UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

ANALIZA UPORABNOSTI ODSEKOMA ZVEZNEGA MARKOVSKEGA PROCESA S TREMI STANJI V PROSTORU IN ČASU PRI VREDNOTENJU ZAVAROVALNIŠKIH PRODUKTOV

Ljubljana, junij 2005

Aleš Tomažin

IZJAVA

Študent Aleš Tomažin izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom prof. ddr. Ludvika Bogataja in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 13.6.2005 Podpis:

K A Z A L O

1. UVOD

Veda operacijske raziskave se ukvarja z raziskovanjem, analiziranjem ter reševanjem vprašanj upravljanja, koordinacije in optimizacije procesov v okviru določenega podjetja oziroma proizvodne strukture. Pri tem uporablja znanstvene metode analize in modeliranja, saj za konkretne proizvodne ali storitvene procese išče teoretične modele, ki bi te procese čim bolj povzeli oziroma optimirali. Največkrat se v modelih uporabljajo matematične ali statistične metode. Med njimi so: linearno programiranje, teorija iger, teorija odločitev, markovski procesi…

1.1 Opredelitev problema in cilj

Zavarovalniški posel predstavljajo finančne obveznosti, ki so pod vplivom slučajnih dogodkov ter plačevanje storitev v naprej. To pripomore k temu, da je zavarovalništvo kot panoga med prvimi po akumuliranju kapitala, predvsem, če izpostavimo življenjska ter pokojninska zavarovanja. V Sloveniji je v letu 2003 obračunana premija predstavljala 5,3% BDP za leto 2003 (Statistični zavarovalniški bilten 2004, str. 6).

Iz omenjenih karakteristik zavarovalniškega posla izhajajo tudi tveganja. Govorimo o finančnem tveganju, ki je posledica upravljanja portfelja naložb ter tveganju, ki je posledica upravljanja portfelja zavarovancev. Zadnje tveganje predstavljajo slučajni odmiki od pričakovanih dogodkov in ga lahko zmanjšamo z ustrezno velikim portfeljem zavarovancev - to nam teoretično potrdi tudi zakon velikih števil. Po drugi strani finančno tveganje pogojuje izpolnjevanje obveznosti iz zavarovalnih pogodb in je pod vplivom ekonomije, kjer zavarovalnica posluje, ter, če poenostavimo, valute obveznosti (Daykin, 1994, str. 226).

Včasih so se aktuarji ukvarjali zgolj z upravljanjem in kontrolo tveganja upravljanja portfelja zavarovancev. Zavarovalništvo, kot panoga, je bilo v strogih institucionalnih okvirjih (nadzor...). V premiji je bila vključena tudi verjetnost obrata ekonomije (inflacija, nizke obrestne mere...), dobički, ki so izhajali iz takšnega načina poslovanja so se delili delničarjem v obliki bonusov ter dividend in kot panoga je bilo zavarovalništvo zaščiteno pred konkurenco ter ločeno od ostalih panog. V omenjenih okoliščinah je jasno, da se aktuarji niso ukvarjali z upravljanjem finančnega tveganja, hkrati pa je bila teorija za omenjeno področje slabo razvita (Norberg, 2001, str. 74).

Danes je slika povsem drugačna. Banke in zavarovalnice se združujejo, novi zavarovalniški produkti se razvijajo dnevno, ostale finančne institucije ponujajo zavarovalne produkte, konkurenca je močnejša, kar neposredno vpliva na višino premije. Večina novejših zavarovalnih/finančnih produktov je vezanih na moderno finančno matematiko - katastrofične obveznice, zavarovalne police z naložbenim tveganjem, hibridi... Ti faktorji so pripomogli k temu, da smo aktuarji začeli z upravljanjem ter kontrolo finančnega tveganja in razvili modele na osnovi katerih se napoveduje prihodnji denarni tok zavarovalnice.

Aktuarsko modeliranje je temelj tako zavarovalništva kot bančništva. Matematični modeli, ki jih aktuarji uporabljamo pri svojem delu, predstavljajo ključno orodje za ocenjevanje sedanje vrednosti prihodnjih slučajnih dogodkov (plačilo premije, izplačilo obveznosti zavarovancem…).

V strokovni literaturi se pri operacijskih raziskovanjih velikokrat pojavlja metoda markovskih procesov. Kadar nas zanima, kako se slučajne spremenljivke spreminjajo skozi čas, je ena od možnih metod analize uporaba markovskih procesov. V svoji diskretni varianti je uporaben pri reševanju konkretnih problemov na različnih področjih: trženju, financah, računovodstvu, šolstvu ter zdravstvu.

Namen magistrskega dela je, da s pomočjo odsekoma zveznih markovskih procesov v prvi fazi dokažemo ekvivalentni zapis osnovnega modela, ki se uporablja pri vrednotenju klasičnih življenjskih zavarovanj – model preživetja. V drugem koraku prostor stanj razširimo in z analizo odsekoma zveznega markovskega procesa s tremi stanji opišemo model, kjer je opazovana oseba lahko zdrava, bolna ali mrtva. Rešitve takšnega modela – lahko jih podamo kot verjetnost, da bo določena oseba v starosti x let v določenem stanju ali pa jih izrazimo z jakostmi prehodov iz enega stanja v drugo, dobimo s pomočjo numeričnih metod. Namen dela je torej utrditi splošni trend, da se pričakovana življenjska doba prebivalstva povečuje in dobiti vpogled kako so jakosti prehodov iz enega stanja v drugo odvisna od geografskega izvora opazovanih subjektov.

Cilj magistrskega dela je definirati ustrezen odsekoma zvezen markovski proces, ki bo enakovreden modelom, ki se uporabljajo za vrednotenje zavarovalniških produktov, kjer je lahko zavarovana oseba v treh stanjih (zdrava, bolna, mrtva).

Proces bo teoretično izhodišče, s pomočjo katerega bo opravljena analiza. Lahko se ga integrira v informacijske rešitve posamezne zavarovalnice in s tem ponudi slovenskemu zavarovalnemu trgu, kar doda tržno vrednost magistrskemu delu.

1.2 Struktura dela

Magistrsko delo bomo razdelili na pet poglavij. V prvem delu bomo predstavili temelje aktuarskega modeliranja ter osnovne stohastične procese, ki se uporabljajo za definicijo bolj kompleksnih sistemov.

Sledi predstavitev aktuarskih simbolov in notacije na primeru modela preživetja, ki je osnova aktuarskega modeliranja in vrednotenja klasičnih življenjskih zavarovalnih produktov v zavarovalnici.

V osrednjem delu bomo analizirali različne analitične modele v povezavi z modelom preživetja. Dokazali bomo ekvivalenco zapisa modela preživetja z odsekoma zveznimi markovskimi procesi. Model preživetja bomo razširili za eno stanje in na odsekoma zveznih markovskih procesih s tremi stanji bomo izvedli analizo vpliva vhodnih podatkov na rešitev teh procesov. Analizirali bomo vpliva časovne ter geografske komponente.

V zaključnem delu bomo predstavili rezultate in sklepne misli magistrskega dela.

V magistrskem delu bomo uporabili izrazoslovje, ki je značilno za aktuarsko ter matematično stroko in zavarovalništvo.

2. AKTUARSKO MODELIRANJE IN OSNOVNI STOHASTIČNI PROCESI

Kot smo povzeli uvodoma je aktuarsko modeliranje temelj tako zavarovalništva kot bančništva. Matematični modeli, ki jih uporabljamo aktuarji pri svojem delu, predstavljajo ključno orodje za ocenjevanje sedanje vrednosti prihodnjih slučajnih dogodkov (plačilo premije, izplačilo obveznosti zavarovancem…).

2.1 Modeliranje

Model je v splošnem imitacija oz. posnetek nekega realnega sistema ali procesa. Modeliramo lahko različne stvari kot so dobičkonosnost zavarovalnega produkta, ki ga mislimo začeti prodajati ali prihodnji denarni tok zavarovalnice ali verjetnost propada zavarovalnice. Seveda lahko modeliramo tudi procese, ki niso v direktni povezavi z zavarovalništvom npr. ekonomijo države, delovanje človeškega srca…

Recimo, da bi želeli oceniti vpliv spremembe vrednosti nekega parametra na enega izmed zgornjih modelov v realnem svetu. Večinoma bi bilo to preveč tvegano ali predrago ali prepočasno. Vsekakor bi morali imeti v mislih posledice spremembe, če bi le to izvedli brez predhodne analize rezultatov. Črni scenariji bi bili naslednji:

- namesto obljubljenega dobička, bi nam nov produkt prinesel izgubo, s čimer lastniki zavarovalnice ne bi bili zadovoljni,
- manjši dobički oz. izguba, kar posledično lahko pripelje do nesolventnosti oz. ne-likvidnosti, lahko zavarovalnico stanejo dovoljenja za opravljanje zavarovalnih poslov,
- večje število ter znesek zahtevkov oz. odškodnin ob konstantni jakosti premije pomeni slabšanje zavarovalno-tehničnih kazalnikov,
- država bi zašla v recesijo, kar bi vlado stalo določenega števila glasov na prihodnjih volitvah,
- pacient lahko umre, če bi uporabili model, ki napačno simulira utrip srca…

Tako modeli in analiza njihovih rezultatov omogočata, da se spremembe vrednosti določenih parametrov prouči, še preden jih v realnosti implementiramo.

Model je odvisen od množice matematičnih ter logičnih predpostavk oz. parametrov (Booth, 1999, str. 593). Kompleksnost modela je določena s kompleksnostjo povezav med parametri. Pri modeliranju življenjske zavarovalnice bi morali definirati povezave med zakonodajo, davčno politiko ter zavarovalnimi pogoji. Kompleksnost povezav je v tem primeru odvisna tudi od prihodnjih dogodkov, ki bodo vplivali na obrestne mere, inflacijo, umrljivost, stroške poslovanja, obseg poslovanja…

2.1.1 Koraki modeliranja

Slabosti in prednosti določenega modela se pokažejo v praksi. S pomočjo korakov modeliranja že narejeni model izboljšamo oz. prilagodimo dejanskim zahtevam. Koraki modeliranja nam služijo kot opora pri definiranju in izdelavi novega modela.

Korake modeliranja povzemajo spodnje točke (Core Reading 103, enota 1, str. 2):

1. *Definicija množice zahtev, ki naj bi jih model realiziral*

   Pri modeliranju višine odškodninskih zahtevkov oz. škod lahko za zahtevo postavimo natančnost modela za vsaj 95% odškodninskih zahtevkov. Pri modeliranju števila odškodninskih zahtevkov bi za zahtevo lahko postavili pogoj, da ne smemo podceniti števila zahtevkov, katerih višina je večja od 10 milijonov SIT.

2. *Planiranje procesa modeliranja in postopka ugotavljanja ustreznosti modela*

   Postopek ugotavljanja ustreznosti določenega modela običajno vključuje teste, s katerimi dobimo odgovore na vprašanje ali je naš model dosegel planirane cilje. Pri modeliranju števila odškodninskih zahtevkov lahko rezultate modela primerjamo s preteklimi podatki. V poštev bi prišel χ^2 test.

3. *Zbiranje in analiziranje podatkov, na katerih bomo uporabili model*

4. *Definicija modela, ki bo v osnovi upoštevala bistvo realnega procesa, ki ga modeliramo. Kasneje model prilagodimo oz. izboljšamo.*

   V prvi aproksimaciji moramo model nastaviti tako, da bo upošteval bistvo realnega procesa – pri modelu prihodnje življenjske dobe je za model ključno vprašanje smrti opazovane osebe. V kasnejših izboljšavah modela vključimo v model tudi verjetnosti, da opazovana oseba zboli za določeno hudo boleznijo, katere posledica je smrt ali pa vključimo verjetnosti invalidnosti, nezgode…

5. *V proces modeliranja vključimo strokovnjaka iz področja oziroma procesa, ki ga modeliramo. Le ta nam poda mnenje o konceptu našega modela.*

6. *Za implementacijo modela uporabimo simulacijski paket ali programski jezik.*

   Vprašanje izbire programskega orodja ali jezika je povezano s stroški celotne izdelave modela. Upoštevati moramo pomembno dejstvo in sicer, da mora imeti izbrano orodje kvaliteten in statistično zanesljiv generator slučajnih števil, ki bo primerljiv kompleksnosti modela.

7. *Implementacija programske kode*

8. *V programski kodi odpravimo napake in se prepričamo, da deluje po definiciji modela*

9. *Analiza občutljivosti vhodnih parametrov*

10. *Preverimo ustreznost modela v smislu manjših sprememb vrednosti vhodnih parametrov*

11. *Analiza rezultatov*

12. *Dokumentacija in predstavitev rezultatov*

Koraki modeliranja nas pripeljejo do modela oziroma do rezultatov. Seveda pa aktuarji strmimo k nenehnim izboljšavam ter optimizaciji modela. To dosežemo s ponavljanjem korakov 3 do 12 v prihodnosti, ob primerjavi podatkov, ki smo jih dobili s prvotnimi napovedmi.

2.1.2 Prednosti in slabosti modeliranja

V aktuarstvu med največje prednosti modeliranja štejemo možnost analiziranja sistema, ki deluje oziroma bo deloval veliko let (pokojninska, življenjska zavarovanja), v zelo kratkem času. Ostale prednosti so:

- kompleksne sisteme s slučajnimi elementi (npr. modeliranje življenjskih zavarovanj) ne moremo natančno definirati z enostavnimi matematičnimi definicijami, ki bi vrnile rezultate, katere bi enostavno interpretirali. V takšnih primerih si pomagamo z modeliranjem,
- potencialnim zavarovancem pomagamo pri izbiri zavarovanj tako, da simuliramo različne zavarovalne police in zavarovalne dogodke v prihodnosti,
- model nekega kompleksnega sistema lahko obvladujemo boljše tako, da zmanjšujemo varianco rezultatov ob nespremenjeni povprečni vrednosti.

Kljub vsemu se je potrebno zavedati, da modeli ne dajejo enostavnih odgovorov na vsa aktuarska vprašanja (Booth, 1999, str. 595). Obstajajo omejitve, ki jih moramo razumeti, ko interpretiramo rezultate oziroma ko le te posredujemo strankam.

Slabosti modeliranja so:

- razvoj modelov zahteva določen čas ter izkušnje. Tako so lahko stroški razvoja določenega modela zelo visoki (potrebno je preveriti pravilnost predpostavk modela, programsko kodo, razumljivost rezultatov in način predstavitve rezultatov ciljnemu občinstvu),
- pri stohastičnem modeliranju dobimo za vsako množico vhodnih podatkov le oceno rezultata. Tako moramo model preizkusiti večkrat in to neodvisno od posameznih vhodnih podatkov,

- v današnjem času je večina modelov implementiranih za uporabo na računalnikih. Vendar če s pomočjo modelov ne pridemo do pričakovanih rezultatov, tudi računalniška implementacija ne pomeni veliko,
- rezultati modelov so odvisni od vhodnih podatkov. Če ti niso kvalitetni, ne moremo pričakovati kvalitetnih rezultatov,
- pomembno je, da uporabniki modela le tega razumejo. Vedno obstaja nevarnost, da se določen model uporablja kot črna skrinjica, čigar rezultate se privzame za pravilne, medtem, ko se nihče ne vpraša kaj skrinjica sploh počne,
- razumljivo je, da vseh prihodnjih dogodkov ne moremo vključiti v model. Kot primer lahko navedemo spremembo zakonodaje, ki je seveda z modelom ne moremo napovedati,
- nekatere rezultate modela je težko razložiti. Ti so lahko veljavni relativno, absolutno pa ne.

2.2. Stohastični ter deterministični modeli

Splošna želja je, da bi realnost čim bolj natančno zajeli v modelu. Tako mora model zajemati lastnosti, ki jih opisujejo slučajne spremenljivke. V tem primeru govorimo o stohastičnih modelih, ki po definiciji upoštevajo slučajnost svojih vhodnih komponent. Modeli, ki ne vsebujejo nobenih slučajnih komponent, so po svoji naravi deterministični.

Rezultate pri determinističnemu modelu dobimo takoj, ko definiramo množico fiksnih vhodnih parametrov in njihovih povezav. Nasprotno je pri stohastičnem modelu rezultat slučajen, kot so vhodni podatki, ki so slučajne spremenljivke.

Rezultate determinističnega modela pogosto dobimo z direktnim izračunom, včasih pa uporabimo numerične metode (numerična integracija, numerično reševanje diferencialnih enačb).

Pri stohastičnih modelih dobimo rezultat v obliki analitične formule, seveda, če sam model to dopušča. Tako lahko proučujemo in natančno analiziramo spremembe vrednosti vhodnih parametrov. Takšne primere srečamo pri študiju stohastičnih obrestnih mer, kjer pri določeni verjetnostni porazdelitvi obrestne mere eksplicitno dobimo porazdelitev akumulirane vrednosti denarnega toka po določenem časovnem intervalu.

Stanje modela je množica spremenljivk, ki opisuje sistem v določeni časovni točki, kjer je potrebno privzeti cilje študije. S pomočjo stanj je možno predstaviti prihodnje scenarije.

Diskretna stanja dobimo tam, kjer spremenljivke zavzamejo diskretne vrednosti v času. Kot primer navedimo življenjska zavarovanja, kjer opazovano življenje (zavarovanec) preide iz stanja živ v stanje mrtev. Podobno, če spremljamo število polic v portfelju zavarovalnice, se to število lahko poveča ali zmanjša.

Zvezna stanja dobimo, če se spremenljivke spreminjajo zvezno v času. Kot primer lahko podamo časovne spremembe vrednosti premoženja zavarovalnice, ki se teoretično spreminja zvezno v času.

V modelu lahko nastopa čas diskretno ali zvezno. To je predvsem odvisno od pogoja ali morajo biti rezultati modela podani samo v diskretnih časovnih točkah ali ne. Kot primer navedimo model, ki šteje število zavarovalnih zahtevkov (škod) na dan. Pri tem ni potrebno definirati natančne dolžine dneva.

Kako natančno razdelimo čas je odvisno od narave modela. Zavedati se je potrebno, da gostejša razdelitev botruje daljšemu času, ki je potreben za izvedbo samega procesa. Zapomniti si je potrebno, da nekaterih rezultatov za časovno zvezen model, ki ima tudi zvezna stanja, ni moč dobiti z diskretno simulacijo. Primer tega je odvod Brownovega gibanja, ki ni nikjer definiran. Pri tem primeru lahko izračunamo končne razlike aproksimacij, ki delujejo kot odvodi, vendar pa ne konvergirajo, ko zmanjšujemo časovni interval.

2.3 Ustreznost modela

Pri definiciji ustreznosti modela za določeno nalogo je potrebno upoštevati naslednja dejstva (Core Reading 103, enota 1, str. 3):

- cilje naloge,
- uporabnost modela za namen, za katerega bo uporabljen,
- pravilnost podatkov,
- možnost napak, ki izvirajo iz vrednosti parametrov modela. Parametri modela namreč določajo v kolikšni meri model simulira natančno sliko realnega problema,
- vpliv korelacij med slučajnimi spremenljivkami, ki so vključene v model,
- korelacijo med različnimi rezultati modela,
- trenutno uporabnost modelov, ki so bili napisani in uporabljeni v preteklosti,

- kredibilnost vhodnih podatkov,
- kredibilnost rezultatov,
- nevarnost pristranske natančnosti in
- možnost predstavitve modela in rezultatov.

Stabilnost povezav vgrajenih v model ne velja nujno na dolgi rok. Kot primer lahko navedemo eksponentno rast, ki je na kratki rok podobna linearni rasti. Če lahko napovemo spremembe, jih vključimo v model, vendar jih pogosto dolgoročno ne moremo napovedati.

Z modeli definiramo preproste procese iz realnega sveta. Tako lahko ne vsebujejo povezav višjih redov, ki na kratki rok ne igrajo pomembne vloge, na dolgi rok pa lahko akumulacija le teh prinese znaten delež k rezultatu.

2.4 Analiza rezultatov

Pri analizi rezultatov se uporabljajo tehnike statističnega vzorčenja. Statistična teorija daje prednost vzorčenju, pri katerem je izbira enot po določenem sistemu slučajna in je verjetnost znana vnaprej za vse enote v populaciji. S tem se izognemo pristranskosti in lahko nekaj povemo o natančnosti oziroma kakovosti ocen za parametre, ki jih izračunavamo iz vzorčnih podatkov (Tomažin, 1998, str. 6).

Pri analizi moramo aktuarji pokazati veliko izkušenj in odlično presojo, saj so različna opazovanja med seboj korelirana, in še porazdelitev se spreminja skozi čas. Izogibati se moramo predpostavki, da so posamezna opazovanja neodvisna in enako porazdeljena. Če obstaja realni sistem, s katerim lahko primerjamo naše rezultate, potem uporabimo Turingov[1] test. Pri tem testu se uporabljajo različne množice podatkov, kjer se ne razkrije, katere so iz realnega sveta in katere so dobljene iz modela. Če strokovnjaki lahko ugotovijo katera množica pripada realnemu svetu in katera modelu, potem se lahko uporabljena tehnika uporabi pri izboljšavi modela.

Če je možno, primerjamo dobljene rezultate iz modela s podatki iz resničnega sveta. Potrebno je opraviti analizo občutljivosti rezultatov na majhne spremembe vhodnih podatkov in na spremembo porazdelitve le teh. Če pride pri majhnih spremembah vhodnih podatkov ali porazdelitve do velikih odklonov pri rezultatih, je zagotovo potrebno analizirati ustreznost modela. S tem ugotovimo ključne povezave na katere moramo biti pozorni pri oblikovanju in uporabi modela.

---

[1] Alan Turing – britanski matematik in pionir računalništva

Zadnji korak modeliranja je predstavitev ter dokumentacija rezultatov in modela občinstvu/stranki. Pri tem je potrebno upoštevati nivo znanja občinstva ter njihov namen. Ključna točka je, da stranka sprejme model za pravilnega in ga bo uporabila kot orodje za odločanje. Predstaviti moramo vse omejitve, ki so vgrajene v model in stranki razkriti območje delovanja modela. Slednje je predvsem pomembno zaradi verjetnosti različnih tolmačenj uporabnosti modela v prihodnosti in pri morebitnih sporih ter tožbah.

2.5. Stohastični procesi

Stohastični proces zajema lastnosti slučajnih spremenljivk. Slučajna spremenljivka opisuje slučajni pojav v določenem času. Stohastični proces je množica slučajnih spremenljivk X_t, za vsak čas t v množici J. Množico vrednosti, ki jih slučajne spremenljivke lahko zavzamejo imenujemo prostor stanj procesa – označimo ga z S. Jasno pa nam mora biti, da X_t niso neodvisne (primer: poljuben borzni indeks. Če X_t predstavlja vrednost indeksa določenega dne, potem je dejstvo, da X_t niso neodvisne, lahko razumljivo).

