UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

PROCES DOLOČITVE ZAVAROVALNO-TEHNIČNIH REZERVACIJ ZA ZDRAVSTVENO ZAVAROVALNICO V SKLADU S SOLVENTNOSTJO II

Ljubljana, junij 2016 KLEMEN VIDIC

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani Klemen Vidic, študent Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtor predloženega dela z naslovom Proces določitve zavarovalno-tehničnih rezervacij za zdravstveno zavarovalnico v skladu s Solventnostjo II, pripravljenega v sodelovanju s svetovalko izr. prof. dr. Liljano Ferbar Tratar

IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravil samostojno;

2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;

3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbel, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;

4. da se zavedam, da je plagiatorstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;

5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;

6. da sem pridobil vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označil;

7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnal v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil soglasje etične komisije;

8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;

10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

V Ljubljani, dne _____________ Podpis študenta:__________________

KAZALO

KAZALO TABEL

KAZALO SLIK

UVOD

Zavarovalništvo je eden izmed stebrov, ki omogoča finančno varnost potrošnikov, podjetij in drugih deležnikov. Finančna vzdržnost zavarovalnic je pomembna, saj zagotavlja, da imajo zavarovalnice na voljo primerna sredstva, ki jim omogočajo izpolnitev njihovih zavez zavarovancem, saj lahko le-tako zagotavljajo finančno varnost zavarovancem. Zavarovalnice zagotavljajo svojo finančno vzdržnost z:

- oblikovanjem primernih zavarovalno-tehničnih rezervacij (v nadaljevanju rezervacij),
- z zagotavljanjem ustreznega kapitala (t.i. solventnostni kapital) in
- z ustrezno likvidnostjo sredstev.

V primerjavi z drugimi gospodarskimi panogami ima zavarovalništvo določene posebnosti, zaradi česar je pomemben in potreben dodaten nadzor:

- zavarovalne pogodbe so lahko dolgoročne;
- potrošniki so slabše informirani od ponudnikov finančnih storitev;
- izpolnjevanje obveznosti iz zavarovalne pogodbe ima lahko velik vpliv na finančno blagostanje potrošnikov;
- neizpolnjevanje obveznosti bi lahko porušilo zaupanje v finančni sistem in imelo sistemske posledice in bi lahko povzročilo finančno krizo;
- izpolnjevanje obveznosti krepi občutek finančne varnosti potrošnika, kar pozitivno vpliva na celotno gospodarstvo.

S starostjo običajno naraščajo potrebe po finančni varnosti. Življenjski cikel potrošnika je običajno tak, da lahko najlažje skrbi za svoje zdravje v svoji »aktivni« dobi, ki je običajno med 18. in 65. letom. S starostjo se zdravstveno stanje slabša, prav tako pa se v upokojitvi znižajo prihodki. Na prostem trgu potrošnik z naraščajočo starostjo vse težje sklene zavarovanje, saj je to vse dražje in dražje. Novo zavarovanje običajno ne vključuje zatečenega stanja. Če je potrošnik vmes zbolel za kronično boleznijo, denimo, da je dobil visok pritisk in potrebuje redna zdravila in nima zavarovanja, mu novo zavarovanje teh zdravil ne bo krilo in lahko bi se znašel v situaciji, ko ne bi zmogel kriti stroškov potrebnih zdravil in/ali ne bi mogel imeti primernega zdravstvenega zavarovanja.

Ker z naraščajočo starostjo potrošnik težko zamenja zavarovalnico (na prostem trgu), je izpolnjevanje zavez zavarovalnice pomembno in zato je potreben ustrezen nadzor. Po drugi strani pa je delujoče zdravstveno zavarovanje v javnem interesu. Enako velja za pokojninsko zavarovanje in dolgotrajno oskrbo. Države zato skrbijo za socialna zavarovanja in s tem ščitijo javni interes. Izpolnjevanje pogodbenih zavez je zato pomembno tako s stališča posameznika kot tudi države.

ActEd (2013b, str. 44) definira rezervacije (ang. *technical reserves* ali *provisions*) kot obveznosti, ki izhajajo iz sklenjenih zavarovanj. Rezervacije morajo zadoščati za kritje pričakovanih prihodnjih zavarovalnin in stroškov, zmanjšanih za pričakovane prihodnje premije. Rezervacije so običajno, predvsem pa pri dolgoročnih zavarovanjih, dokaj velika postavka, ki imajo pomemben vpliv na rezultat. Poslovodstvo bi lahko z zniževanjem rezervacij blažilo izgubo v slabših letih (ob tveganju manjše sposobnosti plačevanja pogodbenih obveznosti), z zviševanjem rezervacij pa znižalo davčno osnovo v dobrih letih. V interesu delničarjev in davčne avtoritete je, da izkazi zavarovalnic odražajo pravi in pošten pogled.

V preteklosti sta bila pri oblikovanju rezervacij pomembna dva principa, previdnost in konsistentnost. Aktuarji so oblikovali rezervacije konservativno, z namenom, da bi bile rezervacije dovolj velike, da bi omogočale izpolnitev sklenjenih zavarovalnih pogodb. Stopnja previdnosti je bila subjektivna, zaradi previdno oblikovanih rezervacij pa so poslovni izkazi podcenili dobiček. Težili so k temu, da so se rezervacije oblikovale vedno na enak način, čeprav so se okoliščine poslovanja spremenile. Način izračunavanja rezervacij je bil predpisan s podzakonskim aktom. Agencija za zavarovalni nadzor (v nadaljevanju AZN) je s Sklepom o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij (Uradni list RS, št. 94/14) natančno predpisala način izračunavanja rezervacij. Pri življenjskih zavarovanjih so se oblikovale tudi matematične rezervacije.

Nova uredba prinaša povsem nov koncept izračuna rezervacij. Spreminja se način, osnova, predpostavke in metode izračuna. Principi so navedeni v delegirani uredbi, podrobnosti, ki so potrebne za izračun, pa so razvidne iz tehničnih specifikacij (EIOPA, 2014), dodatkov (EIOPA, 2015) in smiselne uporabe gradiva ActEd, predvsem gradiva *Subject ST7 Combined Material Pack* (ActEd, 2013).

V okviru Solventnosti II rezervacije ne vključujejo potrebnega kapitala za druga tveganja, kot je tveganje prevzema rizikov (ang. *underwriting risk*). Kapital za preostala tveganja se izračunava in prikazuje ločeno. Če bi potreben kapital za posamezno tveganje prišteli k rezervacijam, potem bi ga šteli dvakrat, enkrat pri dotičnem tveganju, enkrat pa pri rezervacijah. Zato se pri oblikovanju rezervacij ne upošteva dodatna previdnost.

V preteklosti so aktuarji zaradi načela previdnosti oblikovali malo večje rezervacije. Koliko večjo, je bila stvar subjektivne presoje in podzakonskih aktov. Sedaj aktuarji oblikujejo rezervacije z uporabo principa najboljše ocene, ki je podrobneje razložen v poglavju 1.1. Manjše rezervacije ne pomenijo nujno manjše varnosti, saj morajo zavarovalnice imeti poleg rezervacij tudi lastni kapital, ki zagotavlja dodatno varnost.

Rezervacije se običajno delijo na rezervacije za obveznosti:

- zaradi preteklih dogodkov, ki so zavarovalnici znane (v nadaljevanju popis),
- zaradi preteklih dogodkov, ki zavarovalnici še niso znane (v nadaljevanju IBNR),
- zaradi prihodnjih dogodkov, ki jih krijejo obstoječe zavarovalne pogodbe.

Rezervacije za obveznosti iz preteklih dogodkov se imenujejo tudi škodna rezerva, rezervacije zaradi prihodnjih dogodkov pa premijska rezerva. Bolj podrobno so rezervacije razdeljene v poglavju 1.3.

Namen magistrskega dela je izbrati optimalen način izračuna zavarovalno-tehničnih rezervacij za dopolnilno zdravstveno zavarovanje (v nadaljevanju dopolnilno zavarovanje). V delu primerjam različne metode, ocenjujem njihove napake, predlagam optimalno izbiro in popisujem celotni proces.

V magistrskem delu bom potrdil hipotezo, da je koledarski mesec pomemben pri izračunu IBNR, ostali dejavniki pa manj. Uporabljeni metodi, ki upoštevata mesečni indeks, se izkažeta za bolj natančni od standardne projekcije.

Prav tako bom potrdil hipotezo, da je prenosna premija podobna premijski rezervi. Obe imata podoben sezonski efekt, ki je posledica dejstva, da nekateri zavarovanci plačujejo letno premijo.

Ovrgel bom hipotezo, da lahko razliko med premijsko rezervo in prenosno premijo pojasnimo z efektom koledarskega meseca. Glavna razlika med premijsko rezervo in prenosno premijo je v spremembi škodnega izkustva.

Pri izračunu premijske rezerve je ključen izračun rizične premije (ang. *risk premium*), ki jo ActEd (2013b, str. 5) definira kot premijo, potrebno za pokritje pričakovanih stroškov zavarovalnin za dotičen riziko. Izračun rizične premije sem razdelil na izračun pričakovanega števila storitev in izračun povprečne zavarovalnine na storitev. ActEd (2013b, str. 35) meni, da takšna delitev omogoča boljši vpogled v škodno dogajanje in olajša identifikacijo trendov.

Za izračun rizične premije uporabljam splošne linearne modele (v nadaljevanju GLM), ki so podrobneje opisani v poglavju 2.1. Primerjam modele z različnimi porazdelitvami ter vhodnimi parametri in predlagam najboljši model. Z najboljšim modelom izračunam rizično premijo in jo uporabim za izračun premijske rezerve. Za izračun premijske rezerve uporabljam komercialen model Mo.net podjetja OAC.

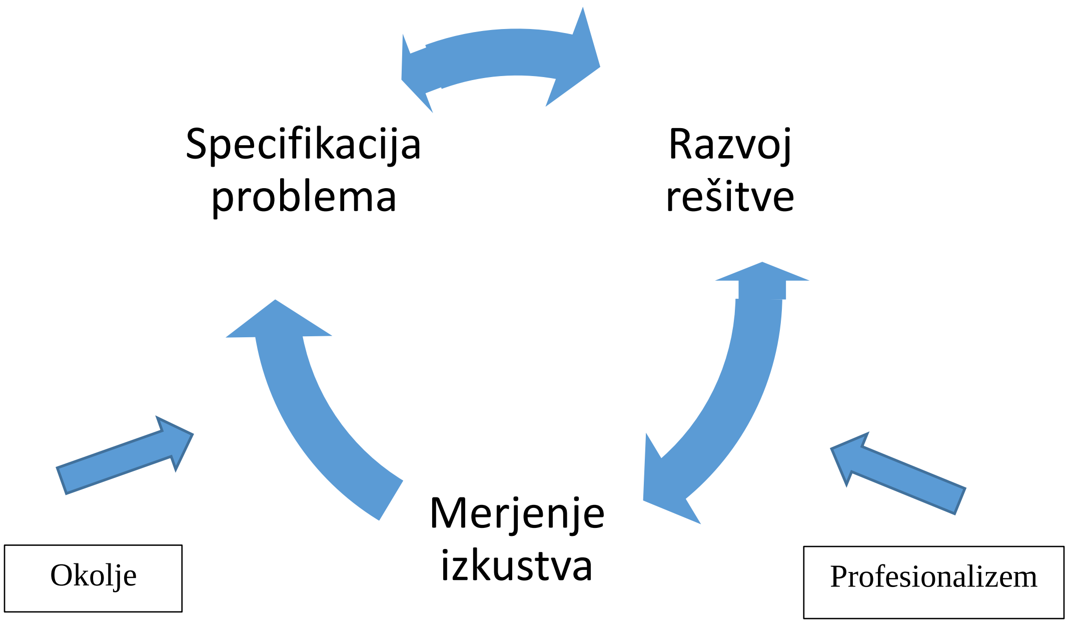
V magistrskem delu uporabljam aktuarski kontrolni cikel (ang. *Actuarial Control Cycle,* v nadaljevanju ACC), ki ga ActEd (2011, str. 9) priporoča kot primerno orodje za reševanje problemov in metodo »Design thinking«, ki jo poučujejo na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani in na Univerzi Stanford. Metoda »Design Thinking« je metoda, ki se uporablja za pripravo poslovnih procesov na Vzajemni zdravstveni zavarovalnici.

Tako »Design Thinking« kot ACC temeljita na ciklični naravi, kjer rešitve sproti testirajo in po potrebi popravijo. Rezultat merjenja rešitve je pogosto tudi sprememba definicije problema, ki vodi v nov razvoj rešitve. Na primer, pred pregledom podatkov je težko uganiti, katera metoda je najbolj primerna za izračun škodne rezervacije. Z izdelavo nekaj hitrih prototipnih rešitev lahko na primer:

- dobimo grobo oceno napake in občutek, kakšen bi lahko bil optimalen model,
- ugotovimo, da bi bila kakšna druga metoda bolj primerna,
- ugotovimo, da problem leži drugje in spremenimo definicijo problema.

