

UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

OCENJEVANJE NESTANOVITNOSTI SLOVENSKEGA
DELNIŠKEGA TRGA S POMOČJO ARCH MODELOV

Ljubljana, maj 2006

GREGA TORKAR

IZJAVA

Študent GREGA TORKAR izjavljam, da sem avtor tega magistrskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom prof. dr. LOVRENCA PFAJFARJA in skladno s 1. odstavkom 21. člena Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, 15. maja 2006

Podpis: _____

KAZALO VSEBINE

1	UVOD.....	1
2	TRG DELNIC	3
2.1	DEJAVNIKI TRGA	4
2.2	UČINKOVITOST IN LASTNOSTI UČINKOVITEGA TRGA	5
2.3	NEUČINKOVITOST TRGA IN NESTANOVITNOST	7
2.4	SLOVENSKI TRG DELNIC	8
3	NESTANOVITNOST.....	10
3.1	TVEGANJE IN MERA TVEGANJA	13
3.2	ZNAČILNOSTI NESTANOVITNOSTI	17
3.2.1	<i>Skupinjenje nestanovitnosti.....</i>	<i>18</i>
3.2.2	<i>Vztrajnost nestanovitnosti.....</i>	<i>20</i>
3.2.3	<i>So-vztrajnost nestanovitnosti.....</i>	<i>24</i>
3.2.4	<i>Vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti</i>	<i>25</i>
3.2.5	<i>Vzvod in nestanovitnost.....</i>	<i>27</i>
3.2.6	<i>Nestanovitnost in kraki porazdelitve.....</i>	<i>30</i>
3.2.7	<i>Vpliv eksogenih spremenljivk in napovedanih dogodkov na nestanovitnost</i>	<i>31</i>
3.2.7.1	Vpliv makroekonomske nestanovitnosti.....	32
3.2.7.2	Vpliv obsega trgovanja	33
3.2.7.3	Vpliv javnih objav	34
3.2.7.4	Vpliv koledarja.....	35
3.3	PREGLED MODELOV ZA OCENJEVANJE NESTANOVITNOSTI	36
4	ARCH/GARCH MODELI.....	37
4.1	STOHAŠTIČNI PROCES	38
4.2	STACIONARNOST IN NESTACIONARNOST ČASOVNIH VRST	39
4.3	BELI ŠUM	41
4.4	AVTOKORELACIJA IN HETEROSKEDASTIČNOST.....	42
4.4.1	<i>Avtokorelacija.....</i>	<i>42</i>
4.4.2	<i>Heteroskedastičnost.....</i>	<i>43</i>
4.5	ENOTNI KROG IN ENOTNA REŠITEV	45
4.6	ARMA PROCES.....	46
4.6.1	<i>AR proces</i>	<i>48</i>
4.6.2	<i>MA proces</i>	<i>48</i>
4.6.3	<i>ARIMA proces</i>	<i>49</i>
4.7	IZPELJAVA ARCH/GARCH MODELOV.....	50
4.7.1	<i>ARCH.....</i>	<i>50</i>
4.7.2	<i>GARCH.....</i>	<i>53</i>
4.7.3	<i>Nepogojni momenti ARCH procesov.....</i>	<i>56</i>

4.7.3.1	Nepogojna srednja vrednost	56
4.7.3.2	Nepogojna varianca	56
4.7.3.3	Višji momenti ARCH procesa	57
4.7.4	<i>Avtokovarianca in stacionarnost ARCH procesov</i>	59
4.7.5	<i>Časovno združevanje</i>	60
4.7.6	<i>EGARCH</i>	63
4.7.7	<i>GJR model</i>	66
4.7.8	<i>AARCH in ostali asimetrični ARCH modeli</i>	67
4.7.9	<i>IGARCH</i>	68
4.7.10	<i>FIGARCH</i>	70
4.8	TESTI ZA ARCH UČINKE	71
4.9	PRIMERENOST (UČINKOVITOST) ARCH MODELOV ZA NAPOVEDOVANJE NESTANOVITNOSTI	73
4.10	ARCH MODELI ZA OCENJEVANJE TVEGANOSTI PORTFELJA (VAR VREDNOSTI)	75
4.10.1	<i>VaR</i>	75
4.10.2	<i>Multivariatni ARCH procesi</i>	82
4.10.2.1	Multivariatni ARCH model	83
4.10.2.2	Multivariatni GARCH model	84
5	METODE ZA OCENJEVANJE ARCH MODELOV	85
5.1	METODA NAJVEČJEGA VERJETJA	85
5.1.1	<i>Izpeljava, opis metode ocenjevanja</i>	85
5.1.1.1	Definicija	86
5.1.2	<i>Ocenjevanje ARCH modela z MLE</i>	88
6	OCENA NESTANOVITNOSTI SLOVENSKEGA TRGA DELNIC	89
6.1	NESTANOVITNOST SLOVENSKEGA TRGA	89
6.1.1	<i>Slovenski borzni indeks SBI 20</i>	91
6.2	TESTIRANJE ZA ARCH UČINKE	98
6.3	IZBIRA MODELA	100
6.4	RAZLAGA REZULTATOV	102
7	SKLEP	112
8	LITERATURA	114
9	VIRI	119
10	PRILOGE	1

KAZALO SLIK

Slika 1:	Shematski prikaz tvegane vrednosti ($\text{VaR}_{\alpha=0,95}=0,0124$) in pogojne tvegane vrednosti ($\text{CVaR}_{\alpha=0,95}=0,0375$) pri neki empirični porazdelitvi izgub.....	17
Slika 2:	Razkrajanje šoka po dnevih za različne parametre vztrajnosti $\alpha_1 + \beta$ 24	
Slika 3:	Primerjava porazdelitve zvezno sestavljenih donosov indeksa SBI in njegovega naslednika SBI 20 s prilagojeno normalno porazdelitvijo, obdobje od 1993 do 2003.....	31
Slika 4:	Prikaz časovne vrste homoskedastičnega naključnega procesa 43	
Slika 5:	Prikaz časovne vrste heteroskedastičnega naključnega procesa	44
Slika 6:	Enotni krog.....	46
Slika 7:	Gibanje zvezno sestavljenih dnevnih sprememb indeksa SBI in njegove naslednika SBI 20 v obdobju od januarja 1993 do januarja 2004, v %	90
Slika 8:	Gibanje vrednosti indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005	94
Slika 9:	Gibanje zvezno sestavljenih donosov indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005 95	
Slika 10:	Empirična porazdelitev zvezno sestavljenih dnevnih donosov indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005 in primerjava s prilagojeno normalno porazdelitvijo.....	96
Slika 11:	Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 z normalno porazdelitvijo.....	97
Slika 12:	Avtokorelacijska funkcija donosov SBI 20	98
Slika 13:	Parcialna avtokorelacijska funkcija donosov SBI 20	99
Slika 14:	Avtokorelacijska funkcija kvadratov donosov SBI 20	99
Slika 15:	Prikaz vrednosti logaritmov funkcije verjetja v ravnini ARCH – GARCH parametrov 100	
Slika 16:	Gibanje napak	103
Slika 17:	Gibanje standardiziranih napak.....	103
Slika 18:	Porazdelitev standardiziranih napak	104
Slika 19:	Avtokorelacijska funkcija kvadratov standardiziranih napak iz GARCH(1,1) modela 105	
Slika 20:	Primerjava donosov indeksa SBI 20 in pogojnih standardnih odklonov GARCH(1,1,) modela, pomnoženih s $\pm 2,33$	106
Slika 21:	Pogojni standardni odkloni v primerjavi z dolgoročnim pogojnim standardnim odklonom (rdeča črta).....	106
Slika 22:	Vračanje nestanovitnosti k svoji srednji vrednosti po šoku	107
Slika 23:	Primerjava dejanskih donosov SBI 20 in donosov, ocenjenih na podlagi modela GARCH(1,1).....	108
Slika 24:	Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 in donosov iz modela GARCH(1,1) ter primerjava s prilagojeno normalno porazdelitvijo.....	109
Slika 25:	Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 in porazdelitve ocenjenih donosov iz modela GARCH(1,1) s pomočjo kvantilnega grafikona	110
Slika 26:	Napovedi nestanovitnosti za 10 dni v prihodnost (dnevne in kumulativne).....	111

KAZALO TABEL

Tabela 1:	Ocenjeni parametri ARMA(1,1) - ARCH(1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve	53
Tabela 2:	Ocenjeni parametri ARMA(1,1) - GARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve.....	55
Tabela 3:	Ocenjeni parametri ARMA(1,1) - EGARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve.....	65
Tabela 4:	Ocenjeni parametri ARMA(1,1) - GJR(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve .	67
Tabela 5:	Rezultati Englovega ARCH testa pri različnih odlogih	72
Tabela 6:	Rezultati L-B-Q testa za različne odloge napak (ε_t)	73
Tabela 7:	Rezultati L-B-Q testa za različne odloge kvadratov napak (ε_t^2)	73
Tabela 8:	Osnovne statistike zvezno sestavljenih dnevnih donosov indeksa SBI 20 v proučevanem obdobju	96
Tabela 9:	Rezultati Jarque-Bera testa o normalnosti porazdelitve donosov SBI 20	97
Tabela 10:	Ocenjeni parametri GARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve	100
Tabela 11:	Primerjava primernosti modelov za ocenjevanje nestanovitnosti slovenskega borznega indeksa SBI 20 s pomočjo Akaikovega (AIC) in Bayesijskega (BIC) informacijskega kriterija ter maksimumov logaritma funkcije verjetja	101
Tabela 12:	Rezultati Jarque-Bera testa o normalnosti porazdelitve standardiziranih napak	104
Tabela 13:	Rezultati Kolmogorov-Smirnovega testa o podobnosti porazdelitve donosov SBI 20 in porazdelitve ocenjenih donosov iz modela GARCH(1,1)	109
Tabela 14:	Napovedi kumulativnih vrednosti nestanovitnosti indeksa SBI 20 za 10 dni	111

1 UVOD

V sodobnem finančnem svetu si je težko zamisliti ad hoc investiranje brez vsakršne vnaprejšnje analize lastnosti investicijskih možnosti. Investiranje obsega različne posamične investicijske možnosti, med katerimi se mora finančni investitor odločati. V okviru možnosti mora investitor izbrati tak portfelj (košarico, nabor) investicij, da mu le-ta prinaša optimalno kombinacijo med njegovimi željami po visokih donosih in njegovo sposobnostjo prenesti morebitne izgube. Opisane lastnosti investitorja govorijo o njegovi nagnjenosti k tveganju. Poznamo investitorje, ki so tveganju naklonjeni, ki tveganju niso naklonjeni in take, ki so do tveganja nevtralni (Ribnikar, 1997, str. 165). Donosi posameznih investicij so različno tvegani, vendar s pravilno kombinacijo posameznih investicij (govorimo o razpršitvi tveganja) lahko tveganje celotne košarice investicij omejimo, saj investicije med seboj niso v popolni zvezi (korelaciji). Zaradi oblikovanja pravih investicijskih odločitev in spremljanja izpostavljenosti tveganju je v dobi investicij proučevanje tveganja postalo pomemben dejavnik pri obvladovanju tveganj (*risk management*) ter predmet mnogih raziskovanj sodobnega finančnega sveta. Tveganje posamezne investicije je odvisno od nestanovitnosti cene (tečaja) investicije. Ceno investicije, ki je bolj nestanovitna, je za prihodnost težje napovedati, kar pomeni, da je bolj tvegana oziroma da bo vrednost premoženja investitorja v prihodnosti težko določljiva. Mnoge investicijske odločitve so tako v tesni povezavi z nestanovitnostjo. Nestanovitnost ni isto kot tveganje, vendar, če jo interpretiramo kot negotovost, postane ključni dejavnik pri mnogih naložbenih odločitvah in snovanju portfelja (Poon, Granger 2002, str. 3). Nestanovitnost se meri s standardnim odklonom cene posamezne investicijske možnosti (portfelja), ki kaže interval, ki ga cena lahko zavzame. Večji kot je ta interval, bolj je cena naložbe spremenljiva in naložba tudi bolj tvegana.

Investicijske odločitve investitorjev v sedanjosti so odvisne od pričakovanj glede dogodkov v prihodnosti, ki bi lahko vplivali na vrednost premoženja. Zaradi lažjega odločanja so se razvili različni modeli za napovedovanje bodočih donosov investicij, ki temeljijo na preteklih izkušnjah. Kot smo že ugotovili, so prihodnji donosi v veliki povezanosti z nestanovitnostjo cen investicij, zato je napovedovanje prihodnje nestanovitnosti cen tudi tako zaželeno. Prihodnja vrednost cene se lahko določi na podlagi verjetnosti, poznavanje tako določene cene pa zmanjša tveganje, ki se mu investitor s svojimi odločitvami izpostavlja.

Na nestanovitnost cen vrednostnih papirjev kot eni izmed oblik finančnega premoženja vpliva veliko dejavnikov. Poleg eksogenih spremenljivk na nestanovitnost cen vplivajo tudi pretekle vrednosti same nestanovitnosti. Nestanovitnost cen naložb je tako povezana s preteklo nestanovitnostjo, hkrati pa se v času tudi spreminja (Mandelbrot, 1963). Engel je v svoji razpravi iz leta 1982 predstavil ARCH model (s heteroskedastičnostjo pogojen avtoregresijski model) za napovedovanje nestanovitnosti inflacije v Veliki Britaniji, uporabnost modela pa se je dobro izkazala tudi v finančnem svetu za napovedovanje nestanovitnosti donosov naložb. Pomembnost njegovega odkritja je bila tudi priznana, saj je za omenjeno delo v letu 2003 prejel tudi Nobelovo nagrado za ekonomijo. V mnogih raziskavah je bila dokazana uporabnost modela oziroma njegovih izpeljank. Model za napovedovanje nestanovitnosti mora biti sposoben napovedati nestanovitnost določene finančne oblike za določeno obdobje v

prihodnosti. Napovedi nestanovitnosti lahko nadalje služijo za napovedovanje donosov investicij, ki jih potrebujemo pri upravljanju s tveganji, vrednotenju opcij, izbiri portfelja itd.

Napovedovanje in analiziranje finančnih podatkov je potrebno tudi v slovenskem gospodarstvu, ki se je v začetku devetdesetih let prejšnjega stoletja preoblikovalo iz socialističnega v kapitalistični sistem. Prehod iz enega gospodarskega in družbenega sistema v drugega je v slovensko in druga podobna gospodarstva prinesel nekaj posebnosti na finančnem področju, ki za stara in uveljavljena kapitalistična gospodarstva ne veljajo.

S tranzicijo se je uveljavilo trgovanje z različnimi finančnimi oblikami preko trga (borze). Ena izmed značilnosti tranzicijskih finančnih trgov, ki se omenja v študijah (Pryymachenko, 2003, str. 1), je, da so cene delnic na teh trgih zelo nestanovitne. Napovedovanje nestanovitnosti delnic je zato pomembno tudi v Sloveniji, saj je potrebno tveganja, ki izhajajo iz kupoprodaj vrednostnih papirjev, pravilno oceniti, spremljati in omejiti. Pri tem nam je lahko v veliko pomoč dober model za napovedovanje prihodnjih gibanj cen vrednostnih papirjev in poznavanje lastnosti nestanovitnosti ter njeno napovedovanje.

Za pravilno napovedovanje nestanovitnosti je potrebno izbrati pravilen model, ki se najbolj prilagaja dejanskim podatkom, da so lahko napovedi modela dovolj verodostojne za nadaljnjo uporabo. Namen magistrskega dela je predstaviti problem nestanovitnosti cen na finančnih trgih in poiskati model za napovedovanje nestanovitnosti cen na delniškem trgu v Sloveniji, ki bo dovolj dobro opisal značilnosti slovenske nestanovitnosti cen delnic in bo lahko uporaben tudi za nadaljnje analize investicijskih možnosti. Namen dela je tudi teoretično osvetliti ARCH družino modelov za napovedovanje, z njihovimi prednostmi in tudi nekaterimi pomanjkljivostmi. Modele smo analizirali na podlagi proučevanega vzorca podatkov o dnevnem gibanju delniškega indeksa SBI 20 Ljubljanske borze vrednostnih papirjev d.d. v obdobju od julija 2000 do marca 2005.

Osnovna hipoteza, ki je bila tudi potrjena, pravi, da so cene na slovenskem delniškem trgu nestanovitne in da je ta nestanovitnost podvržena lastnostim ARCH procesa. Na podlagi tega trdimo, da je mogoče s pomočjo ARCH modela (z GARCH(1,1)) dobro opisati nestanovitnost cen na slovenskem delniškem trgu, kar je bilo potrjeno s statistično značilnimi regresijskimi koeficienti izbranega modela.

Delo je zasnovano na strukturi treh vsebinskih sklopov. V prvem sklopu je predstavljena nestanovitnost s svojimi značilnostmi, ki so bile ugotovljene in potrjene skozi mnoge znanstvene razprave. V drugem delu smo se osredotočili na teorijo ARCH procesov. Temu sledi tretji sklop, ki je posvečen ocenjevanju nestanovitnosti indeksa SBI 20 in razlagi rezultatov modela za ocenjevanje nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu.

2 TRG DELNIC

Osnovna vloga finančnih trgov je, da prenašajo svoja denarna sredstva od ekonomskih subjektov, ki imajo presežke, k subjektom, ki po njih povprašujejo (Prohaska, 1999, str. 17). Finančni trgi se v splošnem delijo na denarne in kapitalske trge. Denarni trg tvorijo institucije, instrumenti ali finančne oblike in vsi posli, pri katerih gre za prenos finančnih sredstev na kratek rok. Mejo med denarnim in kapitalskim trgom je težko določiti, saj se trga medsebojno zelo prepletata. Kapitalski trg (domači ali mednarodni) je trg, na katerem se banke, multilateralne organizacije (kot na primer Svetovna banka) in podjetja lahko zadolžujejo ali vlagajo velike količine denarja na srednji ali dolgi rok (več kot eno leto). Prav tako kot denarni trg je tudi kapitalski trg sredstvo za učinkovit prenos kapitala od povpraševalcev k ponudnikom. Domači kapitalski trg deluje znotraj finančnega sistema posamezne države in zanj veljajo zakonodajna določila te države, medtem ko za mednarodni kapitalski trg velja, da ni v pristojnosti oziroma pod kontrolo posamezne nacionalne države. Večina mednarodnih trgov je razvila svoje postopke za samoreguliranje, vendar so udeleženci na teh trgih še vedno pod nadzorom nadzornih institucij iz svojih nacionalnih držav.

Osnovni instrumenti kapitalskega trga se delijo na vrednostne papirje s stalnim donosom oziroma dolžniške vrednostne papirje in na vrednostne papirje s spremenljivim donosom oziroma lastniške vrednostne papirje. Obe vrsti instrumentov za podjetja predstavljajo vire sredstev, s katerimi zbirajo sredstva za svoje poslovanje. Lastniški instrumenti za podjetja predstavljajo lastniški kapital, s pomočjo katerega njegovi lastniki vplivajo na poslovne odločitve podjetja. Podjetja zberejo lastna sredstva ali lastniški kapital na dva načina oziroma z dvema vrstama delnic: z navadnimi in prednostnimi delnicami. Tako navadne kot prednostne delnice se ločijo od dolžniških vrednostnih instrumentov tako, da delnice:

- nimajo roka zapadlosti,
- zagotavljajo pravico do dividende, če je le-ta najavljena,
- zagotavljajo višje možne donose, če cena delnice v obdobju naraste zaradi dobrega poslovanja podjetja in/ali trga,
- predstavljajo višje tveganje, saj v primeru izgube podjetja dividende niso izplačane, v primeru stečaja podjetja pa so lastniki delnic zadnji, ki bodo poplačani iz sredstev podjetja. Pred njimi imajo prednost vsi, ki imajo do podjetja terjatve, tako banke kot tudi lastniki dolžniških vrednostnih papirjev.

Pravice, ki izhajajo iz navadnih delnic, so navadno določene z zakoni posameznih držav in internimi pravili delniških družb. Prednosti, ki izhajajo iz lastništva prednostnih delnic, se kažejo v tem, da dajejo prednost pri izplačilu dividend, hkrati pa imajo lastniki tudi prednost pri poplačilu v primeru stečaja podjetja. Navadne delnice lastnikom dajejo pravico, da volijo upravo podjetja in sodelujejo pri odločanju o večjih odločitvah o podjetju, medtem ko prednostne delnice glasovalne pravice nimajo.

Na kapitalskih trgih se pojavljajo tudi finančni instrumenti, ki posedujejo lastnosti tako dolžniških kot tudi lastniških instrumentov. Ti instrumenti se strokovno imenujejo hibridni instrumenti in se na primer lahko uporabljajo za povečanje regulatornega kapitala v okviru zagotavljanja kapitalske ustreznosti bank¹. Z njimi se doseže večja fleksibilnost, ki se z osnovnimi instrumenti ne more doseči. Med hibridne instrumente spadajo zamenljive obveznice, ki lastniku omogočajo, da se obveznice pod določenimi pogoji spremenijo v delnice. Zamenljiva obveznica je izdana z določeno zapadlostjo in določenim kuponom tako kot običajna obveznica. Lastnik zamenljive obveznice ima možnost, da obveznico zamenja za delnico po določeni ceni, ki jo določa pogodba.

Na delniškem trgu se lahko trguje tudi z izvedenimi lastniškimi instrumenti, ki so lahko raznih oblik in variacij z velikim naborom različnih lastnosti. Med najbolj poznanimi izvedenimi finančnimi instrumenti, pri katerih je delnica osnovni finančni instrument, sta terminska pogodba in opcija. Obe obliki imata razne variacije, s katerimi se lahko trguje na organiziranem ali neorganiziranem trgu.

Sam kapitalski trg se deli na primarni trg, na katerem se odvijajo prve prodaje oziroma izdaje vrednostnih papirjev, in sekundarni trg, ki služi za vse nadaljnje prodaje in nakupe vrednostnih papirjev. Primarni trg je trg, na katerem podjetja zbirajo kapital, tako dolžniškega kot lastniškega, na sekundarnem pa se odvija trgovanje na trgu, ki mora zagotoviti mehanizme in postopke, po katerih se lahko obveznice in delnice prenašajo od prodajalcev h kupcem.

2.1 DEJAVNIKI TRGA

Spoznali smo, da finančni trgi služijo za prenos sredstev od tistih, ki imajo presežke, k tistim, ki jim sredstev primanjkuje in po njih povprašujejo. V splošnem je dober trg tisti, ki zagotavlja lahek in poceni prenos dobrin in storitev med ponudniki in povpraševalci, hkrati pa se na njem lahko trguje z raznovrstnimi dobrinami in storitvami. Kot velja za vsak trg, mora tudi dober delniški trg imeti naslednje lastnosti oziroma dejavnike, ki ga določajo (Practical Introductions to International Capital Markets, International Equity Markets, 1991, str. 7):

- Informacije o cenah in obsegu preteklih transakcij na trgu morajo biti pravočasne in točne, prav tako mora biti znana ponudba in povpraševanje. Ko nekdo vstopi na trg z namenom, da bo nekaj hitro kupil oziroma prodal, mora imeti na voljo pravočasne in točne informacije.
- Trg mora biti likviden, kar pomeni, da je sredstvo možno hitro prodati oziroma kupiti po znani ceni. Pri likvidnosti je potrebno upoštevati dve stvari, in sicer čas, ki je potreben, da se transakcija izvrši, ter samo gotovost cene.
- Transakcijski stroški morajo biti nizki oziroma trg mora biti *notranje učinkovit*. Trg je učinkovit, čim nižji so transakcijski stroški v odstotkih od vrednosti posla.

¹ Sklep o kapitalski ustreznosti bank in hranilnic določa, da so lahko hibridni instrumenti vključeni v kapital banke v okviru dodatnega kapitala I in II.

- Na trgu se morajo cene hitro prilagoditi novim informacijam, čemur pravimo *zunanja učinkovitost*. Če se pogoji ponudbe in povpraševanja spremenijo zaradi prihoda novih informacij, potem bodo udeleženci na trgu hoteli, da se te informacije odrazijo tudi v ceni finančnega sredstva.

Za zagotovitev pravočasnosti in točnosti informacij o cenah mora biti trg pregleden, za zagotovitev likvidnosti trga pa mora biti na njem veliko udeležencev, ki nepretrgoma kupujejo in prodajajo svoja finančna sredstva. Likvidnost določa tako imenovano globino trga, ki je odvisna od same razvitosti trga. Globina pomeni število in obseg transakcij, ki se opravijo na posameznem trgu. Finančni trgi so najbolj globoki v velikih finančnih središčih, na katerih poteka trgovanje s finančnimi sredstvi tudi na globalni ravni in ne samo na nacionalni oziroma lokalni ravni. Na teh trgih se srečujejo ponudniki in povpraševalci iz celega sveta. Na trgih, ki imajo značaj bolj nacionalnih oziroma lokalnih trgov, je globina nižja, vendar so trgi z vidika lokalnega prostora še vedno globoki. Globina na posameznem trgu je lahko različna tudi na posameznem segmentu trga, kar pomeni, da je lahko trgovanje z določenimi finančnimi instrumenti zelo razvito, z drugimi pa ne.

Globina trga je najbolj pomembna lastnost finančnih trgov, ker ima posledice na celotno delovanje trga. Globok finančni trg, kot ga poznajo razvite finančne ekonomije, ima lastnosti učinkovitega trga, o čemer bo več govora v naslednjem poglavju. Od globine trga je odvisno tudi porazdeljevanje ocen cen posameznih vrednostnih papirjev in njihovo (ne)normalno gibanje. Za cene finančnih instrumentov je značilno, da so nestanovitne in s tem so nestanovitni tudi donosi. Bolj kot se trg približuje delovanju zelo razvitega trga, bolj se bodo razmere v delovanju trga približale nekim normalnim razmeram, kar pomeni, da bodo odstopanja donosnosti (donosov) od povprečne vrednosti (pričakovane vrednosti) manjša. Če so pričakovane napovedi bolj točne, potem je število ekstremnih odstopanj manjše, kar vpliva na nestanovitnost donosnosti finančnega premoženja, ki je v takih razmerah nižja. Vendar pa je potrebno upoštevati, da se v času na finančnih trgih spreminja tudi sama nestanovitnost, ki ima poleg značilnosti skupinjenja v času tudi nekatere druge lastnosti, ki bodo opisane v nadaljevanju.

2.2 UČINKOVITOST IN LASTNOSTI UČINKOVITEGA TRGA

Učinkovitost kapitalskih trgov se deli na tri vrste, in sicer: alokativno, transakcijsko in informacijsko učinkovitost. Alokativna ali Paretova učinkovitost ocenjuje učinke na blaginjo zaradi alokacije virov. Pri transakcijski učinkovitosti nas zanimajo stroški in tveganja, ki nastanejo pri menjavi ekonomskih virov (blago in storitve) in finančnih virov na trgu. Informacijska učinkovitost govori o odnosu med cenami in informacijami. *Hipoteza o učinkovitosti trga* se nanaša prav na informacijsko učinkovitost. Fama (1970, str. 383) pravi, da je trg učinkovit, ko cene vrednostnih papirjev vedno v celoti odsevajo vse razpoložljive informacije. Na takih trgih cene odsevajo prave signale za alokacijo virov in lahko podjetja sprejemajo odločitve o proizvodnji oziroma investicijah, hkrati pa vlagatelji lahko izbirajo med vrednostnimi papirji, ki odražajo aktivnosti teh podjetij. Za učinkovit trg kapitala torej velja, da tekoče cene vrednostnih papirjev vsebujejo vse razpoložljive informacije. Iz povedanega sledi, da so spremembe cen vrednostnih papirjev izključno posledica novih informacij, ki jih ni možno izluščiti iz

preteklih informacij. Če bi bilo možno te nove informacije dobiti iz starih informacij, to ne bi bile nove informacije, saj bi se kot razpoložljive informacije že odražale v tekočih cenah vrednostnih papirjev. Tekoče informacije so zato neodvisne od prejšnjih in tudi spremembe cen vrednostnih papirjev so neodvisne od prejšnjih sprememb (Mramor, 1991, str. 86).

Učinkovit trg kapitala je tudi popoln, saj tako kot v pogojih popolnega trga kapitala, tudi v pogojih učinkovitega trga ni možno povečati koristnosti finančnim investitorjem drugače kot s povečanjem tržne vrednosti podjetja. Popoln trg kapitala ima naslednje značilnosti (Mramor, 1991, str. 21):

1. Trg kapitala deluje brez trenja, kar pomeni, da:
 - ni transakcijskih stroškov,
 - ni stroškov stečaja in drugih stroškov finančne stiske,
 - ne obstajajo stroški v zvezi z različnimi cilji lastnikov podjetja in menedžerjev (stroški agentov),
 - ni davkov,
 - ne obstaja zakonodaja, ki bi omejevala prosto delovanje trga, zato imajo tudi vsi ekonomski subjekti prost dostop do trga kapitala in
 - so vsa sredstva popolnoma deljiva in se prodajajo ter kupujejo na trgu kapitala.
2. Na trgu kapitala je popolna konkurenca, kar pomeni, da so za vsak posamezni ekonomski subjekt, ki na tem trgu deluje, cene vrednostnih papirjev dane.
3. Trg je informacijsko učinkovit, kar pomeni, da ni informacijskih stroškov oziroma da vsi udeleženci na trgu kapitala sočasno dobivajo vse informacije.
4. Vsi udeleženci na trgu kapitala se obnašajo racionalno, in sicer sprejemajo takšne poslovne odločitve, ki maksimirajo njihovo koristnost. Koristnost poslovnih odločitev je tem večja, čim večjo potrošnjo omogoča.

Ker je v stvarnosti zelo težko doseči pogoje popolnega trga kapitala, je pomembno odgovoriti na vprašanje, ali je lahko učinkovit tudi nepopolni trg kapitala. Da bi ugotovili, ali je nepopoln trg kapitala učinkovit, je potrebno preveriti, ali so zaporedne cene vrednostnih papirjev neodvisne med seboj (tekoče spremembe cen so neodvisne od prejšnjih sprememb). Če so cene med seboj neodvisne, potem lahko za tak trg kapitala rečemo, da je učinkovit. Pri empiričnem preverjanju učinkovitosti trga kapitala je bila omenjena hipoteza preverjena v treh oblikah, in sicer (Mramor, 1991, str. 87 in Fama, 1970, str. 389–413):

1. *Šibka oblika* predpostavlja, da finančni investitor ne more doseči večjega donosa svojih finančnih naložb tako, da razvije pravila trgovanja z vrednostnimi papirji, ki temeljijo na *preteklih informacijah* o cenah ali donosnostih vrednostnih papirjev.
2. *Srednje močna oblika* predvideva, da finančni investitor ne more doseči večjega donosa svojih naložb tako, da razvije pravila trgovanja, ki bi temeljila na *katerihkoli javno razpoložljivih informacijah*.

3. *Močna oblika* pravi, da finančni investitor ne more doseči večjega donosa svojih finančnih naložb s tem, da bi razvil pravila trgovanja, ki bi temeljila na *katerihkoli informacijah*.

Na podlagi empiričnih raziskav lahko za trge kapitala finančno najbolj razvitih tržnih gospodarstev z dokajšnjo gotovostjo trdimo, da imajo srednje močno obliko učinkovitosti. Na podlagi rezultatov empiričnih analiz za te trge lahko predpostavimo, da so tudi nepopolni, vendar razviti trgi kapitala, učinkoviti (Mramor, 1991, str. 87).

2.3 NEUČINKOVITOST TRGA IN NESTANOVITNOST

Nestanovitnost vnaša na kapitalske trge določeno stopnjo negotovosti. Ugotavljanje virov in vzrokov nestanovitnosti nam lahko pomaga pri raziskovanju učinkovitosti kapitalskega trga. Kot smo že ugotovili pri teoriji o učinkovitosti trga, naj cene oziroma donosnosti vrednostnih papirjev ne bi bile medsebojno korelirane. Iz tega lahko sklepamo, da za neučinkovit trg velja, da so zaporedne cene oziroma donosnosti vrednostnih papirjev med seboj povezane in da tekoče cene ustvarjajo prihodnja pričakovanja o gibanju cen oziroma donosnosti. Do takih razmer na kapitalskih trgih lahko pride v času špekulativnega mehurčka, ki nastane, ko cene naložb naraščajo zaradi pričakovanj o višjih cenah v prihodnosti. V takih primerih cene variirajo zaradi pričakovanj o prihodnjih cenah in zaradi novic o informacijah (Pryymachenko, 2003, str. 9).

Če na kapitalskem trgu ni učinkovitosti, to pomeni, da vse informacije niso dostopne vsem udeležencem in zato tudi obstaja velika razpršenost informacij. V tem primeru vsi investitorji ne razlagajo z vsemi informacijami pravilno in ima vsak investitor svojo razlago informacij. Ob veliki razpršenosti informacij obstaja tudi veliko možnih ocen porazdelitev cen vrednostnih papirjev. Več kot je ocen, večja je razpršenost ocen cen vrednostnih papirjev od prave cene oziroma večja je nestanovitnost cen, kar se odraža v večjem tveganju pri napovedovanju cen in večjem možnem odstopanju cen vrednostnih papirjev. Večja nestanovitnost donosov se odraža v diskontnem faktorju², ki po teoriji določa trenutno ceno delnice, ki je sedanja vrednost prihodnjih denarnih tokov iz delnic. Če je diskontni faktor zelo nestanovit, potem bodo tudi trenutne cene delnic nestanovite.

Tveganje finančni investitorji ocenjujejo sami, ko ocenjujejo možno porazdelitveno funkcijo cene vrednostnega papirja v prihodnosti. Investitor namreč lahko pričakuje donosnost nekega vrednostnega papirja, ne ve pa, kolikšno je tveganje, da donosnost ne bo dosegla pričakovane vrednosti. Variabilnost možnih cen v prihodnosti dobro ponazarja to tveganje. Čim večja je namreč variabilnost, tem večja je verjetnost, da bo dejanska cena odstopala od pričakovane (Mramor, 1991, str.

² Sedanja vrednost lastniškega papirja (Mramor, 1991, str. 40):

$$PV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Div_n}{(1+r)^n}, \text{ kjer je } PV \text{ sedanja vrednost delnice oziroma cena, } Div \text{ dividenda v posameznem obdobju in } 1/(1+r) \text{ diskontni faktor.}$$

44). Z neko ocenjeno verjetnostno porazdelitvijo lahko investitor pri določeni stopnji tveganja torej oceni ceno vrednostnega papirja. Vsak investitor ima zato svoja predvidevanja o porazdelitvi cen in donosov vrednostnih papirjev. Bolj ko bodo ta predvidevanja različna, več bo tudi ocen o gibanju prihodnjih cen in ocen prihodnjih cen vrednostnih papirjev.

2.4 SLOVENSKI TRG DELNIC

Slovenski trg lastniških vrednostnih papirjev se je začel pospešeno razvijati v obdobju tranzicije slovenskega gospodarstva, ko so se privatizirala družbena podjetja oziroma pravilneje, ko so družbena podjetja začela dobivati prave lastnike, saj smo bili pred tem vsi njihovi lastniki preko družbene lastnine. O privatizaciji v pravem pomenu besede torej težko govorimo, saj se je izraz uveljavil v primerih, ko lastnika spreminjajo državna podjetja, ko prehajajo v zasebno last. V tem primeru država prodaja lastna podjetja zasebnikom. V Sloveniji se je s privatizacijo družbeno premoženje razdelilo med posameznike in državo in je šlo dejansko za lastninsko preoblikovanje podjetij.

Slovenija je potrebovala dobro organiziran, pregleden in likviden trg, ki bi deloval z nizkimi stroški in bi pomagal usmerjati kapital v produktivne naložbe. Tak trg je bil potreben tudi zaradi lastninskega preoblikovanja podjetij. Proces lastninskega preoblikovanja je imel močan vpliv na samo segmentacijo delniškega trga, saj so se na trgu pojavili novi udeleženci (na primer PID-i) in novi vrednostni papirji. Število delnic, s katerimi se je trgovalo na Ljubljanski borzi d. d. (v nadaljevanju: ljubljanska borza) v letih 1996–1998, kaže, da so privatizacijske delnice očitno prispevale k povečanju deleža lastniškega kapitala in k celotnemu povečanju trga vrednostnih papirjev, kar se je pokazalo tudi v povečanju tržne kapitalizacije in prometu pri trgovanju z delnicami (Deželan, 2000, str. 63–64). V Sloveniji se je zaradi opisanih dejavnikov razvil predvsem sekundarni kapitalski trg, medtem ko je primarni trg kapitala v Sloveniji ostal bolj nerazvit.

Pri razvoju slovenskega trga kapitala lahko opazimo tri stopnje razvoja (Deželan, 2000, str. 63). Na prvi stopnji razvoja se je trgovalo le z dolžniškimi vrednostnimi papirji in ustanovitev borze je še dodatno pospešila razvoj kapitalskega trga v Sloveniji. Drugo stopnjo najbolj zaznamuje razvoj pravnega in nadzorniškega okolja. Na tej stopnji se je ljubljanska borza tudi tehnično izpopolnila in pričela s procesom dematerializacije vrednostnih papirjev. To je pripomoglo k preprečevanju poneverb in raznih manipulacij ter omogočilo organiziranje lažjega in cenejšega trgovanja. Za zadnjo stopnjo razvoja slovenskega kapitalskega trga pa je predvsem značilen zaključek procesa lastninskega preoblikovanja podjetij in odpiranje kapitalskega trga mednarodnim investicijskim tokovom.

V procesu preoblikovanja lastništva podjetij je svojo vlogo odigrala tudi ljubljanska borza. Ustanovljena je bila že leta 1924, vendar je bila zaradi druge svetovne vojne leta 1941 zaprta in leta 1953 uradno ukinjena. Borza je ostala zaprta skoraj pol stoletja. Ponovno so jo ustanovili leta 1989, ko so se v Sloveniji pričele odvijati gospodarske reforme. Razvoj novodobnega slovenskega finančnega trga je povezan prav z gospodarskimi reformami v nekdanji Jugoslaviji, ki so tudi omogočile nastanek

kapitalskega trga in organiziranje borze vrednostnih papirjev v Sloveniji. Ljubljansko borzo vrednostnih papirjev je 26. decembra leta 1989 uradno ustanovilo 33 bank, prvo trgovanje pa se je odvijalo 29. marca naslednjega leta, ko je 14 borznih posrednikov trgovalo z enajstimi vrednostnimi papirji. Leta 1991 so na ljubljanski borzi pretežno trgovali z lastniškimi vrednostnimi papirji. Prelomnico v zgodovini ljubljanske borze pomeni tudi leto 1996, ko so na borzo prišle delnice podjetij iz lastninskega preoblikovanja.

Ljubljanska borza je organizirana kot delniška družba. Njen osnovni kapital je na dan 31. 12. 2004 znašal 417 milijonov tolarjev. Ob koncu leta 2004 je bilo 34 delničarjev borze, med katerimi je bilo 27 članov borze in 7 nečlanov. Člani borze so banke in borzoposredniške hiše, ki izpolnjujejo predpisane pogoje in imajo dovoljenje Agencije za trg vrednostnih papirjev za opravljanje tovrstnih poslov. Trgovanje je v začetku borze potekalo dvakrat tedensko, po petih letih pa je prešlo na vsakodnevno trgovanje, ki traja vsak delovni dan od 9:30 do 13. ure. Trgovanje z vrednostnimi papirji, ki so na borzi, poteka že od 24. januarja 1994 preko elektronskega trgovalnega sistema. Sedanji elektronski sistem za trgovanje se imenuje borzni trgovalni sistem (BTS), do leta 1999 pa je trgovanje potekalo po trgovalnem sistemu BIS. Dnevne poravnave sklenjenih poslov na borzi potekajo preko Klirinško depotne družbe d. d. Z vrednostnimi papirji se na ljubljanski borzi trguje v treh kotacijah, in sicer v borzni kotaciji A, borzni kotaciji B in na prostem trgu. Za uvrstitev v borzni kotaciji A in B mora biti prodaja vrednostnega papirja predhodno odobrena s strani Agencije za trg vrednostnih papirjev in mora hkrati izpolnjevati stroge pogoje ljubljanske borze. Za uvrstitev v borzno kotacijo A so pogoji borze najbolj strogi. Na prostem trgu, ki se imenuje tudi OTC, se trguje z vrednostnimi papirji, ki ne izpolnjujejo pogojev za uvrstitev v kotaciji A ali B. Z vrednostnimi papirji se v Sloveniji trguje tudi na neorganiziranem oziroma sivem trgu.

O učinkovitosti slovenskega delniškega trga je raziskavo opravila Deželanova (2000, str. 71–79), in sicer je preverjala šibko obliko učinkovitosti delniškega trga v obdobju od januarja 1994 do marca 1998 na podlagi indeksov SBI in LB 13. Na podlagi preverjanja avtokorelacije je avtorica ugotovila značilno avtokoreliranost med dnevnimi donosnostmi, kar na hitro razvijajočem se trgu ne pomeni, da je trg neučinkovit. Rezultati ostalih testov, ki so bili uporabljeni v raziskavi, so pokazali, da je slovenski trg delnic bolj neučinkovit kot učinkovit. Avtorica zaključuje, da je na podlagi rezultatov testiranja težko reči, da je slovenski delniški trg šibko učinkovit, temveč rezultati kažejo na šibko neučinkovitost trga.

3 NESTANOVITNOST

Nestanovitnost oziroma volatilnost³, kot se izraža s tujko, je mera gibanja (razmika) cene vrednostnega papirja okrog povprečne vrednosti cene v določenem časovnem obdobju. Glede na to, da gre za gibanje cene vrednostnega papirja okrog njene povprečne vrednosti, je nestanovitnost povezana z varianco cene vrednostnega papirja. Nestanovitnost odraža tveganost vrednostnega papirja, saj cena bolj nestanovitnih vrednostnih papirjev bolj niha kot cena papirjev, ki so manj nestanovitni. Investitorje, ki svoje denarne presežke nalagajo v finančne naložbe, med katere spadajo tudi lastniški vrednostni papirji (delnice), zanima cena vrednostnega papirja ob njegovi prodaji. Če je cena papirja zelo nestanovitna, bo njegovo ceno ob prodaji v primerjavi z manj nestanovitim papirjem zelo težko oziroma težje določiti. Zato investorje zanima, kolikšnemu tveganju oziroma nestanovitnosti se z nakupom izpostavljajo, kar kaže na še večji pomen in zaželenost ocenjevanja nestanovitnosti.

Nestanovitnost je pojem, ki opisuje značilnost finančnih trgov, da se lahko cene oziroma tečaji finančnih sredstev spreminjajo navzgor ali navzdol v dokaj kratkem časovnem razdobju, njihova povprečna višina pa lahko ostaja na daljši rok nespremenjena. Ribnikar (1999, str. 46–47) govori o dveh pomenih nestanovitnosti oziroma volatilnosti vrednostnih papirjev. *Prvi* pomen nestanovitnosti zanj predstavlja gibanje vrednostnih papirjev v smislu zniževanja ali zviševanja njihove povprečne cene – borznega indeksa. Za povprečne cene vrednostnih papirjev se lahko ugotavlja njihova spremenljivost na dnevni ravni, kjer se izračunava povprečje in standardni odklon s pomočjo urnih vrednosti borznega indeksa ali celo na podlagi vrednosti v krajših časovnih intervalih (na primer 15 minutne vrednosti). Nestanovitnost borznega indeksa se lahko ugotavlja tudi na letni ravni, kjer se leta izračunava s pomočjo dnevnih vrednosti borznega indeksa. *Drugi* pomen nestanovitnosti po Ribnikarju označuje nestanovitnost, spremenljivost cene ali tečaja posameznega vrednostnega papirja. V smislu tega pomena nestanovitnosti je zanimiva nestanovitnost lastniškega vrednostnega papirja, ko investitor primerja njegovo nestanovitnost z nestanovitnostjo vseh delnic na trgu (tržnim portfeljem). Nestanovitnost posamezne delnice je enaka nestanovitnosti borznega indeksa (izraža tržni portfelj), ko je vrednost koeficienta beta (β) te delnice enaka 1 (Ribnikar, prav tam). Matematično koeficient beta pomeni, da gre za količnik med kovarianco delnice s tržnim portfeljem in varianco tržnega portfelja. Če je koeficient višji od 1, je tečaj delnice zelo nestanoviten in obratno, če je koeficient nižji od 1, je tečaj delnice bolj stanoviten od povprečja (Ribnikar, prav tam). Glede na velikost količnika lahko razvrščamo vrednostne papirje v skupine papirjev, na primer na vrednostne papirje z nizko, povprečno in visoko nestanovitnostjo.

Pomen nestanovitnosti donosov lastniških vrednostnih papirjev se kaže v tem, da z naraščanjem nestanovitnosti narašča tudi tveganost držanja teh papirjev. Chou (1988, str. 279) pravi, da sta že Malkiel in Pindyck ugotovila, da je bilo naraščanje nestanovitnosti od 60-ih do sredine 80-ih let

³ Beseda volatilnost je latinskega izvora iz besed »volatilis« ali »volaticus«, ki pomenita izhlapljiv, vihrav, živahen, leteč (Ribnikar, 1999, str. 46).

prejšnjega stoletja glavni razlog za padec cen delnic. Po besedah Chou-ja (1988, str. 279) je Pyndick to razlagal s tem, da se je varianca bruto realnega mejnega donosa podjetij pomembno povečala od leta 1965, zaradi česar se je povečala relativna tveganost neto realnega donosa investorjev zaradi držanja delnic. To se je posledično odrazilo v padcu trga oziroma je pomembno prispevalo k padcu trga.

Kot pravita Poon in Granger (2002, str. 3), nestanovitnost ni isto kot tveganje, vendar v primeru, ko jo razlagamo kot negotovost, postane ključni dejavnik pri investicijskih odločitvah in snovanju portfelja. Investitorji in vsi, ki se ukvarjajo z naložbami, imajo določene meje tveganja, do katerih so še sposobni prenesti tveganje. Dobra osnova za ocenjevanje tveganja je zato dobra napoved nestanovitnosti cene naložbe v obdobju njenega držanja.

Ocenjevanje nestanovitnosti je zelo pomembno tudi pri določanju cen in tveganja opcij, saj se je uporaba opcij v svetu zelo povečala. Za določanje cene opcije je potrebno poznati višino nestanovitnosti osnovnega finančnega instrumenta od trenutka nakupa do zapadlosti opcije. Po Black-Sholesovi enačbi za vrednotenje evropske opcije je njena cena funkcija nestanovitnosti, kar lahko pomeni, da se na trgih, kjer se trguje z opcijami, dejansko trguje z nestanovitnostjo (Yu, 2002, str. 193). V razvitem svetu se lahko celo kupijo izvedeni finančni instrumenti na samo nestanovitnost, kjer je definicija in mera nestanovitnosti natančno določena v pogodbi. V teh pogodbah postane nestanovitnost osnovni finančni instrument, na katerega je vezana opcija. Za vrednotenje takih instrumentov je potrebno napovedovanje nestanovitnosti in napoved nestanovitnosti same nestanovitnosti za določeno prihodnje obdobje. Engle in Patton (2001, str. 238) definirata proporcionalne spremembe pogojne variance h_t kot:

$$\text{donosnost pogojne variance} = \frac{h_t - h_{t-1}}{h_{t-1}}, \quad (1)$$

iz česar izpeljeta nestanovitnost pogojne variance (VoV). Izražena je s standardnim odklonom inovacij, ki so nepojasneni del donosnosti pogojne variance in VoV definirata kot:

$$VoV = \sqrt{V(\text{donosnost pogojne variance})}, \quad (2)$$

kjer je $V(\text{donosnost pogojne variance})$ varianca donosnosti pogojne variance. Nestanovitnost pogojne variance je mera nestanovitnosti same nestanovitnosti.

Nestanovitnost je pridobila na pomenu pri finančnem upravljanju sredstev z uveljavitvijo Baselskega standarda⁴, pri čemer je napovedovanje nestanovitnosti pri mnogih finančnih institucijah postalo obvezen element tehnik za upravljanje tveganja. Z Baselskim standardom se je uveljavil princip merjenja izpostavljenosti tveganju na podlagi VaR (*value-at-risk*, kar pomeni tvegana vrednost) metodologije, saj so banke po Baselskem standardu dolžne zagotavljati določen obseg kapitala za

⁴ Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements

svoje poslovanje, ki je po standardu iz leta 1996 lahko vezan na vrednost VaR. VaR je definiran kot pričakovana izguba vrednosti portfelja, ki je lahko presežena z verjetnostjo α (na primer 1 %) v določenem obdobju (na primer 1 dan, 10 dni, 1 leto). Ocena vrednosti VaR je na voljo takoj, ko imamo napoved nestanovitnosti, oceno srednje vrednosti in potrjene domneve o normalni porazdelitvi spremembe vrednosti celotnega portfelja. V realnosti predpostavke o normalni porazdelitvi večkrat niso izpolnjene, zato je ocena o nestanovitnosti še vedno potrebna za določitev VaR vrednosti.

Z ocenami tržne nestanovitnosti se lahko odraža tudi ranljivost finančnih trgov in same ekonomije. Kot poročata Poon in Granger (2002, str. 4), centralna banka ZDA – FED (*Federal Reserve System*) – spremlja nestanovitnost cen delnic, obveznic, deviznih tečajev in blaga pri vodenju monetarne politike, podobno pa deluje tudi The Bank of England, ko pri svojih monetarnih odločitvah upošteva mnenja (občutke) trga in v opcijah upoštevane porazdelitve bistvenih finančnih spremenljivk. Kot primer povezanosti negotovosti na finančnih trgih in zaupanja javnosti avtorja navajata teroristični napad 11. septembra 2001 in škandale v ZDA zaradi poneverbe finančnih poročil (Enron), ki so imeli finančne posledice na gospodarstva po celem svetu. Yu (2002, str. 193) na primer tudi navaja Garnerjevo ugotovitev, da je imel zlom borze leta 1987 posledice na znižanje osebne potrošnje v ZDA.

Vplivi nestanovitnosti na cene sredstev še niso povsem razjasnjeni (Anderson, Breedon, 1996, str. 7), saj nestanovitnost lahko vpliva na premijo za tveganje, obseg investicij ali pa je nujna za zagotavljanje učinkovite alokacije kapitala oziroma zagotavlja, da cene odražajo vse informacije, ki so na voljo, kakor hitro je mogoče. Nestanovitnost delniških trgov ima velik pomen za realni sektor nekega gospodarstva preko vpliva na investicije. Vpliv nestanovitnosti delniških trgov na odločitve podjetij o investicijskih projektih se odraža na več ravneh. Najprej lahko prevelika nestanovitnost delniškega trga ali prevelika odstopanja od osnovne ravni cene vplivajo na investitorje tako, da je njihova pripravljenost za držanje lastniških vrednostnih papirjev manjša, kar vpliva na ceno kapitala in zavira investicijsko dejavnost. Drugi vpliv se kaže, ko trg podcenjuje vrednost določenega podjetja. V tem primeru bo osnovna strategija podjetij kupovanje že obstoječih proizvodnih kapacitet namesto investiranja podjetij v nove proizvodne zmogljivosti. Zaradi tega bo namesto novih investicij veliko združitvev in nakupov že obstoječih podjetij, kar pomeni, da se investicije na agregatni ravni ne bodo povečale. Nestanovitnost lahko zmanjša vlogo delniškega trga kot napovedovalnega mehanizma za pomoč pri odločitvah podjetij in napelje podjetja, da sistematično zanemarijo vplive kratkoročnih sprememb nestanovitnosti cen delnic na dolgoročne investicijske odločitve. Tako postane trg in njegovo vrednotenje pri odločitvah za investicije za podjetja nepomembno. Vpliv nestanovitnosti delniškega trga pa se lahko pokaže tudi pri odločitvah o trenutku izvedbe nove investicije. Investicij se namreč ne da preklicati, ko so se enkrat že zgodile, saj je del stroškov fiksni. Pri podjetjih, ki negujejo svojo tržno vrednost, bo trenutek dejanske izvedbe določenega (ponavadi tveganega) investicijskega projekta zelo pomemben. Podjetje ima možnost (neke vrste opcijo), da se odloči, kdaj bo določen projekt izvedlo. Z odlašanjem oziroma s čakanjem na pravi trenutek za izvedbo nove investicije lahko podjetje iztrži višje donose novega projekta in na ta način poveča svojo tržno vrednost⁵. Odločitve za čakanje na pravi trenutek izvedbe nove investicije imajo za posledico, da je na

⁵ Hu (1995, str. 3) navaja, da so teorijo o možnosti odloga investicije uporabili v svojih razpravah Brennan in Schwartz (1985), McDonald in Siegel (1986) in Pyndick (1988).

agregatni ravni določen trenutek manj investicij zaradi večje tržne nestanovitnosti. Opcija podjetja, da čaka z izvedbo investicijskega projekta, je tem bolj vredna, tem višja je nestanovitnost vrednosti projekta, saj se verjetnost neizvedbe projekta povečuje. Ko podjetje čaka z izvedbo projekta zaradi nestanovitnosti, bo dejanska vrednost investicij podjetja v določenem trenutku nižja (Hu, 1995, str. 4). Hu (1995, str. 11) je v svoji analizi tudi ugotovil in potrdil negativen vpliv povečanja nestanovitnosti na rast investicij. Nadalje pa je ugotovil, da je pomembnost nestanovitnosti delniškega trga večja pri velikih spremembah investiranja.

