaja boljša razlaga, čeprav ni povezana z njenim imenom. Cene obveznic z daljšim dospetjem so bolj nestanovitne kot cene obveznic s krajšim dospetjem. Tako bodo investitorji vlagali v bolj nestanovitne vrednostne papirje samo, če bodo pričakovali višje donose, za kar bodo plačali dodatno premijo za tveganje.

*Teorija segmentacije trga* temelji na ideji, da ima vsak investitor v mislih določeno število obveznic različnih dospetij, ki ustrezajo njegovim potrebam. Tako ima recimo zavarovalnica večjo potrebo po dolgoročnih obveznicah, da z njimi zaščiti obveznosti iz zavarovalnih pogodb. Po drugi strani bankam ustrezajo kratkoročne obveznice, ki ustrezajo potrebam strank.

Tako različne skupine investitorjev reagirajo v različne smeri. Osnovna oblika teorije segmentacije trga temelji na dejstvu, da ne obstaja poseben razlog, da bi obstajala vez med različnimi skupinami investitorjev. To pomeni, da se bodo cene obveznic z različnimi dospetji spreminjale neodvisno. Bolj realistično je to, da bodo investitorji, ki preferirajo določene zapadlosti, zamenjali svoje investicije, če bodo mnenja, da so obveznice z drugačnimi dospetji poceni.

*Teorija o brezarbitražnem določanju cen* povzema vse zgoraj omenjene teorije na bolj natančen in matematičen način. S takšnim pristopom lahko terminske obrestne mere razdelimo na tri dele

- pričakovano prihodnjo netvegano obrestno mero, $r_f(t)$,
- prilagoditev za ceno tržnega tveganja in
- prilagoditev, ki odraža dejstvo, da je $\mathrm{E}(e^x) \geq e^{\mathrm{E}(x)}$ za vsako slučajno spremenljivko $x$.

Kot primer navedimo Vasičkov model (glej poglavje 3.2.2). Za dano $r(0)$ velja

$$\mathrm{E}(r(t)) \;=\; \mu + (r(0)-\mu)\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

pri čemer lahko krivuljo terminskih obrestnih mer v času 0 zapišemo kot vsoto treh komponent omenjenih zgoraj. Torej

$$\begin{aligned} f(0,T) \;=\; & \mu + (r(0)-\mu)\mathrm{e}^{-\alpha T} - \lambda\sigma(1-\mathrm{e}^{-\alpha T})/\alpha \\ & -\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{\alpha}\right)^2, \end{aligned}$$

kjer so $\mu$, $\alpha$ in $\sigma$ parametri modela in $\lambda$ tržna cena tveganja. Oblika obeh dodatkov ni čisto jasna. Prav zato potrebujemo določanje cen brez arbitraže, o čemer bomo govorili v naslednjem razdelku.

### 2.4.4 Določanje cen brez arbitraže

Arbitraža je mogoča, če veljata naslednji trditvi

(1.) v času 0 imamo možnost oblikovanja portfelja, ki ima neto vrednost 0

(2.) v točno določenem času $T$ v prihodnosti nam bo portfelj prinesel dobiček

Definicijo arbitraže še lažje podamo na primeru statičnega portfelja (oziroma s strategijo *kupi in drži*). Predpostavimo, da lahko investiramo v $n$ oblik premoženj. Premoženje $i$ ima v času $t$ ceno $P_i(t)$ za enoto brez dividend ali kuponov. Predpostavimo še, da imamo v portfelju $x_i$ enot premoženja $i$, kar nam da vrednost portfelja v času $t$, $V(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i(t)$. Definicija arbitraže pomeni preprosto izpolnjevanje naslednjih enačb:

$$\begin{aligned} & V(0) = \sum x_i P_i(0) = 0, \\ & \mathrm{P}(V(T) \geq 0) = 1, \\ & \mathrm{P}(V(T) > 0) > 0. \end{aligned}$$

Okolje brez arbitraže je tako definirano z dejstvom, da zgoraj omenjene priložnosti ne obstajajo, sicer bi majhni investitorji lahko zaslužili neskončne količine denarja. Princip brez arbitraže ima še naslednji ekvivalentni obliki

- ne moremo oblikovati netveganega portfelja, ki ima donosnost večjo od netvegane obrestne mere

- če portfelja $A$ in $B$ zagotavljata enak denarni tok (ki je mogoče tudi slučajen), potem imata enako sedanjo vrednost (zakon ene cene)

# 3 MODELI OBRESTNIH MER

Hans U. Gerber je v svojem delu Matematika življenjskih zavarovanj zapisal (Gerber, 1979, str. 67,68): *Obrestne mere v prihodnosti nam seveda niso poznane. Zato se zdi smiselno, da se vprašamo zakaj prihodnjih obrestnih mer ne modeliramo s stohastičnim procesom. Dva razloga nas odvračata od takega modela:*

- *Pri življenjskem zavarovanju nas posebej zanima dolgoročen razvoj obrestne mere. Ravno za ta primer pa ne obstaja noben zanesljiv stohastičen model.*

- *Razumljivo je privzeti, da so prihodnja življenjska pričakovanja različnih oseb neodvisne slučajne spremenljivke. Pri predpostavki, da je obrestna mera fiksna, postanejo izgube zavarovatelja za različne police neodvisne slučajne spremenljivke. Porazdelitev za skupno izgubo lahko potem dobimo enostavno s konvolucijo. V posebnem primeru je varianca skupne izgube vsota individualnih varianc, kar nam omogoča aproksimacijo z normalno porazdelitvijo. Če bi predpostavili stohastične obresti, bi izgubili neodvisnost med policami, saj so zavezane isti letni obrestni meri.*

Zgornje trditve so primerne za čas, v katerem so bile zapisane, ter za konservativne institucije, kar zavarovalnice zagotovo so. Dejstvo je, da je razvoj finančne matematike postregel s kopico stohastičnih modelov za obresti, od katerih jih bomo nekaj predstavili v tretjem poglavju. Po drugi strani je jasno, da gibanje kapitalskih trgov neposredno vpliva na obrestno mero, ki je uporabljena pri vrednotenju zavarovalniških produktov. Tako se je tudi v Sloveniji s 01.03.2005 maksimalna obrestna mera za vrednotenje dolgoročnih obveznosti iz zavarovalnih pogodb, ki v izračunu premije in obveznosti upoštevajo garantirano obrestno mero, znižala iz 3,25% na 2,75%.

Za nekatere počasni ukrep slovenskega zavarovalnega nadzornika, je bil vsekakor utemeljen, saj se je v zadnjem desetletju dalo dosegati zavidljive donose na naložbeni strani, kljub zakonskim omejitvam, ki veljajo za zavarovalnice. Z gibanjem kapitalskega trga navzdol so tuje zavarovalnice začele zniževati obrestno mero, ki se uporablja pri vrednotenju, kar se je zgodilo mnogo prej kot v Sloveniji. Dodaten razlog za lanski ukrep nadzornika je tudi v majhni korelaciji našega kapitalskega trga s tujimi trgi.

V nadaljevanju bomo predstavili pomembnejše modele obrestni mer, s pomočjo katerih bomo v zadnjem poglavju simulirali vrednotenje življenjskih zavarovanj. V tem poglavju bomo uporabljali teorijo stohastičnih diferencialnih enačb, Itôve procese, martingale ter ekvivalenco mere. Z zadnjim se cene posameznih finančnih instrumentov zapišejo apriori pod netveganim okoljem. Več o omenjenem bralec najde v Øksendal, 2003, str. 21-72, Brigo, 2001, str. 469-484 in Jacod, 2000, str. 207-213, 239-241.

## 3.1 Delitev modelov

Modele obrestnih mer lahko v splošnem razdelimo na dve skupini in sicer na ravnotežne modele in modele za kratkoročne obrestne mere ter na modele brez arbitraže.

*Ravnotežni modeli* so zgrajeni na predpostavkah o delovanju ekonomskega okolja. Upoštevajo se investitorjeva nagnjenja k tveganju in težijo k ravnotežju med ponudbo obveznic in drugih vrednostnih papirjev ter povpraševanjem investitorjev. Tako se v tem kontekstu raziskuje vpliv ekonomskega okolja na krivuljo obrestnih mer. Pri enofaktorskih modelih to preprosto pomeni konstrukcijo preprostega stohastičnega modela, ki opisuje razvoj netvegane obrestne mere. To se naredi na način, da zajamemo bistvene karakteristike vpliva širšega ekonomskega okolja na obrestne mere. Potem s pomočjo osnovnega izreka dobimo teoretično ceno obveznic. S takšnim pristopom se teoretične cene razvijajo pod predpostavko o okolju brez arbitraže.

Pogosto se modeli za kratkoročne obrestne mere obravnavajo kot ravnotežni modeli. V praksi je težko dokazati, da ima model za kratkoročno obrestno mero izpeljavo iz ravnotežnega modela.

*Modeli brez arbitraže* kot začetno točko uporabljajo krivuljo terminskih obrestnih mer v trenutnem času. Tako je krivulja obrestnih mer, ki velja v trenutku izračuna, osnova za izračun parametrov modela. Prihodnje cene finančnih instrumentov (ki jih modeliramo) se tako razvijajo konsistentno z začetno krivuljo obrestnih mer, ki je brez arbitraže. Takšni modeli se uporabljajo za določanje cen predvsem kratkoročnih izvedenih finančnih instrumentov.

Če bi z ravnotežnimi modeli določali ceno izvedenim finančnim instrumentom, bi se začetna 1% napaka pri teoretični ceni obveznice na koncu poznala npr. kot 10% napaka v ceni izvedenega finančnega instrumenta, ki temelji na obveznici. Po drugi strani pa na dolgi rok noben model brez arbitraže ne more zajeti dinamike $r_f(t)$.

## 3.2 Binomski modeli

### 3.2.1 Model brez arbitraže

Obravnavajmo preprost binomski model za dinamiko cen obveznic. Naj bo $P(t,T)$ cena brezkuponske obveznice v času $t$, ki dospe v plačilo v času $T$ za $t = 1, 2, 3 \dots$ in $T = t, t+1 \dots$.

Očitno velja $P(t,t) = 1$ za vse $t$. V času 0 definirajmo množico cen $P(0,T)$ za $T = 1, 2, \dots, t_1$, pri čemer je lahko $t_1$ enak neskončno.

Za poljuben celoštevilski $t$ je netvegana obrestna mera med $t$ in $t+1$ definirana kot

$$r_f(t+s) \quad = \quad -\ln P(t, t+1), \quad \text{za } 0 \leq s < 1,$$

kar z drugimi besedami pomeni, da je enoletna brezkuponska obveznica enaka netveganemu premoženju. Na tem mestu vpeljimo še denarni račun $B(t)$, za katerega velja naslednja dinamika

$$\begin{aligned} B(t+1) &= \frac{B(t)}{P(t,t+1)} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{s=0}^{t} r_f(s)} \end{aligned}$$

Torej denarni račun raste v povezavi z donosom enoletne brezkuponske obveznice $P(t,t+1)$. Ker je $P(t,t+1)$ znana v času $t$, je tudi stanje na računu $B(t+1)$ znano v času $t$.

Na tem mestu si zastavimo vprašanje: *ali je možno razviti stohastičen model za dinamiko omenjenih obveznic, ki bo brez arbitraže?*.

V primeru determinističnih obresti je to trivialen primer. Za začetek definirajmo terminsko obrestno mero $F(0,T,T+1) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,T+1)}$ za $T = 0, 1, 2 \dots$. Nadalje definirajmo trenutno netvegano obrestno mero, $r_f(t)$, ki je kar ekvivalentna $F(0,T,T+1)$ za $T \leq t < T+1$. Definirajmo še

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} F(0,s,s+1)} \\ &= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}. \end{aligned}$$

Z izpeljano strukturo cene vseh obveznic rastejo po netvegani obrestni meri in model je brez arbitraže (Cairns, 2004, str. 29).

### 3.2.2 Ho in Lee-jev model brez arbitraže

Predpostavimo, da v času 1 vse cene naraščajo ali padajo v odvisnosti od netveganega donosa na denar, torej za $T \geq 1$ velja

$$P(1,T) \;=\; \begin{cases} u(0,T)\frac{P(0,T)}{P(0,1)} & \text{za dvig,} \\ d(0,T)\frac{P(0,T)}{P(0,1)} & \text{za padec,} \end{cases}$$

pri čemer se $T$ v funkcijah $u(0,T)$ in $d(0,T)$ navezuje na preostali čas do dospetja brezkuponskih obveznic na začetku časovnega intervala. V primeru, ko velja $u(0,s) = d(0,s) = 1$ za vse $s$, so vse cene v času 1 deterministične.

Omenjena koraka lahko naredimo v poljubnem času v prihodnosti. Tako za dano $P(\tau,T)$, $\tau > 1$, velja

$$P(t+1,T) \;=\; \begin{cases} u(t,T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} & \text{za dvig,} \\ d(t,T-t)\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} & \text{za padec.} \end{cases}$$

Potreben pogoj je zveznost funkcij $u(t,s)$ in $d(t,s)$ v času $t$. Po konvenciji predpostavljamo, da velja $u(t,s) \geq d(t,s)$ za vse $t$ in $s$. Teoretično je možno, da sta funkciji $u(t,s)$ in $d(t,s)$ odvisni od zgodovine procesa do časa $t$. Mi bomo v nadaljevanju predpostavljali, da ne obstaja odvisnost cen do časa $t$, zato bomo uporabljali oznake $u(s)$ in $d(s)$ za vse $s \geq 1$. Veljati mora $u(1) = d(1) = 1$, kar zagotavlja $P(t,t) = 1$ za vse $t$.