Tako sem pri izračunu IBNR ugotovil, da je zares pomemben samo prvi mesec po opravljeni storitvi, izračun za ostale mesece pa je trivialen. To spoznanje močno poenostavi metodo GLM za izračun IBNR.

Slika 1: Aktuarski kontrolni cikel



Vir: ActEd, 2011, str. 9.

V prvem poglavju so definirani osnovni pojmi, kot so najboljša ocena, dodatek za tveganje, meja pogodb itd. Vsak pojem obravnavam najprej splošno, nato pa v kontekstu dopolnilnega zavarovanja.

V drugem poglavju sem definiral GLM in jih primerjal z navadnimi linearnimi modeli. Primerjal sem različne porazdelitve. Porazdelitev gama se je izkazala kot najbolj primerna za modeliranje škodne frekvence, log-normalna porazdelitev pa za modeliranje povprečne zavarovalnine. Navedena so orodja za oceno primernosti modela in primerjavo različnih modelov.

V tretjem poglavju je izračunana škodna rezerva. Razvoj škodnega procesa je specifičen, saj je po prvem mesecu rešenih 1/3 škodnih zahtevkov. Zato sem za analizo razvoja škodnega procesa uporabil alternativne metode, kot so Bornhuetter-Fergusson in metoda GLM. Za vsako metodo sem ocenil napako metode. Predlagal sem optimalno metodo in naredil izračun IBNR.

V četrtem poglavju sem izračunal premijsko rezervo. Osnova za izračun premijske rezerve je določitev rizične premije. Poudarek sem dal izbiri predpostavk in pregledu podatkov. Ker sem opazil, da nekaj dogodkov bolj vpliva na rezultat kot ostali, sem te dogodke dodatno analiziral. Opazil sem, da gre za zavarovance, mlajše od 19 let in starejše od 95 let. Da bi povečal zanesljivost modela, sem te zavarovance ustrezno nadomestil in ponovil izračun. Izračunano rizično premijo in izplačane zavarovalnine sem primerjal z dejanskimi podatki. Rizično premijo sem vnesel v komercialni deterministični model Mo.net, ki ga uporablja Vzajemna zdravstvena zavarovalnica in naredil test občutljivosti. Dobljen rezultat sem primerjal s prenosno premijo.

V Sklepu so podani rezultati in ugotovitve. Predlagane so nadaljnje analize, kot je GLM-analiza za vsak tip zdravstvene storitve posebej. Predlagane so druge možnosti uporabe modela, kot na primer ocena projekcije gotovinskih tokov za potrebe 2. stebra Solventnosti II (t.i. ORSA).

1 ZAVAROVALNO-TEHNIČNE REZERVACIJE

1.1 Dopolnilno zdravstveno zavarovanje

Zakon o zdravstvenem varstvu in zdravstvenem zavarovanju (Ur. l. RS, št. 72/2006, v nadaljevanju ZZVZZ-UPB3) definira dopolnilno zdravstveno zavarovanje kot zavarovanje, ki ob uresničevanju pravic do zdravstvenih storitev po postopkih in pogojih, kot so predpisani v obveznem zdravstvenem zavarovanju, krije razliko med vrednostjo zdravstvenih storitev v skladu s 23. členom tega zakona in deležem te vrednosti, ki ga v skladu z istim členom krije obvezno zdravstveno zavarovanje, oziroma del te razlike, ko se doplačilo nanaša na pravico do zdravil iz seznama medsebojno zamenljivih zdravil in medicinsko-tehničnih pripomočkov.

Zakon ZZVZZ-UPB3 umešča dopolnilno zavarovanje med zdravstvena zavarovanja, kar je vsebinsko popolnoma razumljivo. Strogo tehnično gledano pa gre za zavarovanje finančnih izgub. Zavarovanje krije plačilo razlike med stroški zdravljenja, ki jih krije javni zavod, in dejanskimi stroški. Zavarovancu ni treba plačati razlike, vložiti zavarovalnega zahtevka in čakati na zavarovalnino, saj izvajalci pošljejo račun neposredno zavarovalnicam.

1.2 Poštena vrednost in najboljša ocena

Direktiva 2009/138 navaja, da morajo biti rezervacije za obveznosti oblikovane po pošteni vrednosti, pri čemer se ne upošteva kreditno tveganje zavarovalnice. ActEd (2011, str. 48) definira pošteno vrednost kot vrednost, ki bi jo plačal dobro obveščeni kupec, oddaljen za dolžino ene roke, kar pomeni, da je poštena vrednost tista, ki jo lahko na trgu takoj realiziramo.

Ker se z zavarovalnimi pogodbami na trgu običajno ne trguje, je v praksi težko določiti pošteno vrednost. Zato direktiva 2009/138 predpisuje, da se poštena vrednost določi kot najboljša ocena plus dodatek za tveganje. Dodatek za tveganje predstavlja dodatek, ki bi ga zahtevala druga zavarovalnica, da bi sprejela terjatev v portfelj. Primer, če ima zavarovalnica obveznost, da krije zavarovanje odgovornosti lastnika vozila in ocenjuje, da je verjetnost zavarovalnega primera 2,5 %, povprečna odškodnina pa 2000 EUR, potem je najboljša ocena obveznosti 50 EUR. Ker pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti lahko nastane večja škoda od načrtovane, mora imeti zavarovalnica rezerviran določen kapital, s katerim bi pokrila nepredvidene izgube. Rezervirani kapital predstavlja oportunitetni strošek, zaradi katerega nobena zavarovalnica ne bi odkupila omenjene terjatve za 50 EUR, temveč bi zahtevala neki dodatni pribitek, ki mu direktiva 2009/138 reče »risk margin«, Zakon o zavarovalništvu (Uradni list RS, št. 93/2015, v nadaljevanju ZZavar-1) pa »dodatek za tveganje«.

Direktiva 2009/138 v 76. členu navaja, da »mora vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij ustrezati trenutnemu znesku, ki bi ga zavarovalnica morala plačati, če bi prenesla obveznosti na drugo zavarovalnico«. Vrednost rezervacij je sestavljena iz najboljše ocene in dodatka za tveganje.

Najboljša ocena je ocena v danem trenutku. Upošteva vse informacije, ki so na voljo do tega trenutka. Na primer, če je bil zavarovalni produkt oblikovan na podlagi tablic smrtnosti AM92Select, pri izračunu najboljše ocene uporabimo najnovejše tablice, kot je serija »08«, ki vključuje podatke iz let 2007 do 2010.

Ni samo po sebi umevno, kaj je najboljša ocena. Vzemimo za primer projekcijo gotovinskih tokov za zavarovalni portfelj. Najboljša ocena je lahko:

- najbolj verjetna ocena (ang. *the mode*),
- tehtano ali uteženo povprečje (povprečna vrednost porazdelitve),
- mediana porazdelitve,
- interval vrednosti, ki so možne (ActEd 2013, str. 6),
- interval vrednosti, ki so razumne/verjetne/plavzibilne (ActEd 2013, str. 6).

Direktiva 2009/138 določa, da je najboljša ocena z verjetnostjo uteženo povprečje prihodnjih gotovinskih tokov, diskontiranih z ustrezno ne-tvegano obrestno mero (pričakovana sedanja vrednost prihodnjih gotovinskih tokov).

ActEd (2013, str. 6) razlaga uporabljeno dikcijo kot »srednjo vrednost vseh možnih vrednosti«, kar pomeni, da je treba upoštevati celotno porazdelitev, ne samo vrednosti iz podatkov. Razlika je bolj pomembna pri odgovornostnem zavarovanju, npr. zavarovanju avtomobilske odgovornosti, manj pa pri dopolnilnem zavarovanju.

Prihodnji gotovinski tokovi vsebujejo:

- pričakovane zavarovalnine,
- pričakovane stroške,
- pričakovane premije, ki najboljšo oceno znižajo.

Ker prihodnje premije predstavljajo prihodek, zato znižujejo potrebno vsoto, ki jo je treba plačati kupcu, da prevzame obveznosti.

1.3 Dodatek za tveganje

Najboljša ocena sama ni dovolj, da bi druga zavarovalnica prevzela obveznosti, saj bi si s tem povečala tveganje (direktiva 2009/138, str. 335/45). Prevzemna zavarovalnica bi zahtevala več, saj iz same definicije najboljše ocene izhaja, da ima prevzemna zavarovalnica 50 % možnosti, da s prevzemom naredi dobiček in 50 % možnosti, da naredi izgubo. Razlika se imenuje »dodatek za tveganje«.

Direktiva 2015/35 določa, da se dodatek za tveganje izračuna kot (1):

$$RM = CoC * \sum_{t \geq 0} \frac{\mathrm{SCR}(t)}{\left(1+\mathrm{r}(t+1)\right)^{t+1}} \tag{1}$$

kjer je:

- *CoC* strošek kapitala
- SCR(t) projekcija solventnostnega kapitala v letu t
- r(t+1) ne-tvegana obrestna mera z rokom dospetja t + 1 let

Običajno zavarovalnica izračuna dodatek za tveganje za celoten portfelj. V primeru, da računa po posameznih zavarovalnih vrstah, je treba solventnostni kapital smiselno razdeliti. Rakić (2016) in ActEd (2013, str. 7) opisujeta različne načine alokacije solventnostnega kapitala.

Direktiva 2015/35 v 39. členu določa, da znaša strošek kapitala 6 %.

Dodatek za tveganje zahteva, da izračunamo solventnostni kapital za vsa leta (dokler imamo obveznosti). V praksi je to težko, zato uredba 2015/38 dovoljuje poenostavitve, če je izpolnjen pogoj sorazmernosti, ki je opisan v poglavju 1.6.

EIOPA (2014, str. 90) navaja 5 različnih načinov izračuna projekcije solventnostnega kapitala (SCR) za potrebe izračuna dodatka za tveganje:

- izračun vseh prihodnjih SCR brez uporabe približkov,
- aproksimacija posameznih tveganj ali podmodulov pri izračunu prihodnjih SCR,
- aproksimacija celotnega SCR za vsako od prihodnjih let z uporabo proporcionalnega pristopa,
- ocena vseh prihodnjih SCR-jev z uporabo aproksimacije, ki temelji na trajanju (ang. *duration),*
- izračun pribitka za tveganje kot odstotek najboljše ocene.

V Vzajemni zdravstveni zavarovalnici računa projekcijo solventnostnega kapitala oddelek za upravljanje s tveganji. Za prvih 5 let, ki so najpomembnejša za izračun rezervacij, izračuna SCR z uporabo prve metode.

Za preverbo izračuna na podlagi prve metode pa služi proporcionalni pristop, kjer se SCR oceni kot enačba (2):

$$\mathrm{SCR}_{\mathrm{RU}}(t) = \mathrm{SCR}_{\mathrm{RU}}(0) * \frac{\mathrm{BE}_{\mathrm{Net}}(t)}{\mathrm{BE}_{\mathrm{Net}}(0)} \qquad (2)$$

kjer je:

- $\mathrm{SCR}_{\mathrm{RU}}(0)$ solventnostni kapital v času 0
- $\mathrm{SCR}_{\mathrm{RU}}(t)$ ocena solventnostnega kapitala v času t
- $\mathrm{BE}_{\mathrm{Net}}(0)$ najboljša ocena po upoštevanju pozavarovanja v času 0

- $BE_{Net}(t)$ najboljša ocena po upoštevanju pozavarovanja v času t

Pri izračunu rezervacij se najboljša ocena običajno izračuna za vsako zavarovalno vrsto posebej, dodatek za tveganje pa za celoten portfelj zavarovalnice skupaj. Tako ga izračunava tudi Vzajemna zdravstvena zavarovalnica. Če bi dopolnilno zavarovanje obravnavali ločeno, bi morali projekcijo solventnostnega kapitala razdeliti po posameznih zavarovalnih vrstah. Rakić (2016) obravnava različne načine razdelitve potrebnega kapitala.

1.4 Obveznosti

Zavarovalnice morajo oblikovati rezervacije za vse obveznosti, ki izhajajo iz zavarovalnih pogodb.

1.4.1 Obveznosti zaradi preteklih dogodkov, ki so zavarovalnici znane

Drugo ime za te rezervacije je popis, angleški izraz pa je *RBNS* (ang. *Reserved But Not Settled*).

Sem sodijo obveznosti za škodne dogodke, ki so jih zavarovanci prijavili, škoda pa se še rešuje in zavarovalnica še ni izplačala zavarovalnine. Vzrokov za odlog izplačila je lahko več. V primeru telesnih poškodb potrebujemo pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti več časa, da lahko objektivno ocenimo povzročeno škodo. Tako je lahko stopnja trajne invalidnosti določena šele, ko je zdravljenje zaključeno. Ker zavarovalnica ve za nastali dogodek, lahko predvidi in rezervira potrebna sredstva za izplačilo odškodnine. Trenutek, od kdaj se smatra škodni dogodek za prijavljenega, je odvisen od vsake zavarovalnice posamezno. Od tega je odvisno, kdo naredi prvo oceno potrebne rezervacije. Rezervacija se praviloma dela za vsak zavarovalni primer posebej. Ko so znane nove podrobnosti (npr. ko je rešena materialna škoda), se popis ustrezno prilagodi. Za odgovornostna zavarovanja je značilen daljši čas reševanja, še posebej, če gre za telesne poškodbe.