Poznamo več vrst stohastičnih procesov. Z naslednjimi primeri bomo prikazali razliko med njimi:

- <u>Proces z diskretnim prostorom stanj in z diskretnimi časovnimi spremembami</u>: zavarovalnica letno preverja status zavarovancev pri avtomobilskem zavarovanju. Obstajajo trije nivoji popusta (0%, 25%, 40%), ki so odvisni od voznikovih povzročenih škod. V tem primeru je prostor stanj enak $S=\{0,25,40\}$ in časovna množica $J=\{0,1,2,...\}$, kjer vsak interval predstavlja eno leto.
- <u>Proces z diskretnim prostorom stanj in z zveznimi časovnimi spremembami</u>: življenjska zavarovalnica razvršča zavarovance na zdrave, bolne ter mrtve. Torej imamo prostor stanj $S=\{Z,B,M\}$. Za časovno množico je naravno, da privzamemo $J=[0,\infty)$ saj lahko bolezen ali smrt nastopi v vsakem trenutku. Po drugi strani je zadovoljivo , če bi čas šteli v dnevih, torej $J=\{0,1,2,...\}$.
- <u>Proces z zveznim prostorom stanj</u>: odškodninski zahtevki slučajnih zneskov prihajajo v zavarovalnico ob nepredvidenem času. Zavarovalnica želi minimizirati tveganje nepokrivanja obveznosti do zavarovancev zato potrebuje napoved zahtevkov v času $[0,t)$. V takšnih primerih je standard, da uporabimo $[0,\infty)$ za S in J.

- Proces mešanega tipa: lep primer takšnih procesov so pokojninske sheme, kjer imajo člani možnost, da se upokojijo na vsak rojstni dan od 60. do 65. leta. Števila ljudi, ki se bodo upokojili mladi ne moremo natančno napovedati. Prav tako ne moremo napovedati števila smrti med živimi aktivnimi člani. Število aktivnih članov modeliramo s procesom mešanega tipa, kjer je $S = \{1, 2, 3, ...\}$ in časovni interval $J = [0, \infty)$. Zmanjšanje slučajnih vrednosti se bo pojavljalo pri fiksnih datumih (zaradi zgodnjih upokojitev) in ob slučajnih datumih (smrt).

Ko enkrat definiramo časovno množico in prostor stanj, nam ostane še definicija procesa $\{X_t, t \in J\}$ samega. Torej moramo podati skupno porazdelitev $X_{t_1},...,X_{t_n}$ za vse $t_1,...,t_n \in J$ in vse n. V praksi pridemo do skupne porazdelitve indirektno, preko preprostih posrednih procesov.

Skupno realizacijo slučajnih spremenljivk X_t, za vse t iz J imenujemo vzorčna pot procesa, kar je v bistvu funkcija iz J v S. Lastnosti vzorčnih poti procesa naj bi se ujemale s tistimi v realnem življenju, vsaj v statističnem smislu. V tem primeru lahko uporabimo model za napovedovanje.

2.5.1 Stacionarnost in prirastki

Stohastičen model je stacionaren, če sta skupni porazdelitvi za $X_{t_1},...,X_{t_n}$ in za $X_{t+t_1},...,X_{t+t_n}$ identični za vse $t, t_1,...,t_n \in J$ in za vsa cela števila n. To z drugimi besedami pomeni, da se statistične lastnosti procesa ohranjajo ne glede na časovne intervale.

Ker je stacionarnost v realnem življenju težko dokazovati oziroma preveriti, vpeljemo pojem šibke stacionarnosti, ki jo povzemata naslednji trditvi:

- matematično upanje procesa $m(t) = E(X_t)$ je konstantno,
- kovarianca procesa $C(s,t) = E[X_s X_t] - E[X_s]E[X_t]$ je odvisna samo od časovne razlike $s - t$.

Prirastki procesa, definiran kot $X_{t+u} - X_t$ ($u > 0$), imajo pogosto enostavnejše lastnosti kot proces sam (stacionarnost). Pravimo, da ima proces X_t neodvisne prirastke, če je za vsak $u > 0$ prirastek $X_{t+u} - X_t$ neodvisen od zgodovine procesa $\{X_s, 0 \le s \le t\}$.

2.5.2 Lastnost Markova

Če predpostavimo, da je mogoče razvoj procesa napovedati na osnovi sedanjega stanja, ne da bi se sklicevali na zgodovino, pridemo do naslednje poenostavitve

$$P(X_t \in A \mid X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ..., X_{s_n} = x_n, X_s = x) = P(X_t \in A \mid X_s = x), \qquad (1)$$

za vse čase $s_1 < ... < s_n < s < t$ in stanja $x_1, ..., x_n, x \in S$ in vse podmnožice $A \subset S$. To lastnost imenujemo lastnost Markova. Proces, ki jo ima, je markovski proces.

Izrek: Proces z neodvisnimi prirastki ima lastnost Markova.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
&P(X_t \in A \mid X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ..., X_{s_n} = x_n, X_s = x) \\
&= P(X_t - X_s + x \in A \mid X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ..., X_{s_n} = x_n, X_s = x) \\
&= P(X_t - X_s + x \in A \mid X_s = x) \\
&= P(X_t \in A \mid X_s = x)
\end{aligned}$$

Markovski proces z diskretnim prostorom stanj in diskretno časovno množico imenujemo markovska veriga. Markovski proces z diskretnim prostorom stanj in zvezno časovno množico imenujemo odsekoma zvezen markovski proces (oziroma odsekoma konstanten markovski proces).

2.5.3 Primeri osnovnih stohastičnih procesov

Beli šum

Zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk imenujemo beli šum. To je časovno diskreten, stacionaren, stohastičen proces, ki ima lastnost Markova. Uporabljamo ga za konstrukcijo bolj kompleksnih procesov.

Splošen slučajni sprehod

Naj bo $Y_1, ..., Y_j, ...$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenmljivk (beli šum) in definirajmo proces $X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ z začetnim pogojem $Y_0 = 0$. To je proces s stacionarnimi, neodvisnimi prirastki in zato časovno diskreten markovski proces.

Proces ni stacionaren, niti šibko stacionaren. V primeru, ko Y_j lahko zavzame vrednost 1 ali –1, proces imenujemo slučajni sprehod.

Drseče povprečje

Naj bo $\{Y_j, j = -p, -p+1, ...\}$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk in $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p$ realna števila. Drseče povprečje reda p je definirano z

$$X_n = \sum_{j=0}^{p} \alpha_j Y_{n-j} .$$

To je stacionaren proces in v splošnem ni markovski proces (tudi, če je p =1).

Poissonov proces

Poissonov proces stopnje λ je časovno zvezen proces N_t, $t \geq 0$ z naslednjimi lastnostmi

- $N_0 = 0$,
- N_t ima neodvisne prirastke in
- N_t ima Poissonovo porazdeljene stacionarne prirastke oziroma

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{[\lambda(t-s)]^n e^{-\lambda(t-s)}}{n!}, \; s < t$$

To je odsekoma konstanten markovski proces s prostorom stanj $N = \{0,1,2,...\}$. Ni stacionaren, niti šibko stacionaren. Proces je osnova za analizo kumulative pojavov določenega dogodka v časovnem intervalu $[0,t]$, neodvisno od narave dogodkov (avtomobilska nesreča, prihod odškodninskega zahtevka v zavarovalnico, prihod stranke na servis…)

Sestavljen Poissonov proces

Definiran je z

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \; , \; t \geq 0 ,$$

kjer je N_t, $t \geq 0$ Poissonov proces in $\{Y_j, j \geq 1\}$ zaporedje neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Proces ima neodvisne prirastke in zato lastnost Markova drži. Uporabljamo ga za analizo kumulative zahtevkov v zavarovalnici v času $[0,t]$, kjer je N_t skupno število zahtevkov in Y_j znesek j-tega zahtevka. Osnovni problem klasične teorije tveganja je v ocenjevanju verjetnosti propada zavarovalnice

$$\psi(u) = P(u + ct - X_t < 0, t > 0),$$

kjer je u začetni kapital zavarovalnice, c jakost priliva premije, pri neki fiksni porazdelitvi zahtevkov.

Brownowo gibanje

Brownovo gibanje, imenovano tudi Wienerjev proces, je časovno zvezen proces B_t, $t \geq 0$ z neodvisnimi, stacionarnimi prirastki, ki so normalno porazdeljeni.

3. MODEL PREŽIVETJA KOT OSNOVNA TOČKA MODELIRANJA V AKTUARSTVU

3.1 Prihodnja življenjska doba

Začetna točka preprostega matematičnega modela preživetja je dejstvo, da nam prihodnja življenjska doba opazovane osebe ni znana. Označimo prihodnjo življenjsko dobo novorojene osebe s T. Prihodnja življenjska doba T je slučajna spremenljivka, ki je zvezno porazdeljena na intervalu $[0,\omega]$, kjer je $0 < \omega < \infty$ in ω predstavlja maksimalno starost ljudi.

Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T bomo označili s $F(t)$,

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t),\ t \geq 0. \tag{3.1}$$

Za vsak t nam funkcija $F(t)$ vrne verjetnost, da bo novorojena oseba umrla v naslednjih t letih. Verjetnost nasprotnega dogodka, da bo novorojena oseba preživela naslednjih t let, predstavlja funkcija preživetja $S(t)$

$$S(t) = \mathrm{P}(T > t) = 1 - F(t). \tag{3.2}$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke T tako lahko definiramo s funkcijo $F(t)$ ali s funkcijo $S(t)$. Funkcija preživetja se uporablja v aktuarstvu in demografiji, medtem ko se v verjetnosti in statistiki uporablja porazdelitvena funkcija, vendar pa se iz lastnosti porazdelitvene funkcije lahko izpeljejo lastnosti funkcije preživetja.

V praksi imamo opravka z osebami starimi x let. V tem primeru označimo prihodnjo življenjsko dobo osebe stare x let s T_x, kjer je $0 \leq x \leq \omega$. Porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_x bomo označili s $F_x(t)$, funkcijo preživetja pa s $S_x(t)$,

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathrm{P}(T_x \leq t),\ t \geq 0,\ 0 \leq \mathrm{x} \leq \omega, \\ S_x(t) &= \mathrm{P}(T_x > t),\ t \geq 0,\ 0 \leq \mathrm{x} \leq \omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Med porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_x in porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T velja naslednja povezava

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathrm{P}(T_x \leq t) = \mathrm{P}(T \leq x+t \mid T > x) \\ &= \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Relacija velja tudi med funkcijo preživetja slučajne spremenljivke T_x in funkcijo preživetja slučajne spremenljivke T

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 1 - F_x(\mathrm{t}) = 1 - \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

V nadaljevanju bomo vpeljali oznake, ki so se udomačile v aktuarskih krogih. Tako bomo s ${}_t q_x$ označili verjetnost, da bo oseba stara x let umrla v naslednjih t letih, medtem ko ${}_t p_x$ označuje verjetnost, da bo oseba stara x let preživela naslednjih t let, kar lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= \mathrm{P}(T_x \leq t) = F_x(\mathrm{t}), \\ {}_t p_x &= \mathrm{P}(T_x > t) = 1 - {}_t q_x = S_x(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

V primeru, ko je $t = 1$, indeks t v zgoraj omenjenih simbolih običajno izpustimo. Zapišimo relacijo (3.5) z aktuarsko notacijo

$$ {}_t p_x = \frac{{}_{x+t} p_0}{{}_x p_0}. \tag{3.7} $$

Tako za poljubno starost x in za $s > 0,\ t > 0$ velja

$$ \begin{aligned} {}_{s+t} p_x &= \frac{{}_{x+s+t} p_0}{{}_x p_0} \\ &= \frac{{}_{x+s} p_0}{{}_x p_0} \times \frac{{}_{x+s+t} p_0}{{}_{x+s} p_0} \\ &= {}_s p_x \times {}_t p_{x+s}. \end{aligned} \tag{3.8} $$

Podobno velja

$$ {}_{s+t} p_x = {}_t p_x \times {}_s p_{x+t}, \tag{3.9} $$

kar z besedami pomeni, da je verjetnost, da oseba stara x let preživi $s+t$ let, enaka produktu verjetnosti, da oseba stara x let preživi t let in verjetnosti, da bo potem ta oseba preživela še nadaljnjih s let.

Za bolj splošen dogodek obstaja poseben simbol. S ${}_{s|t} q_x$ bomo označili dogodek, da bo oseba stara x let preživela naslednjih s let in umrla v naslednjih t letih torej, da bo oseba umrla med letoma $x+s$ in $x+s+t$ starosti

$$ \begin{aligned} {}_{s|t} q_x &= \mathrm{P}(s < T_x < s+t) = F_x(s+t) - F_x(s) \\ &= {}_{s+t} q_x - {}_s q_x. \end{aligned} \tag{3.10} $$

Količina, ki ima v modelu preživetja osrednjo vlogo, je jakost (intenziteta) smrtnosti. Jakost smrtnosti v starosti x $(0 \le x < \omega)$ označimo z μ_x in jo definiramo kot

$$ \mu_x = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \mathrm{P}(T \le x+h \mid T > x), \tag{3.11} $$

kjer predpostavljamo, da limita obstaja. Interpretacija jakosti smrtnosti μ_x je pomembna. Iz (3.6) sledi, da je verjetnost $\mathrm{P}(T \le x+h \mid T > x)$ enaka $F_x(h) = {}_h q_x$. Za majhne h limito ignoriramo in zapišemo

$$ {}_h q_x \cong h\, \mu_x. \tag{3.12} $$

Dobljeno pomeni, da je verjetnost, da bo oseba stara x let umrla v kratkem času h, sorazmerna času h, kjer je sorazmernostni koeficient prav jakost smrtnosti μ_x.

Jakost smrtnosti lahko izrazimo tudi s pomočjo porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke T, kjer si pomagamo s povezavo (3.4)

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \mathrm{P}(T \le x+h \mid T > x) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{F'(x)}{1-F(x)} = -[\ln(1-F(x))]'.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Iz (3.13) dobimo povezavo med jakostjo smrtnosti ter funkcijo preživetja slučajne spremenljivke T, kjer upoštevamo, da velja $F(t)+S(t)=1$,

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{F'(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{-S'(x)}{S(x)}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Zveza (3.14) nam ob uporabi aktuarske notacije poda osnovno enačbo za izračun verjetnosti preživetja ${}_t p_x$ kot funkcijo t

$$\frac{\partial}{\partial t}\, {}_t p_x = -\mu_{x+t}\ {}_t p_x, \tag{3.15}$$

od koder sledi

$${}_t p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds). \tag{3.16}$$

V nadaljevanju nas bo zanimalo matematično upanje slučajne spremenljivke T_x. Privzamemo, da je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke T_x zvezna in s $f_x(t)$ označimo njeno verjetnostno gostoto

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \frac{\partial}{\partial t} F_x(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\, {}_t q_x = -\frac{\partial}{\partial t}\, {}_t p_x \\ &= \mu_{x+t}\; {}_t p_x . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Matematično upanje slučajne spremenljivke T_x oziroma pričakovan preostanek življenjske dobe x let stare osebe zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T_x) &= \int_0^\infty t\; f_x(t)\, dt \\ &= \int_0^{\omega-x} t\, \mu_{x+t}\; {}_t p_x\, dt = \int_0^{\omega-x} t\, (-\frac{\partial}{\partial t}\, {}_t p_x)\, dt \\ &= -t\; {}_t p_x \Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_t p_x\, dt \\ &= \int_0^{\omega-x} {}_t p_x\, dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Matematično upanje označimo z $\overset{\circ}{e}_x$,

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathrm{E}(T_x) = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x\, dt = \int_0^{\omega-x} S_x(t)\, dt = \int_0^{\omega-x} (1 - F_x(t))\, dt. \tag{3.19}$$

Tako definirano matematično upanje je v splošnem težko izračunati. V ta namen definiramo celoštevilsko slučajno spremenljivko K_x, ki označuje število dopolnjenih let, ki jih bo preživela x let stara oseba. Verjetnostna porazdelitev slučajne spremenljivke K_x je podana s

$$\mathrm{P}(K_x = k) = \mathrm{P}(k \le T_x < k+1) = {}_k p_x\, q_{x+k},\; k = 0,1,... \tag{3.20}$$

Pričakovano vrednost slučajne spremenljivke K_x imenujemo odrezana pričakovana prihodnja življenjska doba x let stare osebe in jo označimo z e_x,

$$\begin{aligned} e_x &= \mathrm{E}(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{P}(K_x = k) = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} k\; {}_k p_x\, q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(K_x \ge k) = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_k p_x . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Matematično upanje v (3.21) je lažje izračunati kot matematično upanje v (3.18). Pričakovana prihodnja življenjska doba je pogosto pokazatelj kvalitete življenja in zdravstvenega stanja določene države.

3.2 Tablice smrtnosti

Tablice smrtnosti so neobhodna komponenta v mnogih modelih v aktuarstvu. So najstarejša in najbolj znana oblika demografskih tablic (poznamo tudi tablice poročnosti, rodnosti...). Opredelimo jih kot sistem medsebojno povezanih kazalnikov, ki na modelu sto tisoč v danem trenutku rojenih otrok z različnih vidikov prikazujejo proces njihovega umiranja, odvisno od starosti (kazalniki so verjetnost smrti, verjetnost doživetja, modelsko število umrlih, srednje število živih, vsotna funkcija, koeficient doživetja ter življenjsko pričakovanje) (Malačič, 2000, str. 128). Že sredi tretjega stoletja je Ulpianus sestavil grobe tablice, ki so bile uporabljene v severni Italiji vse do konca 18. stoletja. Nekateri teoretiki so začetek aktuarstva postavili v leto 1693, ko je Edmund Halley izdal "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Various Tables of Births and Funerals at the City of Breslau". Tablice smrtnosti, imenovane Breslau (današnji Wroclaw) tablice, ki jih je Edmund objavil v svojem članku, so zaradi moderne notacije in idej ostale skoraj neopazne. Naredil je tablice smrtnosti, ki so jih lahko uporabljali pri vrednotenju življenjskih zavarovanj (Bowers, 1986, str. 45). Izračunal je tudi pričakovano življenjsko dobo na Kontinentu. Zavarovalnice so začele uporabljati Halleyeve tablice šele sto let po njihovi objavi.

Danes so tablice smrtnosti uporabne na mnogih področjih znanosti. Tako jih znanstveniki uporabljajo za študije zanesljivosti zapletenih mehanskih in elektronskih sistemov, biostatistiki jih uporabljajo pri primerjavi učinkovitosti alternativnih metod zdravljenja težkih bolezni, demografi jih uporabljajo kot orodja za populacijske projekcije.

V aktuarstvu uporabljamo pri svojih izračunih verjetnosti ${}_t p_x$ ter ${}_t q_x$. Priročno bi bilo, če bi imeli omenjene verjetnosti predstavljene v tabeli, recimo za celoštevilske vrednosti t in x. Takšna tabela, bi bila ogromnih dimenzij, zato tablice smrtnosti predstavljajo pripomoček za računanje teh verjetnosti iz manjše tabele.

Ključ za definicijo tablic smrtnosti je povezava (3.8) oz. (3.9). Za začetek izberemo najnižjo starost α, ki bo predstavljena v tablicah. Izbira starosti α je odvisna od podatkov, ki so nam na razpolago (pri analizi umrljivosti upokojencev, bi bilo nesmiselno obravnavati osebe mlajše od recimo 50 let). Nadalje izberemo pozitivno število l_α, ki ga imenujemo koren tablic. Koren tablic interpretiramo kot število živih oseb starosti α v homogeni populaciji. Tako za $\alpha \le x \le \omega$ definiramo funkcijo l_x kot

$$l_x = l_\alpha \times {}_{x-\alpha}p_\alpha, \tag{3.22}$$

kjer predpostavljamo, da verjetnosti ${}_{x-\alpha}p_\alpha$ obstajajo (so znane). Očitno je $l_\omega = 0$. Preko zveze (3.9) dobimo za $\alpha \le x \le \omega$ in $t \ge 0$ naslednji rezultat

$${}_t p_x = \frac{{}_{t+x-\alpha}p_\alpha}{{}_{x-\alpha}p_\alpha} = \frac{l_{x+t}}{l_\alpha} \times \frac{l_\alpha}{l_x} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \tag{3.23}$$

Če poznamo vse vrednosti funkcije l_x za $\alpha \le x \le \omega$, lahko izračunamo vsako verjetnost ${}_t p_x$ ali ${}_t q_x$. Funkcija l_x nam v tablicah smrtnosti poda število živih na začetku starostnega razreda x. Naslednja funkcija, ki jo najdemo v tablicah je (tablično) število umrlih d_x, ki je definirano kot razlika med dvema zaporednima vrednostma funkcije l_x, $\alpha \le x \le \omega$

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \tag{3.24}$$

S pomočjo funkcije d_x lahko izrazimo verjetnost smrti x let stare osebe v naslednjem letu

$$q_x = 1 - p_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}. \tag{3.25}$$

Tako nam tablice natanko določajo porazdelitev slučajne spremenljivke K_x.

V tablicah smrtnosti so poleg naštetih funkcij (l_x, d_x, q_x, p_x) običajno predstavljene še naslednje funkcije (Malačič, 2000, str. 130).

- preživeta leta (L_x), ki nam pove kolikšno število oseb se nahaja v starostnem razredu x let (od x do $x+1$ let),
- vsotna funkcija (T_x), ki pove število let, ki jih bodo preživeli živi na začetku starostnega razreda x do konca svojega življenja,
- koeficient doživetja (P_x), ki pove delež oseb v starosti od x do $x+1$ let bo doživel starost od $x+1$ do $x+2$ leti,

- življenjsko pričakovanje (e_x), ki smo ga že omenili (pričakovana prihodnja življenjska doba x let stare osebe).

Poradelitev slučajne spremenljivke T_x dobimo s pomočjo tablic smrtnosti ter interpolacije. Za ta namen moramo za izračun verjetnosti smrti ${}_s q_x$ $(0 \le s \le 1)$ ali za izračun jakosti smrtnosti μ_{x+s} $(0 < s < 1)$ privzeti določene modele.

3.2.1 Analiza modelov za jakost smrtnosti in verjetnost smrti

V nadaljevanju bomo obravnavali dva modela za ${}_s q_x$ in enega za μ_{x+s}. Prvi model, ki ga imenujemo enakomerna porazdelitev smrti, predpostavlja, da je za celo število x in $0 \le t \le 1$ funkcija ${}_t p_x\, \mu_{x+t}$ konstantna. Iz definicije (3.17) je to ravno verjetnostna gostota $f_x(t)$ od starosti x do smrti, kar je ekvivalentno enakomerni porazdelitvi časa do smrti pogojno na smrt, ki se bo zgodila v omenjenem intervalu. Ker je ${}_s q_x = \int_0^s {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt$, mora za $s = 1$ veljati ${}_t p_x\, \mu_{x+t} = q_x$ $(0 \le t \le 1)$ in zato

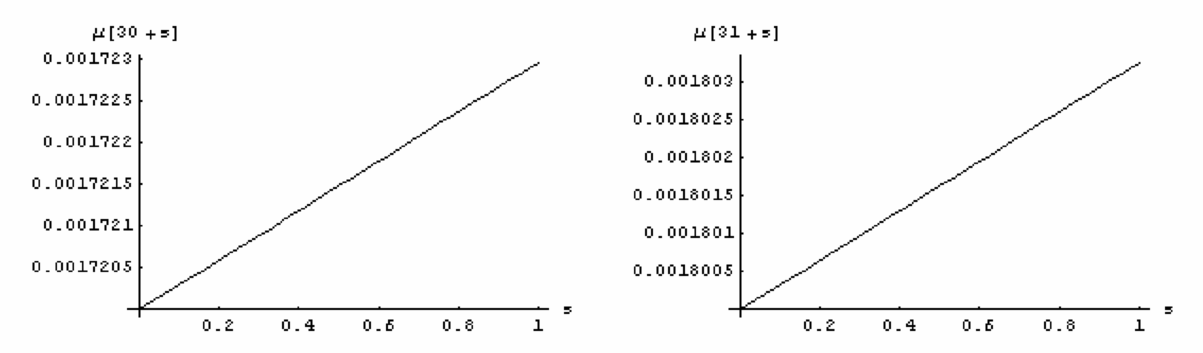
$$ {}_s q_x = \int_0^s q_x\, dt = s\, q_x\,, \tag{3.26} $$

kar je pogosto tudi sama definicija modela. Model (3.26) lahko uporabimo za oceno vseh ${}_s p_x$ ter ${}_s q_x$ $(0 \le s \le 1)$, saj q_x najdemo v tablicah smrtnosti. Jakost smrtnosti dobimo iz definicije (3.13) in sicer

$$ \begin{aligned} \mu_{x+s} &= -[\ln({}_s p_x)]' = -[\ln(1 - s\, q_x)]' \\ &= \frac{q_x}{1 - s\, q_x}. \end{aligned} \tag{3.27} $$

Jakost smrtnosti med letoma 30 ter 32 je predstavljena na spodnji sliki, kjer smo vrednosti $q_{m,30}$ in $q_{m,31}$ vzeli iz tablic smrtnosti za moške za leta 1993-95, RS.