**Izrek 3.1 (Cairns, 2004, str. 30).** *Predpostavimo, da se vse cene spremenijo med časom 0 in 1.*

(i) *Predpostavimo, da je model brez arbitraže. Velja*

$$u(T) > 1 > d(T) > 0, \quad \textit{za vse } T \geq 2.$$

(ii) *Predpostavimo, da je model brez arbitraže. Definirajmo*

$$q(T) \;=\; \frac{1-d(T)}{u(T)-d(T)}, \quad \textit{za vse } T \geq 2.$$

*Potem $q(T)$ za $T \geq 2$ definira ekvivalentno martingalsko mero $Q$, tako da velja $P_Q$("dvig")$=q$ in $P_Q$("padec") $=1-q$.*

(iii) *Predpostavimo, da obstaja ekvivalentna martingalska mera $Q$, torej tak $q$, $0 < q < 1$, da velja $\mathrm{E}_Q(P(1,T)/B((1)) = P(0,T)/B(0)$ za vse $T$. Potem v binomskem modelu ne obstaja možnost arbitraže v časovnem intervalu od 0 do 1.*

*Dokaz.* Glej Cairns, 2004, str. 31,32.

□

### 3.2.3 Modeli za netvegano obrestno mero

V prejšnjih razdelkih smo definirali preprosto binomsko okolje, ki zadostuje za definicijo modelov z določenimi lastnostmi, ki so uporabne predvsem iz računskega vidika. Pri teh modeli cene v času 0 tvorijo vhodni podatek in s tem dobimo modele, ki so pogosto časovno nehomogeni (to pomeni, da je kljub temu, da je netvegana obrestna mera enaka v dveh časovnih točkah, struktura cen lahko različna).

V določenih okoliščinah je zaželeno imeti časovno homogene modele, kar najbolje dosežemo s časovno homogenim markovskim modelom za netvegano obrestno mero pod ekvivalentno martingalsko mero $Q$.

Ena od možnih poti do omenjenega modela je, da predpostavimo, da netvegana obrestna mera zavzame vrednosti v diskretnem prostoru stanj $R$ v kombinaciji z množico verjetnosti prehodov, ki določajo kako se $r_f(t)$ spreminja. Če želimo, da model tvori popoln trg, potem lahko $r_f(t)$ zavzame samo eno vrednost (od dveh) na enem časovnem koraku.

Predpostavimo naslednji binomski model za $r_f(t)$. Naj bo $r_f(t) \in A$, pri čemer je $A = \{\ldots, r_{-1}, r_0, r_1, \ldots\}$ in pod mero $P$ velja

$$\mathrm{P}_P(r_f(t+1) = r_{i-1} \text{ ali } r_{i+1} \mid r_f(t) = r_i) \quad = \quad 1 \text{ za vse } t, i$$

Predpostavimo, da za vse $t$ velja

$$\begin{aligned} P(t, t+2, r_i) \quad &:= \quad P(t, t+2) \\ &= \quad \mathrm{e}^{-r_i}(q_i\, \mathrm{e}^{-r_{i+1}} + (1-q_i)\, \mathrm{e}^{-r_{i-1}}), \end{aligned}$$

za določeno množico konstant $q_i$, $0 < q_i < 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Sledi naslednji izrek.

**Izrek 3.2 (Cairns, 2004, str. 38).** *Za vse $T = t+1, t+2, \ldots$ velja*

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{E}_Q(\mathrm{e}^{-\sum_{s=t}^{T-1} r_f(s)} | r_f(t)) \\ &= P(t,t+1)\ \mathrm{E}_Q(P(t+1,T)|(r_f(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

*pri čemer je*

$$\mathrm{P}_Q(r_f(t+1) = r_{i+1} | r_f(t) = r_i) \ = \ q_i$$

*in*

$$\mathrm{P}_Q(r_f(t+1) = r_{i-1} | r_f(t) = r_i) \ = \ 1 - q_i.$$

*Dokaz.* Glej Cairns, 2004, str. 38,39.

□

Najlažji primer zgoraj definirane konstrukcije je slučajni sprehod za $r_f(t)$. Prostor stanj je $R = \{r_f(0) + \delta n : \ n \in \mathbb{Z}\}$, pri čemer je $\delta$ velikost koraka.

Pri časovni homogenosti pod mero $Q$ predpostavljamo, da so netvegane verjetnosti, da bo $r_f(t)$ narasla ali padla $(q,\ 1-q)$, konstantne skozi čas.

V tem modelu so martingalske verjetnosti (verjetnosti pod mero $Q$) konstantne.

Po (3.1) je netvegana verjetnost $q$ določena preprosto s ceno brezkuponske obveznice v času 0, ki dospe v času 2. Iz enačbe iz izreka tako dobimo

$$\begin{aligned} P(0,2) &= P(0,1)\ \mathrm{E}_Q(P(1,2)|r_f(0)) \\ &= \mathrm{e}^{-r_f(0)}(q\ \mathrm{e}^{-(r_f(0)+\delta)} + (1-q)\ \mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)}) \\ &\Rightarrow \ q = \frac{\mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)} - P(0,2)\ \mathrm{e}^{r_f(0)}}{\mathrm{e}^{-(r_f(0)-\delta)} - \mathrm{e}^{-(r_f(0)+\delta)}} \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je $q$ tudi netvegana verjetnost, da bodo cene padle glede na netvegan denarni račun.

Tako lahko v splošnem izračunamo cene brezkuponskih obveznic rekurzivno od dneva dospetja obveznice. Oznako $P(t,T)$ razširimo na $P(t,T,x)$, pri čemer je $x$ število korakov navzdol v ceni obveznice od časa 0 do časa $t$. Sledijo naslednji koraki:

1. Za vsako stanje $(t, x)$ naj bo $r_f(t, x)$ netvegana obrestna mera za periodo od $t$ do $t+1$ pri danih $x$ korakih navzdol. Za vse $t \geq 0$ velja $P(t, t+1) = P(t, t+1, x) = \mathrm{e}^{-r_f(t,x)}$

2. Za dano ceno $P(0, 2, 0)$ izračunamo

$$q = \frac{\mathrm{e}^{-(r_f(0,0)-\delta)} - P(0,2,0)\ \mathrm{e}^{r_f(0,0)}}{\mathrm{e}^{-(r_f(0,0)-\delta)} - \mathrm{e}^{-(r_f(0,0)+\delta)}}$$

3. Za $T = 2, 3, ..$

   (a) Definiramo $P(T, T, x) = 1$ za vsak $x = 0, 1, \ldots, T$ in $P(T-1, T, x) = \mathrm{e}^{-r_f(t,x)}$ za vse $x = 0, 1, \ldots, T-1$.

   (b) Predpostavimo, da poznamo množico cen $P(s, T, x)$ za vse $0 \leq x \leq s$ in $s = t, t+1, \ldots, T$. Potem za cene v času $t-1$ velja

$$\begin{aligned} P(t-1, T, x) &= P(t-1, t, x)\ \mathrm{E}_Q(P(t, T) | r_f(t-1) = r_f(t-1, x)) \\ &= \mathrm{e}^{-r_f(t-1,x)}(q\ P(t, T, x+1) + (1-q)\ P(t, T, x)) \end{aligned}$$

   (c) Ponavljamo korak (b) do $t = 0$.

## 3.3 Modeli obrestnih mer v zveznem času

V tem poglavju bomo predstavili modele obrestnih mer v zveznem času v povezavi s ceno brezkuponske obveznice. Pri izpeljavi rezultatov bomo uporabili bivariatno Laplaceovo transformacijo, ki nam bo omogočila zapis cene brezkuponske obveznice oblike $P(t, T) = \mathrm{e}^{A(t,T) - B(t,T) r_f(t)}$ za določeni funkciji $A$ in $B$.

### 3.3.1 Enofaktorski modeli za netvegano obrestno mero

V nadaljevanju bomo obravnavali enofaktorske modele za obrestne mere v zveznem času. Osredotočili se bomo na določitev cen obveznic pri danem enofaktorskem modelu za netvegano obrestno mero $r_f(t)$. Predpostavili bomo, da je $r_f(t)$ Itôv proces dan s stohastično diferencialno enačbo

$$dr_f(t) = a \cdot dt + b \cdot dW(t),$$

pri čemer je $W(t)$ standardno Brownovo gibanje pod naravno mero $P$, $a$ in $b$ sta določena $\mathcal{F}$-merljiva procesa in $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s) \ : \ s \leq t)$ je $\sigma$-algebra, generirana z zgodovino procesa $W(s)$ do časa $t$.

Za enofaktorske modele bomo predpostavili, da je $a = a(r_f(t))$ in $b = b(r_f(t))$, tako da je $r_f(t)$ homogen markovski proces.

V spodnji tabeli je predstavljenih nekaj časovno homogenih modelov.

**Tabela 3.1** Enofaktorski, časovno homogeni modeli za $r_f(t)$

| **Model** | $a(r)$ | $b(r)$ |
|---|---|---|
| Merton(1973) | $\mu$ | $\sigma$ |
| Dothan (1978) | $\mu r$ | $\sigma r$ |
| Vasiček (1977) | $\alpha(\mu - r)$ | $\sigma$ |
| Cox-Ingersol-Ross (1985) | $\alpha(\mu - r)$ | $\sigma\sqrt{r}$ |
| Pearson-Sun (1994) | $\alpha(\mu - r)$ | $\sigma\sqrt{r - \beta}$ |
| Brennan-Schwartz (1979) | $\alpha(\mu - r)$ | $\sigma r$ |
| Black-Karasinski (1991) | $\alpha\, r - \gamma\, r \ln r$ | $\sigma r$ |

Vir: Cairns, 2004, str. 54

Obstajajo tri osnovne značilnosti, ki so zaželene a ne bistvene za razvoj modelov.

- Obrestne mere naj bi bile pozitivne. Če model ne dovoli, da obrestne mere postanejo negativne, potem se pač upošteva, da ne obstaja možnost *ležanja denarja pod žimnico*, torej se na denar pripisujejo obresti.

- $r_f(t)$ naj bi bil avtoregresiven proces, torej predpostavljamo, da $r_f(t)$ ne more zavzeti vrednosti plus ali minus neskončnost ali nič, ampak bo proces sledil dolgoročnemu cilju. Avtoregresivnost je lastnost, iz katere naj bi gradili model, saj je po sami definiciji avtoregresivnosti prihodnost odvisna od določenih preteklih podatkov.

- Dobili naj bi preproste formule za cene obveznic in za cene nekaterih izvedenih finančnih instrumentov. V nasprotju s prvima karakteristikama, je zadnja bolj računskega pomena kot pa ekonomskega.

Seveda moramo imeti v mislih, da obstoj elegantne formule ne dokazuje pomembnosti modela. Zmeraj moramo biti zmožni dokazati, da model da dobro aproksimacijo opazovanih realnih podatkov in da je primeren za praktično uporabo. Vsi modeli so približki realnosti, vendar so nekateri boljši, nekateri pa slabši.

Ostale karakteristike, ki naj bi jih imeli modeli, so:

- Ali se cene obveznic in izvedenih finančnih instrumentov izračunavajo direktno in preprosto? To nekako odraža zahtevo, da naj bi bile cene podane z analitično formulo.

- Model mora biti fleksibilen v smislu razširitve oziroma dopolnitve, če se na trgu pojavi določen vrednostni papir, ki ga model ni zajel.
- Ali model vsebuje dinamiko, ki je realna? Npr. ali popisuje lastnosti/dogodke, ki so se zgodili v preteklosti? Ali definira dovolj krivulj obrestnih mer za sedanjost in prihodnost, ki so konsistentne s preteklostjo?
- Ali model statistično ustreza zgodovinskim podatkom?
- Če je v modelu obrestna mera pozitivna, ali lahko terminske obrestne mere in trenutna obrestna mera zavzamejo vrednosti poljubno blizu 0?
- Ali ima model ravnotežni razvoj? Ravnotežni model povzema karakteristike celotnega trga skupaj z investitorji in njihovimi različnimi nagnjenji k tveganju. Gibanje cen obveznic je odvisno od tipa investitorjev. Preprostost in eleganca ravnotežnih modelov zbledi ob dejstvu, da v vsaki časovni točki teoretične cene odstopajo od realnih cen. Modeli brez arbitraže se ognejo omenjenemu problemu tako, da privzamejo začetne opazovane cene kot del vhodnih podatkov, izgubijo pa lastnost časovne homogenosti.

Enofaktorski modeli v splošnem ne zadostijo večini omenjenih kriterijev zaradi odvisnosti od enega faktorja (ponavadi netvegane obrestne mere), ki povzroča nefleksibilnost in nerealnost modela. Zaradi tega se uporabljajo modeli, ki vsebujejo več kot en faktor.

### 3.3.2 Vasičkov model

Vasiček je leta 1977 predlagal model za netvegano obrestno mero $r_f(t)$, ki sloni na stohastični diferencialni enačbi

$$dr_f(t) \quad = \quad \alpha(\mu - r_f(t))\,dt + \,\sigma d\tilde{W}(t), \tag{3.2}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod martingalsko mero $Q$ in so $\alpha$, $\mu$ ter $\sigma$ strogo pozitivne konstante. Sam proces je zelo znan strokovnjakom s področja stohastičnih diferencialnih enačb in sicer gre za afino transformacijo Ornstein-Uhlenbeckovega procesa. V modelu:

- $\mu$ predstavlja netvegano, dolgoročno, povprečno obrestno mero,
- $\alpha$ predstavlja sorazmernostni faktor, ki vleče člen $(\mu - r_f(t))$ proti dolgoročnemu povprečju,
- $\sigma$ predstavlja lokalno nestanovitnost kratkoročnih obrestnih mer.

V nadaljevanju bomo predstavili izreke, s pomočjo katerih bomo zapisali cene brezkuponskih obveznic pri določenem modelu obrestne mere. Izpeljane formule bomo uporabili v četrtem poglavju, ko bomo vrednotili življenjska zavarovanja, saj je (zelo poenostavljeno) cena življenjskega zavarovanja v bistvu kar cena brezkuponske obveznice pomnožena z določeno verjetnostjo. Pri tem bomo uporabili tudi oznako $B$, ki pa bo v danih izrekih predstavljala funkcijo v zapisu bivariatne Laplaceove transformacije in ne denarnega računa.