Pomen nestanovitnosti za realni sektor je zelo velik, zato se kažejo potrebe po zniževanju nestanovitnosti za zagotavljanje stabilnosti trga. Pojavile so se tudi težnje, da bi nestanovitnost skušali omejiti s pomočjo politik, saj je nestanovitnost cen delnic lahko stranski produkt makroekonomske nestabilnosti (Anderson, Breedon, 1996, str. 8) ali rezultat neučinkovitosti delniškega trga (Hu, 1995, str. 15). Hu⁶ (prav tam) omenja, da je bilo po borznem zlomu leta 1987 veliko predlogov za zmanjšanje nestanovitnosti s pomočjo omejevanja predvsem prekomernega špekulativnega trgovanja, ki na trgu ustvarja nestanovitnost. Schwert (1989b, str. 119) pa opozarja, da imajo lahko naporji za kontrolo volatilnosti na delniškem trgu negativne učinke na ostale dele gospodarstva in tudi stroški regulativnih rešitev za zmanjšanje nestanovitnosti cen delnic bi lahko presegli vse teoretične koristi.

3.1 TVEGANJE IN MERA TVEGANJA

V prejšnjem poglavju smo spoznali nestanovitnost, ki na trge vnaša nestabilnost in spremenljivost pogojev poslovanja. Lahko bi rekli, da nestanovitnost izraža tveganje, ki je prisotno na določenem trgu. Tveganje bi bilo napačno razumeti samo kot nevarnost izgube, kot se mogoče razume v sodobnem izražanju tveganja, temveč ga lahko razumemo kot nestanovitnost nepričakovanih izidov. Finančna teorija pojmuje tveganje kot porazdelitev nepričakovanih rezultatov investiranja zaradi gibanja finančnih spremenljivk. Za neko finančno organizacijo oziroma finančnega investitorja je pomembno gibanje rezultatov (dobičkov) trgovanja s finančnimi instrumenti, kar pomeni, da je potrebno spremljanje tako pozitivnih kot tudi negativnih odmikov, saj oboji predstavljajo vire tveganja. Finančnega investitorja zanima, kakšen rezultat bo dosegel na koncu obdobja investiranja. Vsak odmik od nekega pričakovanega rezultata vnaša tveganje, da bo rezultat na koncu obdobja različen od pričakovanega, zato je pomembno spremljanje tako pozitivnih kot negativnih odmikov. S tem se namreč poveča možnost uravnavanja rezultata oziroma se lahko z različnimi pristopi zmanjša tveganje in poveča točnost pričakovanega rezultata.

Za pravilno spremljanje tveganja je potrebno določiti spremenljivko, katere tveganje nas posebej zanima, na primer vrednost portfelja, zaslužki oziroma rezultati, kapital, določen finančni tok itd. Finančno tveganje teh spremenljivk nastane z učinkovanjem finančnih dejavnikov (faktorjev tveganja)

⁶ Hu (1995, str. 15) navaja, da sta na primer Summers in Summers (1990) za znižanje nestanovitnosti predlagala uvedbo transakcijskega davka na kratkoročna trgovanja.

na te spremenljivke. Tveganje je tako sestavljeno iz dveh sestavin, in sicer iz izpostavljenosti in negotovosti.

Merjenje tveganja lahko izvajamo, če imamo opredeljeno neko mero tveganja. Holton (2003, str. 21) opredeljuje, da mera tveganja določi tveganje kot neko vrednost, metrika oziroma nauk o meri tveganja pa daje njeno interpretacijo. Metrika tveganja lahko zavzame tri oblike, in sicer tako, ki količinsko opredeli izpostavljenost, količinsko opredeli negotovost ali opredeli izpostavljenost in negotovost v neki njuni kombinaciji. Velikost neto odprte devizne pozicije nam pove, koliko znaša izpostavljenost tveganju spremembe deviznega tečaja, kar pomeni, da nam je količinsko predstavljena izpostavljenost in nam nič ne pove o negotovosti spremembe deviznega tečaja. Verjetnost spremembe deviznega tečaja za določeno vrednost navzgor ali navzdol nam količinsko opredeli negotovost, ne pove pa nam, kakšna je naša izpostavljenost. Izguba/dobiček naše neto devizne pozicije zaradi spremembe tečaja navzdol/navzgor, ki jo predvidevamo z neko verjetnostjo, nam pove izgubo/dobiček ob hkratno izraženi negotovosti v obliki verjetnosti spremembe deviznega tečaja. To je tveganje, ki se mu z zavzemanjem odprte devizne pozicije izpostavljam ob nekih predvidenih pogojih.

Pri merjenju tveganja je pomembno gibanje določenega dejavnika tveganja. Če nadaljujemo z našim primerom, na odprto devizno pozicijo lahko vplivamo (zaprta devizna pozicija je neobčutljiva na gibanje cene tujega denarja), na gibanje cene tujega denarja pa ne moremo vplivati, ker gre za neko naključno spremenljivko. Zaradi tega dejstva je pomembno spremljanje gibanja cene tujega denarja oziroma njene relativne spremembe, ki ji lahko rečemo tudi donosnost, saj je od njene vrednosti odvisen naš rezultat (izguba ali dobiček) določene pozicije. Ko opazujemo gibanje donosnosti, ne samo tujega denarja, temveč tudi vrednostnih papirjev oziroma finančnih instrumentov na splošno, nas seveda zanima porazdelitev donosnosti oziroma njena razpršenost. Če je razpršenost donosnosti visoka, govorimo o večjem tveganju kot v primeru nizke razpršenosti. Iz povedanega izhaja, da je za določitev tveganja pomembna razpršenost same donosnosti, ki jo lahko merimo z drugim centralnim momentom porazdelitve vzorca ali *varianco* nekega naključnega procesa.

Če varianco korenimo s kvadratnim korenem, dobimo *standardni odklon*, ki nam služi kot *mera nestanovitnosti* donosnosti, ki nas v določenem trenutku zanima. Poon in Granger (2000, str. 5) navajata, da imajo posamezniki običajno za porazdelitev donosnosti v mislih normalno porazdelitev, ko za mero nestanovitnost uporabljajo standardni odklon. Standarni odklon je kot mera razpršenosti ustrezna mera za normalno porazdelitev, Studentovo *t*-porazdelitev in še nekatere druge, vendar ta mera nestanovitnosti ni primerna za vse vrste porazdelitev. Nadalje navajata, da je zveza med tveganjem in nestanovitnostjo šibka, saj je v večini primerov tveganje povezano z majhnimi ali celo negativnimi donosnostmi, česar pa večina mer razpršenosti ne upošteva. Alternativni meri, ki sta se izkazali kot uporabni meri razpršenosti, sta povprečni absolutni donos in medkvantilni razmik (*inter-quantile range*). Poon in Granger (prav tam) omenjata še *Sharpovo razmerje*, ki je določeno kot razmerje donosnosti nad netvegano mero in med standardnim odklonom. To razmerje se uporablja tudi kot mera investicijske učinkovitosti. Avtorja omenjata še Markowitzevo *semi-varianco*, ki za

izračun uporablja samo kvadrate donosov, ki so bili nižji od povprečnega. Obe meri upoštevata povezavo tveganja in negativnih donosnosti.

Mera tveganja oziroma merjenje tveganja je enako vzpostavljanju razmerja φ med prostorom naključnih spremenljivk (donosi izbranega niza naložb) in nenegativnim realnim številom. Mera tveganja φ je taka funkcija: $\varphi: X \rightarrow R$, ki omogoča preslikave iz množice naključnih spremenljivk v množico nenegativnih realnih števil. Skalarne mere tveganja omogočajo njihovo rangiranje in tako medsebojno primerjanje naložb glede na njihovo tvegano vrednost. Da je mera tveganja φ zadovoljiva, mora imeti določene lastnosti, saj lahko v nasprotnem primeru vodi do nekonsistentnosti. Vsaka mera tveganja $\varphi: X \rightarrow R$ mora zato biti (Szegö, 2002, str. 1259):

- a) **Pozitivno homogena:** $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, kar velja za vse naključne spremenljivke x in za vsa pozitivna realna števila λ .
- b) **Subaditivna:** $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, kar velja za vse naključne spremenljivke x in y . Če mera tveganja φ ni subaditivna, potem velja $\varphi(x) + \varphi(y) < \varphi(x + y)$, kar pomeni, da bi bilo za zmanjšanje tveganja primerneje, da bi se neko podjetje razdelilo na manjše enote oziroma da bi se zmanjšal njegov kapital, kar pa je z vidika regulatorja lahko sporno. V Markowitzevi teoriji portfelja (Markowitz, 1952) je ta lastnost bistvenega pomena, saj je kovarianca subaditivna.
- c) **Monotona:** če velja $x \leq y$, potem tudi velja $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ za vse naključne spremenljivke x in y .
- d) **Tranzitivno invariantna:** velja $\varphi(x + \alpha r_0) = \varphi(x) - \alpha$ za vse naključne spremenljivke x in realna števila α ter netvegano stopnjo r_0 . V primeru, če se k naključnemu donosu x doda gotov donos αr_0 , se bo skupno tveganje zmanjšalo za α .

Tvegana vrednost ali VaR (*Value at Risk*) predstavlja mero za merjenje finančnega tveganja. Splošna definicija predstavlja VaR kot največjo možno izgubo v določenem investicijskem obdobju z neko stopnjo zaupanja. Formalno VaR predstavlja kvantil določene porazdelitve dobičkov in izgub v nekem obdobju. Če je na primer α izbran interval zaupanja, potem VaR ustreza intervalu na spodnjemu delu porazdelitve, in sicer $1 - \alpha$. V primeru, da nas zanima 95 % interval zaupanja, potem je VaR taka vrednost, da presega 5 % vseh opazovanj proučevane porazdelitve⁷ dobičkov in izgub. Formalno lahko definicijo VaR za neko naključno spremenljivko dobičkov in izgub x zapišemo z negativnim predznakom kumulativne porazdelitvene funkcije F_x (Szegö, 2002, str. 1258):

$$VaR_\alpha = \inf \{ -F_x^{-1}(\alpha) \}, \quad (3)$$

kjer F_x^{-1} označuje inverzno funkcijo od F_x .

⁷ Opazovanja so rangirana od najnižje vrednosti do najvišje.

VaR izpolnjuje pogoje za mero tveganja v primeru eliptičnih porazdelitev. Eliptične porazdelitve so porazdelitve, katerih ravninski prerezi so elipsoidi. Takim porazdelitvam ustrezajo normalne porazdelitve ali Studentove t -porazdelitve s končnimi variancami (Szegö, 2002, str. 1254)⁸, pri čemer je potrebno tudi poudariti, da vse simetrične porazdelitve niso nujno tudi eliptične. Variančno-kovariančni model za ne-eliptične porazdelitve lahko močno podcenjuje ekstremne razmere, ki pripeljejo do največjih izgub. VaR je postal zelo prikladna mera za ocenjevanje tveganosti, saj ga je kot mero tveganja predlagal tudi Baselski komite za nadzor bank (Basel Committee on Banking Supervision, 2001). Vendar moramo biti pri VaR kot meri tveganja previdni, saj je bil le-ta *napačno* privzet kot mera tveganja (Szegö, 2002, str. 1258). V primeru, da osnovna skupna porazdelitev ni eliptična, VaR ni subaditiven (Szegö, 2002, str. 1261, Tasche, 2002, str. 1521) in uporaba VaR v takih primerih, ki so pogosti za porazdelitve donosnosti finančnih instrumentov, kot mera tveganja ni primerna. Taka lastnost bi pomenila, da bi bilo namesto razpršitve tveganj preko različnih naložb v portfelju bolj primerno naložiti vse premoženje v eno samo naložbo, kar pa ne drži. Za merjenje tveganj z VaR na osnovi neobičajnih (*weird*) porazdelitev je značilno (Szegö, 2002, str. 1261):

- VaR ne meri izgub, ki ga presegajo;
- zmanjšanje VaR lahko pripelje do raztegovanja repa porazdelitve;
- pri različnih stopnjah zaupanja lahko pride do nasprotujočih rezultatov;
- ne-subaditivnost pomeni, da razpršitev premoženja lahko pripelje do povečanja tveganja in preprečuje seštevanje VaR-a različnih virov tveganja;
- nekonveksnost povzroča, da se VaR ne more uporabljati pri optimizacijskih problemih;
- VaR ima veliko lokalnih ekstremov, ki povzročijo nestabilno rangiranje VaR.

Alternativna mera tveganja, ki upošteva pomanjkljivosti VaR, je **pogojna mera tveganja** ali CVaR (*Conditional Value at Risk*), imenovana tudi *Expected Shortfall* (ES). CVaR je pričakovana vrednost izgube, ki presega dan VaR_α . V primeru zveznih naključnih spremenljivk je določen kot (Szegö, 2002, str. 1264):

$$CVaR_\alpha = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(x,y) \geq k_\alpha(x)} f(x,y) p(y) dy, \quad (4)$$

lahko pa je določen tudi kot:

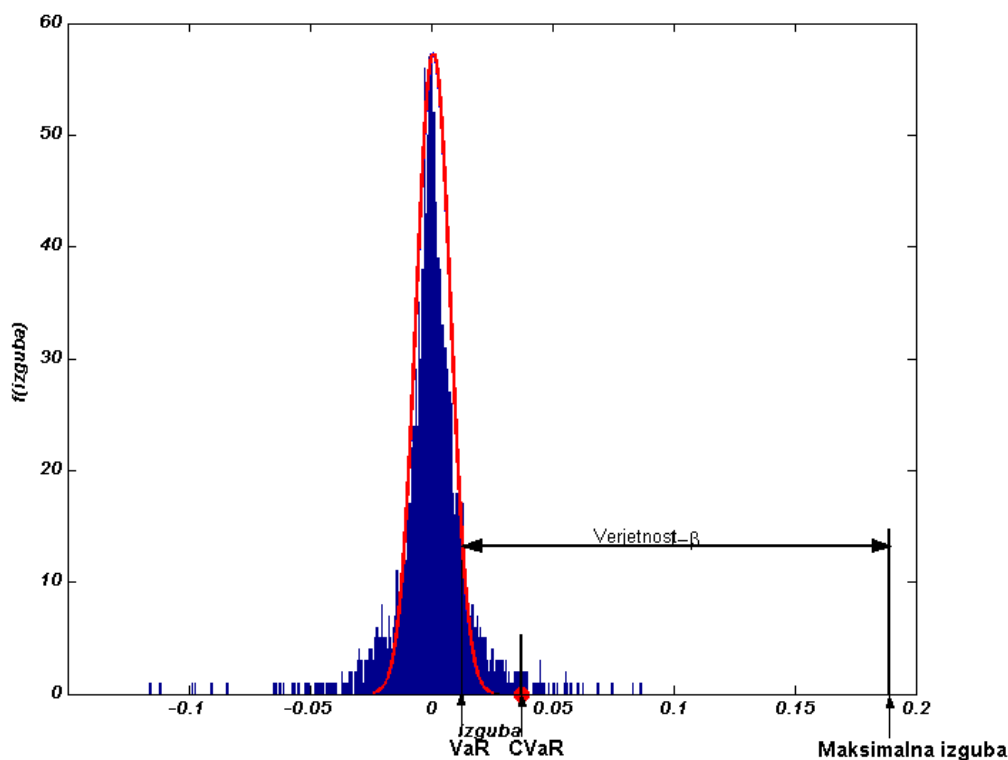
$$CVaR_\alpha = VaR_\alpha + E[f(x,y) - VaR_\alpha | f(x,y) > VaR_\alpha]. \quad (5)$$

Na spodnji sliki je shematski prikaz vrednosti CVaR v odnosu do vrednosti VaR pri neki naključni porazdelitvi dobičkov in izgub nekega portfelja. Lepo je vidno, da CVaR doseže višjo vrednost od vrednosti VaR, kar pomeni, da CVaR upošteva tudi debelejša krake porazdelitve (Szegö, 2002, str. 1262, Devjak, 2005), kar je zlasti pomembno pri uporabi finančnih podatkov, ki se ne porazdeljujejo normalno (Mandelbrot, 1963). Za finančne podatke je značilno, da so njihove porazdelitve sicer

⁸ Take porazdelitve so bistvene za Markovitzovo teorijo portfelja.

podobne normalni porazdelitvi, vendar je koeficient sploščenosti teh porazdelitev večji od 3, kar kaže na koničavost (leptokurtičnost) porazdelitev.

Slika 1: *Shematski prikaz tvegane vrednosti ($VaR_{\alpha=0,95}=0,0124$) in pogojne tvegane vrednosti ($CVaR_{\alpha=0,95}=0,0375$) pri neki empirični porazdelitvi izgub*



Vir: Lastni izračuni in Szegö (2002, str. 1258).

3.2 ZNAČILNOSTI NESTANOVITNOSTI

V prejšnjem poglavju smo spoznali mero(e) tveganja ter pomen nestanovitnosti in njenega ocenjevanja oziroma napovedovanja pri merjenju tveganja. Z analiziranjem in proučevanjem lastnosti nestanovitnosti donosov finančnih sredstev se je pokazalo, da nestanovitnost donosov poseduje določene posebne lastnosti. Dober model nestanovitnosti finančnih sredstev mora biti sposoben te posebne lastnosti zajeti in odraziti pri napovedovanju. Za nestanovitnost donosov finančnih sredstev, ki jih bomo predstavili v tem delu, je značilno, da se v času skupini in je izpostavljena tako imenovanemu učinku vzvoda. Nestanovitnost se kljub obdobjem visoke oziroma nizke nestanovitnosti vrača v stanje neke normalne nestanovitnosti, kar se v literaturi označuje kot vztrajnost. Porazdelitev donosov finančnih naložb ima lastnost, da je koničasta (leptokurtična), kar pomeni, da ima veliko gostoto okoli povprečja in debele krake⁹ porazdelitve na njenih koncih.

⁹ Rep in krak sta sinonima.

Nestanovitnost je odvisna tudi od vpliva eksogenih spremenljivk, ki s svojim obnašanjem določajo gibanje, velikost in obliko nestanovitnosti, kar bo tudi podrobneje razloženo v nadaljevanju poglavja.

3.2.1 Skupinjenje nestanovitnosti

Skupinjenje¹⁰ nestanovitnosti donosov finančnih naložb je bilo v proučevanjih eno izmed prvih ugotovljenih lastnosti nestanovitnosti donosov in tudi eno izmed najbolj proučevanih fenomenov v ekonomiji. Kljub obsežnemu proučevanju skupinjenja nestanovitnosti donosov finančnih naložb pa ekonomski razlogi še vedno ostajajo nepojasneni (Connolly, Stivers, 1999, str. 1). Skupinjenje nestanovitnosti donosov finančnih sredstev se kaže tako, da se v času nestanovitnosti donosov finančnih sredstev razporeja (skupini) v skupine (obdobja) z visokimi nihanji donosov in skupine (obdobja) z nizkimi nihanji donosov finančnih sredstev. Posledice skupinjenja nestanovitnosti se kažejo v tem, da bodo imeli šoki v nestanovitnosti danes posledice na pričakovano nestanovitnost za veliko obdobje v prihodnosti.

Mandelbrot je leta 1963 v svoji raziskavi (Mandelbrot, 1963, str. 418–419), v kateri je proučeval porazdelitev gibanja cen bombaža oziroma sprememb cen bombaža, ugotovil skupinjenje nestanovitnosti in to opisal z velikokrat citiranim citatom, ki je postal nekakšen izrek:

»...velikim spremembam sledijo velike spremembe – obeh predznakov – in majhnim spremembam sledijo majhne spremembe...«.

Fama (1965) je v svoji raziskavi o porazdelitvi donosov lastniških vrednostnih papirjev preizkušal teorijo naključnega koraka¹¹. Na podlagi svojih ugotovljenih dejstev je testiral tudi hipotezo o odvisnosti zaporednih sprememb cen, ki je opisana v zgornjem izreku. Ugotovil je, *da so lahko majhne spremembe neodvisne ena od druge, vendar pa lahko večjim spremembam sledijo večje spremembe istega predznaka ali morda večje spremembe nasprotnega predznaka*. Ekonomsko razlago za opisano obnašanje cen delnic je Fama videl v procesu informiranja v svetu negotovosti. Hipoteza implicitno predpostavlja, da ob prihodu nove informacije na trg, le-ta ne more biti natančno ovrednotena (Fama, 1965, str. 85), saj je lahko odziv cene na informacijo enkrat prevelik, čemur bo sledilo spuščanje cene in drugič premajhen, kar bo sprožilo mehanizme za gibanje cene v smeri začetnega šoka (navzgor). Statistično Fama (1965, str. 85) to ugotovitev razloži s tem, da je pogojna verjetnost, da bo jutrišnja sprememba cene visoka ob predpostavki velike današnje spremembe, večja kot nepogojna verjetnost visoke spremembe jutrišnje cene. Fama (1965, str. 87) je ugotovil, da so predznaki naslednikov cenovnih sprememb naključni, kar pomeni, da cenovnim spremembam sledijo spremembe cen različnih predznakov (isto ugotovitev je predstavil že Mandelbrot). Fama svoji

¹⁰ Za skupinjenje se v angleščini uporablja termin clustering, ki izhaja iz besede cluster, kar v slovenskem prevodu pomeni skupino, grozd ipd. V našem primeru gre za angleški izraz *volatility clustering*, kar se lahko v slovenščino prevaja kot skupinjenje nestanovitnosti.

¹¹ Angleški izraz je *random walk*, ki v teoriji pomeni, da so zaporedne spremembe cen vrednostnih papirjev med seboj neodvisne.

ugotovitvi ni pripisoval vrednosti za doseganje velikih zaslužkov na delniškem trgu, vendar pa je po njegovem mnenju pomembna za ekonomiste, ki iščejo razlage procesov oblikovanja cene na kapitalskih trgih. *Skupinjenje nestanovitnosti kaže na odvisnost zaporednih cen vrednostnih papirjev, ki je lahko posledica prihoda novih informacij na trg, saj ni racionalno pričakovati, da bi se informacije v času pojavljale neodvisno* (Fama, 1965, str. 37). Dobre novice z večjo verjetnostjo sledijo dobrim novicam kot pa slabim in slabe novice bolj verjetno sledijo slabim novicam kot pa dobrim. To kaže na odvisnost v postopku ustvarjanja šuma ali ustvarjanja novih informacij, kar lahko povzroča odvisnost med zaporednimi spremembami cen (Fama, 1965, str. 37).

Connolly in Stivers (1999, str. 23–24) sta proučevala tržno nestanovitnost v povezavi z donosi podjetij in ugotovila, da je skupinjenje nestanovitnosti naravni proces v procesu formiranja cene med trgovci, ki imajo različna prepričanja o prihodnji ceni. Tega ni moč pripisati avtokorelacijskemu procesu snovanja novic, ki se zgodijo zaradi objave informacij, kot na primer makroekonomskih podatkov in objav podjetij o njihovih zaslužkih, v javnosti. Skupinjenje nestanovitnosti je šibkejše po objavi makroekonomskih novic, kar pomeni, da skupinjenja nestanovitnosti ni moč pripisati premajhnemu ali prekomernemu odzivu cen delnic podjetij na makroekonomske novice oziroma ga ni moč pripisati endogenemu ustvarjanju dodatnih novic ob objavi makroekonomskih novic. Avtorja nista našla dokazov o sezonski komponenti v variabilnosti skupinjenja nestanovitnosti za mesece, ki so polni informacij, ko podjetja navadno objavljajo novice o četrtletnih zaslužkih. To namiguje na dejstvo, da skupinjenje nestanovitnosti ni vezano na periodičnost podjetniških novic, ki so med sabo presečno odvisne in kot take agregirane, da bi tvorile enoten signal. V svoji analizi sta avtorja ugotovila, da je lahko zaradi različnih pričakovanj skupinjenje nestanovitnosti stranski produkt pri procesu formiranja cene. Nestanovitnost povezujeta z visoko porazdelitvijo različnih pričakovanj in z obdobji visoke nejasnosti v signalih trga, ko ima na primer vsak udeleženec trga svoja pričakovanja glede prihodnjega gibanja cen delnic.

Spreminjanje nestanovitnosti je v svoji analizi iz leta 1989 skušal razložiti tudi Schwert, ki je proučeval odvisnost spreminjanja nestanovitnosti od različnih faktorjev (več o vzrokih za spreminjanje nestanovitnosti v nadaljevanju). V svoji raziskavi (Schwert, 1989a, str. 1115) je s testi zavrnil hipotezo o konstantni varianci in pravi, da imajo velike spremembe ex-ante nestanovitnosti tržnega donosa negativne učinke na investitorje, ki tveganju niso naklonjeni. Spreminjanje ravni nestanovitnosti ima lahko pomembne učinke na kapitalske investicije in spremenljivke, ki odražajo gibanje cikla.

Na skupinjenje nestanovitnosti so v svoji razpravi opozorili še Bollerslev, Engle in Nelson (1993, str. 4), ki so ugotovili, da je bila nestanovitnost delniškega indeksa Standard&Poor's večja v letu 1930 kot pa v letu 1960. Tudi Engle in Patton (2001, str. 239) sta na podlagi Dow Jones Industrial indeksa za dvanajstletno obdobje ugotovila, da se nestanovitnost dnevniških donosov skupini. Skupinjenje nestanovitnosti pomeni, da imamo obdobje, ko nestanovitnost obstaja in obdobje, ko le-te ni. Obdobju visoke nestanovitnosti bo sledilo obdobje bolj normalne nestanovitnosti in obdobju nizke nestanovitnosti bo sledilo obdobje povečanja nestanovitnosti, kar pa je že snov naslednjega poglavja, kjer bo dan poudarek na vztrajnosti šoka na varianco in vračanju nestanovitnosti k svoji srednji vrednosti oziroma k svojemu dolgoročnemu nivoju.

3.2.2 Vztrajnost nestanovitnosti

Pomen vztrajnosti šokov na nestanovitnost je v tesni povezavi s skupinjenjem nestanovitnosti. Šoki (nove informacije) imajo lahko dolgoročen vpliv na bodoča pričakovanja, kar se odrazi v višini nestanovitnosti na trgu, ki se kaže kot skupinjenje nestanovitnosti. Šok ima večjo vztrajnost na nestanovitnost, če je njegov učinek mogoče zaznati dlje časa oziroma več obdobj v prihodnost v obliki spremenjene nestanovitnosti. Ko govorimo o vztrajnosti šoka na nestanovitnost, govorimo tudi o spominu, ki ga ima časovna vrsta. Če je vpliv šoka čutiti še dolgo časa v prihodnosti, potem ima taka časovna vrsta dolg spomin. Nasprotno govorimo, da časovna vrsta nima dolgega spomina, če gre za tako imenovano Markovo¹² lastnost, ki pomeni, da so podatki v časovni vrsti odvisni od opazovanj v bližnji preteklosti, kar pomeni, da ta odvisnost med podatki časovne vrste hitro izgine.

Poterba in Summers (1984, str. 1) pravita, da morajo šoki vztrajati na nestanovitnost zelo dolgo časa, da bi imeli pomembnejši vpliv na cene delnic. Če so šoki na nestanovitnost samo prehodnega pomena, potem ne bo prišlo do spremembe bodoče diskontne stopnje na trgu, kar pomeni, da pričakovani donosi delnic ne bodo prizadeti zaradi gibanj v nestanovitnosti. Avtorja sta na podlagi mesečnih in dnevnih podatkov delniškega indeksa Standard&Poor's 500, uporabljenih v raziskavi, zaključila, da so šoki na nestanovitnost cen delnic kratkotrajni in prehodnega pomena (Poterba, Summers, 1984, str. 9).

Vztrajnost šoka na nestanovitnost se lahko zapiše kot (Bollerslev, Engle, 1993, str. 171–172):

$$m_t^*(s) \equiv E_s(m_t) - E_0(m_t), \quad t > s > 0 \quad (6)$$

Vztrajnost šoka na pogojno srednjo vrednost (m_t) je obravnavana v pogojih limitirane porazdelitve $m_t^*(s)$, ko gre t proti neskončnosti. Šok na srednjo vrednost bo imel samo prehodni pomen, če:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup |m_t^*(s)| = 0, \text{ zagotovo za vse } s > 0 \quad (7)$$

oziroma bo imel šok trajen vpliv na napoved, če:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left| \left\{ m_t^*(s) \right\}_i \right| \neq 0$$

¹² V angleščini se uporablja termin *Markov property*. Gre za lastnost, ki jo ima lahko stohastični proces. V sistemu je prisotna Markova lastnost, če sedanje stanje napoveduje prihodnje stanje in tudi celotno zgodovino preteklosti, kar pomeni, da je proces brez spomina.

za nekatere $s > 0$ in nekatere $i = 1, 2, \dots, N$. Po definiciji (Bollerslev, Engle, 1993, str. 172) bo stohastični proces $\{y_t\}$ definiran kot vztrajen v varianci, če velja:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left| \left\{ m_t^*(s) \right\}_i \right| \neq 0 \quad (8)$$

za nekatere $s > 0$ in nekatere $i = 1, 2, \dots, N$.

Engle in Patton (2001, str. 239) pravita, da je nestanovitnost vztrajna, če bodo današnje informacije, kot je trenutni donos r_t , imele velik vpliv na napoved variance za več obdobij v prihodnost. Napoved vztrajnosti k obdobij v prihodnost je definirana kot parcialni odvod pogojne variance po kvadratu trenutnega donosa:

$$\theta_{t+k|t} = \frac{\partial h_{t+k|t}}{\partial r_t^2}, \quad (9)$$

pri čemer je pričakovana varianca donosov k obdobij v prihodnosti definirana kot:

$$h_{t+k|t} \equiv E_t \left[(r_{t+k} - m_{t+k})^2 \right] \quad (10)$$

in je napoved variance odvisna od informacij, ki so na voljo iz trenutnega niza informacij.

Zelo podobna mera vztrajnosti šoka na nestanovitnost je kumulativna vztrajnost, ki kaže vpliv šoka donosnosti (informacije) na povprečno varianco donosov v obdobju od t do $t+k$ in je definirana kot:

$$\begin{aligned} \phi_{t+k|t} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{k} (h_{t+k|t} + h_{t+k-1|t} + \dots + h_{t+1|t}) \right)}{\partial r_t^2} \\ &= \frac{1}{k} (\theta_{t+k|t} + \theta_{t+k-1|t} + \dots + \theta_{t+1|t}) \end{aligned} \quad (11)$$

Avtorja navajata, da je odziv cen dolgoročnih opcij na nestanovitnosti šoka tak, da morajo modeli nestanovitnosti odražati kumulativno vztrajnost, ki je značilna za vsaj eno leto v prihodnost.

Dodatna mera za merjenje vztrajnosti v modelih za ocenjevanje nestanovitnosti je »polovična doba¹³« nestanovitnosti. Definirana je kot čas, ki je potreben, da se nestanovitnost za polovico povrne proti izhodiščni nepogojni srednji vrednosti variance (σ^2):

¹³ V angleščini avtorja uporabljata termin *half-life*.

$$\tau = k : \left| h_{t+k|t} - \sigma^2 \right| = \frac{1}{2} \left| h_{t+k|t} - \sigma^2 \right|. \quad (12)$$

Chou (1988, str. 283 – 287) je v svojem prispevku preverjal vztrajnost šoka na nestanovitnost, pri čemer je izhajal iz ocenjevanja pogojne variance iz GARCH (1,1) modela, ki je lahko določen kot (Bollerslev, 1986)¹⁴:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \quad (13)$$

Z uporabo **zakona o ponavljajočih pričakovanjih**, ki pravi, da nekdo z uporabo omejenih informacij v času t ne more predvideti napovedne napake, ki bi jo nekdo z boljšimi informacijami naredil v času $t + 1$. Formalno se zakon lahko zapiše kot (Green, 1997, str. 82):

$$E(y) = E_t(E(y|t)), \quad (14)$$

kar bi v konkretnem primeru pomenilo, da je pričakovana pogojna varianca:

$$E_t(\sigma_t^2) = E(E_t(\varepsilon_t^2)) = h_t = \sigma^2. \quad (15)$$

Z rekurzivno substitucijo lahko oblikujemo napoved variance za več obdobj vnaprej, na primer za k obdobj od časa t ¹⁵:

$$E_t(\sigma_{t+k}^2) = (\alpha_1 + \beta)^k \left(h_t - \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} \right) + \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}. \quad (16)$$

Iz gornje enačbe sledi, da se šok na nestanovitnost razkraja s konstantno eksponentno stopnjo in s hitrostjo enako $\alpha_1 + \beta$ (Chou, 1988, str. 282). Če uporabimo relacijo iz enačbe (15), dobimo enačbo za nepogojno varianco oziroma dolgoročno varianco:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}, \text{ kjer je } (\alpha_1 + \beta) < 1. \quad (17)$$

Faktor $\alpha_1 + \beta$ mora biti manjši od ena, da varianca ni neskončna, saj bi v nasprotnem primeru vpliv šoka na trenutno nestanovitnost trajal v neskončnost in ne bi bilo končne vrednosti variance (v tem primeru bi lahko govorili, da gre za neskončno varianco). Če je parameter $\alpha_1 + \beta$ blizu ena, trenutni

¹⁴ Več o modelu glej v poglavju ARCH/GARCH modeli.

¹⁵ Izpeljavo glej v dodatku in Jorion (2001, str. 188–192) ter Campbell, Lo, MacKinlay (1997, str. 483–484).

šok vpliva (vztraja) na nestanovitnost mnogo obdobj v prihodnost. Chou (1988, str. 286) je s svojo analizo ocenil, da se šok razkraja zelo počasi, saj je na podlagi tedenskih donosnosti ugotovil, da je parameter $\alpha_1 + \beta$ blizu ena (0,986). Po enem letu od začetnega šoka je bil vpliv le-tega še vedno prisoten, in sicer v višini okrog polovice začetnega vpliva, kar kaže na pomemben vpliv šoka na nestanovitnost. S tem, ko je Chou potrdil pomen vztrajnosti šoka na nestanovitnost, je zavrnil zaključke raziskave Poterbe in Summersa (1984) o kratkotrajnosti šokov na cene delnic, kar ima posledice na premije donosov in s tem na cene delnic. Prisotnost vztrajnosti šokov na nestanovitnost pomeni, da je lahko nestanovitnost dlje časa stran od svoje srednje vrednosti (normalne ravni), h kateri naj bi se nekoč vrnila.

Baillie, Bollerslev in Mikkelsen (1996, str. 23–25) so ocenjevali razkrajanje šoka z družino modelov¹⁶, ki predpostavlja bolj počasno, hiperbolično razkrajanje nestanovitnostnega šoka, ki naj bi bilo po njihovem mnenju bolj primerno od eksponentnega razkrajanja šoka, ki ga predpostavljajo nekateri drugi modeli¹⁷ in od šoka, ki naj bi trajal v neskončnost¹⁸. Avtorji so proučevali vztrajnost nestanovitnostnega šoka na primeru nestanovitnosti tečaja nemška marka – ameriški dolar v obdobju od leta 1979 do 1992. Ugotovili so, da je vpliv preteklega šoka na nestanovitnost zelo vztrajen in je njegovo razkrajanje počasno, vendar se končno vrne proti srednji vrednosti in ne vztraja na nestanovitnosti v neskončnost. Zaradi ugotovljenih dejstev njihov model bolje opisuje obnašanje nestanovitnostnega šoka v realnosti, predvsem ko gre za proučevanje odvisnosti v nestanovitnosti pri daljših ročnostih. Avtorji omenjajo (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 26), da sta tudi Bollerslev in Mikkelsen za dnevne donose delniškega indeksa Standard&Poor's 500 ugotovila, da se v nestanovitnosti časovne serije na delniškem trgu zelo značilno kaže prisotnost komponente dolgega spomina, kar potrjuje tezo, da ima nestanovitnostni šok v finančnih podatkih lastnost vztrajnosti.

Teoretično naj bi se struktura nestanovitnosti ohranjala z medčasovno agregacijo, kar pomeni, da bi morala biti struktura nestanovitnosti, ki se modelira na dnevni, tedenski ali mesečni podatkih, enaka. Poon in Granger (2002, str. 8) pravita, da v praksi temu ni tako. Vztrajnost nestanovitnosti je bolj močna in visoko značilna pri dnevni podatkih, z zniževanjem frekvence v podatkih pa se vztrajnost znižuje (Poon, Granger, prav tam).

Kot smo videli ima vztrajnost šoka učinek na varianco cene oziroma na donose naložbe. Če ima šok na pogojno varianco le kratkotrajen učinek, se to na stopnji premije za tveganje dolgoročnih naložbenih pogodb ne bo odrazilo v veliki meri, če pa je šok na pogojno varianco vztrajen, se bo le-ta odrazil tudi v ceni dolgoročnih naložb, ki je funkcija trenutnega niza informacij.

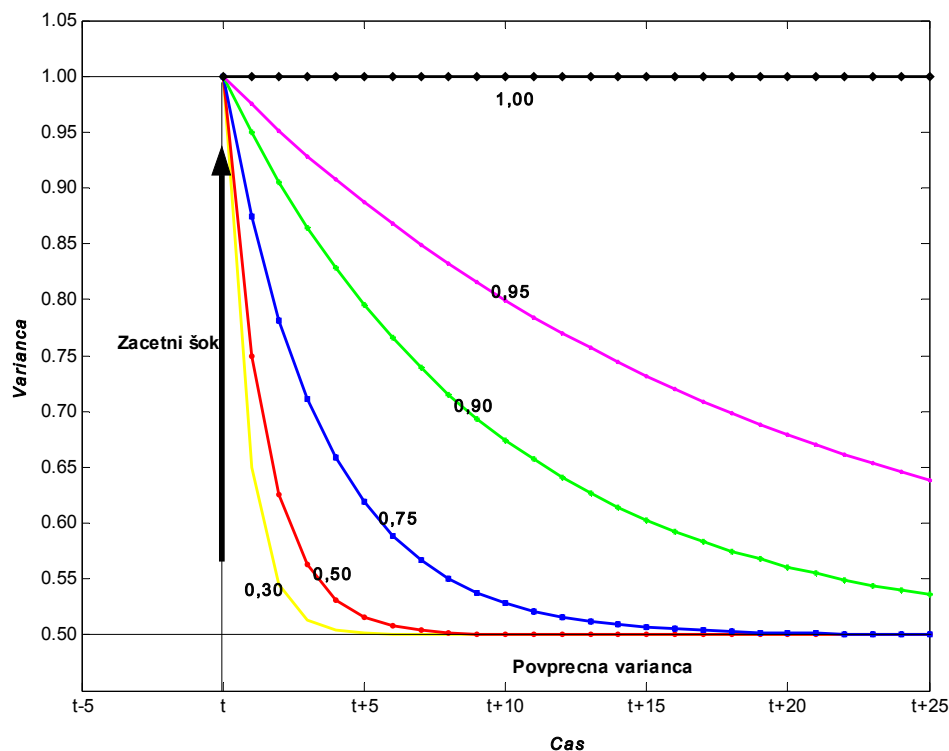
¹⁶ Gre za tako imenovane FIGARCH modele, ki vpeljujejo tako imenovano frakcijsko integracijo, ki pomeni, da je stopnja difference, s katero je časovna vrsta šibko stacionarna, med $0 < d < 1$ in ni celo število.

¹⁷ Na primer GARCH model, ki naj bi dobro opisoval odvisnosti v nestanovitnosti krajših ročnosti.

¹⁸ Tak šok na primer predvideva IGARCH model, ki predpostavlja, da je stopnja difference d enaka 1, ko časovna vrsta postane stacionarna. Model predpostavlja, da šok vztraja na nestanovitnost v neskončnost (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 11), ko gre za napovedovanje, kar pomeni, da šok na nestanovitnost vztraja celotno dobo napovedi.

Na spodnji sliki je predstavljeno razkranje šoka za različne vrednosti (0,30, 0,50, 0,75, 0,90, 0,95 in 1,00) parametra $\alpha_1 + \beta$, ki kaže vztrajnost šoka. Na sliki je prikazan začetni porast dolgoročne (povprečne) variance zaradi šoka v neki časovni točki t in nadaljnje zniževanje variance v času. Jasno se vidi, da z naraščanjem vrednosti parametra vztrajnosti narašča tudi čas vrnitve variance na dolgoročno (prvotno) raven.

Slika 2: Razkranje šoka po dnevih za različne parametre vztrajnosti $\alpha_1 + \beta$



Vir: Lastni izračuni in Jorion (2001, str. 193).

3.2.3 So-vztrajnost nestanovitnosti

V prejšnjem poglavju smo spoznali pomen vztrajnosti šoka na nestanovitnost časovne vrste. Posledica vztrajnosti šoka je, da je taka časovna vrsta nestacionarna, napovedovanje na osnovi take časovne vrste pa je lahko problematično. Čeprav posamezne časovne vrste kažejo vztrajnost šoka na pogojno varianco, obstajajo tudi take časovne vrste, ki z linearno kombinacijo spremenljivk vztrajnosti ne vsebujejo. Take spremenljivke so definirane kot *so-vztrajne*¹⁹ v varianci. Za ta odnos lahko rečemo, da je dolgoročen, kar je pri napovedovanju zelo pomembno (Bollerslev, Engle, 1993, str. 168). Pomen so-vztrajnosti se pokaže predvsem pri analizi portfeljev in njihove tveganosti.

¹⁹ V angleščini se uporablja termin *co-persistence*.

Pojem so-vztrajnosti v varianci je izveden iz pojma so-integriranosti²⁰ srednjih vrednosti, ki ga je vpeljal Granger (Advanced Information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel, 2003). Pojem so-integriranosti pomeni, da lahko obstaja taka linearna kombinacija spremenljivk, da je ta časovna vrsta stacionarna, medtem ko spremenljivke same v času niso stacionarne.

Osnovna ideja so-vztrajnosti je ta, da spremenljivke, ki kažejo vztrajnost šoka na srednje vrednosti, lahko istočasno ne kažejo vztrajnosti v linearni kombinaciji (Bollerslev, Engle, 1993, str. 176). Spremenljivke, ki imajo lastnost so-vztrajnosti, so kovariančno stacionarne oziroma šibko stacionarne.

V prejšnjem poglavju smo predpostavili, da bo imel vztrajen šok na varianco učinek na premijo za tveganje oziroma cene posameznih naložb, možno pa je, da ta šok oziroma niz informacij ne bo imel dolgoročnega učinka na cene oziroma bodo učinki le prehodni, če bo imela linearna kombinacija naložb oziroma portfelj naložb lastnost so-vztrajnosti.

3.2.4 Vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti

Vračanje nestanovitnosti k svoji srednji vrednosti²¹ pomeni, da obstaja nek nivo nestanovitnosti, h kateremu se bo nestanovitnost po določenem času vrnila. Vse zelo dolgoročne napovedi nestanovitnosti bi morale konvergirati k tej vrednosti, ne glede na to, kdaj so bile napovedi narejene (Engle, Patton, 2001, str. 239), saj se nestanovitnost lahko vrne k svojemu dolgoročnemu nivoju le v daljšem časovnem obdobju. Engle in Patton (2001, str. 239) definirata vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti, pri čemer vračanje k srednji vrednosti pomeni, da trenutne informacije nimajo vpliva na dolgoročne napovedi²²:

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} \theta_{t+k|t} = 0, \text{ za vse } t, \quad (18)$$

kar se lahko izrazi tudi kot:

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} h_{t+k|t} = \sigma_t^2 < \infty. \quad (19)$$

Vrednosti pogojne variance, ki niso blizu vrednosti dolgoročne (nepogojne) variance, bodo postajale vse manj verjetne, ko se bo k približeval neskončnosti oziroma se bo verjetnost vztrajnosti šoka na varianco približevala ničli.

Vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti je povezano z vztrajnostjo šoka na varianco. V prejšnjem poglavju smo spoznali enačbo za napovedovanje pogojne variance za k obdobj v prihodnost, kjer je

²⁰ V angleščini se uporablja termin *co-integration*.

²¹ V angleščini se uporablja termin *mean reversion in volatility*.

²² Funkcija **plim** pomeni konvergenco oziroma limito v verjetnosti. Za formalno definicijo glej v Green (1997) na strani 115.

pomemben člen $(\alpha_1 + \beta)^k$, ki kaže stopnjo razkrajanja (vztrajnost) šoka na nestanovitnost. Če se šok hitro razgradi, to pomeni, da se nestanovitnost oziroma varianca hitro povrne k svojemu dolgoročnemu povprečju. Vsota $(\alpha_1 + \beta)$ kaže hitrost, in sicer če je vsota blizu ena, bo povečanje oziroma znižanje variance potekalo daljše časovno obdobje, medtem ko vsota $(\alpha_1 + \beta)$, ki je blizu nič, pomeni, da bo povečanje oziroma zmanjšanje variance hitro izginilo. Ne glede na hitrost prilagajanja normalni vrednosti nestanovitnosti bo člen $(\alpha_1 + \beta)^k$ konvergiral k vrednosti nič, ko se bo k približeval neskončnosti, pri čemer je po definiciji $(\alpha_1 + \beta) < 1$.

Hitrost vračanja variance k svoji normalni vrednosti je odvisna od stanja, v katerem se varianca trenutno nahaja. Empirični rezultati kažejo, da je prilagajanje variance v obdobju visoke oziroma nizke nestanovitnosti dvo-hitrostni proces (Poon, Granger, 2002, str. 28). Friedman in Laibson (1989, str. 157–158) sta ugotavljala, ali obstaja razlika med vztrajnostjo, ki je posledica neobičajnih nihanj in normalnih nihanj nestanovitnosti. Njuna raziskava je potrdila domnevo o dvo-hitrostnem prilagajanju nestanovitnosti, in sicer so normalni nihaji nestanovitnosti bolj vztrajni in se bolj počasi prilagajajo, medtem ko so nenavadno veliki šoki manj vztrajni na nestanovitnost in se zato le-ta hitreje vrne v dolgoročno stanje. Iz omenjene trditve izhaja, da se bo nestanovitnost hitreje vrnila k svoji srednji vrednosti v obdobju visoke nestanovitnosti in počasneje vrnila k dolgoročnemu povprečju v stanju nizke nestanovitnosti. Dejstvo o različnih hitrostih razkrajanja šoka na nestanovitnost je opazil tudi Schwert (1989b, str. 99).

Hitrost vračanja nestanovitnosti v normalno stanje sta opazovala tudi Ederington in Lee (2001, str. 543–549), in sicer ju je zanimalo, ali obstaja razlika med vztrajnostjo v šokih, ki so bili posledica najavljenih objav in nenajavljenih objav o makroekonomskih spremenljivkah oziroma drugih pomembnih ekonomskih spremenljivkah. Svojo raziskavo sta opravila na osnovi podatkov o nestanovitnosti obrestnih mer in menjalnih tečajev. Njuni izsledki kažejo, da je nestanovitnost po najavljenih objavah višja od nestanovitnosti, ki je posledica nenajavljenih objav, vendar se hitro vrne na normalno raven, medtem ko nestanovitnost po nenajavljeni objavi ostane visoka dolgo po objavi. Avtorja sta v svojem prispevku ponudila dve razlagi, zakaj bi se morala nestanovitnost vrniti na normalno raven po najavljeni objavi hitreje kot po nenajavljeni objavi:

- a) trg je pripravljen na obvestilo in zato hitreje upošteva njegove posledice,
- b) informacije iz nenajavljene objave se obdelujejo na trgu dlje časa, saj ponavadi taki objavi sledijo še druge objave, ki prvo tolmačijo in dopolnjujejo.

Dejstvo, da je nestanovitnost po najavljeni objavi višja, kaže, da je trg objavo pričakoval in zato tudi hitro rešil njene posledice. Pri nenajavljeni objavi se pojavi začetna reakcija, vendar se njene posledice rešujejo bolj postopoma, zaradi česar se nestanovitnost vrača k svoji dolgoročni vrednosti dlje časa.

V analizi nestanovitnosti kratkoročnih obrestnih mer so Panigirtzoglou, Proudman in Spicer (2000, str. 20) ugotovili, da z daljšanjem ročnosti pada hitrost vračanja k srednji vrednosti za obrestne mere. Največji padec hitrosti med tedensko in mesečno obrestno mero so zaznali v Veliki Britaniji, medtem

ko so za Italijo in Nemčijo za te ročnosti ugotovili manjši padec hitrosti vračanja k srednji vrednosti. Izsledki raziskave tudi kažejo, da je vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti na trgu obrestnih mer hitreje, saj so vsote $(\alpha_1 + \beta)$ nižje, kot poročajo na primer Chou (1988), Engle in Patton (2001, str. 243) za delniške trge. Engle in Patton sta na osnovi napovedi za različna obdobja vnaprej ugotovila, da enodnevna napoved predstavlja višje nihanje kot napoved za dve leti vnaprej, s čimer se odražajo posledice vračanja nestanovitnosti k dolgoročnemu povprečju. Avtorja sta preverila vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti tako, da sta primerjala vztrajnost šoka v obdobju visoke nestanovitnosti in v mirnem obdobju. Napoved šoka ob povečani nestanovitnosti se je vračala k srednji vrednosti tako, da se je k njej spuščala, medtem ko se je napoved šoka iz mirnega obdobja povečevala, da se je vrnila k dolgoročnemu povprečju.

Cene opcij so v splošnem skladne z lastnostjo, da se nestanovitnost vrača k srednji vrednosti. V opcijah vsebovana nestanovitnost je za dolgoročne opcije manjša od nestanovitnosti cen kratkoročnih opcij, ker je vsebovana nestanovitnost dolgoročnejših opcij bližje nestanovitnosti cen osnovnih finančnih naložb kot je vsebovana nestanovitnost v kratkoročnih opcijah (Engle, Patton, 2001, str. 239).

Za konec lahko omenimo, da sta Poterba in Summers (1987) proučevala vračanje cen delnic k srednji vrednosti na delniškem trgu. V svoji analizi sta upoštevala različne statistične teste, s katerimi sta preverjala, ali so cene delnic podvržene vračanju k srednji vrednosti, ali pa so podvržene naključnemu koraku. Avtorja že na prvi strani prispevka postavita zanimivo tezo, in sicer: če so cene delnic podvržene vračanju k neki dolgoročni ravni in vsebujejo prehodno komponento, potem so investitorji na delniškem trgu dolgoročno izpostavljeni manjšemu tveganju kot to izhaja iz teorije, ki upošteva naključnost koraka cen delnic. Čeprav to teorijo zavrača veliko strokovnjakov, je tak pogled pravi, če se cene delnic resnično obnašajo po principu vračanja k srednji vrednosti. Avtorja (Poterba, Summers, 1987, str. 20) sta tudi ugotovila, da je vračanje cen delnic k srednji vrednosti bolj značilnost manj razvitih in manjših lastniških kapitalskih trgov.