Dopolnilno zavarovanje krije izplačilo razlike med ceno zdravstvene storitve in višino, ki jo krije obvezno zavarovanje. V primeru, da obvezno zavarovanje ne krije delnega stroška zdravstvene storitve, tudi dopolnilno zavarovanje ne krije doplačila. To pomeni, da v praksi javni zavod presoja o potrebnosti zdravstvene storitve, zato je reševanje škodnih zahtevkov dopolnilnega zavarovanja enostavno in hitro, popis pa relativno nepomemben del rezervacij.

ZZVZZ-UPB3 nalaga zavarovalnicam, da zato plačujejo nadomestilo izvajalcem zdravstvenih storitev, da jim le-ti posredujejo škodne zahtevke v elektronski obliki. V primeru, da kateri od ponudnikov zdravstvenih storitev zavarovalnicam ne izstavi zahtevka za plačilo tega nadomestila, mora zavarovalnica oblikovati rezervacijo za take zahtevke. V skupnem znesku te rezervacije ne predstavljajo velikega zneska, so pa izjema, saj se te rezervacije oblikujejo statistično in ne eksplicitno za vsak škodni dogodek posebej. To je skladno z načelom materialnosti, ki ga dopušča direktiva.

Obstajajo tudi rezervacije za škodne dogodke, za katere je oblikovan popis, vendar ne v zadostni meri. Angleška kratica je *IBNER* (ang. *Incurred But Not Enough Reported*). Te rezervacije niso bistvene za dopolnilno zavarovanje, saj je znesek zavarovalnine znan ob prejemu računa izvajalca medicinskih storitev.

1.4.2 Obveznosti zaradi preteklih dogodkov, ki zavarovalnici še niso znane

Angleška kratica, ki se uporablja tudi v Sloveniji, za te rezervacije je IBNR (ang. *Incured But Not Reported*) (v nadaljevanju: IBNR).

Sem sodijo obveznosti zaradi dogodkov, ki so se že zgodili, pa zavarovanci še niso podali prijave. V primeru dopolnilnega zdravstvenega zavarovanja so to tiste medicinske storitve, ki jih izvajalci še niso fakturirali.

Dopolnilna zavarovanja sodijo med tako imenovane »hitre zavarovalne vrste«, saj je večina zahtevkov fakturiranih in rešenih v dveh mesecih. Je pa IBNR pomemben zaradi svoje velikosti in bistveno vpliva na višino potrebnih rezervacij.

1.4.3 Obveznosti zaradi prihodnjih dogodkov, ki jih krijejo obstoječe zavarovalne pogodbe

Glavna obveznost zaradi prihodnjih dogodkov so zavarovalnine za storitve, ki jih bodo koristili obstoječi zavarovanci na podlagi obstoječih zavarovalnih pogodb v prihodnosti. Poleg tega mora zavarovalnica kriti tudi stroške nadomestil za posredovanje računov v elektronski obliki, kot ji to nalaga ZZVZZ-UPB3. Zavarovalnica mora kriti tudi neposredne in posredne stroške. Stroški pridobivanja zavarovanj praviloma niso vključeni, saj so obstoječe zavarovalne pogodbe že sklenjene in je morebitno provizijo zavarovalnica plačala ob sklenitvi.

1.5 Zdravstvena zavarovanja, podobna neživljenjskim zavarovanjem

Zakon ZZVZZ-UPB3 glede dopolnilnega zdravstvenega zavarovanja določa:

- »izvaja se po načelih medgeneracijske vzajemnosti in vzajemnosti med spoloma med vsemi zavarovanci dopolnilnega zavarovanja;

- zaradi varovanja interesov zavarovancev država s tem zakonom zagotavlja enako obravnavo zavarovancev ne glede na starost, spol in zdravstveno stanje;
- zavarovalnice, ki izvajajo dopolnilno zavarovanje, so se dolžne po določbah tega zakona vključiti v izravnalno shemo dopolnilnega zavarovanja;
- zavarovalnica, ki izvaja dopolnilno zavarovanje, mora sprejeti v to zavarovanje vse osebe, ki so obvezno zdravstveno zavarovane po tem zakonu in se želijo pri njej zavarovati ter jih pri sprejemu v zavarovanje enako obravnavati;
- zavarovalna premija dopolnilnega zavarovanja mora biti enaka za vse zavarovance posamezne zavarovalnice;
- zavarovalnice morajo določiti čakalno dobo treh mesecev«.

Določbe zakona zavarovalnicam prepovedujejo opravljati proces sprejema rizikov v zavarovanje. ActEd (2013b, str. 45) definira proces prevzema rizikov kot proces, v katerem se rizik sprejme v zavarovanje in se določi primerna premija. ZZVZZ-UPB3 zapoveduje zavarovalnicam, da sprejmejo v zavarovanje vsakega zavarovanca, ki želi skleniti zavarovanje. Zapoveduje tudi, da morajo vsakemu zavarovancu računati enako premijo.

Ker določbe veljajo za vse zavarovalnice, ki ponujajo zavarovanja, so za zavarovalnice sprejemljive. Ni možnosti, da bi ena zavarovalnica odklanjala bolj tvegane zavarovance, kar bi povzročilo izgube pri drugih zavarovalnicah. Vse zavarovalnice se morajo vključiti v izravnalno shemo, s katero si delno izravnajo razlike v strukturi portfelja. Taka ureditev je tudi v javnem interesu, saj zagotavlja široko stopnjo zavarovanja in s tem socialne varnosti.

Ker premija ni odvisna ne od starosti ne od zdravstvenega stanja zavarovanca, ni treba oblikovati rezervacij za bonuse, kot se oblikujejo pri življenjskih zavarovanjih. Zato sodi dopolnilno zdravstveno zavarovanje med zdravstvena zavarovanja, ki so podobna neživljenjskim zavarovanjem (ang. *health-nSLT*).

1.6 Meja pogodb

Pri oblikovanju rezervacij je treba zajeti vse gotovinske tokove, ki ležijo znotraj določene periode, ki ji direktiva 2009/138 pravi meja pogodbe (ang. *contract boundary*). Mejo pogodb podrobneje ureja direktiva 2015/35.

Meja pogodbe se začne takrat, ko zavarovalnica postane stranka v zavarovalni pogodbi oziroma takrat, ko začne veljati zavarovalno kritje. Primer: če zavarovanec sklene dopolnilno zdravstveno zavarovanje s čakalno dobo 3 mesecev in plača premijo za eno leto vnaprej, začne zavarovalno kritje veljati čez tri mesece, zavarovalna pogodba pa začne veljati takoj. Zavarovalnica mora takoj oblikovati rezervacije.

Direktiva 2015/35 določa, da vse obveznosti iz zavarovalne pogodbe pripadajo pogodbi od:

- datuma, ko ima zavarovalnica pravico odpovedati zavarovalno pogodbo,
- datuma, ko ima zavarovalnica pravico odkloniti premijo, plačano na podlagi zavarovalne pogodbe,
- datuma, ko ima zavarovalnica pravico enostransko spremeniti bodisi premijo ali ugodnosti, ki jih krije na podlagi pogodbe tako, da v celoti ustrezajo rizikom, ki jih krije portfelj.

ZZVZZ-UPB3 v 62.c členu prepoveduje zavarovalnicam, da odpovejo dopolnilna zdravstvena zavarovanja.

62. člen ZZVZZ-UPB3 pa pravi: »Povišanje premije dopolnilnih zdravstvenih zavarovanj v času trajanja zavarovanja mora predhodno pisno potrditi imenovani pooblaščeni aktuar zavarovalnice. AZN-nadzor lahko v primeru dvoma v podatke imenuje neodvisnega pooblaščenega aktuarja, ki opravi naloge imenovanega pooblaščenega aktuarja po tem zakonu, dopolnilno zavarovanje pa predstavlja javni interes Republike Slovenije.«

Če beremo zakon dobesedno, pomeni, da mora povišanje premije dopolnilnih zdravstvenih zavarovanj predhodno odobriti pooblaščeni aktuar, ni pa potrebno soglasje AZN, ministrstva za zdravje ali katerekoli druge državne inštitucije.

Dejstvo, da je zavarovalnica suverena pri odločitvi o povišanju premije, je odločilno za določitev meje zavarovalne pogodbe.

Triglav Zdravstvena zavarovalnica (2011, str. 2) ima v svojih splošnih pogojih navedeno: »Zavarovalnica si pridržuje pravico spremeniti pogodbeno dogovorjeno zavarovalno premijo, če se z zakonom ali na njem temelječemu izvedbenemu predpisu spremeni odstotek doplačil oziroma vsebina, obseg, struktura ali standard pravic obveznega zdravstvenega zavarovanja. Zavarovalna premija se lahko spremeni tudi ob spremembah cen zdravstvenih ali z njimi povezanih storitev, zdravil in medicinsko tehničnih pripomočkov ter nevarnostnih in ekonomskih okoliščin, ki bistveno vplivajo na izpolnjevanje obveznosti in poslovanje zavarovalnice.«

Splošni pogoji omogočajo zavarovalnici, da enostransko popravi premijo zavarovanja in jo prilagodijo, da ustreza rizikom. Ostali zdravstveni zavarovalnici imata podobna določila v svojih splošnih pogojih. Meja pogodbe je takrat, ko lahko zavarovalnica to tudi dejansko stori. Točno periodo določi aktuarska funkcija, v praksi pa zdravstvene zavarovalnice v Sloveniji uporabljajo periode od nič do dveh mesecev.

V magistrskem delu bom uporabil periodo 2 mesecev, ker menim, da je to primeren čas, v katerem aktuarska funkcija lahko zbere potrebne podatke, napravi točen izračun, predlaga spremembo premije in jo predloži upravi in nadzornemu svetu v sprejetje ter pooblaščenemu aktuarju v podpis.

V primeru, da zdravstvene zavarovalnice ne bi bile suverene pri odločitvi o popravku premije, bi morale upoštevati celotno pričakovano dobo zavarovanja. Pri 25 let stari osebi, ki prvič sklene dopolnilno zdravstveno zavarovanje, bi to lahko pomenilo 50 let in več. Zdravstvene zavarovalnice bi težko ocenile stroške zdravstvenega zavarovanja 50 let vnaprej. Problematična bi bila predvsem medicinska inflacija, ki tipično narašča hitreje od običajne inflacije. Če bi zdravstvene zavarovalnice morale upoštevati 50-letno medicinsko inflacijo, bi morale oblikovati velike rezerve, kar bi znatno podražilo dopolnilna zdravstvena zavarovanja. Imamo paradoks, da enostranska pravica zavarovalnice koristi zavarovancem in javnemu interesu.

1.7 Sorazmernost

Direktiva 2015/38 določa, da mora zavarovalnica uporabiti metode, ki so sorazmerne z naravo, obsegom in kompleksnostjo tveganj, ki jih vsebujejo zavarovalne in pozavarovalne pogodbe. Uredba nalaga, da mora zavarovalnica:

- preučiti naravo, obseg in kompleksnost tveganj, ki jih vsebujejo zavarovalne in pozavarovalne pogodbe,
- določiti kvalitativno in kvantitativno napako, ki izhaja zaradi razlik med:
  - uporabljenimi predpostavkami,
  - naravo, obsegom in kompleksnostjo rizikov.

Uredba določa, da določeno metodo smatramo za nesorazmerno, če bi razlika iz točke b vodila h takšni napačni oceni rezervacij, ki bi vplivala na proces odločevanja ali presojo uporabnika (npr. poslovodstva). Uredba dovoljuje uporabo takšne metode, če:

- ni na voljo nobene druge metode z manjšo napako in je manj verjetno, da bo obstoječa metoda vodila k podcenjenim rezervacijam ali
- metoda vodi k višjim rezervacijam, kot bi vodila sorazmerna metoda.

Primer poenostavitve, ki jo dovoljuje direktiva 2015/38, je izračun solventnostnega kapitala za določitev dodatka za tveganje.

1.8 Primerna obrestna mera

Direktiva 2015/38 določa, da se za diskontiranje gotovinskih tokov uporabi osnovna ne-tvegana obrestna mera za vsako valuto posebej. Če je trg dovolj likviden, globok in transparenten, se uporabi obrestna mera zamenjav (ang. *swap rate*). V nasprotnem primeru se lahko uporabi obrestna mera državnih obveznic. V tem primeru je treba upoštevati tveganost države izdajateljice in ustrezno korigirati obrestno mero.

EIOPA, evropski regulator objavlja na svoji spletni strani osnovno ne-tvegano obrestno mero, pri čemer uporablja vire, ki so »razumno zanesljivi«. EIOPA si pridržuje pravico, da popravi ali spremeni objavljene informacije.