Slika 3.1: Jakost smrtnosti na intervalu [30, 32]



Vir: Lastni izračun

Predpostavka enakomerne porazdelitve smrti se na prvi pogled zdi logična, saj naj bi, teoretično gledano, v povprečju ljudje umirali enakomerno med letom. V praksi temu ni tako. Večjo nepravilnost modela lahko razberemo kar iz slike 3.1, kjer je očitno nakazana nezveznost jakosti smrtnosti v celoštevilčnih točkah.

Naslednji model predpostavlja, da je jakost smrtnosti konstantna na vsaki enoti intervala. To pomeni, da za celo število x in $0 \le t < 1$, predpostavimo

$$\mu_{x+t} = \mu = C. \tag{3.28}$$

S pomočjo (3.16) dobimo verjetnost preživetja

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds) = \exp(-\int_0^t \mu\, ds) \\ &= \exp(-t\mu), \end{aligned} \tag{3.29}$$

kjer je potrebno definirati vrednost μ. Kot v prejšnjem modelu si lahko pomagamo s tablicami smrtnosti, ker za celoštevilski x in $t = 1$ iz (3.8) dobimo $\mu = -\ln p_x$. Tako lahko verjetnost preživetja zapišemo kot

$${}_t p_x = \exp(-t(-\ln p_x)) = (p_x)^t. \tag{3.30}$$

Tudi ta model ima lastnost nezveznosti jakosti smrtnosti v celoštevilčnih točkah.

Zadnji model, ki ga bomo obravnavali, predpostavlja linearnost (oz. enakomerno porazdelitev) za ${}_{1-s}q_{x+s}$. Omenjeno predpostavko, v Severni Ameriki poznano kot Balduccijevo hipotezo, zapišemo kot

$$ {}_{1-s}q_{x+s} = (1-s)q_x, \tag{3.31} $$

od koder lahko izračunamo verjetnost preživetja

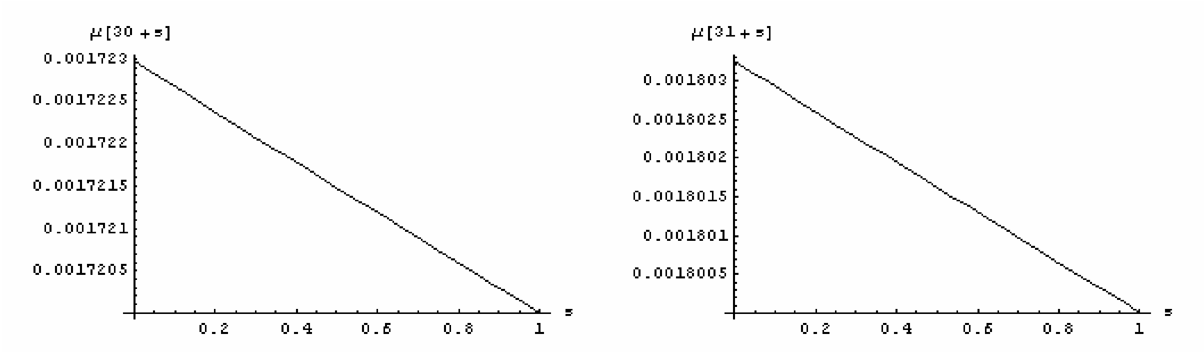
$$ {}_s p_x = \frac{p_x}{{}_{1-s}p_{x+s}} = \frac{1-q_x}{1-(1-s)q_x}. \tag{3.32} $$

Jakost smrtnosti dobimo iz (3.13)

$$ \begin{aligned} \mu_{x+s} &= -[\ln({}_s p_x)]' = -[\ln(\frac{1-q_x}{1-(1-s)q_x})]' \\ &= \frac{q_x}{1-(1-s)\,q_x}. \end{aligned} \tag{3.33} $$

Jakost smrtnosti med letoma 30 ter 32 je predstavljena na sliki 3.2, kjer smo vrednosti $q_{m,30}$ in $q_{m,31}$ vzeli iz tablic smrtnosti za moške za leta 1993-95, RS.

Slika 3.2: Jakost smrtnosti na intervalu [30, 32]



Vir: Lastni izračun

Iz slike 3.2 direktno izhaja nezveznost jakosti smrtnosti v celoštevilčnih točkah. Prav tako opazimo, da je jakost smrtnosti padajoča funkcija med celoštevilčnimi točkami, kar neposredno izhaja že iz (3.12).

3.2.2 Primeri analitične porazdelitve T_x

Zelo uporabne so tudi aproksimacije za jakost smrtnosti μ_x (imenovane zakoni smrtnosti), ki so odvisne samo od starosti x. Zgodovinsko gledano je vedno obstajala težnja po splošnem izrazu za porazdelitev $F_x(t)$, ki bi temeljil na osnovnih naravnih zakonih (po analogiji s fizikalnimi zakoni) in bil praktičen za uporabo. V nadaljevanju so predstavljeni nekateri primeri (analitičnih) porazdelitev, ki so poimenovane po njihovih izumiteljih.

De Moivre (1724) je predpostavljal obstoj maksimalne starosti človeške rase ω in enakomerno porazdeljenost T_x med 0 in $\omega - x$. Gostoto takšne porazdelitve zapišemo kot $f_x(t) = 1/(\omega - x)$. Jakost smrtnosti dobimo iz (3.13)

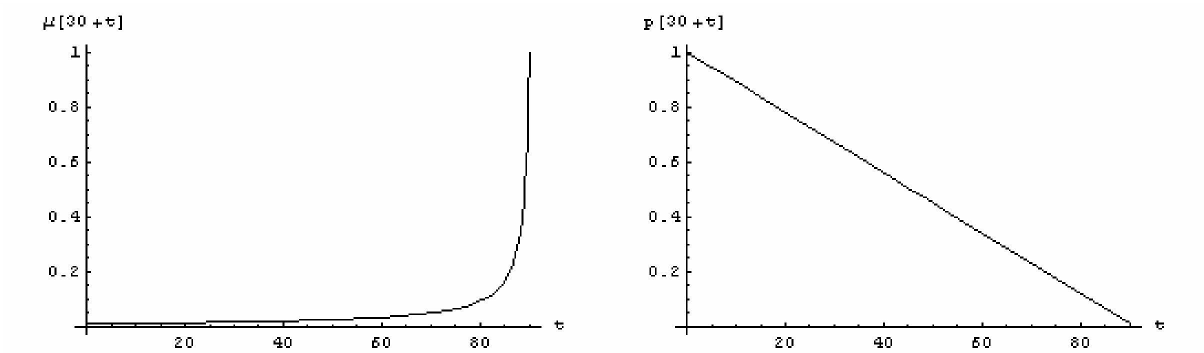
$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -[\ln(1-F_x(t)]' = -[\ln(1-t/(\omega-x)]' \\ &= \frac{1}{\omega - x - t},\ 0 < t < \omega - x, \end{aligned} \tag{3.34}$$

kar je naraščajoča funkcija časa t. Verjetnost preživetja je v tem primeru enaka

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds) = \exp(-\int_0^t 1/(\omega - x - s)\, ds) \\ &= 1 - \frac{t}{\omega - x}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Na sliki 3.3 je prikazana jakost smrtnosti ter verjetnosti preživetja trideset let stare osebe, kjer smo za ω privzeli vrednost 121 let (Malačič, 2000, str. 120).

Slika 3.3: Jakost smrtnosti in verjetnosti preživetja– De Moivre



Vir: Lastni izračun

Naslednji zakon smrtnosti je podal *Gompertz* (1825), ki je predpostavil, da jakost smrtnosti raste eksponentno. Predpostavka je smiselna za zrele ter starejše generacije in ne potrebujemo predpostavke o obstoju maksimalne starosti ω. Jakost smrtnosti je podana z

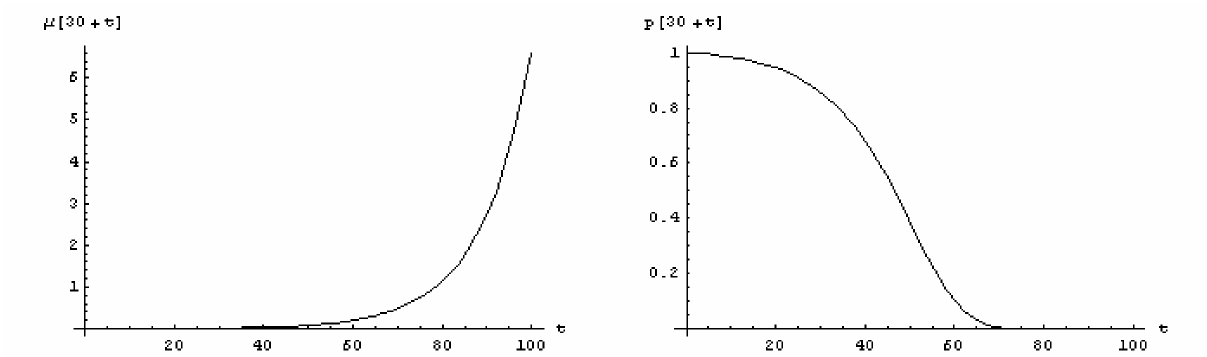
$$\mu_{x+t} = B\, c^{x+t},\ t > 0,\ B > 0,\ c > 1. \tag{3.36}$$

Verjetnost preživetja je enaka

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \exp(-\int_0^t B\, c^{x+s}\ ds) \\
&= g^{c^x (c^t - 1)},
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

kjer je $g = \exp(-B/\ln c)$. Na sliki 3.4 je predstavljena jakost smrtnosti in verjetnosti preživetja za trideset let staro osebo po Gompertzovem zakonu. Proces staranja v tem primeru odraža boljšo sliko kot pri De Moivrejevem zakonu, ki odpravlja, kot smo omenili, predpostavko o obstoju maksimalne starosti človeške rase ω.

Slika 3.4: Jakost smrtnosti in verjetnosti preživetja – Gompertz



Vir: Lastni izračun

Posplošitev Gompertzovega zakona je naredil *Makeham* (1860). Jakosti smrtnosti je dodal konstanto, ki jo interpretiramo kot smrti zaradi nezgod, neodvisnih od starosti,

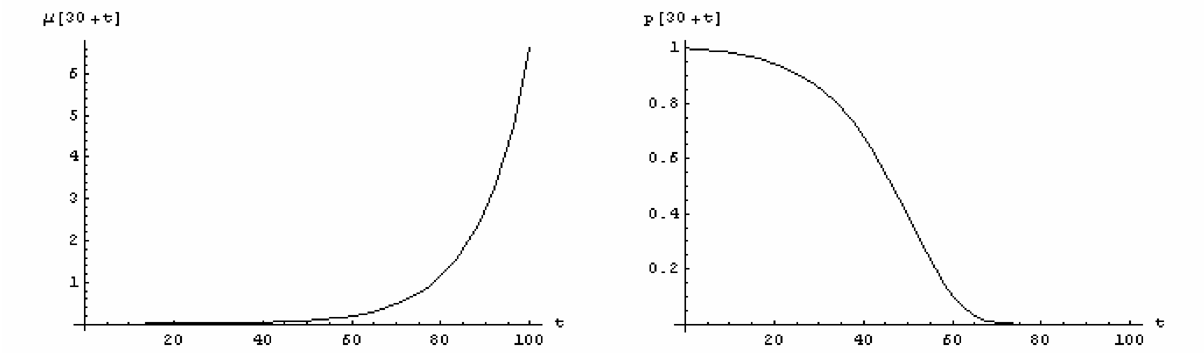
$$
\mu_{x+t} = A + B\, c^{x+t},\ t > 0,\ A > 0,\ B > 0,\ c > 1. \tag{3.38}
$$

Verjetnost preživetja je v tem primeru enaka

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \exp(-\int_0^t A + B\, c^{x+s}\ ds) \\
&= s^t g^{c^x (c^t - 1)},
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

kjer je $g = \exp(-B/\ln c)$ in $s = \exp(-A)$. Na sliki 3.5 je predstavljena jakost smrtnosti in verjetnosti preživetja za trideset let staro osebo za primer Danske, kjer imajo konstante naslednje vrednosti: $A = 5 \cdot 10^{-4}$, $B = 7{,}5858 \cdot 10^{-5}$ in $c = 1{,}09144$ (Norberg, 2001, str. 14).

Slika 3.5: Jakost smrtnosti in verjetnosti preživetja – Makeham



Vir: Lastni izračun

Poseben primer zakonov smrtnosti je konstantna jakost smrtnosti, ki jo dobimo če v Gompertzovem zakonu izberemo $c = 1$ ali če v Makehamovem zakonu izberemo $B = 0$. Porazdelitev slučajne spremenljivke T_x je v tem primeru kar eksponentna porazdelitev. V matematičnem smislu je omenjena porazdelitev lahko doumljiva, vendar ne odraža realne človeške smrtnosti.

Weibull (1939) je predpostavil, da jakost smrtnosti raste kot potenca časa t, kar zapišemo kot

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n, \tag{3.40}$$

kjer sta konstanti $k > 0$ in $n > 0$. Verjetnost preživetja je podana z

$${}_t p_x = \exp\left(-\frac{k}{n+1}\left[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}\right]\right). \tag{3.41}$$

3.2.3 Vpliv selekcije

Tablice smrtnosti so narejene za točno določeno skupino ljudi, razdeljeno po faktorjih, kot so spol, generacija, tip zavarovancev... Začetna starost x ima v tablicah pomembno vlogo, kar lahko pokažemo na primeru življenjskega zavarovanja. Dejstvo je, da je oseba, ki sklene danes življenjsko zavarovanje, boljšega zdravja kot oseba, ki ga je kupila pred več leti, kljub enakim faktorjem (starost…). Ta učinek upoštevajo selektivne tablice smrtnosti, kjer so verjetnosti smrti razdeljene glede na pristopno starost. Z $q_{[x]+t}$ označimo verjetnost smrti v naslednjem letu za $(x+t)$ let staro osebo ob pristopni starosti x let. Selekcija vodi do naslednje neenakosti

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots . \tag{3.42}$$

Efekt selekcije običajno oslabi po nekaj letih, recimo r letih, kar imenujemo selektivna perioda. Tablice, ki jih uporabljamo potem, ko poteče to obdobje, se imenujejo ultimativne tablice smrtnosti. V primeru, ko so tablice smrtnosti odvisne samo od starosti x, jih imenujemo agregatne tablice smrtnosti.

4. ANALIZA UPORABNOSTI MARKOVSKIH PROCESOV

4.1 Markovske verige

V poglavju 3.1 smo predstavili enostaven model preživetja, katerega uporabljamo pri vrednotenju zavarovalniških produktov, ki so definirani z dvemi stanji (živ ter mrtev). Bolj kompleksni zavarovalniški produkti imajo v splošnem več stanj. Kot primer lahko navedemo zavarovanje za (določene težke) bolezni, kjer imamo tri stanja: zdrav, mrtev ter bolan. V vsakem primeru, ne glede na kompleksnost zavarovalniškega produkta, bo izplačilo zavarovalnice zavarovancu slučajna spremenljivka. Porazdelitev te slučajne spremenljivke je osnova za izračun premij, rezervacij ter za uravnavanje tveganj.

Markovske verige so matematično orodje s katerim lahko modeliramo tudi zahtevnejše zavarovalniške produkte. Če želimo določen model uporabljati, moramo poznati nekaj osnovnih podatkov: verjetnosti prehodov, množico stanj, čase prehodov…Pomembno je tudi dejstvo, da je čas ključnega pomena, saj se verjetnosti prehodov spreminjajo skozi čas. To dejstvo nam poveča množico stanj za dimenzijo opazovanega časa.

4.1.1 Markovske verige v diskretnem času

Z markovsko verigo v diskretnem času označimo markovski proces v diskretnem času s končno ali števno množico stanj S. Predstavljamo si jo lahko kot delec, ki preskakuje iz stanja v stanje v trenutkih $t = 0, 1, 2...$ Delec je pozabljiv v smislu, da se bo odločil kam skočiti samo na osnovi tega kjer je.

Matematičen opis oziroma definicija markovske verige v diskretnem času je naslednja: zaporedje slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, X_2 ...$ z vrednostmi v (števni) množici stanj S, je markovska veriga, če velja

$$\mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, ..., X_0 = i_0) = \mathrm{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i), \tag{4.1}$$

za vsa stanja $i_0, ..., i_{n-2}, i, j \in S$, kar je matematičen zapis zgoraj omenjene pozabljivosti (Bühlmann, 1970, str. 32). Lastnosti (4.1) pravimo tudi lastnost Markova. Pogojno verjetnost na desni strani enakosti (4.1) v splošnem označimo s $p_{ij}^{(m,n)}$ in jo imenujemo verjetnost prehoda (iz stanja i v stanje j med časom m in n).

Verjetnosti prehodov $p_{ij}^{(m,n)}$ markovske verige v dikretnem času zadoščajo enačbam Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(m,n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)} p_{kj}^{(l,n)}, \tag{4.2}$$

za vsa stanja $i, j \in S$ in cele čase $m < l < n$. Enačbe Chapman-Kolmogorov dobimo s pomočjo markovske lastnosti in zakona polne verjetnosti

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m,n)} &= \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_n = j, X_l = k \mid X_m = i) = \sum_{k \in S} \frac{\mathrm{P}(X_n = j, X_l = k, X_m = i)}{\mathrm{P}(X_m = i)} \\ &= \sum_{k \in S} \frac{\mathrm{P}(X_n = j \mid X_l = k, X_m = i)\, \mathrm{P}(X_l = k, X_m = i)}{\mathrm{P}(X_m = i)} \\ &= \sum_{k \in S} \mathrm{P}(X_n = j \mid X_l = k)\, \mathrm{P}(X_l = k \mid X_m = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m,l)}\ p_{kj}^{(l,n)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Iz enačb Chapman-Kolmogorov lahko dobimo splošne verjetnosti prehodov v obliki verjetnosti prehodov enega koraka $p_{ij}^{(n,n+1)}$. Tako je porazdelitev markovske verige določena, ko poznamo verjetnosti prehoda enega koraka $p_{ij}^{(n,n+1)}$ ter začetno verjetnostno porazdelitev $q_j = \mathrm{P}(X_0 = j)$. Iz omenjenih podatkov lahko izračunamo verjetnost poljubne poti

$$\mathrm{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = q_{i_0}\, p_{i_0 i_1}^{(0,1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(n-1,n)}. \tag{4.4}$$

Pravimo, da je markovska veriga (časovno) homogena, če za vse $m, n \geq 0$ in $n \geq m$ velja naslednja enakost

$$p_{ij}^{(m,n)} = p_{ij}^{(0,n-m)}. \tag{4.5}$$

Verjetnosti prehoda enega koraka v primeru homogene markovske verige zapišemo kot $p_{ij}^{(n,n+1)} = p_{ij}$, splošne verjenosti prehoda pa so odvisne samo od časovne razlike $p_{ij}^{(m,l+m)} = p_{ij}^{(l)}$ (verjetnost prehoda l-korakov). Enačbe Chapman-Kolmogorov v primeru homogenih markovskih verig preidejo v

$$p_{ij}^{(n-m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(l-m)} \, p_{kj}^{(n-l)} \text{ za } m < l < n. \tag{4.6}$$

Če verjetnosti prehoda enega koraka zložimo v matriko prehodov $P = (p_{ij})_{i,j \leq N}$, potem verjetnost prehoda l-korakov dobimo s potenciranjem matrike P

$$p_{ij}^{(l)} = P^l{}_{ij}, \tag{4.7}$$

kar sledi direktno iz enačb Chapman-Kolmogorov. Če s $P(n)$ označimo matriko $P(n) = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \leq N}$, enačbe Chapman-Kolmogorov zapišemo kot $P(m+n) = P(m)P(n)$, od koder sledi $P(n) = P(1)^n = P^n$.

4.1.2 Slučajni sprehod

Slučajni sprehod je primer uporabe markovskih verig v diskretnem času. Definiran je kot $X_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, kjer slučajne spremenljivke Y_j predstavljajo korake sprehoda. So neodvisne, z verjetnostno porazdelitvijo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y_j = 1) &= p, \\ \mathrm{P}(Y_j = -1) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Lahko je preveriti, da velja markovska lastnost

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X_n = j \mid X_1 = i_1, \ldots, X_m = i) \\ &= \mathrm{P}(X_m + Y_{m+1} + \ldots + Y_n = j \mid X_1 = i_1, \ldots, X_m = i) \\ &= \mathrm{P}(Y_{m+1} + \ldots + Y_n = j - i) \\ &= \mathrm{P}(X_n = j \mid X_m = i). \end{aligned}$$

Matrika prehodov je neskončna

$$P=\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & 0 & p & & & & \\ & 1-p & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1-p & 0 & p & \\ & & & & 1-p & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Verjetnosti prehoda n-korakov izračunamo kot

$$p_{ij}^{(n)}=\begin{cases} \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{\frac{n+j-i}{2}}(1-p)^{\frac{n+i-j}{2}}, & \text{za } 0\le n+j-i\le 2n \text{ in je } n+j-i \text{ sodo število} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

4.1.3 Slučajna izplačila

Naj bo $X_0, X_1, X_2, \ldots$ homogena markovska veriga. V vsakem trenutku n bo delec dobil plačilo r_i, če bo takrat v stanju i (izplačilo r_i je lahko tudi negativno). V korakih $0,1,2,\ldots,M$ bo delec dobil izplačila, ki so slučajne spremenljivke. Celotno izplačilo Y zapišemo kot

$$Y=\sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k I(X_l=k).$$

Če začnemo v stanju i in označimo matematično upanje celotnega izplačili z E_i, velja

$$
\begin{aligned}
E_i(Y) &= E_i(\sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k I(X_l = k)) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k E_i(I(X_l = k)) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k P_i(X_l = k) \\
&= \sum_{l=0}^{M}\sum_{k\in S} r_k p_{ik}^{(l)}
\end{aligned}
$$

Upoštevali smo lastnost indikatorja, ki lahko zavzame samo vrednosti 0 ali 1.