3.2.5 Vzvod in nestanovitnost

Učinek vzvoda²³ predstavlja dejstvo, da so spremembe cen delnic negativno korelirane s spremembami v nestanovitnosti. Prvi je to zvezo opazil že Black leta 1976 v svoji študiji, ko je proučeval spremenljivost cen delnic (Bollerslev, Engle, Nelson, 1993, str. 5). Za to zvezo so odgovorni fiksni stroški podjetja, ki se v določenem času ne spreminjajo, in nenaklonjenost tveganju investitorjev. V času, ko se vrednost zadolženega podjetja zniža, se zaradi dolga, ki ostane nespremenjen, poveča finančni vzvod podjetja, kar pomeni, da postane tako podjetja z vidika investitorja bolj tvegano. Če

²³ V angleščini se uporablja termin *leverage effect*. V splošnem gre lahko za delež vseh fiksnih stroškov v primerjavi z vrednostjo virov sredstev podjetja (finančni in operativni vzvod, oba podjetju povzročata fiksne stroške). Na primer finančni vzvod se izračunava kot delež dolga v celotnih virih sredstev podjetja. Vzvod naraste, ko cena lastniškega kapitala podjetja kot delež celotnih virov sredstev pade in s tem tudi vrednost celotnih virov sredstev, ki so v imenovalcu enačbe:

$$\text{finančni vzvod} = \frac{\text{dolg podjetja}}{\text{vrednost celotne pasive podjetja}}.$$

ostanejo donosi podjetja kot celote nespremenjeni, se povečana izpostavljenost podjetja vzvodu odraža v povečani nestanovitnosti donosov podjetja na lastniški kapital. Na drugi strani pa na to vpliva nenaklonjenost tveganju investorjev, ki je posledica novic o povečani nestanovitnosti na trgu. Posledično to zniža vrednost delnic, čemur sledi povečana nestanovitnost, kar je bilo napovedano z objavo novic o povečani nestanovitnosti (Engle, Patton, 2001, str. 239).

Schwert (1989a str. 1135–1138) je pojasnjeval povezanost spreminjanja vzvoda podjetja in časovno spreminjanje nestanovitnosti s spreminjanjem relativnih cen delnic in obveznic. Predpostavil je, da je varianca donosa na sredstva podjetja σ_{vt}^2 funkcija variance donosov delnic σ_{st}^2 in obveznic σ_{bt}^2 ter kovariance med temi donosi $\text{cov}(R_{st}, R_{bt})$:

$$\sigma_{vt}^2 = (S/V)_{t-1}^2 \sigma_{st}^2 + (B/V)_{t-1}^2 \sigma_{bt}^2 + 2(S/V)_{t-1}(B/V)_{t-1} \text{cov}(R_{st}, R_{bt}), \quad (20)$$

pri čemer je $(S/V)_{t-1}$ in $(B/V)_{t-1}$ delež delnic oziroma obveznic v vrednosti podjetja v času $t-1$. Ob predpostavki, da imamo podjetje, ki ima netvegan dolg ($\sigma_{bt}^2 = \text{cov}(R_{st}, R_{bt}) = 0$) in je varianca sredstev podjetja konstantna v času σ_v^2 , potem se standardni odklon donosov na delnice lahko izrazi kot:

$$\sigma_{st} = \sigma_v (V/S)_{t-1}. \quad (21)$$

Iz zgornje enačbe je razvidno, kako spremembe vzvoda podjetja vplivajo na spreminjanje nestanovitnosti donosnosti delnic. V raziskavi je Schwert ugotovil, da spreminjanje vzvoda pojasni le majhen del spreminjanja nestanovitnosti na delniškem trgu. Do podobnih izsledkov je v svoji raziskavi prišel tudi Christie (Schwert, 1989a, str. 1138) s svojim regresijskim modelom za ocenjevanje učinka spremenljivosti vzvoda na nestanovitnost. V svojem modelu je predpostavil, da je nestanovitnost vrednosti podjetja σ_v konstanta, s čimer enačba modela dobi obliko:

$$\sigma_{st} = \alpha_0 + \alpha_1 (B/S)_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (22)$$

pri čemer je $(B/S)_{t-1}$ razmerje dolga in lastniškega kapitala podjetja. Pri ocenjevanju je Christie dobil vrednosti koeficienta α_1 pozitivne, kar kaže, da se nestanovitnost poveča, ko se poveča vzvod oziroma razmerje dolga v primerjavi z lastniškim kapitalom. Model je hkrati kazal veliko avtokorelacijo ostankov, kar kaže na to, da nestanovitnost vrednosti podjetja σ_v ni konstantna v času. Visoke vrednosti koeficienta α_1 so bile po mnenju Schwerta (1989a, str. 1138) rezultat izpustitve dodatne pojasnjevalne spremenljivke, kar po njegovem mnenju pomeni, da vzvod sam ne more pojasniti zgodovinskih gibanj nestanovitnosti cen delnic.

Negativna zveza med nestanovitnostjo in cenami delnic kaže, da obstaja različno obnašanje nestanovitnosti v obdobju negativnih in pozitivnih šokov. Schwert (1989b) je proučeval verjetnost pojavljanja stanja visoke nestanovitnosti. V analizi je uporabil linearni avtoregresijski model za ocenjevanje pogojnega standardnega donosa delnic in model, ki je odvisen od stanja, v katerem se gospodarstvo nahaja²⁴. Ta model ne predvideva linearnosti in je zato sposoben predstaviti bolj zahtevne zveze med spremenljivkami v časovnih vrstah. Z linearnim modelom je ugotovil, da je bila nestanovitnost delnic v različnih obdobjih različna in se je gibala med 2 % in 6 %, v času velike depresije od leta 1929 do 1939 je bila celo zelo visoka, in sicer čez 10 % na mesec (Schwert, 1989b, str. 94). Avtor je ugotovil, da je verjetnost, da se bo nestanovitnost v proučevanem obdobju (1834–1987) nahajala v visokem obdobju, nizka (okrog 14 %), vendar pa je bilo zelo verjetno, da bo v takem stanju vztrajala, ko ga bo dosegla (Schwert, 1989b, str. 99). Verjetnost, da se bo varianca nahajala v visokem stanju, se je povečala s časom trajanja recesije. Za 60 % se je povečala verjetnost visoke variance, ko je recesija trajala 6 mesecev in se skoraj podvojila, ko je recesija trajala 18 mesecev (Schwert, 1989b, str. 104). Kljub ugotovljeni vztrajnosti stanja visoke nestanovitnosti je avtor z modelom ocenil, da bo vztrajanje stanja nizke nestanovitnosti trajalo dlje časa. Ko je avtor proučeval gibanje nestanovitnosti v času bančnih panik in finančnih kriz, je ugotovil, da se je nestanovitnost donosov delnic povečala, medtem ko so donosi v povprečju padli. V povprečju so cene delnic padle že pred samo krizo in v času krize, nestanovitnost donosov pa se je povečala v času po začetku krize (Schwert, 1989b, str. 106). V času pred krizo so se obrestne mere povečale in padle po šestih mesecih trajanja krize, medtem ko se je nestanovitnost gibanja obrestnih mer povečala v treh mesecih pred začetkom in po začetku krize. Glavni zaključek raziskave je, da je bila nestanovitnost cen delnic v času kriz in recesij visoka, kar kaže na to, da je lahko delniški trg dober pokazatelj poslovnega cikla in da obstaja negativna zveza med nestanovitnostjo cen delnic in donosi.

Na večjo nestanovitnost v času recesije je Schwert (1989a, str. 1133) opozoril, ko je spremljal vplive ekonomske aktivnosti. Vplivi industrijske proizvodnje na nestanovitnost cen delnic v času recesije so v primerjavi s časom ekonomske ekspanzije večji in kažejo zanesljivo povečanje nestanovitnosti cen delnic.

Negativno povezanost donosov delnic in nestanovitnost donosov delnic sta v svojih prispevkih ugotovila še Engle in Ng (1991, str. 29), ko sta uporabila model, ki je dovoljeval različne asimetrične vplive novic na nestanovitnost. Ugotovila sta, da na nestanovitnost bolj vplivajo negativni šoki v primerjavi s pozitivnimi. Glosten, Jagannathan in Runkle (1993, str. 18) so ugotovili negativno povezanost med pogojno srednjo vrednostjo donosov delnic in pogojno varianco, ko so v model vključili možnost različnega vpliva pozitivnih in negativnih šokov v donosih.

²⁴ Za podrobnejši opis modelov glej Schwert (1989b) na straneh 89 in 96.

3.2.6 Nestanovitnost in kraki porazdelitve

Pri proučevanju obnašanja nestanovitnosti je pomembno tudi proučevanje lastnosti porazdelitev donosnosti lastniških vrednostnih papirjev. Pred Mandelbrotom so predpostavljali, da porazdelitve donosnosti sledijo normalnim oziroma Gaussovim porazdelitvam. Prvi, ki je proučeval porazdelitev donosnosti, je bil Louis Bachelier, ki je v raziskavi iz leta 1900 predpostavil, da se cene na trgih vrednostih papirjev in dobrin gibajo po modelu naključnega koraka. Predpostavil je, da so razlike med zaporednimi cenami neodvisne, normalno porazdeljene, naključne spremenljivke, ki imajo srednjo vrednost enako nič in varianco proporcionalno diferenčnemu intervalu T (Mandelbrot, 1963, str. 394). Mandelbrot je v svoji raziskavi o cenovnih spremembah zapisal, da so empirične porazdelitve preveč koničaste, da bi ustrezale vzorcem iz Gaussove populacije. Histogrami cenovnih sprememb so v resnici unimodalne in spominjajo na Gaussov obok (zvonec), vendar imajo porazdelitve navadno preveč osamelcev, prilagojene normalne porazdelitve pa so nižje in bolj ploščate od porazdelitev samih podatkov. Repi porazdelitev so zelo dolgi, tako da se drugi momenti porazdelitev obnašajo zelo neredno (Mandelbrot, 1963, str. 394–395). Mandelbrot je zaradi ugotovljenih dejstev o porazdelitvi cenovnih sprememb v svoji analizi predlagal, da se cenovne spremembe porazdeljujejo v stabilni Paretovi porazdelitvi. V družino Paretovih porazdelitev spada tudi normalna porazdelitev kot njen mejni primer. Mandelbrot in Fama del debelih krakov porazdelitve donosov (razlik v ceni) lastniških vrednostnih papirjev vidita kot posledico soodvisnosti zaporednih sprememb cen.

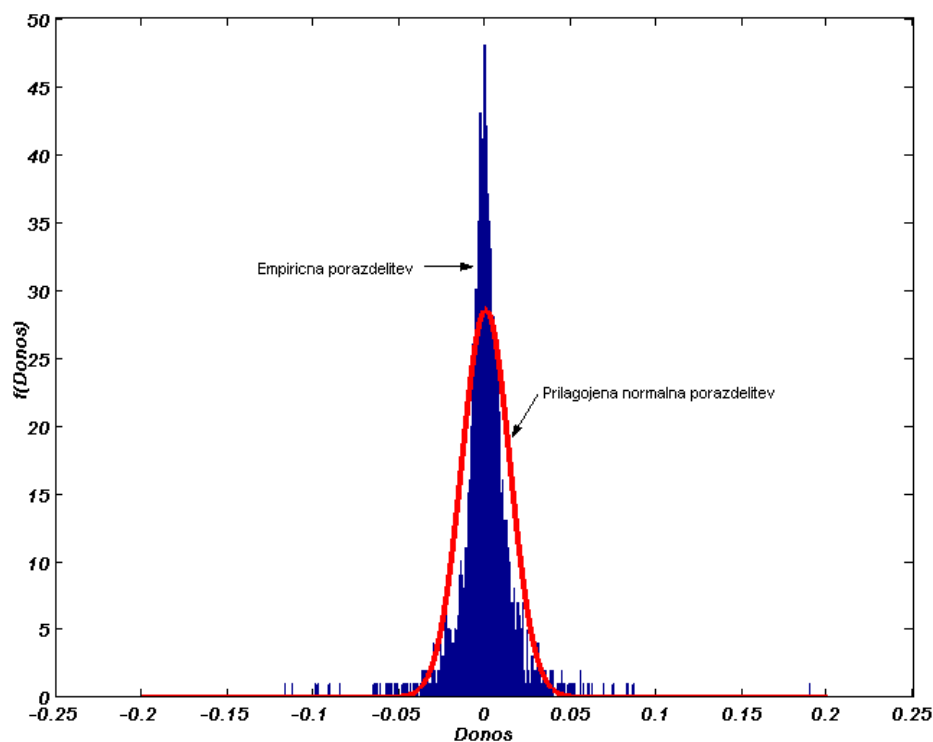
Andersen et. al. (2000, str. 8–12) so preverjali porazdeljevanje nestanovitnosti donosnosti delnic na osnovi dnevnih realiziranih varianc. Ugotovili so, da se dnevne variance izbranih tridesetih delnic Dow Jonesa porazdeljujejo nenormalno in so asimetrične v desno, porazdeljevanje logaritmov vrednosti varianc pa je približno normalno. Avtorji so tudi ugotovili, da je nepogojna porazdelitev dnevnih donosnosti koničasta, kljub temu pa je porazdelitev normaliziranih dnevnih donosnosti z realiziranimi dnevnimi standardnimi odkloni blizu normalne porazdelitve. Za pogojne porazdelitve nestanovitnosti avtorji navajajo, da nestanovitnost zelo variira v času in hkrati odraža močno dinamično odvisnost. Tako odvisnost se po njihovem mnenju najlažje opiše s frakcijsko integriranimi procesi, ki imajo stopnjo integracije d okrog 0,35.

Friedman in Laibson (1989, str. 142) ugotavljata, da je porazdelitev donosov delnic leptokurtična, kar pomeni, da imajo repi porazdelitve preveč ekstremnih opazovanj, da bi ustrezali normalni porazdelitvi. Avtorja (1989, str. 143) sta preverjala več vzorcev in ugotovila, da je bila leptokurtičnost porazdelitve značilna za vse vzorce, kar pomeni, da je bil delniški trg v ZDA po drugi svetovni vojni podvržen občasnim velikim nihanjem.

Kot lahko vidimo, je dejstvo, da imajo nepogojne porazdelitve donosov finančnih naložb debele repe, v mnogih raziskavah potrjeno. Vsekakor mora biti ta lastnost vkomponirana v model za ocenjevanje nestanovitnosti. Zveza med pogojno in nepogojno porazdelitvijo lahko le delno razkrije vir debelih repov. Če je pogojna porazdelitev normalna, potem bo imela nepogojna porazdelitev presežno koničavost enostavno zaradi mešanice normalnih porazdelitev z različnimi nestanovitnostmi. Vendar

pa je treba v modelu upoštevati, da pogojna porazdelitev sama po sebi ni nujno normalna, temveč ima lahko tudi debele repe (Engle, Patton, 2001, str. 240).

Slika 3: Primerjava porazdelitve zvezno sestavljenih donosov indeksa SBI in njegovega naslednika SBI 20 s prilagojeno normalno porazdelitvijo, obdobje od 1993 do 2003



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

3.2.7 Vpliv eksogenih spremenljivk in napovedanih dogodkov na nestanovitnost

Zaradi tesne povezanosti finančnega in realnega sektorja gospodarstva je smiselno pričakovati, da bodo makroekonomske spremenljivke, ki se določajo na nefinančnih trgih, pomagale razložiti gibanje nestanovitnosti. Nesmiselno je namreč pričakovati, da se nestanovitnost giba in določa samo na osnovi gibanja finančnih naložb in da informacije, ki so pomembne na ostalih trgih, nimajo uporabne vrednosti in posledic za gibanje nestanovitnosti. Veliko raziskovalcev je iskalo vzroke za spreminjanje gibanja nestanovitnosti v makroekonomskih spremenljivkah, medtem ko so drugi avtorji iskali povezanost sprememb nestanovitnosti s samimi javnimi objavami o vrednostih teh spremenljivk. Že v predhodnih poglavjih smo ugotovili, da nestanovitnost niha med obdobji visoke in nizke nestanovitnosti. V posameznih obdobjih nestanovitnost vztraja različno dolgo časa, vendar pa kljub vztrajnosti obstaja tendenca, da se nestanovitnost povrne k svoji dolgoročni vrednosti. Glede smeri vzročnosti obstajajo neenotni rezultati in mnenja o tem, ali vpliva nestanovitnost makroekonomskih

kazalcev na nestanovitnost na trgu delnic in ostalih finančnih trgih (trgi tujih valut, trgi obveznic itd) ali velja ravno obrnjena zveza.

3.2.7.1 Vpliv makroekonomske nestanovitnosti

Schwert (1989a) je proučeval časovno variiranje donosov delnic v povezavi z variiranjem makroekonomskih in finančnih spremenljivk. Izhajal je iz preproste zveze, ki določa ceno delnice kot diskontirano sedanjo vrednost pričakovanih bodočih denarnih tokov lastnikom delnic (1989a, str. 1116):

$$E_{t-1}(P_t) = E_{t-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{t+k}}{[1 + R_{t+k}]^k} \right), \quad (23)$$

pri čemer predstavlja D_{t+k} kapitalski dobiček in dividendna izplačila lastnikom v obdobju $t+k$ ter $1/[1 + R_{t+k}]$ diskontno stopnjo za obdobje $t+k$ na podlagi informacij, ki so bile na voljo v času $t-1$. Iz te zveze lahko predpostavimo, da je pogojna varianca cene delnice odvisna od pogojnih varianc pričakovanih bodočih denarnih tokov, pogojnih varianc bodočih diskontnih stopenj in pogojnih kovarianc med tema spremenljivkama. Če predpostavimo, da so diskontne stopnje konstantne v času, potem lahko sklepamo, da je pogojna varianca odvisna od pričakovanih bodočih denarnih tokov, kar pomeni, da je verjetno, da bodo spremembe v stopnji negotovosti o prihodnjih makroekonomskih pogojih v gospodarstvu povzročile proporcionalno spremembo v nestanovitnosti delniških donosov (Schwert, 1989a, str. 1116). Če podatki o makroekonomskih dejavnikih vsebujejo tudi pomembne informacije za oblikovanje diskontnih stopenj in bodočih denarnih tokov, potem bodo ti podatki pomagali tudi pri razlagi gibanja nestanovitnosti cen delnic. Pri ugotavljanju vpliva makroekonomske nestanovitnosti na nestanovitnost cen delnic v ZDA je Schwert (1989a, str. 1124-1127) izhajal iz nominalnih in realnih spremenljivk makroekonomske nestanovitnosti. Sklepal je, da so izplačila delničarjem nominalna in vključujejo tudi gibanje inflacije, zato mora nestanovitnost cen delnic odražati tudi nestanovitnost inflacije. Za merjenje nestanovitnosti inflacije je proučeval gibanje indeksa rasti cen in rast denarja M0. Avtor je ugotovil, da se gibanje indeksa cen in denarne baze v proučevanem obdobju (od leta 1857 do leta 1987) razlikuje, poleg tega je tudi ugotovil, da je nestanovitnost inflacije in denarne baze precej manjša od nestanovitnosti cen delnic. Iz njegove analize izhaja, da je povezanost med nestanovitnostjo donosov delnic in nestanovitnostjo inflacije oziroma nestanovitnostjo denarne baze šibka. V okviru vpliva realne makroekonomske spremenljivke je proučeval vpliv nestanovitnosti rasti industrijske proizvodnje na nestanovitnost cen delnic in tudi podobno ugotovil, da nestanovitnost industrijske proizvodnje slabo pojasnjuje nestanovitnost na delniškem trgu. Avtor je zaključil, da obstaja šibek vpliv makroekonomske nestanovitnosti na gibanje nestanovitnosti cen delnic, saj makroekonomska nestanovitnost razloži manj kot polovico nestanovitnosti donosov delnic. Anderson in Breedon (1996, str. 29) sta na primeru Velike Britanije nasprotno ugotovila, da ima makroekonomska nestanovitnost v splošnem močan vpliv na

nestanovitnost cen sredstev z izjemo deviznih tečajev, vendar sta pripomnila, da obstaja močnejša zveza z nestanovitnostjo inflacije kot pa s samo inflacijo.

Beltratti in Morana (2002, str. 15) gresta v svojih ugotovitvah glede vpliva makroekonomskih dejavnikov na nestanovitnost še dlje, ko ugotavljata, da so različni makroekonomski dejavniki pomembni pri razlagi različnih obdobj nestanovitnosti donosov delnic. Avtorja sta proučevala vpliv strukturnih prelomov, ki predstavljajo točke, ko gre določena spremenljivka iz enega stanja v drugega (na primer pri obrestnih merah gre za nizko, srednjo in visoko raven obrestnih mer). Avtorja sta za makroekonomske spremenljivke, upoštevane v analizi, določila prelome, s katerimi sta skušala pojasniti tudi gibanje nestanovitnosti na delniškem trgu. Ugotovila sta, da je povezava med makroekonomsko nestanovitnostjo in nestanovitnostjo na delniškem trgu na kratek rok šibka in da upoštevanje gibanja prelomov poveča natančnost napovedovanja nestanovitnosti predvsem za daljše ročnosti (Beltratti, Morana, 2002, str. 26). Makroekonomska nestanovitnost je pomemben pojasnjevalec nestanovitnosti delniškega trga pri srednjeročnih napovedih (od 24 do 36 mesecev). Diskrecijska monetarna politika preko vpliva na nestanovitnost obrestnih mer in rasti denarja pomembno vpliva na gibanje nestanovitnosti donosov delnic, saj s svojimi diskrecijskimi odločitvami o rasti denarja povzroča prelome v gibanju nestanovitnosti donosov delnic (Beltratti, Morana, 2002, str. 28–29).

Glosten, Jagannathan in Runkle (1993, str. 23) so ugotovili močno povezanost med nestanovitnostjo cen delnic in obrestnimi merami. V raziskavi se je pojavila pozitivna povezava med netvegano obrestno mero in nestanovitnostjo donosa delnic.

3.2.7.2 Vpliv obsega trgovanja

Velikost prometa prodaj in nakupov kaže na trgovalno aktivnost, ki ima vpliv na nestanovitnost cen delnic. Trgovalne aktivnosti so odvisne od pričakovanj in informacij, ki so na voljo udeležencem trga. Tako imenovani šoki v trgovalnem prometu vplivajo na skupinjenje nestanovitnosti in prispevajo k avtokorelacijskemu obnašanju nestanovitnosti. Connolly in Stivers (2003) sta proučevala vpliv volumna in šokov v prometu trgovanja na nestanovitnost na delniškem trgu, in sicer na primeru celotnega trga in na primeru posameznega podjetja ter trgovalnega prometa z delnicami dotičnega podjetja v povezavi z objavami podatkov o makroekonomskih dejavnikih. Avtorja sta ugotovila, da je velikost prometa pomembna spremenljivka za določanje pogojev nestanovitnosti na delniškem trgu, prav tako pa sta ugotovila, da je pomemben tudi šok v spremembi gibanja volumna. Povezave šoka v volumnu in nestanovitnosti cen delnic so pozitivne, kar kaže na to, da je gibanje nestanovitnosti odvisno tudi od cikla, v katerem se nestanovitnost nahaja. Ko sta primerjala pomembnost šoka na promet z delnicami na trgu in prometom delnic posameznega podjetja, sta ugotovila, da se vpliv šoka v prometu z delnicami odraža na nestanovitnost kot tržni pojav in ni toliko rezultat dogajanj na ravni posameznega podjetja (Connolly, Stivers, 2003, str. 23). Šok v prometu ima na trgu širšo interpretacijo kot bi bil agregat interpretacij dogajanj na ravni posameznih podjetij, zato lahko tak šok kaže na raznolikost v pričakovanjih o tržnih signalih s strani tržnih udeležencev oziroma o stopnji negotovosti

v gospodarstvu (Conolly, Stivers, 2003, str. 23). Tudi Schwert (1989a, str. 1140) je ugotovil, da je zveza med nestanovitnostjo na delniškem trgu in velikostjo trgovanja pozitivna. Nestanovitnost na delniškem trgu je višja, ko je višja tudi trgovalna aktivnost (Schwert, 1989a, str. 1141). Rezultati analize so pokazali, da obstaja tudi šibek dokaz, da finančna nestanovitnost pomaga pri napovedovanju prihodnjih rasti obsega trgovanja.

3.2.7.3 Vpliv javnih objav

Na obnašanje nestanovitnosti vplivajo tudi objave o makroekonomskih dejavnikih v gospodarstvu, objave podjetij o dobičkih, dividendah in drugih podatkih o poslovanju. Pri vplivu objav je pomembno, kako hitro lahko udeleženci trga nove informacije upoštevajo v cenah. Raziskovalci, ki so se ukvarjali s to tematiko, so ugotovili, da objave vplivajo na nivo in gibanje nestanovitnosti finančnih naložb. Različni avtorji so ugotovili, da se po objavah nestanovitnost spremeni, vendar pa prihaja do razlik v odzivu nestanovitnosti glede na to, ali gre za objavo, ki je bila pričakovana ali za objavo, ki je bila izredna oziroma nepričakovana²⁵. Različnost vpliva se kaže predvsem v času in amplitudi, ki jo ima posamezen šok oziroma javna objava na nestanovitnost. Druge avtorje je zanimalo obdobje okrog objave in so tudi odkrili določene zakonitosti v gibanju nestanovitnosti pred in po objavi. Vplive objav so preverili na trgu delnic, obveznic in na trgih menjalnih tečajev. Kljub temu, da gre za proučevanje nestanovitnosti finančnih naložb, so vplivi objav na posameznih trgih različne. Razlog, da so objave oziroma novice deležne take pozornosti pri analizi nestanovitnosti, so ugotovitve različnih avtorjev, ki zatrjujejo, da je upoštevanje objav bistveno pripomoglo k izboljšavi modelov za napovedovanje nestanovitnosti (Conolly, Stivers, 2003, str. 25).

Obnašanje nestanovitnosti različnih vrst finančnih naložb je glede na vrsto nestanovitnosti specifično. Jones, Lamont in Lumsdaine (1998) so ugotavljali, kakšen je vpliv šokov na dan najavljene objave makroekonomskih dejavnikov na nestanovitnost na trgu obveznic. Na trgu obveznic je nestanovitnost dan pred objavo razmeroma mirna. Na dan objave je zaznati povečano nestanovitnost, vendar ta nestanovitnost ne vztraja, saj se hitro povrne v stanje pred objavo (Jones, Lamont, Lumsdaine, 1998, str. 332). Trgovci očitno uspejo hitro upoštevati nove informacije o makroekonomskih dejavnikih v cenah obveznic. To kaže, da proces ustvarjanja informacije ali sam trgovalni proces ne ustvarja nestanovitnosti v dneh po objavi. To pomeni, da na trgu obveznic javne objave informacij o makroekonomskih dejavnikih ne ustvarjajo avtokorelacije v nestanovitnosti v dneh, ki sledijo objavi. Izsledki raziskave so pokazali, da šoki ob objavah nimajo pomembnega vpliva na nestanovitnost v dnevih po objavi in pričakovani donosi variirajo skupaj z makroekonomskim tveganjem gospodarstva, kar pomeni, da obveznice prinašajo višje donose, ko so izpostavljene višjemu tveganju (Jones, Lamont, Lumsdaine, 1998, str. 333–335).

Ederington in Lee (2001, str. 537) sta na podlagi meddnevnikih gibanj nestanovitnosti obrestnih mer odkrila, da je nestanovitnost obrestnih mer zelo visoka, ko se objavijo podatki o stopnji

²⁵ Glej izsledke Ederingtona in Leeja (2001) v poglavju 3.2.4 Vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti.

nezaposlenosti, indeksu rasti cen proizvajalcev ali indeksu cen na drobno, medtem ko ima na primer objava o bruto domačem proizvodu manjši vpliv na nestanovitnost obrestnih mer. Andersen in Bollerslev (1998, str. 250–255) sta v svoji analizi odkrila, da je objava o stopnji nezaposlenosti zelo pomembna pri razlagi nestanovitnosti tečaja nemška marka – ameriški dolar, ki ima značilno pomembnejši vpliv od drugih makroekonomskih objav.

3.2.7.4 Vpliv koledarja

Pri proučevanju dejavnikov, ki vplivajo na nestanovitnost cen finančnih naložb, so empirične raziskave pokazale na pomemben dejavnik, tako imenovani vpliv koledarja. V bistvu je šlo za to, da je obnašanje nestanovitnosti možno razložiti tudi z dnevi v letu. Nestanovitnost se je gibala drugače v času pred in po praznikih, na začetku in na koncu tedna, vpliv posameznih posebnih dni pa je bil povezan tudi z objavami, ki so se zgodile na določen dan, saj je znano, da se določeni podatki o makroekonomskih dejavnikih objavljajo periodično na določen dan v tednu²⁶.

V svoji raziskavi je že Fama (1965, str. 56) preverjal, ali obstaja razlika med spremembami, ki se dogodijo med delovnimi dnevi in spremembami, ki se dogodijo zaradi vpliva konca tedna ali praznika. Fama, ki je proučeval porazdelitev donosov, ni odkril pomembnih razlik med spremembami, ki se zgodijo med delovnimi dnevi in prazniki ali konci tedna. Schwert (1989a, str. 1139) je preverjal domnevo, da je nestanovitnost donosov delnic v času, ko borza posluje, višja, vendar tudi ni odkril močnega vpliva na spremembe v nestanovitnosti v času.

Jones, Lamont in Lumsdaine (1998, str. 321–325) so na trgu obveznic preverjali nestanovitnost po posameznih dnevih v tednu. Ugotovili so, da je nestanovitnost najvišja v ponedeljek in petek, medtem ko je najnižja v sredo, kar kaže še eno lastnost obvezniškega trga, in sicer U-obliko krivulje gibanja nestanovitnosti skozi teden. Le-ta je nekoliko drugačna od krivulje gibanja nestanovitnosti na trgu delnic, ki je skozi teden padajoča. U-obliko krivulje sta potrdila tudi Ederington in Lee (2001, str. 549) na trgu obrestnih terminskih (*futures*) pogodb, česar pa nista ugotovila za gibanje nestanovitnosti na trgu futures pogodb za tečaj nemška marka - ameriški dolar. Za gibanje nestanovitnosti menjalnega tečaja sta po odstranitvi vpliva objav ugotovila, da je bila nestanovitnost najvišja v torek in/ali petek ter najnižja v ponedeljek. Andersen in Bollerslev²⁷ (1998, str. 239–247) sta ugotovila, da je vpliv ponedeljka na nestanovitnost tečaja nemška marka - ameriški dolar zanemarljiv, zmanjšanje aktivnosti v času okrog konca tedna je značilna, pomemben pa je tudi vpliv časa v petek popoldan. Pomemben vpliv na nestanovitnost tečaja se kaže tudi v času počitnic in državnih praznikov.

²⁶ Kot primer lahko navedemo zasedanje Sveta Banke Slovenije, ki je dvakrat mesečno na isti dan v tednu.

²⁷ Avtorja sta ocenjevala nestanovitnost menjalnega tečaja znotraj trgovalnega dne na osnovi donosov pet-minutnih intervalov.

3.3 PREGLED MODELOV ZA OCENJEVANJE NESTANOVITNOSTI

Pri modeliranju nestanovitnosti donosnosti vrednostnih papirjev se lahko uporabijo različni pristopi. V tem razdelku bomo prikazali nekaj modelov, ki so na voljo za modeliranje oziroma napovedovanje variance donosnosti in s tem tudi nestanovitnosti (Yu, 2002, str. 196–197 in Cuthbertson, Nitzsche, 2001, str. 661–664).

Najbolj enostaven model je **model naključnega koraka** (*random walk model*), ki predpostavlja, da je najboljša napoved variance prihodnjega obdobja (v naslednjem mesecu) kar varianca trenutnega obdobja (tega meseca):

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sigma_t^2. \quad (24)$$

Če predpostavljamo, da bo pogojno pričakovanje nestanovitnosti konstantno, potem bo optimalna napoved prihodnje nestanovitnosti kar povprečje preteklih vrednosti, in sicer:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t^2. \quad (25)$$

Ta model se imenuje **model zgodovinskega povprečja** in se je v preteklosti množično uporabljal, dokler niso različni avtorji pokazali, da pogojno pričakovana nestanovitnost (varianca) v času variira²⁸.

Metoda preprostih drsečih sredin (SMA – *Simple Moving Average*) uporablja enako utežene pretekle vrednosti variance premičnega preteklega obdobja (*moving window*) velikosti T . Velikost premičnega obdobja se lahko spreminja in je lahko dolgo en dan, 250 dni ali celo več let. S pomočjo povprečja tega obdobja dobimo napoved variance:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = (1/T) \sum_{j=1}^T (R_{t-j+1} - \mu_t)^2. \quad (26)$$

Uteži se v modelu drsečih sredin lahko zmanjšujejo tudi geometrično, tak model pa je poznan kot model eksponentnega tehtanja drsečih sredin (EWMA – *Exponentially Weighted Moving Average*), ki se ga lahko zapiše:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = (1-\lambda) \sum_{j=1}^T \lambda^{j-1} (R_{t-j+1} - \mu_t)^2, \quad (27)$$

²⁸ Več o tem bo razloženo v poglavjih, ki sledijo.

kjer je $0 < \lambda < 1$ in se imenuje faktor razkroja. EWMA model daje večjo težo enotam, ki so bolj blizu, in manjšo težo enotam, bolj oddaljenim v preteklost. Ta metoda izračuna ima dve prednosti, in sicer:

- hitreje se odzove na nedavne spremembe v nestanovitnosti, ker daje večjo težo nedavnim spremembam,
- napovedi na osnovi EWMA se po šoku postopno zmanjšujejo, medtem ko se napovedi na podlagi SMA znižajo nenadoma, vendar le po določenem časovnem odlogu, ko šok izpade iz premičnega obdobja T .

Za napovedovanje nestanovitnosti se uporabljajo tudi **stohastični modeli nestanovitnosti** (*stochastic volatility models*), med katere prištevamo tudi ARCH modele, ki jih bomo podrobneje spoznali v naslednjem poglavju.

4 ARCH/GARCH MODELI

Zgodovina ARCH modelov se je začela pisati leta 1982, ko je Robert Engle (1982, str. 988) objavil članek, v katerem je predstavil s heteroskedastičnostjo pogojen avtoregresijski model (ARCH – *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*). Pred proučevanjem pogojne variance, ki jo opisujejo ARCH modeli, so se raziskovalci posvečali pogojni srednji vrednosti oziroma matematičnemu upanju ($E(Y)$), kjer je bil le-ta odvisen od pojasnjevalnih spremenljivk (X_i). Enačbo za pogojno srednjo vrednost lahko zapišemo:

$$E(Y|X_i) = f(X_i), \quad (28)$$

kjer $f(X_i)$ opisuje neko funkcijo pojasnjevalnih spremenljivk. Raziskovalci in analitiki so pri proučevanju lastnosti cen in donosov vrednostnih papirjev ugotovili, da le-ti vsebujejo določene posebne zakonitosti. Pri spremljanju gibanja cen vrednostnih papirjev so ugotovili, da sledijo tako imenovanemu naključnemu koraku, se gibajo stran od povprečja in so v posameznih časovnih obdobjih podvržene različnim trendom. Razlaga o sledenju gibanja cen lastniških vrednostnih papirjev naključnemu koraku je v ekonomski literaturi že stara, medtem ko ideja, da cene sledijo stohastičnemu trendu, izvira iz statistične literature iz 70-ih let 20. stoletja (Hatanaka, 1998, str. 7). Za donose vrednostnih papirjev so ugotovili, da se njihov drugi centralni moment oziroma varianca v času spreminja in da take časovne vrste niso homoskedastične, temveč so heteroskedastične. Naslednja prelomnica v zgodovini ARCH modelov je bil splošnejši zapis ARCH modela, ki ga je predstavil Bollerslev (1986, str. 309). Bollerslev²⁹ je dopolnjeni model poimenoval GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Splošni ARCH (GARCH) model, kjer

²⁹ Istočasno je neodvisno od Bollersleva model, sicer z drugačnimi oznakami, razvil in predstavil tudi Taylor (Bera, Higgins, 1993, str. 312).

poleg preteklih kvadratov napak kot pojasnjevalnih spremenljivk iz ARCH modela, dodatno nastopajo še pretekle vrednosti pogojnih varianc.

ARCH modeli spadajo v skupino stohastičnih modelov, ki služijo za modeliranje stohastičnih procesov. Bistvo ARCH modelov je, da predpostavljajo pogojno varianco, ki se v času spreminja in da se z njimi lahko opišejo lastnosti nestanovitnosti cen vrednostnih papirjev. Razvoj ARCH modelov je botroval, da so z različnimi formulacijami raziskovalci skušali čimbolj natančno opisati lastnosti časovnih vrst. Zapis posameznega modela in njegova uporaba v praksi je odvisna od trenutnega proučevanja in lastnosti, ki jim je časovna vrsta izpostavljena, tako da ni nekega zapisa modela, ki bi bil splošen za vse vrste finančnih časovnih vrst (npr. cene lastniških vrednostnih papirjev, gibanje obresti, menjalnih tečajev tujih valut itd.). Lastnosti nestanovitnosti finančnih časovnih vrst smo že spoznali v preteklih poglavjih, v poglavju, ki sledi, pa bo dan poudarek na ARCH modelu in nekaterih njegovih izpeljankah.

4.1 STOHAŠTIČNI PROCES

Slučajni ali stohastični proces je proces, pri katerem gibanje iz enega stanja v drugo opredeljuje spremenljivka, ki je neodvisna od začetnega in končnega stanja. Lahko ga zapišemo kot zaporedje naključnih spremenljivk iz neke množice stanj Ω . Za časovne vrste lahko zaradi poenostavitve predpostavimo, da so časi opazovanj med seboj enakomerno razdeljeni, kar omogoči, da za indekse časa uporabljamo cela števila. Stohastični proces lahko zapišemo (Gouriéroux, 1997, str. 6):

$$Y = (Y_t, t \in T), \quad (29)$$

kjer je niz indeksov iz T element množice $\mathbb{N}$ ali $\mathbb{Z}$. Ko gre za multivariatni proces, so njegove komponente določene z:

$$Y_t = (Y_{jt}, j = 1, \dots, n). \quad (30)$$

Vsaka serija $Y_t = (Y_{jt}, t \in T)$ določa univariatni proces. Opazovan časovni red ustreza nekemu procesu $Y_t(\omega)$, $t = 1, \dots, T$, kjer je ω točno določeno stanje in $1, \dots, T$ časovni interval opazovanja. Taka realizacija $(Y_t(\omega), t \in T)$ se imenuje tudi *pot procesa*. Zakonitosti, ki so opažene na taki poti, so posledica zakonitosti, ki veljajo za osnovno porazdelitev celotnega procesa.

Za primer stohastičnega procesa si lahko ogledamo gibanje cene lastniških vrednostnih papirjev, ki ga Devjak (2005, str. 109) definira z geometričnim Brownovim gibanjem in je določen z naslednjo stohastično diferencialno enačbo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_s.$$

Pri tem je S cena lastniškega vrednostnega papirja, μ je povprečna realizirana donosnost lastniškega vrednostnega papirja, σ je nestanovitnost cene vrednostnega papirja in dW_s je Wienerjev proces, ki določa naključne spremembe v ceni vrednostnega papirja. Wienerjev proces je slučajna spremenljivka, ki se porazdeljuje normalno z aritmetično sredino 0 in varianco dt ($dW \sim N(0, dt)$). Stohastično nestanovitnost σ pa lahko določimo na primer z naslednjo diferencialno enačbo (Näsström, 2003, str. 6):

$$d\sigma^2 = a(b - \sigma^2)dt + \xi(\sigma^2)^\alpha dW_{\sigma^2}, \quad (31)$$

kjer so a , b , ξ in α konstante in dW_{σ^2} Wienerjev proces, ki določa naključne spremembe v nestanovitnosti. Ta enačba je ena od možnih rešitev za obvladovanje problema spremenljive nestanovitnosti.

4.2 STACIONARNOST IN NESTACIONARNOST ČASOVNIH VRST

Če je časovna vrsta podatkov podvržena določenemu trendu, zanjo pravimo, da ni stacionarna. Časovna vrsta, ki je stacionarna, ne vsebuje trenda, variira okrog povprečne vrednosti in se od nje ne oddaljuje (Gaynor, Kirkpatrick, 1994, str. 407). Stacionarnost se nanaša na porazdelitev določene časovne serije podatkov, kar pomeni, da je časovna vrsta stacionarna, ko je njena porazdelitev konstantna v času. Stacionarnost se nanaša na vse momente verjetnostne porazdelitve, pri čemer momenti porazdelitve vključujejo tudi kovariance med vsemi odloženimi (lagiranimi) spremenljivkami ($E(y_t, y_{t-s})$), pri čemer s ni enak t) časovne vrste. Thomasova (2002, str. 11) govori o stacionarnosti inovacij časovne serije oziroma o stabilnosti porazdelitve inovacij. Pomembna lastnost stacionarnega procesa je, da se avtokorelacijska funkcija ne spreminja s časom, v katerem je bila funkcija izračunana oziroma je ta funkcija odvisna samo od odloženih spremenljivk. Obstajata dve vrsti stacionarnosti, in sicer *šibka* ter *stroga stacionarnost*³⁰, pri čemer ne pomeni, da je stroga stacionarnost bolj stacionarna od šibke stacionarnosti, ampak gre za drugačno vrsto stacionarnosti.

Šibki stacionarnosti pravimo tudi kovariančna stacionarnost in pomeni, da ne obstaja odvisnost srednje vrednosti in variance od časa t ter da je avtokovarianca med vsemi *odloženimi spremenljivkami* (lagiranimi) v času konstantna. Za potrebe modeliranja in napovedovanja je pomembno, da je časovna vrsta vsaj šibko stacionarna, saj je modeliranje in ocenjevanje modelov take časovne vrste enostavnejše in ni podvrženo omejitvam, ki bi bile potrebne v nasprotnem primeru. Stacionarnost vrste podatkov je zelo priporočljiva lastnost, saj zelo poenostavi analizo ob uporabi bolj

³⁰ V angleške jeziku govorijo o *weak stationarity* in *strict (strong) stationarity*.

enostavnih predpostavk. Če je vrsta stacionarna, lahko za ocenjevanje uporablja standardna avtokorelacijska orodja na osnovi metode najmanjših kvadratov in kar je pomembneje, sklepi in ugotovitve so na podlagi takih modelov neposredno uporabljivi v analizi (Thomas, 2002, str. 11). Stohastičen proces je šibko ali kovariančno stacionaren, če zadostuje naslednjim pogojem:

$$E(y_t) = m \text{ in je neodvisen od } t,$$

$$E(y_t^2) = \sigma^2 \text{ je konstanta in neodvisna od } t,$$

$$E(y_t, y_{t-s}) \text{ za vsak } s = 1, 2, \dots, \text{ je odvisna samo od števila odlogov } (s).$$

Kovarianca je samo funkcija intervala oziroma tega, kako narazen so točke v času, in ne funkcija trenutka v času, v katerem se točke pojavljajo.

Za časovno vrsto, ki je *strogo stacionarna*, mora veljati, da so vsi višji momenti stacionarni, vključno z varianco in srednjo vrednostjo. To pomeni, da je porazdelitev serije v določenem obdobju enaka porazdelitvam v drugih obdobjih. Gouriéroux (1997, str. 7) definira strogo stacionarnost na naslednji način:

»Proces oziroma časovna vrsta je strogo stacionarna, če in samo če je skupna porazdelitev $(y_{t+t_1}, \dots, y_{t+t_n})$ enaka skupni porazdelitvi $(y_{t_1}, \dots, y_{t_n})$ za vsak n, t, t_1, t_n .«

Vsak proces, ki je strogo stacionaren, je hkrati tudi šibko stacionaren, vendar pa nasprotno proces, ki je šibko stacionaren, ni nujno strogo stacionaren. Do takega slučaja pride v primeru, ko tretji in četrti moment verjetnostne porazdelitve nista časovno neodvisna. Pojma šibke in stroge stacionarnosti sovpadata, če je sam proces Gaussov oziroma če so vse končno-dimenzijske verjetnostne porazdelitve normalne (Gouriéroux, 1997, str. 8).

Če je kateri moment porazdelitve časovne serije podatkov funkcija časa t , potem taka časovna serija ni stacionarna, temveč je *nestacionarna*. Nestacionarnim serijam tudi pravimo, da so neintegrirane in so lahko na primer določene na naslednji način:

$$E(y_t) = m,$$

$$E(y_t^2) = t\sigma^2.$$

Drugi moment nestacionarnih serij je funkcija časa t .

Neintegriran proces oziroma časovno vrsto, ki ni stacionarna, se da preoblikovati v stacionarno s tem, da se na primer izračunajo difference, po potrebi tudi višjih redov. Diferenco prvega reda se lahko izračuna na naslednji način:

$$y_t \rightarrow \Delta y_t = y_t - y_{t-1}. \quad (32)$$

V tem primeru je serija y_t integrirana z redom ena, kar se formalno zapiše $I(1)$. Red difference, ki je potreben, da postane časovna vrsta stacionarna, določa red integriranosti časovne serije podatkov. Serija, ki postane stacionarna, ko se izvede prva diferenca d - krat, je integrirana serija reda d , kar se formalno zapiše $I(d)$. Če diferenca d ni celo število, potem so to serije, ki se imenujejo **frakcijsko integrirane serije**, kjer je diferenca enaka $0 < d < 1$. Za ko-integrirane serije velja, da je linearna kombinacija posameznih serij stacionarna, same serije pa so nestacionarne.

Pri drugem načinu za stacioniranje časovne serije le-to logaritmiramo z naravnim logaritmom:

$$y_t \rightarrow \ln y_t, \quad (33)$$

pri čemer dobimo zvezno sestavljeno časovno vrsto oziroma časovne vrste zvezno sestavljenih donosov vrednostnih papirjev.

Rezultat logaritmiranja nam da približno enake rezultate kot v primeru, če bi časovno vrsto stabilizirali z relativnimi prvimi diferencami oziroma bodo relativni donosi, izračunani s pomočjo relativnih diferenc, skoraj enaki zvezno sestavljenim donosom dokler bodo razlike med zaporednimi cenami vrednostnih papirjev P_t in P_{t-1} majhne:

$$\ln \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right) \sim \frac{\Delta y_t}{y_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}.$$

Za konec lahko dodamo, da je stacionarnost v svojem bistvu relativni pojem, čeprav morda definicije stacionarnosti dajejo vtis, da gre za neko absolutno veličino. Vsak proces je lahko stacionaren le, če je obseg podatkov v vzorcu dovolj velik v primerjavi z najdaljšo frekvenčno komponento (sezonska komponenta, nihaj, amplituda) podatkov. To pomeni, da je lahko vsak proces, ki izbira podatke iz kratkega časovnega obdobja (v primerjavi z amplitudo v podatkih) videti nestacionaren, čeprav bi bil tak proces z večjim nizom (daljšim obdobjem) podatkov stacionaren (Masliah, 2004).

4.3 BELI ŠUM

Beli šum³¹ je naključni proces naključnih spremenljivk in je primer stacionarne časovne serije. Beli šum je pomembna vsebina stohastičnega procesa in predpostavlja, da v časovni vrsti med zaporednimi podatki ni korelacije, definiramo pa ga lahko na naslednji način:

$$E(y_t) = 0,$$

³¹ V angleškem jeziku se uporablja termin *white noise*.

$$E(y_t^2) = \sigma^2 \text{ je konstanta in neodvisna od } t,$$

$$E(y_t, y_{t-s}) = 0 \text{ za vsak } s \neq t.$$

Beli šum je kovariančno stacionaren, če pa se inovacije belega šuma porazdeljujejo v normalni porazdelitvi, je taka serija strogo stacionarna (Thomas, 2002, str. 13). Vsak element serije belega šuma je naključno izbran iz populacije, ki ima srednjo vrednost nič in konstantno varianco.

4.4 AVTOKORELACIJA IN HETEROSKEDASTIČNOST

4.4.1 Avtokorelacija

Avtokorelacijo lahko definiramo kot korelacijo med členi v vrsti opazovanj, ki so lahko razporejeni v času (časovne vrste) ali prostoru (presečne vrste). Kot izhaja iz relacije (146), je med nekoreliranimi spremenljivkami kovarianca enaka 0.

Za vrste, ki ne vsebujejo avtokorelacije, velja, da je med napakami ε_t neke spremenljivke v vrsti opazovanj kovarianca tudi enaka 0, in sicer:

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0 \text{ in } t \neq s.$$

Če so zaporedne vrednosti napak ε_t med seboj korelirane, to pomeni, da so med seboj korelirane tudi vrednosti spremenljivke. Avtokovarianca v vrsti opazovanj se lahko definira z:

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \text{Cov}(\varepsilon_{t+s}, \varepsilon_t) = \gamma_s,$$

pri čemer je korelacija med napakami ε_t in ε_{t-s} kar njuna avtokorelacija, ki je določena z (Green, 1997, str. 583):

$$\text{Corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s})}{\sqrt{\text{Var}(\varepsilon_t)\text{Var}(\varepsilon_{t-s})}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \rho_s.$$

Varianca med napakami ε_t je konstantna in velja $\sigma^2 = \gamma_0$.

Poznamo več vrst avtokorelacij, iz česar sledijo tudi različni avtoregresijski modeli. Med najbolj proučevanimi je avtoregresija prvega reda ali AR(1) proces, ki je določen kot:

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$$

in avtoregresijski procesi višjih redov ($AR(p)$) oblike:

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_p \varepsilon_{t-p} + u_t.$$

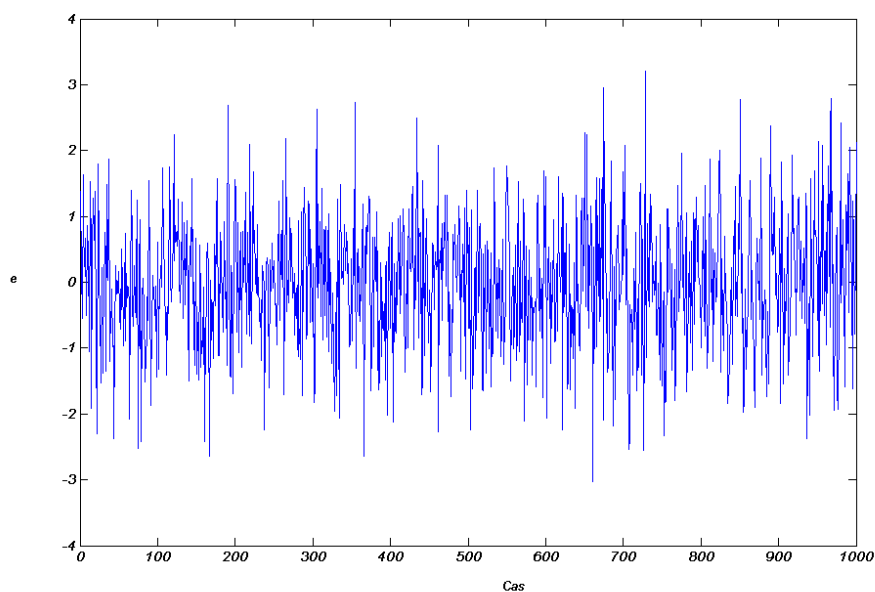
Značilnost avtoregresij je, da vpliv danega šoka slabi z oddaljevanjem v daljno preteklost, vendar pa njegov vpliv izgineva asimptotično.

Avtokorelacijo med dvema členoma vrste, ki je očiščena vplivov ostalih odloženih členov, imenujemo *parcialna avtokorelacija*.

4.4.2 Heteroskedastičnost

Univariatni stohastični proces Y je *homoskedastičen*, če je varianca (standardni odklon) konstantna v vsakem trenutku t , nasprotje temu pa je proces, ki je *heteroskedastičen* in njegova varianca (standardni odklon) ni konstantna v času. Pomen besed izvira iz besed *homo* oziroma *hetero*, ki pomenita enak oziroma različen (neenak) in besede *skedasticos*, ki pomeni razpršenost (Pfajfar, 1998 in Gujarati, 1995, str. 356).