Obrestna mera, ki jo objavlja EIOPA, je trenutna ali promptna obrestna mera, ki velja za različne čase dospetja. V praksi običajno uporabljamo terminsko obrestno mero, s katero lahko diskontiramo gotovinske tokove od konca obdobja meje pogodb nazaj do dneva vrednotenja. Iz trenutnih obrestnih mer lahko enostavno izračunamo terminsko obrestno mero, saj velja (3):

$$(1 + i_t) = (1 + i_{t-1}) * (1 + f_{t-1}) \tag{3}$$

kjer je:

- i_t trenutna obrestna mera za dospetje t let
- i_{t-1} trenutna obrestna mera za dospetje t-1 let
- f_{t-1} terminska obrestna mera za dospetje 1 leta čez t-1 let

Iz i_t in i_{t-1} izračunamo f_{t-1}. Obrestno mero f_{t-1} uporabimo za diskontiranje gotovinskega toka, ki nastane konec leta t za 1 leto. Znesku dodamo gotovinski tok, ki nastane ob koncu leta t-1 in postopek rekurzivno ponavljamo, dokler ne pridemo do dneva vrednotenja.

Gotovinski tokovi nastanejo ob različnih trenutkih. Osnovni, preprosti modeli delujejo na letnem nivoju, komercialni modeli pa praviloma uporabljajo mesečni nivo. Zato moramo določiti predpostavke o gibanju obrestne mere med letom. Najlažja možnost je, da predpostavimo, da se med letom obrestna mera ne spreminja. Boljši približek je uporaba linearne ali polinomske ekstrapolacije. Zaradi nizkih obrestnih mer, ki trenutno veljajo na trgu, ima obrestna mera majhen vpliv na rezervacije, zato lahko uporabimo predpostavko, da se obrestna mera med letom ne spreminja.

1.9 Razdelitev zavarovancev na homogene skupine – kohorte

Direktiva in dobra aktuarska praksa zahtevata, da se rezervacije oblikujejo za vsak rizik posebej. Izračun premijske rezerve na primer zahteva, da izračunamo obveznosti za vsako zavarovalno pogodbo posebej. Kljub vsemu pa izračun zahteva predpostavke, ena ključnih je predvidena zavarovalnina. Predvidena zavarovalnina je pričakovan znesek zavarovalnin za posamezno pogodbo. V aktuarstvu se imenuje rizična premija.

Rizična premija se lahko modelira za vse zavarovance. Vendar je tak model kompleksen, zahteven za izračun in težak za interpretacijo. Model se lahko poenostavi tako, da razdelimo zavarovance v homogene skupine. Take homogene skupine se imenujejo kohorte.

Pri razdelitvi na kohorte se pojavi dilema. Bolj, ko so zavarovanci razdeljeni na več, manjših, bolj homogenih skupin, manj članov je v vsaki kohorti. Manj članov v posamezni kohorti pomeni, da je kohorta statistično manj kredibilna, večja pa je verjetnost naključnih efektov.

Pri dopolnilnem zdravstvenem zavarovanju lahko razdelimo zavarovance glede na:

- prvo možnost:
  - starost,
  - spol,
  - poklic,
  - geografska lokacija,

- drugo možnost:
  - starost,
  - spol.

V prvem primeru so kohorte bolj homogene, vendar ima vsaka bistveno manj članov.

V drugem primeru imajo kohorte več članov, so pa manj homogene. Pri oblikovanju rezervacij je treba paziti, da je struktura portfelja enaka kot v preteklosti. V primeru, da se struktura spremeni, kohorte pa so nehomogene, lahko pride do napačne ocene rezervacij.

Jong & Heller (2008, str. 48) navajata, da pri GLM analizi podatkov, grupiranih v kohorte, dobimo enake rezultate, kot če bi analizirali ne-grupirane podatke.

2 POSPLOŠENI LINEARNI MODELI

2.1 Razlog za uporabo posplošenih linearnih modelov

V zavarovalništvu moramo pogosto oceniti vrednosti na podlagi vzorca podatkov. Da bi določili premijsko rezervo, moramo oceniti vrednost pričakovanih zavarovalnin. Potrebujemo model, ki bo na podlagi lastnosti posamezne pogodbe izračunal rizično premijo.

Linearni modeli so orodje, ki se pogosto uporablja v ekonometriji, na primer Ferbar Tratar & Strmčnik (2016, str. 266) predlagata uporabo linearnega modela za kratkotrajno napovedovanje potrebe po ogrevanju in kot argument navajata predpostavko o linearni odvisnosti med slučajno spremenljivko (potreba po ogrevanju) in neodvisnimi spremenljivkami (sončno sevanje, hitrost vetra in relativno vlažnost).

Če predpostavimo, da imata povprečna zavarovalnina in škodna frekvenca normalno porazdelitev in da sta linearno odvisni od lastnosti posamezne pogodbe, potem ju lahko modeliramo z linearnima modeloma. V zavarovalništvu te predpostavke običajno ne držijo. Porazdelitev povprečne zavarovalnine ima običajno širši rep pri višjih zavarovalninah in ni simetrična (Kaas, Goovaerts, Dhaene & Denuit, 2008, str. 61). Normalna porazdelitev ni najbolj primerna, ker je simetrična (ActEd, 2005b, str. 31). ActEd (2005b, str. 31) predlaga uporabo drugih porazdelitev, kot so log-normalna, gama, eksponentna … Jong & Heller (2008, str. 81) predlagata uporabo Poissonove ali negativne binomske porazdelitve za modeliranje škodne frekvence. Zato je smiselna uporaba GLM, ki so razširitev linearnih modelov. ActEd (2013b, str. 47) trdi, da so GLM najbolj uporabljano orodje za določitev premije pri zavarovanjih za posameznike (ang. *personal lines*).

Sam uporabljam GLM tudi tam, kjer bi lahko uporabil navadno linearno regresijo. Ker večina problemov, ki jih rešujem, zahteva uporabo GLM, poznam orodja GLM in mi je uporaba GLM lažja od linearne regresije.

2.1.1 Posamična analiza

Posamična analiza (ang. *one-way analysis*) je preprost način določitve rizične premije. Vzemimo za ilustracijo izmišljen primer povprečne zavarovalnine v odvisnosti od starosti in spola. Podatki so razdeljeni v 4 kohorte. Taka groba razdelitev nima praktične vrednosti, služi pa za ilustracijo. Vsaka kohorta iz tabele 1 predstavlja skupino 500 zavarovancev.

Tabela 1: Hipotetični primer zavarovalnin (v EUR)

Spol	**Starost 59 let in manj**	**Starost 60 let in več**
Moški	15	25
Ženske	18	20

Opomba: Vse vrednosti so izmišljene, gre za ilustrativni primer.

Posamična analiza obravnava vsak vhodni parameter posebej. Tako je povprečna zavarovalnina za moške in ženske zavarovance (4) in (5):

$$zavarovalnina_{moški} = \frac{15{,}00*500+25{,}00*500}{500+500} = 20{,}00 \quad (4)$$

$$zavarovalnina_{ženske} = \frac{18{,}00*500+20{,}00*500}{500+500} = 19{,}00 \quad (5)$$

Iz enačbe (4) in (5) bi lahko sklepali, da so moški zavarovanci za 5 % bolj tvegani. Denimo, da smo analizo ponovili čez nekaj let in ugotovili, da imajo ženske višjo povprečno zavarovalnino:

$$zavarovalnina_{ženske}^{čez\ par\ let} = \frac{18{,}00*100+20{,}00*900}{100+900} = 19{,}80 \quad (6)$$

Iz tega bi lahko sklepali, da:

- da se je tveganje pri ženskah povečalo ali pa
- se je struktura žensk v portfelju spremenila in imamo sedaj 100 žensk, mlajših od 59 let in 900 žensk, starejših od 59 let.

Če opazujemo samo dejstvo, da se je povprečna zavarovalnina spremenila za 80 centov, potem lahko spregledamo resnični vzrok za dvig zavarovalnine. To je največja pomanjkljivost posamične analize.

2.1.2 Vpliv interakcije

Na primeru naslednje Tabele 2 si oglejmo, kako lahko nepravilno izbrana metoda za napovedovanje prikrije interakcijo med opazovanimi parametri.

Tabela 2: Rezultat linearnega modela (v EUR)

Spol	Starost 59 let in manj	Starost 60 let in več
Moški	17	23
Ženske	16	22

Tabela 2 je rezultat izračuna najbolj verjetne napovedi povprečne zavarovalnine na podlagi podatkov iz Tabele 1 in ob predpostavki normalne porazdelitve, ki je podrobno opisan v poglavju 2.2.

Očitno je, da so starejši zavarovanci bolj tvegani od mlajših. Manj očitna pa je relacija med spolom in tveganjem. Na podlagi rezultata linearne regresije (Tabela 2) bi lahko sklepali, da so ženske manj tvegane od moških. Originalni podatki pa lahko skrivajo informacije, ki jih linearna regresija prezre. Poglejmo še enkrat Tabelo 1.

Mlajši moški so manj tvegani od mlajših žensk, starejši moški pa so bolj tvegani od starejših žensk. Za napoved rizične premije je poleg starosti in spola relevantna tudi kombinacija starosti in spola. Taki kombinaciji parametrov se reče interakcija (Denuit, Marechal, Pitrebois, & Walhin, 2007, str. 57). Na Sliki 18 vidimo vpliv interakcije, saj so mlajši moški manj rizični od vrstnic, starejši pa bolj.

GLM omogočajo enostavno analizo vpliva interakcij (ActEd 2013b), polinomskih stopenj vhodnih parametrov (npr. $starost^2$) in drugačnih porazdelitev (npr. gama, log-normalna …).

2.2 Linearni modeli

ActEd (2013b, str. 2) definira posplošene linearne modele kot razširitev linearnih modelov, kjer je:

- linearni model povezan z opazovano spremenljivko preko funkcije, ki ji rečemo link funkcija,
- varianca opazovane spremenljivke je funkcija srednje vrednosti (ang. *predicted value*).

Linearni model s slučajno spremenljivko Y_i in k-parametri ima obliko (7) (ActEd 2013b, str. 2):

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j * X_{ij} + \varepsilon_i \tag{7}$$

kjer je:

- Y_i opazovane vrednosti slučajne spremenljivke Y
- X_{ij} vrednost j-te neodvisne spremenljivke
- β_j vrednost j-tega parametra
- ε_i slučajne spremenljivke, ki predstavljajo napako
- k število parametrov (brez upoštevanja konstantnega člena)

Če konstantni člen β_0 prevedemo v matrično obliko z uporabo primerne definicije vektorja X_0 (glej enačbo 12), potem lahko enačbo (7) zapišemo tudi v matrični obliki (8):

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} * \beta + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{8}$$

kjer je:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{X} * \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 X_{00} & \cdots & \beta_{k-1} X_{0,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_0 X_{n-1,0} & \cdots & \beta_{k-1} X_{n-1,k} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Vzemimo za primer podatke iz Tabele 1. Linearni model predpostavlja, da ima slučajna spremenljivka $\boldsymbol{Y}$ normalno porazdelitev s povprečno vrednostjo μ in varianco σ^2 $\boldsymbol{Y} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Da bi natančno popisali 4 kohorte, potrebujemo dve neodvisni spremenljivki, lahko pa uvedemo še tretjo neodvisno spremenljivko $\boldsymbol{X_0}$, s katero prevedemo konstantni člen β_0 v enako obliko kot ostale člene:

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Neodvisna spremenljivka $\boldsymbol{X_1}$ predstavlja spol. V primeru, da so zavarovanci v kohorti moškega spola, ima spremenljivka vrednost 1, sicer pa 0:

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Neodvisna spremenljivka $\boldsymbol{X_2}$ predstavlja starost. Če so zavarovanci v kohorti stari več kot 59 let, tedaj je vrednost 1, sicer pa 0:

$$\boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Enačbo (8) lahko zapišemo kot (15):

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Prvi stolpec matrike predstavlja parameter, ki prevede konstantni člen v vektorsko obliko, drugi stolpec matrike moške zavarovance, tretji stolpec matrike pa starejše zavarovance. Žensk in mlajših zavarovancev ne prikazujemo, saj so to komplementarni podatki. Predpostavimo lahko, da so vsi zavarovanci, ki niso moški, ženske. Običajno parametre izberemo tako, da so tisti zavarovanci, ki predstavljajo večino, v osnovni celici (ang. *base level*). V enačbi (15) so to ženske, mlajše od 60 let.