**Izrek 3.3 (Cairns, 2004, str. 65).** *Cena brezkuponske obveznice je podana z*

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}, \tag{3.3}$$

*pri čemer je*

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \\ A(t,T) &= (B(t,T)-(T-t))(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2. \end{aligned}$$

*Dokaz.* V dokazu bomo uporabili naslednji delni rezultat (Cairns, 2004, str. 249, 250). Bivariatna Laplaceova transformacija za $\int_t^T r_f(s)ds$ in $r_f(T)$ pri dani $r_f(t)$ je

$$\begin{aligned} P_L(t,T,r,\nu,\omega) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\nu\int_t^T r_f(s)ds-\omega r_f(T)}|r_f(t)=r] \\ &= \mathrm{e}^{A(t,T,\nu,\omega)-B(t,T,\nu,\omega)r}, \end{aligned}$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T,\nu,\omega) &= \nu B_1(t,T) + \omega B_2(t,T), \\
B_1(t,T) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\alpha}, \\
B_2(t,T) &= \mathrm{e}^{-\alpha\tau}, \\
\tau &= T-t, \\
A(t,T,\nu,\omega) &= -\nu A_1(t,T) - \omega A_2(t,T) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\nu^2 C_{11}(t,T) + \nu\omega C_{12}(t,T) + \frac{1}{2}\omega^2 C_{22}(t,T), \\
A_1(t,T) &= \mu(\tau - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\alpha}), \\
A_2(t,T) &= \mu(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau}), \\
C_{11} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(2\alpha\tau - 3 + 4\mathrm{e}^{-\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}), \\
C_{12} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})^2, \\
C_{22} &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}).
\end{aligned}
$$

Cena brezkuponske obveznice v času $t$, ki dospe v času $T$ pri dani $r_f(t) = r$ je enaka

$$
\begin{aligned}
P(t,T,r) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{\int_t^T r_f(s)ds | r_f(t)=r}] = P_L(t,T,r,1,0) \\
&= \mathrm{e}^{A(t,T,1,0) - B(t,T,1,0)r},
\end{aligned}
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T,1,0) &= B_1(t,T) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \\
A(t,T,1,0) &= -A_1(t,T) + \frac{1}{2}C_{11}(t,T) \\
&= -\mu(T-t-\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(2\alpha(T-t) - 3 + 4\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)} - \mathrm{e}^{-2\alpha(T-t)}) \\
&= (B(t,T) - (T-t))(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2
\end{aligned}
$$

□

### 3.3.3 Cox-Ingersoll-Ross model

Vasičkov model ima splošno pomanjkljivost: netvegana obrestna mera lahko zavzame negativne vrednosti. Iz prakse lahko zavzamemo stališče, da so verjetnosti, da $r_f(t)$ postane negativna, majhne (ali zaradi kratkega časovnega horizonta ali zaradi majhne nestanovitnost $r_f(t)$). Tako bi dodaten pogoj nenegativnosti imel zelo majhen učinek na sam model. Kljub temu pa pri določenih pogojih in realnih vrednostih parametrov so množice verjetnosti negativnih vrednosti za $r_f(t)$ (statistično) značilne. Dodaten empirični dokaz, ki nasprotuje predpostavki, da je nestanovitnost $r_f(t)$ konstantna (v resnici je naraščajoča funkcija $r_f(t)$), postavi Vasičkov model še bolj pod vprašaj.

Prvi model za netvegano obrestno mero $r_f(t)$, ki predpostavlja pozitivnost $r_f(t)$, so predlagali Cox, Ingersoll in Ross (CIR model)

$$dr_f(t) \quad = \quad \alpha(\mu - r_f(t)) \cdot dt + \sigma\sqrt{r_f(t)} \cdot d\tilde{W}(t), \tag{3.4}$$

pri čemer so $\alpha$, $\mu$, $\sigma > 0$ in $\tilde{W}(t)$ je standardno Brownovo gibanje pod martingalsko mero $Q$.

**Izrek 3.4 (Cairns, 2004, str. 67).**

a.) *Bivariatna Laplaceova transformacija je oblike*

$$P_L(t,T,r,\nu,\omega) \quad = \quad \mathrm{e}^{A(t,T,\nu,\omega)-B(t,T,\nu,\omega)r},$$

*pri čemer so koeficienti*

$$\begin{aligned} A(t,T,\nu,\omega) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma(\nu)\mathrm{e}^{(\gamma(\nu)+\alpha)(T-t)/2}}{(\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu)}\right), \\ \gamma(\nu) &= \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2\nu}, \\ B(t,T,\nu,\omega) &= \frac{\omega(2\gamma(\nu)+(\gamma(\nu)-\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1))+2\nu(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)}{(\sigma^2\omega+\gamma(\nu)+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(\nu)(T-t)}-1)+2\gamma(\nu)}. \end{aligned}$$

b.) *Za $\nu = 1$ in $\omega = 0$ dobimo*

$$P(t,T,r) \quad = \quad \mathrm{e}^{\bar{A}(T-t)-\bar{B}(T-t)r},$$

*pri čemer so*

$$
\begin{aligned}
\bar{A}(\tau) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma \mathrm{e}^{(\gamma+\alpha)\tau/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}\right), \\
\gamma &= \sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}, \\
\bar{B}(\tau) &= \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma\tau}-1)+2\gamma}.
\end{aligned}
$$

*Dokaz.* Glej Cairns, 2004, str. 253-263.

□

Pokazali smo, da so cene brezkuponskih obveznic pri Vasičkovemu in CIR modelu oblike $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$ za določeni funkciji $A$ in $B$. V nadaljevanju se lahko vprašamo ali obstajajo še kakšni modeli, ki so definirani s podobno afino formo za $P(t,T)$.

Zapišimo splošno stohastično diferencialno enačbo za $r_f(t)$

$$
dr_f(t) = m(t, r_f(t)) \cdot dt + s(t, r_f(t)) \cdot d\tilde{W}(t), \tag{3.5}
$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod martingalsko mero $Q$. Predpostavimo, da je cena brezkuponske obveznice podana z $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$. Potem z aplikacijo Itôve formule sledi

$$
dP(t,T) = P(t,T)\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t}r_f(t) - Bm + \frac{1}{2}Bs^2\right) dt - Bs\ d\tilde{W}(t)\right] \tag{3.6}
$$

pri čemer je $m \equiv m(t, r_f(t))$...Vemo tudi, da pod mero $Q$ velja

$$
dP(t,T) = P(t,T)\big(r_f(t)\ dt + S(t,T,r_f(t))\ d\tilde{W}(t)\big), \tag{3.7}
$$

pri čemer je $S(t,T,r_f(t))$ nestanovitnost $P(t,T)$. Zadnja enakost sledi iz zahteve, da morajo vsa tržna sredstva imeti pričakovano rast pri netvegani obrestni meri pod $Q$. Če definiramo

$$
g(t,r) = \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t}r - Bm(t,r) + \frac{1}{2}Bs(t,r)^2 - r,
$$

sledi $g(t,r) = 0$ za vse $t$ in $r$. Če odvajamo dvakrat po $r$, dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= -B(t,T)\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{2}B(t,T)^2\frac{\partial^2 (s(t,r)^2)}{\partial r^2} = 0 \\
&\Rightarrow -\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{2}B(t,T)\frac{\partial^2 (s(t,r)^2)}{\partial r^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Ker je $B(t,T)$ funkcija tako $t$ kot $T$, zgornja identiteta velja, če sta oba člena

$$
\frac{\partial^2 m(t,r)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 (s(t,r)^2)}{\partial r^2} = 0.
$$

**Trditev 3.5.** *Potreben pogoj, da so formule cen brezkuponskih obveznic oblike $P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}$ je, da sta lokalni trend in nestanovitnost oblike*

$$
m(t, r_f(t)) = a(t) + b(t)r_f(t) \quad \text{in} \quad s(t, r_f(t)) = \sqrt{\gamma(t)r_f(t) + \delta(t)},
$$

*pri čemer so $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ in $\delta(t)$ deterministične funkcije časa.*

Za splošne, časovno odvisne $a(t)$, $b(t)$, $\gamma(t)$ in $\delta(t)$ analitične rešitve za $A(t,T)$ in $B(t,T)$ običajno niso na voljo. Ko pa so omenjene funkcije konstante, lahko izpeljemo formule za $A$ in $B$. V posebnem ločimo naslednje primere.

**Vasiček (1977).** $\gamma = 0$, $\delta = \sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha\mu$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t))dt + \sigma\, d\tilde{W}(t)$. Pokazali smo že, da velja

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= (1 - \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)})/\alpha \\
A(t,T) &= (B(t,T) - (T-t))(\mu - \sigma^2/2\alpha^2) - \frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

**Cox, Ingersoll in Ross (1985).** $\delta = 0$, $\gamma = \sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha\mu$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t)) + \sigma\sqrt{r_f(t)}\, d\tilde{W}(t)$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
A(t,T) &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{(\gamma+\alpha)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right) \\
\delta &= \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2} \\
B(t,T) &= \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

**Merton (1973).** $\gamma = 0$, $\delta = \sigma^2$ in $b = 0$, od koder sledi $dr_f(t) = adt + \sigma\, d\tilde{W}(t)$. Sledi

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= T-t \\
A(t,T) &= \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 - \frac{1}{2}a(T-t)^2.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

**Pearson in Sun (1994).** $\delta = \sigma^2$, $\gamma = -\beta/\sigma^2$, $b = -\alpha$ in $a = \alpha(\mu+\beta)$, od koder sledi $dr_f(t) = \alpha(\mu - r_f(t))dt + \sigma\sqrt{r_f(t)-\beta}\, d\tilde{W}(t)$. $B(t,T)$ ima enako obliko kot pri CIR modelu, $A(t,T)$ pa nadomestimo z $A_P(t,T) = A(t,T) - \beta(T-t) + \beta B(t,T)$ (pri obeh $\mu$ zamenjamo z $\mu - \beta$).

## 3.4 Modeli brez arbitraže

Na začetku poglavja smo predstavili dve glavni skupini modelov obrestni mer: kratkoročne modele in modele brez arbitraže. Razlog za razvoj modelov brez arbitraže je preprost. Kadar uporabimo kratkoročne modele obrestnih mer kot npr. Vasičkov ali CIR model, običajno ugotovimo, da se teoretične cene $\hat{P}(t,T)$, dobljene z modelom, ne ujemajo z opazovanimi, dejanskimi cenami obveznic $P_{obs}(t,T)$ na trgu. Razlog lahko tiči v parametrih modela, katerih vrednosti so določene na podlagi zgodovinskih podatkov, kar povzroči odstopanje $\hat{P}(t,T)$ od $P_{obs}(t,T)$. Omenjene razlike lahko zmanjšamo tako, da zanemarimo zgodovinske podatke in model uravnotežimo s parametri, ki dajo kar najboljše ujemanje med $\hat{P}(t,T)$ in $P_{obs}(t,T)$ - seveda na podatkih do danes. Kljub temu pa je v praksi na voljo več obveznic kot pa imamo parametrov. Navedeni postopek je tako nezadovoljiv, saj bi model morali prilagajati dnevno (lahko pa še pogosteje). Po drugi strani naj bi bili parametri modela fiksni, ne pa časovno odvisni (in s tem stohastični), kar pomeni, da sam proces prilagajanja modela krši osnovne predpostavke modela.

Tudi pri cenah derivativov pridemo do podobnih razlik med teoretičnimi in opazovanimi cenami. Razlike lahko odpravimo na dva načina. Prvič, lahko razvijemo večfaktorske, časovno homogene modele, katerih parametri so prilagojeni zgodovinskim podatkom. Naj bo $\theta$ fiksna množica parametrov in $X(t)$ vektor stohastičnih spremenljivk stanja. Predpostavimo, da smo $\theta$ ocenili iz zgodovinskih podatkov. Model bo potemtakem zadovoljiv, če

- lahko vedno dobimo dober približek opazovanih cen obveznic in izvedenih finančnih instrumentov s pomočjo rednega (zveznega) prilagajanja $X(t)$,
- dobimo kvalitetne teoretične cene brez prilagajanja parametrov $\theta$ in
- je časovna vrsta prilagojenih vrednosti $X(t)$ konsistentna z dinamiko modela za $X(t)$.

Drugič, lahko razvijemo časovno nehomogene modele brez arbitraže, pri katerih so opazovane cene obveznic in izvedenih finančnih instrumentov določena oblika vhodnih podatkov in tako se $\hat{P}(t,T)$ natančno ujame z $P_{obs}(t,T)$ v času prilagoditve $t$.

V praksi se pogosteje uporablja drugi način. Razlogi so naslednji:

- na likvidnih trgih obveznic in opcij morajo biti vzdrževalci trga (*market makerji*) pripravljeni kupovati in prodajati po cenah, ki kotirajo. Če model vzdrževalca trga da različne cene od kotirajočih (in različne od ostalega trga), se ustvari priložnost za arbitražo, kar bo po vsej verjetnosti pomenilo določene negativne posledice za vzdrževalca trga,
- ko se na trgu (v javnosti) pojavi nova informacija (npr. sprememba kratkoročnih obrestnih mer), vzdrževalec trga želi oceniti kako bodo ostali udeleženci na trgu popravili cene,
- vzdrževalci trga se tipično ukvarjajo z določanjem cen in zaščito kratkoročnih izvedenih finančnih instrumentov. Pri tem se porajajo dvomi o potencialnih posledicah uporabe prilagojenega modela, ki je nekonsistenten s predpostavkami modela, kar z drugimi besedami pomeni, da bo kljub rednemu prilaganju parametrov modela prišlo do določene napake. Omenjena napaka je pri kratkoročnih modelih manjša kot pri dolgoročnih modelih,
- investicijske banke, ki ponujajo izvedene finančne instrumente izven trga, želijo določiti cene le teh konsistentno z najbližjimi izvedenimi finančnimi instrumenti, s katerimi se trguje.