Slika 4: Prikaz časovne vrste homoskedastičnega naključnega procesa



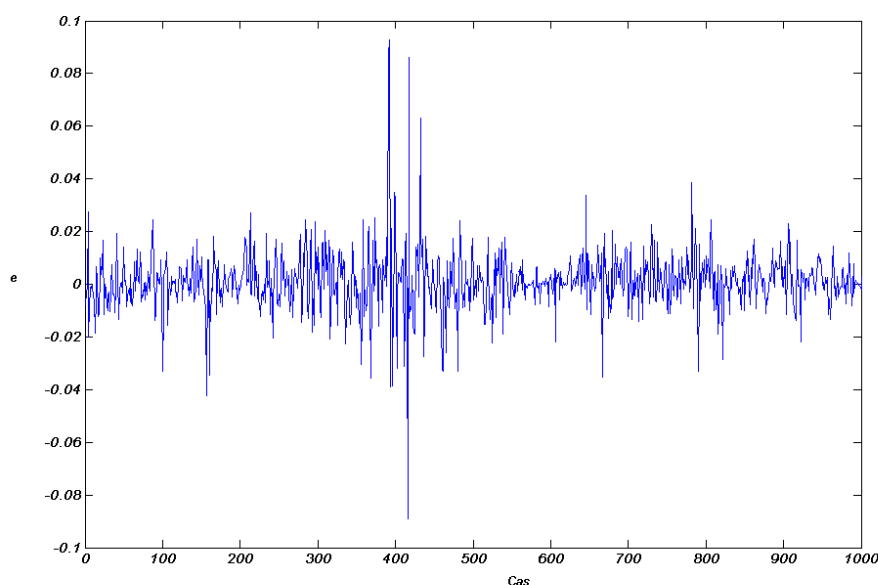
Vir: Lastni izračuni.

Homoskedastičnost torej pomeni, da je varianca enaka oziroma se le-ta ne spreminja. V primeru homoskedastičnosti so slučajne spremenljivke ε_i enako razpršene za vse vrednosti pojasnjevalne spremenljivke (razpršenost vrednosti ε_i je neodvisna od vrednosti pojasnjevalnih spremenljivk). Na sliki 4 je prikazan primer stohastičnega procesa, ki je homoskedastičen.

Za heteroskedastičen proces pa velja, da se varianca spreminja. Heteroskedastičnost je pomembna v svetu financ, saj večina donosov finančnih naložb kaže heteroskedastičnost takih procesov.

Poznamo dve obliki heteroskedastičnosti, in sicer je proces lahko nepogojno heteroskedastičen, če nepogojna varianca ni konstantna in proces je lahko pogojno heteroskedastičen, če pogojna varianca ni konstantna. V primeru, da nestanovitnost izraža skupinjenje oziroma obdobja visoke in nizke nestanovitnosti, ki niso znana vnaprej, potem je tak proces pogojno heteroskedastičen. Ko so obdobja visoke in nizke nestanovitnosti znana že vnaprej, potem v takih primerih govorimo o nepogojni heteroskedastičnosti (na primer različna nestanovitnost cen v različnih letnih časih). Če je proces nepogojno heteroskedastičen, je tak proces tudi pogojno heteroskedastičen, kar pa ni nujno res v obratnem primeru. Če je proces pogojno heteroskedastičen, hkrati ni nujno tudi nepogojno heteroskedastičen. Na spodnji sliki je prikazan heteroskedastičen proces z obdobji visoke in nizke nestanovitnosti.

Slika 5: *Prikaz časovne vrste heteroskedastičnega naključnega procesa*



Vir: Lastni izračuni.

Vzroki heteroskedastičnosti so različni, vendar je značilno, da bo heteroskedastičnost bolj pogosta pri presečnih podatkih kot pri časovni serijah. Pri presečnih vrstah nastopajo v danem trenutku podatki, ki so med seboj lahko zelo različni, zaradi česar pride do večje variabilnosti, v drugem trenutku pa so podatki manj različni. V časovnih serijah nastopajo podatki o isti entiteti skozi različna časovna

obdobja (Gujarati, 1995, str. 359). Gujarati (1995, str. 357–359) navaja naslednje možne vzroke heteroskedastičnosti:

- V naravi ljudi je, da se učijo na svojih napakah, kar pomeni, da se njihove napake v vedenju v času zmanjšujejo, kar posledično pomeni pričakovan upad variance v času.
- Mnogo je tudi pojavov, ko se varianca v času povečuje. Znano je, da podjetja, ki dosegajo visoke dobičke, tudi bolj pogosto spreminjajo politiko dividendnih izplačil kot podjetja z nizkimi dobički.
- Variabilnost je velikokrat posledica slabe kvalitete podatkov. Ko se serije podatkov zaradi boljših tehnik zbiranja podatkov izboljšujejo, je verjetno pričakovati, da se bo tudi varianca slučajnih vplivov zmanjševala.
- Heteroskedastičnost je lahko tudi posledica ekstremnih vrednosti oziroma osamelcev v podatkih. Taki primeri so na primer tudi finančni podatki, saj je za njihove porazdelitve značilno, da imajo debele repe.
- Kot vzrok heteroskedastičnosti se lahko navede tudi neprava specifikacija samega ekonometričnega modela.

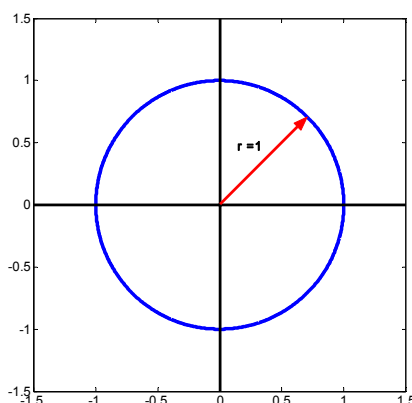
Posledice heteroskedastičnosti se odražajo v tem, da ocene regresijskih koeficientov s pomočjo metode najmanjših kvadratov niso več nepristranske najboljše linearne ocene, temveč so le nepristranske linearne ocene, ocene varianc in kovarianc regresijskih koeficientov pa postanejo pristranske in nekonsistentne.

Vse povedano se da razširiti tudi na večrazsežne procese. V primeru multivariatnega stohastičnega procesa Y velja, da je le-ta homoskedastičen, če je njegova variančno-kovariančna matrika konstantna v vsakem časovnem trenutku t in heteroskedastičen, če se ta matrika s časom spreminja.

4.5 ENOTNI KROG IN ENOTNA REŠITEV

Pri modeliranju časovnih serij je pomembno, da so le-te stacionarne, kar pomeni, da šoki na take vrste nimajo trajnega učinka, temveč le prehodnega. Problem *enotnega kroga* oziroma *enotne rešitve* (*unit root*), ki se kaže v časovnih serijah, je v tem, da rešitev karakteristične enačbe avtoregresijskega procesa AR(1) leži na enotnem krogu oziroma ima enačba enotno rešitev, ki je enaka 1, od koder izvira tudi ime termina. Če ima karakteristična enačba časovne serije rešitev 1, potem take vrste niso stacionarne. Enotni krog, ki je ponazorjen na spodnji sliki s krogom, ima premer enak 1.

Slika 6: Enotni krog



Za lažjo predstavitev si zamislimo AR(1) proces naslednje oblike:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ki ga lahko zapišemo tudi kot:

$$(1 - \rho L)y_t = \varepsilon_t.$$

Če je $\rho = 1$, ima karakteristična enačba $(1 - \rho(z)) = 0$ rešitev enako 1 in v takem primeru imamo problem enotnega kroga. Šoki na take časovne serije vztrajajo v neskončnost in se ne vračajo k svoji srednji vrednosti. Tak proces je tudi integriran proces reda 1 oziroma $I(1)$. Če je $|\rho| < 1$, ima karakteristična enačba $(1 - \rho(z)) = 0$ rešitev, ki leži izven enotnega kroga. Šok ne vztraja v neskončnost in je le prehodnega pomena, proces pa je integriran proces reda 0. Rešitev karakteristične enačbe za avtoregresijski model dobimo, če iz nje izrazimo $z = 1/\rho$ in velja $\rho < 1$, potem je rešitev $z > 1$, ki leži izven enotnega kroga. Ker gre za pomembno lastnost časovnih serij, so se razvili tudi različni testi za preverjanje, ali obstaja enotna rešitev karakteristične enačbe oziroma ali je $\rho = 1$. Na tem mestu omenjamo Dickey-Fuller test (Green, 1997, str. 848), ki je eden bolj znanih, z nadaljnjim razvojem so se razvile tudi izpeljanke tega testa in seveda tudi drugi testi (glej npr. Hatanaka, 1998).

4.6 ARMA PROCES

ARMA³² proces ponazarja tako imenovani avtoregresijski drseče sredinski proces (*Autoregressive Moving-Average*), ki vsebuje AR in MA proces. Model ARMA(p, q) procesa, kjer p predstavlja

³² Bralec si lahko več o teh procesih ogleda v Green (1997, str. 825).

število avtoregresijskih parametrov in q število parametrov drsečih sredin, lahko v splošnem zapišemo:

$$y_t = \mu + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + \dots + \gamma_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (34)$$

kjer je y_t odvisna spremenljivka, μ konstantna srednja vrednost, zaradi katere ima proces smer³³ in ε_t inovacija v modelu oziroma nova informacija v času t . Model lahko zapišemo tudi z uporabo **odložitvenega operatorja**³⁴:

$$\begin{aligned} & y_t - \gamma_1 y_{t-1} - \gamma_2 y_{t-2} - \dots - \gamma_p y_{t-p} \\ &= \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ & (1 - \gamma_1(L) - \gamma_2(L^2) - \dots - \gamma_p(L^p)) y_t \\ &= \mu + (1 - \theta_1(L) - \theta_2(L^2) - \dots - \theta_q(L^q)) \varepsilon_t \\ & C(L) y_t = \mu + D(L) \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (35)$$

kjer je $C(L) = 1 - \gamma_1(L) - \gamma_2(L^2) - \dots - \gamma_p(L^p)$ in $D(L) = 1 - \theta_1(L) - \theta_2(L^2) - \dots - \theta_q(L^q)$. Model (35) je stacionaren, če vse rešitve karakteristične enačbe $C(z) = 0$ ležijo izven enotnega kroga in proces je obrnljiv (*invertible*), če tudi vse rešitve karakteristične enačbe $D(z) = 0$ ležijo izven enotnega kroga (Fuh, 2003, str. 5 in Gaynor, Kirkpatrick, 1994, str. 422). Če ARMA modelu (34) dodamo še pojasnjevalne eksogene spremenljivke $\beta'x_t$, dobimo tako imenovani ARMAX (X označuje pojasnjevalne spremenljivke), katerega posebna izpeljanka je ARMA model brez teh pojasnjevalnih spremenljivk. V splošnem se model lahko zapiše:

$$y_t = \mu + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + \dots + \gamma_p y_{t-p} + \beta'x_t + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (36)$$

³³ V angleški terminologiji za procese, ki imajo smer μ , pravijo, da imajo pričakovani odklon (*drift*). Proces bi se lahko zapisal tudi brez smeri μ .

³⁴ Tako imenovani odložitveni operator (*lag operator*) prikazuje, za koliko obdobj v preteklost je zamaknjena spremenljivka. Pravila za računanje so razložena v dodatku.

4.6.1 AR proces

Če v enačbi (35) velja, da je $D(L)=1$, dobimo AR proces ali avtoregresijski proces reda q , ki se zapiše kot:

$$y_t = \mu + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 y_{t-2} + \dots + \gamma_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (37)$$

ali z uporabo odložitvenega operatorja:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_1(L) - \gamma_2(L^2) - \dots - \gamma_p(L^p))y_t &= \mu + \varepsilon_t \\ C(L)y_t &= \mu + \varepsilon_t. \end{aligned}$$

4.6.2 MA proces

Če v enačbi (35) velja, da je $C(L)=1$, dobimo MA proces ali proces drsečih sredin reda p , ki se zapiše kot:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \mu + D(L)\varepsilon_t \end{aligned} \quad (38)$$

Proces drsečih sredin (MA) mora biti obrnljiv, da lahko odraža avtoregresijski proces, potreben pogoj za to pa je, da rešitve karakteristične enačbe $D(z)=0$ ležijo izven enotnega kroga.

Sedaj se ustavimo pri MA procesu reda 1 ali MA(1), ki ga zapišemo:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad (39)$$

lahko pa se zapiše tudi kot:

$$y_t = \mu + (1 - \theta L)\varepsilon_t$$

oziroma

$$\frac{y_t}{(1-\theta L)} = \frac{\mu}{(1-\theta)} + \varepsilon_t^{35}.$$

Enačbo preuredimo in dobimo:

$$y_t = \frac{\mu}{(1-\theta)} - \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} - \dots + \varepsilon_t^{36}. \quad (40)$$

Učinek urejanja je relacija (40), iz katere izhaja, da je y_t predstavljen kot funkcija svojih odloženih spremenljivk.

4.6.3 ARIMA proces

Če model (34) integriramo, dobimo *avtoregresijski integriran drseče sredinski proces* (ARIMA)³⁷. Kot smo že povedali, so serije integrirane, če želimo, da postanejo stacionarne, pa je potrebno izračunati difference. Red, ki določa stopnjo integriranosti (difference), je določen s parametrom d . Splošen model ARIMA(p, d, q) procesa je:

$$\begin{aligned} \Delta^d y_t = & \mu + \gamma_1 \Delta^d y_{t-1} + \gamma_2 \Delta^d y_{t-2} + \dots + \gamma_p \Delta^d y_{t-p}, \\ & + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned} \quad (41)$$

če velja $\Delta^d y_t = (1-L)^d y_t$, potem se model lahko zapiše:

$$C(L) \left[(1-L)^d y_t \right] = \mu + D(L) \varepsilon_t.$$

³⁵ μ je konstanta in odložiten operator je lahko enak 1, če se z njim operira na konstanti (θ) ter velja za neskončno vsoto

geometričnega zaporedja, če je $|\theta| < 1$, naslednje $\sum_{i=0}^{\infty} (\theta L)^i = \frac{1}{1-\theta L}$, potem velja $\mu \cdot \frac{1}{1-\theta L} = \mu \cdot \frac{1}{1-\theta}$.

³⁶ Velja $\frac{y_t}{(1-\theta L)} = y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \dots$, saj je θ konstantna.

³⁷ Poznamo tudi tako imenovane ARFIMA modele za *frakcijsko integrirane* serije, kjer se dolgoročni parametri znižujejo (razkrajajo) bolj počasi kot bi bilo to pričakovati drugače in velja $0 < d < 1$.

4.7 IZPELJAVA ARCH/GARCH MODELOV

ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) pomeni z avtoregresijo pogojen heteroskedastičen proces. ARCH modeli so primerni za napovedovanje finančnih časovnih vrst zaradi dejstev in lastnosti, ki so prisotne v finančnih serijah. Porazdelitve finančnih podatkov so podvržene tako imenovanim debelim repom porazdelitve ali leptokurtičnosti, kar je posledica skupinjenja šokov oziroma nestanovitnosti v finančnih serijah podatkov. Uspeh ARCH modelov ima za posledico, da so le-ti sposobni opisati določena stilizirana dejstva nestanovitnosti v teh serijah. Z vpeljavo dodatnih pogojev v model in razširitvami modela je posamezen model sposoben odražati še druge lastnosti finančnih časovnih vrst, ki jih osnovni ARCH model ni sposoben opisati v celoti. Perrelli (2001, str. 5) navaja, da je popularnost ARCH modelov posledica:

- njihove sposobnosti odraziti in posnemati skupinjenje šokov v finančnih podatkih in debele repe porazdelitve finančnih podatkov;
- enostavnosti ter preprostosti za uporabo;
- upoštevanja nelinearnosti v podatkih in upoštevanja dejstva, da se sposobnost napovedovanja ekonometrika spreminja iz enega obdobja v drugega (Engle, 1982, str. 989), ker omogočajo variiranje variance v času.

4.7.1 ARCH

ARCH model je ena od možnosti za reševanje problema heteroskedastičnosti v modelu. Standardni pristop za reševanje heteroskedastičnosti je uvedba eksogene spremenljivke x_t , ki napoveduje varianco. Z znano ničelno srednjo vrednostjo bi model lahko izgledal (Engle, 1982, str. 988) takole:

$$y_t = \varepsilon_t x_{t-1}, \quad (42)$$

kjer je $V(\varepsilon) = \sigma^2$ in je varianca od y_t preprosto $\sigma^2 x_{t-1}^2$. Engle pravi, da je taka rešitev problema heteroskedastičnosti nezadovoljiva, ker zahteva določitev razloga spreminjajoče variance, namesto da bi se priznalo, da se pogojna srednja vrednost in varianca gibljeta skupaj v času.

Zaradi opisane slabosti standardne rešitve heteroskedastičnosti v času je Engle (1982, str. 988) predstavil ARCH model. Originalni zapis ARCH modela, ki ga je predstavil za neko naključno spremenljivko iz pogojne verjetnostne porazdelitve, izgleda takole:

$$y_t = \varepsilon_t h_t^{1/2}, \quad (43)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2, \quad (44)$$

kjer je $V(\varepsilon_t) = 1$. Splošno se lahko varianca iz modela izrazi kot:

$$h_t = h(y_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_{t-q}, \alpha), \quad (45)$$

kjer je q red ARCH procesa in α vektor neznanih parametrov. Regresijski ARCH model se lahko formalno zapiše:

$$y_t | \Psi_{t-1} \sim N(x_t \beta, h_t), \quad (46)$$

pri tem se predvideva, da je srednja vrednost y_t določena z $x_t \beta$, ki je linearna kombinacija endogenih in eksogenih odloženih spremenljivk iz niza informacij $\Psi_{t-1} = \{y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, x_{t-2}, \dots\}$, in β vektor, ki predstavlja neznane parametre (Engle, 1982, str. 989). Predpostavlja se, da se y_t porazdeljuje pogojno normalno v odvisnosti od niza informacij Ψ_{t-1} s srednjo vrednostjo $x_t \beta$ in pogojno varianco h_t . Pogojna varianca h_t je določena kot:

$$h_t = h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}, \alpha) \quad (47)$$

in napaka ε_t je določena z:

$$\varepsilon_t = y_t - x_t \beta, \quad (48)$$

kjer model predvideva tudi (Bera, Higgins, 1993, str. 309):

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t). \quad (49)$$

Model ARCH prvega reda, ki se formalno zapiše ARCH(1), je definiran na naslednji način:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (50)$$

ARCH model višjega reda q oziroma ARCH(q) se zapiše na naslednji način:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2, \quad (51)$$

kar se lahko zapiše tudi:

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2,$$

kjer je $A(L) = \sum_i^q \alpha_i(L^i)$ in $i = 1 \dots q$. Model ARCH upošteva vpliv preteklih napak ε_t na pogojno varianco. Večje kot je število q , iz bolj oddaljene preteklosti imajo ostanki ε_t vpliv na trenutno varianco oziroma daljši bo čas vplivanja preteklega šoka na pogojno varianco.

Model ima smiselno rešitev, če je pogojna varianca h_t pozitivna, kar pomeni, da morajo biti izpolnjeni naslednji pogoji: $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ in vsota parametrov $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ v enačbi (51) mora biti manjša od 1. Pri finančnih podatkih načeloma ni problem, če je vsota parametrov α_i pozitivna, vendar pri ARCH modelih višjih redov nastane problem, ko vsi parametri α_i niso pozitivni, čeprav je pogojna varianca vedno pozitivna. Ekonomsko logične razlage za to dejstvo ni lahko podati, če predpostavimo, da bi lahko eden izmed ostankov ε_t povzročil negativno varianco (Giannopoulos, 2000, str. 47). Dodatna slabost osnovnega ARCH modela je, da z naraščanjem reda q narašča tudi število parametrov za ocenitev, kar zelo oteži postopek ocenjevanja.

Alternativni zapis pogojne variance z enačbo splošnega ARCH procesa je (Bera, Higgins, 1993, str. 310 in 332):

$$h_t = h(\eta_{t-1}, \dots, \eta_{t-q}, h_t, \dots, h_{t-p}) \quad (52)$$

in je ARCH proces posledica procesa inovacije:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad (53)$$

kjer je lahko h_t stohastičen proces, v katerem η_t služi kot spremenljivka, ki vpliva pogojno tako na varianco kot tudi na inovacijo. η_t je **neodvisno in enakomerno porazdeljena**³⁸ spremenljivka z $E(\eta_t) = 0$ in $Var(\eta_t) = 1$. Ker je h_t funkcija elementov iz Ψ_{t-1} , sledi, da je nespremenljiva, ko je pogojena z Ψ_{t-1} . Kot se vidi iz izraza (53), se bo ε_t porazdeljeval pogojno normalno z $E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = \sqrt{h_t} E(\eta_t | \Psi_{t-1}) = 0$ in $Var(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = h_t E(\eta_t | \Psi_{t-1}) = h_t$. Izraz (53) nam razkrije, da ARCH proces v bistvu na novo umeri osnovni Gaussov inovativni proces za η_t tako, da ga pomnoži s pogojnim standardnim odklonom, ki je funkcija niza informacij Ψ_{t-1} .

³⁸ V angleščini se uporablja termin *independent and identical distributed IID*, $\eta_t \sim IID N(0,1)$.

Kot primer si oglejmo na podlagi proučevanega vzorca podatkov indeksa SBI 20 oceno variance donosov indeksa z ARCH(1) modelom. Ocenjeni parametri ARMA(1,1)-ARCH(1) modela, t -statistike in vrednosti funkcije logaritma verjetja (LLF), Akaikevega (AIC) ter Bayesijskega (BIC) informacijskega kriterija na osnovi proučevanega vzorca so predstavljeni v spodnji tabeli (Tabela 1).

Tabela 1: Ocenjeni parametri ARMA(1,1) - ARCH(1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve

Parameter	Vrednost	Standardna napaka	Vrednost t -statistike	Točne st. značilnosti* (P)		
C	0,00080509	0,00020287	3,9684	0,00008	LLF	4.423,1
AR(1)	0,14856	0,044516	3,3372	0,00088	AIC	-8.836,1
MA(1)	0,34618	0,028187	12,2815	0,00000	BIC	-8.810,8
K	$1,9317 \times 10^{-5}$	$8,7109 \times 10^{-7}$	22,1752	0,00000		
ARCH(1)	0,53598	0,043926	12,2018	0,00000		

* dvostranski preizkus

Vir: Lastni izračuni.

Ocenjeni parametri modela so statistično značilni pri zanemarljivi stopnji tveganja. Parameter, ki kaže vpliv kvadratov preteklih napak (**ARCH(1)**) na varianco, je pozitiven in v skladu s teoretičnimi pričakovanji, kar pomeni, da je nestanovitnost indeksa ustrezno pojasnjena s preteklimi kvadrati napak in da je izbran ARCH(1) model primeren za ocenjevanje nestanovitnosti indeksa. Sam donos³⁹ indeksa primerno opisuje ARMA(1,1) model, kar pomeni, da je trenutni donos indeksa odvisen od odložene odvisne spremenljivke s 1. odlogom (AR(1)) in od drseče sredine (pretekle inovacije) reda 1 (MA(1)). Tudi pri ostalih ocenjenih modelih, ki so predstavljeni v nadaljevanju, je donos indeksa opisan z ARMA(1,1) modelom.

4.7.2 GARCH

Zaradi težav in zahtevnosti ocenjevanja ARCH modelov višjega reda je Bollerslev (1986, str. 309) predstavil splošni ARCH model ali GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Bollerslev navaja, da GARCH model omogoča daljši spomin in je bolj prilagodljiv od samega ARCH modela in hkrati omogoča skromnejši zapis ARCH modela oziroma procesa.

Naj bo tudi v tem primeru napaka oziroma inovacija ε_t določena z linearno regresijo:

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta$$

in naj predstavlja diskreten stohastičen proces ter naj bo Ψ_t niz vseh informacij do časa t . GARCH (p, q) proces je podan z (Bollerslev, 1986, str. 309):

³⁹ Zvezno sestavljen donos.

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (54)$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t,$$

kjer je

$$\begin{aligned} p &\geq 0, \quad q > 0 \\ \alpha_0 &> 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \\ \beta &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Če je $p = 0$, se proces zmanjša v navaden ARCH(q) proces in če velja $p = q = 0$, je ε_t beli šum z $\varepsilon_t \sim N(0, \alpha_0)$, ki ima neko končno varianco. Pogojna varianca v GARCH(p, q) procesu je linearna funkcija odloženih vzorčnih varianc, kar je v primeru ARCH(q) procesa, in tudi odloženih pogojnih varianc. Bollerslev (1986, str. 309) omenja, da tak proces ustreza neke vrste mehanizmu prilagodljivega učenja prav zaradi odložene pogojne variance.

Če predpostavimo, da v enačbi (54) vse rešitve izraza $1 - B(z) = 0$ ležijo izven enotnega kroga, potem lahko enačbo (54) preuredimo in dobimo enačbo samo z razporejenimi odlogi preteklih vrednosti ε_t^2 :

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t \\ h_t - B(L)h_t &= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 \\ (1 - B(L))h_t &= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 \quad | : (1 - B(L)) \\ h_t &= \frac{\alpha_0}{(1 - B(L))} + \frac{A(L)}{(1 - B(L))} \varepsilon_t^2 \\ h_t &= \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (55)$$

$$h_t = \alpha_0^* + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

Gornja enačba kaže, da je GARCH(p, q) proces neskončen ARCH(∞) proces (Bera, Higgins, 1993, str. 313) z racionalno strukturo odlogov na koeficientih (δ_i), saj so v števcu in imenovalcu izraza

$\frac{A(L)}{(1-B(L))}$ celo številčni odlogi. Enačba (55) jasno kaže, da lahko GARCH na bolj varčen način izraža

ARCH procese višjih redov. V izrazu (54) so navedeni tudi pogoji za pozitivno pogojno varianco, vendar s pomočjo enačbe (55) lahko vidimo, da so zadostni pogoji za nenegativno pogojno varianco naslednji (Drost, Nijman, 1992, str. 911 in Bera, Higgins, 1993, str. 313):

$$\alpha_0^* > 0 \text{ in } \delta_i \geq 0, \text{ pri čemer je } i = 1, \dots, \infty. \quad (56)$$

Bera in Higgins (1993, prav tam) nadalje navajata, da so različni avtorji pokazali, da (56) ne zahteva, da so vsi pogoji neenakosti iz (54) izpolnjeni. V primeru GARCH(1,2) procesa so pokazali, da so pogoji $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ in $\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$ zadostni za pozitivno pogojno varianco $h_t > 0$, iz česar sledi, da je lahko koeficient α_2 tudi negativen. Avtorji so predstavili rešitve tudi za GARCH(1, q) in GARCH(2, q), za GARCH procese, kjer je $p \geq 3$, pa so navedli, da je izpeljava dokazov zelo zahtevna.

Kot primer GARCH modela smo na podlagi proučevanega vzorca ocenili nestanovitnost indeksa SBI 20 z GARCH(1,1) modelom. Ocenjeni parametri ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modela, t -statistike in vrednosti funkcije logaritma verjetja (LLF), Akaikovega (AIC) ter Bayesijskega (BIC) informacijskega kriterija so predstavljeni v spodnji tabeli (Tabela 2).

Tabela 2: Ocenjeni parametri ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve

Parameter	Vrednost	Standardna napaka	Vrednost t -statistike	Točne st. značilnosti* (P)		
C	0,00058342	0,00017868	3,2652	0,00112	LLF	4.461,7
AR(1)	0,19242	0,074753	2,5741	0,01018	AIC	-8.911,4
MA(1)	0,21384	0,071455	2,9927	0,00282	BIC	-8.881,0
K	4,3138×10 ⁻⁶	7,516×10 ⁻⁷	5,7395	0,00000		
GARCH(1)	0,54933	0,039489	13,9108	0,00000		
ARCH(1)	0,37678	0,033489	11,2508	0,00000		

* dvostranski preizkus

Vir: Lastni izračuni.

Tudi ta model je primeren za ocenjevanje nestanovitnosti indeksa, saj sta parametra, ki odražata vpliv preteklih kvadratov napak (**ARCH(1)**) in preteklih pogojnih varianc (**GARCH(1)**) na varianco statistično značilna pri zanemarljivem tveganju. Parametra sta pozitivna in tako v skladu s pogoji, ki zadostijo, da je varianca pozitivna. Glede na povedano je tudi GARCH(1,1) model primeren za ocenjevanje nestanovitnosti. Parametri ARMA modela so prav tako statistično značilni pri zanemarljivem tveganju. Model ima tudi boljše vrednosti LLF, AIC in BIC v primerjavi z ARCH(1) modelom.

4.7.3 Nepogojni momenti ARCH procesov

V tem razdelku se bomo spoznali z nepogojnimi momenti, ki jih imajo ARCH procesi in določajo lastnosti ARCH procesov, ki smo jih spoznali v gornjem razdelku. ARCH procesi se bodo v tem razdelku nanašali v splošnem na ARCH procese in ne samo na Englov (1986) ARCH proces.

4.7.3.1 Nepogojna srednja vrednost

Za ARCH model velja, da imajo napake ε_t srednjo vrednost enako nič oziroma velja $E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = 0$ za vse realizacije seta informacij Ψ_{t-1} . Z uporabo zakona ponavljajočih pričakovanj dobimo:

$$E(\varepsilon_t) = 0 = E[E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1})]. \quad (57)$$

Ker ARCH model natančno določa $E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1}) = 0$ za vse realizacije iz Ψ_{t-1} , potem posredno določa, da je $E(\varepsilon_t) = 0$, kar nadalje pomeni, da ima ARCH proces nepogojno srednjo vrednost enako nič (Giannopoulos, 2000, str. 69).

4.7.3.2 Nepogojna varianca

Nepogojna varianca ARCH procesa je varianca, h kateri pogojna varianca na dolgi rok teži. Izpeljava nepogojne variance je možna s pomočjo zakona ponavljajočih pričakovanj. Izpeljava nepogojne variance je podana za primer GARCH(p, q) procesa. Za začetek si oglejmo izpeljavo za proces GARCH(1,1) s pomočjo enačbe iz (54), zakona ponavljajočih pričakovanj in $p = q = 1$ (Bera, Higgins, str. 314):

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= E[E(\varepsilon_t^2 | \Psi_{t-1})] \\ &= E(h_t) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1 E(h_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) E(\varepsilon_{t-1}^2), \end{aligned}$$

ki je linearna diferenčna enačba za zaporedje varianc. Če zaradi poenostavitve predpostavljamo, da se je proces s končno varianco pričel neskončno daleč v preteklosti (Bollerslev, 1986, str. 311), potem zaporedje varianc konvergira h konstanti:

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (58)$$

če velja, da je $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Za obstoj pogojne variance za splošen GARCH(p, q) je Bollerslev (1986, str. 323-325) podal potreben in zadosten pogoj:

$$A(L) + B(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1. \quad (59)$$

Ko je ta pogoj izpolnjen, je nepogojna varianca GARCH(p, q) procesa:

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - A(L) - B(L)}. \quad (60)$$

Čeprav je pogojna varianca ε_t odvisna od niza informacij Ψ_{t-1} in se spreminja skladno z elementi tega seta informacij, je nepogojno ARCH proces homoskedastičen (Bera, Higgins, str. 315).

Enačba (60) nam razkriva še eno lastnost, ki je bila že omenjena v poglavju o vztrajnosti nestanovitnosti. Šoki na nestanovitnost se razkrajajo s konstantno eksponentno stopnjo, hitrost razkroja pa določa vsota koeficientov $A(L) + B(L)$. Bližje vrednosti ena bo vsota koeficientov, bolj počasi se bo šok razkrajal oziroma dlje časa bo vztrajal na nestanovitnost⁴⁰.

Zanimiva lastnost ARCH procesov je, da dopuščajo neskončno varianco, saj je možno, da ocenjeni parametri GARCH(p, q) ne izpolnjujejo pogoja iz (59). Tako obnašanje je lahko posledica procesa, ki generira podatke, kar pa mora model za napovedovanje seveda odražati. Kot pravita Bera in Higgins (1993, str. 316), imajo tudi GARCH modeli z neskončno varianco veljavne rezultate, ki so dosledni in asimptotično normalni.

4.7.3.3 Višji momenti ARCH procesa

Nepogojno gostoto ARCH procesa lahko analiziramo tudi za višje momente porazdelitve. Ker se ε_t porazdeljuje pogojno normalno, bodo vsi momenti porazdelitve, ki so cela liha števila m , enaki nič, $E(\varepsilon_t^m | \Psi_{t-1}) = 0$ (Engle, 1982, str. 991-992 in Bera, Higgins, 1993, str. 315). Koeficient asimetrije, ki je tretji moment porazdelitve, je glede na gornjo opredelitev tudi enak nič, kar pomeni, da je porazdelitev procesa *simetrična*.

⁴⁰ Brealec si lahko vpliv šoka na nestanovitnost bolj podrobno ogleda v poglavju 3.2.2. Vztrajnost nestanovitnosti.

Izraz za izračun četrtega momenta splošnega GARCH(p, q) procesa ni na voljo. Engle (1986, str. 992) je izraz za izračun četrtega momenta podal za ARCH(1) proces, pri čemer je pogoj za obstoj končnega četrtega momenta naslednji: $3\alpha_1^2 < 1$. Če to velja, potem je četrti moment podan:

$$E(\varepsilon_t^4) = \left[\frac{3\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} \right] \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right] \quad (61)$$

oziroma koeficient sploščenosti:

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_t^4} = 3 \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right]. \quad (62)$$

Zadnji izraz⁴¹ je vedno večji od vrednosti 3, ki velja za normalno porazdelitev, saj je izraz v oklepaju striktno večji od 1. Zaradi omenjene lastnosti, ki odraža debele repe porazdelitve, so ARCH procesi zanimivi v finančah, saj je za porazdelitve donosov finančnih aktiv značilno, da imajo debelejša repe porazdelitev kot jih ima normalna porazdelitev. Bollerslev (1986, str. 312–313) je Englovo rešitev posplošil za primer GARCH(1,1) procesa. Pogoj za obstoj četrtega momenta v primeru GARCH(1,1) procesa je, da obstaja $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ in četrti moment je:

$$E(\varepsilon_t^4) = \left[\frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1+\beta_1)}{(1-\alpha_1-\beta_1)(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)} \right] \quad (63)$$

oziroma koeficient sploščenosti:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_t^4} - 3 = \frac{(E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2)}{E(\varepsilon_t^2)^2} \\ &= \frac{6\alpha_1^2}{(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)}, \end{aligned} \quad (64)$$

ki je po predpostavki večji od nič in iz tega sledi, da ima porazdelitev procesa GARCH(1,1) debelejša krake od normalne porazdelitve oziroma je porazdelitev GARCH(1,1) procesa bolj koničasta od normalne porazdelitve.

⁴¹ Če izrazu (62) odštejemo število 3, kot je to naredil Bollerslev v (64), dobimo izraz, ki je bolj podoben (64):

$$\kappa = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{\sigma_t^4} - 3 = \frac{E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2}{E(\varepsilon_t^2)^2} = 3 \left[\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} \right] - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}.$$

Po predpostavki je imenovalac vedno pozitiven, kar pomeni, da je celotni izraz vedno večji od nič oziroma da je porazdelitev ARCH(1) procesa bolj koničasta od normalne porazdelitve.

Nelson (v Bera, Higgins, 1993, str. 315) je v svoji študiji pokazal, da lahko pod primernimi pogoji, ko se interval časa zmanjšuje proti ničli, GARCH(1,1) konvergira k procesu v zveznem času, katerega stacionarna nepogojna porazdelitev je Studentova t - porazdelitev.

4.7.4 Avtokovarianca in stacionarnost ARCH procesov

Momenti skupne oziroma multivariatne porazdelitve napak ε_t razkrijejo dodatne lastnosti, ki jih imajo ARCH procesi. Najprej definirajmo avtokovarianco GARCH(p, q) procesa, kjer je nek $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) &= E[E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} | \Psi_{t-1})] \\ &= E[\varepsilon_{t-k} E(\varepsilon_t | \Psi_{t-1})] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ker je GARCH proces serijsko nekoreliran, s konstantno srednjo vrednostjo nič, je proces šibko stacionaren, če obstaja varianca (60) oziroma če drži pogoj iz (59). Bera in Higgins (1993, str. 316) navajata, da je Nelson prvi pokazal, da je lahko GARCH(1,1) proces strogo stacionaren in ni potrebno, da je hkrati šibko stacionaren. Baugerol in Picard sta Nelsonovo ugotovitev razširila na GARCH(p, q) proces in razvila potrebne in zadostne pogoje za strogo stacionarnost. Dejstvo, da je GARCH proces strogo stacionaren in ni hkrati šibko stacionaren, izvira iz zahteve šibke stacionarnosti, da so srednja vrednost, varianca in avtokovarianca končni in časovno nespremenljivi. Stroga stacionarnost zahteva, da je porazdelitvena funkcija kateregakoli niza napak ε_t nespremenljiva pri premeščanju v času in ne zahteva končnih momentov porazdelitve. Omenjeni avtorji so pokazali, da je GARCH proces lahko strogo stacionaren čeprav varianca procesa ni končna.

Lastnost ARCH procesov, da niso serijsko avtokorelirani, je pomembna za modeliranje finančnih časovnih serij, saj tako ne kršijo domneve učinkovitega trga. Mramor za učinkovit trg kapitala pravi (1991, str. 86), da trenutna cena vključuje vse razpoložljive informacije, kar pomeni, da so spremembe cen izključno posledica novih informacij, ki jih ni mogoče razbrati iz preteklih informacij. Iz povedanega sledi, da za učinkovit trg velja, da se preteklih stopenj donosov finančnih aktiv ne da uporabiti za izboljšanje prihodnjih napovedi stopenj donosa. Če je $y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$ in je y_t stopnja donosa določene finančne aktive ter $\beta = 0$, kar pomeni, da ni regresijske pojasnjevalne komponente, potem je y_t istoveten z ε_t oziroma je y_t hkrati tudi pristen GARCH proces. Ob upoštevanju vsega navedenega sledi, da je optimalna napoved stopnje donosa y_t matematično upanje stopnje donosa, ki je pogojeno z vsemi dostopnimi informacijami v času t . Ker je za GARCH proces značilno, da ima srednjo vrednost (matematično upanje) $E(y_t | \Psi_{t-1}) = E(y_t) = 0$, potem pretekle informacije (donosi), ki so v nizu Ψ_{t-1} , ne izboljšajo optimalne napovedi stopnje donosa, kar pomeni, da prisotnost ARCH v samem procesu ne krši hipoteze učinkovitega trga.

Kot smo videli, v ARCH procesu ni prisotna serijska avtokorelacija med napakami ε_t , vendar to še ne pomeni, da ne obstaja povezava med njimi. Bollerslev (1986, str. 310) je prikazal naravo odvisnosti med ε_t . Proces GARCH(p, q) lahko enakovredno, z upoštevanjem $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, zapišemo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= h_t + v_t \\ \varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t \\ \varepsilon_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t ,\end{aligned}\tag{65}$$

kjer je $m = \max(p, q)$ in $\alpha_i = 0$ za $i > q$ ter $\beta_i = 0$ za $i > p$. Ker je $E(v_t | \Psi_{t-1}) = 0$, z uporabo zakona ponavljajočih pričakovanj ugotovimo, da imajo inovacije v_t srednjo vrednost nič in niso serijsko korelirane (Bera, Higgins, 1993, str. 317 in Giannopoulos, 2000, str. 71). Avtoregresijski parametri so $(\alpha_i + \beta_i)$ in β_i so parametri drsečih sredin. Zapis procesa, kot je predstavljen v (65), je znan kot ARMA(m, q) proces, kar pomeni, da je teorija za GARCH procese zelo povezana s teorijo ARMA procesov. Bollerslev (Bera, Higgins, 1993, str. 317) je predlagal, da se lahko taka avtoregresijska funkcija ε_t^2 uporabi za identifikacijo redov vrednosti p in q GARCH procesa. Alternativna tehnika za določitev reda vrednosti p in q je izris avtokorelograma ter parcialnega avtokorelograma za napake ε_t^2 . Iz enačbe (65) vidimo, da ε_t niso neodvisni med seboj in med njimi obstaja nelinearna povezava, kljub temu, da med njimi ni serijske avtokoleracije.

4.7.5 Časovno združevanje

Pri upravljanju s tveganji je pomembno, da je iz dnevnih vrednosti nestanovitnosti možno izračunati nestanovitnost za daljša obdobja. Splošno bi lahko rekli, da nas zanima transformacija nestanovitnosti iz kratkih obdobj oziroma visokih frekvenc v nestanovitnosti v daljših obdobjih. Zanima nas, ali se lahko ARCH proces visokih frekvenc (na primer dnevni podatki) v času združi v ARCH proces nižjih frekvenc (na primer tedenski, mesečni podatki). Drost in Nijman (1993, str. 915–916) sta predstavila časovno agregacijo oziroma transformacijo nestanovitnosti na osnovi GARCH(1,1), kjer m pove, kolikokrat se frekvenca procesa zmanjša. Naj bo GARCH(1,1) za osnovno frekvenco (oziroma $t = m, 2m, \dots, T$) podan z $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ in naj bo κ nepogojen koeficient sploščenosti procesa, potem je proces za m -krat zmanjšano frekvenco (oziroma $t = m, 2m, \dots, T$) definiran kot:

$$\begin{aligned}E(\varepsilon_t | \Psi_{t-m}) &= 0 \\ h_{t,(m)} &= \alpha_{0,(m)} + \alpha_{1,(m)} \varepsilon_{(m),t-m}^2 + \beta_{1,(m)} h_{(m),t-m} ,\end{aligned}\tag{66}$$

kjer je

$$\alpha_{0,(m)} = m\alpha_0 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^m}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}, \quad \alpha_{1,(m)} = (\alpha_1 + \beta_1) - \beta_{1,(m)} \quad (67)$$

in koeficient sploščenosti $\kappa_{(m)}$:

$$\begin{aligned} \kappa_{(m)} = 3 + \frac{(\kappa - 3)}{m} + 6(\kappa - 1) \\ \times \left[\frac{\{m - 1 - m(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^m\} \{\alpha_1 - \alpha_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{m^2(1 - \alpha_1 - \beta_1)^2(1 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \right] \end{aligned} \quad (68)$$

ter koeficient $|\beta_{1,(m)}| < 1$ in je rešitev kvadratne enačbe:

$$\frac{\beta_{1,(m)}}{1 + \beta_{1,(m)}^2} = \frac{a(\alpha_1 + \beta_1)^m - b}{a\{1 + (\beta_1 + \alpha_1)^{2m} - 2b\}}, \quad (69)$$

kjer sta:

$$\begin{aligned} a = m(1 - \beta_1)^2 + 2m(m - 1) \frac{(1 - \alpha_1 - \beta_1)^2(1 - 2\beta_1\alpha_1 - \beta_1^2)}{(\kappa - 1)\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\}} \\ + 4 \frac{\{m - 1 - m(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \beta_1)^m\} \{\alpha_1 - \alpha_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \end{aligned} \quad (70)$$

$$b = \{\alpha_1 - \alpha_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\} \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{2m}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}. \quad (71)$$

Varianca procesa nizke frekvence je odvisna od parametrov variance procesa visoke variance in tudi od koeficienta sploščenosti samih opazovanj, kar kažejo relacije od (67) do (71). Drost in Nijman (1993, str. 919) pravita, da pri velikem m pogojna heteroskedastičnost izginja in se proces v limiti začne obnašati pogojno homoskedastično (Bera, Higgins, 1993, str. 321). Ko gre $m \rightarrow \infty$ se koeficient sploščenosti $\kappa_{(m)} \rightarrow 3$, iz česar sledi, da se sam proces asimptotično približuje normalni porazdelitvi (Drost in Nijman, prav tam). Diebold et. al. (1997, str. 5) pravijo, da relacije od (67) do (71) razkrijejo, da gre $\alpha_{1,(m)} \rightarrow 0$ in $\beta_{1,(m)} \rightarrow 0$, ko gre $m \rightarrow \infty$, kar pomeni, da časovno združevanje pripelje do postopnega izginjanja nihanj v nestanovitnosti (nestanovitnost se približuje dolgoročni vrednosti). Za

časovno združevanje ARCH(1) procesa na m -krat nižje frekvence od osnovnega procesa velja (Bera, Higgins, 1993, str. 321):

$$E(\varepsilon_t^2 | \Psi_{t-m}) = h_{t,(m)} = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^m \varepsilon_{t-m}^2, \quad (72)$$

kjer lahko vidimo, da v primeru ko gre $m \rightarrow \infty$, potem gre varianca $E(\varepsilon_t^2 | \Psi_{t-m}) = h_{t,(m)} \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$

in predstavlja dolgoročno varianco.

Glede na povedano se logično postavlja pod vprašaj veljavnost preprostega pravila *kvadratnega korena iz časa*, kot ga imenuje Jorion (2001, str. 192), ki se ga uporablja za transformacijo nestanovitnosti kratkih obdobj v nestanovitnosti daljših ročnosti. Kot primer uporabe tega pravila lahko navedemo Sklep o kapitalski ustreznosti bank (2002, 2003, 2004), ki pri modelskem pristopu za upravljanje s tveganji vpeljuje desetdnevno tvegano vrednost (VaR), izračunano iz dnevne tvegane vrednosti po naslednji enačbi:

$$VaR_{(10)} = VaR_{(1)} \sqrt{10},$$

oziroma splošno:

$$VaR_{(m)} = VaR_{(1)} \sqrt{m} = vrednost\ pozicije_1 \cdot z_\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{m} \quad (73)$$

pri čemer je $VaR_{(m)}$ m -dnevna tvegana vrednost, $VaR_{(1)}$ dnevna tvegana vrednost, z_α vrednost standardizirane normalne porazdelitve pri α stopnji zaupanja in σ standardni odklon. Preprosto pravilo kvadratnega korena iz časa za transformacijo izhaja iz narave izračuna variance, ki je v tem primeru mera nestanovitnosti oziroma tveganja. Če predpostavljamo, da je varianca v času nespremenljiva in da med stopnjami donosa v časovni vrsti ni avtokorelacije (Saunders, Cornett, 2003, str. 238), potem se varianca za m -dni lahko izračunana iz dnevne na naslednji način:

$$\sigma_{(m)}^2 = m\sigma_1^2 \quad (74)$$

in standardni odklon, ki je potreben za izraz (73):

$$\sigma_{(m)} = \sigma_1 \cdot \sqrt{m}. \quad (75)$$

Taka preprosta metoda pretvarjanja dnevnih vrednosti nestanovitnosti v večdnevne je napačna in zavajajoča (Diebold et al., 1997, str. 2), ker donosi finančnih aktiv niso enakomerno in neodvisno

porazdeljeni⁴². Uporaba pravila kvadratnega korena iz časa za ekstrapolacijo variance velja v primeru, ko je začetna vrednost variance enaka dolgoročni vrednosti. Če bo začetna vrednost variance večja od dolgoročnega ravnotežja, bo pravilo kvadratnega korena iz časa precenjeval tako dobljeno varianco. V primeru, da bo začetna vrednost variance pod dolgoročno vrednostjo, pa bo taka ocena variance podcenjena (Jorion, 2001, str. 192)⁴³. Ali je množenje s kvadratnim korenem iz časa v kateremkoli pogledu konzervativno, ne moremo reči, povemo pa lahko, da so take ocene enkrat previsoke in drugič prenizke oziroma so te ocene varianc napačne (Diebold et al., 1997, str. 7).

Ker ocenjevanje s kvadratnim korenem iz časa vodi do napačnih ocen Diebold et al. (1997, str. 7) predlagajo naslednje:

1. Če je model kratkoročnega procesa pravilno določen, potem se dolgoročna nestanovitnost lahko oceni z enačbo Drosta in Nijmana.
2. Če je model kratkoročnega procesa pravilno določen in ne ustreza družini modelov, za katere sta Drost in Nijman izpeljala časovno združevanje, potem njihovi rezultati ne ustrezajo za tak model. Če hkrati ni analitične rešitve za časovno združevanje za ta model, je smiselno, da se za izračun m -dnevne nestanovitnosti uporabi model za m -dni (oziroma za frekvenco, ki nas zanima).
3. Če model za ocenjevanje kratkoročne nestanovitnosti ni pravilno definiran, potem bo ocena z uporabo Drostove in Nijmanove enačbe ali z uporabo pravila kvadratnega korena iz časa daleč stran od pravilne vrednosti. Tudi v takem primeru je za oceno nestanovitnosti najbolje uporabiti model za m -dni (oziroma za frekvenco, ki nas zanima).

4.7.6 EGARCH

GARCH družina modelov je sposobna opisati lastnosti finančnih podatkov, kot so debeli repi porazdelitve in skupinjenje, vendar pa so za opis učinka vzvoda, kjer gre za različen vpliv pozitivnih in negativnih sprememb in je predstavljen v poglavju Vzvod in nestanovitnost, neprimerni. Ker GARCH modeli opisujejo procese, pri katerih so učinki na pogojno varianco oziroma nestanovitnost enaki, ne glede na to, ali gre za pozitivne ali negativne spremembe, se taki modeli oziroma procesi imenujejo simetrični, ker upoštevajo le velikost odklona in ne tudi njegovega predznaka. Modeli bi morali upoštevati tudi različnost vpliva negativnih in pozitivnih sprememb, zato so različni raziskovalci začeli uporabljati tudi tako imenovane asimetrične modele za opisovanje nestanovitnosti na finančnih trgih.

⁴² Omejitev, da pravilo za napovedovanje variance s pomočjo kvadratnega korena iz časa velja, izhaja iz tega, da se osnovni proces donosov kot faktorjev tveganja porazdeljuje neodvisno in enakomerno (Diebold et al., 1997, str. 2-3), poleg te zahteve pa Jorion (2001, str. 103) postavlja tezo, da morajo biti poleg neodvisno in enakomerno porazdeljenih donosov tudi vrednosti pozicije konstantne.

⁴³ Bralec je napoten, da poišče zvezo tudi s parametri vztrajnosti v poglavju Vztrajnost nestanovitnosti.

EGARCH kratica predstavlja eksponentni model, ki ga je leta 1991 predstavil Nelson (Higgins, Bera, 1993, str. 331 in Karlsson, str. 21). Da bi v svojem modelu zajel tudi smer vpliva, je Nelson upošteval pogojno varianco h_t iz izraza (52), kar mu je omogočilo upoštevanje negativne korelacije med nestanovitnostjo in preteklimi donosi v modelu. Nelson je zagotovil nenegativnost variance h_t tako, da je uporabil logaritemsko obliko funkcije $\log(h_t)$ ⁴⁴, ki je funkcija naravnega logaritma preteklih vrednosti $\log(h_t)$ in funkcija preteklih standardiziranih inovacij η_t . Zaradi oblike zapisa modela se imenuje eksponentni GARCH in ima naslednjo obliko zapisa (Higgins, Bera, str. 332):

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}), \quad (76)$$

kjer je⁴⁵

$$g(\eta_t) = \underbrace{\theta \eta_t}_{\text{učinek predznaka}} + \underbrace{\gamma [\eta_t] - E[\eta_t]}_{\text{učinek velikosti odklona}} \quad (77)$$

in je odvisen od mnogih elementov ter izraža asimetričnost povezave med donosi lastniških vrednostnih papirjev in nestanovitnostjo sprememb tako, da je vrednost enačbe $g(\eta_t)$ funkcija velikosti odklona in predznaka η_t . Zaporedje $g(\eta_t)$ je naključno, neodvisno in enakomerno porazdeljen proces, ki ima srednjo vrednost enako nič in konstantno varianco, če obstaja njena končna vrednost. EGARCH model je določen z lastnostmi enačbe (77), ki so opisane v naslednjih točkah (Higgins, Bera, 1993, str. 332 in Karlsson, str. 21):

1. Inovacije na pogojno varianco so linearno odvisne od η_t s smernim količnikom $\alpha_i(\theta + \gamma)$, ko je η_t pozitivna ($0 < \eta_t < \infty$) in smernim količnikom $\alpha_i(\theta - \gamma)$, ko je η_t negativna ($-\infty < \eta_t \leq 0$). Zaradi te lastnosti funkcija $g(\eta_t)$ omogoča pogojni varianci h_t , da se odzove asimetrično na vzpone in padce cen lastniških vrednostnih papirjev.
2. Prvi člen enačbe (77) omogoča korelacijo med napakami in prihodnjimi pogojnimi variancami, pri čemer je parameter θ mera asimetričnega vpliva preteklih inovacij na trenutno nestanovitnost (oziroma pogojno varianco h_t). Če je na primer $\gamma = 0$ in $\theta < 0$, potem bo negativna (pozitivna) η_t povzročila, da bo napaka negativna in trenuten vpliv inovacije na pogojno varianco pozitiven (negativen).