Iz enačbe (15) dobimo sistem 4 enačb (16):

$$\begin{aligned} 15 &= \beta_0 + \beta_1 + \varepsilon_0 \\ 25 &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_1 \\ 18 &= \beta_0 + \varepsilon_2 \\ 20 &= \beta_0 + \beta_2 + \varepsilon_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Imamo podatke o 4 dogodkih ali poskusih, kjer smo zabeležili 4 vrednosti slučajne spremenljivke $\boldsymbol{Y}$. Predpostavljamo, da je $\boldsymbol{Y}$ normalno porazdeljena in da je povprečna vrednost napake $\boldsymbol{\varepsilon}$ enaka 0. Radi bi ocenili vrednosti parametrov β_0, β_1 in β_2, kar lahko storimo z metodo največjega verjetja. Ta metoda izbere kombinacijo parametrov β_0, β_1 in β_2, pri kateri je največja verjetnost, da gre za normalno porazdelitev.

Enačba (17) prikazuje gostoto verjetnosti za normalno porazdelitev (tablice, 2002, str. 11):

$$f(y_i;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{-\frac{(y_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\}} \tag{17}$$

kjer je:

- $f(y_{i;}\,\mu,\,\sigma^2)$ gostota porazdelitve
- $\mu,\,\sigma^2$ parameter porazdelitve

Verjetnost L je premo sorazmerna z (18):

$$L(y;\mu,\sigma^2) \propto \prod_{i=1}^{n} e^{\left\{-\frac{(y_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\}} \tag{18}$$

Za vrednosti β_0, β_1 in β_2, pri katerih je verjetnost največja, veljajo enačbe (19), (20) in (21):

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = 0 \tag{21}$$

Vrednosti β_0, β_1 in β_2 se lažje izračunajo, če se verjetnost pred odvajanjem logaritmira. Logaritem verjetnosti je običajno označen z malo črko l. Ker iščemo tiste vrednosti β_0, β_1 in β_2, pri katerih so enačbe (19), (20) in (21) enake 0, se konstantni členi lahko zanemarijo.

$$-l(y;\mu,\sigma^2) \propto (15-\beta_0-\beta_1)^2 + (25-\beta_0-\beta_1-\beta_2)^2 + (18-\beta_0)^2 - (20-\beta_0-\beta_2)^2 \tag{22}$$

Če postavimo vrednost parcialnih odvodov na nič, dobimo sistem 3 enačb s tremi spremenljivkami:

$$39 - 2*\beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0 \tag{23}$$

$$40 - 2*\beta_0 - 2*\beta_1 - \beta_2 = 0 \tag{24}$$

$$45 - 2*\beta_0 - \beta_1 - 2*\beta_2 = 0 \tag{25}$$

Enačbo (24) odštejemo od enačbe (23), enačbo (25) pa od enačbe (23) in dobimo enačbi (26) in (27):

$$-1 + \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 1 \tag{26}$$

$$-5 - \beta_1 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 6 \tag{27}$$

Če rešitvi iz enačb (26) in (27) vstavimo v enačbo (23), dobimo rešitev β_0=16. Vektorsko zapišemo rešitve za β_0, β_1 in β_2 kot (28):

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Najbolj verjetna ocena za slučajno spremenljivko je (29):

$$\hat{Y} = 16 * X_1 + 1 * X_2 + 6 * X_3 \tag{29}$$

Ocene za posamezne kohorte pa izračunamo z uporabo enačbe (7) ali (29):

$$\widehat{Y_0} = 16 + 1 * 1 + 6 * 0 = 17 \tag{30}$$

$$\widehat{Y_1} = 16 + 1 * 1 + 6 * 1 = 23 \tag{31}$$

$$\widehat{Y_2} = 16 + 1 * 0 + 6 * 0 = 16 \tag{32}$$

$$\widehat{Y_3} = 16 + 1 * 0 + 6 * 1 = 22 \tag{33}$$

Končni rezultat je prikazan v Tabeli 2 v poglavju 2.1.2.

2.3 GLM in družina eksponentnih porazdelitev

GLM odpravljajo nekatere omejitve linearnih modelov (Kaas et al., 2008):

- porazdelitev napake **ε** je lahko drugačna od normalne (mora pa biti iz družine eksponentnih porazdelitev);
- linearni model je povezan s slučajno spremenljivko preko povezovalne (ang. *link*) funkcije (v enačbi (30) je to funkcija g());
- varianca slučajne spremenljivke je funkcija pričakovane vrednosti.

Podobno kot linearni model v enačbi (8) lahko GLM zapišemo kot (34) (ActEd 2013b, str. 12):

$$\boldsymbol{Y} = \mathrm{g}^{-1}(\boldsymbol{X} * \beta + \zeta) + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{34}$$

kjer je:

- g povezovalna funkcija
- $\boldsymbol{X}$ indikatorska matrika
- β vektor parametrov, ki ga iščemo
- ζ vektor znanega efekta (ang. *offset*)
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ slučajna napaka

2.3.1 Eksponentne porazdelitve

ActEd (2013b, str. 6) definira družino eksponentnih porazdelitev kot porazdelitve, katerih gostote porazdelitev lahko zapišemo kot (35):

$$f\ (y_i; \vartheta, \varphi) = \exp\left\{\left(\frac{y_i\vartheta - b(\vartheta)}{a(\varphi)} + c(y_i, \varphi)\right)\right\} \tag{35}$$

kjer je:

- $a_i(\varphi)$, $b(\vartheta)$, $c(y,\varphi)$ so specifične funkcije, ki določajo porazdelitev
- ϑ kanonični parameter
- φ skalarni parameter

Običajno porazdelitev zapišemo s parametroma μ, σ^2. Enačba (31) pa je alternativna oblika zapisa, ki uporablja parametra ϑ in φ. V poglavju 2.3.2 je prikazana izpeljava, kako iz običajnega zapisa pridemo do oblike v enačbi (31) za porazdelitev gama.

V praksi se modeli GLM rešujejo numerično. Najbolj razširjena orodja za izračun GLM so:

- Emblem podjetja Towers Watson
- GenMod podjetja SAS
- R odprtokodne fundacije CRAN
- SPSS podjetja IBM

2.3.2 Model z gama porazdelitvijo

Primer porazdelitve, ki sodi v družino eksponentnih porazdelitev, je porazdelitev gama. Običajno je zapisana z enačbo (36) (tablice, 2002, str. 12):

$$f(y) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \tag{36}$$

kjer je:

- α, λ parameter porazdelitve
- $\Gamma(\alpha)$ funkcija, kot jo definira enačba (37)

V tablicah (2002, str. 12) je funkcija Γ(α) definirana kot (37):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,\ \alpha > 0 \tag{37}$$

Enačbo (36) zapišemo kot eksponentno funkcijo logaritma (38)

$$f(y) = e^{\alpha \ln(\lambda) - \ln(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\ln(y) - \lambda y} \tag{38}$$

Enačbo (38) preuredimo v (39):

$$f(y) = e^{\alpha \ln \lambda y - \lambda y - \ln y - \ln \Gamma(\alpha)} \tag{39}$$

Če v enačbo (39) vstavimo enačbe (40), (41), lahko zapišemo porazdelitev kot (44):

$$\lambda = -\frac{\vartheta}{\varphi} \tag{40}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi} \tag{41}$$

$$f(y) = e^{\alpha \ln \lambda y - \lambda y - \ln y - \ln \Gamma(\alpha)} = \tag{42}$$

$$= e^{\frac{\vartheta y + \ln\vartheta + \ln(-\frac{y}{\varphi})}{\varphi} - \ln\left(y\Gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)} = \tag{43}$$

$$= e^{\frac{\vartheta y + \ln\vartheta}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}\ln\left(-\frac{y}{\varphi}\right) - \ln\left(y\Gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)} \tag{44}$$

Enačba (44) je enake oblike kot enačba (35), kar dokazuje, da porazdelitev gama sodi v družino eksponentnih porazdelitev. Funkcije a(φ), b(ϑ) in c(y_i,φ) za porazdelitev gama so:

$$\mathrm{a}(\varphi) = \varphi \tag{45}$$

$$\mathrm{b}(\vartheta) = -\ln(\vartheta) \tag{46}$$

$$\mathrm{c}(y_i, \varphi) = \frac{1}{\varphi}\ln\left(-\frac{y}{\varphi}\right) - \ln(y\Gamma\left(\frac{1}{\varphi}\right)) \tag{47}$$

Za družino eksponentnih porazdelitev veljata enostavni enačbi za izračun povprečne vrednosti in variance (ActEd, 2013b, str. 7):

$$E(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{b}'(\vartheta) \tag{48}$$

$$var(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{a}(\varphi)\mathrm{b}''(\vartheta) \tag{49}$$

Za porazdelitev gama povprečno vrednost in varianco izračunamo tako, da v enačbi (48) in (49) vstavimo enačbi (45) in (46) in jih odvajamo:

$$E(\boldsymbol{Y}\,) = \mathrm{b}'(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta} = \frac{\alpha}{\lambda} \tag{50}$$

$$var(\boldsymbol{Y}\,) = \mathrm{a}\,(\varphi)\mathrm{b}''(\vartheta\,) = \frac{\varphi}{\vartheta^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{51}$$

Enačbi (50) in (51) se ujemata s formulama za povprečno vrednost in varianco porazdelitve gama v tablicah (2002).

ActEd (2013b, str. 7) definira variančno funkcijo, s katero se lažje zapiše varianca porazdelitve kot (52):

$$V(\mu) = \mathrm{b}''(\vartheta) \tag{52}$$

Varianca porazdelitve se zapiše preprosto kot produkt funkcije a(φ) in variančne funkcije:

$$var(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{a}(\varphi)\,\mathrm{V}(\mu) \tag{53}$$

Iz enačbe (50), (51) in (52) sledi, da je variančna funkcija za porazdelitev gama (54):

$$\mathrm{V}(\mu) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \quad = \mu^2 \tag{54}$$

2.3.3 Model z log-normalno porazdelitvijo

Log-normalna porazdelitev ne sodi v družino eksponentnih funkcij, zato ne moremo neposredno uporabiti GLM. Iz definicije log-normalne porazdelitve sledi, da če je slučajna spremenljivka log-normalno porazdeljena, je njen logaritem porazdeljen normalno (55):

$$\boldsymbol{Y} \sim logN(\mu,\ \sigma^2) \Rightarrow \ln\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z} \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{55}$$

Ker je ***Z*** normalno porazdeljen, lahko uporabimo analizo GLM in izračunamo povprečno vrednost (56):

$$E(\boldsymbol{Z}) = \mathrm{g}^{-1}(\boldsymbol{X} * \beta) = \mathrm{g}^{-1}(\textstyle\sum_j X * \beta) \tag{56}$$

Programska orodja, kot sta SPSS in SAS, izračunajo oceno parametra φ, ki omogoča izračun variance. Običajno prikažejo parameter »*scale*«, ki je enak kvadratnemu korenu parametra φ. Za normalno porazdelitev velja (53) (Jong & Heller, 2008, str. 36):

$$\mathrm{a}(\varphi) = \frac{\varphi}{\omega} \tag{57}$$

kjer je:

- φ skalarni parameter, ki ga oceni programsko orodje
- ω utež, običajno izpostavljenost oziroma število zavarovancev

Povprečno vrednost slučajne spremenljivke Y lahko izračunamo s pomočjo momentno rodovne funkcije M (ang. *Moment generating function*), za katero velja (58):

$$\mathrm{M_Z}(t) = E(e^{tZ}) \tag{58}$$

Funkcija M za normalno porazdelitev je zapisana v tablicah (2002, str. 11) (59):

$$\mathrm{M_Z}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{59}$$

Če v enačbo (59) vstavimo enačbi za povprečno vrednost (56) in varianco (57) slučajne spremenljivke ***Z***, dobimo enačbo za povprečno vrednost slučajne spremenljivke ***Y*** (60):

$$E(\boldsymbol{Y}) = e^{\mathrm{g}^{-1}(\sum_j \boldsymbol{X} * \beta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi}{\omega}} \tag{60}$$

2.4 Kolektivni škodni model

Kaas et al. (2008, str. 41) opisuje individualni in kolektivni model škodnega procesa. V praksi se največ uporablja kolektivni model. Kolektivni model predpostavlja, da v celotnem portfelju nastane N-škodnih zahtevkov in skupna zavarovalnina v znesku (61):

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \boldsymbol{X}_N \tag{61}$$

kjer je:

- $\boldsymbol{S}$ skupna zavarovalnina portfelja
- $\boldsymbol{X}_i$ zavarovalnina i-tega škodnega zahtevka
- $\boldsymbol{N}$ število škodnih zahtevkov

$\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{X}_i$ in $\boldsymbol{N}$ so slučajne spremenljivke. Kolektivni model predpostavlja, da so posamezni zneski $\boldsymbol{X}_i$ med seboj neodvisni in imajo enako porazdelitev (ang. *independent and identically distributed* ali *iid*) (Kaas et al., 2008, str. 41).

Običajno pri škodnem procesu predpostavimo, da sta število škodnih dogodkov in znesek zavarovalnine neodvisna. Vsako komponento modeliramo posebej. Pri modeliranju škodne frekvence običajno izbiramo med negativno binomsko in Poissonovo porazdelitvijo. Porazdelitev gama je primerna za modeliranje zneskov zavarovalnin (Kaas et al., 2008, str. 66).