### 3.4.1 Markovski modeli

Obravnavali bomo modele, pri katerih

- so cene vhodni podatek in
- je pogojna porazdelitev $P(s,T)|\mathcal{F}_t$, $t < s < T$, enaka $P(s,T)|X(t)$, pri čemer je $X(t)$ končno dimenzionalen Itôv proces. (Tako je dovolj poznati vrednost $X(t)$, da bi opisali prihodnjo dinamiko $P(s,T)$. Vsaka dodatna informacija o preteklosti ne vpliva na opis dinamike v prihodnosti.)

V nadaljevanju bomo definirali modela, kjer je $X(t) = r_f(t)$.

*Ho in Leejev model*

Ho in Lee sta leta 1986 predlagala naslednji model za netvegano obrestno mero

$$dr_f(t) \;=\; \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot d\tilde{W}(t), \tag{3.11}$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod ekvivalentno martingalsko mero $Q$. V bistvu gre za bolj splošno obliko Mertonovega modela za slučajni sprehod, pri katerem je $\theta(t)$ konstanta.

Predpostavimo, da imamo kot vhodni podatek cene $P(0,T)$, za vse $T > 0$. Naj bo

$$f(0,T) \;=\; -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(0,T)$$

začetna krivulja terminskih obrestnih mer. Če je

$$\theta(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial T} f(0,T) + \sigma^2 T,$$

potem lahko pokažemo, da velja

$$\mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_0^T r_f(t)dt} | r(0)] \;=\; P(0,T)$$

in

$$P(t,T) \;=\; \mathrm{e}^{A(t,T)-(T-t)r_f(t)},$$

pri čemer je

$$A(t,T) \;=\; \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + (T-t)f(0,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2.$$

Opazimo, da ima $P(t,T)$ afino obliko kot pri Vasičkovem in CIR modelu.

Sledi

$$f(t,T) \;=\; -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T) = r_f(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t),$$

od koder dobimo rešitev za $r_f(t)$

$$
\begin{aligned}
r_f(t) &= r_f(0) + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma\ \tilde{W}(t) \\
&= r_f(0) + f(0,t) - f(0,0) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t) \\
&= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Torej

$$
\begin{aligned}
f(t,T) &= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\tilde{W}(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t) \\
&= f(0,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2 + \sigma\tilde{W}(t).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

*Hull in Whiteov model*

Hull in White sta leta 1990 predlagala posplošitev Vasičkovega modela in sicer

$$
dr_f(t) = \alpha(\mu(t) - r_f(t))dt + \sigma\ d\tilde{W}(t), \tag{3.14}
$$

pri čemer je $\tilde{W}(t)$ Brownovo gibanje pod $Q$ in $\mu(t)$ predstavlja deterministično funkcijo časa. Pogosto je zgoraj zapisan model predstavljen kot $dr_f(t) = (\theta(t) - \alpha r_f(t))dt + \sigma\ d\tilde{W}(t)$, vendar deterministična funkcija $\theta(t)$ nima tako direktne interpretacije kot jo ima $\mu(t)$.

V Vasičkovemu modelu je $\mu(t) = \mu$ konstanta. Ho in Leejev model je poseben primer, pri čemer gre $\alpha \to 0$ in $\alpha\mu(t) \to \theta(t)$, ko gre $\alpha \to 0$.

Predpostavimo, da velja

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}) \\
P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T) - B(t,T) r_f(t)},
\end{aligned}
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \\
A(t,T) &= \ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T) f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)})^2 (1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}).
\end{aligned}
$$

Povzamemo lastnosti Ornstein-Uhlenbeckovega procesa

$$r_f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} r_f(0) + \alpha \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \mu(s) ds + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \, d\tilde{W}(s).$$

Sledi

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \mu(s) ds &= f(0,t) - \mathrm{e}^{-\alpha t} r_f(0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^2 \\ \Rightarrow \quad r_f(t) &= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t})^2 + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \, d\tilde{W}(s). \end{aligned}$$

### 3.4.2 Heath-Jarrow-Mortonovo okolje

V nadaljevanju bomo podali splošno okolje, znotraj katerega lahko razvijemo določene specifične modele. Obravnavali bomo obnašanje modela obrestnih mer v brez arbitražnem okolju, pri čemer je začetna krivulja terminskih obrestnih mer del vhodnih podatkov.

Tako bomo obravnavali neskončno mnogo procesov $f(t,T)$ za $0 \leq t \leq T$ in sicer en proces za vsak $T \in \mathbb{R}$. Kljub temu ni nujno, da so modeli tako kompleksni. Recimo, če je model odvisen od treh virov slučajnosti, potem obravnavamo primer kot tridimenzionalen, ne pa kot neskončno dimenzionalen. Tako je za dano $f(t,T)$, za vse $T$, dovolj, da poznamo spremembe krivulje terminskih obrestnih mer na intervalu $(t, t+dt]$ samo za tri datume do dospetja, kar je dovolj, da določimo spremembe za vse ostale zapadlosti.

V tem razdelku bomo predstavili enofaktorske modele, v naslednjem pa večfaktorske.

Vzemimo začetno krivuljo terminskih obrestnih mer $f(0,t)$ kot začetno točko. Za fiksen $T$ je $f(t,T)$ Itôv proces, ki zadošča

$$df(t,T) = \alpha(t,T) \cdot dt + \sigma(t,T) \cdot dW(t)$$

ali

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T) ds + \int_0^t \sigma(t,T) \, dW(s)$$

za vsak $T > t$, pri čemer sta $\alpha(t,T)$ in $\sigma(t,T)$ odvisni od $f(t,T)$ ali celotne krivulje terminskih obrestnih mer ali, še bolj splošno, od $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s) : s \leq t)$.

Pri enofaktorskih modelih definiramo za vse zapadlosti $T$ Itôve procese, ki so odvisni od istega enodimenzionalnega vira slučajnosti $W(t)$. Sledi, da so spremembe skozi celotno krivuljo terminskih obrestnih mer pozitivno, ampak nelinearno korelirane.

Tehnični pogoji:

(i) za vse $T$ sta $\alpha(t,T)$ in $\sigma(t,T)$ odvisni od zgodovine $W(s)$ do časa $t$.

(ii) $\int_0^T \sigma^2(t,T)dt$ in $\int_0^T |\alpha(t,T)|dt$ sta skoraj gotovo končna.

(iii) $\int_0^T \int_0^u |\alpha(t,u)|dt\, du$ je končen.

(iv) $f(0,T)$ je deterministična in zadošča $\int_0^T |f(0,u)|du < \infty$.

(v) $\mathrm{E}[|\int_0^u \sigma(t,u)dW(u)|du] < \infty$.

Ker je $df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$, sledi

$$r_f(T) = \lim_{t\to T^-} f(t,T) = f(0,T) + \int_0^T \sigma(s,T)\; dW(s) + \int_0^T \alpha(s,T)ds.$$

Pri tem je $r_f(T)$ lahko markovski ali ne, odvisno od oblike $\sigma(s,T)$.

Denarni račun ima vrednost $B(t)$ in zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$\begin{aligned} dB(t) &= r_f(t)B(t)dt \\ \Rightarrow \quad B(t) &= B(0)\mathrm{e}^{\int_0^t r_f(u)du} \\ &= B(0)\mathrm{e}^{\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s,u)du\;\, ds + \int_0^t (\int_s^t \sigma(s,u)du)dW(s)}. \end{aligned}$$

Pri izpeljavi tretjega člena v eksponentu smo uporabili tehnični pogoj (v), po katerem je dovoljeno zamenjati vrstni red integriranja.

Na trgu so cene brezkuponskih obveznic določene kot

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{-\int_t^T f(t,u)du} \\ &= \mathrm{e}^{-\int_0^t (\int_t^T \sigma(s,u)du)dW(s) - \int_t^T f(0,u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u)du\;\, ds}. \end{aligned}$$

Če definiramo diskontirane cene premoženja kot

$$
\begin{aligned}
Z(t,T) &= \frac{P(t,T)}{B(t)} \\
P(t,T) &= \mathrm{e}^{\int_0^t S(s,T)dW(s) - \int_t^T f(0,u)du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)du\ ds},
\end{aligned}
$$

pri čemer je $S(s,T) = -\int_s^T \sigma(s,u)du$, dobimo z uporabo Itôve formule

$$
dZ(t,T) = Z(t,T)[(\frac{1}{2}S^2(t,T) - \int_t^T \alpha(t,u)du)dt + S(t,T)dW(t)].
$$

Ker $B(t)$ nima nestanovitnosti, $S(t,T)$ interpretiramo kot nestanovitnost $P(t,T)$.

V nadaljevanju bomo diskontirano ceno premoženja spremenili v martingal, kar lahko storimo s spremembo mere. Definiramo

$$
\gamma(t) = \frac{1}{2}S(t,T) - \frac{1}{S(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)du.
$$

Po kriteriju Novikova (Jacod, 2000, str. 239) mora $\gamma(t)$ zadoščati pogoju $\mathrm{E}_P[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T \gamma(t)^2 dt}] < \infty$. Potem obstaja nova mera $Q$, ki je ekvivalentna $P$ in je

$$
\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s)ds
$$

Brownovo gibanje pod mero $Q$. Pod mero $Q$ velja

$$
dZ(t,T) = Z(t,T)S(t,T)d\tilde{W}(t).
$$

Zato je $Z(t,T)$ martingal pod $Q$ pod tehničnim pogojem, da velja

$$
\mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int_0^T S^2(t,T)dt}] < \infty.
$$

Sledi

$$
dP(t,T) = P(t,T)(r_f(t)dt + S(t,T)d\tilde{W}(t)). \tag{3.15}
$$

S tem smo podali postopek spremembe mere pri dani brezkuponski obveznici, ki dospe v času $T$. V nadaljevanju bomo definirali povezavo med $\alpha(t,T)$, $\sigma(t,T)$ in $\gamma(t)$ za vse $t$ in $T$ na osnovi argumenta o brezarbitražnem okolju.

Predpostavimo, da imamo izvedeni finančni instrument, ki nam da $X$ v času $S$, $S < T$. Za varovanje $X$ bomo uporabili strategijo, ki vključuje denarni račun in brezkuponsko obveznico.

Varovanje se v splošnem določi z naslednjimi petimi koraki

- Poiščemo ekvivalentno mero $Q$, pod katero je $Z(t,T)$ martingal.
- Definiramo $Q$-martingal $D(t) = \mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t]$.
- Poiščemo proces $\phi(t)$, tako da je $D(t) = D(0) + \int_0^t \phi(s)dZ(s,T)$.
- Definiramo $\psi(t) = D(t) - \phi(t)Z(t,T)$.
- Trgovalna strategija $(\psi(t), \phi(t))$, ki predstavlja število enot $B(t)$ in P(t,T) je samofinancirajoča in je varovanje za plačilo derivativa $X$ v času $S$.

V nadaljevanju bomo omenjene korake natančneje pregledali. Mero $Q$ smo že določili. Naj bo

$$D(t) = \mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t] \quad \text{za } t < s.$$

To je martingal pod $Q$. Tudi $Z(t,T)$ je $Q$-martingal. Tako s pomočjo izreka o reprezentativnosti martingalov vemo, da obstaja proces $\phi(t)$, da velja

$$dD(t) = \phi(t)dZ(t,T) \qquad \text{ali} \qquad D(t) = D(0) + \int_0^t \phi(s)dZ(s,T).$$

Recimo, da imamo trgovalno strategijo, pri kateri imamo $\phi(t)$ enot brezkuponske obveznice $P(t,T)$ v času $t$ in $\psi(t) = D(t) - \phi(t)Z(t,T)$ enot denarja $(B(t))$ v času $t$.

Vrednost takšnega portfelja v času $t$ je enaka

$$V(t) \;=\; B(t)D(t) = B(t)\mathrm{E}_Q[B(S)^{-1}X|\mathcal{F}_t].$$

Sledi, da je trenutna sprememba vrednosti portfelja enaka

$$\begin{aligned} dV(t) &= d(B(t)D(t)) \\ &= D(t)dB(t) + B(t)dD(t) + dB(t)dD(t) \\ &= r_f(t)B(t)D(t) + B(t)\phi(t)dZ(t,T) + 0dt. \end{aligned}$$

Zdaj je $dP(t,T) = d(B(t)Z(t,T)) = r_f(t)B(t)Z(t,T)dt + B(t)dZ(t,T)$, torej je trenutni dobiček enak

$$\begin{aligned}
&\psi(t)dB(t) + \phi(t)dP(t,T) \\
&\quad = (D(t) - \phi(t)Z(t,T))B(t)r_f(t)dt + \phi(t)[r_f(t)B(t)Z(t,T)dt + B(t)dZ(t,T)] \\
&\quad = r_f(t)B(t)D(t)dt + \phi(t)B(t)dZ(t,T) \\
&\quad = dV(t).
\end{aligned}$$

Sledi, da je takšna investicijska politika samofinancirajoča in je $V(t)$ vrednost izvedenega finančnega instrumenta v času $t$, ki izplača $X$ v času $S$.