4.2 Odsekoma zvezni markovski procesi

Časovno zvezen markovski proces X_t, $t \geq 0$ z diskretno (končno ali števno) množico stanj S, imenujemo odsekoma zvezen markovski proces. Verjetnosti prehodov

$$P_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i) \quad (s \leq t), \tag{4.8}$$

zadoščajo enačbam Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(s,u) P_{kj}(u,t) \quad (\forall \ \ s < u < t), \tag{4.9}$$

pri čemer je to posledica lastnosti Markova (Bühlmann, 1970, str. 40). Če s $P(s,t)$ označimo matriko z elementi $P_{ij}(s,t)$, enačbe Chapman-Kolmogorov preidejo v

$$P(s,t) = P(s,u)P(u,t) \quad (\forall \ \ s < u < t). \tag{4.10}$$

Če poznamo matriko prehodov $P(s,t)$ in začetno verjetnostno porazdelitev $q_i = P(X_0 = i)$, lahko z uporabo lastnosti Markova zapišemo splošne verjetnosti procesa X_t. Torej za $0 < t_1 < \ldots < t_n$ velja

$$P(X_0 = i, X_{t_1} = j_1, \ldots, X_{t_n} = j_n) = q_i P_{ij_1}(0,t_1) \ldots P_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1}, t_n) \tag{4.11}$$

in

$$P(X_{t_1} = j_1, \dots, X_{t_n} = j_n) = \sum_{i \in S} q_i P_{ij_1}(0, t_1) \dots P_{j_{n-1}j_n}(t_{n-1}, t_n)\,. \tag{4.12}$$

Predpostavimo, da so funkcije $P_{ij}(s,t)$ zvezno diferenciabilne, kjer je

$$P_{ij}(s,s) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \tag{4.13}$$

kar implicira na obstoj naslednjih funkcij

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t)\Big|_{t=s} = \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(s, s+h) - \delta_{ij}}{h}\,. \tag{4.14}$$

V nadaljevanju bomo poskušali porazdelitev časa v posameznih stanjih opisati s funkcijami $\sigma_{ij}(s)$. Pri tem je bistvena interpretacija produkta $\sigma_{ij}(s) \cdot h$ pri majhnem h, kar predstavlja odstotek populacije, ki je na intervalu $[s, s+h]$ skočil iz stanja i v stanje j. Zaradi predpostavke o zvezni diferenciabilnosti funkcij $P_{ij}(s,t)$ sledi, da so funkcije $\sigma_{ij}(s)$ zvezne in je količina $\sigma_{ij}(s) \cdot h$ dejansko približek verjetnosti preskoka na intervalu $[s, s+h]$, kar povzema (4.15).

Za $h > 0$ in $h \to 0$ veljajo naslednje enakosti

$$P_{ij}(s, s+h) = \begin{cases} h\sigma_{ij}(s) + o(h) & i \neq j \\ 1 + h\sigma_{ii}(s) + o(h) & i = j \end{cases}, \tag{4.15}$$

pri čemer pravimo, da je funkcija $f(h)$ razreda $o(h)$, če velja $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Razlaga prve vrstice enačbe (4.15) je poenostavitev verjetnosti prehoda iz stanja i v stanje j v zelo kratkem časovnem intervalu $[s, s+h]$ - verjetnost je proporcionalna h in zato funkcijo $\sigma_{ij}(s)$ imenujemo jakost prehoda.

Izračunati želimo $P_{ij}(s, s+t)$ za vse $x, t \geq 0$ in $i, j \in S$. Ogledali si bomo razliko med $P_{ij}(s, s+t+h)$ in $P_{ij}(s, s+t)$, pri čemer bomo upoštevali enačbo (4.15). Velja

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(s, s+t+h) &= P(X_{s+t+h} = j \mid X_s = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{s+t+h} = j, X_{s+t} = k \mid X_s = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{s+t+h} = j \mid X_{s+t} = k) P(X_{s+t} = k \mid X_s = i),
\end{aligned}
$$

pri čemer smo uporabili formulo

$$
P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C) P(B \mid C),
$$

in upoštevali lastnost Markova za prvi člen desne strani enačbe. Sledi

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(s, s+t+h) = \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} (\sigma_{kj}(s+t) \cdot h + o(h)) P_{ik}(s, s+t) \\
+ P_{ij}(s, s+t)(1 - \sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t) \cdot h)
\end{aligned}
$$

Velja

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{ij}(s, s+t+h) - P_{ij}(s, s+t)}{h} = \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} \sigma_{kj}(s+t) P_{ik}(s, s+t) + \frac{o(h)}{h} \\
+ P_{ij}(s, s+t)(-\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t))
\end{aligned}
$$

Pošljemo še $h \to 0$ in dobimo

$$
\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s, s+t) = \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} \sigma_{kj}(s+t) P_{ik}(s, s+t) + P_{ij}(s, s+t)(-\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)).
$$

Če formalno označimo $\sigma_{jl}(s+t) = -\sum_{l \neq j} \sigma_{jl}(s+t)$, dobimo končni rezultat

$$
\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S}^{n} P_{ik}(s,t)\, \sigma_{kj}(t). \tag{4.16}
$$

Jakosti prehodov imajo pomembno vlogo, saj je z njimi določena porazdelitev odsekoma zveznega markovskega procesa. V bistvu smo dobili rezultat odvajanja enačbe (4.9) po času t, kjer upoštevamo, da je $u = t$. To so enačbe Kolmogorova, ki jih zapišemo v matrični obliki kot:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(s,t) = P(s,t)A(t)\,, \tag{4.17}$$

pri čemer je $A(t)$ matrika z elementi $\sigma_{kj}(t)$. Pri izpeljavi enačbe (4.16) smo implicitno predpostavili, da je množica stanj S končna. V tem primeru enačba (4.15) za vsak fiksen s ter i preide v končen sistem linearnih navadnih diferencialnih enačb (v bistvu spremenljivka s in indeks i nastopata samo v začetnem pogoju (4.13)). Podobno ima enačba (4.16) pri dani jakosti prehoda $\sigma_{ij}(t)$ eno samo rešitev kompatibilno z (4.13). Zaradi navedene lastnosti so markovski modeli običajno podani z jakostmi prehodov $\sigma_{ij}(t)$.

Če odvajamo enačbo (4.9) po s in upoštevamo $u = s$, dobimo enačbe Kolmogorova oblike:

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,t) = A(s)P(s,t)\,, \tag{4.18}$$

Pri normalnih pogojih sta oba zapisa enačb Kolmogorova ekvivalentna, kar pa še velja v primeru, ko so jakosti prehodov omejene $\sup_{i,j}\left|\sigma_{ij}(t)\right| < \infty$, za vsak $t > 0$. V primeru, ko ta pogoj ne velja, ima drugi zapis večjo fundamentalno težo.

Kot rezultat enačbe (4.15) sledi $\sigma_{ij}(s) \geq 0$ za $i \neq j$ in $\sigma_{ii}(s) \leq 0$. Če odvajamo identiteto $\sum_{j\in S} P_{ij}(s,t) = 1$ po t v točki $t = s$, dobimo:

$$\sigma_{ii}(s) = -\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}(s)\,. \tag{4.19}$$

Od tod sledi, da ima vsaka vrstica matrike A vsoto nič.

Za konec tega poglavja podajmo samo razmišljanje v primeru, ko so jakosti prehodov konstantne. V tem primeru dobimo homogeno markovsko verigo v zveznem času, kar aktuarsko pomeni, da se osebe ne starajo.

4.2.1 Ekvivalenca s Poissonovim procesom – homogeni primer

V naslednji dveh razdelkih bomo prikazali uporabnost markovskih procesov v zavarovalništvu. Intuitivno lahko sklepamo, da so markovski procesi močnejše orodje, s katerim ob privzetku določenih začetnih parametrov, lahko ekvivalentno zapišemo modele, ki smo jih že predstavili v prejšnjih poglavjih. Za začetek si oglejmo Poissonov proces, ki smo ga opisali v poglavju (2.5.3). Gre za markovski proces z množico stanj $S = \{0,1,2\ldots\}$ in jakostmi prehodov

$$\sigma_{ij}(s) = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}.$$

Matrika A je v tem primeru naslednje oblike:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & 0 \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & \lambda \\ 0 & & & & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Očitno je, da gre za Poissonov proces, ki ima neodvisne, stacionarne Poissonovo porazdeljene prirastke. Lahko je tudi dokazati, da gre za ekvivalentni definiciji.

Glavna uporabnost Poissonovega procesa, je v bazičnem procesu štetja: naj X_t modelira število pojavov določenega dogodka v času $[0,t]$ (npr. število avtomobilskih nesreč). Iz matrike A sledi:

$$\begin{aligned} &P_{i0}'(t) = -\lambda P_{i0}(t) \\ &P_{ij}'(t) = \lambda P_{ij-1}(t) - \lambda P_{ij}(t) \quad j > 0 \end{aligned}$$

z začetnim pogojem $P_{i0}(0) = \delta_{i0}$. Iz prve enačbe dobimo $P_{i0}(t) = \delta_{i0} e^{-\lambda t}$. Izračunamo še $P_{0j}(t)$ za vse t. Rešujemo enačbo $P_{0j}'(t) = \lambda P_{0j-1} - \lambda P_{0j}(t)$, kjer uporabimo metodo variacije parametra. Splošna rešitev homogene enačbe $P_{0j}'(t) = -\lambda P_{0j}(t)$ je $\alpha e^{-\lambda t}$. Poiskati je potrebno še posebno (partikularno) rešitev oblike $\alpha_j(t) e^{-\lambda t}$. Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo $\alpha_j'(t) = \lambda \alpha_{j-1}(t)$, od koder dobimo rešitev $\alpha_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}$. Splošno rešitev zapišemo kot:

$$P_{0j}(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} + \alpha e^{-\lambda t},$$

z začetnim pogojem $P_{0j}(0)=\delta_{oj}$, od koder sledi da je $\alpha=0$. Podobno dobimo splošne verjetnosti prehodov:

$$P_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} & j\geq i\\ 0 & j<i\end{cases}.$$

Zdaj lahko analiziramo lastnosti prirastkov procesa. Opazimo, da je proces časovno homogen in tudi homogen v množici stanj: $P_{ij}(t)=P_{i+l\ j+l}(t)$.

Z uporabo zadnje lastnosti in lastnosti Markova za $s_0<s_1<\ldots<s_n<s<t$ velja:

$$\begin{aligned}&P(X_t-X_s=j\mid X_{s_0}=i_0,X_{s_1}=i_1,\ldots,X_{s_n}=i_n,X_s=i)\\&=P(X_t=i+j\mid X_s=i)=P_{i\,i+j}(t-s)=P_{0j}(t-s)\\&=\frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}\end{aligned}$$

kar dokazuje, da je prirastek X_t-X_s neodvisen od zgodovine procesa $(X_u,u\leq s)$ in ima stacionarno Poissonovo porazdelitev.

Ker se Poissonov proces X_t spremeni samo pri skokih, ga lahko opišemo tudi preko časov, v katerih so se zgodili skoki. S $T_0,T_1,T_2\ldots$ označimo čase, v katerih je bil proces v stanju 0,1,2…Velja $X_{T_0}=1$, $X_{T_0+T_1}=2\ldots$, kjer predpostavimo zveznost z desne.

Verjetnostna porazdelitev časa T_j preživetega v stanju j Poissonovega procesa je podana z:

$$P(T_0>t\mid X_0=0)=P(X_t=0\mid X_0=0)=P_{00}(t)=e^{-\lambda t},$$

kar z drugimi besedami pomeni, da ima T_0 eksponentno porazdelitev s parametrom λ. Velja:

$$\begin{aligned}&P(T_1>t\mid X_0=0,T_0=s)=P(X_{t+s}=1\mid X_0=0,T_0=s)\\&=P(X_{t+s}-X_s=0\mid X_0=0,T_0=s)=P(X_{t+s}-X_t=0),\\&=P_{00}(t)=e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da so prirastki $X_{t+s} - X_t$ neodvisni od zgodovine procesa (do časa s). Zgornja izpeljava posledično pomeni, da je T_1 neodvisen od T_0 in da ima enako eksponentno porazdelitev. Podobno bi prišli do zaključka, da je $T_0, T_1, T_2 \ldots$ zaporedje neodvisnih, eksponentno porazdeljenih slučajnih spremenljiv s parametrom λ.

Večina aktuarskih modelov vsebuje jakosti prehodov, ki so odvisne od starosti opazovane osebe. Kljub temu je glavne ideje lažje predstaviti na časovno homogenih procesih, kjer velja $P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0, t-s) = P_{ij}(t-s)$ in kjer so jakosti prehodov σ_{ij} časovno neodvisne. Tako tudi eksponentna lastnost časov Poissonovega procesa ni naključje. Pozabljivost procesa zapišemo kot

$$P(T > t + u \mid T > t) = P(T > u),$$

kar določa eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke in je obvezni pogoj, ki velja za čase časovno homogenega Markovskega procesa.

Tako je prvi čas $T_0 = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$ časovno homogenega odsekoma zveznega Markovskega procesa z jakostmi prehodov σ_{ij} eksponentno porazdeljen s parametrom $\lambda_i = -\sigma_{ii} = \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}$, kar z drugimi besedami pomeni

$$P(T_0 > t \mid X_0 = i) = e^{-\lambda_i t}.$$

Zgornjo enačbo dokažemo s pomočjo diskretizacije časa. Jasno je, da je dogodek $\{T > t\} = \{X_s = X_0, 0 \leq s \leq t\}$ težko obvladljiv, saj vsebuje kontinuum časov $0 \leq s \leq t$. Definirajmo dogodke

$$B_n = \left\{ X_{\frac{lt}{2^n}} = X_0, l = 1,2,...,2^n \right\}.$$

Tako je

$$P(B_n \mid X_0 = i) = (P_{ii}(t/2^n))^{2^n} = (1 + \sigma_{ii} t / 2^n + o(1/2^n))^{2^n}.$$

Ker velja $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ in $\{T_0 > t\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, sledi

$$
\begin{aligned}
P(T_0 > t \mid X_0 = i) &= P(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \mid X_0 = i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{m=1}^{n} B_m \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P(B_n \mid X_0 = i) \\
&= \lim_{n\to\infty} (1+\sigma_{ii} t / 2^n + o(1/2^n))^{2^n} \\
&= e^{\sigma_{ii} t} = e^{-\lambda_i t}
\end{aligned}
$$

Pri Poissonovem procesu ima čas skokov precejšnjo težo. V splošnem moramo definirati tudi stanje, v katerega bo proces prešel (skočil). Skok iz stanja $X_0 = i$ v stanje $X_{T_0} = j$ se bo zgodil z verjetnostjo proporcionalno jakosti prehoda σ_{ij}. Velja tudi, da je X_{T_0} neodvisen od T_0. Očitno za $i \neq j$ velja

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t+h} = j, t < T_0 \leq t+h \mid X_0 = i) \\
&= P(X_{t+h} = j, T_0 > t \mid X_0 = i) \\
&= P(X_{t+h} = j \mid X_0 = i, T_0 > t) P(T_0 > t \mid X_0 = i) \\
&= P(X_{t+h} = j \mid X_s = i, 0 \leq s \leq t) e^{-\lambda_i t} \\
&= P_{ij}(h) e^{-\lambda_i t}
\end{aligned}
$$

Če dobljeno delimo s h limitiramo proti 0, je skupna verjetnostna porazdelitev oziroma gostota »spremenljivk« X_{T_0} in T_0 pogojno na $X_0 = i$ enaka

$$\sigma_{ij} e^{-\lambda_i t} .$$

Z drugimi besedami to pomeni enakost s produktom verjetnostne gostote časa $\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ in σ_{ij} / λ_i. To dokazuje, da je verjetnost skoka iz stanja i v stanje j, za $i \neq j$ enaka

$$P(X_{T_0} = j \mid X_0 = i) = \sigma_{ij} / \lambda_i$$

in posledično neodvisnost X_{T_0} in T_0.

Dobljeni rezultat velja tudi za kasnejše skoke, kar je posledica lastnosti Markova. Torej, ko proces pride v stanje j, ostane tam eksponentno porazdeljeno časa, kjer je čas porazdeljen s parametrom λ_j. V stanje k preide z verjetnostjo σ_{jk} / λ_j.

Kot končen rezultat tega razdelka navedimo še povprečno vrednost časa, ki ga proces prebije v stanju j - ta je enaka $1/\lambda_j$. Podatek ima svojo težo, predvsem v primerih, ko jakostim prehoda določamo numerične vrednosti.

4.2.2 Ekvivalenca z modelom preživetja – nehomogeni primer

V poglavju 3.1 smo kot pomembno količino v razpravi o porazdelitvah preostale življenjske dobe definirali jakost smrtnosti μ_x. Intuitivno nam jakost smrtnosti predstavlja odstotek populacije stare x let, ki bo umrla v času $[x, x+1]$. Tako za funkcijo preživetja velja

$$S_x(t) = \exp(-\int_x^t \mu_u du).$$

Pri modelu preživetja imamo dve stanji: živ in mrtev. Jakost prehoda iz stanja živ v stanje mrtev je enaka $\mu(t)$ - torej je kar jakost smrtnosti. Matrika jakosti prehodov je enaka

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\mu(t) & \mu(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemer smo upoštevali dejstvi, da je vsota vsake vrstice v matriki A enaka 0, ter da se oseba, ko pride v stanje mrtev ne vrne več v stanje živ. Iz enačb Kolmogorova sledi

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) = -\mu(t) P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t).$$

Ob upoštevanju začetnega pogoja $P_{\check{Z}\check{Z}}(s,s) = 1$ sledi

$$P_{\check{Z}\check{Z}}(s,t) = \exp(-\int_s^t \mu(x) dx).$$

To nam da ekvivalenco s funkcijo preživetja, saj je verjetnost, da bo oseba stara s let preživela še periodo časa w, enaka

$${}_w p_s = S_s(w) = P_{\check{Z}\check{Z}}(s, s+w) = \exp(-\int_s^{s+w} \mu_s(x) dx) = \exp(-\int_0^w \mu_s(s+y) dy).$$

Zadnja enačba dokazuje nujo po časovno odvisnih jakostih smrtnosti in po drugih aktuarskih modelih – konstantna jakost smrtnosti μ bi pripeljala do časovno neodvisne verjetnosti ${}_w p_s$, kar je absurden rezultat.

Zgornji rezultat je ena instanca splošne formule, ki smo jo podali v uvodu poglavja.

4.2.3 Integralska oblika enačb Kolmogorova

Naj bo X_t odsekoma zvezen Markovski proces. Z R_s bomo označili slučajni čas med časom s in naslednjim skokom

$$\{R_s > w, X_s = i\} = \{X_u = i, s \le u \le s + w\}. \tag{4.20}$$

Pri modelu preživetja bi po zadnji formuli prejšnjega razdelka izračunali verjetnost, da bo $R_s > w$, pri pogoju, da je proces v času s v stanju *živ*. V splošnem velja

$$P(R_s > w \mid X_s = i) = \exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)du). \tag{4.21}$$

Torej za stanje procesa $X_s^{(+)} = X_{s+R_s}$ (stanje v katerega bo proces skočil) sledi podoben zaključek, kot pri homogenem primeru:

$$P(X_s^{(+)} = j \mid X_s = i, R_s = w) = \frac{\sigma_{ij}(s+w)}{\lambda_i(s+w)}. \tag{4.22}$$

Dobljeno ni samo lepa lastnost odsekoma zveznih markovskih procesov, ampak je tudi zelo uporabna enačba za izpeljavo integralske oblike enačb Kolmogorova.

$$\begin{aligned}
&P_{ij}(s,t) = P(X_t = j \mid X_s = i) \\
&= \sum_{l \ne i} \int_0^{t-s} P(X_t = j \mid X_s = i, R_s = w, X_s^{(+)} = l)\sigma_{il}(s+w)\exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)du)dw \\
&= \sum_{l \ne i} \int_0^{t-s} P_{lj}(s+w,t)\sigma_{il}(s+w)\exp(-\int_s^{s+w} \lambda_i(u)du)dw
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Zadnje predstavlja integralsko obliko enačb Kolmogorova – v to se lahko prepričamo z odvajanjem po t. Sama enačba sledi intuiciji, saj je stanje j različno od i in zato mora proces po nekem času skočiti iz stanja i. Po enačbi (4.21) se bo prvi skok po času s zgodil ob času $s+w$ z verjetnostjo gostoto

$$\lambda_i(s+w)\exp(-\int_s^{s+w}\lambda_i(u)du). \tag{4.24}$$

Po enačbi (4.22) bo proces skočil v stanje l po periodi $[s, s+w]$ z verjetnostjo $\sigma_{il}(s+w)/\lambda_i(s+w)$. Ostane še efekt prehoda iz stanja l v j v časovnem intervalu $[s+w, t]$.

Ko je $i=j$ se doda še dodatni člen $\exp(-\int_s^t \lambda_i(u)du)$, saj je proces lahko v stanju i celoten časovni interval $[s,t]$.

Če izhajamo iz zadnjega skoka pred časom t namesto iz prvega skoka po času s, dobimo še en tip integralske oblike enačb. Za $i \neq j$ velja

$$P_{ij}(s,t) = \sum_{k\neq j}\int_0^{t-s} P_{ik}(s,t-w)\sigma_{kj}(t-w)\exp(-\int_{t-w}^{t}\lambda_j(u)du)dw. \tag{4.25}$$

4.3 Zahtevnejši modeli

4.3.1 Multipli-dekrementni model

Pri tem modelu so edini možni prehodi iz stanja 0 v stanje j, za $j=1,\ldots,n$. Torej so jakosti prehodov $\sigma_{ij}(x)$ matematično gledano enake 0 za $i \neq 0$ in edina jakost prehoda različna od 0 je $\sigma_{0j}(x)$. Verjetnosti prehodov so podane z

$$P_{0j}(x, x+t) = \exp(-\int_x^{x+t}\sigma_{0j}(x+u)du),$$

pri čemer smo upoštevali, da je verjetnost skoka iz stanja 0 na časovnem intervalu $[x, x+t]$ enaka

$$\sum_{j=1}^{n} P_{0j}(x, x+t) = \exp(-\int_{x}^{x+t} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{0j}(x+u)du),$$

4.3.2 Model zakonskega stanu

Opazovana oseba se lahko nahaja v naslednjih stanjih: še ni bila poročena, je poročena, ovdovela, ločena, mrtva. V tem primeru definiramo odsekoma zvezen markovski proces na prostoru zgoraj omenjenih stanj.