⁴⁴ Logaritemsko funkcijo ARCH modela so, da bi se izognili negativnim parametrom, uporabili Geweke (1986), Milhoj (1987) in Pantula (1986), imela pa je obliko: $\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(e_{t-1}^2) + \dots + \alpha_q \log(e_{t-q}^2)$ (Higgins, Bera, 1993, str. 331).

⁴⁵ Funkcija $g(\eta_t)$ ima lahko različne oblike, dotično funkcijo je predlagal Nelson.

3. Drugi člen enačbe (77) predstavlja velikost vpliva oziroma ARCH učinke. Če je $\theta = 0$ in $\gamma > 0$, potem vsakič, ko absolutna velikost η_t preseže (je manjša od) njeno pričakovano vrednost, je vpliv inovacije $g(\eta_t)$ na pogojno varianco pozitiven (negativen).

Za razliko od GARCH modelov EGARCH modeli nimajo omejitev za parametre modela. EGARCH model bo vedno dajal pozitivne rezultate pogojne variance neodvisno od znaka ocenjenih parametrov modela in zato niso potrebni nobeni omejitveni pogoji modela. To je še posebej dobrodošlo, ko ocenjeni parametri GARCH modela kršijo predpostavke za obstoj variance.

Kot primer EGARCH modela smo ocenili EGARCH(1,1), ki ima en parameter za ocenjevanje vplivov vzvoda, in sicer na osnovi podatkov o gibanju indeksa SBI 20 v izbranem obdobju proučevanja. Ocenjeni parametri EGARCH(1,1) modela⁴⁶, t -statistike in vrednosti funkcije logaritma verjetja (LLF), Akaikovega (AIC) ter Bayesijskega (BIC) informacijskega kriterija na osnovi proučevanega vzorca so predstavljeni v spodnji tabeli (Tabela 3).

Tabela 3: Ocenjeni parametri ARMA(1,1)-EGARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve

Parameter	Vrednost	Standardna napaka	Vrednost t -statistike	Točne st. značilnosti* (P)		
C	0,00046991	0,00015537	3,0245	0,00255	LLF	4.464,6
AR(1)	0,22085	0,07437	2,9695	0,00304	AIC	-8.915,1
MA(1)	0,1916	0,074404	2,5751	0,01014	BIC	-8.879,7
K	-1,7194	0,25227	-6,8155	0,00000		
GARCH(1)	0,83305	0,023931	34,8101	0,00000		
ARCH(1)	0,58546	0,032028	18,2794	0,00000		
L (1)	0,0044363	0,021978	0,2019	0,84003		

* dvostranski preizkus

Vir: Lastni izračuni.

Kot je razvidno iz rezultatov ocenjevanja (Tabela 3), so vsi parametri, razen parametra, ki ocenjuje vpliv vzvoda, statistično značilni pri zanemarljivi stopnji tveganja. Vpliv vzvoda ni statistično značilen, kar kaže na to, da vpliv vzvoda v nestanovitnosti indeksa SBI 20 ni pomemben. Vplivi šokov na nestanovitnost na slovenskem delniškem trgu niso asimetrični. Poleg statistične neznačilnosti tega parametra tudi njegova vrednost ni v skladu s teoretičnimi dognanji, saj se po teoriji za modele EGARCH predvideva negativen vpliv vzvoda (Mathworks, 2004, str. 2-11). Na osnovi povedanega lahko zaključimo, da model ni primeren za opisovanje nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu.

⁴⁶ Ocenjena funkcija ima obliko: $\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i [|\eta_{t-i}| - E|\eta_{t-i}|] + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) + \sum_{i=1}^q L_i \eta_{t-i}$.

4.7.7 GJR model

Ime modela izvira iz kratic imen avtorjev Glosten, Jagannathan in Runkle (1993, str. 11) in prav tako sodi med asimetrične modele za opisovanje nestanovitnosti na finančnih trgih. V tem modelu so avtorji predpostavili, da je vpliv kvadratov inovacij ε_{t-1}^2 na pogojno varianco h_t različen, ko so inovacije ε_{t-1} pozitivne oziroma ko so inovacije ε_{t-1} negativne. Model se imenuje tudi pragovni (*Threshold*) model, ker se parameter pred ε_{t-1}^2 spremeni vsakokrat, ko inovacije ε_{t-1} prečkajo prag, ki je določen pri nič (Bera, Higgins, 1993, str. 333). Značilnost modela je, da upošteva različnost vplivov pozitivnih in negativnih inovacij na pogojno varianco in je prilagojen temu, da lahko opiše učinek vzvoda. Model, ki so ga predstavili omenjeni avtorji, ima obliko:

$$h_t = \alpha_0 + \beta h_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \bar{S}_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 \quad (78)$$

in velja za $\bar{S}_t$, ki predstavlja v modelu slamnato spremenljivko:

$$\bar{S}_t = \begin{cases} 1 & \text{ko je } \varepsilon_t < 0 \\ 0 & \text{ko je } \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}.$$

Splošnejši zapis za GJR(p, q) model (Karlsson, 2005, str. 21) je:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \bar{S}_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 \right) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (79)$$

Na osnovi izbranih podatkov o indeksu SBI 20 smo kot primer GJR modela ocenili GJR(1,1) model. Ocenjeni parametri modela⁴⁷, t -statistike in vrednosti funkcije logaritma verjetja (LLF), Akaikovega (AIC) ter Bayesiankega (BIC) informacijskega kriterija na osnovi proučevanega vzorca so predstavljeni v spodnji tabeli (Tabela 4).

⁴⁷ Vpliv vzvoda γ kaže parameter L .

Tabela 4: Ocenjeni parametri ARMA(1,1)-GJR(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve

Parameter	Vrednost	Standardna napaka	Vrednost t -statistike	Točne st. značilnosti* (P)		
C	0,0006037	0,00018317	3,2958	0,00101	LLF	4.461,8
AR(1)	0,19165	0,076868	2,4933	0,01279	AIC	-8.909,5
MA(1)	0,21316	0,074487	2,8617	0,00429	BIC	-8.874,1
K	$4,2497 \times 10^{-6}$	$7,4467 \times 10^{-7}$	5,7068	0,00000		
GARCH(1)	0,55343	0,039253	14,0992	0,00000		
ARCH(1)	0,38621	0,045281	8,5292	0,00000		
L(1)	-0,025344	0,057009	-0,4446	0,65669		

* dvostranski preizkus

Vir: Lastni izračuni.

Rezultati ocenjevanja GJR modela nam kažejo, da tudi v tem primeru vpliv vzvoda v nestanovitnosti SBI 20 ni prisoten. Ocenjen parameter, ki izraža vpliv vzvoda, je tudi v tem modelu v nasprotju s teorijo, saj bi moral biti pozitiven in ne negativen (Mathworks, 2004, str. 2-11), hkrati pa je parameter tudi statistično neznačilen. Na podlagi rezultatov ocen modela EGARCH in GJR lahko sklepamo, da vplivi šokov v nestanovitnosti delniškega trga v Sloveniji niso podvrženi vplivu vzvoda in da so vplivi šokov simetrični.

4.7.8 AARCH in ostali asimetrični ARCH modeli

Engle in Ng (1991, str. 6-7) sta predstavila družino asimetričnih modelov za napovedovanje pogojne variance. Avtorja sta izhajale iz zveze $h_t = h(\varepsilon_{t-1}) = A \cdot \varepsilon_{t-1}^{2\alpha}$, ki sta jo imenovala *informacijsko vplivna odzivna krivulja* (*news impact response curve*). Asimetričen (G)ARCH model⁴⁸ ali A(G)ARCH ima podobne lastnosti, kot jih ima EGARCH, ker upošteva vpliv vzvoda na pogojno varianco. Najbolj preprosta oblika A(G)ARCH(1,1) modela za izračun pogojne variance h_t je:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2 + \beta h_{t-1}. \quad (80)$$

Osnovni GARCH(1,1) model ima v spremenljivki ε_{t-1} obliko parabole, če držimo spremenljivko h_{t-1} konstantno, in ima minimum pri $\varepsilon_{t-1} = 0$. V izrazu (80) za pogojno varianco imamo kvadratno funkcijo pretekle napake oblike $(\varepsilon_{t-1} + \gamma)^2$, kjer γ služi za vodoravni premik parabole, funkcija pa doseže minimum pri $\varepsilon_{t-1} = -\gamma$. Model omogoča, da imajo pretekle napake asimetričen vpliv na h_t ,

⁴⁸ Engle in Ng (1991, str. 6) imenujeta modela asimetričen GARCH ali AGARCH, medtem ko Giannopoulos (2000, str. 52) za ta model uporablja ime asimetričen ARCH ali AARCH, hkrati pa uporablja tudi kratico (G)AARCH.

saj γ lahko zavzame katerekoli vrednost in tako omogoča, da imajo pretekle napake ε_t dinamičen asimetričen vpliv na pogojno varianco h_t . Če je na primer $\gamma < 0$, potem bo pogojna varianca pri negativnem ε_{t-1} večja od pogojne variance, ko je ε_{t-1} pozitiven. Če je $\gamma = 0$, postane AGARCH(1,1) model običajen GARCH(1,1) model. Nepogojna varianca procesa AGARCH(1,1) je podana z naslednjim izrazom:

$$\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \gamma^2}{1 - \alpha_1 - \beta}. \quad (81)$$

Nelinearen in asimetričen GARCH model ali NGARCH je podoben AGARCH modelu (80), pri čemer minimum krivulje pogojne variance h_t nastopi pri $\varepsilon_{t-1} = -\gamma\sqrt{h_{t-1}}$. Če je $\gamma < 0$, bo pogojna varianca pri negativnem ε_{t-1} večja od pogojne variance, ko je ε_{t-1} pozitiven. Zapis modela ima naslednjo obliko (Engle, Ng, 1991, str. 7):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\varepsilon_{t-1} + \gamma\sqrt{h_{t-1}} \right)^2 + \beta h_{t-1}. \quad (82)$$

Ime modela VGARCH izhaja iz predstavitve standardizirane napake s črko v , $\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}} = v = \eta_{t-1}$ in je lahko predstavljen z naslednjim zapisom (Engle, Ng, 1991, str. 7):

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \gamma \right)^2 + \beta h_{t-1}. \quad (83)$$

Minimum funkcije je tudi dosežen pri $\varepsilon_{t-1} = -\gamma\sqrt{h_{t-1}}$, vendar je naklon *informacijsko vplivne odzivne krivulje* drugačen kot pri NGARCH modelu.

4.7.9 IGARCH

Pri ocenjevanju parametrov GARCH modelov prihaja do primerov, ko je vsota parametrov α_i , β_i blizu ena, kar še posebej velja, ko gre za ocenjevanje modelov na podatkih z visoko frekvenco. Zato sta Engle in Bollerslev (1986) predstavila posebno obliko GARCH modela, in sicer tako imenovani integriran GARCH (IGARCH) model. Za ta model velja:

$$A(L) + B(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i = 1, \quad (84)$$

kar pomeni, da šok na varianco vztraja v neskončnost in nepogojna končna varianca z modelom ni določena⁴⁹. To pomeni, da pogojna varianca IGARCH procesa narašča linearno, ko se horizont napovedi daljša in ne konvergira, kot je to značilno za pogojno varianco šibko stacionarnega GARCH procesa. GARCH(p, q) proces je integriran proces prvega reda ($I(1)$) v varianci, če ležijo rešitve enačbe $1 - A(L) - B(L) = 0$ na enotnem krogu. Problem, ki pri tem nastane je, da stacionarnost procesa ne obstaja nujno, ker je varianca procesa v takem primeru neskončna.

Če enačbo (65) zapišemo s pomočjo odložitvenega operatorja (L), dobimo naslednjo relacijo GARCH(p, q) procesa, predstavljenega z ARMA(m, p) procesom:

$$[1 - A(L) - B(L)]\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - B(L)]v_t, \quad (85)$$

kjer je $m = \max(p, q)$ in $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$. Iz (85) lahko izpeljemo IGARCH(p, q) proces (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 7):

$$\phi(L)(1 - L)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - B(L)]v_t, \quad (86)$$

kjer je $\phi(L) \equiv [1 - A(L) - B(L)](1 - L)^{-1}$ reda $m - 1$.

Iz enačbe (86) lahko izrazimo tudi pogojno varianco h_t kot funkcijo kvadratov ostankov in dobimo alternativni zapis IGARCH modela (Laurent, Peters, 2000, str. 22):

$$h_t = \frac{\alpha_0}{[1 - B(L)]} + \left[1 - \frac{\phi(L)(1 - L)}{[1 - B(L)]} \right] \varepsilon_t^2. \quad (87)$$

Napoved variance za k obdobj s pomočjo IGARCH modela je⁵⁰:

$$E_t(h_{t+k}) = h_t + k\alpha_0, \quad (88)$$

ki kaže na linearno povečevanje pogojne variance z obdobjem napovedi.

Čeprav so pogojne variance empirično dokazano zelo vztrajne, je težko reči, ali so resnično integrirane. Pojavljanje IGARCH procesa je lahko posledica nepravilno določenega modela pogojne variance. Mikosch (2003, str. 217) je pokazal, da se s povečevanjem vzorca parameter $\alpha + \beta$ počasi

⁴⁹ Varianca je v takem primeru neskončna, kar so sklepali raziskovalci za finančne časovne serije predvsem pred časom Mandelbrota (1963).

⁵⁰ Za izpeljavo glej Dodatek 4.

približuje k ena, kar potrjuje domnevo o slabem modelu, ki je posledica nestacionarnosti. Le-ta je bolj verjetna pri velikih vzorcih (Karlsson, 2005, str. 20).

4.7.10 FIGARCH

Potreba po frakcijsko integriranem GARCH (FIGARCH) procesu se je pojavila zaradi dejstva, da so določene časovne vrste podvržene počasnemu hiperboličnemu razkrajanju šokov. S FIGARCH procesom predvidevamo razkrajanje šoka s počasno hiperbolično stopnjo, ko je stopnja difference $0 < d < 1$. Ekstrem $I(0)$ predvideva eksponentno razkrajanje šoka, medtem ko drug ekstrem, ki izhaja iz $I(1)$ procesa, predvideva neskončno vztrajnost. Hiperboličen razkroj šoka upošteva tako imenovani dolg spomin, ki ga ima časovna vrsta finančnih podatkov in ga vsebuje frakcijsko diferenciacijski parameter d . FIGARCH procesi so ravno zaradi te svoje lastnosti bolj fleksibilni procesi pogojne variance, ker so sposobni bolje opisati časovne odvisnosti, ki obstajajo v nestanovitnostih finančnih trgov (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 4–5).

Če izhajamo iz enačbe (86), dobimo frakcijsko integriran GARCH proces tako, da namesto operatorja prve difference $(1-L)$ v tej enačbi uporabimo operator frakcijske difference $(1-L)^d$. Operator frakcijske difference se binomsko razširja, kar bolje opisuje hipergeometrična enačba (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 4-5):

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= F(-d, 1, 1; L) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)} L^k \\ &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k L^k. \end{aligned} \quad (89)$$

Funkcija $\Gamma(\cdot)$ ponazarja gama funkcijo⁵¹.

FIGARCH(p, d, q) proces je definiran kot (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 8):

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - B(L)] \nu_t, \quad (90)$$

⁵¹Gama funkcija je izražena z $\Gamma(n) = (n-1)!$ in hipergeometrična funkcija je formalno podana z:

$$F(m, n, s; x) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+j)\Gamma(n+j)}{\Gamma(s+j)\Gamma(j+1)} x^j \quad (\text{Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996, str. 7}).$$

kjer je $0 < d < 1$, vse rešitve izrazov $\phi(L)$ in $[1 - B(L)]$ ležijo izven enotnega kroga. Enačbo (90) lahko preoblikujemo tako, da upoštevamo $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, in dobimo alternativni zapis FIGARCH(p, d, q) modela:

$$[1 - B(L)]h_t = \alpha_0 + [1 - B(L) - \phi(L)(1 - L)^d] \varepsilon_t^2. \quad (91)$$

Pogojna varianca h_t napak ε_t iz enačbe (91) je tako podana z:

$$\begin{aligned} h_t &= \frac{\alpha_0}{[1 - B(L)]} + \left[1 - \frac{\phi(L)(1 - L)^d}{[1 - B(L)]} \right] \varepsilon_t^2 \\ &\equiv \frac{\alpha_0}{[1 - B(L)]} + \lambda(L) \varepsilon_t^2, \end{aligned} \quad (92)$$

kjer je $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$. Da je FIGARCH(p, d, q) proces pravilno definiran in je varianca pozitivna za vse t , mora veljati, da so vsi koeficienti neskončnega ARCH procesa, predstavljenega v enačbi (92), nenegativni oziroma $\lambda_k \geq 0$ za vse $k = 1, 2, \dots$. Splošni pogoji za nenegativnost vseh odloženih parametrov $\lambda(L)$ so težko opredeljivi, vendar je po mnenju Baillie-ja, Bollersleva in Mikkelsena (1996, str. 8) zadostne pogoje relativno enostavno dokazati na posameznih primerih⁵².

4.8 TESTI ZA ARCH UČINKE

Osnovni test za preverjanje, ali je časovna serija podvržena ARCH procesu, je Englov (1982, str. 1000) test za ugotavljanje ARCH, ki sloni na načelu Lagrangejevega multiplikatorja (LM). Test preverja, ali je med ostanki ε_t iz regresije (48) prisotna pogojna heteroskedastičnost. Regresija se oceni s pomočjo najmanjših kvadratov, ostanki regresije ε_t pa se shranijo za kasnejše ocenjevanje pomožne regresije. Nato so kvadrati napak ε_t^2 regresirani na konstanto in q odloženih vrednosti napak $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$. Pomožna regresija je določena kot:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + e_t. \quad (93)$$

⁵² Za dodatne pogoje procesa in za podrobnejše lastnosti FIGARCH procesov naj bralec pogleda v Baillie, Bollerslev, Mikkelsen (1996) in Chung (1999).

Na podlagi pomožne regresije dobimo multipli determinacijski koeficient R^2 . Za testiranje ničelne domneve $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_q = 0$ (alternativna domneva je $H_1 : \alpha_i \neq 0$) se uporablja LM statistika TR^2 , kjer je T število opazovanj. TR^2 se asimptotično porazdeljuje v χ^2 -porazdelitvi s q stopinjami prostosti z ničelno domnevo, da se napake ε_t porazdeljujejo neodvisno in enakomerno. Ta ARCH test je primeren tudi za odkrivanje GARCH učinkov (Bollerslev, 1986, str. 318). ARCH test za odlog $(p + q)$ je enak testu za GARCH učinke z odlogi (p, q) .

V nadaljevanju so predstavljeni rezultati Englovega testa, in sicer za 1., 10., 15. in 20. odlog. Rezultati testa kažejo, da lahko pri zanemarljivem tveganju zavrnilo ničelno domnevo in sprejmemo sklep, da je časovna vrsta podvržena ARCH procesu.

Tabela 5: Rezultati Englovega ARCH testa pri različnih odlogih

Odlog (m)	Točne st. značilnosti (P)	Vrednost statistike χ_m^2	Kritična vrednost χ_m^2 pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$
1.	0	93,718	3,8415
10.	$1,1102 \times 10^{-16}$	99,279	18,307
15.	$5,6621 \times 10^{-15}$	101,93	24,996
20.	$3,6293 \times 10^{-13}$	103,01	31,410

Vir: Lastni izračuni.

V časovni seriji je potrebno tudi preveriti, ali je v njej prisotna avtokorelacija. V ta namen se uporablja Ljung-Boxov Q test (lbq). Vrednost testa se izračuna s pomočjo naslednje enačbe (Green, 1997, str. 595):

$$Q_k = T(T+2) \sum_{i=1}^k \frac{r_i^2}{(T-i)}, \quad (94)$$

kjer je

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T e_t e_{t-k}}{\sum_{t=k+1}^T e_t^2} \text{ avtokorelacijski koeficient, ki kaže avtokorelacijo,}$$

T velikost vzorca in k dolžina odloga. Test se porazdeljuje v χ^2 -porazdelitvi s k stopinjami prostosti. S tem testom preverjamo ničelno domnevo, da so vsi r_k hkrati enaki nič ($H_0 : r_1 = r_2 = \dots r_k = 0$) – avtokorelacija ne obstaja – oziroma alternativno domnevo, da je vsaj eden

r_k različen od nič. Če se vrednost Q statistike povečuje, se verjetnost, da proces nima koreliranih podatkov, znižuje.

Prisotnost avtokorelacije je bila potrjena za 1., 10., 15. in 20. odloženo napako, prav tako pa tudi za kvadrate napak. To še dodatno potrjuje primernost uporabe ARCH modela za modeliranje nestanovitnosti proučevane časovne serije.

Tabela 6: Rezultati L-B-Q testa za različne odloge napak (ε_t)

Odlog (m)	Točne st. značilnosti (P)	Vrednost statistike χ_m^2	Kritična vrednost χ_m^2 pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$
1.	$2,2204 \times 10^{-16}$	67,523	3,8415
10.	$1,1102 \times 10^{-16}$	97,836	18,307
15.	0	120,33	24,996
20.	0	126,41	31,410

Vir: Lastni izračuni.

Tabela 7: Rezultati L-B-Q testa za različne odloge kvadratov napak (ε_t^2)

Odlog (m)	Točne st. značilnosti (P)	Vrednost statistike χ_m^2	Kritična vrednost χ_m^2 pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$
1.	0	94,038	3,8415
10.	0	100,51	18,307
15.	$1,9984 \times 10^{-15}$	104,27	24,996
20.	$2,2649 \times 10^{-14}$	109,67	31,410

Vir: Lastni izračuni.

4.9 PRIMERNOST (UČINKOVITOST) ARCH MODELOV ZA NAPOVEDOVANJE NESTANOVITNOSTI

Pri napovedovanju ARCH proces v časovni seriji vpliva na odvisnost v višjih momentih in učinkuje na negotovost točkovne napovedi ter ne vpliva na samo konstrukcijo napovedi v točki (Bera, Higgins, 1993, str. 338). Avtorja ugotavljata, da je za ARCH modele značilno, da se točnost napovedi povečuje, ko se napoveduje za dlje časa v prihodnost. V primeru napovedovanja v času visoke nestanovitnosti bo model kazal, da nestanovitnost vztrajala dolgo v prihodnost, ko pa se napovedovalni horizont veča, se verjetnost, da se bo nestanovitnost povrnila k svoji normalni višini, povečuje. Zato se

pričakovana natančnost točkovne napovedi povečuje s povečevanjem horizonta napovedi v prihodnost (Bera, Higgins, 1993, str. 340).

Prednosti uporabe ARCH modelov so še (Mathworks, 2004, str. 1-3):

- upoštevajo preveliko sploščenost (debeli repi porazdelitve) in skupinjenje nestanovitnosti v finančnih podatkih,
- dajejo natančne napovedi varianc in kovarianc donosnosti naložb, ker so zmožni modeliranja časovno spremenljivih pogojnih varianc,
- modele se lahko uporabljajo na zelo različnih področjih, kot so upravljanje s tveganji, upravljanje s portfelji in alokacijo sredstev, cenitve opcij, gibanje deviznih tečajev in oblikovanje časovne strukture obrestnih mer.

Modeli so se dobro izkazali na področju delniških trgov, kjer so dobili na pomenu pri upravljanju tveganj, njihova uporaba pa se je izkazala tudi pri modeliranju terminskih delniških trgov. Uporaba modelov sega tudi na področje preverjanja povezav med kratkoročnimi in dolgoročnimi obrestnimi merami. Ker so sposobni napovedati časovno spremenljivo varianco, jih je mogoče uporabiti tudi pri analizi gibanj premij za tveganje v času (Bollerslev, Chou, Kroner, 1992, str. 21-37).

Gouriéroux (1997, str. 3) navaja, da se je potrebno zavedati tudi omejitev, katerim so izpostavljeni ARCH modeli. Sam jih je strnil v naslednjih točkah:

1. Glede na to, da ARCH modeli ustrezajo serijam donosnosti, se je potrebno zavedati, da finančne odločitve ne temeljijo samo na pričakovani donosnosti in nestanovitnosti, temveč so odvisne tudi od tržnih deležev, samih odločitev, ki jih sprejemamo, ko iščemo najbolj uravnoteženo alokacijo sredstev, ter od obsega samih sredstev.
2. ARCH modeli so zgrajeni, da delujejo v bolj stabilnih in ne turbulentnih okoljih. Modeli niso sposobni zajeti neobičajnih pojavov, kot so finančni zlomi, in ostalih nepričakovanih pojavov, ki pripeljejo do značilnih strukturnih sprememb.
3. Modeli so sposobni modeliranja cene z uporabo informacij, ki jih vsebujejo odložene cene, vendar niso sposobni upoštevati informacij, ki jih imajo posamezniki.

V priročniku Mathworks (2004, str.1-4) lahko zasledimo tudi, da GARCH modeli kljub vsemu ne morejo v celoti upoštevati debelih repov porazdelitve donosov. Heteroskedastičnost je le delen vzrok za njihov pojav, vendar pa ni v celoti odgovorna zanje. Z namenom da bi presegli to omejitev modelov, so nastali GARCH modeli, ki na primer kot osnovno porazdelitev uporabljajo Studentovo t -porazdelitev.

4.10 ARCH MODELI ZA OCENJEVANJE TVEGANOSTI PORTFELJA (VAR VREDNOSTI)

O tvegani vrednosti oziroma VaR smo že govorili v poglavju 3.1, kjer smo med drugim razložili tudi potrebne lastnosti, ki jih mora imeti tvegana vrednost, da zadosti pogojem konsistentne mere tveganja. V tem poglavju se bomo bolj osredotočili na sam izračun VaR, tudi v okviru GARCH procesov, saj je za porazdelitve donosov vrednostnih papirjev značilno, da imajo debele repe porazdelitev, kar se dobro opiše prav z GARCH modeli.

4.10.1 VaR

VaR se lahko izračunava za posamezno tvegano postavko v bilanci, lahko pa se izračuna tudi za portfelj, katerega tveganost nas zanima. V prvem primeru imamo opravka z eno-variatnimi porazdelitvami dobičkov in izgub postavke, medtem ko v drugem primeru nastopajo kot osnovne porazdelitve dobičkov in izgub večrazsežne porazdelitve.

Izvirne sledove uporabe VaR lahko najdemo že v začetku dvajsetega stoletja pri izračunu kapitalskih zahtev za ameriška investicijska podjetja (*Security firms*), ki so bila včlanjena na new-yorško borzo vrednostnih papirjev (Holton, 2003, str. 13). Začetek uporabe VaR za upravljanje s finančnimi tveganji pa sega v začetek 90-ih let dvajsetega stoletja, ko so se zgodili številni finančni zlomi podjetij kot so: Orange County, Barings, Metallgesellschaft in druga. Ti zlomi podjetij so bili predvsem posledica slabega nadziranja in upravljanja s finančnimi tveganji, zaradi česar se je pokazala tudi potreba po uporabi VaR. Eden glavnih začetnih uporabnikov VaR kot mere tveganja je bila ameriška banka J. P. Morgan. V letu 1994 so razvili svoj sistem, ki se imenuje RiskMetrics in v svojem poslovnem poročilu tudi prvič poročali, koliko je znašala vrednost dnevnega VaR-a za njihov trgovalni portfelj, s čimer so svojim delničarjem sporočili, kako tvegan je J. P. Morganov trgovalni portfelj. Podjetja so VaR uporabljala predvsem za lastne potrebe, ko so upravljala s finančnimi tveganji, kasneje pa so jih začeli uporabljati tudi nadzorniki.

VaR je namenjen predvsem organizacijam in podjetjem, ki so izpostavljena finančnim tveganjem. Jorion (2001, str. xxiii) je njegovo uporabo razvrstil v tri skupine:

- *Pasivna* uporaba VaR: Najprej se je VaR uporabljal zgolj za namene merjenja in poročanja o izpostavljenosti tveganjem.
- *Defenzivna* uporaba VaR: Naslednji korak je bil, da se je VaR uporabljal pri kontroli tveganja, in sicer so se s pomočjo VaR-a določili pozicijski limiti trgovcem in poslovnim enotam.
- *Aktivna* uporaba VaR zajema upravljanje tveganja. VaR se preko določitve kapitalskih zahtev za izpostavljenost tveganjem posameznih enot uporablja za alokacijo kapitala med trgovce, poslovne enote, produkte in celotno organizacijo.

Zaradi svoje enostavnosti in prilagodljivosti VaR uporabljajo finančne organizacije, nadzorne institucije in tudi nefinančna podjetja, svojo veljavo pa si pridobiva tudi pri upravljavcih premoženja.

VaR vrednost se izračuna v naslednjih korakih (Jorion, 2001, str. 108):

1. Najprej je potrebno izračunati/ugotoviti tržno vrednost portfelja oziroma postavke, katere VaR nas zanima.
2. Potrebno je ugotoviti nestanovitnost tržnega dejavnika (npr. nestanovitnost donosov).
3. Določiti je potrebno investicijsko obdobje oziroma obdobje, za katerega nas zanima VaR vrednost (en dan, teden, leto itd.).
4. Določiti je potrebno tudi interval zaupanja (npr. pri 95 % intervalu zaupanja za standardizirano normalno porazdelitev dobimo vrednost multiplikativnega faktorja 1,65).
5. Na koncu iz vseh zgornjih informacij izračunamo še VaR vrednost, ki nam predstavlja največjo možno izgubo.

VaR se lahko izračuna s pomočjo treh metod. Prva metoda se imenuje variančno-kovariančna metoda, drug pristop temelji na historični simulaciji in tretji pristop uporablja Monte Carlo simulacije.

Splošna forma za izračun VaR-a za en dejavnik tveganja na osnovi **variančno-kovariančnega pristopa** je:

$$VaR = c \cdot \delta \cdot \sigma, \quad (95)$$

kjer c izraža multiplikativni faktor, ki je odvisen od intervala zaupanja, δ izraža občutljivost postavke (za delnice je enaka 1, ker je odvod cene delnice po ceni delnice enak 1) in σ absolutna vrednost nestanovitnosti instrumenta. VaR za posamezen dejavnik tveganja pa je potrebno še pomnožiti z vrednostjo postavke, da dobimo tveganost same postavke:

$$VaR_{\alpha} = P \cdot \sigma \cdot z_{\alpha},$$

kjer je P vrednost postavke, σ nestanovitnost dejavnika tveganja (donosnost postavke) in z_{α} vrednost multiplikativnega faktorja standardizirane normalne porazdelitve pri stopnji zaupanja α . Pri izračunavanju VaR-a je potrebno določiti dejavnik tveganja, ki nam ga predstavlja donosnost naložbe. Za izračun donosnosti se lahko uporablja diskretna donosnost r_t , ki je določena kot kapitalski donos (razlika med dvema cenama naložbe v trenutku t in $t-1$: $P_t - P_{t-1}$), čemur prištejemo vsako izplačilo med obdobjem izračuna (D_t) kot je na primer dividenda ali kuponsko izplačilo obresti:

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (96)$$

Taka definicija donosnosti predpostavlja, da se donosi ponovno investirajo samo na koncu obdobja. Za daljša investicijska obdobja se uporablja geometrična donosnost oziroma tako imenovana zvezno sestavljena donosnost, ki je določena kot naravni logaritem:

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right). \quad (97)$$

Zaradi preprostejše uporabe izračuna donosnosti upoštevamo, da je izplačilo med obdobjem izračuna enako nič ($D_t = 0$) in v tem primeru je donosnost $R_t = \ln(P_t / P_{t-1})$.

Do sedaj smo prikazali izračun VaR za posamezno tvegano postavko. VaR je mera tveganja, ki se predvsem uporablja za izračunavanje tveganosti portfelja, ki vključuje različne postavke več (lastniških) vrednostnih papirjev. Če je v portfelj vključenih več postavk, ki so izpostavljene različnim dejavnikom tveganja, je le-te potrebno upoštevati tudi pri izračunu VaR-a. Za izračun VaR celotnega portfelja je najprej potrebno določiti njegovo donosnost. Če se naložbene postavke v portfelju ne spreminjajo skozi izbrano obdobje investiranja, je donosnost portfelja linearna kombinacija donosnosti osnovnih naložb v portfelju, kjer uteži predstavljajo delež, ki ga posamezna naložba zavzema na začetku investicijskega obdobja v portfelju. Donosnost portfelja v obdobju od t do $t+1$ lahko določimo z:

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t+1}, \quad (98)$$

kjer je N število osnovnih naložb, $R_{i,t+1}$ donosnost osnovne naložbe i in w_i utež. Zaradi krajšega zapisa lahko donosnost portfelja zapišemo tudi v vektorski obliki (Jorion, 2001, str. 149):

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_N R_N = [w_1 w_2 \dots w_N] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = \mathbf{w}^T \mathbf{R} \quad (99)$$

Pričakovana donosnost portfelja je:

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \quad (100)$$

in varianca donosnosti portfelja:

$$Var(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (101)$$

oziroma v vektorski obliki (Jorion, 2001, str. 149):

$$\sigma_p^2 = [w_1 \cdots w_N] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}.$$

Če definiramo z Σ variančno-kovariančno matriko, se lahko varianca donosnosti portfelja zapiše kot:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}. \quad (102)$$

Če je začetna vrednost portfelja enaka W , se v denarnih enotah lahko zapiše:

$$\sigma_p^2 W^2 = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}.$$

VaR vrednost za portfelj je odvisna od oblike porazdelitve donosnosti portfelja. Pri delta-normalnem pristopu (Jorion, 2001, str. 150) se kot osnovna porazdelitev donosnosti posameznih naložb predvideva normalna porazdelitev. Ta porazdelitev je primerna zaradi tega, ker je kombinacija posameznih normalnih porazdelitev tudi normalna porazdelitev, kar pomeni, da se donosnost portfelja, ki je linearna kombinacija donosnosti posameznih naložb, tudi normalno porazdeljuje. Če nas torej zanima VaR za celoten portfelj, pri določeni stopnji zaupanja α , lahko to verjetnost prevedemo v vrednost z_α standardizirane normalne porazdelitve. VaR portfelja je določen kot (Jorion, 2001, str. 150):

$$VaR_p = z_\alpha \sigma_p W = z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}. \quad (103)$$

Iz enačbe (101) izhaja, da je VaR portfelja odvisen od varianc in kovarianc ter števila naložb. Kovarianca meri linearno povezanost med donosnostmi in skupno gibanje donosnosti posameznih naložb. Linearno povezanost pa lahko merimo tudi s korelacijskim koeficientom, kot nam prikazuje enačba (145). Namen vlaganja različnih naložb v portfelj je zmanjšanje celotnega tveganja, kar lahko še posebej učinkovito dosežemo z naložbami, ki so med seboj slabo korelirane ali pa z vlaganjem v čim več različnih naložb, saj se tveganje s povečevanjem števila naložb zmanjšuje (Jorion, 2001, str. 151). Pri razprševanju tveganja in s tem naložb naletimo na tri glavne primere, ki jih pri investiranju lahko srečamo. Prvi primer je najbolj tipičen, in sicer lahko z nizko stopnjo korelacije med naložbami

dosežemo, da razpršimo tveganje celotnega portfelja. Imamo na primer dve naložbi, katerih korelacijski koeficient je po absolutni vrednosti med 0 in 1. VaR takega portfelja se izračuna kot:

$$VaR_p = z_\alpha \sigma_p W = z_\alpha \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2} W.$$

V naslednjem primeru je korelacijski koeficient med naložbami enak 0. Takrat se enačba za izračun VaR portfelja zmanjša na:

$$VaR_p = \sqrt{z_\alpha^2 w_1^2 \sigma_1^2 + z_\alpha^2 w_2^2 \sigma_2^2} = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2}.$$

V tem primeru je tveganje portfelja najmanjše, saj se naložbe gibajo neodvisno ena od druge. V obeh zgornjih primerih mora veljati, da je $VaR_p < VaR_1 + VaR_2$, kar kaže, da je tveganost portfelja manjša od vsote tveganosti posameznih naložb. Za investitorja je najbolj neugoden primer, ko so naložbe popolno pozitivno korelirane in je korelacijski koeficient enak 1. Enačba za izračun VaR dveh naložb pa se zmanjša na:

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2VaR_1 VaR_2} = VaR_1 + VaR_2,$$

kar pomeni, da je tveganje portfelja VaR_p enako vsoti tveganosti posameznih naložb. V splošnem takega primera ni, saj naložbe med seboj na splošno niso popolno korelirane, kar kaže predvsem na pozitivne učinke razpršitve naložb. Primerjava med vrednostjo VaR, izračunanega z dejanskimi korelacijami med naložbami, in VaR, ki je izračunan za nerazpršen portfelj ($\rho = 1$), kaže na učinke razpršenega portfelja in je eden izmed sestavin pri poročanju o tveganosti portfelja.

Do sedaj smo govorili bolj o tehničnih vidikih izračuna VaR po variančno-kovariančni metodi, sedaj pa si bomo ogledali še prednosti in slabosti te metode. Reinard (2004) govori o naslednjih prednostih metode za izračun VaR:

- Metoda je najbolj razširjena in izvirna metoda za izračun VaR, katere rezultat se še vedno uporablja kot neka referenčna točka.
- Metoda daje enoznačne rešitve za izražanje VaR.
- Za izračun VaR je potrebnih malo izračunov, če se upošteva samo nekaj dejavnikov tveganja in se ne upošteva izračunov tveganj druge stopnje (gama, vega). To pomeni, da z vidika računalniške obdelave ni zahtevna za računanje.
- VaR, ki je izračunan na osnovi skupne normalne porazdelitve, je subaditiven, kar pomeni, da VaR portfelja ni nikoli večji od seštevka posameznih VaR vrednosti.
- Lahko se ugotovi tudi velikost posameznega dejavnika tveganja (mejni VaR, sprememba VaR portfelja, ko se prvotnemu portfelju dodaja/odvzema posamezna naložba).

- Zelo enostavno se spreminja interval zaupanja in obdobje investiranja, za katerega se izračunava VaR. VaR s stopnjo zaupanja α_1 se lahko spremeni v VaR s stopnjo zaupanja α_2 , prav tako pa se lahko VaR, ki je izračunan za eno investicijsko obdobje m_1 , spremeni v VaR drugega investicijskega obdobja m_2 , in sicer ob predpostavki, da so donosi neodvisno in enakomerno porazdeljeni (v tem primeru velja pravilo korena iz časa)⁵³. Enačba, ki to povezuje, se glasi:

$$VaR_{\alpha_2, m_2} = VaR_{\alpha_1, m_1} \frac{z_{\alpha_2}}{z_{\alpha_1}} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (104)$$

Pomanjkljivosti variančno-kovarinačne metode za izračun VaR pa so naslednje (Reinard, 2004):

- Ne upošteva opsijskih tveganj druge stopnje.
- Je omejena na majhno število dejavnikov tveganja.
- Predpostavlja določene oblike porazdelitev (normalno), ki pa niso potrjene s strani finančnih podatkov (porazdelitev dobičkov in izgub na nastajajočih trgih).
- Metoda zahteva uporabo ocen določenih parametrov (standardni odklon, korelacije med faktorji tveganj), ki so izpostavljeni napakam pri ocenjevanju.
- Ne upošteva debelih repov porazdelitev (leptokurtičnosti), ki so sicer lahko upoštevani z GARCH procesi.
- Metoda predpostavlja, da so nestanovitnosti in korelacije nespremenljive.

Variančno-kovariančna metoda za izračun VaR predpostavlja kot osnovno porazdelitev normalno porazdelitev dejavnikov tveganj oziroma donosnosti naložb. Večina finančnih podatkov pa ima take porazdelitve, ki imajo repe debelejše od normalne porazdelitve in/ali so asimetrične, zaradi česar nam VaR na osnovi normalne porazdelitve lahko kaže nižje tveganje od dejanskega. Ena od tehnik, ki upošteva asimetričnost in/ali sploščenost porazdelitve, je Cornish-Fisherjeva aproksimacija. Ta metoda je uporabna, če odstopanja od normalne porazdelitve niso prevelika (Da Costa Lewis, 2003, str. 70). Cornish-Fisherjeva aproksimacija prilagodi kvantil empirične verjetnostne porazdelitve za vzorčni koeficient asimetričnosti in sploščenosti. Vrednost kvantila funkcije $F^{-1}(1-\alpha)$ se izračuna kot:

$$F^{-1}(1-\alpha) = z_{\alpha} + \frac{1}{6}(z_{\alpha}^2 - 1)\delta + \frac{1}{24}(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha})\kappa - \frac{1}{36}(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})\delta^3, \quad (105)$$

kjer je z_{α} vrednost standardne normalne porazdelitve pri stopnji tveganja α , δ vrednost koeficienta asimetričnosti vzorca in κ koeficient sploščenosti. VaR vrednost, izračunana s pomočjo Cornish-Fisherjeve aproksimacije, bo pri istem intervalu zaupanja višja, ker upošteva pri izračunu tudi debele repe porazdelitve.

⁵³ Glej poglavje 4.7.5 Časovno združevanje.

Naslednja možna metoda za izračun VaR je **historična simulacija**. Bistvena prednost te metode pred delta-normalno metodo je, da za izračun ne potrebujemo posebne predpostavke o normalni porazdelitvi (ali o kateri drugi obliki porazdelitve) faktorjev tveganja, kar je bistvena pomanjkljivost delta-normalnega pristopa. Osnovna ideja je, da upoštevamo trenutno vrednost portfelja naložb in portfelj prevrednotimo s cenami naložb, ki so veljale prejšnje obdobje (prejšnji dan), pred prejšnje obdobje in tako naprej. Ta postopek se ponavlja toliko časa v preteklost, da imamo v vzorcu toliko vrednosti portfelja, kolikor smo želeli imeti enot v vzorcu (na primer za 500 dni). Vrednosti portfelja rangiramo od najmanjše vrednosti do največje. Interval zaupanja $1 - \alpha$ (npr. 99 %) nam pove delež α najnižjih vrednosti portfelja, kjer izberemo vrednost portfelja, pod katero s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ ne bo padla vrednost našega portfelja (v našem primeru bi bila to peta najnižja vrednost portfelja po vrsti). Ta vrednost nam pove, da vrednost našega portfelja naslednji dan ne bo nižja od pete najnižje vrednosti portfelja, ki je bila izračunana na podlagi preteklih sprememb cen naložb, pri stopnji zaupanja 99 %. Navadno izračunavamo izgubo, ki bi jo lahko utrpeli v določenem prihodnjem obdobju (dnevu). Za ta namen za vsako naložbo v portfelju upoštevamo pretekle vrednosti faktorjev tveganja oziroma donosnosti. Iz donosnosti in trenutnega portfelja izračunamo za vsak dan v preteklosti spremembo vrednosti portfelja oziroma dobičke in izgube. Te spremembe rangiramo od najnižje do najvišje in izberemo tisto po vrsti, ki ustreza stopnji zaupanja $1 - \alpha$ (izmed 500 dnevnih sprememb pri stopnji zaupanja 99 % izberemo tisto vrednost, ki je peta po vrsti). Ta vrednost nam predstavlja VaR vrednost portfelja oziroma možno izgubo, ki bi jo utrpeli ob določeni stopnji zaupanja $1 - \alpha$ naslednji dan, če bi se zgodovina ponovila.

Bistvena predpostavka historične simulacije je, da se zgodovina ponavlja in da bo porazdelitev faktorja tveganja enaka tudi v prihodnosti, za katero izračunavamo VaR. S tem predpostavljamo, da je zgodovina dober napovedovalec prihodnosti oziroma da je pretekla porazdelitev faktorjev tveganja enaka porazdelitvi prihodnjih faktorjev tveganja oziroma donosnosti.

Pri historični simulaciji ne potrebujemo predpostavke o obliki porazdelitve, prav tako nam ni potrebno izračunavati varianc in korelacij, ker so implicitno že upoštevane v VaR vrednosti portfelja. Metoda nam omogoča, da imamo takoj na voljo vrednost največje možne izgube, kar na primer pri normalni porazdelitvi, ki gre od plus do minus neskončnosti, ni možno⁵⁴. Glede na to, da je portfelj dnevno prevrednoten v celoti ali vsaj delno, metoda upošteva tudi tveganja druge stopnje.

Pomanjkljivost metode je, da je osnovana samo na preteklosti in ne zmore upoštevati strukturnih sprememb, prav tako niso dovoljeni nobeni trendi, ker bi bilo to v nasprotju s predpostavko o striktni stacionarnosti. Pretekle podatke je zato potrebno očistiti trenda, saj je zelo verjetno, da v prihodnosti trend ne bo prisoten. V primeru, da se portfelj v celoti prevrednoti, lahko to predstavlja zelo velik računski zalogaj, še posebej, če je vsakič potrebno prevrednotiti tudi zelo kompleksne finančne instrumente. Ker metoda temelji na podatkih iz preteklosti, je lahko težavno zagotoviti časovno vrsto, ki bi bila dovolj dolga, še posebej, če je sam finančni instrument še bolj nov in so se dogajale tudi

strukturne spremembe v sami časovni vrsti (na primer prehod iz režima fiksnih deviznih tečajev v režim drsečih, uvedba nove valute kot sta tolar in evro itd.).

Kot tretja metoda za izračun VaR se uporablja **Monte Carlo simulacija**. Metoda temelji na generiranju naključnih dejavnikov tveganja oziroma donosnosti, s čimer se odpravi problem pomanjkanja podatkov zaradi prekratkih časovnih vrst. Donosnosti se generirajo s pomočjo generatorja naključnih števil tako, da odsevajo verjetnost, s katero so se pojavljali v preteklosti, ali na osnovi statističnih značilnosti. Najprej se izračuna variančno-kovariančna matrika donosnosti Σ , ki se jo nato s pomočjo Choleskyjeve faktorizacije razstavi na dve simetrični matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{A}^T$. Ta faktorizacija nam omogoči generiranje scenarijev za donosnosti, tako da $\mathbf{A}^T$ pomnožimo z vektorjem naključnih števil $\mathbf{q}$, ki vsebuje želeno število naključnih števil (npr. 1000). Matrika $\mathbf{A}^T$ odraža pretekle korelacije med različnimi donosnostmi in pomnožena z vektorjem $\mathbf{q}$ odraža realistične scenarije donosnosti. Tako dobljene donosnosti se uporabijo za prevrednotenje portfelja in izračun dobičkov in izgub. VaR se izračuna kot deseta največja izguba izmed 1000 scenarijev, če predpostavljamo isto stopnjo zaupanja kot pri prejšnjih metodah.

Prednost Monte Carlo simulacije je v tem, da je zelo fleksibilna za uporabo, saj se za različne dejavnike tveganja lahko predpostavi različne porazdelitve in upošteva tveganja drugega reda. Problemi, na katere naletimo pri uporabi te metode, so (Reinard, 2004):

- zahtevna je z računskega vidika (za izračun naključnih scenarijev je potrebnih veliko korakov),
- potrebni so izračuni ocen določenih parametrov, ki so lahko podvrženi napakam pri ocenjevanju,
- potrebne so predpostavke o obliki porazdelitev,
- zelo nizka konvergenca Monte Carlo simulacije,
- vprašljivost uporabnosti generatorjev naključnih števil.

4.10.2 Multivariatni ARCH procesi

V tem delu poglavja se bomo osredotočili na uporabo ARCH procesov pri modeliranju VaR celotnega portfelja in s tem na uporabo ARCH procesov pri upravljanju tržnih tveganj. Za izračun VaR portfelja s pomočjo variančno-kovariančne metode potrebujemo ocene varianc in kovarianc med naložbami, ki so v portfelju. Vsi ti izračuni pa temeljijo na podatkih iz preteklosti. Nestanovitnosti, ki temeljijo na zgodovinskih podatkih, se izkažejo kot slabe mere tveganja, ker predpostavljajo, da so momenti porazdelitev donosnosti vrednostnih papirjev konstantne skozi različna časovna obdobja. Da ta lastnost ne drži, smo ugotovili že v predhodnih poglavjih, ko smo govorili tudi o skupinjenju stanovitnosti v času. Pogojne multivariatne metode za obdelavo časovnih serij so bolj primerne za ocenjevanje na osnovi multivariatnih časovnih serij, ker izračunavajo trenutne variance in kovariance

⁵⁴ Na tem mestu bi radi poudarili, da je potrebno VaR, ki je izračunan s pomočjo variančno-kovariančne metode, za potrebe upravlja s tveganji, vedno primerjati tudi z najslabšim možnim stresnim scenarijem (*worst case scenario*).

s pomočjo preteklih podatkov na bolj učinkovit način (Giannopoulos, 2000, str. 55). Med modeli, ki se dobro prilagajajo finančnim podatkom, sta tudi multivariatni ARCH model in multivariatni GARCH model (Bollerslev, Chou, Kroner, 1992, str. 27–28).

4.10.2.1 Multivariatni ARCH model

Za predstavitev multivariatnega ARCH modela se bomo osredotočili na bivariatni ARCH model, ki so ga predstavili Engle, Granger in Kraft (1984, str. 151–165). Ko je pogojna kovariančna matrika pogojno odvisna od preteklih inovacij ε_t do ε_{t-j} , pri čemer gre $j = 1, \dots, q$, potem naj bo to bivariatni ARCH model reda q . V izpeljavi bomo zaradi nepotrebnih zapletov sledili multivariatnemu ARCH(1) modelu⁵⁵ oblike:

$$\varepsilon_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}(\varepsilon_{t-1})),$$

kjer je $\mathbf{H}_{t-1}(\varepsilon_{t-1}) \equiv \mathbf{H}_t \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ijt} \end{bmatrix}$ simetrična matrika 2×2 , ki mora biti pozitivno definitna za vse možne realizacije ε_{t-1} . Izbran zapis za ARCH(1) model je potem predstavljen z:

$$H_{ijt} = \alpha_{ij,0} + \varepsilon_{t-1}^T \mathbf{C}_{ij} \varepsilon_{t-1}. \quad (106)$$

Tak zapis modela je dovolj splošen, da je $\mathbf{H}_{ijt}$ odvisen od vsake kombinacije kvadratov križnih produktov ε_{t-1} . Model se lahko zapiše tudi v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11t} \\ \mathbf{H}_{12t} \\ \mathbf{H}_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \alpha_{03} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 \\ \varepsilon_{1t-1}\varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1}^2 \end{bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{t-1}. \end{aligned} \quad (107)$$

Pozitivna definitnost $\mathbf{H}_t$ pomeni, da mora biti $\mathbf{H}_{11t}, \mathbf{H}_{22t} > 0$ in $\mathbf{H}_{11t}\mathbf{H}_{22t} - \mathbf{H}_{12t}^2 > 0$. To mora veljati tudi, če je $\boldsymbol{\eta}_{t-1} = 0$, kar pomeni, da morajo veljati tudi potrebni pogoji $\alpha_{01}, \alpha_{03} > 0$ in $\alpha_{01}\alpha_{03} - \alpha_{02}^2 > 0$. Dodatni potrebni pogoji so še :

⁵⁵ Model se da razširiti tudi na model višjih redov.