Recimo, da je v zgornjem primeru $X = 1$. Torej je izvedeni finančni instrument kar brezkuponska obveznica, ki zapade v času $S$. Izpeljali smo pošteno ceno za takšno obveznico na trgu brez arbitraže, kjer jo lahko sestavimo z denarjem in brezkuponsko obveznico, ki zapade v času $T$. Cena je enaka

$$P(t,S) \;=\; B(t)\mathrm{E}_Q[B(s)^{-1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^S r_f(u)du}|\mathcal{F}_t].$$

Diskontirana cena obveznice je

$$Z(t,S) \;=\; \frac{P(t,S)}{B(t)} = \mathrm{E}_Q[B(s)^{-1}|\mathcal{F}_t],$$

torej je $Z(t,S)$ $Q$-martingal. To seveda velja za vse obveznice. Sledi, da lahko vse obveznice spremenimo v martingale z uporabo navedene spremembe mere (vse vsebujejo enako ceno ta tveganje na trgu $\gamma(t)$). Tako za vse zapadlosti $T$ velja

$$\frac{1}{2}S(t,T) - \frac{1}{S(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)du \;=\; \gamma(t)$$

ali

$$\int_t^T \alpha(t,u)du \;=\; \frac{1}{2}S(t,T)^2 - \gamma(t)S(t,T).$$

Z odvajanjem po $T$ dobimo

$$\alpha(t,T) \;=\; \sigma(t,T)(\gamma(t) - S(t,T)),$$

pri čemer smo upoštevali

$$\frac{\partial}{\partial T}S(t,T) \;=\; -\sigma(t,T).$$

Zdaj se vrnimo k osnovnemu modelu

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \\ &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)(d\tilde{W}(t) - \gamma(t)dt) \\ &= -\sigma(t,T)S(t,T)dt + \sigma(t,T)d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

in posledično

$$r_f(t) \;=\; f(0,t) - \int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\tilde{W}(s),$$

kar v splošnem pomeni, da $r_f(t)$ ni markovski proces.

**Povezava med HJM in markovskimi modeli**

Predpostavimo, da je pri HJM $\sigma(s,t) = \sigma$ za vse $s$ in $t$, tako da je $S(s,t) = -(t-s)\sigma$. Dobimo

$$r_f(t) \;=\; f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma d\tilde{W}(s),$$

kar je forma za $r_f(t)$ pri Ho in Leejevem modelu.

Če predpostavimo, da je $\sigma(s,t) = \sigma \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}$, velja $S(t,s) = -\frac{\sigma}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)})$ in sledi

$$\begin{aligned} -\int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds &= \frac{\sigma^2}{\alpha}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}(1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)})ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2. \end{aligned}$$

Dobimo

$$r_f(t) \;=\; f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2 + \sigma\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}d\tilde{W}(s),$$

kar je forma Hull in White-ovega modela.

## 3.5 Večfaktorski modeli

Večfaktorske modele uporabimo, ko imamo več kot en vir slučajnosti. Po drugi strani so takšni modeli uporabni tudi v primerih, ko želimo modelirati bolj kompleksne opcije na obrestne mere (ki se nanašajo na dva ali več slučajnih virov), npr. opcija je lahko definirana v osnovi kot razlika med enoletno in petletno trenutno obrestno mero.

### 3.5.1 Afini modeli

Difuzijski model s spremenljivkami stanj $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ (ali z vektorskim zapisom $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))'$) je afin, če lahko cene brezkuponskih obveznic zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T)+\sum_{j=1}^{n} B_j(t,T)X_j(t)} \\ &= \mathrm{e}^{A(t,T)+B(t,T)'X(t)}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

pri čemer je

$$B(t,T) = (B_1(t,T), \ldots, B_n(t,T))'.$$

Model je časovno homogen, če so spremenljivke stanj $X(t)$ časovno homogene in sta funkciji $A(t,T)$ in $B(t,T)$ odvisne samo od $T - t$. V nadaljevanju se bomo omejili na časovno homogene modele.

Pri enofaktorskih modelih smo za časovno homogene modele zahtevali, da če model ustreza afini formi, mora $r_f(t)$ zadoščati stohastični diferencialni enačbi

$$dr_f(t) = (a + br_f(t)) \cdot dt + \sqrt{\gamma r_f(t) + \delta} \cdot d\tilde{W}(t).$$

Za večfakorske modele velja naslednji izrek.

**Izrek 3.6 (Duffie in Kan 1996).** *Predpostavimo, da ima $P(t, t+\tau)$ formo oblike $\mathrm{e}^{A(\tau)+B(\tau)'X(t)}$. Potem mora $X(t)$ zadoščati stohastični diferencialni enačbi*

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + SD(X(t))d\tilde{W}(t), \tag{3.17}$$

*pri čemer je $\tilde{W}(t)$ n-dimenzionalno Brownovo gibanje pod $Q$ in $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ je konstantni vektor, $\beta = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$ je konstantna matrika, $S = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ je konstantna matrika in $D(t)$ je diagonalna matrika oblike*

$$D(X(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1' X(t) + \delta_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2' X(t) + \delta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\gamma_n' X(t) + \delta_n} \end{pmatrix},$$

*pri čemer so $\delta_1, \dots, \delta_n$ konstante in je vsak $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})'$ konstanten vektor.*

**Dokaz**. Glej Duffie in Kan, 1996.

□

### Gaussovi večfaktorski modeli

Gaussovi modeli so v preteklosti vzbudili malo zanimanja, ker dopuščajo možnost, da obrestne mere postanejo negativne. Prvo večfaktorsko razširitev Vasičkovega modela je naredil Langetieg (1980). Kasneje sta Beaglehole in Tenney (1991) postavila splošno teorijo. Vsi Gaussovi modeli so osnovani na naslednjem splošnem modelu.

Naj bo $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))'$ difuzijski proces s stohastično diferencialno enačbo

$$dX(t) = BX(t)dt + Kd\tilde{W}(t),$$

pri čemer sta $B$ in $K$ realni, konstantni, $n \times n$ matriki in $\tilde{W}(t)$ standardno $n$-dimenzionalno gibanje pod $Q$.

Netvegana obrestna mera je

$$r_f(t) = \mu + \theta' X(t),$$

pri čemer je $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ vektor konstant. Če so vse $\theta_i$ različne od 0, potem lahko prilagodimo $X_i(t)$ in predpostavimo, da so vse $\theta_i = 1$ brez škode za splošnost. To ni mogoče v primeru, ko so nekatere $\theta_i$ enake 0.

S tem ima matrika $B$ spektralno dekompozicijo oblike $B = B_R \Lambda B_L$, pri čemer je

- $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika lastnih vrednosti matrike $B$. Nekatere lastne vrednosti so lahko kompleksne. Da bo $X(t)$ stacionaren, torej $X(t) \stackrel{d}{=} X(t+h), h > 0$, zahtevamo, da so realni deli vseh lastnih vrednosti negativni.

- $B_L$ in $B_R$ sta matriki levih in desnih lastnih vektorjev matrike $B$.

- Stolpci $B_R$ so poravnani tako, da velja $B_R B_L = I$. Sledi $B^k = B_R \Lambda^k B_L$.

Omenjena dekompozicija ni enolično določena, vendar bomo z njeno uporabo zapisali ceno brezkuponske obveznice.

Definiramo

$$Y(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\Lambda t} B_L X(t),$$

pri čemer za vsako realno matriko $A$ velja $\mathrm{e}^A = I + \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Aplikacija Itôve formule da

$$dY(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\Lambda t} B_L K d\tilde{W}(t).$$

Zato

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-\Lambda u} B_L K d\tilde{W}(u) \\ \Rightarrow \quad X(t) &= B_R \mathrm{e}^{\Lambda t} B_L X(0) + B_R \mathrm{e}^{\Lambda t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\Lambda u} B_L K d\tilde{W}(u) \\ &= \mathrm{e}^{Bt} X(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{B(t-u)} d\tilde{W}(u). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Prejšnji pogoj, da morajo biti realni deli lastnih vrednosti matrike $B$ negativni, nam zagotavlja, da gresta $\mathrm{e}^{\Lambda t}$ in $\mathrm{e}^{Bt}$ proti 0, ko gre $T$ proti neskončno. Zdaj naj bo $R(t) = \int_0^T r_f(t)dt = \mu T + \int_0^T \theta' X(t)dt$. Ta je normalno porazdeljen z

$$\mathrm{E}_Q[R(T)] \;=\; \mu T + \theta' B_R \Lambda^{-1}(\mathrm{e}^{\Lambda T} - I) B_L X(0)$$

in

$$\mathrm{Var}_Q[R(T)] \;=\; \int_0^T \theta' B_R \Lambda^{-1}(\mathrm{e}^{\Lambda T} - I) B_L K K' B_L' (\mathrm{e}^{\Lambda T} - I)\Lambda^{-1} B_R' \theta dt.$$

Sledi

$$\begin{aligned} P(0,T) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-R(T)}|X(0)] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{E}_Q[-R(T)|X(0)] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_Q[R(T)|X(0)]}. \end{aligned}$$

**Primer (Beaglehole in Tenney 1991).** Pišimo $r_f(t) = (X_1(t) + \mu_1) + (X_2(t) + \mu_2)$, pri čemer je $(X_1(t) + \mu_1)$ trenutna inflacija cen in $(X_2(t) + \mu_2)$ trenutna realna obrestna mera z

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= -\alpha_1 X_2(t) dt + \sigma_{11} d\tilde{W}_1(t), \\ dX_2(t) &= -\alpha_2 X_1(1) dt + \sigma_{21} d\tilde{W}_1(t) + \sigma_{22} d\tilde{W}_2(t). \end{aligned}$$

**Posplošeni CIR modeli**

Če privzamemo obliko iz izreka 3.6 velja $\delta_i = 0$ za vse $i$. Duffie (1996) je opisal primer, ko so $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ neodvisni, enofaktorski CIR procesi. Tako je za $i = 1, \ldots, n$

$$dX_i(t) \;=\; \alpha_i(\mu_i - X_i(t))dt + \sigma_i \sqrt{X_i(t)} d\tilde{W}_1(t),$$

pri čemer so $\tilde{W}_1(t), \ldots, \tilde{W}_n(t)$ neodvisna, enako porazdeljena, standardna Brownova gibanja pod mero $Q$. Netvegana obrestna mera je definirana kot

$$r_f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i(t).$$

Zdaj so $X_i(t)$ neodvisni, torej velja

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_f(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T \sum_{i=1}^n X_i(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T X_i(u)du}|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n A_i(T-t) - \sum_{i=1}^n B_i(T-t)X_i(t)}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

pri čemer je

$$A_i(\tau) = \tfrac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2}\ln\left(\tfrac{2\gamma_i \mathrm{e}^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right)$$
$$B_i(\tau) = \tfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i} \qquad \gamma_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 2\sigma_i^2}$$

Če za vsak $i = 1, \ldots, n$ zagotovimo, da $2\alpha_i\mu_i/\sigma_i^2 > 1$, sledi, da je verjetnost, da poljuben $X_i(t)$ doseže vrednost 0, enaka 0.

Variacijo dvofaktorskega CIR modela sta predlagala Longstaff in Schwartz (1992). Vzamemo

$$dY_i(t) \;=\; \alpha_i(t)(\mu_i - Y_i(t))dt + \sqrt{Y_i(t)}d\tilde{W}_i(t) \quad \text{za } i = 1, 2,$$

pri čemer sta $\tilde{W}_1(t)$ in $\tilde{W}_2(t)$ neodvisna. Za pozitivni konstanti $c_1$ in $c_2$ definiramo $r_f(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t)$ in drug proces $V(t) = c_1^2Y_1(t) + c_2^2Y_2(t)$. Sledi

$$\begin{aligned}
dr_f(t) &= c_1dY_1(t) + c_2dY_2(t) \\
&= \alpha_1c_1(\mu_1 - Y_1(t))dt + c_1\sqrt{Y_1(t)}d\tilde{W}_1(t) + \\
&\qquad +\alpha_2c_2(\mu_2 - Y_2(t))dt + c_2\sqrt{Y_2(t)}d\tilde{W}_2(t) \\
&= \left[\alpha_1c_1\mu_1 + \alpha_2c_2\mu_2 - \frac{(\alpha_1c_2 - \alpha_2c_1)r(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)V(t)}{c_2 - c_1}\right]dt + \\
&\qquad + \sqrt{\frac{c_1(c_2r(t) - V(t))}{c_2 - c - 1}}d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{\frac{c_2(V(t) - c_1r(t))}{c_2 - c - 1}}d\tilde{W}_2(t).
\end{aligned}$$

V bistvu je model nastavljen tako, da je $V(t)dt$ trenutna varianca od $r_f(t)$. Če je $c_1 < c_2$ velja, da je $V(t)$ omejena v vsakem času znotraj $(c_1r_f(t), c_2r_f(t))$.

V splošnem obstajajo še drugi večfaktorski modeli (konzolni modeli, večfaktorski HJM, QTSM modeli...), ki pa jih ne bomo obravnavali (glej Cairns, 2004, str. 111-118).

# 4 UPORABA MODELOV OBRESTNIH MER PRI VREDNOTENJU ŽIVLJENJSKIH ZAVAROVANJ

Pri vrednotenju zavarovalniških produktov ima pomembno vlogo obrestna mera. Z napovedovanjem obrestne mere se ukvarja kar nekaj institucij. Ena od možnosti za napovedovanje obrestne mere so stohastični modeli. V nadaljevanju si bomo ogledali vrednotenje življenjskih zavarovanj s pomočjo stohastičnih modelov (jakosti) obrestne mere. Vsekakor nas bo zanimalo dodatno tveganje, ki ga s takšnim načinom vrednotenja prevzame zavarovalnica za celotno zavarovalno obdobje. V tem kontekstu zapišimo še misli prof. Gerberja, ki jih je dodal mislim, podanih na začetku tretjega poglavja.

*V praksi je treba pri razvoju zavarovalnega kritja upoštevati različne scenarije za izbiro obrestne mere. Prav tako je možno, da se obrestna mera z leti spreminja, kar ne pripelje do matematičnih komplikacij, zaplete pa oznake, kar je tudi razlog, da ne bomo več raziskovali v tej smeri (Gerber, 1979, str. 68).* Celotni vsebini misli prof. Gerberja bomo v nadaljevanju dodali nov pogled.