4.3.3 Model števila škod pri voznikih

Naj bo X_t časovno homogen odsekoma zvezen markovski proces, ki opisuje kumulativno število škod, ki jih je povzročil voznik v časovnem intervalu $[0,t]$. Jakosti prehodov so podane z

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \alpha + i\beta & \text{če je } j = i+1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

kar z drugimi besedami pomeni, da se stopnje nesreč povečujejo linearno skozi voznikov nezgodni dosje. Matrika prehodov procesa je tako enaka

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & & 0 \\ & -\alpha-\beta & \alpha+\beta & \\ & & -\alpha-2\beta & \alpha+2\beta \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Enačbe Kolmogorova za začetno verjetnost $P_{0j}(t)$ so podane s

$$\begin{aligned} P_{00}'(t) &= -\alpha P_{00}(t) \\ P_{0j}'(t) &= (\alpha + (j-1)\beta)P_{0\,j-1}(t) - (\alpha + j\beta)P_{0j}(t), \quad j > 0 \end{aligned}.$$

Enačbe rešimo podobno kot smo to storili pri Poissonovem procesu. Rešitev iščemo v obliki

$$P_{0j}'(t) = \gamma_j(t)e^{-(\alpha+j\beta)t},$$

pri čemer funkcije $\gamma_j(t)$ zadoščajo

$$\gamma_j'(t) = \gamma_{j-1}(t)(\alpha + (j-1)\beta)e^{\beta t}.$$

To rešimo z uporabo rekurzije, pri čemer upoštevamo začetni pogoj $\gamma_j(0) = \delta_{0j}$. Dobimo

$$\gamma_0(t) = 1,\ \gamma_1(t) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1),\ \gamma_2(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta^2}(e^{\beta t} - 1)^2.$$

Splošni člen je enak

$$\gamma_j(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\,\beta^j}(e^{\beta t} - 1)^j,$$

kar nas pripelje do rešitve

$$P_{0j}(t) = \frac{\alpha(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+(j-1)\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-\alpha t}(1 - e^{-\beta t})^j.$$

5. ČASOVNA TER GEOGRAFSKA PRIMERJAVA REŠITEV ODSEKOMA ZVEZNEGA MARKOVSKEGA PROCESA S TREMI STANJI

5.1 Vrednotenje zavarovalnih produktov

Razvoj moderne finančne matematike je v veliki meri vplival na pojav novih metod vrednotenja zavarovalnih produktov. Vrednotenje klasičnih življenjskih produktov je potekalo do preteklih nekaj let izključno z uporabo principa ekvivalence ob konstantni obrestni meri, ki se uporablja že od antike naprej. Danes se večinoma uporablja metoda, ki jo imenujemo testiranje dobičkonosnosti zavarovalnega produkta (uporabljajo se seveda tudi druge bolj ali manj znane metode). Ta je zelo uporabna pri vrednotenju življenjskih zavarovanj z naložbenim tveganjem. Tako se obravnava pričakovani denarni tok posamezne zavarovalne pogodbe skozi njeno zavarovalno dobo in analizira se vpliv različnih parametrov (obrestna mera, umrljivost, jakost odkupov zavarovalnih pogodb, stroški…) na vrednost določene mere (npr. da zavarovalnica lahko začne s prodajo določenega produkta, mora pokriti začetne stroške oziroma povedano drugače, zavarovalnica mora rezervirati/vložiti določen začetni kapital. Mera bi v tem primeru bila donosnost vloženega kapitala.).

Omenjeno predstavlja vrednotenje zavarovalnih produktov danes. Vendar nas že v bližnji prihodnosti čakajo korenite spremembe na tem področju. Z vpeljavo novih mednarodnih računovodskih standardov naj bi se vpeljala tako imenovana »fair value« metoda - metoda tržno konsistentne oz. poštene vrednosti - za vrednotenje obveznosti in s tem posledično tudi za vrednotenje samih zavarovalnih produktov. Po tej metodi se vsi denarni tokovi diskontirajo s trenutno aktualnimi diskontnimi faktorji, kar pomeni večjo povezanost vrednosti zavarovalnih obveznosti/produktov z vrednostmi naložb, na katere so vezane zavarovalne obveznosti.

Da gre vrednotenje zavarovalnih produktov v smer večje povezanosti med gibanjem naložb ter samimi parametri pri vrednotenju nam priča tudi spodnja tabela, kjer je predstavljeno gibanje povprečne donosnosti ob izdaji slovenskih obveznic. Vidimo' da zniževanja obrestnih mer pri vrednotenju obveznosti/produktov ne bo zadostovalo za doseganje večje korelacije med kapitalskimi trgi in vrednostjo obveznosti/produktov.

Tabela 5.1: Dolgoročni vrednostni papirji RS v SIT (od leta 2001, prve izdaje)

Vrednostni papir	**Datum izdaje**	**Povprečna donosnost ob izdaji**	**Ročnost (v letih)**
RS22	13.2.2001	TOM + 4,79%	5
RS25 1.izdaja	18.4.2001	TOM + 4,94%	5
RS27 1.izdaja	4.12.2001	TOM + 4,13%	5
RS34 1.izdaja	18.2.2002	TOM + 4,04%	5
RS35 1.izdaja	18.3.2002	TOM + 3,91%	5
RS37 1.izdaja	19.4.2002	TOM + 3,83%	5
RS40 1.izdaja	31.5.2002	TOM + 3,64%	5
RS41 1.izdaja	17.6.2002	TOM + 3,51%	5
RS43 1.izdaja	15.10.2002	TOM p.a. + 2,89%	5
RS52 1.izdaja	8.4.2003	6,420%	5
RS56 1.izdaja	11.2.2004	4,910%	5
RS60 1.izdaja	31.3.2005	3,753%	5
RS54 1.izdaja	15.10.2003	5,750%	10
RS57 1.izdaja	15.3.2004	4,928%	10
RS59 1.izdaja	15.1.2005	4,117%	11

Vir: MF

V zadnjem času smo bili aktuarji in naše metode pogosto deležni kritik. Gre namreč za to, da ljudje pogosto zanemarjajo dejstvo, da se (finančno) določanje cen precej razlikuje od (aktuarskega) vrednotenja obveznosti oziroma oblikovanj rezervacij (Dhaene, 2005).

Poglejmo si naslednji preprost primer. Recimo da smo prodali pogodbo, s katero smo se zavezali, da bomo kupcu čez leto dni plačali 1,03 evra. Kupec nam za pogodbo plača en evro, kolikor znaša tržna vrednost pogodbe. Predpostavimo tudi, da med trajanjem pogodbe ni nobene nevarnosti bankrota, kar primer še poenostavi.

Glavno vprašanje, ki si ga lahko postavimo, je: kakšno naložbeno strategijo naj izberemo, da bomo lahko na koncu leta izpolnili našo obveznost? Seveda lahko vprašanje razširimo in se vprašamo tudi koliko bomo pri takšni strategiji zaslužili?

Pri obravnavi zgornjega primera bo finančni ekonomist takoj ugotovil, da je letna obrestna mera, če na trgu ni arbitraže, triodstotna. Zanj je jasno, da je pogodbo mogoče stoodstotno zavarovati, kar stori z nakupom netveganega vrednostnega papirja z ročnostjo enega leta. Po enem letu bo obveznost izpolnjena s stoodstotno gotovostjo. Med trajanjem pogodbe torej nismo izpostavljeni nikakršnemu tveganju. Vendar pa ima takšna strategija veliko pomanjkljivost: s prodajo pogodbe nismo nič zaslužili.

Aktuarji gledamo na zgornje vprašanje tudi drugače. Za poplačilo prihodnjih obveznosti lahko vnaprej oblikujemo rezervacije. Del sredstev lahko vložimo v skladu z neko (tvegano) strategijo. Seveda je na tem mestu aktualno vprašanje koliko naložiti v tvegane naložbe. Recimo da znesek tvegane naložbe določimo tako, da je verjetnost izplačila končnih obveznosti dovolj velika (ali pa poljubno velika).

Očitno oba primera strmita h končnemu cilju – poplačilo obveznosti iz pogodbe. Vendar zakaj bi si sploh želeli privzeti aktuarski pristop, ki kot vhodni parameter jemlje našo (ne)nagnjenost k tveganju. Z naložbo enega evra v netvegano naložbo se namreč lahko povsem izognemo tveganju in si zagotovimo miren spanec ter stoodstotno izplačilo obveznosti.

Torej, če želimo biti stoodstotno prepričani, da bomo izpolnili našo obveznost v prihodnosti, se bomo odločili za finančno strategijo. V tem primeru se obe strategiji ujemata, kar posledično pomeni, da prihodek od prodaje v celoti naložimo v netvegano naložbo.

Seveda ima zgornja gotovost svojo ceno. Ko izberemo netvegano naložbeno strategijo in se s tem zavarujemo pred tveganji, se zavarujemo tudi pred morebitnimi dobički, saj nam naložba povrne točno znesek, ki je enak obveznostim iz pogodbe. V praksi se lahko zgodi, da zavarovanje pred tveganji ne bo mogoče in bo cena, ki jo bo kupec pripravljen plačati, odvisna od njegove naklonjenosti tveganju. Tako s tveganjem prevzamemo tudi koristi, ki jih to prinaša (pozitivne in negativne). Bolj kot smo naklonjeni tveganju, manjša je potrebna začetna rezervacija in večja je vsota, ki ostane od zneska, ki smo ga dobili s prodajo pogodbe. Če se odločimo za aktuarski pristop, poskušamo torej dovoliti drugim, da nam ustvarijo dobiček. Kljub temu še vedno obstaja (majhna) verjetnost, da bomo ostali brez dobička in da bomo morali za poplačilo obveznosti plačati več kot bi plačali ob popolnem zavarovanju pred tveganji.

Z vrednotenjem, ki bo kmalu zakonsko dorečeno, se aktuarjem razširja področje delovanja. Tako je nastala tretja generacija aktuarjev. Aktuar prve generacije je tradicionalni življenjski aktuar, ki pri svojem delu uporablja konstantne procese smrtnosti ter obrestnih mer. Aktuar druge generacije pri svojem delu predpostavlja stohastične procese pri škodnem dogajanju. Aktuar tretje generacije pri svojem delu, poleg stohastičnih procesov pri škodnem dogajanju uporablja tudi slučajnost ekonomije. Njegov prijatelj – finančni ekonomist – ki je strokovnjak na področju zapletenih modelov, je prikrajšan za razumevanje stohastičnosti škodnega dogajanja. Seveda aktuarju ni potrebno razumeti in poznati vseh modelov za vrednotenje eksotičnih opcij – zadostuje razumevanje osnovnih modelov, iz katerih se lahko izpeljejo tudi bolj zapleteni, če je to potrebno za razvoj zavarovalnih produktov.

Vrednotenje je tako za aktuarja tretje generacije eno od prednostnih področji. Pravilna vrednost obveznosti/produktov naj bi bila tista, ki je konsistentna s trgom – lahko bi rekli kar tržna vrednost. Preden predstavimo ozadje omenjenega pristopa, naštejmo razloge, zakaj je ta način aktualen:

- IASB (International Accounting Standards Board) si prizadeva definirati računovodska pravila za zavarovalne operacije. V splošnem naj bi uporabljali tržno vrednost povsod, kjer jo je možno določiti.
- Solvency II – predstavlja projekt znotraj EU, ki prinaša nove definicije na področju solventnosti, ki bodo vsebovale elemente stohastičnih izračunov namesto dosedanjih ohlapnih pravil.
- Upravljanje s tveganji – glavni namen je prepoznava ter merjenje tveganj in ukrepanje glede na vrsto tveganja. Torej, če je tveganje definirano na tehnični način, potem je pač potrebno uporabiti tehnične metode za merjenje le tega, kar posredno pomeni uporabo najboljšo mero ekonomske vrednosti (pri zrelih finančnih trgih bi bila to tržna vrednost).
- Akademska vrednost – večina aktuarske literature vsebuje fiksno obrestno mero v formulah. Uporaba tržne vrednosti bi aktuarski literaturi dodala nov zorni kot – modele finančne matematike. Predstavljajte si kako težko je vrednotiti določeno garancijo pri življenjskem zavarovanju z naložbenim tveganjem. Z uporabo vrednotenja opcij zgornjo težavo hitro odpravimo.

- Kompleksni produkti – finančni inženirji lahko vrednotijo produkte in usklajujejo obveznosti z uporabo modernih tehnik vrednotenja. Po drugi strani je to delo aktuarjev.

Seveda se poleg omenjenih aktualnih zadev porajajo tudi naslednje posledice:

- Prodaja produktov – določene vrednosti komponent produktov so se včasih določale prek palca. Tako je prišlo do velikih težav zaradi napačnega vrednotenja. S pravilnim vrednotenjem tako izgubljamo namišljeni maneverski tržni prostor.
- Naložbena strategija – spremembe vrednosti bi zaznali takoj (dobiček/izguba). Po drugi strani bi zavarovalnice ki nalagajo večino v delnice, to počele manj.
- Horizont planiranja – pri klasičnem pristopu potrebujemo daljši horizont, da bi zaznali spremembo. Pri vrednotenju, ki je konsistentno s trgom, se spremembe takoj prepoznajo v rezultatih.
- Apetit po tveganju – vsakršna dodatna želja po tveganju/netveganju se bo z uporabo tržno konsistentnega vrednotenja pokazala v dobičku/izgubi.
- Stroški – obstaja bojazen, da se bodo zaradi večje volatilnosti računovodskih izkazov, povečali stroški, saj bodo lastniki zaradi večjega tveganja pričakovali večje donose.
- Razporeditev kapitala – zavarovalnice želijo pri naložbenju ustvariti čim večje donose. Pri merjenju tveganja s tržnim konsistentnim načinom, kapital, ki je namenjen zahtevam solventnosti, krije tveganje nepredvidljivih dogodkov, hkrati pa vsebuje tudi dodatno rezervo za neujemanje naložb ter obveznosti.
- Določitev vira profitabilnosti – danes je težko določiti kateri oddelki znotraj zavarovalnice prinašajo dobiček, kateri pa izgubo. Z uporabo tržno konsistentnega vrednotenja lahko objektivno potegnemo mejo med zavarovalnimi dejavnostmi, naložbenju ter managerskimi odločitvami.

Kot primer vrednotenja po tržni vrednosti navedimo vrednotenje obveznosti določene zavarovalne pogodbe, ki zapadejo ob različnih časovnih točkah. Vprašanje je torej, kolikšna je tržno konsistentna vrednost te zavarovalne pogodbe. Da bi odgovorili na to vprašanje, moramo določiti diskontne faktorje s katerimi bomo diskontirali obveznosti. V danem trenutku vrednotenja na trgu obveznic veljajo določene cene za različne obveznice. Naša naloga je, da iz množice papirjev določimo obrestne mere, ki se uporabljajo pri vrednotenju brezkuponskih obveznic (Cairns, 2004, str. 4). Ker so obveznosti iz zavarovalnih pogodb specifične v smislu roka zapadlosti, si lahko pomagamo z različnimi obveznicami. V tabeli 5.2 je prikazan izračun zgoraj omenjenih obrestnih mer iz različnih obveznic.

Tabela 5.2: Izračun obrestnih mer

Leto	Obveznica1	Obveznica2	Obveznica3	Obveznica4	Obveznica5
(vrednost)	1.000	950	550	900	1.350
1	1.060	50	200	30	500
2		1.000	200	30	400
3			200	30	300
4				1.000	200
5					100
D1 = 1.000/1.060 = 0,943396 = (1,06)^(-1) -> i_1 = 6%					
D2 = (950-50*0,943396)/1.000 = (1,052)^(-2) -> i_2 = 5,2%					
D3 = (550-200*0,943396-200*0,90283)/200 = (1,034)^(-3) -> i_3 = 3,4%					
D4 = (900-30*0,943396-30*0,902830-30*0,903774)/1.000 = (1,052)^(-4) -> i_4 = 5,2%					
D5 = (1.350-500*0,943396-400*0,90283-300*0,903774-200*0,8175)/100 = (1,039)^(-5) -> i_5 = 3,9%					

Vir: Lastni izračun

Kot sledi iz zgornje tabele lahko s pomočjo velike množice obveznic določimo obrestne mere brezkuponskih obveznic za mnogo časovnih točk. Če slučajno kakšne obrestne mere ne moremo izračunati direktno, lahko uporabimo interpolacijo.

V tabeli 5.3 je predstavljen izračun tržne konsistentne vrednosti zavarovalne pogodbe ob zgoraj izračunanih obrestnih merah.

Tabela 5.3: Tržna vrednost hipotetičnih obveznosti zavarovalne pogodbe

Leto	Obveznosti	Diskontni faktorji	Sedanja vrednost
1	250	0,943396	235,85
2	250	0,902830	225,71
3	250	0,903774	225,94
4	250	0,817500	204,38
5	500	0,825377	412,69
		Skupaj :	1304,56

Vir: Lastni izračun

Zgornji poenostavljen primer nam da pogled v ozadje vrednotenja. Z omenjeno tehniko in vpeljavo modelov finančne matematike lahko vrednotimo vse zavarovalne produkte, ki imajo vgrajene različne opcije (garantirana renta, podaljšanje zavarovanja ob prvotnih pogojih, razne garancije pri zavarovanjih z naložbenim tveganjem, možnost posojila v višini aktuarske vrednosti zavarovalne pogodbe…). Jasno je, da težavnost modelov naraste, čimbolj so opcije, ki jih ponujamo, eksotične.

Za konec poglavja si oglejmo še kaj prinašajo mednarodni računovodski standardi, ki se vežejo na zgornjo temo. Standard 4 (zavarovalne pogodbe), ki je aktualen, naj bi zadostoval za prehodno obdobje do vpeljave standarda 39 (vrednotenje finančnih instrumentov) v zavarovalnice. To bo predvidoma z letom 2007. Glavna misel standarda 39 je tržno konsistentno vrednotenje finančnih instrumentov.

Standard 4 je izključno namenjen zavarovalnim pogodbam. Definira način vrednotenja obveznosti iz zavarovalnih pogodb (že vpelje tržno konsistentno vrednotenje). Glavne vsebine standarda povzemajo spodnje točke:

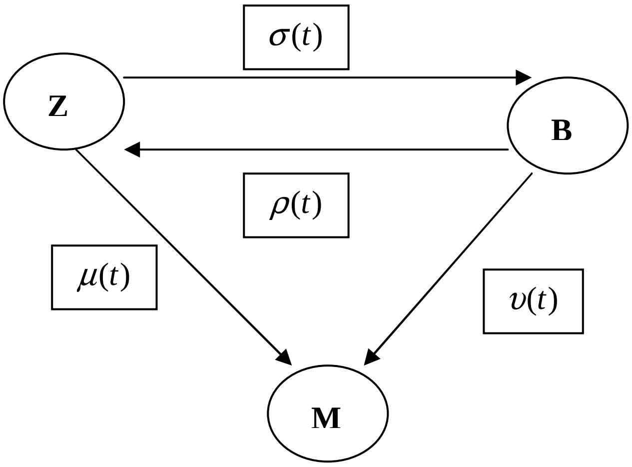
- definicija zavarovalne pogodbe,
- nadaljevanje obstoječega načina vrednotenja zavarovalnih produktov z dodatno previdnostjo,
- zavarovalnica lahko zamenja računovodska izhodišča, če so le ta bolj zanesljiva,
- tržno konsistentno vrednotenje,
- nič izravnalnih rezervacij ter rezervacij za katastrofalne dogodke,
- preverjanje zadostnosti višine/pravilnosti oblikovanih obveznosti,
- razkritje: upravljanje s tveganji, izpostavljenost tveganju, analiza občutljivosti računovodskih izkazov, pozavarovalni rezultat prikazan ločeno, navajanje vzrokov za ključne spremembe (višina rezervacij…)…

5.2 Odsekoma zvezen markovski proces s tremi stanji

V poglavju 4.2 smo izpeljali splošno formulacijo odsekoma zveznih markovskih procesov. Pokazali smo tudi nekaj primerov uporabe teh procesov v zavarovalništvu. Pri vrednotenju enostavnih (klasičnih) življenjskih produktov tako lahko uporabimo odsekoma zvezen markovski proces z dvemi stanji. Intuitivno lahko sklepamo, da če bi definirali zavarovalniški produkt z več stanji, bi ga lahko opisali z markovskimi procesi. V primeru, ko imamo tri stanja, bomo intuicijo v nadaljevanju tudi potrdili.

Predpostavimo, da želimo zavarovalniškemu trgu ponuditi produkt, ki bo vseboval kritje za primer smrti ali za primer bolezni (bolezen bi lahko definirali zelo splošno ali pa bi v definicijo zajeli samo določene težke bolezni – kap, infarkt…). Tako je opazovana oseba lahko v naslednjih stanjih: zdrava, mrtva, bolna. Odsekoma zvezen markovski proces definiramo na prostoru $\{Z, M, B\}$, za dane časovno odvisne jakosti prehodov.

Slika 5.1: Markovski proces na prostoru $\{Z, M, B\}$



Matrika $A(t)$, ki nastopa v enačbah Kolmogorova, je enaka

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\sigma(t) - \mu(t) & \sigma(t) & \mu(t) \\ \rho(t) & -\rho(t) - \upsilon(t) & \upsilon(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru velja

$$\begin{aligned} \lambda_Z(t) &= \sigma(t) + \mu(t) \\ \lambda_B(t) &= \rho(t) + \upsilon(t) \\ \lambda_M(t) &= 0 \end{aligned}$$

Najlažje je izračunati verjetnosti, da bo proces ostal (zvezno) v stanju zdrav ali bolan v časovnem intervalu $[s, t]$. Po enačbi (4.21) sledi

$$P(R_s > t - s \mid X_s = Z) = \exp(-\int_s^t (\sigma(u) + \mu(u))du)$$
$$P(R_s > t - s \mid X_s = B) = \exp(-\int_s^t (\rho(u) + \upsilon(u))du)$$

Preko integralske oblike enačb Kolmogorova dobimo direktno povezavo med verjetnostmi prehodov

$$P_{ZB}(s,t)=\int_0^{t-s}P_{BB}(s+w,t)\sigma(s+w)\exp(-\int_s^{s+w}(\sigma(u)+\mu(u))du)dw.$$

Za samo vrednotenje so predvsem zanimive verjetnosti prehodov iz stanja živ v obe ostali stanji. Te bomo analizirali v poglavju 5.4.

5.3 Uporabnost modela

Z odsekoma zveznim markovskim procesom s tremi stanji je definiran model, s katerim lahko natančno opišemo gibanje osebe (delca) med tremi stanji. Tako je proces natančna podlaga za definicijo podlag za vrednotenje zavarovalnega produkta, kjer je zavarovana oseba bodisi zdrava (aktivna) ali bolna ali mrtva. Torej gre za zavarovanje rizika bolezni ter smrti. V bistvu je to razširitev klasičnega modela pričakovane življenjske dobe še za dodatno stanje. Kot smo pokazali moramo za pridobitev verjetnosti prehodov rešiti sistem linearnih diferencialnih enačb podan z enačbo (4.16). Te verjetnosti so poleg obrestne mere in stroškov ključnega pomena pri vrednotenju zavarovalnega produkta, saj nam povedo s kakšno verjetnostjo bo zavarovalnica primorana izplačati v naprej dogovorjeno zavarovalno dajatev.

V praksi je seveda bolj uporaben poenostavljen model, saj numerično reševanje sistema diferencialnih enačb skozi čas, prinaša nekaj negativne teže na področju računanja, informacijske podpore ter obvladljivosti tveganj (numerične metode so kljub vsemu približek). Prva poenostavitev je, da stanji mrtev ter bolan združimo in se obnašamo kot da imamo samo dve stanji. Za takšen zavarovalni produkt pa obstajajo že obravnavani modeli za vrednotenje. Ključno vprašanje je, kako izvesti združitev – to naredimo s pomočjo združitve tablic umrljivosti ter tablic obolevnosti. Recimo, da poleg rizika smrti zavarujemo še riziko obolenja za določeno bolezen. Potem je verjetnost smrti ali obolenja enaka

$$q_x'=i_x+(1-a_x)q_x,$$

pri čemer je i_x verjetnost obolenja za določeno bolezen, a_x pa delež števila smrti zaradi bolezni v celotnem številu umrlih. Od tu dalje vrednotenje poteka bodisi s pomočjo modela preživetja, kjer se za verjetnosti smrti uporabijo zgoraj prikazane verjetnosti ali pa se za vrednotenje uporabijo druge metode, ki tudi privzamejo nove verjetnosti.

Podobno postopamo tudi v primeru, ko zmanjšamo zavarovalno kritje – recimo da zavarujemo samo riziko bolezni. Prostor stanj je še zmeraj dimenzije tri, samo zavarovalnica izplača zavarovalno dajatev v primeru, ko je zavarovanec bolan. V tem primeru je recimo rizična premija lahko enaka

$$RP_x = i_x * (1 - 1/2q_x)\,.$$

Kljub zgornji definiciji rizične premije pa za gibanje opazovane populacije obstaja privzeta spremenjena verjetnost smrti, ki posledično vključuje tudi vplive različnih bolezni na samo umrljivost.