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &\geq 0, \quad \alpha_{13} \geq 0, \quad \alpha_{31} \geq 0, \quad \alpha_{33} \geq 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{22}^2 &\geq 0, \\ \alpha_{11}\alpha_{13} - \frac{1}{4}\alpha_{12}^2 &\geq 0, \quad \alpha_{11}\alpha_{31} - \alpha_{21}^2 \geq 0, \\ \alpha_{31}\alpha_{33} - \frac{1}{4}\alpha_{32}^2 &\geq 0, \quad \alpha_{13}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 \geq 0.\end{aligned}$$

4.10.2.2 Multivariatni GARCH model

Engle in Kroner (1993, str. 5) sta za multivariatni GARCH model predlagala zapis, ki se brez eksogene pojasnjevalne spremenljivke lahko zapiše⁵⁶:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{ik}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^T \mathbf{A}_{ik}^* + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^p \mathbf{B}_{ik}^{*T} \mathbf{H}_{t-i} \mathbf{B}_{ik}^*, \quad (108)$$

kjer so $\mathbf{C}_0^*$, $\mathbf{A}_{ik}^*$ in $\mathbf{B}_{ik}^*$ matrike velikosti $n \times n$ ter limita seštevanja K določa splošnost tega procesa. Spremenljivka oziroma limita K določa število oziroma velikost multivariatnega procesa. Tak zapis modela skoraj gotovo vedno zagotavlja pozitivno definitnost, saj je pri pozitivno definitnem členu $\mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^*$ pozitivno definiten tudi $\mathbf{H}_t$. Bivariatna različica GARCH (1,1) modela se potem zapiše kot:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t = \mathbf{C}_0^{*T} \mathbf{C}_0^* + & \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1}^2 & \varepsilon_{1t-1} \varepsilon_{2t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \varepsilon_{1t-1} & \varepsilon_{2t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{12}^* \\ \alpha_{21}^* & \alpha_{22}^* \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \beta_{12}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* \end{bmatrix}' \mathbf{H}_{t-1} \begin{bmatrix} \beta_{11}^* & \beta_{12}^* \\ \beta_{21}^* & \beta_{22}^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Pri določanju $\mathbf{H}_t$ naletimo na dva problema, in sicer da mora biti le-ta pozitivno definitna za vse realizacije in da je potrebno postaviti dodatne omejitve, tako da število parametrov, ki jih je potrebno oceniti, ni preveliko.

S tema dvema postopkoma dobimo člene variančno-kovariančne matrike, ki jih potem lahko uporabimo pri izračunu VaR vrednosti za portfelj različnih naložb. Pri določanju multivariatnih GARCH procesov je potrebno opozoriti, da so z vidika izračunavanja zelo zahtevni. Ti modeli so prav zaradi tega omejeni na izračunavanje tveganosti portfelja, ki vsebuje manjše število naložb.

⁵⁶ V izvorni različici vsebuje model tudi eksogeno pojasnjevalno spremenljivko.

Zaradi tega je Giannopoulos (2000, str. 56) predlagal, da se oceni tveganje in donosnost portfelja s pomočjo ocene prvih dveh momentov celotnega portfelja ($E(R_p)$ in $Var(R_p)$). Metoda se lahko uporabi za izračun VaR v vsakem trenutku t . Varianca $Var(R_p)$ natančno opisuje trenutno pogojno nestanovitnost, če se uteži (deleži) $\mathbf{W}$ posameznih naložb v portfelju niso spreminjale. Če pa so se deleži v preteklosti spreminjali, potem se mora serija preteklih donosov portfelja ponovno konstruirati in mora biti varianca novih pozicij ponovno ocenjena. Tak postopek ima vrsto prednosti, in sicer:

- je lažji za izračun in zato lažje obvlada večjo razsežnost,
- ni pristranosti ocen, ki nastanejo, ko se ocenjuje matrika velikosti $n \times n$,
- vsebuje vse informacije o dinamiki, ki vpliva na trenutno agregatno naložbeno imetje.

Ko imamo donosnosti portfelja izračunane, lahko s pomočjo (G)ARCH modelov izračunamo pogojno nestanovitnost in iz nje velikost tveganosti celotnega portfelja (VaR) za naslednja obdobja.

5 METODE ZA OCENJEVANJE ARCH MODELOV

5.1 METODA NAJVEČJEGA VERJETJA

Metoda največjega verjetja (*Maximum Likelihood Estimation*, MLE) omogoča ocenjevanje parametrov regresijskega modela na podlagi vzorčnih podatkov. Metoda nam omogoča, da pridemo do ocen regresijskih parametrov s pomočjo asimptotično učinkovite ocene. To metodo ocenjevanja je kot alternativo metodi najmanjših kvadratov predlagal R. A. Fischer že v tridesetih letih dvajsetega stoletja. Predlagal je, da naj bi na podlagi vzorčnih podatkov določili takšne vrednosti parametrov regresijskega modela, ki bi maksimirali verjetnost, da iz populacije dobimo prav vzorčne podatke, ki jih vsebuje naš vzorec (Pfajfar, 1995, str. 94).

5.1.1 Izpeljava, opis metode ocenjevanja

Naj bodo $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ opazovane spremenljivke, katerih gostota porazdelitve je iz družine $\{f(x_1, \dots, x_n, \theta), \theta \in \Theta\}$, kjer je θ neznani parameter, ki ga želimo oceniti. Ideja metode največjega verjetja je, da za oceno parametra θ pri danih $x_1, \dots, x_n$ izberemo vrednosti, pri katerih bo gostota verjetnosti $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ največja.

5.1.1.1 Definicija

Formalno definicijo metode največjega verjetja nam dobro poda Trobec (1996, str. 47–48). Naj imajo slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ gostoto porazdelitve verjetnosti glede na dano σ in μ iz družine $\{f(x_1, \dots, x_n, \theta), \theta \in \Theta\}$. Vektor $\theta \in \Theta$, za katerega pri danih vrednostih slučajnih spremenljivk velja:

$$f(x_1, \dots, x_n, \theta) \geq f(x_1, \dots, x_n, \theta') \quad \text{za vsak } \theta' \in \Theta,$$

imenujemo ocena parametra θ po metodi največjega verjetja pri danih $x_1, \dots, x_n$. Cenilka parametra po metodi največjega verjetja $\hat{\theta}$ je funkcija, ki slučajnim spremenljivkam $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ priredi oceno parametra po metodi največjega verjetja. Cenilka parametra po metodi največjega verjetja je cenilka $\hat{\theta}$, za katero velja:

$$f(x_1, \dots, x_n, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} f(x_1, \dots, x_n, \theta).$$

Ta supremum ni nujno vedno dosežen, kar pomeni, da cenilka parametrov po metodi največjega verjetja ne obstaja vedno oziroma obstaja, vendar ni merljiva funkcija opazovanih vrednosti. Cenilke parametra poskušamo poiskati kot absolutni maksimum funkcije $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ glede na θ pri danih opazovanih vrednostih $x_1, \dots, x_n$. Maksimum funkcije iščemo tako, da funkcijo verjetja odvajamo glede na parameter θ . Zaradi praktičnih razlogov funkcijo verjetja najprej logaritmujemo, saj je odvajanje računsko enostavnejše za vsoto kot produkt funkcij. To pa lahko storimo, saj je v primeru neodvisnih slučajnih spremenljivk skupna funkcija verjetja kar produkt gostot porazdelitev posameznih spremenljivk:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, \theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta), \\ &= L(\theta | \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (109)$$

z logaritmiranjem pa ta produkt preprosto pretvorimo v vsoto:

$$\log L(\theta | \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n f(x_i, \theta). \quad (110)$$

Ker je logaritem monoton naraščajoča funkcija, bomo za logaritem verjetja dobili iste stacionarne točke kot za navadno funkcijo verjetja. Če torej obstajajo ocene parametrov po metodi največjega

verjetja, so te ocene stacionarne točke funkcije verjetja oziroma njenega logaritma ali pa so točke, v katerih funkcija verjetja ni odvedljiva. Privzemimo, da je funkcija verjetja odvedljiva in da je supremum zavzet v neki notranji točki prostora parametrov $\Theta \subset \mathbb{R}^m$. Absolutni maksimum funkcije $f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ je v primeru, če obstaja, kateri od lokalnih maksimumov, te pa najdemo kot rešitve sistema enačb⁵⁷:

$$\frac{\partial \log f(x_1, \dots, x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (111)$$

Za primer iskanja cenilk po metodi največjega verjetja si pogledjmo *Hardy-Weinbergov model porazdelitve krvnih skupin* (Trobeč, 1996, str. 49). Iz neke populacije, ki jo sestavljajo trije tipi krvnih skupin, naključno izbiramo enote. Statistični model za te krvne skupine je podan s parametrom $\theta \in (0, 1)$, in sicer:

$$\begin{aligned} P(\text{tip } 1) &= \theta^2, \\ P(\text{tip } 2) &= 2\theta(1 - \theta), \\ P(\text{tip } 3) &= (1 - \theta)^2. \end{aligned}$$

Izbor ene enote označimo kot slučajno spremenljivko X , katere verjetnostna shema je opisano zgoraj. Za n neodvisno izbranih enot lahko funkcijo verjetja zapišemo kot:

$$\begin{aligned} P(X_i = x_i, i = 1, \dots, n) &= \prod_{x_i=1} \theta^2 \prod_{x_i=2} 2\theta(1 - \theta) \prod_{x_i=3} (1 - \theta)^2, \\ &= \theta^{2n_1} (2\theta(1 - \theta))^{n_2} (1 - \theta)^{2n_3} \end{aligned}$$

kjer so n_1, n_2, n_3 števila izbranih enot tipa 1, 2 in 3. Seštevki n_1, n_2, n_3 pove skupno število enot v vzorcu n . Logaritmirana funkcija verjetja je potem⁵⁸ naslednja:

$$\ln L(\theta | \mathbf{X}) = n_2 \ln 2 + (2n_1 + n_2) \ln \theta + (n_2 + 2n_3) \ln(1 - \theta).$$

Cenilko parametra θ po metodi največjega verjetja dobimo kot rešitev enačbe:

$$\frac{\partial \ln f(\theta | X)}{\partial \theta} = 0,$$

⁵⁷ Ta sistem enačb Green (1997, str. 131) imenuje verjetnostna enačba (*likelihood equation*).

⁵⁸ Običajno gre za logaritmiranje z naravnim logaritmom, zato se tukaj uporablja kar funkcija za naravni logaritem $\ln$ namesto splošnejšega zapisa logaritemske funkcije $\log$.

in sicer:

$$(2n_1 + n_2) \frac{1}{\theta} - (n_2 + 2n_3) \frac{1}{1-\theta} = 0.$$

Rešitev enačbe je ocena parametra, in sicer:

$$\hat{\theta} = \frac{2n_1 + n_2}{2n}.$$

5.1.2 Ocenjevanje ARCH modela z MLE

Za empirično ocenjevanje parametrov ARCH modelov se kot osnovne porazdelitve lahko uporabljajo normalna porazdelitev, t -porazdelitev in GDE porazdelitev. Oblika osnovne porazdelitve za ocenjevanje je odvisna od empirične porazdelitve, ki se ji teoretična porazdelitev najbolj prilega. Bolj ko je teoretična porazdelitev podobna empirični, bolj natančno so ocenjeni tudi parametri modela. V splošnem ni določena nobena teoretična porazdelitev, ki bi najbolje opisovala porazdelitev finančnih podatkov, ampak je izbira odvisna od posameznega primera. V nadaljevanju so predstavljene logaritemske funkcije metode največjega verjetja za posamezne od naštetih porazdelitev. Za te funkcije je potem treba poiskati maksimalne vrednosti. Iskanje maksimuma funkcije poteka z odvajanjem za vsak posamezen parameter posebej (parcialno odvajanje).

Logaritemska funkcija za ocenjevanje pogojne variance h_t s t -porazdelitvijo je lahko določena kot (Laurent, Peters, 2000, str. 25)⁵⁹:

$$\begin{aligned} \ln L_T &= \ln \left[\Gamma \left(\frac{m+1}{2} \right) \right] - \ln \left[\Gamma \left(\frac{m}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \ln(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln h_t + (1+m) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2/h_t}{m-2} \right) \right], \end{aligned} \quad (112)$$

kjer je ε_t napaka, določena v enačbi (48).

⁵⁹ Za razlago spremenljivk glej prilogo 4.

Logaritemska funkcija za ocenjevanje pogojne variance h_t z GDE porazdelitvijo je lahko določena kot (Laurent, Peters, 2000, str. 25) ⁶⁰:

$$\ln L_{GDE} = \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{m}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_t^2 / h_t}{\lambda} \right|^m - \left(1 + \frac{1}{m} \right) \ln(2) - \ln \left[\Gamma \left(\frac{1}{m} \right) - \frac{1}{2} \ln(h_t^2) \right] \right], \quad (113)$$

kjer je ε_t napaka, določena v enačbi (48).

Logaritemska funkcija za ocenjevanje pogojne variance h_t z normalno porazdelitvijo je lahko določena kot (Laurent, Peters, 2000, str. 25):

$$\ln L_N = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\ln(2\pi) + \ln h_t + \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \right], \quad (114)$$

kjer je ε_t napaka, določena v enačbi (48).

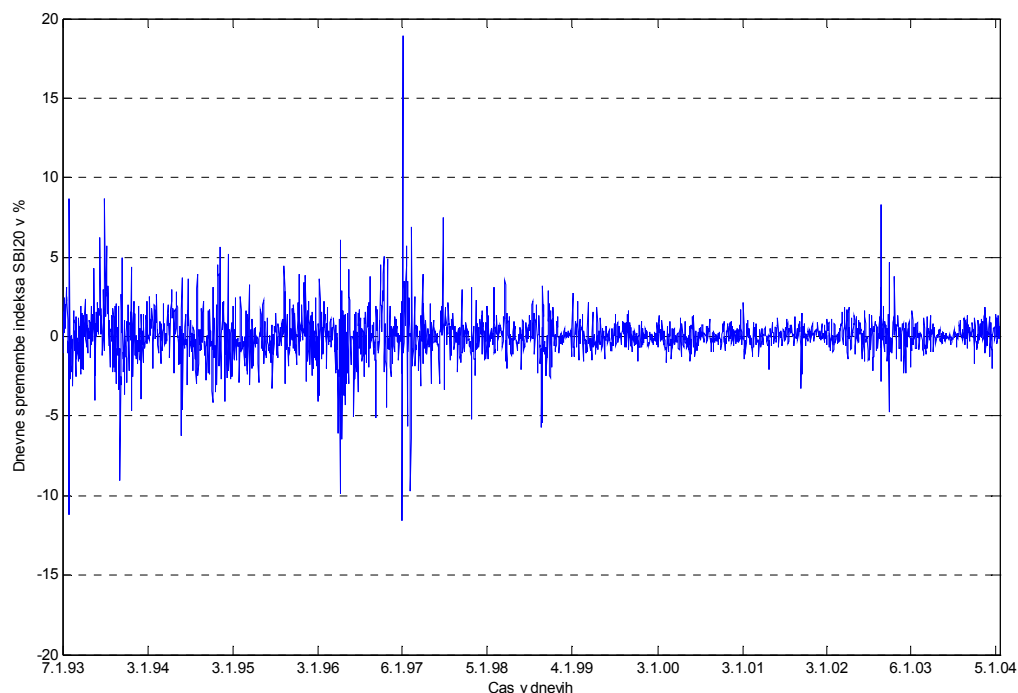
6 OCENA NESTANOVITNOSTI SLOVENSKEGA TRGA DELNIC

6.1 NESTANOVITNOST SLOVENSKEGA TRGA

Nestanovitnost slovenskega delniškega trga smo spremljali s pomočjo indeksa Ljubljanske borze SBI oziroma SBI 20 v obdobju od januarja 1993 do januarja 2004. Na spodnji sliki so predstavljene dnevne spremembe zvezno sestavljenih donosov indeksa SBI 20 v odstotkih. Kot je lepo razvidno, se je nihanje dnevnih sprememb v proučevanem obdobju spreminjalo, in sicer je bilo obdobje največjih nihanj od leta 1993 do sredine leta 1998, ko se je nihanje indeksa umirilo in je nastopilo mirnejše obdobje. Povečano nihanje je bilo zopet zaznati tudi v letih 2002 in 2003. Največja dnevna donosnost je bila zabeležena na dan 9. 1. 1997, in sicer je bila porast indeksa 18,9 %, največja dnevna relativna izguba pa na dan 8. 1. 1997 v višini 11,6 %.

⁶⁰ Za razlago spremenljivk glej prilogo 4.

Slika 7: *Gibanje zvezno sestavljenih dnevnih sprememb indeksa SBI in njegove naslednika SBI 20 v obdobju od januarja 1993 do januarja 2004, v %*



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

V teoretičnem delu smo razpravljali o skupinjenju nestanovitnosti, kar je razvidno tudi s slike, in sicer se vidijo obdobja visoke nestanovitnosti in obdobja nizke nestanovitnosti. Gibanje nestanovitnost na slovenskem delniškem trgu je posledica značilnosti, ki jim je bil trg izpostavljen od svoje ustanovitve, in sicer lastninskemu preoblikovanju podjetij oziroma prehodu gospodarstva iz socialističnega režima v kapitalistični, kar je vplivalo tudi na oblikovanje cen delnic. To novo stanje in sploh oblikovanje sekundarnega trga delnic je imelo za posledico povečano nestanovitnost. Razlog za nestanovitnost pa gre iskati tudi v samem procesu oblikovanja cen. V zvezi s cenami delnic in njihovimi podjetji je bila na trgu prisotna velika negotovost, kar se je odrazilo v napovedih in nihajočem gibanju cen delnic podjetij. Značilnost slovenskega trga je bila tudi ta, da je trg rasel in so se cene (indeksi) gibale navzgor oziroma je bil prisoten pozitiven trend, kar pomeni, da je bilo več odklonov v pozitivno smer kot v negativno. Ne moremo reči, da je šlo v večini primerov za izboljšano poslovanje podjetij, temveč se je vrednost podjetij začela približevati svoji pravi vrednosti, ki naj bi jo cena delnice odražala in je delnice ob prihodu na trg niso imele. Trg je v procesu tranzicije prav gotovo pripomogel tudi k temu, da so podjetja dobila svoje prave lastnike, vendar je potrebno pripomniti, da se je gospodarsko stanje vsekakor odražalo tudi na finančnih trgih.

Nestanovitnost, ki smo ji bili priča, je bila posledica gospodarskega stanja v državi, vendar lahko ob podrobnejšem pregledu rečemo, da je bila nestanovitnost posledica tako prihoda novih informacij kot tudi samega trgovanja. Kot smo že ugotovili, je za slovenski delniški trg težko reči, da je učinkovit. Deželanova (2000, str. 71–79) je namreč odkrila visoko avtokoreliranost med dnevnimi donosnostmi,

kar kaže na to, da so bila gibanja na delniškem trgu predvsem posledica pričakovanj na podlagi preteklih podatkov oziroma informacij in na tej podlagi ustvarjenih pričakovanj. Povečani nestanovitnosti v letih 2002 in 2003 smo bili na primer priča prav zaradi pričakovanj, ki so se takrat ustvarila ob prevzemu farmacevtskega proizvajalca Lek d. d. s strani švicarskega proizvajalca Novartis. Splošni porast cen na trgu je bil posledica pozitivnih pričakovanj dodatnih prevzemov slovenskih podjetij s strani tujcev. Ker so udeleženci na trgu pričakovali še dodatne prevzeme, so začeli kupovati tudi delnice drugih podjetij, kar pomeni, da je bila nestanovitnost posledica dogajanj na delniškem trgu in ne toliko odraz stanja teh podjetij oziroma celotnega gospodarstva.

Kot lahko vidimo iz slike, imajo dnevne donosnosti vseeno neko vrednost, h kateri se vračajo, saj je značilno, da velikim porastom sledijo veliki padci, kar se odvija toliko časa, da se nestanovitnost zopet umiri. Ob tem lahko tudi rečemo, da je bila nestanovitnost na delniškem trgu podvržena tudi vztrajnosti, saj je bil potreben določen čas, da se je nestanovitnost prelevila v stanje nizke nestanovitnosti. Kot bomo videli tudi v nadaljevanju, je bila vztrajnost nestanovitnosti visoka. Podobno sta ugotovila tudi Lotrič Dolinar in Podobnik (str.10), ko sta delniški indeks analizirala za obdobje od januarja 1993 do maja 2003 in je empirično ocenjen koeficient vztrajnosti nestanovitnosti v njunem modelu znašal 1, kar pomeni, da se varianca indeksa SBI 20 ne povrne v stanje dolgoročnega ravnotežja oziroma je neskončna.

6.1.1 Slovenski borzni indeks SBI 20

Slovenski borzni indeks (SBI 20) je namenjen spremljanju splošnih gibanj tečajev delnic na Ljubljanski borzi vrednostnih papirjev. Indeks je naslednik Slovenskega borznega indeksa (SBI), ki se je začel izračunavati 31. 12. 1993 in je prešel v SBI 20 julija 2000. Borzni indeks se izračunava vsak trgovalni dan v času trgovanja na osnovi trenutnih enotnih tečajev vrednostnih papirjev, vključenih v indeks. V indeks se lahko vključijo vrednostni papirji 15-ih izdajateljev, ki imajo svoj sedež v Republiki Sloveniji in so uvrščeni na organizirani trg Ljubljanske borze. Delnice so uvrščene v SBI 20 glede na naslednje kriterije:

1. velikost tržne kapitalizacije izdaje delnic v prostem obtoku,
2. povprečna absolutna dnevna velikost prometa (brez svežnjev in aplikacij),
3. povprečno število poslov (vključno s svežnji in aplikacijami),
4. vrednostni obrat prometa (brez svežnjev in aplikacij), to je razmerje med prometom in povprečno tržno kapitalizacijo v obdobju na trgovalni dan.

Prvi kriterij ima 50 % utež in kriteriji od 2. do 4. imajo 16,67 % utež. V SBI 20 je lahko vključenih od 10 do 20 delnic, število udeležencev pa ima pravico spremeniti uprava borze s posebnim sklepom.

Indeks SBI 20 je cenovni indeks, ki ne vključuje dividend in se tehta na osnovi tržne kapitalizacije v prostem obtoku. Indeks se izračunava s pomočjo naslednje enačbe:

$$SBI20_t = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} \cdot q_{i,R}}{\sum_{i=1}^n p_{i,0} \cdot q_{i,R}} \cdot 1000 \cdot C_T, \quad (115)$$

kjer je:

- i = 1, ..., n ,
- n = 15,
- t = dan trgovanja,
- R = dan revizije indeksa,
- T = trenutek pred pričetkom izračuna indeksa po novi sestavi,
- $p_{i,t}$ = tekoči enotni tečaj posameznih rednih delnic, vključenih v indeks, na dan t ,
- $p_{i,0}$ = bazni tečaj,
- C_T = popravni faktor za zagotovitev kontinuitete indeksa.

Popravni faktor zagotavlja primerljivost v času zaradi sprememb, ki so posledica sprememb v sestavi indeksa. S popravnim faktorjem se zagotavlja, da indeks odraža spremembe tečajev, do katerih je prišlo v času od dneva revizije indeksa do dneva izračunavanja po novi sestavi. Popravni faktor se izračuna na naslednji način:

$$C_T = C_{T-1} \cdot \frac{\text{Vrednost indeksa po stari sestavi na dan pred pričetkom izračuna indeksa po novi sestavi}}{\text{Vrednost indeksa po novi sestavi na dan pred pričetkom izračuna indeksa po novi sestavi}},$$

$$C_0 = 1.$$

Tržna kapitalizacija posamezne delnice v prostem obtoku (*free-float*) se določi s pomočjo naslednje enačbe:

$$K1_i = E_i \cdot F_i, \quad (116)$$

kjer je $K1_i$ tržna kapitalizacija delnice i v prostem obtoku, E_i uradni enotni tečaj delnice i na dan revizije indeksa in F_i število lotov delnice i , ki so v prostem obtoku.

V sestavi SBI 20 je pomemben delež, ki ga ima posamezna delnica in se v splošnem ugotovi tako, da se velikost njene tržne kapitalizacije v prostem obtoku na dan revizije indeksa deli s tržno kapitalizacijo v

prostem obtoku vseh delnic, ki se na ta dan vključijo v indeks. Določeno je, da posamezna delnica ne sme preseči 10 % deleža v sestavi tega indeksa. Če delež ene delnice preseže 10 %, se njena utež prilagodi navzdol na 10 %, deleži ostalih delnic pa se prilagodijo s pomočjo naslednje formule:

$$D_{i,R} = T_{i,R} \cdot \frac{((1 - (k_j + m) \cdot 0,1))}{T_R}, \quad (117)$$

kjer je:

- $D_{i,R}$ = prilagojeni delež delnice i v indeksu,
- i = $1, \dots, n - m - k_j$,
- n = 15,
- m = število izdaj delnic, katerih deleži v prvotnem izračunu sestave indeksa presegajo 10 %,
- k_j = število delnic, katerih deleži v indeksu so bili ob predhodnih prilagoditvah prilagojeni na 10 %,
- k_0 = 0,
- k_{j+1} = $k_j + m$,
- j = število iteracij = $0, \dots, J$, kjer je J končno število iteracij,
- $T_{i,R}$ = prvotni delež delnice i v indeksu brez 10 % omejitve,
- T_R = vsota prvotnih deležev delnic v indeksu, katerih deleži v izračunu sestave indeksa brez 10 % omejitve ne presegajo meje 10 %.

Postopek prilagajanja deležev delnic v sestavi indeksa se ponavlja toliko časa, da delež nobene delnice ni višji od 10 odstotkov.

Za sam izračun vrednosti SBI 20 je potrebno določiti še število delnic posamezne izdaje, ki se določi s pomočjo naslednje enačbe:

$$q_{i,T} = \left[\frac{D_{i,R} \cdot K_R}{P_{i,R}} \right] \cdot K_{pop}, \quad (118)$$

$$K_{pop} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M T_{i,R} - M \cdot 0,1}{1 - M \cdot 0,1},$$

kjer je:

- i = 1,..., n ,
- n = 15,
- R = dan revizije indeksa,
- $D_{i,R}$ = prilagojeni delež delnice i v indeksu,
- K_R = skupna tržna kapitalizacija v prostem obtoku vseh izdaj delnic, ki so vključene v indeks na dan revizije,
- $P_{i,R}$ = uradni enotni tečaj delnice i na dan revizije,
- $T_{i,R}$ = prvotni delež delnice i v indeksu brez 10 % omejitve,
- M = skupno število izdaj delnic, katerih delež je bil prilagojen navzdol na 10 %.

Za sestavo indeksa skrbi odbor za indekse, ki se sestaja vsaj ob rednih revizijah, ki so vsake tri mesece. Revizije indeksa pa so lahko tudi izredne, če pride do posebnega dogodka, ki se dotika delnice v sestavi indeksa.

Časovna vrsta podatkov SBI 20, ki nam je služila za ocenjevanja modela nestanovitnosti, je potekala od 3. julija 2000 do vključno 11. marca 2005. Za začetek časovne vrste je bil določen julij 2000, ker se je takrat pričelo izračunavati in objavljati podatke o indeksu SBI 20 na osnovi nove metodologije izračunavanja. Pred tem obdobjem se je od leta 1993 izračunaval indeks SBI. Na spodnji sliki je predstavljeno gibanje SBI 20 v proučevanem obdobju.

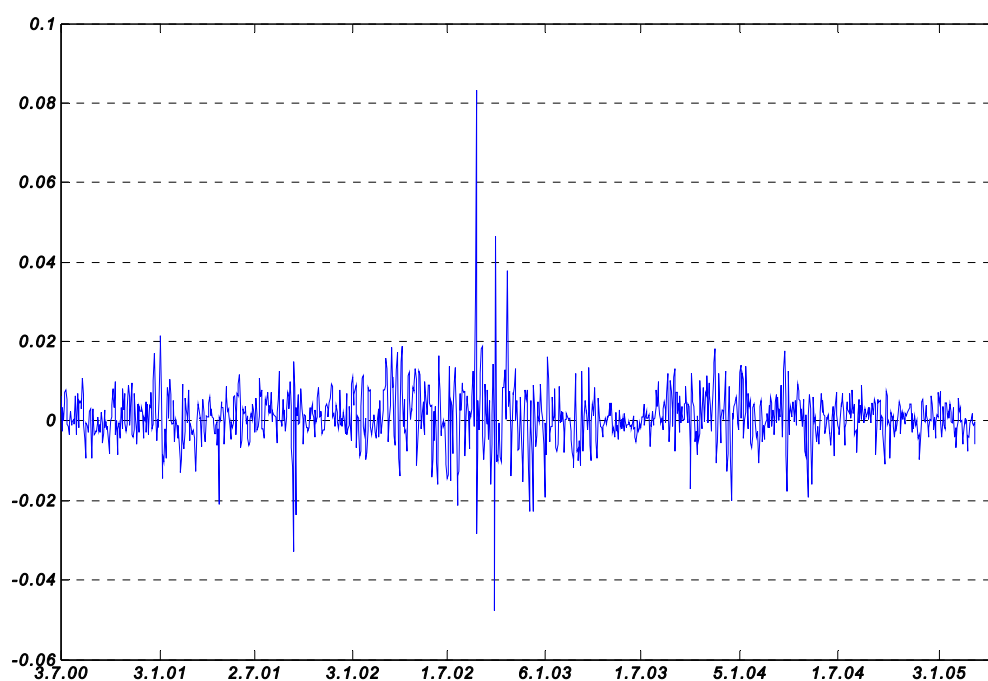
Slika 8: Gibanje vrednosti indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

Na sliki vidimo trend naraščanja indeksa, kar pomeni, da za tako časovno vrsto težko rečemo, da je stacionarna. V preteklih poglavjih smo že spoznali, kako se časovne vrste stacionirajo, in sicer z integriranjem časovne vrste oziroma izračunom difference med zaporednimi podatki. V nalogi nas je posebej zanimalo gibanje nestanovitnosti dnevnih donosnosti indeksa, ki predstavlja dejavnik tveganja finančne naložbe v portfelj delnic, ki indeks sestavljajo. Donosnosti smo izračunali tako, da smo iz indeksa izračunavali zvezno sestavljene *dnevne donose* s pomočjo naravnega logaritma in enačbe (97) ter dobili časovno vrsto, ki je načeloma stacionarna. Slika 9 predstavlja gibanje dnevnih zvezno sestavljenih donosov, iz katere je razvidno, da so se dnevni donosi gibal okrog vrednosti 0, ki po teoriji tudi predstavlja pričakovan dnevni donos ($E(r_t) = 0$).

Slika 9: *Gibanje zvezno sestavljenih donosov indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005*



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

V spodnji tabeli so predstavljene osnovne statistike dnevnih donosov indeksa SBI 20. Podatki kažejo, da je srednja vrednost porazdelitve donosov blizu 0, medtem ko je standardni odklon sedemkrat večji od srednje vrednosti. Porazdelitev kaže rahlo asimetričnost v desno, kar pomeni, da so bili donosi v pozitivni smeri večji kot donosi v negativni smeri. Koeficient sploščenosti kaže visoko koničavost (leptokurtičnost) porazdelitve donosov indeksa.

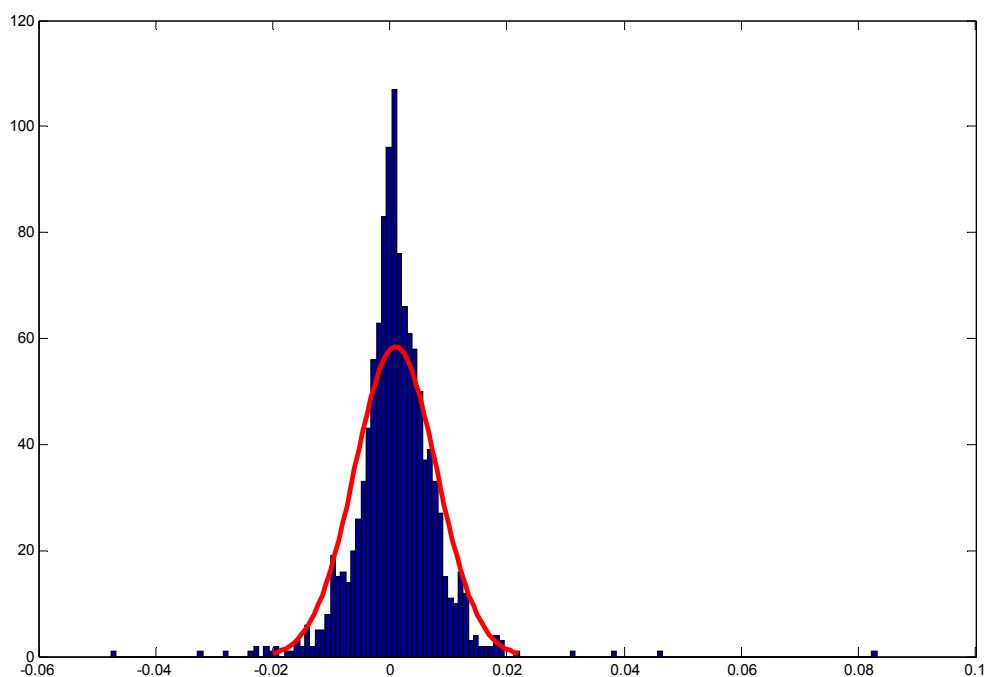
Tabela 8: Osnovne statistike zvezno sestavljenih dnevnih donosov indeksa SBI 20 v proučevanem obdobju

OPISNA STATISTIKA	VREDNOST
Srednja vrednost (m)	$9,5240 \times 10^{-4}$
Standardni odklon (σ)	0,006964
Varianca (σ^2)	$4,8501 \times 10^{-5}$
Koeficient asimetričnosti	1,221961
Koeficient sploščenosti	24,266091
Število enot (n)	1.171

Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni

Kar so nam pokazali podatki o porazdelitvi z osnovnimi statistikami, lahko vidimo tudi s slike 10, kjer je predstavljena primerjava med empirično porazdelitvijo donosov indeksa in prilagojeno normalno porazdelitvijo. S slike se natančno vidi, da ima empirična porazdelitev veliko več opazovanj v sredini porazdelitve in repih, medtem ko je med srednjim delom in repi porazdelitve manj opazovanj, kot jih predvideva normalna porazdelitev.

Slika 10: Empirična porazdelitev zvezno sestavljenih dnevnih donosov indeksa SBI 20 v obdobju od 3. 7. 2000 do 11. 3. 2005 in primerjava s prilagojeno normalno porazdelitvijo

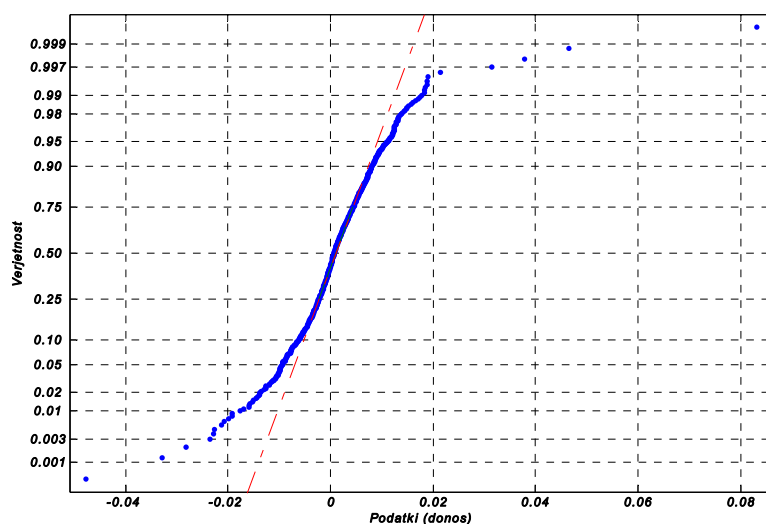


Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

Primerjavo empirične kumulativne porazdelitve in prilagojene kumulativne normalne porazdelitve kaže tudi kvantilni grafikon, kjer se primerja posamezno število (frekvenca) opazovanj na posameznih kvantilih empirične porazdelitve z normalno porazdelitvijo, ki je predstavljena z ravno črto.

Empirična porazdelitev ima značilno S-obliko krivulje, ki je značilna za finančne podatke (Fama, 1965, str. 52–54). Naklon krivulje se proti repom empirične porazdelitve zmanjšuje, kar kaže na večjo pogostost podatkov v repih porazdelitve oziroma na daljše repe empirične porazdelitve, v centralnem delu pa je krivulja zelo strma, kar kaže na visoko število opazovanih enot v tem delu porazdelitve.

Slika 11: Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 z normalno porazdelitvijo



Vir: Lastni izračuni.

Osnovne statistike in predstavljena grafikona kažeta, da se donosi SBI 20 v izbranem obdobju niso porazdeljevali normalno. To ugotovitev smo dodatno preverili s testom o normalnosti porazdelitve – Jarque-Bera testom. Na osnovi rezultatov tega testa smo zavrnili ničelno hipotezo pri zanemarljivi stopnji tveganja in sprejeli sklep, da se donosi SBI 20 v proučevanem obdobju niso porazdeljevali normalno.

Tabela 9: Rezultati Jarque-Bera testa o normalnosti porazdelitve donosov SBI 20

STATISTIKA	VREDNOST
Vrednost J-B	22.271
Stopnja značilnosti (P)	0,000
Kritična vrednost testa	5,992

Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

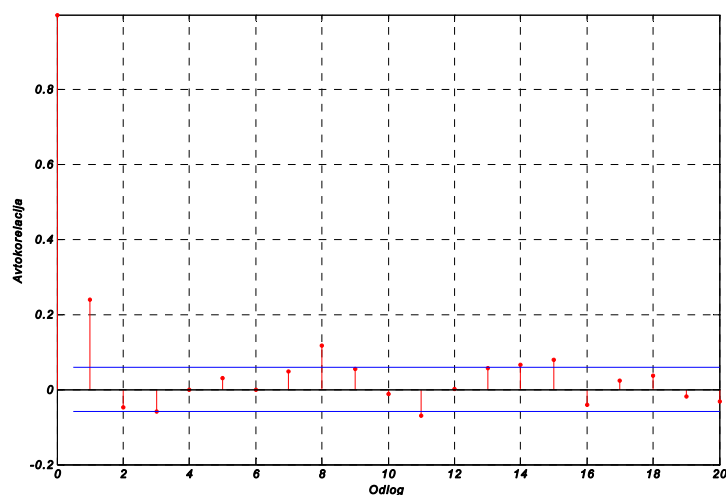
V tem delu smo spoznali nekaj značilnosti uporabljene časovne vrste indeksa SBI 20, v naslednjem poglavju pa se bomo posvetili razlagi testiranja za ARCH učinke v časovni vrsti.

6.2 TESTIRANJE ZA ARCH UČINKE

Dva testa (Englov ARCH test in Ljung-Box-Q test) in njune rezultate za ugotavljanje ARCH učinkov v časovni vrsti smo že spoznali. Tukaj smo predstavili še dodatne možne teste za preverjanje ARCH učinkov, ki smo jih izvedli, preden smo se lotili dejanskega modeliranja variance oziroma nestanovitnosti indeksa SBI 20.

Najprej smo grafično preverili avtokorelacijo v indeksu SBI 20 s pomočjo avtokorelacijske funkcije in njene slikovne predstavitve. Na spodnji sliki (Slika 12) so predstavljeni rezultati avtokorelacijske funkcije odlogov donosov indeksa z zgornjo in spodnjo mejo zaupanja, ki temelji na domnevi, da so vse avtokorelacije za odlogom nič enake 0. Vidi se močna avtokorelacija na prvem odlogu, potem je še nekaj šibkejših avtokorelacij na odlogih 8, 11 in 16. Iz tega sledi, da prvi odlog donosa vpliva na gibanje donosa v prihodnosti.

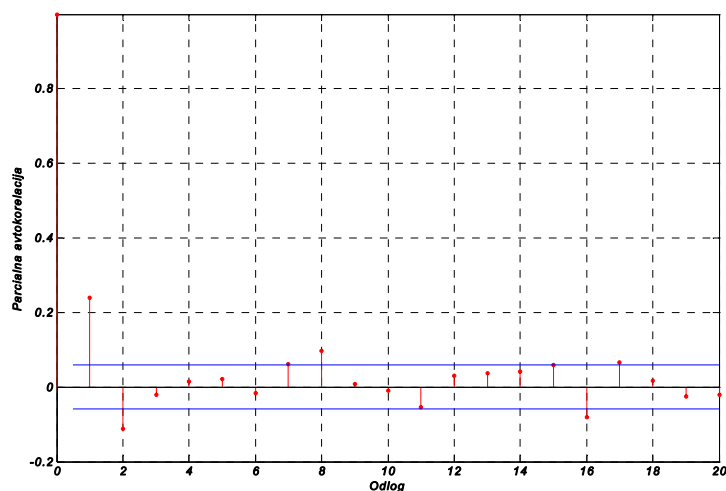
Slika 12: *Avtokorelacijska funkcija donosov SBI 20*



Vir: Lastni izračuni.

Podobne rezultate smo dobili tudi s preverjanjem s pomočjo parcialne avtokorelacijske funkcije, kjer se prav tako kaže močna avtokorelacija na prvem odlogu.

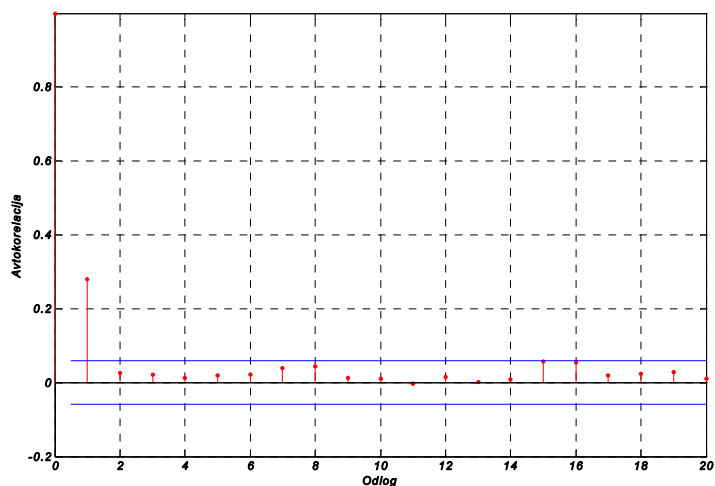
Slika 13: *Parcialna avtokorelacijska funkcija donosov SBI 20*



Vir: Lastni izračuni.

Na podlagi rezultatov avtokorelacijske funkcije kvadratov donosov indeksa preverjamo, ali obstaja korelacija v procesu variance (Mathworks, 2004, str. 1-20). Zopet se kaže visoka avtokorelacija na prvem odlogu.

Slika 14: *Avtokorelacijska funkcija kvadratov donosov SBI 20*



Vir: Lastni izračuni.

Za dodaten vpogled v obstoj ARCH učinkov v časovni vrsti indeksa smo v fazi predtestiranja ocenili preprost model, ki je za odvisne spremenljivke za modeliranje variance upošteval preteklo varianco in kvadrat napake, medtem ko je model za srednjo vrednost upošteval samo konstanto brez pojasnjevalnih spremenljivk. Rezultati predocenjevanja so predstavljeni spodaj in kažejo na ARCH

učinke v časovni vrsti in smiselnost modeliranja variance, saj sta vrednosti parametrov pojasnjevalnih spremenljivk statistično značilno različni od nič pri zanemarljivem tveganju.

Tabela 10: Ocenjeni parametri GARCH(1,1) modela na osnovi Gaussove porazdelitve

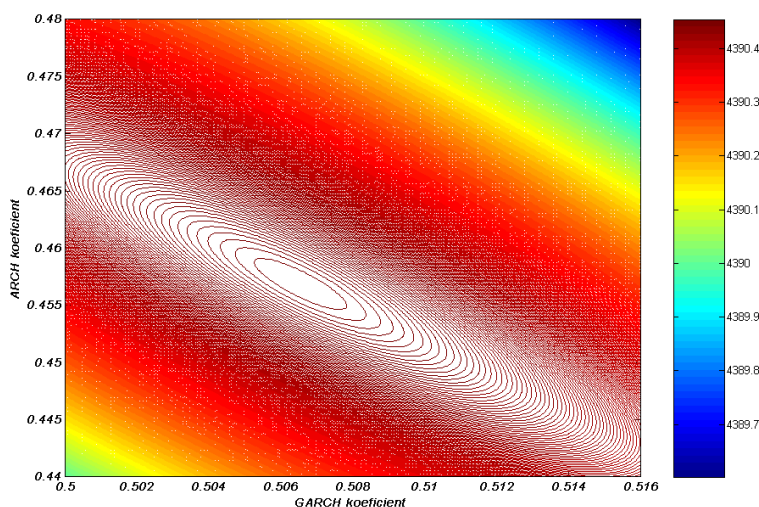
Parameter	Vrednost	Standardna napaka	Vrednost t -statistike	Točne st. značilnosti* (P)
C	0,00075075	0,00014195	5,2887	0,00000
K	$4,742 \times 10^{-6}$	$7,6374 \times 10^{-7}$	6,2089	0,00000
GARCH(1)	0,50638	0,035695	14,1863	0,00000
ARCH(1)	0,45704	0,038654	11,8238	0,00000

* dvostranski preizkus

Vir: Lastni izračuni.

Slika 15 prikazuje rezultate maksimiranja logaritma funkcije verjetja v ravnini koeficientov ARCH in GARCH parametrov oziroma vrednosti koeficientov, pri katerih je logaritem funkcije verjetja dosegel svojo maksimalno vrednost.

Slika 15: Prikaz vrednosti logaritmov funkcije verjetja v ravnini ARCH – GARCH parametrov



Vir: Lastni izračuni.

V naslednjem poglavju bomo predstavili razloge za izbiro izbranega modela za modeliranje nestanovitnosti indeksa SBI 20.

6.3 IZBIRA MODELA

Ocenjevanje nestanovitnosti slovenskega borznega indeksa je temeljilo na štirih modelih iz družine ARCH modelov. Najbolj preprost ocenjen model je bil ARCH(1) model, temu nadgrajen je bil

GARCH(1,1) model, ki je za pojasnjevalno spremenljivko vseboval tudi preteklo varianco. Od asimetričnih modelov, ki upoštevajo različnost vpliva negativnega in pozitivnega šoka na nestanovitnost, pa sta bila ocenjena tudi EGARCH in GJR model. Rezultati ocen modelov so bili predstavljeni ob teoretičnih razlagah. Za potrebe izbire najbolj primerne modela smo izbrali *Akaikov* (AIC) in *Bayesianski* (BIC) informacijski kriterij (Mathworks, 2004, str. 8-5-8-6, Box, Jenkins, Reinsel, 1994, str. 201):

$$AIC = (-2 \times LLF) + (2 \times \text{Št. parametrov}) \quad (119)$$

$$BIC = (-2 \times LLF) + (\text{Št. parametrov} \times \log(\text{Št. opazovanj})), \quad (120)$$

kjer je *LLF* maksimum logaritma funkcije verjetja. Izračun informacijskih kriterijev temelji na osnovi vrednosti logaritma funkcije verjetja in številu parametrov modela. Vrednost informacijskih kriterijev je odvisna od števila parametrov, kar pomeni, da so slabše ocenjeni modeli z več parametri. Modeli, ki imajo najnižjo vrednost ocenjevalnega parametra (AIC ali BIC), so ocenjeni kot boljši (Box, Jenkins, Reinsel, 1994, str. 201). Ocenjevalna kriterija dajeta prednost preprostim (skromnim) modelom, kar pomeni, da mora model z več parametri imeti višjo vrednost logaritma funkcije verjetja, da se izkaže za boljšega, poleg tega pa BIC bolj kaznuje modele z večjim številom parametrov kot AIC. Uporaba najmanjšega BIC za izbiro modela bo vedno izbrala model, ki po številu parametrov ni večji od modela, ki je bil izbran s pomočjo AIC (Box, Jenkins, Reinsel, 1994, str. 201).

Tabela 11: Primerjava primernosti modelov za ocenjevanje nestanovitnosti slovenskega borznega indeksa SBI 20 s pomočjo Akaikovega (AIC) in Bayesijskega (BIC) informacijskega kriterija ter maksimumov logaritma funkcije verjetja

Model	Vrednost AIC	Vrednost BIC	Vrednost LLF
ARCH(1)	-8836,1	-8810,8	4423,07
GARCH(1,1)	-8911,4	-8881,0	4461,70
EGARCH(1,1)	-8915,1	-8879,7	4464,57
GJR(1,1)	-8909,5	-8874,1	4461,76

Vir: Lastni izračuni.

Na podlagi izračuna vrednosti AIC lahko rečemo, da je izmed izbranih ocenjenih modelov za ocenjevanje nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu najbolj primeren EGARCH(1,1) model. Na podlagi BIC vrednosti pa sklepamo, da je najbolj primeren GARCH(1,1) model. Vrednost BIC za model GARCH(1,1) je nižja od BIC vrednosti EGARCH(1,1) modela, saj BIC v osnovi kot slabše oceni modele z večjim številom parametrov, vendar pa je razlika v BIC med EGARCH(1,1) in GARCH(1,1) modelom samo 0,23 %. Zato bi na podlagi BIC težko rekli, da je EGARCH(1,1) bistveno slabši od GARCH(1,1) modela. Najslabše se je pri testiranju po obeh ocenjevalnih kriterijih izkazal ARCH(1) model.

Pri izbiri primerne modela za napovedovanje nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu smo poleg rezultatov omenjenih testov upoštevali tudi statistično značilnost samih ocen parametrov in njihovo usklajenost s teorijo. Tako lahko ugotovimo, da so parametri, ki kažejo vpliv vzvoda v modelu EGARCH(1,1) in GJR(1,1), statistično neznailni in neustreznih predznakov⁶¹, kar pomeni, da vzvod kot dodatna pojasnjevalna spremenljivka ne prispeva k razlagi gibanja nestanovitnosti delniškega borznega indeksa. Na podlagi predstavljenih ugotovitev smo se odločili za model GARCH(1,1), ki izmed izbranih modelov najbolj pojasnjuje gibanje delniškega borznega indeksa. Izbrani model je tudi preprost, kar se v strokovni literaturi velikokrat poudarja kot prednost (Mathworks, 2004, str. 2-12). Bera in Higgins (1993, str. 317) na primer navajata, da je bilo v mnogih raziskavah dokazano, da je GARCH(1,1) proces sposoben opisati večino finančnih časovnih vrst, kar tudi potrjuje ustreznost izbranega modela za opis nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu.

IZBRANI MODEL⁶²:

$$y_t = \mu + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1},$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim N(0,1),$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},$$

$$\hat{y}_t = 5,8534 \cdot 10^{-4} + 0,1924 y_{t-1} + 0,2138 \varepsilon_{t-1},$$

(3,66) (2,57) (2,99)

$$\hat{h}_t = 4,314 \cdot 10^{-6} + 0,3768 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,5493 h_{t-1}.$$

(5,74) (11,25) (13,91)

Dolgoročni pogojni standardni odklon, izračunan na podlagi rezultatov izbranega modela, znaša 0,0076 in je višji od standardnega odklona izbranega vzorca.

6.4 RAZLAGA REZULTATOV

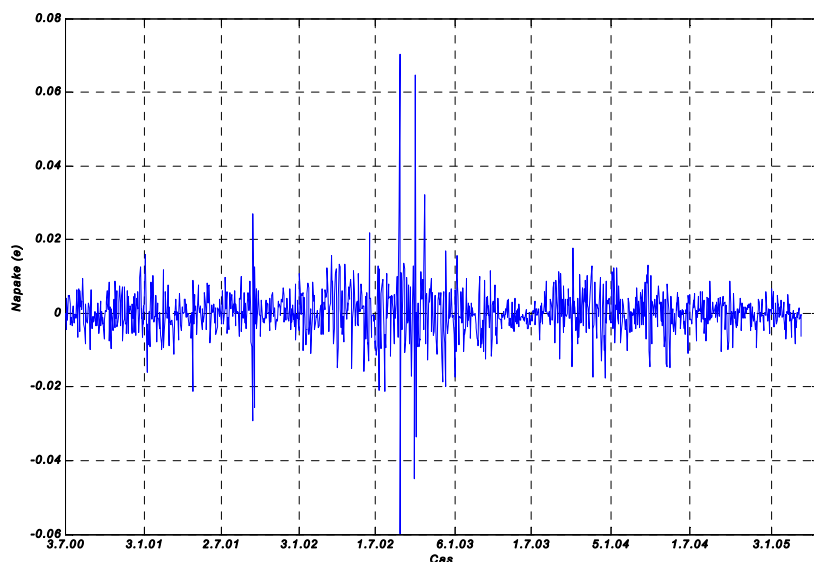
V tem razdelku se bomo posvetili razlagi rezultatov, ki jih dobimo z izbranim GARCH(1,1) modelom. Na spodnji sliki (Slika 16) je predstavljeno gibanje napak (ε), ki nam jih je dal model. Če napake

⁶¹ Če je vpliv vzvoda značilen, potem je predznak parametra, ki kaže vpliv vzvoda, pri EGARCH modelu negativen in pri GJR modelu pozitiven (Mathworks, 2004, str. 2-11).