## 4.1 Vasičkov model pri vrednotenju zavarovanja za doživetje

Vasičkov model bomo uporabili v naslednjih primerih:

- prvič bomo predpostavili, da je jakost obrestne mere konstantna znotraj posameznega leta,
- v drugem primeru bomo predpostavili, da obrestna mera zvezno sledi modelu

V prvem primeru predpostavka konstantne jakosti obrestne mere znotraj posameznega leta poenostavi Vasičkov model, ki tako preide v diskretno obliko

$$\delta_{k+1} - \delta_k = -\alpha(\delta_k - \delta) + \xi_k \tag{4.1}$$

pri čemer je $\alpha > 0$ in so $\xi_k$ neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametroma $\mu = 0$ in $\sigma > 0$, kjer varianca predstavlja lokalno nestanovitnost kratkoročnih obrestnih mer. Intuitivno se v Vasičkovem modelu jakost obrestne mere $\delta_k$ približuje $\delta$, vendar jo pri tem motijo slučajni odmiki. Definirajmo še $\delta_0 = 0$, kar sicer v splošnem ne drži, saj je jakost obrestne mere lahko tudi negativna (ena izmed slabosti Vasičkovega modela), vendar je model pri ustrezni izbiri parametrov vseeno uporaben. Po drugi strani je vseeno s kakšno vrednostjo $\delta_0$ začnemo, saj se le ta hitro izgubi v razvoju.

V primeru zavarovanja za doživetje v trajanju $n$ let, pri čemer je izplačilo ob doživetju enako 1, je pričakovana sedanja vrednost izplačila oziroma neto enkratna premija enaka

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = \mathrm{E}(Z),$$

pri čemer je $Z$ slučajna spremenljivka, ki je enaka sedanji vrednosti izplačila

$$Z = \begin{cases} 0, & K_x < n, \\ v_n, & K_x \geq n. \end{cases}$$

pri čemer je $v_n = \mathrm{e}^{-\int_0^n \delta_\tau d\tau}$ diskontni faktor. V našem primeru diskontni faktor zapišemo kot

$$\begin{aligned} v_n &= \mathrm{e}^{-\delta_1}\,\mathrm{e}^{-\delta_2}\ldots\mathrm{e}^{-\delta_n} \\ &= \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n \delta_i}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

pri čemer smo upoštevali začetno predpostavko o konstantnosti jakosti obrestne mere znotraj posameznega leta.

Začetne jakosti obrestne mere so enake

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_0 + \alpha(\delta - \delta_0) + \xi_0 \\ &= \alpha\delta + \xi_0, \\ \delta_2 &= \delta_1 + \alpha(\delta - \delta_1) + \xi_1 \\ &= \alpha\delta + \xi_0 + \alpha(\delta - (\alpha\delta + \xi_0)) + \xi_1 \\ &= 2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1, \\ \delta_3 &= \delta_2 + \alpha(\delta - \delta_2) + \xi_2 \\ &= 2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1 + \alpha(\delta - (2\alpha\delta - \alpha^2\delta + \xi_0 - \alpha\xi_0 + \xi_1)) + \xi_2 \\ &= 3\alpha\delta - 3\alpha^2\delta + \alpha^3\delta + \xi_0 - 2\alpha\xi_0 + \alpha^2\xi_0 + \xi_1 - \alpha\xi_1 + \xi_2 \\ &= \alpha\delta((1-\alpha)^2 + (1-\alpha) + 1) + \xi_0(1-\alpha)^2 + \xi_1(1-\alpha) + \xi_2. \end{aligned}$$

Splošni člen zapišemo kot

$$\delta_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}(1-\alpha)^{n-1-k}\;(\alpha\delta+\xi_k). \tag{4.3}$$

Tako slučajno spremenljivko $Z$ ob upoštevanju (4.3) zapišemo kot

$$Z \;=\; \begin{cases} 1\times\exp(-\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\;(\alpha\delta+\xi_k)), & K_x\geq n,\\ 0, & K_x<n \end{cases} \tag{4.4}$$

Neto enkratna premija je enaka matematičnemu upanju slučajne spremenljivke $Z$. Pri izračunu le tega bomo predpostavili neodvisnost slučajne spremenljivke cele preostale življenjske dobe in jakosti obrestne mere, ki sledi stohastičnemu modelu in je tako tudi slučajna spremenljivka.

Ker so $\xi_k$ neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, je tudi eksponent diskontnega faktorja v (4.4) normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, saj je linearna kombinacija $\xi_k$.

Sledi

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;1} \;=\; {}_np_x\times\mathrm{E}\Big(\exp(-\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\;(\alpha\delta+\xi_k))\Big) \tag{4.5}$$

Za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko $X$ s parametroma $\mu$ in $\sigma^2$ velja

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^X) \;=\; \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}. \tag{4.6}$$

Za nadaljevanje potrebujemo matematično upanje in varianco eksponenta. Upoštevamo $\mathrm{E}(\xi_k)=0$ in $\mathrm{Var}(\xi_k)=\sigma$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(-\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\;(\alpha\delta+\xi_k)\Big) &= \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\;\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\;(\alpha\delta+\mathrm{E}(\xi_k)) \\
&= -\alpha\delta\;\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k} \\
&= -\alpha\delta\;\sum_{i=1}^{n}\frac{1-(1-\alpha)^i}{\alpha} \\
&= -\delta\left(n-(1-\alpha)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big( -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta+\xi_k)\Big) &= \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{2(i-1-k)}\ \mathrm{Var}(\xi_k) \\
&= \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{1-(1-\alpha)^{2i}}{1-(1-\alpha)^2} \\
&= \frac{\sigma\Big(n-(1-\alpha)^2\frac{1-(1-\alpha)^{2n}}{1-(1-\alpha)^2}\Big)}{1-(1-\alpha)^2}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Neto enkratna premija je tako enaka

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} &= {}_np_x \times \mathrm{E}\Big(\exp(-\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1}(1-\alpha)^{i-1-k}\ (\alpha\delta+\xi_k))\Big) \\
&= {}_np_x \times \exp\Big(-\delta\Big(n-(1-\alpha)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}\Big)+ \\
&\quad +\frac{\sigma}{2(1-(1-\alpha)^2)}\Big(n-(1-\alpha)^2\frac{1-(1-\alpha)^{2n}}{1-(1-\alpha)^2}\Big)\Big)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

V drugem primeru, ko predpostavimo, da se obrestna mera spreminja zvezno v času in sledi Vasičkovemu modelu, bomo uporabili že izpeljane rezultate iz tretjega poglavja (Izrek 3.3.).

Pokazali smo, da je cena brezkuponske obveznice podana z

$$
P(t,T) = \mathrm{e}^{A(t,T)-B(t,T)r_f(t)}, \tag{4.10}
$$

pri čemer je

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \frac{\mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}, \\
A(t,T) &= (B(t,T)-(T-t))(\mu-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2})-\frac{\sigma^2}{4\alpha}B(t,T)^2.
\end{aligned}
$$

Enkratna neto premija zavarovanja za doživetje za obdobje $n$ let je ob predpostavki neodvisnosti obrestne mere in pričakovane življenjske dobe, enaka produktu verjetnosti preživetja $x$ let stare osebe za obdobje $n$ let in ceni brezkuponske obveznice v času 0 in z zapadlostjo po $n$ letih, torej

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} &= {}_np_x \times P(0,n) \\
&= {}_np_x \times \exp\big(A(0,n) - B(0,n)r(0)\big) \\
&= {}_np_x \times \exp\Big(\big(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha} - n\big)\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\big) - \frac{\sigma^2 \mathrm{e}^{-2\alpha n}}{4\alpha^3} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha} r_f(0)\Big) \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

## 4.2 Markovski modeli pri vrednotenju mešanega zavarovanja

Mešano zavarovanje za obdobje $n$ let je vsota zavarovanja za primer doživetja v trajanju $n$ let in začasnega zavarovanja za primer smrti v trajanju $n$ let. Tako pride do izplačila v primeru smrti (ob koncu leta, v katerem je zavarovanec umrl) ali v primeru doživetja (torej po $n$ letih). Sedanja vrednost izplačila je enaka

$$
Z = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x < n, \\ v^n, & K_x \geq n. \end{cases}
$$

Enkratno neto premijo izračunamo s pomočjo matematičnega upanja slučajne spremenljivke $Z$. Seveda moramo upoštevati, da obrestna mera, ki stoji v ozadju diskontnega faktorja $v$, sledi enemu od markovskih modelov, npr. Ho in Lee-jevem. Pri markovskih modelih obrestnih mer smo predpostavili, da so cene brezkuponskih obveznic vhodni podatek modela in da je pogojna porazdelitev $P(s,T)|\mathcal{F}_t$, $t < s < T$, enaka $P(s,T)|X(t)$, pri čemer je $X(t)$ končno dimenzionalen Itôv proces, oziroma, za naš primer $X(t) = r_f(t)$.

V prejšnjem razdelku smo pri vrednotenju uporabili cene brezkuponskih obveznic. Podobno bomo postopali tudi v tem primeru, vendar ne bomo uporabili cen v času 0, temveč v času $t$. Razlog za takšen pristop je v tem, ker smo predpostavili, da so cene $P(0,T)$ znane in so tako po eni strani vhodni podatek za markovski model, po drugi strani pa bi lahko s pomočjo teh cen že določili enkratno neto premijo. Tako bomo definirali ceno zavarovanja v času $t$ za $x+t$ let staro osebo. S tem bomo določili ceno zavarovanja, ki bi bila aktualna recimo ob prenosu portfelja zavarovalnice v portfelj druge zavarovalnice, saj bi morali oceniti vrednost obstoječega portfelja zavarovanj (bolj radikalna ideja, bi bila določitev cene zavarovanja z namenom trgovanja na borzi).

S pomočjo (3.12) in (3.13) zapišemo ceno brezkuponske obveznice v času $t$

$$
\begin{aligned}
P(t,T) &= \mathrm{e}^{A(t,T)-(T-t)r_f(t)} \\
&= \mathrm{e}^{\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-\frac{1}{2}\sigma^2 tT(T-t)-(T-t)\sigma\tilde{W}(t)}
\end{aligned}
$$

Neto enkratno premijo za mešano zavarovanje, ki pa je v veljavi že $t$ let, zapišemo kot

$$
\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|}(t) &= v^{n-t}\ {}_{n-t}p_{x+t} + \sum_{k=0}^{n-t-1} v^{k+1}\ {}_{k}p_{x+t}\ q_{x+t+k} \\
&= P(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t} + \sum_{k=0}^{n-t-1} P(t,t+k+1)\ {}_{k}p_{x+t}\ q_{x+t+k}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Zgornji izraz definira ceno mešanega zavarovanja v času $t$. Zaključimo z mislijo, da so markovski modeli uporabni pri vrednotenju zavarovanj z omejitvijo, ker po definiciji modelov nastopajo cene brezkuponskih obveznic kot vhodni parameter in posledično ni smiselno ugotavljati vrednosti zavarovanj v začetni točki.

## 4.3 Večfaktorski modeli

Večfaktorski modeli so danes zelo popularno orodje za modeliranje bolj kompleksnih izvedenih finančnih instrumentov. Po definiciji jih uporabljamo, če imamo več kot en vir slučajnosti in tako vsak vir modeliramo ločeno.

V množico večfaktorskih modelov sodijo tudi posplošeni CIR modeli, ki so del množice afinih modelov. S posplošenimi CIR modeli bomo v nadaljevanju zapisali neto enkratno premijo zavarovanja za doživetje v trajanju $n$ let in neto enkratno premijo mešanega zavarovanja v trajanju $n$ let.

Po izreku 3.6 je cena brezkuponske obveznice $P(t,T)$ v primeru posplošenih CIR modelov enaka

$$
P(t,T) = \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} A_i(T-t)-\sum_{i=1}^{n} B_i(T-t)X_i(t)},
$$

pri čemer je

$$
A_i(\tau) = \frac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2}\ln\left(\frac{2\gamma_i \mathrm{e}^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right)
$$

$$
B_i(\tau) = \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i} \qquad \gamma_i = \sqrt{\alpha_i^2+2\sigma_i^2}
$$

Netvegana obrestna mera je v tem primeru definirana kot

$$r_f(t) \;=\; \sum_{i=1}^{m} X_i(t),$$

pri čemer so $X_i(t)$ neodvisni, enofaktorski CIR procesi. V primeru zavarovanja za doživetje v trajanju $n$ let je neto enkratna premija enaka

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} &= {}_np_x \times P(0,n) \\ &= {}_np_x \times \exp\bigl(\sum_{i=1}^{m} A_i(n) - \sum_{i=1}^{m} B_i(n)X_i(0)\bigr). \end{aligned} \tag{4.13}$$

V primeru mešanega zavarovanja v trajanju $n$ pa je neto enkratna premija enaka

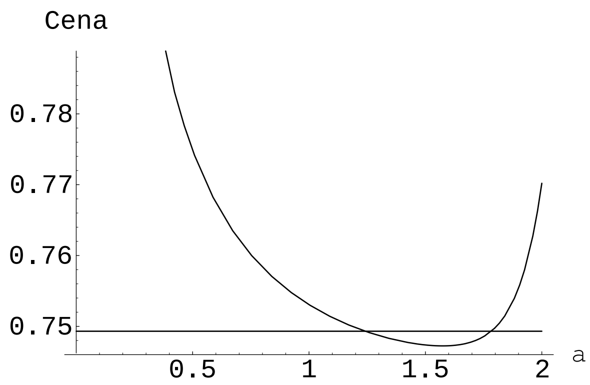
$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}} &= v^n\ {}_np_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \\ &= P(0,n)\ {}_np_x + \sum_{k=0}^{n-1} P(0,k+1)\ {}_kp_x\ q_{x+k} \\ &= {}_np_x \times \exp\bigl(\sum_{i=1}^{m} A_i(n) - \sum_{i=1}^{m} B_i(n)X_i(0)\bigr) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \exp\bigl(\sum_{i=1}^{m} A_i(k+1) - \sum_{i=1}^{m} B_i(k+1)X_i(0)\bigr)\ {}_kp_x\ q_{x+k}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

## 4.4 Rezultati simulacij

V tem razdelku bomo podali ugotovitve uporabnosti izpeljanih formul iz razdelkov 4.1 in 4.3. Tako bomo za izbrane podatke izračunali neto enkratne premije za določena življenjska zavarovanja.