Običajno predpostavljamo, da je skupna škoda premo sorazmerna izpostavljenosti zavarovalnice. Izpostavljenost običajno merimo v zavarovanec-letih. Statistično gledano je za zavarovalnico vseeno, če zavaruje eno osebo za dve leti, ali dve (identični) osebi za eno leto. Škodni proces zapišemo kot (62):

$$S = izpostavljenost * \frac{število\ škod}{izpostavljenost} * \frac{pripoznane\ zavarovalnine}{število\ škod} \tag{62}$$

Količnik število škod in izpostavljenost se imenuje škodna frekvenca, količnik pripoznane zavarovalnine in število škod pa povprečna škoda (ang. *severity*). V tuji literaturi se tak model imenuje »*frequency-severity*«.

Modeliranje vsake komponente posebej ima naslednje prednosti:

- Če se spremenijo trendi škodnega izkustva, lahko analiziramo vzroke za spremembo. Ugotovimo lahko, ali se je povečala škodna frekvenca, ali so se povečali zneski zavarovalnin. V obeh primerih lahko analiziramo dejavnike, na primer inflacijo ali sodno prakso.

- Efekta spremembe tako škodne frekvence, kot tudi zneska zavarovalnin se lahko med sabo izničita. Dogovor z uvozniki zdravil lahko na primer zmanjša stroške zavarovalnin, povečan obseg preventivnih preiskav pa lahko poveča število odkritih obolenj in s tem škodno frekvenco.
- V primeru spremembe strukture portfelja lahko analiziramo vpliv na posamezno komponento in bolje predvidimo spremembo škodnega izkustva.

Analiziranje vsake komponente posebej zahteva, da so na voljo podatki o številu škod in višini zavarovalnin.

2.4.1 Neposredno modeliranje rizične premije

Kadar ni podatkov o številu škod in zneskih posameznih zavarovalnin, takrat je treba neposredno modelirati predviden znesek zavarovalnin.

Neposredno modeliranje čiste premije je lahko problematično zaradi singularnosti v izhodišču – nekateri zavarovanci v opazovanem obdobju niso imeli škod (ActEd 2013b, str. 11). Zato ima porazdelitev čiste premije nezvezno točko pri vrednosti nič. V fiziki bi rekli, da imamo točkovno maso. Za neposredno modeliranje rizične premije lahko uporabimo porazdelitev Tweedie.

Pri dopolnilnem zdravstvenem zavarovanju se zdi neposredno modeliranje rizične premije privlačno, saj je težko določiti, kateri škodni zahtevki sodijo k določenim škodnim dogodkom. Primer: Zavarovanec zboli in obišče osebnega zdravnika. Ta ga pošlje v laboratorij na preiskave in na pregled k specialistu. Ker je izvid negativen, zavarovanec pa se slabo počuti, ga pošlje k drugemu specialistu, obenem pa mu napiše recept za zdravila, ki jih zavarovanec redno jemlje in nimajo zveze s trenutnimi težavami. Drug specialist odkrije težave in napoti bolnika na bolnišnično zdravljenje. Čakalna doba za bolnišnično zdravljenje je tri mesece. Zavarovalnica dobi račune od različnih izvajalcev v različnih časovnih obdobjih in jih težko poveže z resničnim škodnim dogodkom. Namesto analize resničnih škodnih dogodkov lahko zavarovalnica analizira posamične zdravstvene storitve. Ker en škodni dogodek povzroči več zdravstvenih storitev, je kršena predpostavka o neodvisnosti škod (v primeru analize zdravstvenih storitev).

Po drugi strani pa se izkaže, da imata škodna frekvenca in povprečna škoda različne dejavnike, zato je kljub vsemu smiselno posebej analizirati škodno frekvenco in povprečno škodo.

2.4.2 Gama-log-normalni model rizične premije

Z uporabo kriterija AIC, ki je podrobneje razložen v poglavju 2.7.2, sem primerjal različne porazdelitve. Za modeliranje škodne frekvence se je izkazala najbolj primerna porazdelitev gama, za modeliranje poprečne zavarovalnine pa log-normalna porazdelitev. Povezovalna funkcija pri modelu škodne frekvence je logaritem, pri modelu povprečne zavarovalnine pa identiteta.

Oba modela lahko enostavno združimo v model rizične premije (63):

$$RP = e^{\frac{1}{znan\ efekt}\sum_{j1} X^{\check{s}.f.} * \beta^{\check{s}.f.}} e^{\left(\sum_{j2} X^{p.z.} * \beta^{p.z.}\right) + \frac{1}{2} * \frac{\varphi^{p.z.}}{\omega}} \tag{63}$$

kjer je:

- RP rizična premija
- $X^{\check{s}.f.}$ indikatorska matrika škodne frekvence
- $\beta^{\check{s}.f.}$ parametri škodne frekvence
- $X^{p.z.}$ indikatorska matrika povprečne zavarovalnine
- $\beta^{p.z.}$ parametri povprečne zavarovalnine
- $\varphi^{p.z.}$ skalarni parameter
- ω utež kohorte
- *znan efekt* mesečni indeks * število zavarovancev v kohorti

Rezultat modela škodne frekvence je pričakovano število storitev. Pričakovano frekvenco dobimo tako, da pričakovano število storitev delimo z znanim efektom (izpostavljenostjo in mesečnim indeksom, glej poglavje 2.5).

Pri programskem orodju SAS je treba paziti na točno definicijo parametra »scale«, ki ima različno tolmačenje pri različnih porazdelitvah.

2.5 Znan efekt in uteži

Z znanim efektom (ang. *offset*) lahko iz modela izločimo efekte, ki so znani vnaprej. Število škodnih zahtevkov je na primer premo sorazmerno z izpostavljenostjo. Izpostavljenost lahko obravnavamo kot znan efekt (Yan, 2009, str. 369). Yan (2009, str. 369) predlaga, da naj bo znan efekt transformiran z isto povezovalno funkcijo g. V poglavju 2.3.1 model škodne frekvence uporablja logaritem za povezovalno funkcijo. V takem primeru bi zapisali GLM kot (64):

$$\ln\big(E(\boldsymbol{Y})\big) = \beta * \boldsymbol{X} + \ln\left(izpostavljenost_{kohorte}\right) \tag{64}$$

Koledarski mesec je prav tako znan efekt in ga lahko izločimo iz analize GLM. V poglavju 4.1.2 je prikazan mesečni indeks števila škodnih zahtevkov. Ta indeks uporabimo kot znan efekt. Posledično dobimo dvanajstkrat manj kohort z dvanajstkrat večjim številom članov in večjo kredibilnostjo. Model GLM lahko zapišemo kot (65):

$$\ln\left(E(\boldsymbol{Y})\right) = \beta * \boldsymbol{X} + \ln\left(izpostavljenost_{kohorte}\right) + \ln(\, indeks_{mesec}) \qquad (65)$$

Znan efekt lahko uporabimo tudi, če želimo omejiti model (ActEd, 2013b, str. 67). Takšen primer bi se lahko zgodil, če bi v opazovanem letu prišlo do izrednega dogodka, denimo stavke zdravnikov, ki bi vplivala na število opravljenih storitev v danem mesecu in posredno na mesečni indeks. V primeru, da v prihodnosti ne pričakujemo, da se bo tak dogodek pojavil (v istem koledarskem mesecu), lahko mesečni indeks ustrezno korigiramo in ga vnesemo v znan efekt.

Z utežmi določimo pomembnost posameznega opazovanega dogodka. Izplačana zavarovalnina je sorazmerna s številom zavarovancev. Pri modeliranju pričakovane zavarovalnine se število zavarovancev v kohorti lahko uporabi kot utež.

Jong & Heller (2008, str. 48) predlagata uporabo podatkov, ki niso grupirani, zato predpostavljata, da imajo vsi dogodki utež 1. Število zavarovancev lahko obravnavamo kot utež, lahko pa kot znan efekt, saj ima znan, proporcionalen efekt na rizično premijo. Pri modeliranju povprečne zavarovalnine sem število zavarovancev uporabil kot utež.

2.6 Orodja za diagnostiko in izbiro med različnimi modeli

2.6.1 Logaritem količnika verjetnosti

Denuit et al. (2007, str. 42) in Jong & Heller (2008, str. 74) navajajo logaritem količnika verjetnosti kot statistiko za primerjavo modelov, pri katerem en model vsebuje vse parametre drugega. Tako lahko primerjamo podobne modele, pri katerih je eden malo bolj kompleksen od drugega, na primer vsebuje en dodatni parameter. Statistika ima porazdelitev $\chi^2_{(šp2-šp1)}$ in jo zapišemo kot (66):

$$2\left(l(\zeta) - l(\xi)\right) \sim \chi^2_{(šp2-šp1)} \qquad (66)$$

kjer je:

- $l(\zeta)$ logaritem verjetnosti prvega modela
- $šp1$ število prostostnih stopenj prvega modela
- $l(\xi)$ logaritem verjetnosti drugega modela

- $šp2$ število prostostnih stopenj drugega modela

Primer uporabe količnika si lahko pogledamo na primeru modeliranja škodne frekvence s porazdelitvijo gama in različnimi vhodnimi parametri. V Tabeli 3 so prikazani logaritmi verjetnosti za tri različne modele.

Model 3 in 2 lahko primerjamo med sabo tako, da izračunamo statistiko iz (66), ki ima vrednost (67):

$$2\big(l(3.model) - l(2.model)\big) = 10{,}92 \tag{67}$$

Ker ima 3. model eno prostostno stopnjo manj kot 2., ima statistika iz enačbe (67) porazdelitev χ^2_1. Verjetnost, da ima porazdelitev χ^2_1 vrednost 10,92, je zelo majhna. V tablicah (2002) je zapisano, da je 99,5 % verjetno, da ima porazdelitev χ^2_1 vrednost, manjšo od 8,00. Vrednosti nad 8,00 pa niso navedene. Zato lahko z več kot 99,5-odstotno gotovostjo izberemo 3. model kot bolj verjeten od 2. modela. To pomeni, da je interakcija med spolom in starostjo pomembna (signifikantna).

Podobno lahko primerjamo 2. model in 1. model. Vrednost statistike je 4250,28. Ker je vrednost statistike večja od 8,00, lahko prav tako z več kot 99,5-odstotno gotovostjo izberemo 2. model kot bolj verjeten od 1. modela. To pomeni, da je starost pomemben (signifikanten) parameter.

Tabela 3: Primerjava 3 modelov na osnovi porazdelitve gama

Model	**Vhodni parametri**	***Šp***	***l***
1. model	Spol	4.255	-43.985,4
2. model	Spol, starost	4.254	-41.860,26
3. model	Spol, starost in interakcija med spolom in starostjo	4.253	-41.854,8

Kjer je:

- $šp$ število prostostnih stopenj modela
- l logaritem verjetnosti modela

2.6.2 Akaike informacijski kriterij

Če se modela bistveno razlikujeta, količnika logaritma verjetnosti ne moremo uporabiti. V literaturi obstaja več kriterijev, najbolj znana sta Akaike informacijski kriterij (v nadaljevanju AIC) in Bayesov informacijski kriterij (v nadaljevanju BIC) (Jong & Heller, 2008, str. 62), ki sta definirana kot (68) in (69):

$$AIC \equiv -2l + 2p \quad (68)$$

$$BIC \ \equiv \ -2l + p\ln(n) \quad (69)$$

kjer je:

- l logaritem verjetnosti
- p število ocenjenih parametrov
- n število dogodkov

BIC in AIC se lahko uporabita za primerjavo modelov, ki temeljijo na istih podatkih. Model z nižjim AIC ali BIC naj bi bil boljši.

Primer uporabe AIC si lahko pogledamo na primeru modeliranja škodne frekvence z različnimi porazdelitvami:

Tabela 4: Primerjava modelov škodne frekvence z različnimi porazdelitvami

Model	**Porazdelitev**	**AIC**	***l***
1. model	Poisson	1.107.199	-553.596
2. model	Negativna binomska	86.040	-43.017
3. model	Gama	83.728	-41.860
4. model	Inverzna Gaussova	110.264	-80.628

Ker modeli uporabljajo različne porazdelitve, za primerjavo ne moremo uporabiti količnika verjetnosti. Zato primerjamo kriterije AIC. Iz Tabele 4 je razvidno, da ima 6. model najnižji kriterij AIC, zato sklepamo, da je model s porazdelitvijo gama najboljši.

Na podoben način lahko primerjamo različne porazdelitve za povprečno zavarovalnino. Iz podatkov (glej Sliko 15) izhaja, da je relacija med starostjo in zavarovalninami kvadratična. Vsak model je imel naslednje vhodne parametre:

- kvadrat starosti,
- starost,
- spol,
- število polic v kohorti (utež).