Če bi zavarovali več bolezni hkrati, bi morali privzeti,

$$i_x = i_{x_1} + i_{x_2} + \ldots + i_{x_n}\,,$$

kar z drugimi besedami pomeni, da so bolezni med seboj neodvisne in da je skupno tveganje obolenja pač seštevek posameznih tveganj obolenja za določeno bolezen (Trunk, 1994).

Na razvitih zavarovalnih tržiščih poenostavljanje oziroma aproksimacije prinašajo kvečjemu izpad dobička pri poslovanju. To lahko ponazorimo z dejstvom, da v Angliji zavarovalnice kot faktor pri določanju premije uporabljajo tudi dnk zapis potencialnega zavarovanca. To je že skoraj povsem običajna praksa v razvitem zahodnem svetu in seveda ne samo na področju zavarovalništva ampak tudi recimo pri iskanju zaposlitve, sklepanju poslov…Tako je v interesu zavarovalnic uporabiti čimbolj natančne metode za določevanje premije ter ocenjevanje rizika, kar pomeni uporabo numeričnih metod le tam, kjer ne gre z analitičnim pristopom in seveda ob upoštevanju skrajnega minimiziranja napak. Zavarovalnicam ni v interesu pridobivati na izpostavljenosti tveganju, če se za to ne plača dodatna premija. Po drugi strani pa zdrava konkurenca izloči vsak poskus nerealnega zniževanja cen (premij), kar bi lahko bila posledica nekonsistentnega vrednotenja zavarovalnih produktov.

Kljub prikazani poenostavitvi bomo v naslednjem poglavju natančno analizirali različne dejavnike pri vrednotenju zavarovalnega produkta, ki ima osnove vrednotenja v odsekoma zveznem markovskem procesu s tremi stanji.

5.4 Analiza časovne ter geografske komponente

V tem razdelku bomo analizirali vpliv časovne ter geografske komponente pri vrednotenju zavarovalnega produkta, kjer je zavarovana oseba zdrava ali bolna ali mrtva.

Za analizo časovne komponente bomo analizirali statistične podatke o umrljivosti ter smrtnosti za leta 1992, 1997 in 2002 v Sloveniji, pri analizi geografske komponente bomo analizirali podatke iz leta 2002 za Slovenijo, EU ter ZDA. Pri tem bomo iz podatkov pridobili ustrezne jakosti prehodov in s pomočjo le teh prišli do ustreznih verjetnosti prehodov, ki bodo osnova za vrednotenje zavarovalnega produkta.

V poglavju 4.2, kjer smo predstavili odsekoma zvezne markovske procese, smo izpeljali naslednji sistem linearnih diferencialnih enačb, kateremu morajo zadoščati verjetnosti prehodov

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s,t) = \sum_{k \in S}^{n} P_{ik}(s,t)\, \sigma_{kj}(t) \, .$$

Omenili smo, da sam proces definiramo na prostoru stanj $\{Z, M, B\}$. Tako lahko za vsako stanje napišemo verjetnosti prehodov. Za stanje zdrav veljajo v splošnem naslednje linearne diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZZ}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\, \sigma_{ZZ}(t) + P_{ZB}(s,t)\, \sigma_{BZ}(t) + P_{ZM}(s,t)\, \sigma_{MZ}(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZB}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\, \sigma_{ZB}(t) + P_{ZB}(s,t)\, \sigma_{BB}(t) + P_{ZM}(s,t)\, \sigma_{MB}(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{ZM}(s,t) &= P_{ZZ}(s,t)\, \sigma_{ZM}(t) + P_{ZB}(s,t)\, \sigma_{BM}(t) + P_{ZM}(s,t)\, \sigma_{MM}(t)
\end{aligned}$$

Za stanje bolan so linearne diferencialne enačbe v splošnem oblike

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P_{BZ}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\, \sigma_{ZZ}(t) + P_{BB}(s,t)\, \sigma_{BZ}(t) + P_{BM}(s,t)\, \sigma_{MZ}(t) \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{BB}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\, \sigma_{ZB}(t) + P_{BB}(s,t)\, \sigma_{BB}(t) + P_{BM}(s,t)\, \sigma_{MB}(t) \quad . \\
\frac{\partial}{\partial t} P_{BM}(s,t) &= P_{BZ}(s,t)\, \sigma_{ZM}(t) + P_{BB}(s,t)\, \sigma_{BM}(t) + P_{BM}(s,t)\, \sigma_{MM}(t)
\end{aligned}$$

Za stanje bolan velja v splošnem analogen zapis

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{MZ}(s,t) = P_{MZ}(s,t)\,\sigma_{ZZ}(t) + P_{MB}(s,t)\,\sigma_{BZ}(t) + P_{MM}(s,t)\,\sigma_{MZ}(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{MB}(s,t) = P_{MZ}(s,t)\,\sigma_{ZB}(t) + P_{MB}(s,t)\,\sigma_{BB}(t) + P_{MM}(s,t)\,\sigma_{MB}(t) \quad .$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{MM}(s,t) = P_{MZ}(s,t)\,\sigma_{ZM}(t) + P_{MB}(s,t)\,\sigma_{BM}(t) + P_{MM}(s,t)\,\sigma_{MM}(t)$$

Seveda ima naš markovski proces nekaj posebnosti. Vemo, da ko oseba pride v stanje mrtev tam ostane, kar posledično pomeni, da so jakosti prehodov $\sigma_{Mk}(t)$ enake 0 za $k \in \{Z, B, M\}$. Uporabimo še notacijo iz poglavja 5.2 in zapišimo prejšnje linearne diferencialne enačbe. Za stanje zdrav velja

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ZZ}(s,t) = -P_{ZZ}(s,t)\,(\sigma(t) + \mu(t)) + P_{ZB}(s,t)\,\rho(t))$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ZB}(s,t) = P_{ZZ}(s,t)\,\sigma(t) - P_{ZB}(s,t)\,(\rho(t) + \upsilon(t))$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ZM}(s,t) = P_{ZZ}(s,t)\,\mu(t) + P_{ZB}(s,t)\,\upsilon(t)$$

Za stanje bolan dobimo

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{BZ}(s,t) = -P_{BZ}(s,t)\,(\sigma(t) + \mu(t)) + P_{BB}(s,t)\,\rho(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{BB}(s,t) = P_{BZ}(s,t)\,\sigma(t) - P_{BB}(s,t)(\,\rho(t) + \upsilon(t)) \quad .$$
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{BM}(s,t) = P_{BZ}(s,t)\,\mu(t) + P_{BB}(s,t)\,\upsilon(t)$$

Za stanje bolan z upoštevanjem zgornjih predpostavk zaključimo

$$P_{MZ}(s,t) = 0$$
$$P_{MB}(s,t) = 0\ .$$
$$P_{MM}(s,t) = 1$$

S tem smo definirali sistem linearnih diferencialnih enačb, ki ga v matrični obliki zapišemo kot

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)A(t)\ ,$$

pri čemer smo definirali matriko A za naš specifičen primer.

V poglavju 3.2.2, ko smo govorili o modelu preživetja, smo definirali tudi nekaj možnosti aproksimacij za jakost smrtnosti μ_x. V splošnem so zgornje jakosti prehodov poljubne funkcije, ki zadoščajo navedenemu sistemu linearnih diferencialnih enačb in splošnim teoretičnim privzetkom (zveznost,…). Da bi prišli do konkretnih rešitev, moramo na tem mestu privzeti določene predpostavke, saj sistem linearnih diferencialnih enačb, kjer so koeficienti poljubne funkcije ni analitično rešljiv, razen recimo če so jakosti prehodov konstante, kar pa ni smiselna predpostavka. Zato bomo jakosti prehodov aproksimirali z analitično funkcijo, katero bomo kasneje uporabili pri reševanju sistema linearnih diferencialnih enačb.

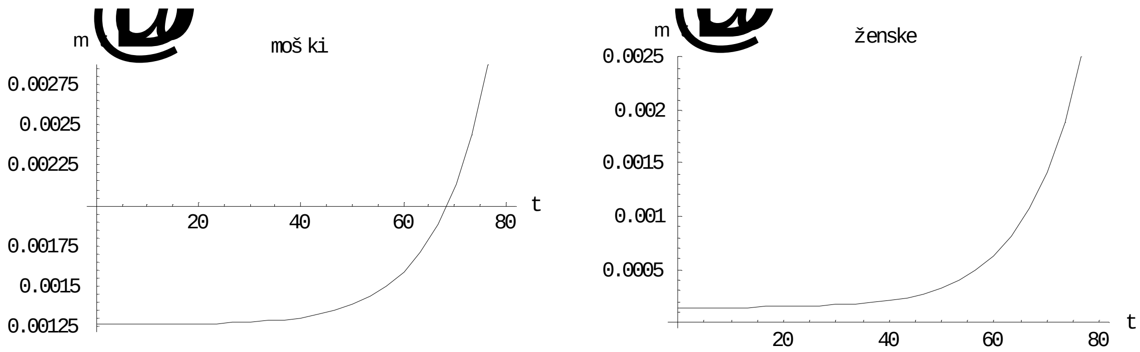
Tako bomo v nadaljevanju privzeli, da jakosti prehodov sledijo posplošitvi Gompertzovega zakona, torej po *Makehamu*,

$$\mu_{ij}(t) = A_{ij} + B_{ij}\, c_{ij}^{t},\ t > 0$$

pri čemer so A_{ij}, B_{ij}, c_{ij} poljubne konstante. Smiselnost te predpostavke izvira predvsem iz modela preživetja, kjer se zgornja aproksimacija uporablja kot približek za jakost smrtnosti. Konstante A_{ij}, B_{ij}, c_{ij} smo določili iz statističnih podatkov za posamezno leto in regijo (metodologija določitev vrednosti konstant A_{ij}, B_{ij}, c_{ij} presega obseg magistrskega dela, zato bomo v nadaljevanju izhajali iz že dobljenih vrednosti).

Analizo začnimo z letom 1992 s podatki za Slovenijo. Na spodnjih slikah so prikazane jakosti prehodov ločeno za moške ter ženske.

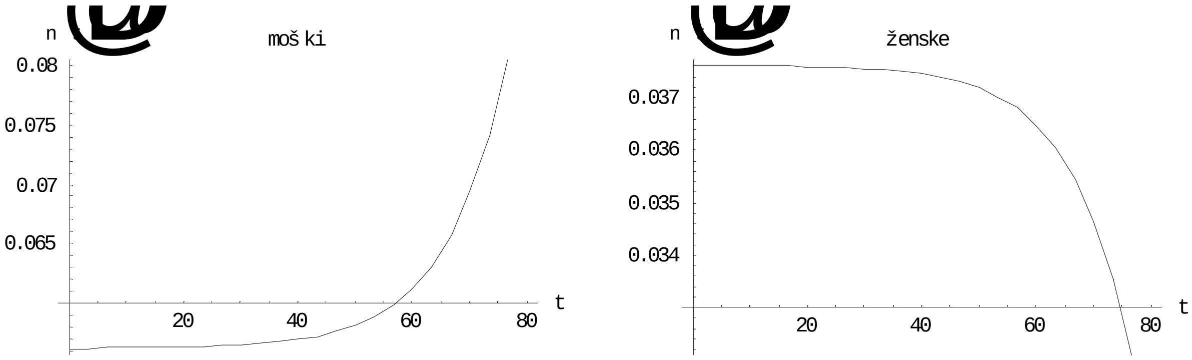
Slika 5.2: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev, Slo - 1992



Vir: Lastni izračun

Iz zgornje slike je razvidno, da je jakost umiranja zdravih moških večja kot pri ženskah (v povprečju za 365,15%), kar z drugimi besedami pomeni, da bodo moški v povprečju umrli prej kot ženske. To nam potrdi splošno znano dejstvo, da je pričakovana življenjska doba za ženske večja kot pri moških.

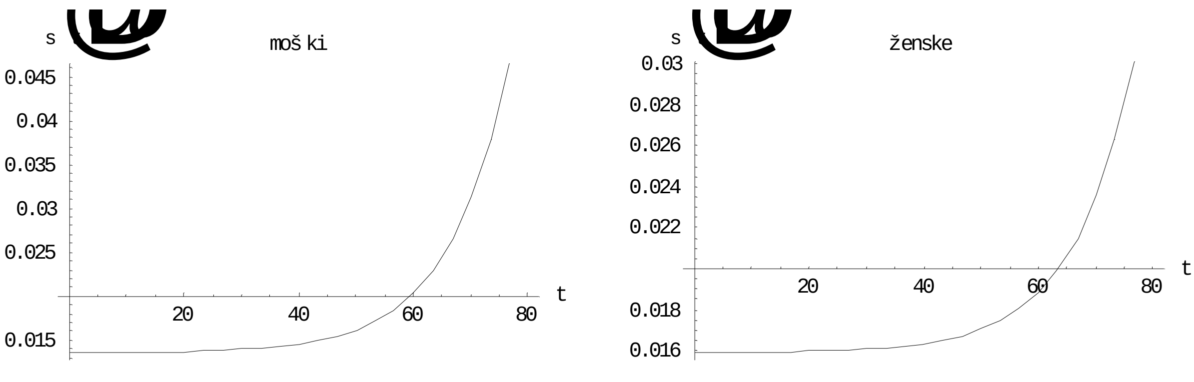
Slika 5.3: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev, Slo - 1992



Vir: Lastni izračun

Zgornji rezultat interpretiramo kot anomalijo izbora konkretne funkcije za jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev za ženski spol – krivulja bi morala biti enake oblike kot za moški spol. Rezultati kažejo, da je jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev večja kot jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev. Seveda to izhaja direktno iz statističnih podatkov za vzrok smrti, hkrati pa je to tudi intuicija. Analiza tudi pokaže, da so bolni moški bolj nagnjeni k umiranju kot bolne ženske – v povprečju za 137,52%.

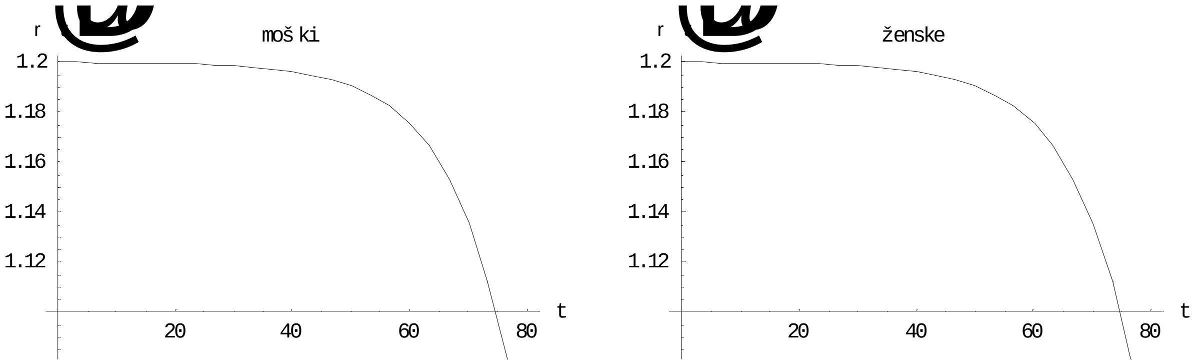
Slika 5.4: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje bolan, Slo - 1992



Vir: Lastni izračun

Dobljeno priča večji obolevnosti mlajših žensk (v povprečju za 16,71%) ter starejših moških (v povprečju za 31,62%). Pomembna je tudi definicija same obolevnosti. Lahko bi privzeli recimo, da je obolevnost enaka obolenju množice težkih bolezni ali recimo, bi obolevnost za delovno aktivno populacijo definirali s številom dni bolniškega staleža ali pa s številom bolnišničnih dni. Mi smo verjetnost obolevnosti definirali na podlagi števila hospitalizacij zaradi posledice bolezni, kot to razvršča Inštitut za varovanje zdravja, RS.

Slika 5.5: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje zdrav, Slo - 1992



Vir: Lastni izračun

Za jakost prehoda iz stanja bolan v stanje zdrav smo naredili naslednje predpostavke: jakost je na začetku sorazmerno velika, kar je odraz večjega števila ozdravitev bolezni pri mlajši generaciji. Jakost kasneje z leti upada, kar nekako povzema dejstvo, da je časovno obdobje, ki je potrebno za ozdravitve, daljše pri zreli in starejši generaciji.

Iz danih jakosti prehodov s pomočjo Runge-Kutta metode[2] četrtega reda za reševanje sistema linearnih diferencialnih enačb dobimo matriko verjetnosti prehodov - P, ki je osnova za vrednotenje zavarovalniških produktov.

Matrika verjetnosti prehodov P je po definiciji odvisna od časa. V nadaljevanju je prikazano gibanje matrike P za trideset let staro žensko za obdobje desetih let, kjer vsaka vrstica predstavlja matriko P za določeno leto.

Slika 5.6: Matrika P skozi čas

{{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}},
{{0.990723, 0.00772672, 0.00155044},{0.663759, 0.304092, 0.0321483}, {0., 0., 1.}},
{{0.986634, 0.0100277, 0.00333791}, {0.85941, 0.0976292, 0.0429612}, {0., 0., 1.}},
{{0.984082, 0.0107213, 0.0051964}, {0.91618, 0.0363789, 0.0474414}, {0., 0., 1.}},
{{0.981983, 0.0109403, 0.00707693}, {0.931741, 0.0182164, 0.0500425}, {0., 0., 1.}},
{{0.980014, 0.0110212, 0.00896531}, {0.935071, 0.0128417, 0.0520869}, {0., 0., 1.}},
{{0.978078, 0.011064, 0.0108577}, {0.934768, 0.0112645, 0.0539675}, {0., 0., 1.}},
{{0.976148, 0.0110987, 0.0127533}, {0.933381, 0.0108174, 0.0558015}, {0., 0., 1.}},
{{0.974213, 0.0111346, 0.0146524}, {0.931667, 0.0107092, 0.057624}, {0., 0., 1.}},
{{0.97227, 0.0111747, 0.0165555}, {0.929849, 0.0107052, 0.0594459}, {0., 0., 1.}},
{{0.970316, 0.0112202, 0.0184633}, {0.927993, 0.0107362, 0.0612711}, {0., 0., 1.}}}

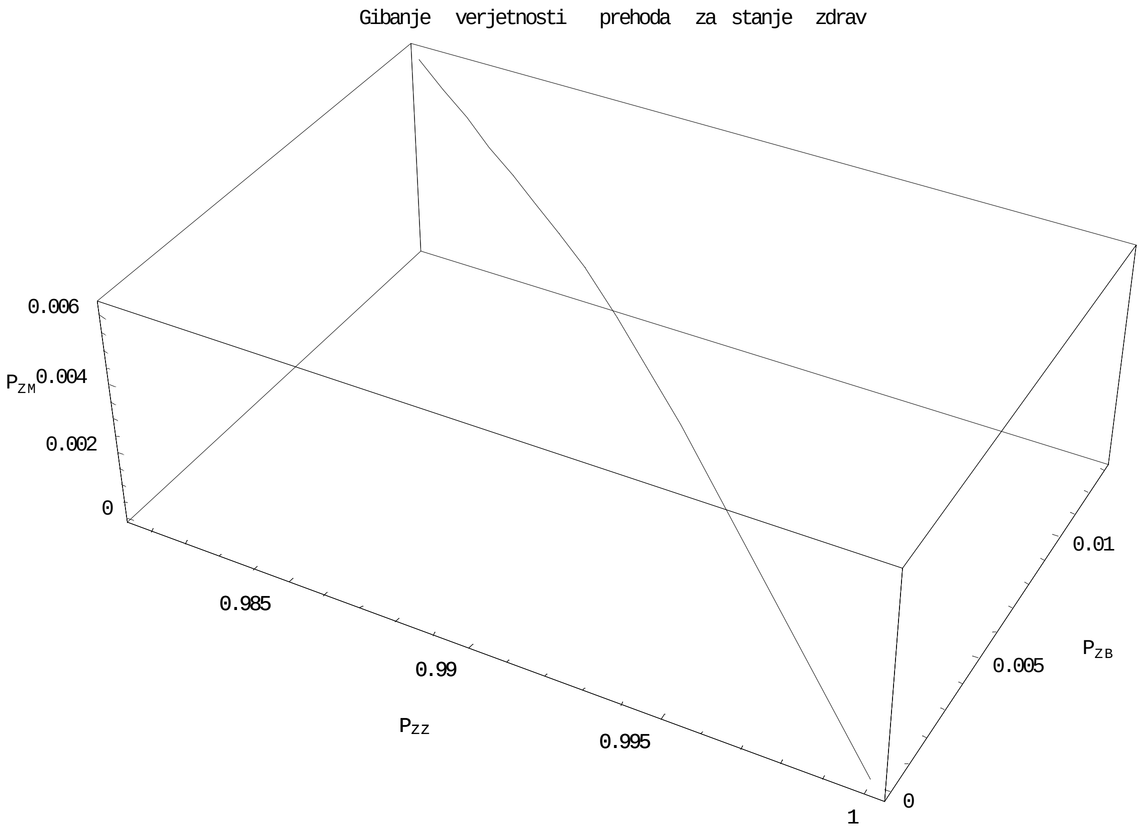
Vir: Lastni izračun

[2] Numerične metode za reševanje sistemov linearnih diferencialnih enačb so predstavljene v dodatku magistrskega dela.

Iz samega gibanja matrike je nazorno videti, vse ugotovitve, ki smo jih zapisali pod posamezno jakost prehoda, saj so verjetnosti prehodov odvisne od jakosti prehodov. Tako recimo hitro vidimo, da verjetnost, da zdrava ženska ostane v stanju zdrava, s časom pada, kar posledično pomeni rast verjetnosti skoka iz stanja zdrav v stanje bolan ali bodisi stanje mrtev.

Hkrati lahko analiziramo določene komponente matrike. Recimo, če želimo analizirati gibanje verjetnosti prehoda iz stanja zdrav, nas zanimajo samo prve vrstice matrike P skozi čas, kar lahko prikažemo tudi grafično (slika 5.7).

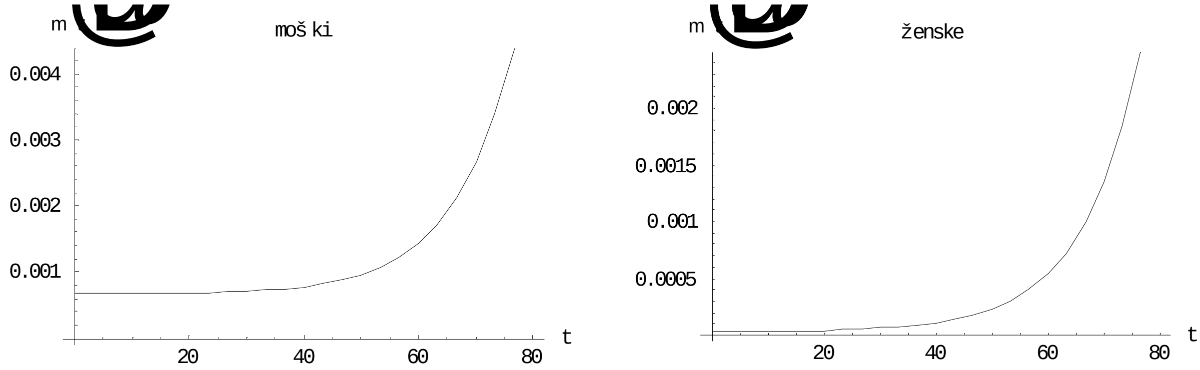
Slika 5.7: Matrika P - gibanje verjetnosti



Vir: Lastni izračun

V nadaljevanju so prikazane jakosti prehodov za slovensko populacijo za leto 1997.