⁶² Statistike modela so prikazane v tabeli 2.

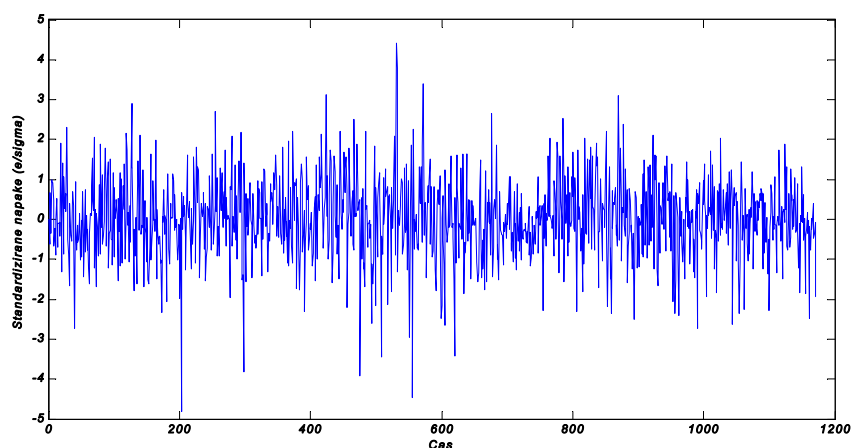
modela delimo s pogojnimi standardnimi odkloni (ε_t / σ_t), dobimo standardizirane napake (Slika 17). Gibanje standardiziranih napak izbranega modela kaže na bolj neodvisno gibanje oziroma gibanje, ki je bolj podobno gibanju belega šuma. V vrsti standardiziranih napak se kaže le rahlo skupinjenje nestanovitnosti v primerjavi z gibanjem napak časovne vrste, kar pomeni, da je vrsta standardiziranih napak relativno stabilna.

Slika 16: *Gibanje napak*



Vir: Lastni izračuni.

Slika 17: *Gibanje standardiziranih napak*



Vir: Lastni izračuni.

Da bi preverili porazdelitev standardiziranih napak v primerjavi z normalno prilagojeno porazdelitvijo, smo opravili še Jarque-Bera test. Na osnovi testa smo ugotovili, da se standardizirane

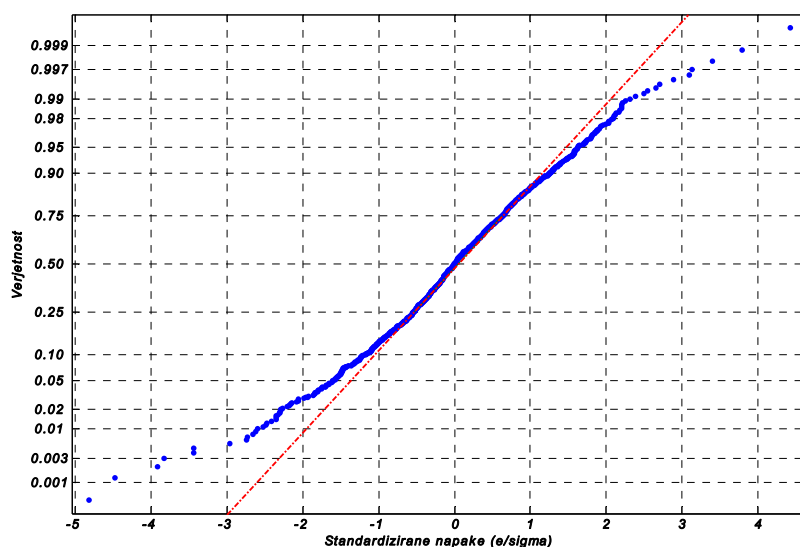
napake ne porazdeljujejo normalno. Podobno lahko sklepamo tudi na osnovi spodnje slike (Slika 18). Na sliki je vidno, da so odkloni standardiziranih napak v repih porazdelitve večji, kot jih predvideva normalna porazdelitev, kar kaže na to, da se z modelom ni dalo v polni meri odpraviti debelih repov porazdelitve donosov indeksa.

Tabela 12: Rezultati Jarque-Bera testa o normalnosti porazdelitve standardiziranih napak

STATISTIKA	VREDNOST
Vrednost J-B	139,0012
Stopnja značilnosti (P)	0,000
Kritična vrednost testa	5,992

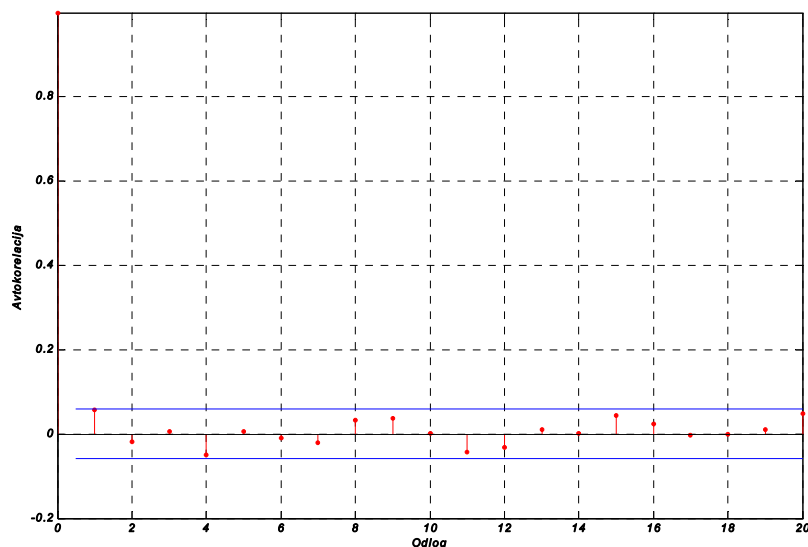
Vir: Lastni izračuni.

Slika 18: Porazdelitev standardiziranih napak



Vir: Lastni izračuni.

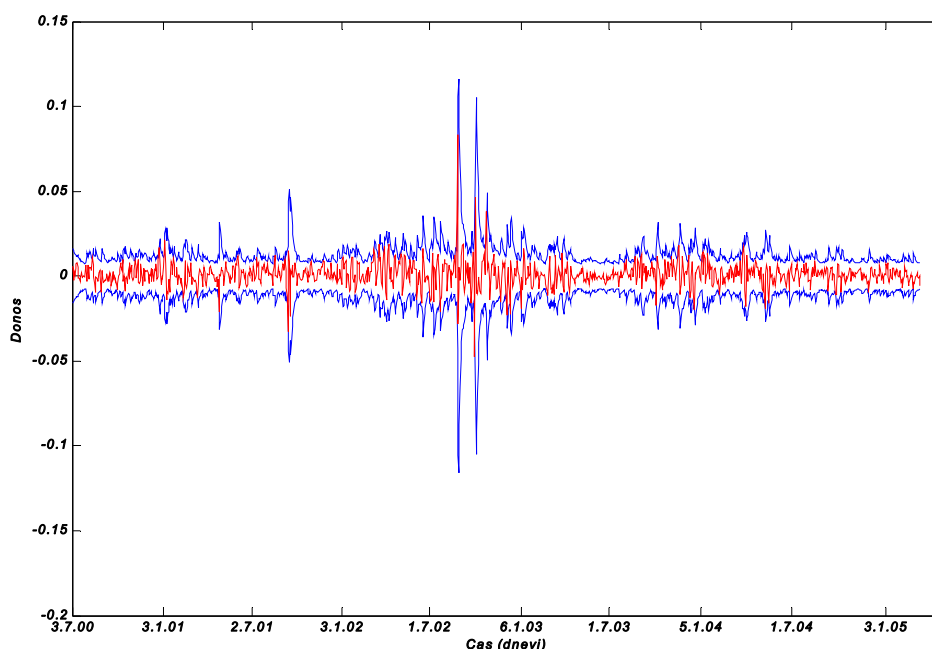
Za preverjanje časovne odvisnosti med zaporednimi standardiziranimi napakami iz izbranega modela smo narisali še avtokorelacijsko funkcijo kvadratov standardiziranih napak (Slika 19). Slika prikazuje, da med zaporednimi členi do dvajsetega odloga ni prisotne korelacije, kar pa ni bila značilnost kvadratov napak donosov indeksa SBI 20 (Slika 14). Ta primerjava kaže, da izbrani model v zadostni meri upošteva heteroskedastičnost, ki je prisotna v donosih indeksa SBI 20.

Slika 19: *Avtokorelacijska funkcija kvadratov standardiziranih napak iz GARCH(1,1) modela*

Vir: Lastni izračuni.

Na spodnji sliki imamo predstavljeno primerjavo donosov indeksa SBI 20 (rdeča barva) v primerjavi s pogojnimi standardnimi odkloni iz modela, ki so pomnoženi z vrednostjo standardizirane normalne porazdelitve 2,33, kar ustreza stopnji tveganja pri $\alpha = 0,01$ (modra barva). Tak interval zaupanja je izbran, ker ga tudi Baselski standardi določajo kot primerno stopnjo zaupanja za izračun kapitalskih zahtev z internim modelom in za testiranje primernosti modela s pomočjo testiranja za nazaj (Basle Committee on Banking Supervision, 1996, str. 2). Za potrebe upravljanja tveganj nas zanimajo predvsem negativni odkloni oziroma donosi in v skladu s tem nas zanima, ali je dejanski donos presegel dani interval zaupanja. Kot se vidi s slike, se donos v negativni smeri giba znotraj danega intervala, kar je pomembno pri upravljanju tržnih tveganj in izračunu tvegane vrednosti. Na podlagi slike lahko zaključimo, da z modelom izračunana nestanovitnost dobro opisuje značilnosti časovnih vrst donosov lastniških finančnih instrumentov in da je taka nestanovitnost primerna tudi kot vhodni podatek za izračun VaR.

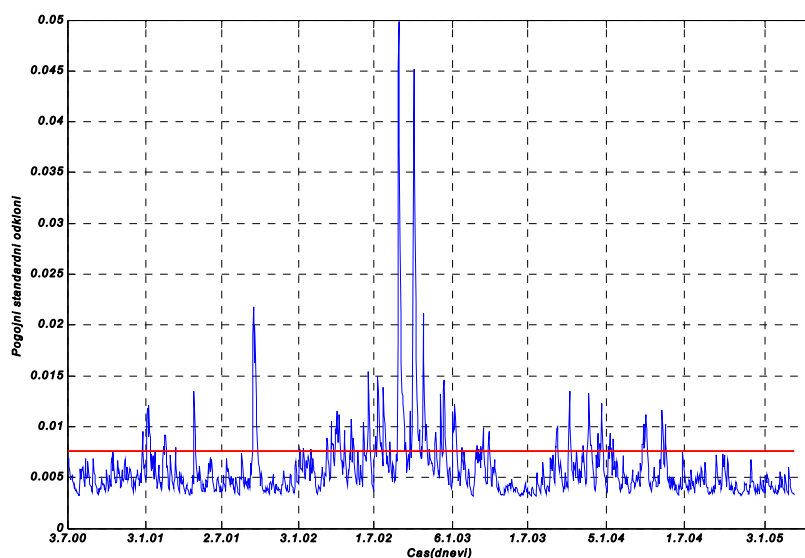
Slika 20: Primerjava donosov indeksa SBI 20 in pogojnih standardnih odklonov GARCH(1,1) modela, pomnoženih s $\pm 2,33$.



Vir: Lastni izračuni.

Slika 21 prikazuje primerjavo med dolgoročnim pogojnim standardnim odklonom in posameznimi dnevnimi standardnimi odkloni (nestanovitnostjo). S slike se vidi, da je v obdobju visoke nestanovitnosti le-ta nad dolgoročno nestanovitnostjo, medtem ko je nestanovitnost v mirnem obdobju pod dolgoročno nestanovitnostjo.

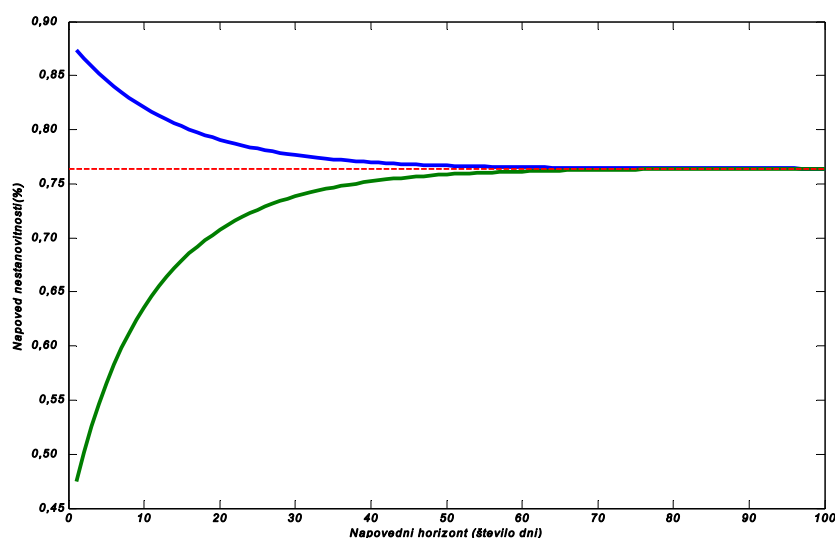
Slika 21: Pogojni standardni odkloni v primerjavi z dolgoročnim pogojnim standardnim odklonom (rdeča črta)



Vir: Lastni izračuni.

Ker nas je zanimala vztrajnost šokov v nestanovitnosti iz obdobja visoke in nizke nestanovitnosti, smo izračunali napovedi variance z modelom za 100 dni vnaprej. Na spodnji sliki (Slika 22) sta prikazani napovedi nestanovitnosti za ta dva različna šoka. Z modro črto je predstavljena vztrajnost šoka iz obdobja visoke volatilitnosti, in sicer napoved nestanovitnosti z dne 15. 1. 2003 (obdobje je trajalo od 4. 10. 2002 do 15. 1. 2003) in z zeleno črto je predstavljen šok iz obdobja izredno nizke nestanovitnosti, in sicer napoved z dne 22. 7. 2003 (obdobje je trajalo od 18. 4. 2003 do 22. 7. 2003). Slika lepo prikazuje vračanje nestanovitnosti k njenemu dolgoročnemu povprečju, ki znaša 0,0076 oziroma 0,76 % (rdeča črta). Nestanovitnost iz obdobja visoke nestanovitnosti se spušča k dolgoročni nestanovitnosti, medtem ko se nestanovitnost iz obdobja nizke nestanovitnosti k dolgoročni nestanovitnosti dviga.

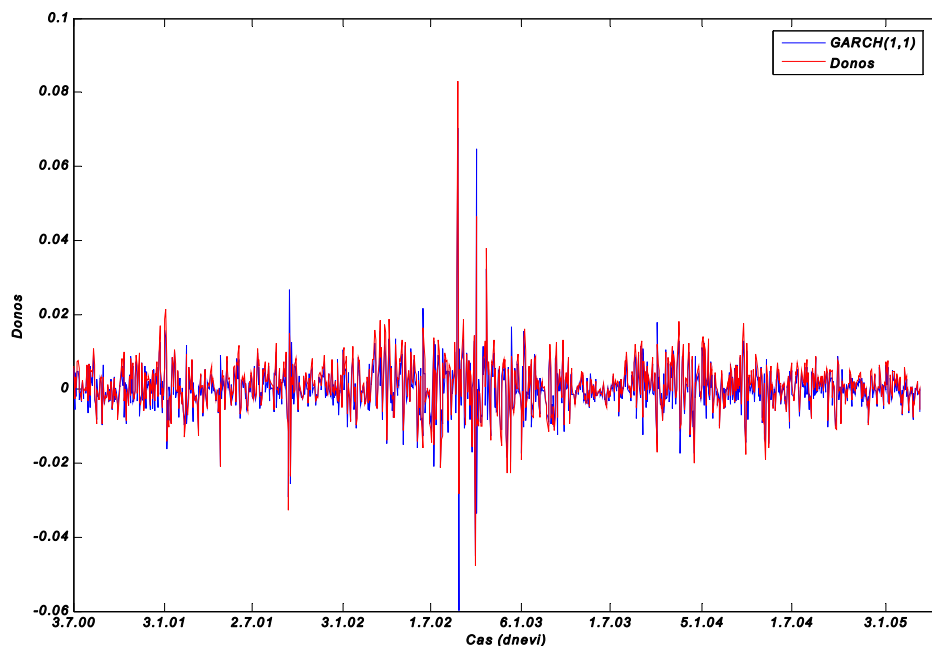
Slika 22: *Vračanje nestanovitnosti k svoji srednji vrednosti po šoku*



Vir: Lastni izračuni.

Na spodnji sliki je narejena primerjava med dejanskimi donosi indeksa SBI 20 in ocenjenimi donosi s pomočjo GARCH(1,1) modela. S slike se vidi, da ocenjeni donosi sledijo dejanskim, kljub vsemu pa prihaja do določenih odstopanj. Najbolj vidno odstopanje ocenjenih donosov je v negativni in pozitivni smeri v času največje nestanovitnosti indeksa. To je razumljivo, saj so ocene narejene na osnovi preteklih dejanskih opazovanj, ki pa z oddaljevanjem v preteklost izgubljajo na teži pri napovedovanju. Če je bil na primer po obdobju visokega šoka naslednje obdobje donos nižji od pričakovanega, model potrebuje določeno obdobje za prilagoditev, saj zaradi vztrajnosti, ki jo predvideva, ni bil sposoben takoj in v celoti upoštevati novih šokov.

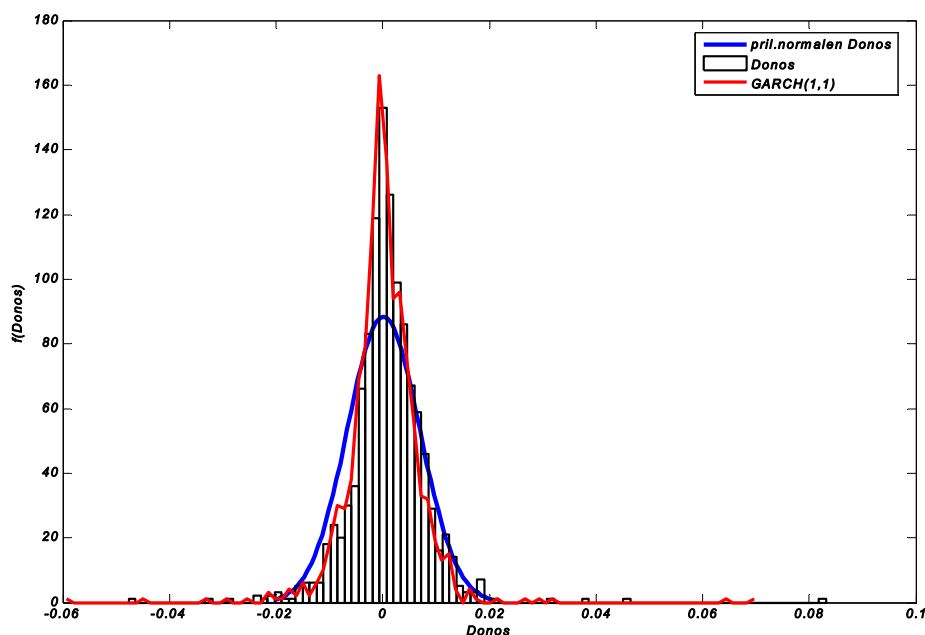
Slika 23: Primerjava dejanskih donosov SBI 20 in donosov, ocenjenih na podlagi modela $GARCH(1,1)$



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

Na spodnji sliki je predstavljena empirična porazdelitev ocenjenih in dejanskih donosov indeksa v primerjavi s prilagojeno normalno porazdelitvijo. Jasno se vidi, da je tudi modelirana porazdelitev donosov še vedno bolj koničasta in ima več opazovanj v repih porazdelitve kot to predvideva normalni prilagojena porazdelitev, vendar ima v primerjavi z dejansko empirično porazdelitvijo več opazovanj v sredini porazdelitve in manj opazovanj v repih.

Slika 24: Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 in donosov iz modela GARCH(1,1) ter primerjava s prilagojeno normalno porazdelitvijo



Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

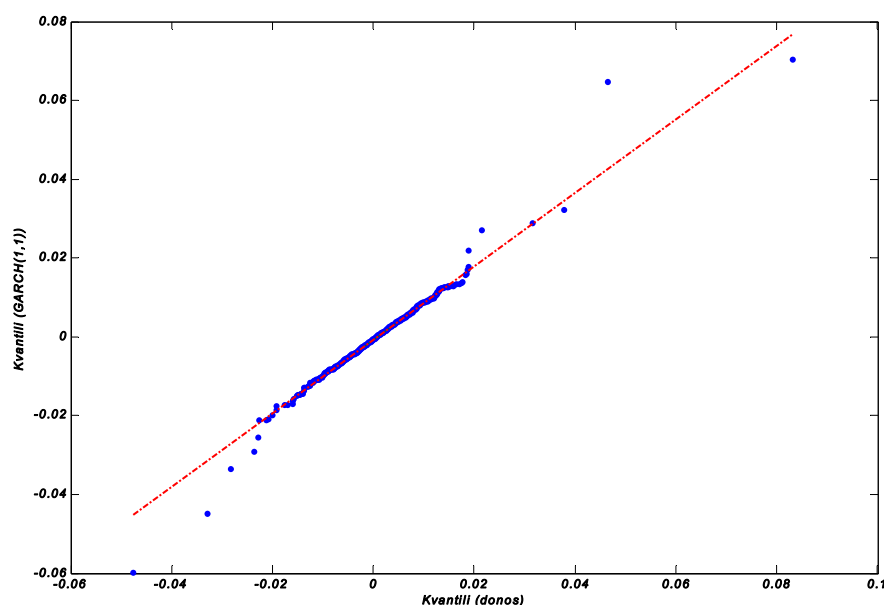
Podobnost porazdelitve donosov SBI 20 in donosov, ocenjenih s pomočjo GARCH(1,1), smo preverili tudi s pomočjo Kolmogorov-Smirnovega testa (Mathworks, 2001, str. 2-169), ki primerja ali sta porazdelitvi dveh spremenljivk enaki (H_0). S pomočjo tega testa smo zavrnili ničelno hipotezo in ugotovili, da porazdelitvi dejanskih donosov in ocenjenih donosov s pomočjo modela nista enaki, enako ugotovitev pa nam je podala tudi slika kvantilnega grafikona, kjer se vidi precejšnje odstopanje od ravne črte v repih porazdelitev.

Tabela 13: Rezultati Kolmogorov-Smirnovega testa o podobnosti porazdelitve donosov SBI 20 in porazdelitve ocenjenih donosov iz modela GARCH(1,1)

STATISTIKA	VREDNOST
Vrednost	0,0880
Stopnja značilnosti (P)	$2,1174 \times 10^{-4}$

Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

Slika 25: Primerjava porazdelitve donosov SBI 20 in porazdelitve ocenjenih donosov iz modela GARCH(1,1) s pomočjo kvantilnega grafikona

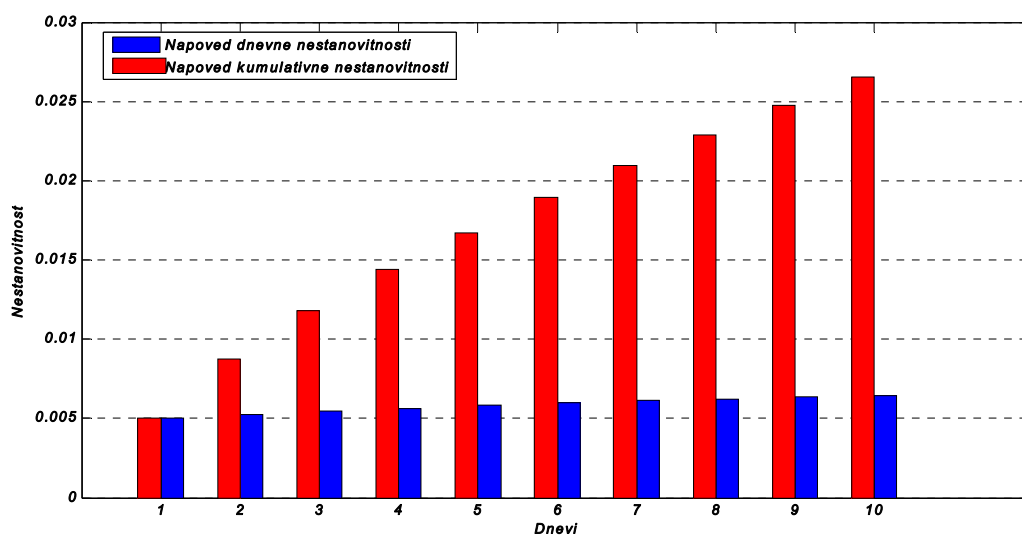


Vir: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d. in lastni izračuni.

Za konec se posvetimo še praktični uporabi rezultatov modela, in sicer izračunu VaR, ki se ga uporablja pri upravljanju tveganj. Izračun VaR lahko opravimo za nek hipotetičen portfelj⁶³, ki vsebuje enake delnice in v istih razmerjih, kot so zajete v indeks SBI 20. Predpostavimo, da v tak portfelj naložimo 10 milijonov tolarjev na dan 11. 3. 2005. Sedaj nas zanima, koliko lahko največ izgubimo naslednji dan in v desetih dneh pri določeni stopnji tveganja. Za tak izračun potrebujemo napoved nestanovitnosti za 1 dan in 10 dni iz modela ter vrednost standardizirane normalne porazdelitve pri izbrani stopnji tveganja, na primer $\alpha = 1\%$, ki da vrednost 2,33.

Na spodnji sliki in v tabeli so predstavljene napovedi dnevnih in kumulativnih nestanovitnosti za 10 dni, ki nam jih da izbrani model. Na tem mestu velja omeniti še to, da se dnevna napoved nestanovitnosti z oddaljevanjem v prihodnost povečuje. To je posledica dejstva, da je bila nestanovitnost, na osnovi katere se je napoved naredila nizka oziroma pod dolgoročno nestanovitnostjo.

⁶³ Za tak hipotetičen portfelj si lahko zamislimo naložbo v vzajemni sklad, ki ima politiko, da vlaga v delnice, ki sestavljajo indeks SBI 20 v enakih razmerjih kot so razmerja v indeks vključenih delnic. Pri tem zanemarimo, da se lahko sestava indeksa tudi spreminja.

Slika 26: Napovedi nestanovitnosti za 10 dni v prihodnost (dnevne in kumulativne)

Vir: Lastni izračuni.

Ko imamo na voljo vse potrebne podatke, lahko izračunamo VaR za en dan in analogno za 10 dni vnaprej:

$$VaR_{(1)} = z_{\alpha} \sigma_{t+1} W = 2,33 \cdot 0,0049988 \cdot 10.000.000 = 116.472,$$

$$VaR_{(10)} = z_{\alpha} \sigma_{t+10} W = 2,33 \cdot 0,026558 \cdot 10.000.000 = 618.801.$$

Tabela 14: Napovedi kumulativnih vrednosti nestanovitnosti indeksa SBI 20 za 10 dni

Čas (dnevi)	Vrednosti kumulativnih nestanovitnosti
1	0,004999
2	0,008768
3	0,011794
4	0,014400
5	0,016748
6	0,018920
7	0,020965
8	0,022908
9	0,024768
10	0,026558

Vir: Lastni izračuni.

Na podlagi napovedi nestanovitnosti lahko ocenimo, da naša izguba iz portfelja naložb v indeks SBI 20 v vrednosti 10 milijonov tolarjev v desetih dneh ne bo večja kot 620.000 tolarjev pri dani stopnji zaupanja oziroma naslednji dan ne bo večja od 116.500 tolarjev.

7 SKLEP

Rdeča nit magistrskega dela je bila posvečena nestanovitnosti na finančnih trgih, s poudarkom na nestanovitnosti delniških trgov. Nestanovitnost je ena osrednjih spremenljivk oziroma komponent sodobnega finančnega sveta, saj s svojim obnašanjem določa tveganost in cene finančnih instrumentov.

Delo je bilo razdeljeno na več vsebinskih sklopov. V prvem sklopu je bila nestanovitnost opredeljena s teoretičnega vidika in predstavljena so bila razmišljanja mnogih avtorjev o nestanovitnosti. Opisane so bile lastnosti nestanovitnosti kot so skupinjenje, vztrajnost, vračanje nestanovitnosti k srednji vrednosti, predstavljena je bila zveza med nestanovitnostjo in vzvodom, opredeljene značilne empirične porazdelitve finančnih podatkov, prav tako pa je bilo ugotovljeno, da na nestanovitnost vplivajo tudi nekatere eksogene makroekonomske spremenljivke. Poleg naštetih lastnosti nestanovitnosti je zanjo značilno, da se v času spreminja. Skupinjenje nestanovitnosti izraža to pomembno lastnost, ki jo je že leta 1963 odkril Mandelbrot. Svojo ugotovitev je strnil v trditev, da velikim spremembam v cenah sledijo velike spremembe in da majhnim spremembam cen sledijo majhne spremembe. Ta trditev pove, da so spremembe v cenah vrednostnih papirjev v času med seboj povezane. S tem je nedvomno nakazal, da na trenutno nestanovitnost vpliva tudi preteklo gibanje nestanovitnosti.

Časovno variiranje nestanovitnosti in odvisnost od preteklih vrednosti nestanovitnosti dobro opisujejo ARCH procesi. Zato je bila v drugem sklopu pozornost namenjena teoretični osvetlitvi teh procesov in njihovih lastnosti. Ugotovitev, da so finančne časovne serije podvržene ARCH procesom, je botrovala razvoju množice različnih modelov. Prvi, ki je zaoral ledino v to materijo, je bil Engle leta 1982. Za svoje pionirsko delo na tem področju in vpeljavo ARCH modela je leta 2003 dobil tudi Nobelovo nagrado za ekonomijo, kar je nedvomno pokazatelj visoke pomembnosti obravnavanega področja. Drug pomemben mejnik v razvoju teh modelov je postavil Bollerslev leta 1986, ko je predstavil GARCH model, ki je izpeljanka ARCH modela s splošnejšim in hkrati tudi skromnejšim zapisom, kar je še posebej dobrodošlo pri samem ocenjevanju modelov. Ostali modeli, ki so sledili, so izpeljanke omenjenih modelov, le njihova oblika se spreminja od modela do modela. Z njimi so različni avtorji hoteli opisati kar največ lastnosti nestanovitnosti. Prednosti uporabe ARCH modelov so, da ***upoštevajo preveliko sploščenost finančnih podatkov*** (debele repe porazdelitev) in ***skupinjenje nestanovitnosti***, ***dajejo natančne napovedi varianc in kovarianc donosnosti naložb***, ker so zmožni modeliranja časovno spremenljivih pogojnih varianc, poleg tega pa so modeli uporabljivi na širokem spektru finančnih področij, od upravljanja s tveganji in alokacije sredstev do cenitev opcij, kjer nestanovitnost osnovnega instrumenta določa ceno opcije.

Teoretično razglabljanje smo utemeljili v tretjem sklopu, kjer smo teoretično snov spojili s praktično uporabo na primeru slovenskega delniškega trga. Namen je bilo dokazati, da je slovenski delniški trg podvržen ARCH procesom, in oceniti model nestanovitnosti, ki bi dobro opisal variiranje cen delnic v Sloveniji. Za potrebe te analize smo izbrali slovenski borzni indeks SBI 20 kot predstavnika delniškega trga v obdobju od julija 2000 do sredine marca 2005 (1172 tečajev). Osnovna hipoteza je bila v raziskavi potrjena: **slovenski delniški trg je podvržen ARCH procesom**. Testi, ki so bili v analizi uporabljeni, so bili Englov ARCH test za ARCH učinke in Ljung-Boxov Q test za preverjanje avtokorelacije. Oba testa sta bila statistično značilna pri zanemarljivi stopnji tveganja, kar dokazuje pravilnost postavljene teze. Poleg tega je bilo ugotovljeno, da je porazdelitev slovenskega borznega indeksa podobna porazdelitvam finančnih podatkov drugod po svetu. **Oblika empirične porazdelitve je podobna zvonasti obliki normalne porazdelitve**, od nje se loči le po tem, da ima več opazovanj v sredini porazdelitve in tudi v njenih repih. Empirična porazdelitev indeksa kaže **večjo koničavost** od normalne porazdelitve in **rahlo asimetričnost v desno**.

Ko je bila dokazana pravilnost teze, smo se lotili ocenjevanja ARCH modela, ki bi bil primeren za opis nestanovitnosti slovenskega delniškega trga (indeksa SBI 20). Za ocenjevanje variance donosa smo izbrali štiri modele, in sicer najbolj preprost **ARCH(1)** in splošnejši **GARCH(1,1)** model, ki sta simetrična, ter dva modela, ki upoštevata tudi asimetričnost v nestanovitnosti oziroma vzvod, in sicer **EGARCH(1,1)** in **GJR(1,1)** model. Za ocenjevanje srednje vrednosti donosa smo izbrali **ARMA(1,1)** model, ki uporablja za eno pojasnjevalno spremenljivko odloženo vrednost donosa in za drugo pojasnjevalno spremenljivko odloženo napako. Parametre modelov smo ocenjevali s pomočjo **metode največjega verjetja**, ki za osnovno porazdelitev upošteva funkcijo normalne porazdelitve. Izmed izbranih modelov se je kot **najbolj primeren model** za ocenjevanje nestanovitnosti na slovenskem delniškem trgu izkazal **GARCH(1,1)** model. Pri izbiri primernosti modela so nam pomagali testi za izbiro modela, in sicer Akaikov in Bayesianski informacijski kriterij ter stopnje značilnosti ocenjenih parametrov posameznega modela. Izbrani model je simetričen, kar pomeni, da na slovenskem delniškem trgu vzvod nima velikega vpliva pri gibanju nestanovitnosti, kot bi morda lahko pričakovali glede na ugotovitve raznih raziskav. Ocenjeni model je dobra podlaga za napovedovanje nestanovitnosti delniškega trga, kar pa se lahko s pridom izkoristi tudi pri napovedovanju tveganosti (VaR) portfelja, ki ima v svoji strukturi delnice tistih slovenskih podjetij in seveda v enakih deležih, ki sestavljajo proučevani borzni indeks. Prednost napovedovanja nestanovitnosti s pomočjo ARCH modelov je tudi v tem, da se nestanovitnost lahko napove tudi za več obdobj vnaprej. Z daljšanjem obdobja napovedi se povečuje tudi njena točnost, ker je za nestanovitnost značilno, da se povrne k svoji srednji vrednosti, hitrost vrnitve pa je odvisna od parametra vztrajnosti. Če je časovna serija povržena ARCH procesom, je dobra lastnost napovedovanja s pomočjo ARCH modela tudi v tem, da je napoved za daljše obdobje vnaprej bolj pravilna, ker s časovno transformacijo nestanovitnosti ne prihaja do popačenj, ki so značilni v primeru, ko se za časovno transformacijo uporablja kar koren iz časa.

Za konec bi radi poudarili, da se z napovedovanjem nestanovitnosti zmanjšuje tveganost napovedi prihodnje vrednosti oziroma se povečuje točnost pričakovane prihodnje cene finančnega sredstva, kar je vsekakor dobrodošlo za finančnega investitorja. Z delom smo želeli osvetliti pojem nestanovitnosti v finančnem svetu tako s teoretičnega kot tudi s praktičnega vidika. Raziskava je namenjena teoretični osnovi pri nadaljnjem poglobljanju v svet nestanovitnosti in za praktično uporabo vsem, ki se z nestanovitnostjo srečujejo pri svojem delu.

8 LITERATURA

1. Advanced Information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel, October 8, 2003. The Royal Swedish Academy of Science, 30 str. [URL: <http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/ecoadv.pdf>]
2. Andersen Nicola, Francis Breedon: UK Asset Price Volatility over the Last 50 Years. Bank of England Working Paper Series, 51, 1996, 49 str.
3. Andersen Torben G., Tim Bollerslev: Deutsche Mark – Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies. Journal of Finance, 53, 1998, 1, str. 219-265.
4. Andersen Torben G., Tim Bollerslev, Francis X. Diebold, Heiko Ebens: The distribution of Stock Return Volatility. NBER Working Paper Series, Cambridge: NBER, Working Paper št. 7933, 2000, 26 str. 11 pril.
5. Bachelier Louis: Theorie de la Speculation. Doktorska disertacija. Paris, 1900.
6. Baillie Richard T., Tim Bollerslev, Hans Ole Mikkelsen: Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 74 (1996), 1, str. 3–30.
7. Basle Committee on Banking Supervision: Supervisory framework for the use of “Backtesting” in conjunction with the internal models approach to the market risk capital requirements. Basel: BIS, January 1996, 14 str.
8. Beltratti Andrea, C. Morana: Breaks and Persistency: Macroeconomic Causes of Stock Market Volatility. Milano : Bocconi University in University of Piemonte Orientale, 2002, 66 str.
9. Bera Anil K., Matthew L. Higgins: ARCH models: properties, estimation and testing. Journal of Economic Surveys, 7, 1993, 4, str. 305-365.
10. Bollerslev Tim, Ray Y. Chou, Kenneth F. Kroner: ARCH modeling in Finance, A review of the theory and empirical evidence. Journal of Econometrics, 52, 1992, str. 5–59.
11. Bollerslev Tim, Robert F. Engle, Daniel B. Nelson: ARCH Models. Discussion Paper, San Diego: University of California, 93-49, 1993, 90 str.
12. Bollerslev Tim: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 1986, 31, str. 307–327.
13. Bollerslev Tim: A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, The Review of Economics and Statistics, 1987, str. 542–547.

14. Bollerslev, T. and R. F. Engle: Common persistence in conditional variances. *Econometrica*, 61, 1993, 1, str. 167–186.
15. Box George E. P., Gwilym M. Jenkins, Gregory C. Reinsel: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Third Edition, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1994, 1075 str.
16. Campbell John Y., Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay: *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, Princeton University, 1997, 611 str.
17. Chou Ray Yeutien: Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence using GARCH. *Journal of Applied Econometrics*, 1988, 3, str. 279–294.
18. Chung Ching-Fan: Estimating the Fractionally Integrated GARCH model. Institute of Economics, Academia Sinica, Taipei, 1999, 20 str. (neobjavljen članek) [URL: http://gate.sinica.edu.tw/~metrics/Pdf_Papers/Figarch.pdf]
19. Connolly Robert, Chris Stivers: Evidence on the Economics of Equity Return Volatility Clustering. Kenan-Flagler Business School in Terry College of Business, Chapel Hill, Athens, 1999, 41 str.
20. Connolly Robert, Chris Stivers: Macroeconomic News, Stock Turnover, and Volatility Clustering in Daily Stock Returns. Chapel Hill: Kenan-Flagler Business School University of North Carolina in Terry College of Business University of Georgia, 2003, 39 str.
21. Cuthbertson Keith, Dirk Nitzsche: *Financial Engineering, Derivative and Risk Management*. Chichester: John Wiley & Sons, 2001, 776 str.
22. Da Costa Lewis Nigel: *Market Risk Modelling, Applied Statistical Methods for Practitioners*. London: Risk Books, 2003, 238 str.
23. Devjak Srečko: Vpliv centralne banke na optimizacijo portfelja vrednostnih papirjev v poslovnih bankah. Doktorska dizertacija. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2005, str. 181.
24. Deželan Silva: Efficiency of the Slovenian Equity Market. *Economic and Business Review*, 2, 2000, 1, str. 61–83.
25. Diebold Francis X., Andrew Hickman, Atsushi Inoue, Til Schuermann: Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by $\sqrt{h}$ is Worse than You Think. Wharton Financial Institutions Center, University of Pennsylvania, 1997, 97–34, 15 str.
26. Drost Feike C., Theo E. Nijman: Temporal aggregation of GARCH processes. *Econometrica*, 61, 1993, 4, str. 909–925.
27. Ederington L.H. in J.H. Lee: Intraday volatility in interest rate and foreign exchange markets: ARCH, announcement, and seasonality effects, *Journal of Futures Markets*, 21, 2001, 6, str. 517–552.

28. Engle Robert F.: Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 1982, 4, str. 987–1007.
29. Engle Robert F., C.W.J. Granger in Dennis Kraft: Combining competing forecasts of inflation using a bivariate ARCH model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8, 1984, str. 151–165.
30. Engle Robert F., Victor K. Ng: Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. NBER Working Paper Series, Cambridge, Working Paper, 1991, 3681, 31 str.
31. Engle Robert F., Kenneth F. Kroner: Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. Discussion Paper, San Diego: University of California, 89-57R, 1993, 31 str.
32. Engle Robert F., Andrew J. Patton: What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001, 1, str. 237–245.
33. Fama Eugene F.: The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, Chicago: University of Chicago, 38, 1965, 1, str. 34–105.
34. Fama Eugene F.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25, 1970, 2, str. 383–417.
35. Friedman B.M. and D.I. Laibson: Economic implications of extraordinary movements in stock prices. *Brooking papers on Economic Activity*, 1989, 2, str. 137–189.
36. Fuh Cheng-Der: Financial Time Series, Topic 2: ARMA and Time Series Modeling. Institute of Statistical Science, Academia Sinica, 2003, 17. str.
37. Gaynor Patricia E., Rickey C. Kirkpatrick: Introduction to Time-Series Modeling and Forecasting in Business and Economics. New York: McGraw-Hill, 1994, 625 str.
38. Giannopoulos Kostas: Measuring volatility. V Marc Lore, Lev Borodovsky ed., *The Professional's Handbook of Financial Risk Management*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000, str. 42 – 74.
39. Glosten Lawrence R., Ravi Jagannathan, David E. Runkle. On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks. Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report, 1993, 157, 29 str.
40. Gouriéroux, Christian: ARCH Models and Financial Applications. Springer Series in Statistics, New York: Springer-Verlag, 1997, 228 str.
41. Green William H.: *Econometric Analyses*. Third Edition, New York: Prentice-Hall, 1997, 1075 str.
42. Gujarati, Damodar N.: *Basi Econometrics*. Third Edition, New York: McGraw-Hill, 1995, 838 str.
43. Hatanaka Michio: Time Series Based Econometrics, Unit Roots and Co-Integrations. Oxford: Oxford University Press, 1998, 294 str.

44. Holton Glyn A.: Value-at-risk, Theory and Practice. Amsterdam: Academic Press, 2003, 405 str.
45. Hu Zulu: Stock Market: Volatility and Corporate Investment. IMF Working Paper, 102, 1995, 18 str.
46. Jones Charles O., Owen Lamont, Robin Lumsdaine: Macroeconomic news and bond market volatility, Journal of Financial Economics, 47, 1998, str. 315–337.
47. Jorion Philippe: Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk. Second Edition, New York: McGraw-Hill, 2001, 543 str.
48. Karlsson Lars: GARCH – Modelling, Theoretical Survey, Model Implementation and Robustness Analysis. Master Thesis, 51 str. [URL: <http://www.fattails.com/research/Masters%20Thesis%20-%20GARCH%20modeling.pdf>] (7.2.2005)
49. Košmelj Blaženka, Jože Rován: Statistično sklepanje, Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 1997, 312 str.
50. Lambert Philippe, Sébastien Laurent: Modelling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions. Louvain, Université Catholique de Louvain, 2002, 32 str.
51. Laurent Sébastien, Jean-Philippe Peters: G@RCH 1.11: An Ox Package for Estimating Various ARCH Models. Liège, Faculty of Economy, Business and Social Science, University of Liège, Belgium, 2000, 44 str.
52. Lotrič Dolinar Aleša, Boris Podobnik: GARCH model for Slovenian Stock Market Indices. (neobjavljen članek)
53. Mandelbrot, Benoit: The Variation of Certain Speculative Prices. Journal of Business, Chicago: University of Chicago, 36, 1963, 4, str. 394– 419.
54. Markowitz Harry: Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7, 1952, str. 77–91.
55. Masliah Maurice R.: Stationarity / Nonstationarity Identification. [URL: <http://vered.rose.utoronto.ca/people/moman/Stationarity/stationarity.html>] (30.12.2004).
56. Mikosch T.: Modeling dependence and tail of financial time series. V: Finkenstaedt B, H. Rootzen: Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment. Chapman and Hall, 2003, str. 185–286.
57. Mramor Dušan: Finančna politika podjetja: teoretični prikaz. Ljubljana: Gospodarski vestnik, 1991, 154 str.
58. Näsström Jens: Volatillty Modelling of Asset Prices using GARCH Models. Master's Thesis, Linköping: Linköping University, 2003, 84 str.

59. Panigirtzoglou Nikolaos, James Proudman, John Spicer: Persistence and volatility in short-term interest rates. Bank of England Working Paper Series, 116, 2000, 46 str.
60. Perrelli Roberto: Introduction to ARCH & GARCH models. Illinois, University of Illinois, 2001, 7 str.
61. Pfajfar Lovrec: Ekonometrija, Prosojnice za predavanja. Ljubljana: Ekonomska Fakulteta, 1998.
62. Pfajfar Lovrec: Ekonometrija, Zapiski predavanj I. del. Ljubljana: Ekonomska Fakulteta, 1995, 118 str.
63. Poon Ser-Huang, Clive Granger: Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. San Diego, Glasgow: University of California, Strathclyde University, 2002, 60 str.
64. Poterba James M., Lawrence H. Summers: The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations. NBER Working Paper Series, Cambridge, 1984, 1462, 30 str., 2 pril.
65. Poterba James M., Lawrence H. Summers: Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications. NBER Working Paper Series, Cambridge, Working Paper, 1987, 2343, 36 str.
66. Prohaska Zdenko: Finančni trgi. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 1999, str. 205.
67. Pryymachenko Iryna: Stock Price Volatility and Its Determinants on the Emerging Financial Market of Ukraine. Kijev : National University Kyiv-Mohyla Academy, 2003, 58 str.
68. Ramanathan Ramu: Statistical methods in econometrics. San Diego: Academic Press, 1993, 405 str.
69. Reinard Davy: Introduction to Market Risk Modelling. Seminar on Advanced Risk Management, Beatenberg: FSI, 2004.
70. Ribnikar Ivan: Denarni sistemi in denarna teorija. I. del: Denarni sistemi. Ljubljana : Ekonomska fakulteta, 1997. 336 str.
71. Ribnikar Ivan: Volatilnost ali »volatilnost«? Bančni Vestnik, Ljubljana, 1999, 4, str. 46–48.
72. Saunders Anthony, Marcia Millon Cornett: Financial Institutions Management: A Risk Management Approach. 4. izdaja, McGraw-Hill Irwin, 2003, 778 str.
73. Schwert G. William: Business Cycles, Financial Crises, and Stock Volatility. Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy, 1989b, 39, str. 83–126.
74. Schwert G. William: Why does stock market volatility change over time? Journal of Finance, 44, 1989a, str. 1115–1153.
75. Szegö Giorgio: Measures of risk. Journal of Banking & Finance, 26, 2002, str. 1253–1272.

76. Tasche Dirk: Expected shortfall and beyond. *Journal of Banking & Finance*, 26, 2002, str. 1519–1533.
77. Thomas Susan: An Introduction to time - series. Prosojnice za 2. letnik doktorskega študija, Bombay: IGIDIR, 2002, 15 str. [URL: <http://www.igidr.ac.in/~susan/TEACHING/TSA/index.html>] (30.12.2004)
78. Trobec Mojca: Raschevi modeli za kategorične podatke. Magistrsko delo. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko, 1996, 92 str.
79. Yu Jun: Forecasting volatility in the New Zeland stock market. *Applied Financial Economics*, 12, 2002, str. 193–202.

9 VIRI

1. Bank for International Settlements: [<http://www.bis.org>]
2. J.P.LeSage Library. [<http://www.spatial-econometrics.com>]
3. Kevin Sheppard, ucsd_garch_toolbox. [kksheppard@ucsd.edu]
4. Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d., Ljubljana: Metodologije izračunavanja indeksov Ljubljanske borze [<http://www.ljse.si>] (15. 5. 2005)
5. Math World: [<http://mathworld.wolfram.com>]
6. MathWorks: GARCH Toolbox for Use with Mathlab, User's Guide, Version 2. Natic: The MathWorks, 2004, 190 str. [<http://www.mathworks.com>] (30.12.2004)
7. MathWorks: Statistics Toolbox for Use with Mathlab, User's Guide, Version 3. Natic: The MathWorks, 2001, 560 str. [<http://www.mathworks.com>] (30.12.2004)
8. Practical Introductions to International Capital Markets, International Equity Markets, DC Gardner Group plc, 1991.
9. Sklep o kapitalski ustreznosti bank in hranilnic (Uradni list Republike Slovenije št.: 24/02, 85/02, 22/03, 36/04, 68/04, 103/04, 124/04)
10. Slovenski borzni indeks SBI 20: Ljubljanska borza vrednostnih papirjev d.d., Ljubljana [<http://www.ljse.si>] (15. 5. 2005)

S.D.G

10 PRILOGE

Priloga 1: Izpeljava napovedi pogojne variance za več obdobj vnaprej in faktorja vztrajnosti za GARCH(1,1) model

Priloga 2: Pravila za računanje z odložitvenim L - operatorjem

Priloga 3: Izpeljava napovedi pogojne variance za k obdobj za IGARCH(1,1) model

Priloga 4: Verjetnost in verjetnostna porazdelitev

Priloga 1: Izpeljava napovedi pogojne variance za več obdobj vnaprej in faktorja vztrajnosti za GARCH(1,1) model

Pričakovana pogojna varianca h_t v času t je:

$$E_t(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}.$$

Ob upoštevanju zakona o ponavljajočih pričakovanjih, da je:

$$E_t(\sigma_t^2) = E(E_t(e_t^2)) = h_t = \sigma^2 \text{ lahko zapišemo:}$$

$$E_t(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \beta h_{t-1} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_{t-1}.$$

V času $t+1$ je pričakovana pogojna varianca h_{t+1} enaka:

$$E_t(h_{t+1}) = \alpha_0 + \alpha_1 e_t^2 + \beta h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_t + \beta h_t = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_t,$$

kjer h_t zamenjamo z enačbo z napovedjo $E_t(h_t)$ in dobimo:

$$\begin{aligned} E_t(h_{t+1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 e_t^2 + \beta h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_t + \beta h_t = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) [\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_{t-1}] \end{aligned}$$

enako lahko naredimo še za čas $(t+2)$ vnaprej in substituiramo $E_t(h_{t+1})$:

$$\begin{aligned} E_t(h_{t+2}) &= \alpha_0 + \alpha_1 e_{t+1}^2 + \beta h_{t+1} = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) [\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_t] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) \{ \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) [\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) h_{t-1}] \} \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) [\alpha_0 + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta) + (\alpha_1 + \beta)^2 h_{t-1}] \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta) + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta)^2 + (\alpha_1 + \beta)^3 h_{t-1} \\ &= \alpha_0 [1 + (\alpha_1 + \beta) + (\alpha_1 + \beta)^2] + (\alpha_1 + \beta)^3 h_{t-1}, \end{aligned}$$

pri čemer je $[1 + (\alpha_1 + \beta) + (\alpha_1 + \beta)^2]$ vsota geometrijskega zaporedja s $q = (\alpha_1 + \beta)$ in dobimo:

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_0 \left(\frac{1 - (\alpha_1 + \beta)^3}{1 - (\alpha_1 + \beta)} \right) + (\alpha_1 + \beta)^3 h_{t-1} = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} - (\alpha_1 + \beta)^3 \cdot \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} + (\alpha_1 + \beta)^3 h_{t-1} \\
 &= (\alpha_1 + \beta)^3 \cdot \left(h_{t-1} - \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} \right) + \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}.
 \end{aligned}$$

Če sklepamo na splošno, dobimo napoved variance za k časovnih obdobj vnaprej s pomočjo pogojne variance h_t po naslednji enačbi:

$$E_t(h_{t+k}) = (\alpha_1 + \beta)^k \cdot \left(h_t - \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} \right) + \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}.$$

Priloga 2: Pravila za računanje z odložitvenim L - operatorjem

Pravila za računanje z odložitvenim (»lag«) L - operatorjem (Green, 1997, str.785-786):

1. $La = a$, če je a konstanta
2. $Lx_t = x_{t-1}$
3. $L(Lx_t) = L^2 x_t = x_{t-2} \Rightarrow L^p x_t = x_{t-p}$
4. $L^q (L^p x_t) = L^{q+p} x_t = x_{t-q-p}$
5. $(L^p + L^q)x_t = L^p x_t + L^q x_t = x_{t-p} + x_{t-q}$
6. $y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i L^i x_t + \varepsilon_t = \alpha + B(L)x_t + \varepsilon_t$,
kjer je $B(L)$ polinom v L , $B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots$
7. $A(L) = 1 + aL + (aL)^2 + (aL)^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (aL)^i$,
če je $|a| < 1$, potem je $A(L) = \frac{1}{1 - aL}$
8. $y_t = \alpha + \beta \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i L^i x_t$, γ je konstanta,

$$y_t = \alpha + \beta(1 - \gamma L)^{-1} x_t, \text{ če je } |\gamma| < 1,$$

če pomnožimo z $(1 - \gamma L)$, dobimo $y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta x_t + \gamma y_{t-1}$

$$(1 - \gamma L)y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta x_t$$

$$y_t - \gamma y_{t-1} = \alpha(1 - \gamma) + \beta x_t \Rightarrow y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta x_t + \gamma y_{t-1}$$

9. Povezava z diferenčami

a) $L^0 x_t = x_t$

b) $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$

c) $\Delta x_t = (1 - L)x_t$

d) $\Delta^2 x_t = x_t - x_{t-1} - x_{t-1} + x_{t-2} = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = (1 - L)^2 x_t$
 $= (1 - L)x_t - (1 - L)x_{t-1} = (1 - L)(x_t - x_{t-1}) = (1 - L)(1 - L)x_t = (1 - L)^2 x_t$

Priloga 3: Izpeljava napovedi pogojne variance za k obdobj za IGARCH(1,1) model

Pri izpeljavi napovedi upoštevamo zakon o ponavljajočih pričakovanjih $E_t(\sigma_t^2) = E(E_t(e_t^2)) = h_t = \sigma^2$ in da je vsota parametrov $\alpha_1 + \beta = 1$.