Tabela 5: Primerjava modelov povprečne zavarovalnine z različnimi porazdelitvami

Model	**Porazdelitev**	**AIC**	l
1. model	Gama	10.056	-5.023
2. model	Normalna	9.863	-4.926
3. model	Inverzna Gaussova	9.788	-4.889
4. model	Log-normalna	-4.172	2.091

Ker ima 4. model najnižji AIC, sklepam, da je log-normalna porazdelitev najbolj primerna za modeliranje povprečne zavarovalnine.

2.6.3 Devianca

ActEd (2013b, str. 35) definira prispevek vsakega dogodka k devianci (ang. *deviance*) kot (70):

$$d(Y_i;\mu_i) = 2\omega_i \int_{\mu_i}^{Y_i} \frac{(Y_i-\zeta)}{V(\zeta)} d\zeta \tag{70}$$

Prispevki merijo razliko med opazovano vrednostjo Yi in napovedjo μ_i, pri čemer se upošteva utež ω_i, točkam, kjer bi varianca morala biti manjša, pa se da večji poudarek (Acted, 2013b, str 35). Devianca je definirana vsota prispevkov (51) (ActEd, 2013b, str. 35):

$$D = \sum_{i=1}^{n} d(Y_i;\mu_i) \tag{71}$$

Devianca se lahko uporablja za primerjavo dveh modelov namesto količnika verjetnosti (glej poglavje 2.7.1) (ActEd 2013b, str. 25). Kaas et al. (2008, str. 305) navaja alternativno definicijo deviance (72):

$$D = -2\varphi \ln \frac{\hat{L}}{\tilde{L}} \tag{72}$$

kjer je:

- $\hat{L}$ verjetnost dotičnega modela
- $\tilde{L}$ verjetnost polnega (nasičenega) modela z n parametri

2.6.4 Ostanek napovedi

Ostanek napovedi (ang. *response residual, raw residual*) je enostavno razlika med opazovano in ocenjeno vrednostjo slučajne spremenljivke (73):

$$ostanek\ napovedi = y_i - \hat{\mu} \tag{73}$$

Ostanek napovedi je analogija navadnemu ostanku pri linearnih modelih, se pa v praksi ne uporablja, saj ne upošteva, da pri modelih GLM varianca ni konstantna.

2.6.5 Ostanek deviance

ActEd (2013b, str. 35) definira ostanek deviance kot (74):

$$r_i^D = \text{sign}(Y_i - \mu_i)\sqrt{d(Y_i, \mu_i)} \tag{74}$$

kjer je:

- $d(Y_i, \mu_i)$ prispevek i-tega dogodka k devianci
- $\text{sign}(Y_i - \mu_i)$ funkcija, ki ima sledeči vrednosti:
  - +1 če je $Y_i - \mu_i > 0$
  - -1 če je $Y_i - \mu_i < 0$

ActEd (2013b, str. 35) navaja, da je ostanek deviance mera razdalje med opazovanim dogodkom in napovedjo. Ker je devianca utežena obratno sorazmerno z varianco, ActEd (2013b, str. 36) pričakuje, da bodo ostanki deviance bolj normalno porazdeljeni v primerjavi z navadni ostanki.

ActEd (2013b, str. 37) navaja, da je za ostanke deviance pri dobrem modelu značilno, da:

- so simetrični okrog osi x,
- je njihovo povprečje 0,
- nimajo večjih odklonov pri posameznih dogodkih.

Ostanek deviance lahko standardiziramo, če ga delimo z $\sqrt{\varphi(1-h_{ii})}$. Anderson, Feldblum, Modlin, Schirmacher, Schirmacher & Thandi (2005, str. 54) menijo, da je razlog za standardizacijo transformacija ostankov, da bi v primeru, da model drži, imeli varianco 1. h_{ii} so diagonalni elementi matrike H iz poglavja 2.7.6.

2.6.6 Vzvod

Dogodki z večjim odmikom od srednjih vrednosti napovedi imajo lahko večji vpliv na izračun parametrov β. Neznan avtor (2010, str. 296) navaja, da je običajna mera za vpliv ali vzvod (ang. *leverage, hat-values*) vrednosti h_i (ang. *hat-values*).

ActEd (2013b, str. 26) navaja, da so h_{ii} diagonalni elementi matrike H (75):

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T, \tag{75}$$

kjer je X indikatorska matrika.

Matrika H pove pospešek, s katerim se spreminja logaritem verjetnosti z odmikom od optimalne rešitve (ActEd, 2013b, str. 28).

2.6.7 Standardiziran Pearsonov ostanek

ActEd (2013b, str. 36) definira standardiziran Pearsonov ostanek kot (76):

$$r_i^P = \frac{Y_i - E(Y_i)}{\mathrm{sd}(Y_i)\sqrt{1 - h_{ii}}} \tag{76}$$

kjer je:

- $\mathrm{sd}(Y_i)$ standardni odklon napovedi
- h_{ii} diagonalni elementi matrike H

Ker standardiziran Pearsonov ostanek upošteva pričakovano varianco in vzvod, lahko primerjamo dogodke z različnimi povprečji (Anderson et al., 2005, str. 55).

3 IZRAČUN ŠKODNIH REZERVACIJ

3.1 Popis

V magistrskem delu popis (ang. *RBNS*) ni bil posebej obravnavan. Zaradi hitrega razvoja škodnega procesa je popis relativno majhen. Določimo ga na osnovi računovodskih podatkov.

3.2 IBNR

Osnovni problem pri določitvi IBNR predstavlja časovni zamik med datumom opravljene storitve in rešitvijo (plačilom) zavarovalnine. Podatek o tem, koliko zavarovalnine je že rešeno, dobimo iz računovodskega programa. Oceniti moramo, koliko zavarovalnine še preostane za plačilo. Prihodnji del (še) nerešene zavarovalnine na podlagi že rešenega dela ocenimo tako, da analiziramo dinamiko reševanja škodnih zahtevkov v preteklosti.

Podatke o zavarovalnini, ki je bila rešena v določenem obdobju, ki jih dobimo iz računovodskega programa, prikažemo v dveh dimenzijah:

- v vrsticah je obdobje opravljene storitve (v zavarovalništvu se uporablja izraz datum nastanka škode) (v nadaljevanju **mesec nastanka**),
- v stolpcih je razlika med obdobjem rešitve in obdobjem opravljene storitve (v nadaljevanju **razvojni mesec**).

Na Sliki 2 je primer tako organiziranih podatkov, imenovan inkrementalni škodni trikotnik.

Slika 2: Primer škodnega trikotnika (v EUR)

	Razvojni meseci			
Mesec nastanka	0	1	2	3
nov. 15	100	15	7	1
dec. 15	90	14	5	
jan.16.	105	10		
feb. 16	111			

Opomba: vse vrednosti so izmišljene, gre za ilustrativni primer

Vsi zneski iz prve vrstice se nanašajo na storitve, ki so bile opravljene novembra 2015, ne glede na to, kdaj so bile rešene. Vsi zneski so bili rešeni v istem mesecu, kot so nastale storitve. Koledarski meseci so običajno manj pomembni. Predstavljajo jih diagonale.

Področje, označeno z rumeno, so zneski storitev, ki so že bile opravljene, pa še niso rešene. Vsota rumenega področja je IBNR; to je rezultat, ki ga iščemo. Razvoj škodnega procesa lažje analiziramo, če podatke iz inkrementalnega škodnega trikotnika seštejemo v kumulativni škodni trikotnik. Razlika med inkrementalnim in kumulativnim trikotnikom je, da celica v i-ti vrstici in j-tem stolpcu trikotnika predstavlja:

- znesek, ki je nastal v obdobju i in bil rešen v razvojnem mesecu j za inkrementalni trikotnik,
- vsoto vseh zneskov iz meseca nastanka i in so bili rešeni do razvojnega meseca j za kumulativni trikotnik.

Kumulativni trikotnik dobimo iz inkrementalnega, če vsakemu stolpcu prištejemo vsoto stolpcev, ki ležijo levo od njega. Na Sliki 3 vidimo kumulativni trikotnik, sestavljen iz trikotnika s Slike 2.

Slika 3: Primer kumulativnega škodnega trikotnika (v EUR)

	Razvojni meseci			
Mesec nastanka	0	1	2	3
nov. 15	100	115	122	123
dec. 15	90	104	109	
jan.16.	105	115		
feb. 16	111			

Opomba: vse vrednosti so izmišljene, gre za ilustrativni primer

Škodni količnik nam pove, za koliko se poveča znesek rešenih zavarovalnin v enem razvojnem mesecu. Primer: iz trikotnika na Sliki 3 je razvidno, da je bilo v prvem razvojnem mesecu rešenih 295 EUR zavarovalnin, do konca drugega meseca pa 334 EUR zavarovalnin. Pri računanju škodnih količnikov pazimo, da imajo stolpci enako število členov, drugače primerjava ni smiselna. Z enačbo lahko zapišemo škodni količnik df_{10} kot:

$$df_{10} = \frac{115+104+115}{100+90+115} = 1{,}132 \quad (77)$$

V februarju 2016 je bilo rešenih 111 EUR zavarovalnin, ki so nastale v istem obdobju. Če se bo trend nadaljeval, potem lahko sklepamo, da bo do konca marca rešenih 125,67 EUR zavarovalnin. V marcu lahko pričakujemo, da bomo rešili 14,67 EUR zavarovalnin.

Če izračunamo škodne količnike za vsa leta, lahko ocenimo, kolikšen bo končni znesek zavarovalnin. Če množimo znesek že rešenih zavarovalnin s serijo škodnih količnikov, dobimo oceno končnega zneska. Serije ne računamo v nedogled, temveč naredimo predpostavko, da so po določenem času vsi zahtevki rešeni. Pri dopolnilnem zavarovanju sem predpostavil, da so vsi zahtevki rešeni po 8 mesecih. V gornjem ilustrativnem primeru lahko predpostavimo, da so vse škode rešene po 3 mesecih. Končni znesek zavarovalnin označimo s kartico ULT. IBNR je razlika med ULT in že rešenimi zavarovalninami.

Seriji škodnih količnikov rečemo razvojni faktor in je definirana kot (ActEd 2005b):

$$f_i = df_{j,j-1} \cdot df_{j+1,j} \cdot \ldots \cdot df_{7,6} \quad (78)$$

kjer je:

- f_j razvojni faktor za razvojni mesec j
- $df_{j+1,j}$ škodni količnik za razvojni mesec j

Če znesek iz kumulativnega trikotnika množimo z razvojnim faktorjem f_j, dobimo oceno ULT za posamezni mesec nastanka storitve (75):

$$\widehat{ULT^i} = x_i^j * f_j \tag{79}$$

kjer je:

- i mesec nastanka
- $\widehat{ULT^i}$ ocena ULT za mesec nastanka i
- j razvojni mesec
- f_j razvojni faktor za razvojni mesec j

V enačbi (75) vedno vzamemo maksimalni razvojni mesec, za katerega imamo podatke v škodnem trikotniku. Za storitve, nastale v januarju 2016, imamo na primer podatke za dva razvojna meseca, zato v enačbo (75) vstavimo vrednost 1 za j. Za storitve, nastale v februarju 2016, imamo na voljo samo podatke za en razvojni mesec, zato v enačbo vstavimo vrednost 0 za j.

Za vsak mesec nastanka storitve izračunamo *IBNR*^{i}, ki je razlika med *ULT*^{i} in že rešenimi škodami. Vsota *IBNR*^{i} za posamezni mesec nastanka storitve je končni IBNR. Na tak način lahko izračunamo pričakovane zavarovalnine v prihodnosti za storitve, ki so bile opravljene v preteklosti. Na Sliki 4 je primer razvitega škodnega trikotnika.

Slika 4: Primer razvitega škodnega trikotnika (v EUR)

	Razvojni meseci					
Mesec nastanka	0	1	2	3	ULT	IBNR
nov. 15	100	115	122	123	123	0
dec. 15	90	104	109	110	110	1
jan.16.	105	115	121	122	122	7
feb. 16	111	126	133	134	134	23
Skupaj:	406	460	485	489	**489**	**31**

Opomba: vse vrednosti so izmišljene, gre za ilustrativni primer

Ta metoda izračuna IBNR se imenuje chain-ladder (v nadaljevanju metoda CH). ActEd (2005b, str. 39) navaja, da so možne tudi drugačne definicije škodnega količnika (77), kot na primer aritmetično povprečje.

3.2.1 Postopek izračuna IBNR

Izračun IBNR je imel naslednje korake:

- pregledal sem podatke in odstranil anomalije,
- izračunal sem prvo oceno za razvojne faktorje z metodo CH,
- izbral primerno metodo,
- naredil izračun,
- ocenil napako oziroma primerjal napake različnih metod.

Iz analize sem odstranil zadnji mesec, ker se je spremenilo obdobje, v katerem računovodstvo zaključi mesec. Ker ima sprememba enkraten učinek, bi upoštevanje tega meseca dalo napačno projekcijo.