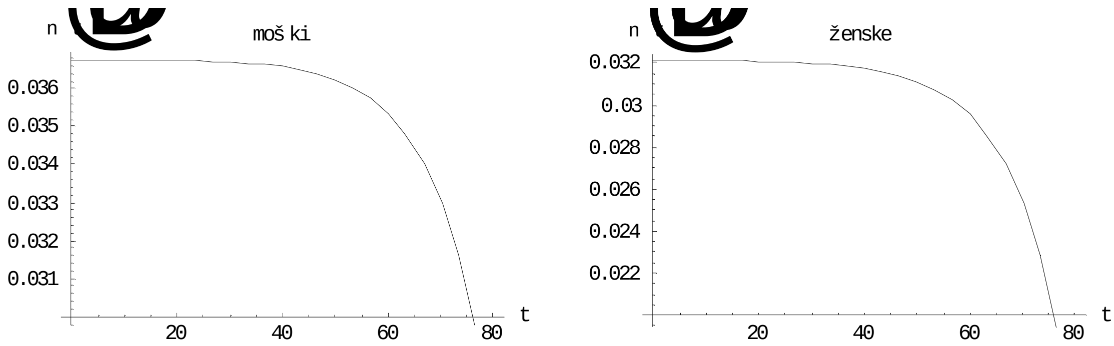
Slika 5.8: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev, Slo - 1997



Vir: Lastni izračun

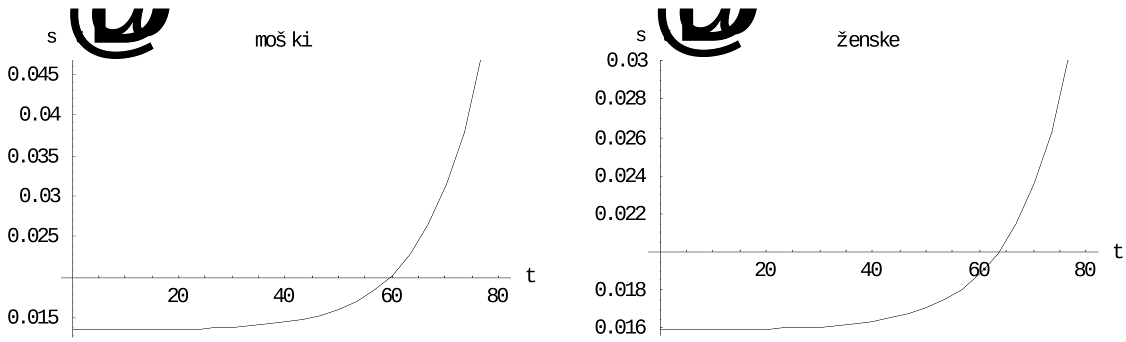
Dobljeno nam priča, da se pričakovana življenjska doba slovenske populacije podaljšuje. Pomemben rezultat je tudi zbliževanje pričakovane življenjske dobe moške populacije k ženski populaciji. Če primerjamo razliko jakosti prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev med moško ter žensko populacijo za leti 1992 in 1997 ugotovimo v povprečju 43,33% zmanjšanje razlike.

Slika 5.9: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev, Slo - 1997



Vir: Lastni izračun

Slika 5.10: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje bolan, Slo - 1997



Vir: Lastni izračun

Oba zgornja rezultata pričata k splošnemu izboljšanju stanja slovenske populacije. Po eni strani se je smrtnost bolnih ljudi v letu 1997 zmanjšala glede na leto 1992 (v povprečju za 45,15%), hkrati pa se je povečala tudi verjetnost ozdravitve.

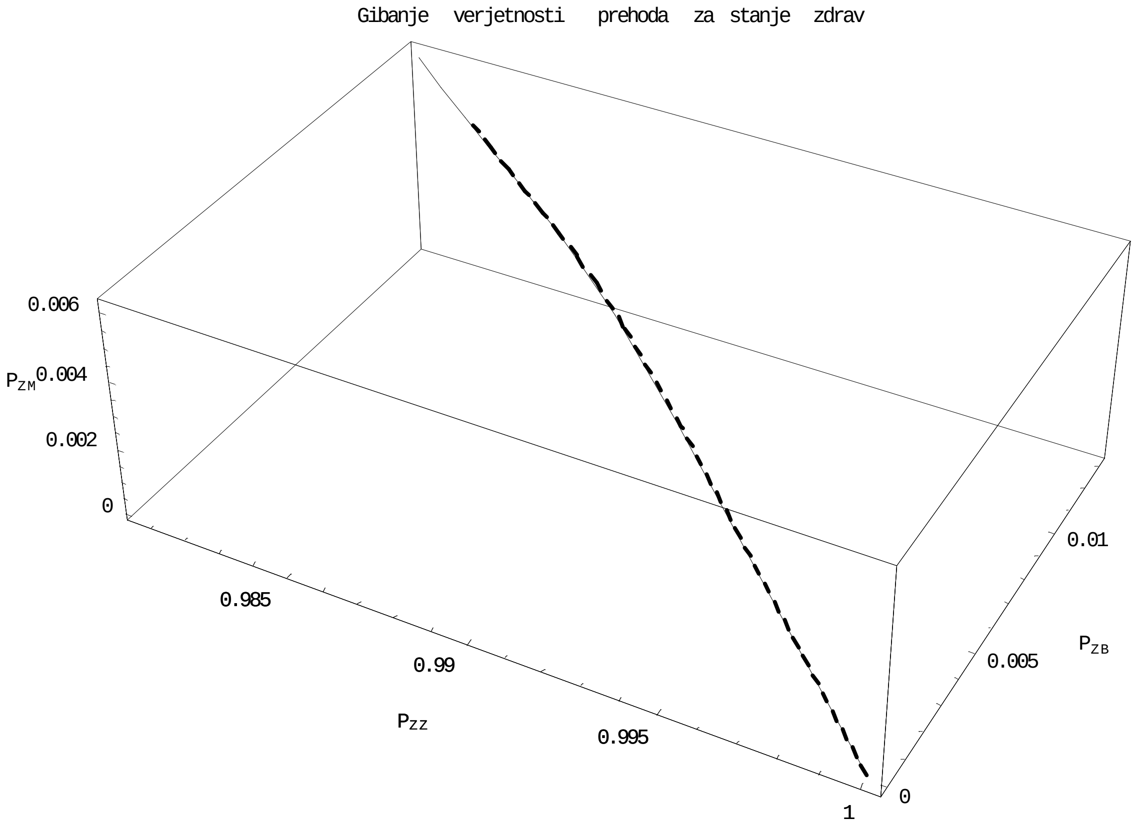
Podobno kot za leto 1992 iz dobljenih jakosti prehodov izračunamo matriko verjetnosti prehodov P.

Slika 5.11: Matrika P skozi čas za trideset let staro žensko in obdobje desetih let

{{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}},
{{0.990755, 0.00900043, 0.000244475}, {0.670324, 0.311576, 0.0181005}, {0., 0., 1.}},
{{0.987615, 0.0117322, 0.000652633}, {0.87296, 0.103135, 0.0239042}, {0., 0., 1.}},
{{0.98632, 0.0125671, 0.00111275}, {0.93399, 0.0400214, 0.0259887}, {0., 0., 1.}},
{{0.98558, 0.0128287, 0.00159126}, {0.952135, 0.0209146, 0.0269503}, {0., 0., 1.}},
{{0.985004, 0.012918, 0.0020783}, {0.957289, 0.0151367, 0.0275748}, {0., 0., 1.}},
{{0.984472, 0.0129565, 0.00257118}, {0.958502, 0.0133973, 0.0281004}, {0., 0., 1.}},
{{0.983949, 0.0129811, 0.00306942}, {0.958517, 0.0128828, 0.0285997}, {0., 0., 1.}},
{{0.983423, 0.0130033, 0.00357325}, {0.958164, 0.0127412, 0.0290948}, {0., 0., 1.}},
{{0.98289, 0.0130265, 0.00408315}, {0.957693, 0.0127143, 0.0295929}, {0., 0., 1.}},
{{0.982348, 0.0130521, 0.0045997}, {0.957179, 0.0127243, 0.0300966}, {0., 0., 1.}}}
Vir: Lastni izračun

Za primerjavo na spodnji sliki predstavljamo gibanje verjetnosti iz stanja zdrav, kjer je leto 1997 predstavljeno s črtkano črto. Vse zgornje navedene trditve se tako odražajo v gibanju verjetnosti.

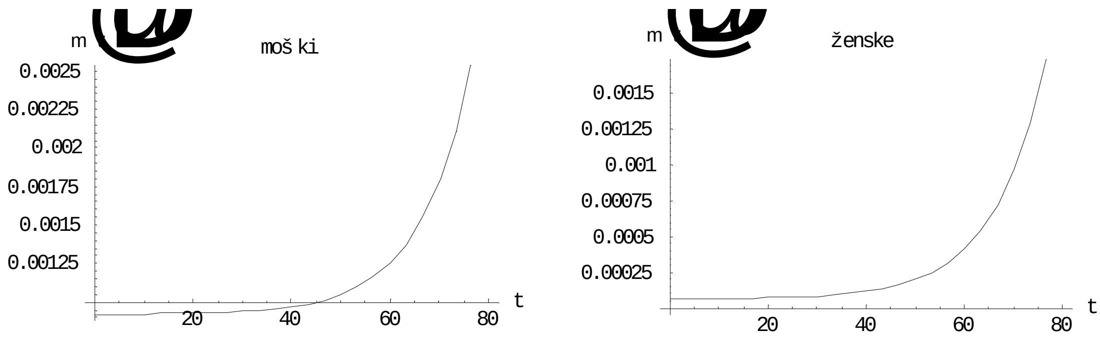
Slika 5.12: Matrika P - gibanje verjetnosti za leti 1992 in 1997



Vir: Lastni izračun

Sledi predstavitev rezultatov za slovensko populacijo za leto 2002.

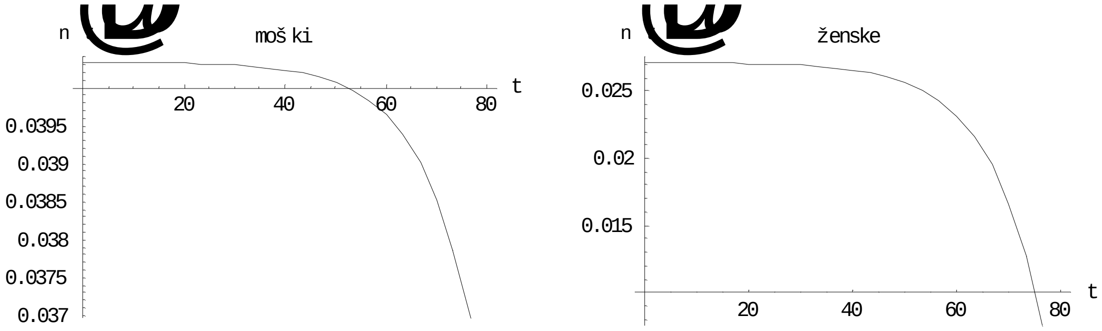
Slika 5.13: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev, Slo - 2002



Vir: Lastni izračun

Tudi za leto 2002 zaključimo, da se je pričakovana življenjska doba slovenske populacije glede na leto 1997 (in posledično glede na leto 1992) povečala. Nadaljuje se tudi zmanjševanje razlike med jakostjo prehoda za moško ter žensko populacijo (v povprečju za 10,56%).

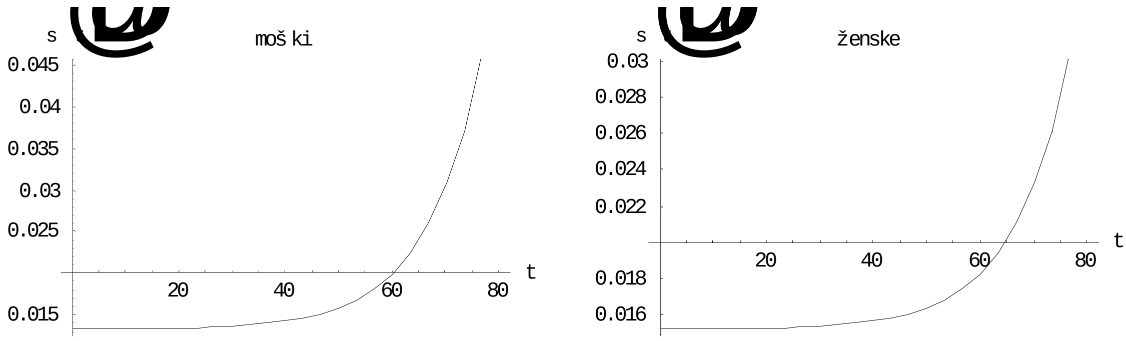
Slika 5.14: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev, Slo - 2002



Vir: Lastni izračun

V letu 2002 se je stanje za moške poslabšalo glede na leto 1997 (v povprečju za 13,32%). Tako nam modelirane jakosti prehodov izkazujejo večje vrednosti za prehod iz stanja bolan v stanje mrtev. Za žensko populacijo je trend ugodnejši – zmanjšanje v povprečju za 27,91%.

Slika 5.15: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje bolan, Slo - 2002



Vir: Lastni izračun

Za jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje bolan beležimo izboljšanje v letu 2002 glede na leto 1997 in sicer v povprečju za 2,27%.

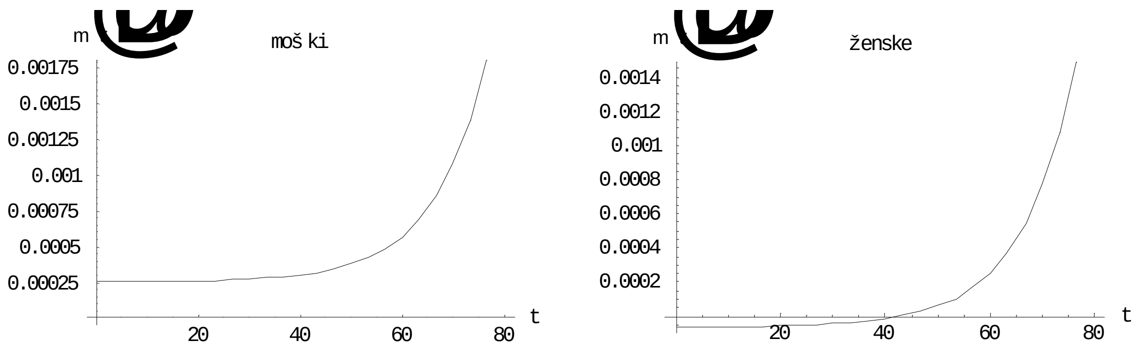
Kot v prejšnjih primerih iz jakosti prehodov s pomočjo numeričnih metod izračunamo verjetnosti prehodov, ki jih zberemo v matriko P .

Slika 5.16: Matrika P skozi čas za trideset let staro žensko in obdobje desetih let

{{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}},
{{0.991122, 0.00864542, 0.000232203}, {0.671885, 0.312845, 0.0152699}, {0., 0., 1.}},
{{0.988119, 0.0112846, 0.000596331}, {0.876095, 0.103705, 0.0202008}, {0., 0., 1.}},
{{0.986901, 0.0120968, 0.00100215}, {0.937962, 0.0400492, 0.0219891}, {0., 0., 1.}},
{{0.986223, 0.0123542, 0.00142239}, {0.956498, 0.020679, 0.0228234}, {0., 0., 1.}},
{{0.985707, 0.012444, 0.00184895}, {0.961839, 0.014792, 0.0233695}, {0., 0., 1.}},
{{0.985236, 0.0124843, 0.00227954}, {0.963158, 0.0130117, 0.0238299}, {0., 0., 1.}},
{{0.984775, 0.0125111, 0.00271372}, {0.96325, 0.0124836, 0.0242666}, {0., 0., 1.}},
{{0.984313, 0.0125356, 0.00315157}, {0.962963, 0.0123387, 0.0246986}, {0., 0., 1.}},
{{0.983845, 0.0125614, 0.00359339}, {0.962556, 0.0123124, 0.025132}, {0., 0., 1.}},
{{0.983371, 0.0125897, 0.00403958}, {0.962107, 0.0123245, 0.0255689}, {0., 0., 1.}}}
Vir: Lastni izračun

V nadaljevanju predstavimo še ključne rezultate za populaciji EU in ZDA za leto 2002.

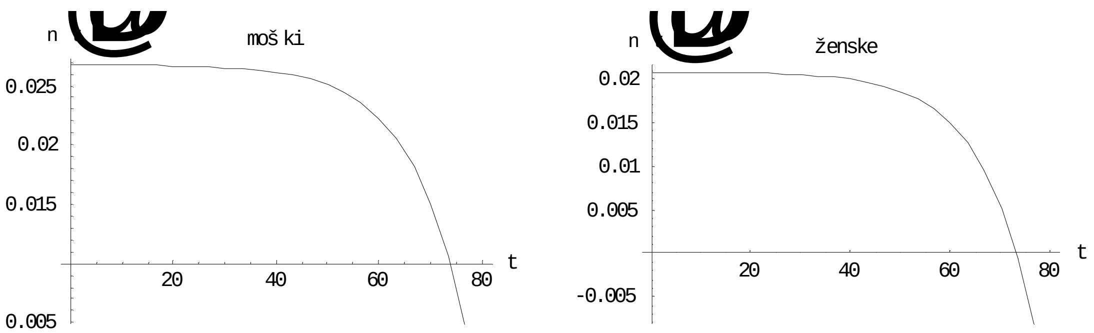
Slika 5.17: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev, EU - 2002



Vir: Lastni izračun

Če primerjamo populacijo Evropske unije ter Slovenije za leto 2002, ugotovimo daljšo pričakovano življenjsko dobo v Evropski uniji. Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev je v povprečju manjša za 19,32%.

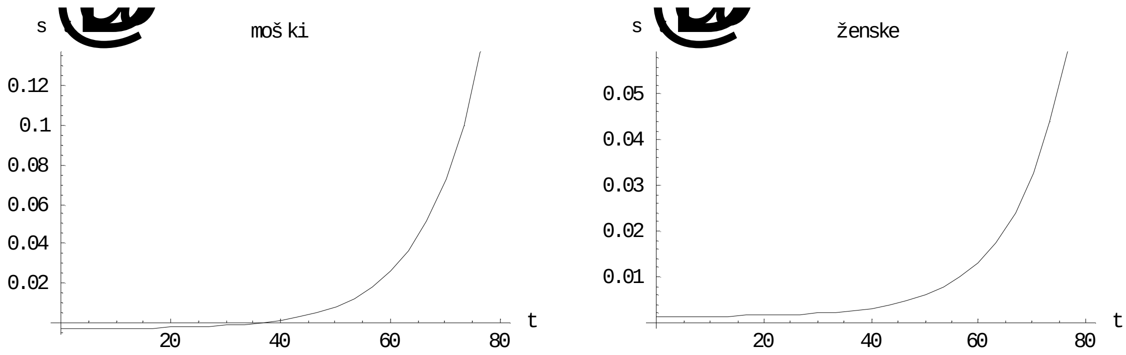
Slika 5.18: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev, EU - 2002



Vir: Lastni izračun

Podobno zaključimo, da je tudi smrtnost v bolezenskem stanju manjša v Evropski uniji kot v Sloveniji v letu 2002 in sicer v povprečju za 66,81%.

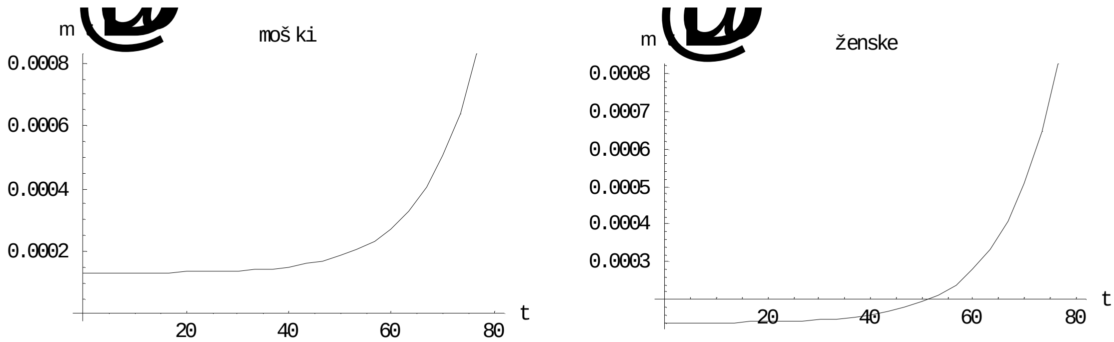
Slika 5.19: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje bolan, EU - 2002



Vir: Lastni izračun

Rezultati kažejo malenkost večjo obolevnost v Sloveniji kot Evropski uniji v letu 2002 (v povprečju za 15,34%).

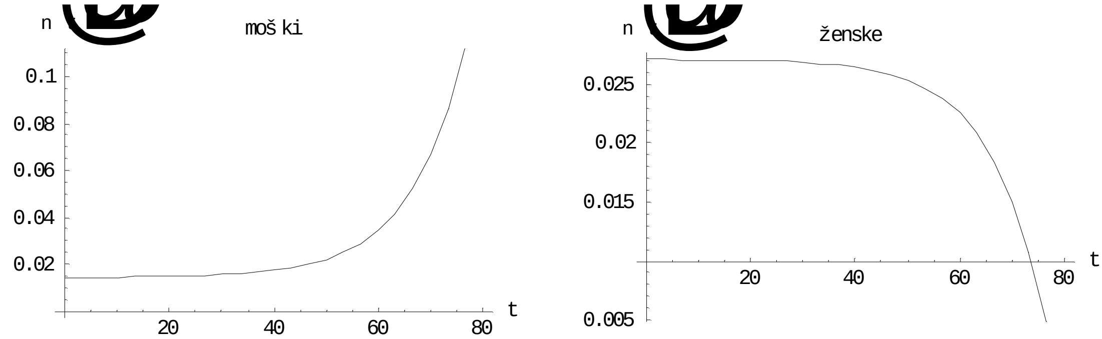
Slika 5.20: Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev, ZDA - 2002



Vir: Lastni izračun

Jakost prehoda iz stanja zdrav v stanje mrtev je v ZDA v povprečju manjša kot v Evropski uniji in posledično tudi Sloveniji v letu 2002 (v povprečju za 25,58%).

Slika 5.21: Jakost prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev, ZDA - 2002



Vir: Lastni izračun

Dobili smo podobno sliko kot za slovensko populacijo za leto 1992, vendar so jakosti prehoda iz stanja bolan v stanje mrtev manjše, kar kaže na manjšo smrtnost med bolnimi v ZDA v letu 2002 glede na slovensko populacijo v letu 1992 - v povprečju za 18,66%.

Za obe populaciji (EU, ZDA) iz jakosti prehodov izračunamo matrike P (za moške in ženske). Tako imamo vse statistične osnove za vrednotenje zavarovalniškega produkta.