Model namesto v običajni zapišemo v naslednji obliki:

$$E_t(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}) + (\alpha_1 + \beta)h_{t-1}.$$

Če upoštevamo gornji predpostavki, lahko model poenostavimo v naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} E_t(h_t) &= \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}) + (\alpha_1 + \beta)h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(h_{t-1} - h_{t-1}) + h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + h_{t-1}. \end{aligned}$$

Naredimo še napoved za trenutek $t + 1$:

$$E(h_{t+1}) = \alpha_0 + h_t,$$

kjer h_t substituiramo z napovedjo $E(h_t)$:

$$E_t(h_{t+1}) = \alpha_0 + h_t = \alpha_0 + (\alpha_0 + h_{t-1}) = 2\alpha_0 + h_{t-1}.$$

Naredimo še napoved za dve obdobji vnaprej:

$$E_t(h_{t+2}) = \alpha_0 + h_{t+1} = \alpha_0 + (2\alpha_0 + h_{t-1}) = 3\alpha_0 + h_{t-1}.$$

Napoved s pomočjo pogojne variance h_t :

$$E_t(h_{t+2}) = 2\alpha_0 + h_t.$$

Splošnejši zapis napovedi za k časovnih obdobij vnaprej s pomočjo pogojne variance h_t dobimo po naslednji enačbi:

$$E_t(h_{t+k}) = k\alpha_0 + h_t.$$

Priloga 4: Verjetnost in verjetnostna porazdelitev

V tem poglavju si bomo delno ogledali verjetnostno teorijo in verjetnostne porazdelitve. Kot smo spoznali v predhodnih poglavjih, donosi finančnih aktiv sledijo določeni porazdelitvi, ki ni normalna, temveč ima svoje lastne zakonitosti. Spoznali smo se tudi z nepogojno in pogojno varianco, ki je posledica pogojne verjetnostne porazdelitve. V preteklih poglavjih se nismo posebej spuščali v podrobnosti verjetnostnih porazdelitev. Niso nas zanimale posamezne oblike verjetnostnih porazdelitev, niti nas niso zanimale porazdelitve v smislu, ali gre za porazdelitve ene spremenljivke, tako imenovane univariatne porazdelitve, ali gre za porazdelitve več spremenljivk, tako imenovane skupne oziroma multivariatne verjetnostne porazdelitve. Z večrazsežnimi (multivariatnimi) porazdelitvami se srečujemo, ko oblikujemo portfelj iz več različnih finančnih aktiv in opazujemo porazdelitev donosov takega portfelja ter pri izračunavanju tvegane vrednosti portfelja, ki nam kaže tveganost portfelja.

Na začetku določimo ***naključno spremenljivko*** X nekega naključnega procesa, katerega ***izidi*** zavzemajo vrednosti, ki jih označimo z x . Preden je proces izvršen ne vemo, katere vrednosti bo zavzela spremenljivka X , kar kaže na negotovost izidov, ki jih določajo verjetnosti posameznega izida. Verjetnost, da bo naključna spremenljivka X dosegla določeno vrednost x , formalno označimo s $P(X = x)$. Naključna spremenljivka X je lahko *diskretna* ali *zvezna*, kar pomeni, da je možno niz izidov neskončno krat razdeliti.

Verjetnostna porazdelitev $f(x)$ izraža vrednosti x naključne spremenljivke X s pripadajočimi verjetnostmi. Za diskretno naključno spremenljivko je verjetnostna porazdelitev določena:

$$f(x) = P(X = x).$$

Verjetnost, da zvezna naključna spremenljivka zavzame točno določeno vrednost, je enaka 0, zato lahko taki spremenljivki določimo verjetnost na intervalu v okolici vrednosti x . Definira se **funkcija gostote verjetnosti**, tako da je $f(x) \geq 0$ in verjetnost na intervalu v okolici x :

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx \geq 0, \quad (121)$$

ki označuje površino pod funkcijo $f(x)$ na intervalu od a do b . Za zvezno naključno spremenljivko velja, da je površina pod funkcijo $f(x)$ na intervalu od $-\infty$ do ∞ enaka 1 ali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija verjetnosti $F(x)$ izraža verjetnost, da x zavzame vrednosti manjše ali enake neki vrednosti a , kar se označi $F(a)$. Za diskretno spremenljivko velja, da je kumulativna porazdelitvena funkcija vsota posameznih verjetnosti:

$$F(x) = \sum_{X \leq x} f(x) \quad (122)$$

in za zvezno spremenljivko velja:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (123)$$

in

$$f(x) = \frac{F(x)}{dx}. \quad (124)$$

$F(x)$ mora ustrezati naslednjim pogojem:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. Če je $x > y, \Rightarrow F(x) \geq F(y)$,
3. $F(+\infty) = 1$,
4. $F(-\infty) = 0$.

Srednja vrednost naključne spremenljivke x oziroma pričakovana vrednost je določena:

$$E(x) = \begin{cases} \sum_x x f(x), & \text{če je } x \text{ diskreten,} \\ \int_x x f(x) dx, & \text{če je } x \text{ zvezen} \end{cases}. \quad (125)$$

Srednja vrednost se označuje tudi s spremenljivko μ .

Varianca naključne spremenljivke x :

$$\begin{aligned} Var(x) &= E[(x - \mu)^2] \\ &= \begin{cases} \sum_x (x - \mu)^2 f(x), & \text{če je } x \text{ diskreten,} \\ \int_x (x - \mu)^2 f(x) dx, & \text{če je } x \text{ zvezen} \end{cases}. \end{aligned} \quad (126)$$

Varianca je mera razpršenosti porazdelitve in mora biti vedno pozitivna, označuje pa se z σ^2 . Če varianco korenimo s kvadratnim korenom, dobimo standardni odklon (σ) od spremenljivke x .

Za izračun variance se uporablja naslednja relacija:

$$\begin{aligned} Var(x) &= E[(x - \mu)^2] \\ &= E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] \\ &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 \\ &= E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E[x^2] - \mu^2. \end{aligned}$$

Za opis verjetnostne porazdelitve se uporabljata še tretji in četrti moment⁶⁴. Tretji moment je *asimetričnost*:

$$\text{asimetrija} = E[(x - \mu)^3]$$

in četrti centralni moment ali sploščenost:

$$\text{sploščenost} = E[(x - \mu)^4].$$

Momente lahko tudi normaliziramo in dobimo za tretji in četrti moment koeficient asimetričnosti ter sploščenosti:

$$\text{koeficient asimetrije} = \frac{E[(x - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

in

$$\text{koeficient sploščenosti} = \frac{E[(x - \mu)^4]}{\sigma^4} - 3^{65}.$$

Če je *koeficient asimetrije* < 0 , je porazdelitev asimetrična v levo in če je *koeficient asimetrije* > 0 , je porazdelitev asimetrična v desno. V primeru koeficienta sploščenosti pa velja, da je porazdelitev *platikurtična* oziroma bolj sploščena od normalne porazdelitve, če je *koeficient sploščenosti* < 0 in *leptokurtična* oziroma bolj koničasta od normalne porazdelitve, če je *koeficient sploščenosti* > 0 .

Posebni primeri verjetnostnih porazdelitev

Normalna porazdelitev

Osnovna oblika funkcije gostote normalne porazdelitve⁶⁶ s srednjo vrednostjo μ in standardnim odklonom σ je podana z enačbo:

⁶⁴ Obstajajo tudi višji centralni momenti: $\mu_r = E[(x - \mu)^r]$.

⁶⁵ V izrazu odštejemo 3, da dobimo neposredno primerjavo z normalno porazdelitvijo, katere vrednost koeficienta sploščenosti je enaka 3.

⁶⁶ Normalno porazdelitev imenujemo tudi Gaussova krivulja po K. F. Gaussu, ki jo je ponovno odkril v 19. stoletju, ko je proučeval zakonitosti porazdelitve napak pri opazovanju. Gostoto normalne porazdelitve je odkril že leta 1733 A. D. Moivre, kot limito binomske porazdelitve pa je normalno porazdelitev leta 1774 odkril P. S. Laplace (Košmelj, Rován, 1997, str. 68).

$$f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad (127)$$

pri čemer gre $-\infty < x < +\infty$. Formalno porazdelitev x v normalni porazdelitvi s srednjo vrednostjo μ in varianco σ^2 zapišemo $x \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zelo uporabna lastnost normalne porazdelitve je, da se pri linearni transformaciji ohranja, in sicer⁶⁷:

$$\text{če velja } x \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ potem velja tudi } (a + bx) \sim N[a + b\mu, b^2\sigma^2]. \quad (128)$$

Izpeljava srednje vrednosti $(a + bx)$:

$$\begin{aligned} E(a + bx) &= \\ &= a + bE(x) \\ &= a + b\mu. \end{aligned}$$

Izpeljava variance $(a + bx)$:

$$\begin{aligned} Var[a + bx] &= E\left[\{(a + bx) - E(a + bx)\}^2\right] \\ &= E\left[\{a + bx - a - bE(x)\}^2\right] \\ &= E\left[\{b(x - E(x))\}^2\right] \\ &= E\left[b^2 \{x - E(x)\}^2\right] \\ &= b^2 E\left[\{x - E(x)\}^2\right] \\ &= b^2 Var[x]. \end{aligned}$$

Poseben primer normalne porazdelitve je *standardizirana normalna porazdelitev* za tako imenovano standardizirano spremenljivko z , ki izhaja iz linearne transformacije za $a = -\mu/\sigma$ in $b = 1/\sigma$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Srednja vrednost slučajne spremenljivke z se porazdeljuje v normalni porazdelitvi s srednjo vrednostjo 0 in varianco 1 oziroma formalno lahko to zapišemo $z \sim N(0,1)$, kjer je funkcija gostote standardizirane normalne porazdelitve:

⁶⁷ Za izpeljavo glej Dodatek 3.

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (129)$$

Studentova t - porazdelitev

Za opisovanje porazdelitev donosov finančnih naložb je zanimiva tako imenovana Studentova t - porazdelitev, in sicer prav zaradi svoje oblike. Porazdelitev je odkril W. S. Gosset skozi delo, ki ga je opravljal v pivovarni Guinness Breweries. Ker mu delodajalec ni dovolil, da bi svoje odkritje objavil pod svojim lastnim imenom, ga je objavil pod psevdonimom Student. Ena glavnih prednosti t - porazdelitve, ki jo ima pri proučevanju finančnih podatkov, so debelejši repi porazdelitve, kot jih predpostavlja normalna porazdelitev, kar pomeni, da pravilneje opiše porazdelitev donosov finančnih naložb. Studentova t - porazdelitev (Mathworks, 2001, str. 1–37) lahko zapišemo kot:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}^{68}, \quad m = n - 1, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$f(t|m) = \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{m}\right)^{\frac{(m+1)}{2}}}, \quad (130)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\left(\frac{m}{m+t^2}\right)^{\frac{(1+m)}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

kjer je μ populacijska srednja vrednost, $\bar{x}$ srednja vrednost vzorca, velikosti n , s ocena za populacijski standardni odklon (standardni odklon vzorca), m stopinje prostosti, $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija in $B(\cdot)$ beta funkcija. Ko se stopinje prostosti m povečujejo v neskončnost, se t - porazdelitev približuje standardizirani normalni porazdelitvi. Centralni momenti t - porazdelitve (Math World):

⁶⁸ To je obrazec za izračun vrednosti t za preizkušanje domnev o aritmetični sredini, ko vrednost populacijske σ ni znana.

Izraz je lahko osnova tudi za t preizkuse vrednosti drugih parametrov (npr. vrednosti ocen regresijskega koeficienta).

$$E(t) = \mu = 0, \text{ če je } m > 1$$

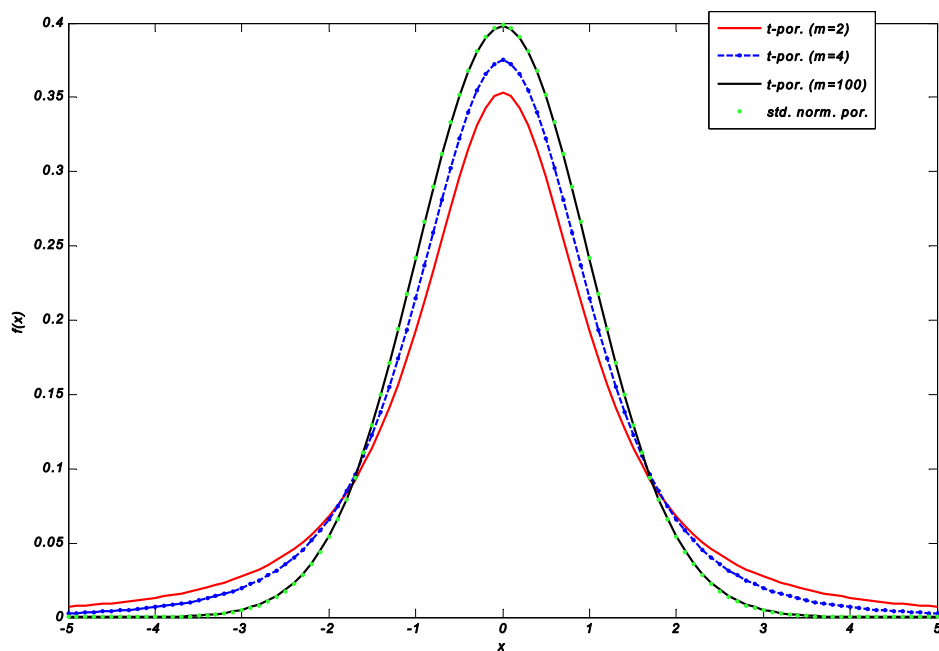
$$Var(t) = \frac{m}{m-2}, \text{ če je } m > 2$$

$$asimetričnost = 0,$$

$$sploščenost = \frac{6}{m-4}, \text{ če je } m > 4.$$

t - porazdelitev je simetrična s srednjo vrednostjo enako 0 in varianco večjo od 1. Varianca je večja kot pri standardizirani normalni porazdelitvi, zato je t - porazdelitev bolj sploščena od standardizirane normalne porazdelitve z debelejšimi repi, pri čemer se debelina repov t - porazdelitve zmanjšuje s povečevanjem stopinj prostosti m , kar je lepo vidno na spodnji sliki. Studentova porazdelitev bo imela repe debelejšje od normalne porazdelitve, dokler bo število stopinj prostosti manjše od števila enot v vzorcu (debelino repov porazdelitve določajo stopinje prostosti).

Slika P-1: Primerjava različnih t -porazdelitev s stopinjami prostosti $m = 2, 4, 100$ s standardizirano normalno porazdelitvijo pri istem številu podatkov



Vir: Lastni izračuni.

Za neko naključno spremenljivko x s srednjo vrednostjo μ in varianco σ^2 pravimo, da se porazdeljujejo v Studentovi t - porazdelitvi (μ, σ^2, m) , če je funkcija gostote verjetnosti naslednja (Lambert, Laurent, 2002, str. 5):

$$f(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{(m-2)\sigma^2}} \frac{1}{\left\{1 + \frac{1}{m-2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}^{\frac{(m+1)}{2}}}, \quad (131)$$

kjer sta srednja vrednost in varianca $\mu, \sigma^2 > 0$ ter stopinje prostosti $m > 2$. Četrty moment t -porazdelitve je odvisen od stopinj prostosti in variance porazdelitve spremenljivke in je določen kot (Bollerslev, 1987, str. 543):

$$E(\varepsilon_t^4 | \Psi_{t-1}) = \frac{3(m-2)}{(m-4)} \sigma^2,$$

kjer je število stopinj prostosti $m > 4$ in Ψ_{t-1} niz informacij, ki so na voljo v času $t-1$.

Bollerslev (1987, str. 543) je t -porazdelitev prvi uporabil kot osnovno porazdelitev GARCH procesov in ugotovil, da ta porazdelitev upošteva časovno odvisnost v podatkih, ki se kaže v gibanju nestanovitnosti, ki ima mirna in vihrava obdobja (skupinjenje nestanovitnosti).

Generalizirana porazdelitev napak

Za opisovanje porazdelitev donosov finančnih naložb je primerna tudi tako imenovana generalizirana porazdelitev napak ali krajše GED (*Generalized Error Distribution*) porazdelitev (Jorion, str. 94). GED je simetrična porazdelitev, ki je lahko koničasta (leptokurtična) in sploščena (platikurtična), njeno obliko pa določajo stopinje prostosti m ($m > 1$). Funkcija gostote GED porazdelitve za spremenljivko x je določena:

$$f(x) = \frac{m}{\lambda 2^{\left(\frac{m+1}{m}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} e^{-\frac{1}{2} \left|\frac{x}{\lambda}\right|^m}, \quad (132)$$

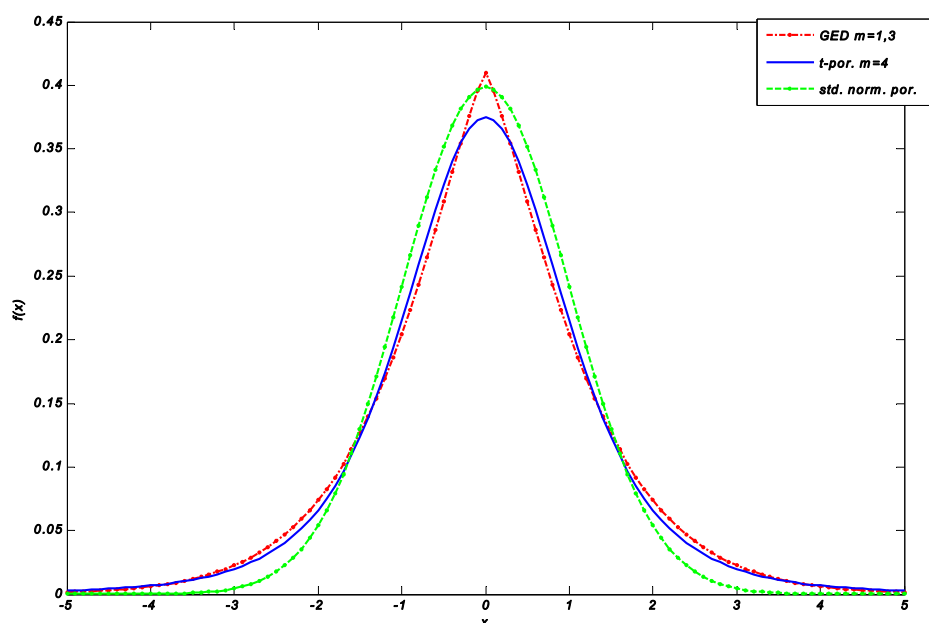
kjer je

$$\lambda = \left[\frac{2^{-\frac{2}{m}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{m}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ in } \Gamma(\cdot) \text{ gama funkcija.}$$

GED porazdelitvena funkcija kot poseben primer določa tudi normalno porazdelitveno funkcijo, ko je število stopinj prostosti $m = 2$. Repi porazdelitve so debelejši kot pri normalni porazdelitvi, ko so stopinje prostosti $m < 2$ in tanjši, ko so stopinje prostosti $m > 2$.

Da se ARCH procesi porazdeljujejo v GED porazdelitvi, je prvi preveril Nelson leta 1991 (Higgins, Bera, 1993, str. 336), vendar je za indeks cen delnic ugotovil, da repi ocenjene GED porazdelitve niso bili dovolj debeli, da bi upoštevali vse osamelce v podatkih. V spodnji sliki je prikazana primerjava GED porazdelitve s stopinjami prostosti $m = 1,3$, t -porazdelitve s stopinjami prostosti $m = 4$ in standardne normalne porazdelitve $x \sim N(0,1)$. Kot se vidi s slike, je GED porazdelitev najbolj koničasta v primerjavi z obema ostalima porazdelitvama, kar kaže, da bi lahko najbolj primerno opisovala zakonitosti v finančnih podatkih.

Slika P-2: Primerjava GED z $m=1,3$, t -porazdelitev z $m=4$ in standardne normalne porazdelitve



Vir: Lastni izračuni.

Gama (Γ) in beta (B) funkcija

Gama funkcija je lahko definirana kot določeni integral na intervalu od 0 do ∞ :

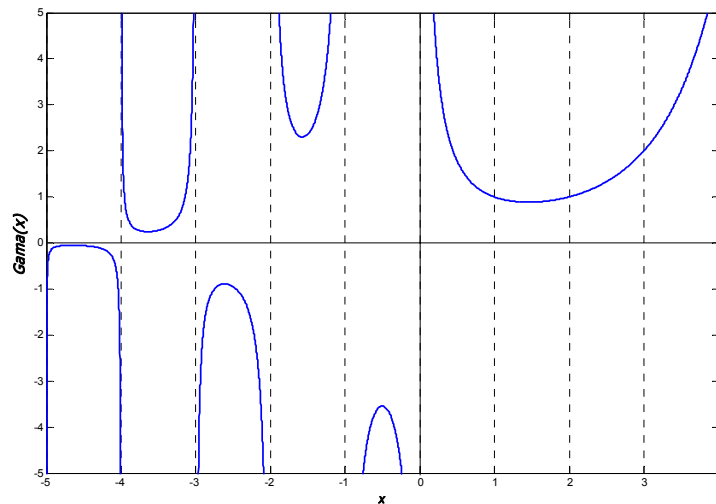
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (133)$$

če je x celo število, dobimo povezavo s fakulteto:

$$\Gamma(x) = (x-1)! . \quad (134)$$

Analitično je določena povsod, razen, kjer je $x = 0, -1, -2, \dots$

Slika P-3: Prikaz gama funkcije



Vir: Lastni izračuni.

Beta funkcija je ime, ki so ga Legendre, Whittaker in Watson (MathWorld) uporabili za beta integral. Funkcija je definirana kot:

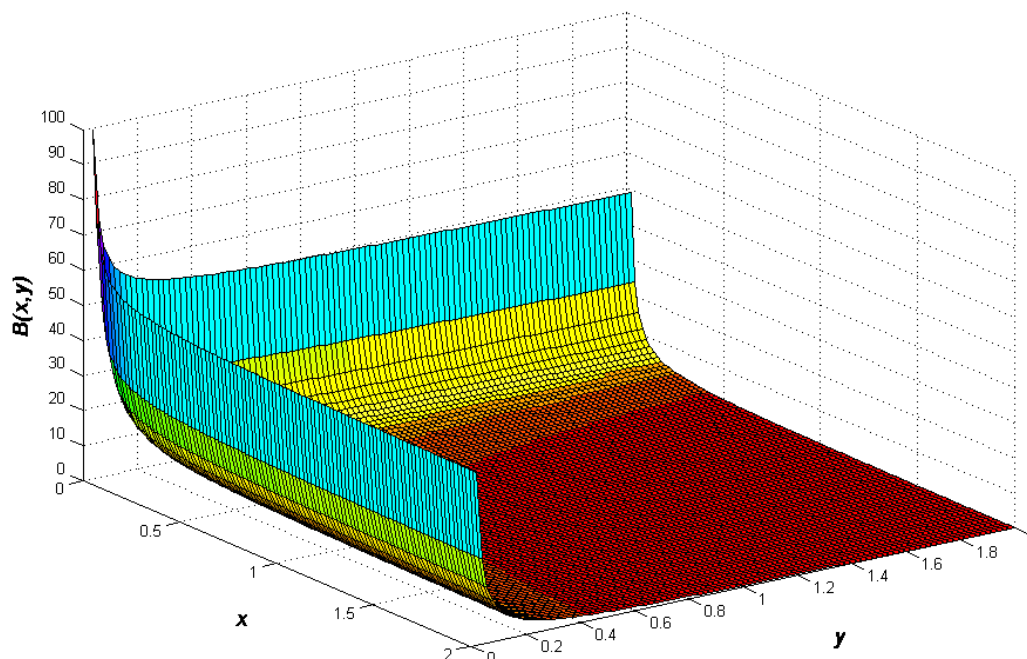
$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}, \quad (135)$$

kjer vidimo povezavo z gama funkcijo in fakulteto. Integralna oblika beta funkcije je določeni integral na intervalu od 0 do 1:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (136)$$

kjer je $0 < t < 1$ in $x, y > 0$.

Slika P-4: Prikaz beta funkcije



Vir: Lastni izračuni.

Pogojna verjetnost in pogojna porazdelitev

Skupna porazdelitev

Zgoraj smo spoznali porazdelitev ene same naključne spremenljivke X , ki bi jo lahko imenovali tudi univariatna porazdelitev. Spoznali smo tudi funkcije gostote verjetnostne porazdelitve in kumulativne porazdelitvene funkcije ene naključne spremenljivke. Pogosto so lahko izidi eksperimentov pogojeni z več spremenljivkami, kar na primer pomeni, da simultano nastane več dogodkov, ki so odvisni od števila naključnih spremenljivk. Verjetnostne porazdelitve, ki so posledica več naključnih spremenljivk, se imenujejo skupne (*joint*) ali multivariatne porazdelitve. Zaradi lažje predstave se bomo osredotočili na skupne porazdelitve dveh naključnih spremenljivk X in Y . Takim porazdelitvam pravimo tudi bivariatne porazdelitve. **Funkcija gostote skupne porazdelitve** za X in Y se zapiše kot $f(x, y)$ in je definirana:

$$\begin{aligned}
 P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \\
 &= \sum_{a \leq x \leq b} \sum_{c \leq y \leq d} f(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{137}$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija verjetnosti je verjetnost skupnega dogodka:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\
 &= \begin{cases} \sum_{X \leq x} \sum_{Y \leq y} f(x, y), & \text{če so spremenljivke diskretne} \\ \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) ds dt, & \text{če so spremenljivke zvezne.} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{138}$$

Za primer (Ramanathan, 1993, str. 80–81) vzemimo, da nas zanimajo verjetnosti dogodkov, ki nastanejo pri metanju dveh kock. X naj bo na primer število rezultatov meta z vrednostjo 3 in Y naj bo število metov z doseženo vrednostjo na kocki 5. Radi bi sestavili skupno gostoto za X in Y . Vseh možnosti pri metu dveh kock je 36, kar pomeni, da ima vsak rezultat verjetnost $1/36$. X in Y lahko zavzameta vrednosti 0, 1 in 2, in sicer ima dogodek vrednost 0, ko dogodek ne nastane na nobeni kocki, vrednost 1, ko dogodek nastane na eni kocki (na primer vrednost 3 pade na eni kocki) in vrednost 2, ko dogodek nastane na obeh kockah hkrati (na primer vrednost 3 pade na obeh kockah hkrati). Na primer skupni dogodek $P(X=1, Y=1)$ nastane, ko je posamezen rezultat na obeh kockah (3,5) ali (5,3), verjetnost takega dogodka je $P(X=1, Y=1) = 2/36$. Verjetnost dogodkov $P(X=1, Y=0)$ in $P(X=0, Y=1)$ je $8/36$. Verjetnost dogodka $P(X=0)$ je na primer sestavljena iz dogodkov $P(X=0, Y=0)$, $P(X=0, Y=1)$ in $P(X=0, Y=2)$ ter znaša $25/36$ in je enaka dogodku $P(Y=0)$. Po enakem postopku bi našli verjetnosti za vse skupne dogodke, ki so zbrane v spodnji tabeli.

Tabela P-1: Ilustrativni primer skupne porazdelitve

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	0	1	2	$f_y(y)$
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
$f_x(x)$	25/36	10/36	1/36	1

Vir: Ramanathan, 1993, str. 81.

V primeru skupnih porazdelitev nas zanimajo tudi porazdelitve, ki se nanašajo na posamezno spremenljivko in jim pravimo **marginalne verjetnostne porazdelitve oziroma gostote**. Primer marginalne verjetnosti je verjetnost dogodka $P(X = 0)$. Če bi po istem postopku izračunali vse verjetnosti za posamezne $X = x$, bi dobili funkcijo gostote spremenljivke X oziroma marginalno funkcijo gostote. V splošnem bi lahko zapisali funkcijo gostote $f_x(x) = P(X = x)$, potem za gornji primer velja:

$$P(X = x) = P(X = x, Y = 0) + P(X = x, Y = 1) + P(X = x, Y = 2),$$

kar pomeni, da je marginalna funkcija gostote spremenljivke X vsota verjetnosti drugih spremenljivk (Y) pri posamezni vrednosti spremenljivke X . V splošnem lahko zapišemo za diskretno in zvezno spremenljivko marginalno funkcijo gostote (Green, 1997, str. 76):

$$f_x(x) = \begin{cases} \sum_y f(x, y), & \text{če so spremenljivke diskretne} \\ \int_y f(x, t) dt, & \text{če so spremenljivke zvezne} \end{cases} \quad (139)$$

in analogno za $f_y(y)$ spremenljivke Y .

Definicija za statistično neodvisnost dveh spremenljivk pravi, da sta spremenljivki neodvisni, če in samo če je njuna skupna verjetnostna gostota enaka produktu marginalnih verjetnostnih gostot posamezne spremenljivke:

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y) \Leftrightarrow x \text{ in } y \text{ sta neodvisna} \quad (140)$$

in enako velja za kumulativno verjetnostno porazdelitev:

$$F(x, y) = F_x(x)F_y(y). \quad (141)$$

V primeru skupnih verjetnostnih porazdelitev so srednje vrednosti in variance (in tudi višji momenti) spremenljivk določeni z marginalnimi porazdelitvami. Srednja vrednost se na primer za spremenljivko X izračuna:

$$E(x) = \begin{cases} \sum_x xf_x(x) = \sum_x \sum_y xf(x, y), & \text{če so spremenljivke diskretne} \\ \int_x xf_x(x) dx = \int_x \int_y xf(x, y) dx dy, & \text{če so spremenljivke zvezne} \end{cases} \quad (142)$$

in varianca se izračuna kot:

$$\begin{aligned} Var(x) &= \sum_x [x - E(x)]^2 f_x(x) \\ &= \sum_x \sum_y [x - E(x)]^2 f(x, y). \end{aligned} \quad (143)$$

Kovarianca in korelacija

Kovarianca spada med skupne momente več spremenljivk in je za primer dveh spremenljivk določena kot:

$$\begin{aligned} Cov(x, y) &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \\ &= E(xy) - \mu_x \mu_y \\ &= \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (144)$$

oziroma

$$Cov(x, y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y), & \text{če so spremenljivke diskretne} \\ \int_x \int_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) dx dy, & \text{če so spremenljivke zvezne} \end{cases}.$$

Tako izračunana kovarianca bo s svojim predznakom kazala smer kovariance med spremenljivkama, medtem ko bo velikost odvisna od velikosti mere. Boljša mera, ki ni odvisna od vpliva merske lestvice, vendar hkrati ohrani predznak kovariance, je **korelacijski koeficient**:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (145)$$

Vrednost korelacijskega koeficienta je vedno med -1 in 1 in je zato neodvisen od merske lestvice.

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni, velja $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$ in lahko za primer diskretnih spremenljivk (enako velja za zvezne spremenljivke) zapišemo:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x, y) \\
 &= \sum_x (x - \mu_x) f_x(x) \sum_y (y - \mu_y) f_y(y), \\
 &= E(x - \mu_x) E(y - \mu_y) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{146}$$

kar pomeni, da je kovarianca neodvisnih spremenljivk enaka nič. Spremenljivke, ki so nekorelirane, niso nujno tudi neodvisne. Pomembna izjema je skupna normalna porazdelitev, pri kateri nekoreliranost spremenljivk pomeni tudi njihovo neodvisnost (Green, 1997, str. 77).

Pogojna srednja vrednost in pogojna varianca

Velikokrat nas lahko zanima verjetnost določenega dogodka, medtem ko imamo znane izide drugega dogodka, torej nas zanima verjetnost nastanka nekega dogodka ob pogoju, da je nastal tudi drugi dogodek. To si lahko najlažje ogledamo na primeru, kjer bomo vzeli primer metanja dveh kock. V tabeli (**Tabela P-1**) imamo izračunane verjetnosti za simultane dogodke, ki nam bodo v pomoč pri ponazoritvi primera. Zanima nas verjetnost, da ne bomo nikoli vrgli števila 5 ($Y = 0$), ob pogoju, da vedno vržemo število 3 ($X = 1$), kar formalno zapišemo in izračunamo:

$$P(Y = 0 | X = 1) = \frac{P(Y = 0, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{8/36}{10/36} = 0,8.$$

Kot vidimo iz primera, je verjetnost nastanka določenega dogodka ob pogoju nastanka drugega dogodka večja v primerjavi z verjetnostjo nastanka samega dogodka brez pogoja (verjetnost ob pogoju je 0,8 in verjetnost brez pogoja je $25/36$). To je posledica dejstva, da izbiramo iz podmnožice dogodkov, kjer je pogojni dogodek gotovi dogodek. V konkretnem primeru to pomeni, da smo izbirali iz podmnožice, kjer je bil met števil 3 gotov dogodek (dan dogodek) in je bila verjetnost takega dogodka $10/36$, verjetnost, da ne bomo vrgli števila 5 in bomo hkrati vrgli število 3 pa je $8/36$. To pomeni, da je bilo dogodkov, ki so nas zanimali v podmnožici $8/36$, kjer je bilo vseh dogodkov $10/36$. Iz tega sledi, da je verjetnost nastanka dogodka, da ne bomo nikoli vrgli števila 5, ob pogoju, da bomo vedno vrgli število 3, enaka 0,8.

Pogojna verjetnost v ekonometriji igra ključno vlogo pri ekonometričnem modeliranju. Za predstavitev lastnosti pogojne verjetnosti bomo uporabljali bivariatno porazdelitev, vendar veljajo te lastnosti tudi za multivariatne primere. Pogojna verjetnostna porazdelitev spremenljivke y (x) za vse dane vrednosti spremenljivke x (y) se lahko zapiše (Green, 1997, str. 79):

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}, \quad f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}, \quad (147)$$

ki pomeni, da se pogojna verjetnost izračuna kot kvocient skupne verjetnosti dveh spremenljivk in marginalne verjetnosti spremenljivke, ki predstavlja pogoj. Če sta x in y neodvisni spremenljivki, z uporabo zveze iz enačbe (140) dobimo naslednjo zvezo:

$$f(y|x) = f_y(y) \text{ in } f(x|y) = f_x(x), \quad (148)$$

kar pomeni da bodo, če so spremenljivke neodvisne, verjetnosti dogodkov, odvisnih od ene spremenljivke, nepovezane z drugo spremenljivko.

Pogojna srednja vrednost je srednja vrednost pogojne porazdelitve in je določena z:

$$E(y|x) = \begin{cases} \sum_y y f(y|x), & \text{če je } y \text{ diskreten,} \\ \int y f(y|x) dy, & \text{če je } y \text{ zvezen.} \end{cases} \quad (149)$$

Funkcija pogojne srednje vrednosti $E(y|x)$ se imenuje **regresija** y na x .

Tudi **pogojna varianca** je varianca pogojne porazdelitve, ki je določena kot:

$$\begin{aligned} Var(y|x) &= E[(y - E(y|x))^2 | x] \\ &= \begin{cases} \sum_y [y - E(y|x)]^2 f(y|x), & \text{če je } y \text{ diskreten,} \\ \int [y - E(y|x)]^2 f(y|x) dy, & \text{če je } y \text{ zvezen.} \end{cases} \end{aligned} \quad (150)$$

Pri računanju se uporabi poenostavljena enačba:

$$Var(y|x) = E(y^2|x) - [E(y|x)]^2.$$

Pogojna varianca se imenuje **skedastična funkcija** in je tako kot regresija v splošnem funkcija x . Za pogojno varianco je značilno, da ne variira z x , kar je značilno za funkcijo pogojne srednje vrednosti. To navadno ne pomeni, da je $Var(y|x)$ enaka $Var(y)$, pomeni le, da je pogojna varianca konstantna (Green, 1997, str. 81). Primer, ko se pogojna varianca ne spreminja s spremenljivko x , se imenuje homoskedastičnost (enaka varianca).

Zanimiv rezultat momentov pogojne porazdelitve je tudi **zakon ponavljajočih pričakovanj**, ki pravi, da je nepogojno matematično upanje pričakovana vrednost pogojnega matematičnega upanja (Ramanathan, 1993, str. 88):

$$E[y] = E_x[E(y|x)]. \quad (151)$$

Bivariatna normalna porazdelitev

Do sedaj smo teoretično govorili o lastnostih skupnih (multivariatnih) verjetnostnih porazdelitvah. Multivariatne porazdelitve so pomembne v primerih, ko proučujemo porazdelitve dobičkov in izgub portfeljev, ki vsebujejo več različnih vrednostnih papirjev, od katerih ima vsak vrednostni papir svojo porazdelitev dobičkov in izgub. Na dobiček portfelja tako simultano vplivajo vsi vrednostni papirji, ki so v njem zajeti. Če imamo v portfelju najmanj dva vrednostna papirja, ki imata vsak svojo porazdelitev dobičkov in izgub, potem dobimo skupno (bivariatno) porazdelitev dobičkov in izgub teh dveh vrednostnih papirjev.

V tem razdelku se bomo posvetili porazdelitvi, ki vsebuje mnogo opisanih lastnosti skupnih porazdelitev. Normalna porazdelitev je tudi v večrazsežnih prostorih posebna porazdelitev in njena predstavica v trirazsežnem prostoru je bivariatna normalna porazdelitev. To porazdelitev si še lahko predstavljamo tudi grafično in je zaradi tega zelo primerna za ponazoritev.

Bivariatna normalna porazdelitev je skupna porazdelitev dveh normalno porazdeljenih spremenljivk x in y . Gostoto porazdelitve bivariatne normalne porazdelitve lahko zapišemo (Green, 1997, str. 85):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - 2\rho\varepsilon_x\varepsilon_y}{(1-\rho^2)} \right]},$$

kjer je

$$\varepsilon_x = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}, \quad (152)$$

$$\varepsilon_y = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}.$$

Parametra μ_x in μ_y sta aritmetični sredini ter σ_x in σ_y standardna odklona spremenljivk x in y . Parameter ρ predstavlja korelacijski koeficient med spremenljivkama x in y ter je določen kot v enačbi (145). Porazdelitev je določena v vseh primerih razen, ko je korelacijski koeficient enak 1 ali -1,

kar pomeni, da spremenljivki ne smeta biti linearno povezani. Bivariatno normalno porazdelitev x in y lahko formalno zapišemo:

$$(x, y) \sim N_2(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho).$$

Marginalni porazdelitvi sta normalni:

$$f_x(x) \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \text{ in } f_y(y) \sim N(\mu_y, \sigma_y^2), \quad (153)$$

prav tako pa sta normalni tudi pogojni porazdelitvi:

$$f(x | y) = N[\alpha + \beta y, \sigma_y^2(1 - \rho^2)] \quad (154)$$

$$\alpha = \mu_y - \rho \mu_x$$

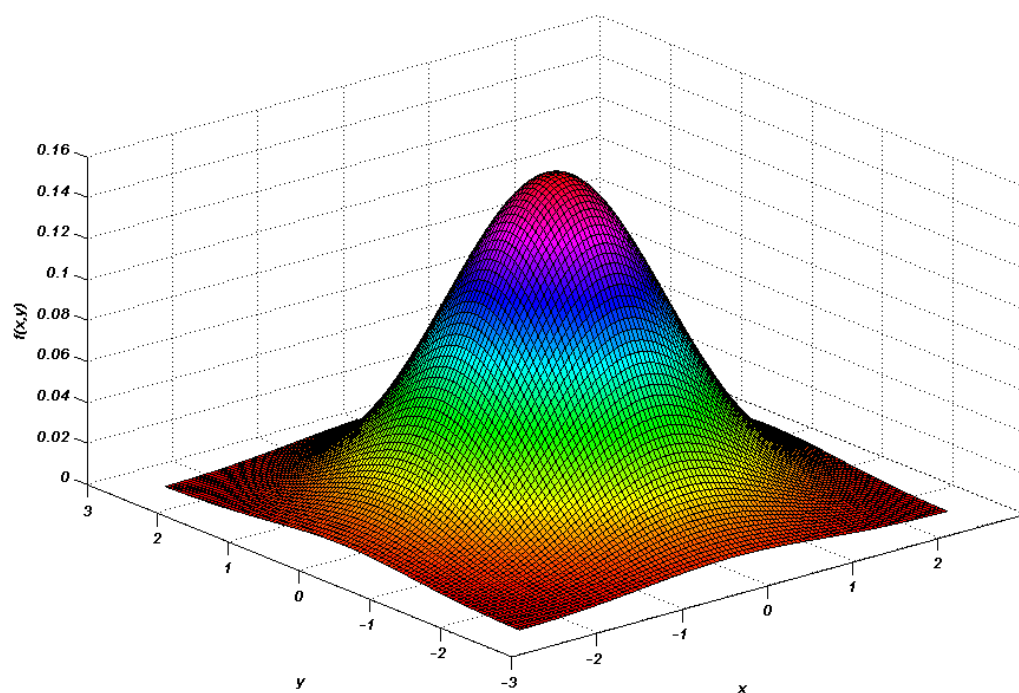
$$\beta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

in enako velja tudi za $f(y | x)$.

Spremenljivki x in y sta neodvisni samo, če je $\rho = 0$. Iz te relacije in enačbe (140) sledi, da je gostota porazdelitve produkt dveh marginalnih normalnih porazdelitev, če je $\rho = 0$.

V spodnji sliki je prikazana bivariatna normalna porazdelitev spremenljivk x in y $(x, y) \sim N_2(0, 0, 1, 1, 0)$.

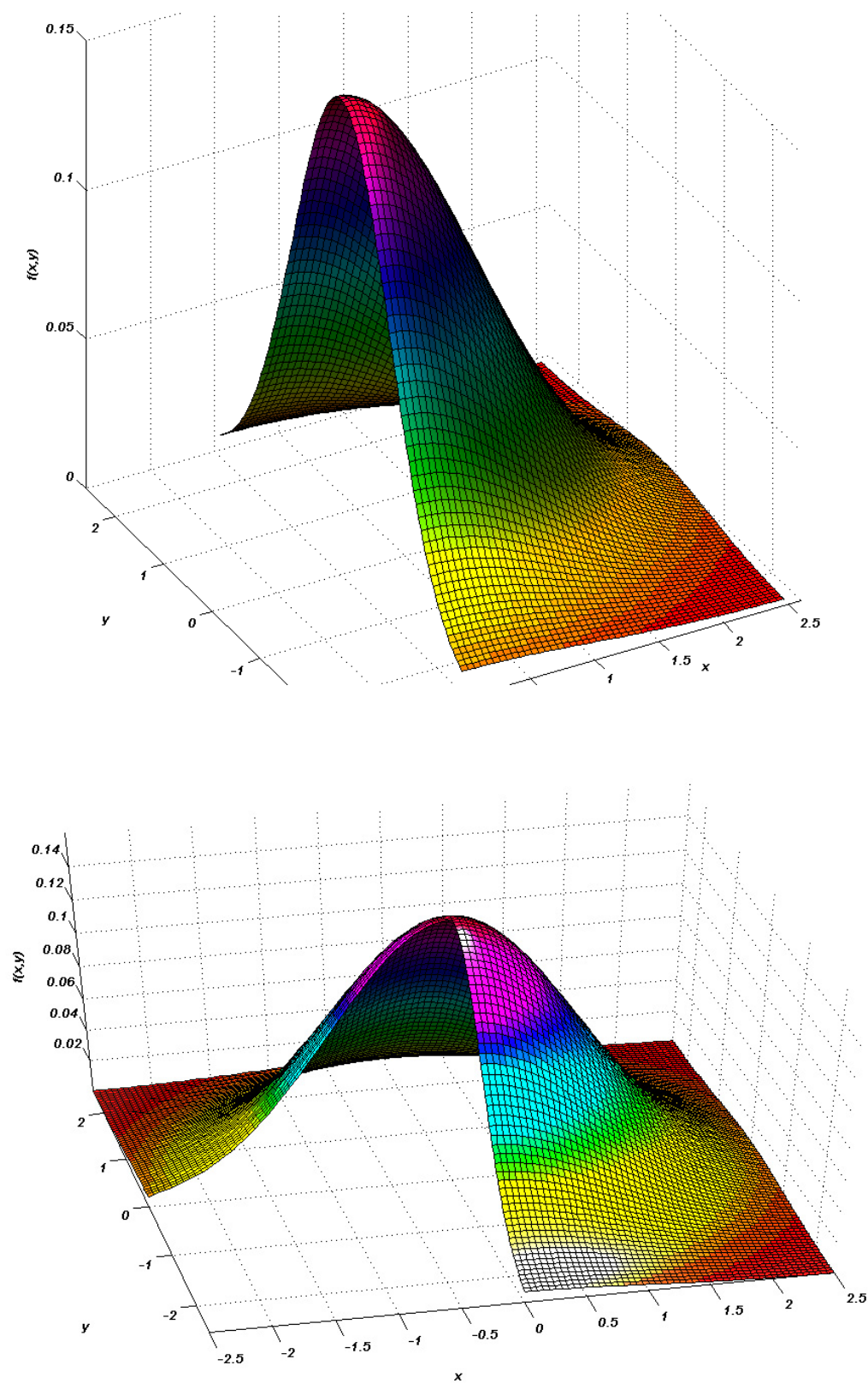
Slika P-5: Primer bivariatne normalne porazdelitve



Vir: Lastni izračuni.

Na spodnji sliki prikazujemo polovični in četrtinski prerez bivariatne normalne porazdelitve, kjer se v prerezu lepo vidi krivulja univariatne normalne porazdelitve.

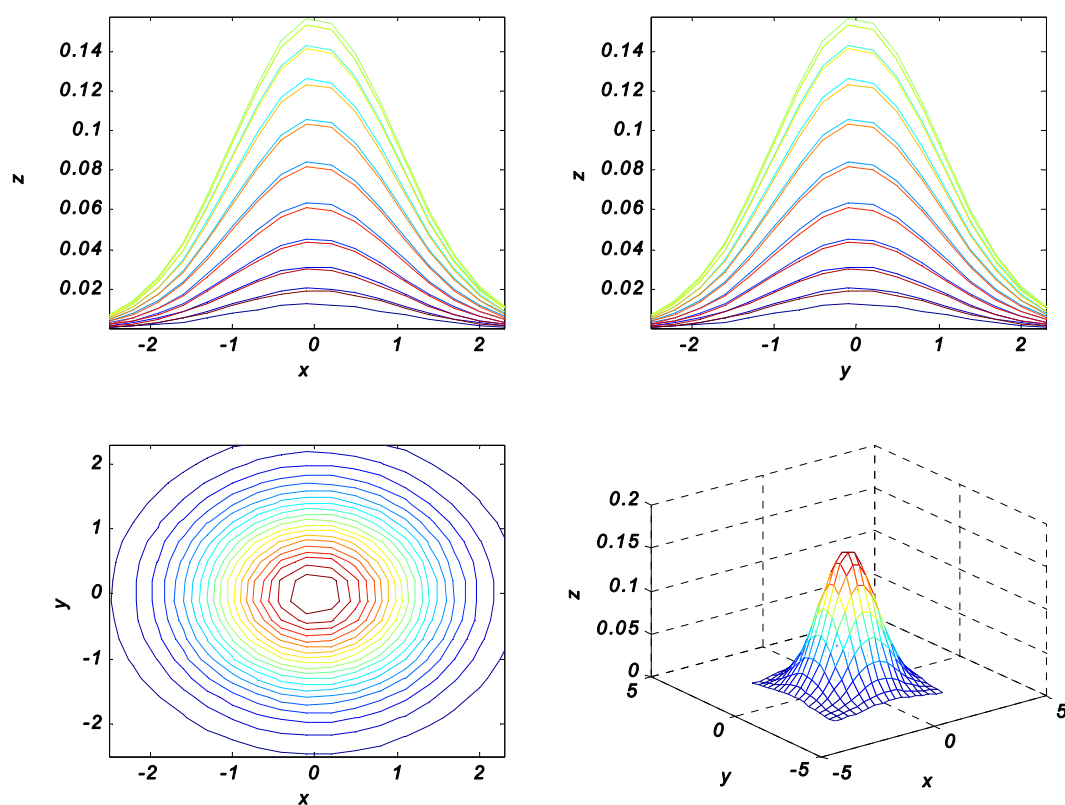
Slika P-6: Polovični in četrtinski prerez bivariatne normalne porazdelitve



Vir: Lastni izračuni.

Na spodnji sliki so lepo vidni prerezi funkcije bivariate normalne porazdelitve po posameznih ravninah. Na prvi manjši sliki je prikazan prerez na ravnini x , na drugi prerez na ravnini y in na tretji prerez na ravnini z . Prerezi na x in y nam prikazujejo univariatno funkcijo porazdelitve, kar je že nakazano v prejšnji sliki, medtem ko nam prerez na ravnini z s koncentričnimi krogi prikazuje eliptično obliko bivariate normalne porazdelitvene funkcije.

Slika P-7: Posamezni prerezi bivariate normalne porazdelitve



Vir: Lastni izračuni.

Priloga 5: Slovarček tujih izrazov

ARCH = Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

Autoregressive conditional heteroskedasticity = s heteroskedastičnostjo pogojena avtoregresija

Co-integration = so-integriranost

Co-persistence = so-vztrajnost

Drift = pričakovani odklon

FED = Federal Reserve System

GARCH = splošen ARCH

Idiosyncratic = značilen

Independent and identical distributed = neodvisno in enakomerno porazdeljen

Integrated process = integriran proces

Invertible process = obrnljiv proces

Joint = skupen

Lag = odlog

Lag operator = odložitveni operator

Leverage effect = učinek vzvoda

Likelihood equation = verjetnostna enačba

Long memory = dolg spomin

Maximum likelihood estimation = metoda največjega verjetja

Mean = srednja vrednost

Mean reversion in volatility = vračanje k srednji vrednosti nestanovitnosti

News impact response curve = informacijsko vplivna odzivna krivulja

Permanent = trajen, traja v neskončnost

Persistence = vztrajnost

Random walk = naključni korak

Stationarity = stacionarnost

Stochastic volatility model = stohastičen model nestanovitnosti

Thick tails = debeli repi, debeli kraki

Threshold = prag

Transient = začasen, prehoden

Unit circle = krog enote, enotni krog

Unit root = enotna rešitev

VaR = value at risk = tvegana vrednost

Volatility = nestanovitnost, volatilnost

Volatility clustering = skupinjenje nestanovitnosti

Weird = neobičajan

White noise = beli šum

Worst case scenario = najslabši možni stresni scenarij