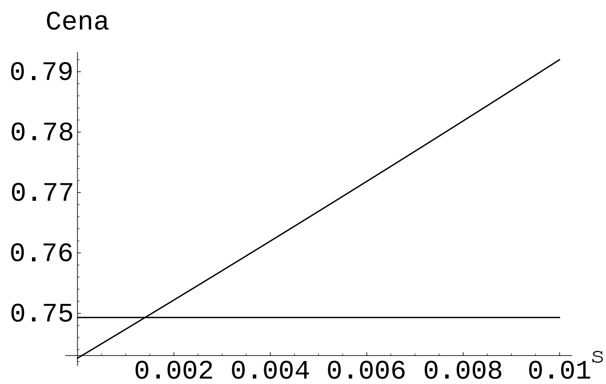
Iz (4.9) sledi, da je neto enkratna premija za zavarovanje za doživetje odvisna od verjetnosti preživetja, ciljne jakosti obrestne mere, zavarovalne dobe, $\alpha$ ter variance $\sigma$. Odvisnost od zadnjih dveh parametrov je direktna posledica uporabe Vasičkovega modela za jakost obrestne mere. Privzeli smo, da je $\alpha > 0$, vendar iz (4.9) sledi, da je smiselni interval opazovanja za $\alpha$ med 0 in 2, pri čemer v $\alpha = 1$ in $\sigma = 0$ dobimo neto enkratno premijo, ki ustreza konstantni jakosti obrestne mere skozi celotno zavarovalno obdobje. Odvisnost cene zavarovanja od parametra

**Slika 1: Cena zavarovanja v odvisnosti od $\alpha$ in pri konstantni jakosti obrestne mere** - Vasičkov model




*Vir: Lastni izračun*

**Slika 2: Cena zavarovanja v odvisnosti od $\sigma$ in pri konstantni jakosti obrestne mere** - Vasičkov model

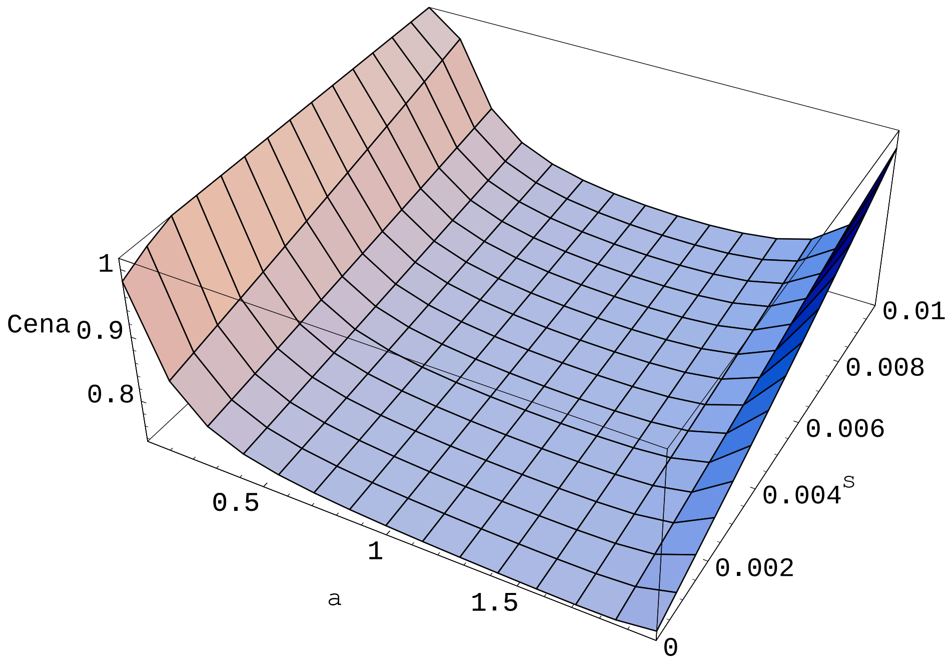



*Vir: Lastni izračun*

$\alpha$ je prikazana na sliki 1, pri čemer smo za ostale parametre privzeli naslednje vrednosti: verjetnost preživetja za trideset let starega moškega za obdobje desetih let po slovenskih tablicah umrljivosti 2000-02 (${}_{10}p_{30} = 0,982834$), zavarovalno dobo deset let ($n = 10$), jakost obrestne mere, izračunano iz obrestne mere enake $2,75\%$ ($\delta = 0,027129$) in nestanovitnost jakosti obrestnih mer $\sigma = 0,001$. Za primerjavo je poleg prikazana še cena zavarovanja pri konstantni jakosti obrestne mere ($\delta = 0,027129$). Vidimo, da je na določenem intervalu cena zavarovanja manjša kot pri klasičnem načinu vrednotenja.

Slika 2 prikazuje odvisnost cene zavarovanja od nestanovitnosti jakosti kratkoročnih obrestnih mer, pri čemer smo za ostale parametre privzeli zgoraj podane vrednosti, le za $\alpha$ smo vzeli 1,5, torej vrednost, kjer je cena zavarovanja pri majh-

**Slika 3: Cena zavarovanja v odvisnosti od $\alpha$ in $\sigma$** - Vasičkov model



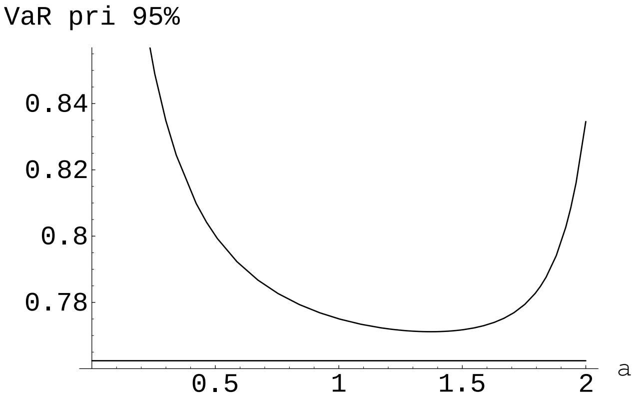

*Vir: Lastni izračun*

nih vrednostih $\sigma$ manjša kot pri klasičnem vrednotenju. Dodatna slučajna komponenta v ceni zavarovanja (v našem primeru stohastična jakost obrestne mere) se seveda odrazi kot dodaten odmik - ali je to pozitiven ali negativen, pa je odvisno od izbire vrednosti parametrov modela. Pri Vasičkovemu modelu obrestna mera lahko zavzame negativne vrednosti, kar doda novo dimenzijo pri vrednotenju. V praksi seveda takšnih situacij ne želimo, zatorej to možnost odpravimo z izbiro drugega modela za jakost obrestne mere. Oba zgoraj obravnavana učinka sta predstavljena v treh dimenzijah na sliki 3.

Slika 4 prikazuje izračun VaR pri 95slučajna spremenljivka, torej je diskontni faktor log-normalno porazdeljna slučajna spremenljivka. Iz slike se vidi odvisnost VaR od parametra $\alpha$, pri čemer smo za ostale parametre privzeli zgoraj omenjene vrednosti. Za primerjavo je prikazan tudi diskontni faktor, ki se uporablja pri klasičnem načinu vrednotenja.

V drugem delu razdelka 4.1 smo izpeljali formulo za neto enkratno premijo za zavarovanje za doživetje, pri čemer smo predpostavljali zvezno spreminjanje obre-

**Slika 4: VaR diskontnega faktorja v odvisnosti od $\alpha$ in konstanten diskontni faktor** - Vasičkov model




*Vir: Lastni izračun*

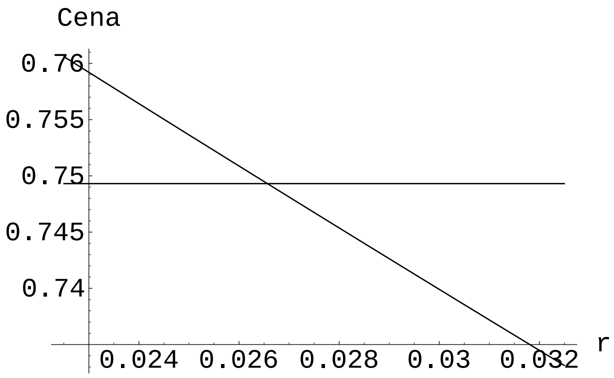
stne mere po Vasičkovemu modelu. V tem primeru po (4.11) sledi, da je cena zavarovanja odvisna, poleg zgoraj naštetih parametrov, še od začetne obrestne mere (obrestne mere v točki 0 oziroma v času, ko določamo ceno zavarovanju).

Na sliki 5 je predstavljena cena zavarovanja v odvisnosti od začetne obrestne mere, kjer je poleg podana cena zavarovanja, ki jo dobimo pri klasičnem načinu vrednotenja. Vrednosti parametrov so naslednje: verjetnost preživetja za trideset let starega moškega za obdobje desetih let po slovenskih tablicah umrljivosti 2000-02 (${}_{10}p_{30} = 0,982834$), zavarovalna doba deset let ($n = 10$), ciljna obrestna mera $\mu = 2,75\%$, nestanovitnost obrestne mere $\sigma = 0,001$ ter $\alpha = 0,1$.

Iz slike 5 izhaja, da cena zavarovanja pada z naraščanjem začetne obrestne mere (pri zgoraj danih vrednostih parametrov). To pojasnimo z dejstvom, da pri višjih obrestnih merah, dobimo manjšo sedanjo vrednost. Torej, če za začetno obrestno mero v Vasičkov model vstavimo dokaj visoko vrednost, potem diskontiramo vrednost zavarovanja z obrestnimi merami med začetno in ciljno obrestno mero in kot posledico dobimo manjšo vrednost zavarovanja kot pa pri klasičnem načinu vrednotenja, kjer predpostavljamo fiksno obrestno mero znotraj celotnega obdobja vrednotenja.

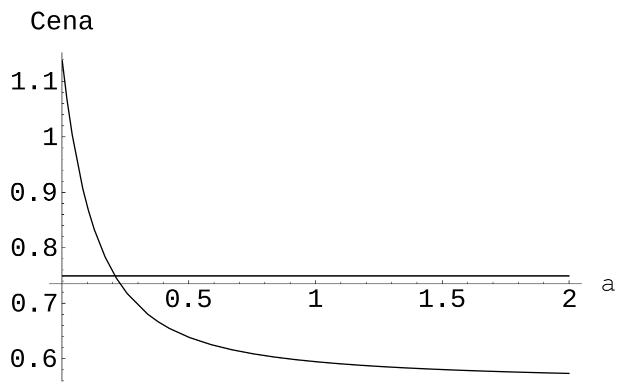
Za zadnjo simulacijo bomo uporabili večfaktorski model iz razdelka 4.3, pri čemer se bomo omejili na dve dimenziji in zavarovanje za primer doživetja. Uporabili bomo naslednje vrednosti parametrov: verjetnost preživetja za trideset let starega moškega za obdobje desetih let po slovenskih tablicah umrljivosti 2000-02 (${}_{10}p_{30} = 0,982834$), zavarovalna doba deset let ($n = 10$), ciljni obrestni meri $\mu_1 = 3,00\%$ in $\mu_2 = 2,75\%$, nestanovitnosti obrestnih mer $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,001$ ter $\alpha_1 = \alpha_2 \in (0,2]$.

**Slika 5: Cena zavarovanja v odvisnosti od začetne obrestne mere in pri konstantni obrestni meri** - Vasičkov model



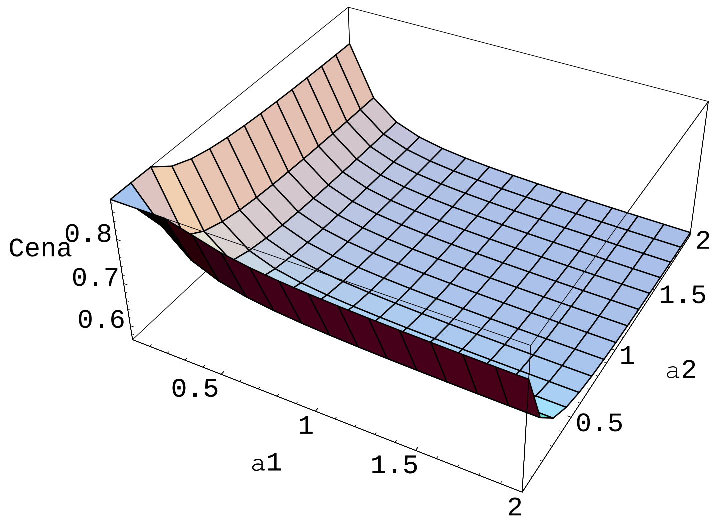

*Vir: Lastni izračun*

**Slika 6: Cena zavarovanja v odvisnosti od $\alpha$ in pri konstantni obrestni meri** - Večfaktorski CIR model




*Vir: Lastni izračun*

**Slika 7: Cena zavarovanja v odvisnosti od $\alpha_1$ in $\alpha_2$** - Večfaktorski CIR model




*Vir: Lastni izračun*

Rezultat je prikazan na sliki 6 in sliki 7, ki prikazuje dvodimenzionalno odvisnost cene zavarovanja od izbranih vrednosti parametrov $\alpha_1$ in $\alpha_2$. Pri obeh slikah je opaziti gibanje cene zavarovanja nad in pod ceno, ki jo dobimo pri klasičnem načinu vrednotenja, kar je posledica izbire konkretnih vrednosti parametrov.