Na prostoru, kjer se odvija naš odsekoma zvezni markovski proces je mogoče definirati kar nekaj vrst zavarovalnih produktov:

- zavarovanje za primer smrti,
- zavarovanje za primer (čistega) doživetja,
- zavarovanje za primer bolezni,
- mešano zavarovanje (smrt, bolezen, doživetje),
- zavarovanje za ozdravitev,
- čisto riziko zavarovanje (smrt, bolezen)…

Naštevali bi lahko tudi bolj eksotične oblike zavarovanj, recimo zavarovanje, ki zavarovancu nudi izplačilo šele ob tretjem primeru hospitalizacije. Podobna zavarovanja so seveda vprašljiva s tržnega vidika. Za potrebe analize privzemimo, da bomo dobljene verjetnosti prehoda uporabili pri vrednotenju zavarovanja za primer čistega doživetja. To pomeni, da bo zavarovanec prejel izplačilo ob koncu zavarovalen dobe, če med njo ne bo nikoli hospitaliziran zaradi bolezni.

Da bi dobili sedanjo vrednost potencialnega izplačila oziroma neto enkratno premijo, potrebujemo še obrestno mero, pri kateri bomo diskontirali denarni tok. Privzemimo dvoodstotno letno efektivno obrestno mero. Na končno ceno zavarovalnega produkta vplivajo tudi stroški, ki jih zavarovalnice dodajo neto premiji. Ti stroški v grobem pokrijejo stroške pridobivanj zavarovanj, stroške pobiranja premij ter upravne stroške (Gerber, 1996, str. 114). Za potrebe naše analize stroškov ne bomo upoštevali.

O sami tehniki vrednotenja zavarovalnih produktov smo govorili v poglavju 5.1. Mi bomo privzeli klasični pristop vrednotenja, kar pomeni da so v času prodaje zavarovalnega produkta pričakovana izplačila enaka pričakovanim izplačilom, kjer vse pričakovane denarne tokove diskontiramo pri fiksni obrestni meri.

Enkratna neto premija je za naš zavarovalni produkt enaka

$$NP = ZV\ P^{*}_{ZZ}(s,t)\, v^{t-s},$$

pri čemer je $v = 1/(1+i)$ diskontni faktor, ZV zavarovalna vsota in $P^{*}_{ZZ}(s,t)$ predstavlja verjetnost, da bo oseba ostala ves čas v stanju zdrav (namreč lahko se zgodi, da oseba med časoma s in t zboli in tudi ozdravi, vendar to ni primer zavarovalnega kritja).

Po analogiji modela preživetja velja

$$P^{*}_{ZZ}(s,t) = P^{*}_{ZZ}(s,s+1) * P^{*}_{ZZ}(s+1,s+2) * \ldots * P^{*}_{ZZ}(t-1,t)$$

Kot končni rezultat zapišimo neto enkratno premijo za vse opazovane populacije, kjer smo za zavarovalno vsoto privzeli znesek 10.000 EUR, osebe stare trideset let in zavarovalno dobo deset let.

Tabela 5.4: Neto enkratna premija

Regija in leto	**Neto premija v EUR**		**Slo 92 moški = 100%**	
	moški	ženske	moški	ženske
Slovenija 1992	6.867,59	7.147,07	100,00%	104,07%
Slovenija 1997	7.089,54	7.196,50	103,23%	104,79%
Slovenija 2002	7.028,32	7.242,16	102,34%	105,45%
EU 2002	8.131,04	8.071,58	118,40%	117,53%
ZDA 2002	8.092,22	8.074,82	117,83%	117,58%

Vir: Lastni izračun

Tabela nam potrdi ugotovitve, ki izhajajo iz same populacijske/zdravstvene statistike. Na premijo vplivata v našem primeru smrtnost zdrave osebe in obolevnost. Tako je premija najnižja za slovenske moške za leto 1992, kar pomeni največjo obolevnost in smrtnost slovenskih moških za leto 1992. Zanimivo je zmanjšanje premije iz leta 1997 na 2002 za slovenske moške, kar je odraz večjega števila smrti zaradi bolezni. Največja premija je za moške iz evropske unije za leto 2002, ki je tudi večja od premije za ženske. Dobljeno je rezultat privzetka aproksimacije funkcij jakosti prehodov po Makehamu, saj iz statističnih podatkov sledi ravno nasprotno. Po drugi strani je to zadosten signal, ki nam vedeti, da izbira funkcij jakosti prehodov po Makehamu, ni najboljša izbira za vse funkcije jakosti prehodov. Podobno sliko dobimo tudi v ZDA, kar posledično kaže na podobno stanje populacij. Vse navedeno posledično kaže tudi na razvitost regije, kvalitete življenja in zdravstvenega stanja v regiji.

6. ZAKLJUČEK

Aktuarji s pomočjo modelov analiziramo različne procese v zavarovalništvu. Danes si brez modelov ni mogoče zamisliti delovanja zavarovalnic, saj so modeli zelo močna podpora pri odločanju v različnih poslovnih procesih. Tako na eni strani lahko modeliramo stanja subjektov sprejetih v zavarovalno kritje, po drugi strani pa gibanje investicij oz. premoženja zavarovalnice. To je pomembno tudi z zakonskega vidika saj mora biti zavarovalnica sposobna plačevati svoje obveznosti na dolgi rok.

Posebno mesto pri modeliranju imajo podatki na katerih bomo uporabili model. Podatki so lahko rezultat preteklih opazovanj ali današnjih opazovanj (npr. inflacija) ali pa jih dobimo s pomočjo upoštevanja pričakovanih sprememb v prihodnosti.

Pri definiciji natančnosti modela moramo upoštevati objektivne cilje, ki smo si jih zastavili na začetku poti. Ni nujno, da bo končni izdelek najbolj natančen. Pomembno je, da razvijemo model, ki ne podcenjuje ključnih momentov, kot so stroški oz. tveganja, ki so vključena v model.

Začetna točka modeliranja življenjskih zavarovanj je model preživetja. Lahko je dokazati, da je to odsekoma zvezen markovski proces. Model preživetja se uporablja pri vrednotenju osnovnih življenjskih zavarovalnih produktov. Tako lahko testiramo različne predpostavke aktuarske matematike, izračunavamo zavarovalno premijo, stroške…Posredno vpliva tudi na poslovne odločitve glede investiranja, saj se model preživetja uporablja v povezavi z obrestno mero, kar skupaj definira potencialne obveznosti zavarovalnice do zavarovancev. Bolj kompleksni modeli so sestavljeni iz več osnovnih stohastičnih procesov: modeli z več stanji, modeli z več zavarovanci, verjetnost propada zavarovalnice, modeli za napovedovanje gibanja vrednosti premoženja zavarovalnice. Pri teh procesih rešitve večinoma niso analitično rešljive. Zato je potrebno uporabiti numerične metode.

V magistrskem delu smo teoretično dokazali, da so markovski procesi močno analitično orodje, s katerim se da enakovredno zapisati modele, ki se v praksi uporabljajo v zavarovalništvu. Posebno pozornost smo namenili odsekoma zveznim markovskim procesom s tremi stanji.

Omenjeni proces je posebna oblika markovskih procesov. Z njim je definiran model, s katerim lahko natančno opišemo gibanje osebe (delca) med tremi stanji. Tako je proces osnova za definicijo podlag za vrednotenje zavarovalnega produkta, kjer je zavarovana oseba zdrava (aktivna) ali bolna ali mrtva.

Za pridobitev verjetnosti prehodov je potrebno v splošnem rešiti sistem linearnih diferencialnih enačb. Sistem linearnih enačb vsebuje koeficiente, ki niso konstantni – so odvisni od časa. Tako lahko v splošnem sistem linearnih diferencialnih enačb le zapišemo in upoštevamo vse posebnosti obravnavanega modela. V naslednjem koraku smo s pomočjo numeričnih metod za reševanje sistemov linearnih diferencialnih enačb prišli do konkretnih rešitev.

Rezultate smo primerjali za populacijo Slovenije za leta 1992, 1997 in 2002 ter za populaciji ZDA in EU za leto 2002. Dani rezultati nam dokazujejo znano trditev, da se pričakovana življenjska doba podaljšuje, kar z drugimi besedami pomeni, da se verjetnost preživetja za določeno obdobje povečuje. Hkrati se v tem pogledu zmanjšuje tudi razlika med ženskim in moškim spolom. Po drugi strani so rezultati pokazali določeno povezanost glede na geografski izvor opazovane množice, razlika pa izhaja iz razvitosti opazovanega območja (kvaliteta življenja, kvaliteta zdravstvenega stanja).

Obe navedeni komponenti imata neposreden vpliv na vrednotenje zavarovalniških produktov, saj se na koncu vse prevede v ceno le tega (seveda so ključni elementi še obrestna mera in stroški, ki smo jih za namen analize fiksirali). Za vrednotenje zavarovanja za čisto doživetje smo uporabili klasični model vrednotenja zavarovalnih produktov, ki je star, a še vedno učinkovit. Rezultati nam kažejo na določeno povezanost opazovanih subjektov – intuitivno smo to pričakovali, saj smo analizirali človeško populacijo. Tako smo dobili nižjo premijo za območja z večjo povprečno umrljivostjo in slabšo kvaliteto življenja, hkrati so se skozi višino premije izkazale tudi prednosti in slabosti predpostavke modeliranja jakosti prehodov po Makehamu.

Po drugi strani nam je razvoj finančne matematike postregel s kopico modelov, ki se lahko uporabijo kot alternativa klasičnemu načinu vrednotenja. Tako se odpira dodatna smer teoretičnega raziskovanja in sicer mešanica markovskih procesov z modernimi modeli finančne matematike.

Kot smo nakazali postaja uporaba modelov finančne matematike pri vrednotenju nuja, saj želimo učinke naložb in s tem dogajanj na kapitalskih trgih čimbolj vključiti v ceno zavarovalnih produktov in hkrati upoštevati pri oblikovanju višine obveznosti.

Zaključimo s splošno mislijo, da bodo končno vlogo načina vrednotenja in posledično izbiro konkretnih modelov za vrednotenje zavarovalnih produktov, določali lastniki kapitala s svojo (ne)naklonjenostjo tveganju ali z izbiro višine obrestne mere in s tem povezanimi željami po dobičku. Kapitalu se bo po svojih močeh upiral trg potrošnikov, ki bo izbiral racionalno in s tem zmanjševal možnost arbitraže.

7. LITERATURA IN VIRI

7.1 Literatura

1. Atkinson M. E., Dickson D. C. E.: An Introduction to Actuarial Studies. Edward Elgar Publishing, 2000. 172 str.

2. Baxter Martin, Rennie Andrew: Financial Calculus – An introduction to derivative pricing. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 233 str.

3. Bernstein Peter L.: Against the Gods: The Remarkable Story of Risk. Wiley, 1998. 400 str.

4. Booth Philip et al.: Modern Actuarial Theory and Practice. Chapman&Hall, 1999. 736 str.

5. Bowers N.L.: Actuarial Mathematics. Itasca : The Society of Actuaries, 1986. 316 str.

6. Brigo Damiano, Mercurio Fabio: Interest Rate Models – Theory and Practice. Berlin : Springer-Verlag, 2001. 518 str.

7. Briys Eric: Insurance: From Underwriting to Derivatives: Asset Liability Management in Insurance companies. John Wiley & Sons, 2001. 176 str.

8. Bühlmann Hans: Mathematical Methods in Risk Theory. Berlin : Springer-Verlag, 1970. 210 str.

9. Cairns Andrew J.G.: Interest Rate Models - An Introduction. Princeton : Princeton University Press, 2004. 274 str.

10. Daykin C.D., Pentikainen T., Pesonen M.: Practical Risk Theory for Actuaries. London : Chapman and Hall, 1994. 543 str.

11. De Vylder Etienne F.: Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives. Kluwer Academic Publishers, 1997. 184 str.

12. Fisher H. F.: Actuarial Practice of Life Assurance. Cambridge : Cambridege University Press, 1965.

13. Gerber Hans U.: Life Insurance Mathematics. Springer Verlag, 1997. 217 str.

14. Gerber Hans U.: Matematika življenjskih zavarovanj. Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Zavarovalnica triglav d.d, 1996.

15. Grandell Jan: Mixed Poisson Processes. London : Chapman & Hall, 1997. 268 str.

16. Gubta A.K.: An Introduction to Actuarial Mathematics (Mathematical Modelling). Kluwer Academic Publishers, 2002. 350 str.

17. Gujarati Damodar N.: Basic Econometrics. New York : McGraw-Hill, 1995. 838 str.

18. Hoowaarts Günter: Technik der Lebensversicherung. Munich : Munich Re, 153 str.

19. Jacod Jean, Protter Philip: Probability Essentials. Berlin : Springer-Verlag, 2000. 250 str.

20. Jamnik Rajko: Matematična statistika. Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1979.

21. Karatzas Ioannis, Shreve Steven E.: Methods of Mathematical Finance. New York : Springer-Verlag, 1998. 415 str.

22. Kaas Rob, et al.: Modern Actuarial Risk Theory. Berlin : Springer, 2001. 328 str.

23. Košmelj Blaženka, Rovan Jože: Statistično sklepanje. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 1997.

24. Lajos Takacs: Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. New York : Wiley, 1967. 262 str.

25. Laster David: Asset – liability management for insurers. Zurich : Swiss Reinsurance Company, 2000. 36 str.

26. Malačič Janez: Demografija: teorija, analiza, metode in modeli. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 2000. 378 str.

27. Meerschaert Mark M.: Mathematical Modeling. Academic Press, 1999. 351 str.

28. Nieder Dirk, Pasdika Ulrich: The need for private long-term care protection – supplementing state provision. Cologne : GenRe, 2003. 15 str.

29. Norberg Ragnar: Financial Mathematics in Life and Pension Insurance; Summer School in Mathematical Finance, Dubrovnik, 16.-22. September 2001. 106 str.

30. Povh Janez: Teorija zavarovalniških procesov – diplomsko delo. Ljubljana : Fakulteta za matematiko in fiziko, 1998. 71 str.

31. Riley Kevin: Looking Beyond the Calculations for Better Disability Risk Selection. Cologne : GenRe – Risk Insights, Vol. 5, No. 2, 2001. str. 12-14

32. Sandmann Klaus et al.: Advances in Finance and Stochastics. Berlin : Spriger, 2000. 312 str.

33. Stanovnik Tine: Javne finance. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 2002. 237 str.

34. Tajnikar Maks: Mikroekonomija s poglavji iz teorije cen. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 1996. 461 str.

35. Tomažin Aleš: Metode ponovnega vzorčenja – Diplomsko delo. Ljubljana : Fakulteta za matematiko in fiziko, 1998. 72 str.

36. Tomažin Aleš: Raziskovalni projekt – Teorija rizika in iger pri modelih upravljanja zalog premoženja. Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 2000. 21 str.

37. Tomažin Aleš: Garantirane obrestne mere. Zbornik prispevkov 11. dnevov slovenskega zavarovalništva, 2004, str. 269-278.

38. Trieschmann Jame S. et al: Risk Management And Insurance. USA : South-Western College Publishing, 2001, 516 str.

39. Trunk Susanne: Dread Disease Internationale Produktgestaltung und Erfahrung. Cologne : GenRe, 1994. 105 str.

40. Wolter Kirk M.: Introduction to Variance Estimation. New York : Springer-Verlag, 2003, 427 str.

7.2 Viri

1. Core Reading 103 – Stohastic Modelling. London : Faculty of Actuaries, Institute of Actuaries, 2000.

2. Dhaene Jan et al.: Razlika med aktuarskim in finančnim pogledom. Ljubljana : Finance št. 65, 2005.

3. Population statistics 2004. Luxembourg : Office for Official Publications of the European Communities, 2004.

4. Prebivalstvo Slovenije 2001 [http://www.stat.si/doc/pub/rr798-2003/index.htm].

5. Prebivalstvo Slovenije 2000 [http://www.stat.si/doc/pub/rr776-2002/index.html].

6. Prebivalstvo Slovenije 1999 [http://www.stat.si/pub_rr762-01.asp].

7. Sklep o načinu in obsegu upoštevanja posameznih postavk, podrobnejših lastnostih in vrstah postavk ter lastnostih podrejenih dolžniških instrumentov, ki se upoštevajo pri izračunu kapitala in kapitalske ustreznosti in izkaz kapitalske ustreznosti zavarovalnice (Uradni list RS, št. 3/01, 68/01, 22/02, 69/02 in 117/02).

8. Sklep o podrobnejši vsebini poročila pooblaščenega aktuarja (Uradni list RS, št. 3/01).

9. Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno tehničnih rezervacij (Uradni list RS, št. 3/01 in 69/01).

10. Sklep o podrobnejših pravilih za izračun minimalnega kapitala zavarovalnice (Uradni list RS, št. 3/01, 68/01 in 69/02).

11. Statistični podatki UN [http://unstats.un.org/unsd/]

12. Statistični podatki ZDA [http://www.cdc.gov/nchs/]

13. Statistični zavarovalniški bilten 2004. Ljubljana : Slovensko zavarovalno združenje, 2004. 71 str.

14. Statistični podatki EU [http://epp.eurostat.cec.eu.int/portal/page?_pageid=0,1136184,0_45572595&_dad=portal&_schema=PORTAL]

15. Zakon o zavarovalništvu (Uradni list RS, št. 13/00, 91/00, 12,01, 21/02, 91/02 in 29/03).

16. Zakon o spremembah in dopolnitvah zakona o zavarovalništvu (Uradni list RS, št. 50/04).

17. Zdravstveni statistični letopis 2000. Inštitut za varovanje zdravja RS.

18. Zdravstveni statistični letopis 2001. Inštitut za varovanje zdravja RS.

19. Zdravstveni statistični letopis 2001. Inštitut za varovanje zdravja RS.

8. Slovarček slovenskih prevodov tujih izrazov

Abridged life table – skrajšane tablice umrljivosti

Chapman-Kolmogorov equations – enačbe Chapman-Kolmogorov

Death rates – stopnje umrljivosti

Deterministic model – deterministični model

Force of mortality – jakost umrljivosti

Life table – tablice umrljivosti

Life expectancy – pričakovano trajanje življenja

Markov chain – markovska veriga

Markov jump process - odsekoma zvezen markovski proces

Markov property – lastnost Markova

Poisson process – Poissonov proces

Probability of death – verjetnost smrti

State space – prostor stanj

Stationarity – stacionarnost

Stochastic model – stohastični model

Stochastic process – stohastični proces

Survival function – funkcija preživetja

Survival model – model preživetja

Transition matrix – matrika prehodov

Transition probability – verjetnost prehoda

Transition rate – jakost prehoda

Weak stationarity – šibka stacionarnost

DODATEK

A. Numerične metode za reševanje diferencialnih enačb

V splošnem linearnih diferencialnih enačb s časovno odvisnimi koeficienti ne moremo rešiti eksplicitno preko uporabe elementarnih funkcij. Tako v primeru markovskih procesov ne moremo poiskati analitičnih rešitev enačb Kolmogorova. Te bi zagotovo zapisali, če bi bile jakosti prehodov posebne oblike – npr. konstante. V nadaljevanju bomo predstavili dve numerični metodi za reševanje omenjenega problema.

A.1 Eulerjeva metoda

Osnovna misel metode je nadomestitev odvoda po t v enačbah Kolmogorova s končno razliko. Za dani korak h izračunamo verjetnost $P(s, s+mh), m = 0,1,2,\ldots$ z naslednjo rekurzivno formulo

$$\begin{cases} P(s, s+(m+1)h) = P(s, s+mh) + hP(s, s+mh)A(s+h) \\ P(s,s) = I \end{cases},$$

pri čemer je I matrika z elementi δ_{ij}.

Metoda ima napako reda h, kar z drugimi besedami pomeni, da če razpolovimo korak, bomo razpolovili tudi napako. Če iščemo vrednost v točkah, ki niso večkratniki koraka, uporabimo linearno interpolacijo.

A.2 Runge-Kutta metoda četrtega reda

Runge-Kutta metoda je v primerjavi z Eulerjevo metodo bolj natančna, saj ima napako reda h^4, kar pomeni, da če razpolovimo korak, napako zmanjšamo za faktor 16.

Rekurzivna formula je podana s

$$\begin{cases} P(s,s+(m+1)h) = P(s,s+mh) + \dfrac{h}{6}(C_1(s,m) + 2C_2(s,m) + 2C_3(s,m) + C_4(s,m)) \\ P(s,s) = I \end{cases}$$

pri čemer je

$$\begin{aligned} C_1(s,m) &= P(s,s+mh)A(s+mh) \\ C_2(s,m) &= (P(s,s+mh) + \frac{h}{2}C_1(s,m))A(s+(m+\frac{1}{2})h) \\ C_3(s,m) &= (P(s,s+mh) + \frac{h}{2}C_2(s,m))A(s+(m+\frac{1}{2})h) \\ C_4(s,m) &= (P(s,s+mh) + hC_3(s,m))A(s+mh) \end{aligned},$$

B. Programska rešitev v Mathematici

V nadaljevanju je predstavljena programska rešitev v Mathematici, s katero smo prišli do rezultatov v poglavju 5.4. Spodnji primer je za moško slovensko populacijo za leto 1992. Matrika P je izračunana za trideset let starega moškega za obdobje desetih let.

Definicija konstant za funkcije jakosti prehodov:

```
A[0, 1] := 0.01354156120970036;
B[0, 1] := 0.000022243060614786204;
c[0, 1] := 1.1;

A[0, 2] := 0.0012613245907200311;
B[0, 2] := 1.0786870000714892`*^-6 ;
c[0, 2] := 1.1;

A[1, 0] := 1.2;
B[1, 0] := -0.00008;
c[1, 0] := 1.1;

A[1, 2] := 0.05623484466922404;
B[1, 2] := 0.00001636139872121134;
c[1, 2] := 1.1;
```

Definicija funkcije za jakost prehodov:

```
mu[x_, i_, j_] := A[i, j] + B[i, j] c[i, j]^x
```

Definicija matrike jakosti prehodov:

```
M[x_] := {{-(mu[x, 0, 1] + mu[x, 0, 2]), mu[x, 0, 1], mu[x, 0, 2]},
        {mu[x, 1, 0], -(mu[x, 1, 0] + mu[x, 1, 2]), mu[x, 1, 2]},
        {0, 0, 0}}
```

Začetna verjetnost:

```
P[x_, x_] := {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

rez := {}

rez = Append[rez, P[30, 30]]

{{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}}
```

Korak, ki ga uporabimo pri Runge-Kutta metodi:

```
h = 0.1;
```

Runge-Kutta metoda:

```
For[i = 1, i < 101, i++,
        rez = Append[rez, Last[rez] + h/6*( Last[rez].M[30 + (i - 1)h] +
                2((Last[rez] + h/2Last[rez].M[30 + (i - 1)h]).M[30 + (i - 1 + 1/2)h]) +
                2((Last[rez] + h/2(2((Last[rez] + h/2Last[rez].M[30 +
                (i - 1)h]).M[30 + (i - 1 + 1/2)h]))).M[30 + (i - 1 + 1/2)h]) +
                (Last[rez] + h 2((Last[rez] + h/2(2((Last[rez] +
                h/2Last[rez].M[30 +
                (i - 1)h]).M[30 + (i - 1 + 1/2)h]))).M[30 + (i - 1 + 1/2)h])).M[30 + (i - 1)h])]
]
```

Zanimajo nas samo verjetnosti za cela leta, ki jih zberemo v posebnem seznamu in le ta definira matriko P

```
rez1 := {};

For[i = 1, i < 102, i++,
        If[Mod[i, 10] == 1, rez1 = Append[rez1, rez[[i]]],]
]
```