# 5 ZAKLJUČEK

Pokojninska in življenjska zavarovanja so glavni generator akumulacije kapitala - kar dve tretjini finančnega napajanja kapitalskih trgov v razvitem svetu prihaja iz omenjenih zavarovanj. Slovenija tako v razvoju zavarovalništva dohiteva razvite evropske države, kar statistično pomeni povečevanje deleža obračunane premije glede na BDP. Iz omenjenega sledi, da so zavarovalnice pomemben institucionalen igralec na kapitalskem trgu, hkrati pa morajo zagotavljati plačilno sposobnost na dolgi rok ter trenutno likvidnost. Oba pola tako predstavljata osnovno obliko zavarovanj, ki so generator prihodkov (ne edini), hkrati pa delujejo v smeri odprave posledic škode prizadetemu.

Aktuar - oseba, ki rešuje in svetuje pri finančnih problemih - deluje znotraj omenjenega koncepta. Beseda aktuar izvira iz latinske besede *actuarius*, ki pomeni pisar v času, ko pisalnih strojev in računalnikov še ni bilo. Pri svojem delu uporablja raznovrstne modele skozi katere skuša čim bolj realno oceniti slučajni tok prihodnjih dogodkov. Seveda je pristop večplasten, saj je nujno poznavanje področij matematike, statistike, ekonomije, financ, prava in vodenja. Danes aktuarji delajo v zavarovalnicah, svetovalnih podjetjih, državnih službah, finančnih institucijah in drugih specializiranih podjetjih. Aktuar je tudi strokovnjak za merjenje in upravljanje tveganja oziroma za ocenjevanje verjetnosti, da bo v prihodnosti prišlo do nepričakovanega razvoja dogodkov. Zgodovinsko so bila tveganja povezana z upravljanjem zavarovalnega portfelja, danes so aktuarji vključeni tudi v upravljanje ostalih tveganj (poslovna, čista tveganja).

Ena izmed bistvenih nalog aktuarja je določanje cene zavarovalnim produktom. Tako se ocenjuje dobičkonosnost posameznega zavarovalnega produkta (pri tem mislimo na klasična življenjska zavarovanja, rentna zavarovanja ali pa določene oblike zdravstvenih zavarovanj). Pri vrednotenju se načeloma uporabljajo enake predpostavke kot jih uporabljajo pri ocenjevanju obveznosti, da bi s tem zagotovili konsistentnost.

Model preživetja je osnovna točka modeliranja v aktuarstvu. Model temelji na dejstvu, da nam pričakovana življenjska doba opazovane osebe ni znana. Z uporabo modela preživetja lahko določimo vrednost klasičnih (življenjskih) zavarovanj. Pri tem se uporablja predpostavka o neodvisnosti obrestne mere in prihodnje življenjske dobe opazovane osebe. Vendar je razvoj finančne matematike postregel s kopico modelov, ki se lahko uporabijo kot alternativa klasičnemu načinu vrednotenja. Pri določenih modelih se za obrestne mere in posledično diskontne faktorje uporablja stohastične modele za obrestne mere (jakosti obrestnih mer). V magistrskem delu smo teoretično predstavili enofaktorske, večfaktorske modele ter modele brez arbitraže. Za določene oblike klasičnih življenjskih zavarovanj in določene oblike stohastičnih modelov smo tudi izračunali konkretne cene (neto enkratne premije) zavarovanj. Cene smo izračunali pri določenih vrednostih parametrov, primerjali pa smo jih s cenami, ki bi jih dobili pri klasičnem načinu vrednotenja. Dobljeni rezultati so pokazali tako pozitiven kot negativen odklon od običajne cene, kar interpretiramo, da slučajnost obrestne mere nekaj stane (v enem primeru se to nanaša na zavarovanca, v drugem na zavarovalnico). Ceno tega tveganja pa določajo konkretne vrednosti parametrov posameznega modela, s katerimi določimo gibanje obrestne mere v prihodnosti. Posledično to gibanje določa tudi vrednosti diskontnih faktorjev in s tem pričakovano neto sedanjo vrednost denarnega toka oziroma ceno zavarovanja.

Pokazali smo, da je razvoj finančne matematike omogočil vrednotenje zavarovanj, ki so sicer dolgoročni denarni tokovi, z uporabo stohastičnih modelov. Tako smo nakazali smer prihodnjega razvoja vrednotenja zavarovalnih produktov, ki bo usmerjen tržno in bo preko stohastičnih modelov skušal čimbolj približati stanje oziroma gibanje kapitalskih trgov v ceno posameznega zavarovanja.

Izbiro načina vrednotenja in posledično izbiro konkretnih modelov za vrednotenje zavarovalnih produktov bodo v prihodnosti določali lastniki zavarovalnice s svojo naklonjenostjo tveganju, ki bo poleg gibanja kapitalskega trga, zajeta v modelih za vrednotenje. Uprave zavarovalnic bodo še naprej soočene s težko nalogo - kako ohraniti ravnovesje med interesi delničarjev (donos na vloženi kapital) in interesi zavarovancev (varnost, stabilnost zavarovalnice). Racionalen potrošnik pa bo kljub vsemu določil pravo smer gibanja trga in s tem tudi cen zavarovanj.

# Literatura


[1] Atkinson M. E., Dickson D. C. E.: *An Introduction to Actuarial Studies.* Edward Elgar Publishing, 2000, 172 str.

[2] Baxter Martin, Rennie Andrew: *Financial Calculus An introduction to derivative pricing.* Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 233 str.

[3] Bernstein Peter L.: *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk.* Wiley, 1998. 400 str.

[4] Booth Philip et al.: *Modern Actuarial Theory and Practice.* Chapman&Hall, 1999. 736 str.

[5] Bowers N.L.: *Actuarial Mathematics.* Itasca : The Society of Actuaries, 1986. 316 str.

[6] Brigo Damiano, Mercurio Fabio: *Interest Rate Models Theory and Practice.* Berlin : Springer-Verlag, 2001. 518 str.

[7] Briys Eric: *Insurance: From Underwriting to Derivatives: Asset Liability Management in Insurance companies.* John Wiley & Sons, 2001. 176 str.

[8] Bühlmann Hans: *Mathematical Methods in Risk Theory.* Berlin : Springer-Verlag, 1970. 210 str.

[9] Cairns Andrew J.G.: *Interest Rate Models - An Introduction.* Princeton : Princeton University Press, 2004. 274 str.

[10] Daykin C.D., Pentikäinen T., Pesonen M.: *Practical Risk Theory for Actuaries.* London : Chapman and Hall, 1994. 543 str.

[11] Denuit M. et al.: *Actuarial Theory for Dependent Risks.* Wiley, 2005. 440 str.

[12] De Vylder Etienne F.: *Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives.* Kluwer Academic Publishers, 1997. 184 str.

[13] Duffie D., Kan R.: *A Yield-Factor Model of Interest Rates.* Mathematical Finance **6**, 2006, 379-406.

[14] Fisher H. F.: *Actuarial Practice of Life Assurance.* Cambridge : Cambridege University Press, 1965.

[15] Gerber Hans U.: *Life Insurance Mathematics.* Springer Verlag, 1997. 217 str.

[16] Gerber Hans U.: *Matematika življenjskih zavarovanj.* Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavarovalnica triglav d.d, 1979.

[17] Grandell Jan: *Mixed Poisson Processes.* London : Chapman & Hall, 1997. 268 str.

[18] Gubta A.K.: *An Introduction to Actuarial Mathematics (Mathematical Modelling).* Kluwer Academic Publishers, 2002. 350 str.

[19] Gujarati Damodar N.: *Basic Econometrics.* New York : McGraw-Hill, 1995. 838 str.

[20] Homer Sidney: *History of Interest Rates.* Wiley, 2005. 710 str.

[21] Hoowaarts Günter: *Technik der Lebensversicherung.* Munich : Munich Re, 153 str.

[22] Jacod Jean, Protter Philip: *Probability Essentials.* Berlin : Springer-Verlag, 2000. 250 str.

[23] James Jessica, Webber Nick: *Interest Rate Modelling.* Wiley, 1999. 672 str.

[24] Jamnik Rajko: *Matematična statistika.* Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1979.

[25] Karatzas Ioannis, Shreve Steven E.: *Methods of Mathematical Finance.* New York : Springer-Verlag, 1998. 415 str.

[26] Košmelj Blaženka, Rovan Jože: *Statistično sklepanje.* Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 1997.

[27] Lajos Takács: *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes.* New York : Wiley, 1967. 262 str.

[28] Laster David: *Asset liability management for insurers.* Zurich : Swiss Reinsurance Company, 2000. 36 str.

[29] Malačič Janez: *Demografija: teorija, analiza, metode in modeli.* Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 2000. 378 str.

[30] Meerschaert Mark M.: *Mathematical Modeling.* Academic Press, 1999. 351 str.

[31] Musiela Marek et al.: *Martingale Methods in Financial Modelling (Stochastic Modeling and Applied Probability S.).* Berlin : Springer-Verlag, 2004. 652 str.

[32] Nieder Dirk, Pasdika Ulrich: *The need for private long-term care protection supplementing state provision.* Cologne : GenRe, 2003. 15 str.

[33] Norberg Ragnar: *Financial Mathematics in Life and Pension Insurance.* Summer School in Mathematical Finance, Dubrovnik, 16.-22. September 2001. 106 str.

[34] Øksendal B.: *Stochastic Differential Equations.* Berlin : Springer, 2003. 397 str.

[35] Partnoy Frank: *F.I.A.S.C.O.: The Inside Story of a Wall Street Trader.* Penguin Books, 1999. 256 str.

[36] Povh Janez: *Teorija zavarovalniških procesov.* Diplomsko delo. Ljubljana : Fakulteta za matematiko in fiziko, 1998. 71 str.

[37] Riley Kevin: *Looking Beyond the Calculations for Better Disability Risk Selection.* Cologne : GenRe Risk Insights, Vol. 5, No. 2, 2001. str. 12-14

[38] Sandmann Klaus et al.: *Advances in Finance and Stochastics.* Berlin : Spriger, 2000. 312 str.

[39] Stanovnik Tine: *Javne finance.* Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 2002. 237 str.

[40] Tajnikar Maks: *Mikroekonomija s poglavji iz teorije cen.* Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 1996. 461 str.

[41] Tomažin Aleš: *Raziskovalni projekt Teorija rizika in iger pri modelih upravljanja zalog premoženja.* Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 2000. 21 str.

[42] Tomažin Aleš: *Garantirane obrestne mere.* Zbornik prispevkov 11. dnevov slovenskega zavarovalništva, 2004, str. 269-278

[43] Tomažin Aleš: *Analiza uporabnosti odsekoma zveznega markovskega procesa s tremi stanji v prostoru in času pri vrednotenju zavarovalniških produktov.* Magistrsko delo. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 2005. 81 str.

[44] Trieschmann Jame S. et al: *Risk Management And Insurance.* USA : South-Western College Publishing, 2001, 516 str.

[45] Trunk Susanne: *Dread Disease Internationale Produktgestaltung und Erfahrung.* Cologne : GenRe, 1994. 105 str.

[46] Wolter Kirk M.: *Introduction to Variance Estimation.* New York : Springer-Verlag, 2003, 427 str.

## Viri

[1] Core Reading 103 Stohastic Modelling. London : Faculty of Actuaries, Institute of Actuaries, 2000

[2] CEA Annual report 2004-2005. [URL: http://www.cea.assur.org ].

[3] Sklep o podrobnejši vsebini poročila pooblaščenega aktuarja (Uradni list RS, št. 3/01)

[4] Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno tehničnih rezervacij (Uradni list RS, št. 3/01 in 69/01)

[5] Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnice (Uradni list RS, št. 3/01, 68/01 in 69/02)

[6] Statistični zavarovalniški bilten 2004. Ljubljana : Slovensko zavarovalno združenje, 2004. 71 str.

[7] Statistični zavarovalniški bilten 2005. Ljubljana : Slovensko zavarovalno združenje, 2005. 72 str.

[8] Zakon o zavarovalništvu (Uradni list RS, št. 102/04)

## Slovarček slovenskih prevodov tujih izrazov

Annuity contract - rentno zavarovanje
Arbitrage-free pricing theory - teorija o brez-arbitražnem določanju cen
Binomial models - binomski modeli
Comonotonicity - komonotonost

Continuous-time interest rate models - modeli obrestnih mer v zveznem času
Deterministic model - deterministični model
Discount factor - diskontni faktor
Endowment assurance contract - mešano življenjsko zavarovanje
Equilibrium and short-rate models - ravnotežni in kratkoročni modeli
Expectations theory - teorija pričakovanj
Force of interest rate - jakost obrestne mere
Force of mortality - jakost umrljivosti
Forward rate - terminska obrestna mera
Forward-rate curve - krivulja terminskih obrestnih mer
Interest rate - obrestna mera
Life insurance contract - življenjsko zavarovanje
Life table - tablice umrljivosti
Liquidity preference theory - teorija likvidnih preferenc
Market segmentation theory - teorija segmentacije trga
Multifactor models - večfaktorski modeli
No-arbitrage models - modeli brez arbitraže
Pure endowment assurance contract - življenjsko zavarovanje za primer doživetja
Risk measure - mera tveganja
Risk-free rate of interest - netvegana obrestna mera
Short rate - kratkoročna obrestna mera
Spot rate - trenutna obrestna mera
Stochastic model - stohastični model
Survival function - funkcija preživetja
Term assurance contract - življenjsko zavarovanje za primer smrti
Zero-coupon bond - brezkuponska obveznica