Za prvo oceno razvojnih faktorjev sem uporabil metodo CH (z uporabo uteženega povprečja), ker je uveljavljena in preskušena metoda. Na Sliki 5 je prva ocena za razvojne faktorje za dopolnilno zavarovanje izračunana na podlagi podatkov za 58 mesecev. Škodni proces se razvija zelo hitro, saj se vrednost razvojnih faktorjev hitro približa vrednosti 1, kar sledi iz enačbe (80).

Z uporabo enačbe (79) lahko $IBNR^i$ zapišemo kot (80):

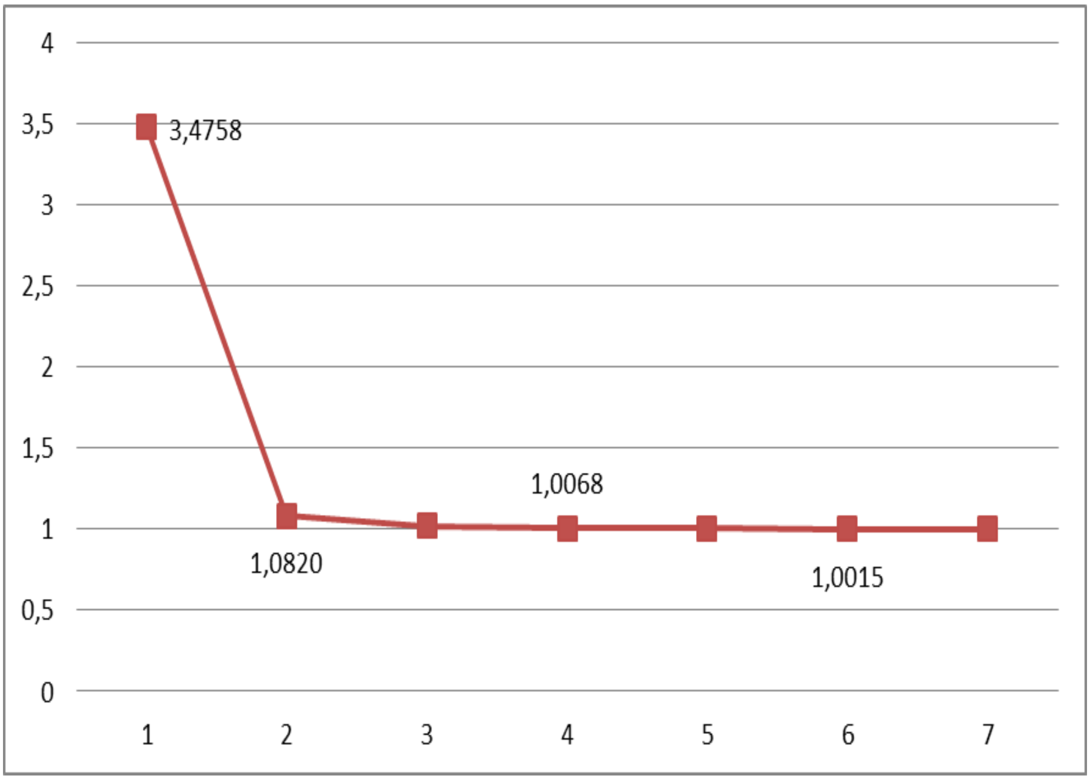
$$IBNR^i = \widehat{ULT^\iota} - x_i^j = x_i^j * f_j - x_i^j = x_i^j * (f_j - 1) \tag{80}$$

kjer je:

- i mesec nastanka
- $\widehat{ULT^\iota}$ ocena ULT za mesec nastanka i
- $IBNR^i$ IBNR za mesec nastanka i
- j razvojni mesec
- f_j razvojni faktor za razvojni mesec j

V grafu na Sliki 5 vidimo, da razvojni faktorji po prvem razvojnem mesecu ležijo blizu vrednosti 1. Iz enačbe (80) sledi, da ko gre razvojni faktor f_j proti 1, gre $IBNR^i$ proti 0, kar pomeni, da je večina zavarovalnin rešena. Predpostavil sem, da so vse zavarovalnine po 8 mesecih že rešene. V primerjavi z drugimi zavarovalnimi vrstami je to zelo hitro.

Slika 5: Prva ocena razvojnih faktorjev za dopolnilno zavarovanje



Običajno se pri metodi CH uporablja definicija količnikov iz enačbe (77). Enačba (77) predstavlja uteženo povprečje, kjer so uteži že rešene zavarovalnine. Namesto uteženega povprečja bi lahko uporabili tudi aritmetično povprečje, ki je zapisano z enačbo (81).

$$df_{1,0} = \frac{\frac{115}{100}+\frac{104}{90}+\frac{115}{105}}{3} \tag{81}$$

Variabilnost razvojnih faktorjev se lahko oceni s koeficientom variabilnosti. Večji, kot je koeficient variabilnosti, manjša je zanesljivost razvojnega faktorja. Koeficient variabilnosti je definiran kot količnik korena variance in srednje vrednosti:

$$c_v = \frac{\sqrt{\mathrm{var}(Y_i)}}{E(Y_i)} \tag{82}$$

V Tabeli 6 so prikazani koeficienti variabilnosti razvojnih faktorjev za dopolnilno zavarovanje, izračunani za aritmetično povprečje.

Tabela 6: Koeficient variabilnosti razvojnih faktorjev za dopolnilno zavarovanje

Razvojni faktor	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Aritmetično povprečje	3,5069	1,0815	1,0179	1,0063	1,0025	1,0009	1,0004	1,0001	1,0000
Uteženo povprečje	3,4758	1,0820	1,0184	1,0068	1,0030	1,0015	1,0010	1,0007	1,0006
Std. odklon	0,3751	0,0211	0,0047	0,0028	0,0018	0,0009	0,0007	0,0005	0,0000
Koef. variabilnosti	10,70 %	1,95 %	0,46 %	0,27 %	0,18 %	0,09 %	0,07 %	0,05 %	0,00 %

Iz Tabele 6 je razvidno, da so razvojni faktorji stabilni, z izjemo prvih dveh razvojnih faktorjev. f_1 je blizu vrednosti 1, kar glede na enačbo (76) pomeni, da je $IBNR^1$ majhen, zato variabilnost ni tako kritična. Ker se je po dveh mesecih zgodila večina razvoja škodnega dogodka, je na voljo dovolj informacij in se škodna rezervacija lahko določi na enostaven način. Metoda CH, kot je opisana v poglavju 3.2, je primerna za določitev škodnih rezervacij od 2. meseca naprej. Za določitev prispevka k IBNR po prvem razvojnem mesecu je treba najti boljšo metodo.

3.3 Alternativne metode izračuna IBNR

3.2.2 Metoda Bornhuetter-Ferguson

Bornhuetter in Ferguson predlagata metodo (v nadaljevanju BF), ki oceni ULT^i kot kombinacijo ocene metode CH in neke druge ocene. Pomembno je, da druga ocena ni pridobljena z uporabo škodnega trikotnika. Acted (2005b) predlaga, da drugo oceno naredimo na podlagi pričakovanega škodnega količnika.

Metodo BF lahko zapišemo v obliki enačbe (83), ki združuje obe oceni:

$$\widehat{ULT^{i}_{BF}} = \widehat{ULT^{i}_{CH}} * \frac{1}{f_j} + \widehat{ULT^{i}_{2.ocena}} * \left(1 - \frac{1}{f_j}\right) \tag{83}$$

kjer je:

- $\widehat{ULT^{i}_{BF}}$ ocena ULT^i po metodi BF za mesec nastanka i
- $\widehat{ULT^{i}_{CH}}$ ocena ULT^i po metodi CH za mesec nastanka i
- $\widehat{ULT^{i}_{2.ocena}}$ neodvisna (druga) ocena ULT^i za mesec nastanka i
- f_j razvojni faktor za razvojni mesec j

V enačbi (79) upoštevamo za vsak mesec nastanka i največji razvojni mesec j, za katerega imamo na voljo podatke o rešenih zavarovalninah. Oceno $\widehat{ULT_{CH}^{i}}$ dobimo z uporabo enačbe (75).

Če od končnega zneska $\widehat{ULT_{BF}^{i}}$ odštejemo že rešen del, dobimo oceno za $IBNR_{BF}$ (84):

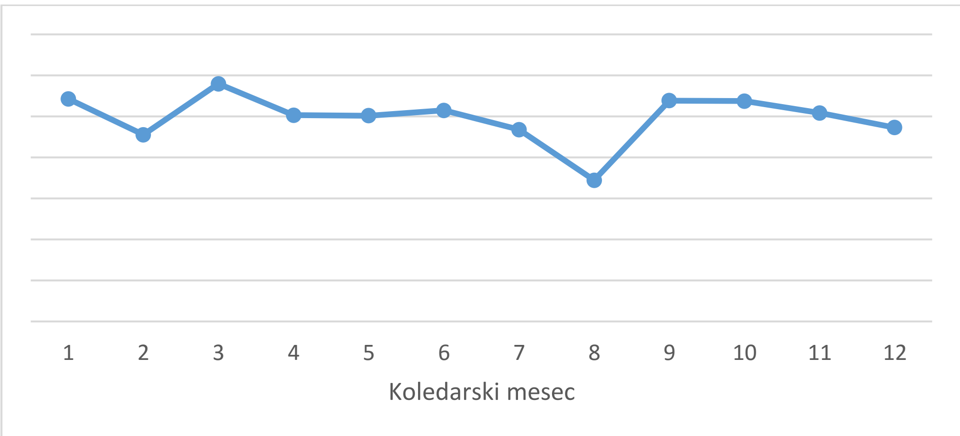
$$\widehat{IBNR_{BF}^{i}} = \widehat{ULT_{CH}^{i}} * \frac{1}{f_j} + \widehat{ULT_{2.ocena}} * \left(1 - \frac{1}{f_j}\right) - x_i^j \tag{84}$$

Če v enačbo (84) vstavimo enačbo (79), lahko zapišemo enačbo za $IBNR_{BF}$ kot (85). Tako je metoda BF običajno zapisana v aktuarski literaturi (npr. ActEd 2005b):

$$IBNR_{BF} = \widehat{ULT_{2.ocena}} * \left(1 - {}^{1}/_{f}\right) \tag{85}$$

Za drugo oceno končnega zneska zavarovalnin sem uporabil povprečni končni znesek zavarovalnin po posameznem koledarskem mesecu iz podatkov o zavarovalninah. Na Sliki 6 so prikazani povprečni ULT za posamezni koledarski mesec. Vidimo, da je končni znesek zavarovalnin za storitve, nastale v marcu, v povprečju najvišji, končni znesek za storitve, nastale v avgustu, pa najmanjši. Julija in avgusta je zaradi poletnih dopustov v bolnicah opravljenih manj tistih operacij, ki niso nujne, kar je razvidno tudi s Slike 11, ki prikazuje število opravljenih storitev. Februarja so zimske počitnice, zato se prav tako zniža število opravljenih storitev, kar se kompenzira z povečanim obsegom storitev v marcu.

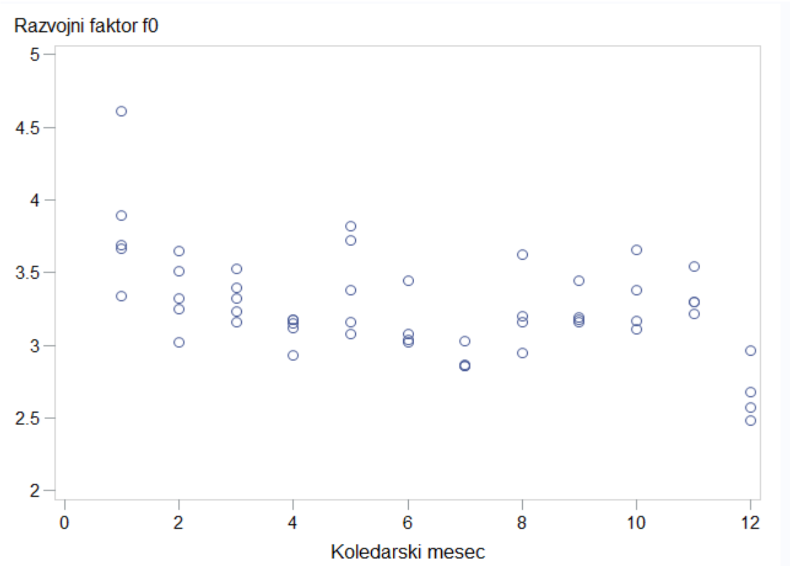
Slika 6: Končna višina izplačanih zavarovalnin glede na koledarski mesec



3.2.3 Metoda GLM

Večina modelov za izračun IBNR ne upošteva koledarskega meseca. Vendar je v primeru dopolnilnega zavarovanja koledarski mesec pomemben parameter. Razvojni faktor f_0, ki je najbolj pomemben, lahko modeliramo s pomočjo GLM. Na Sliki 7 so prikazani razvojni faktorji f_0, kot sledijo iz škodnih tabel.

Slika 7: Razvojni faktor f_0 (glede na podatke)



Za modeliranje razvojnega faktorja f_0 sem uporabil naslednji model:

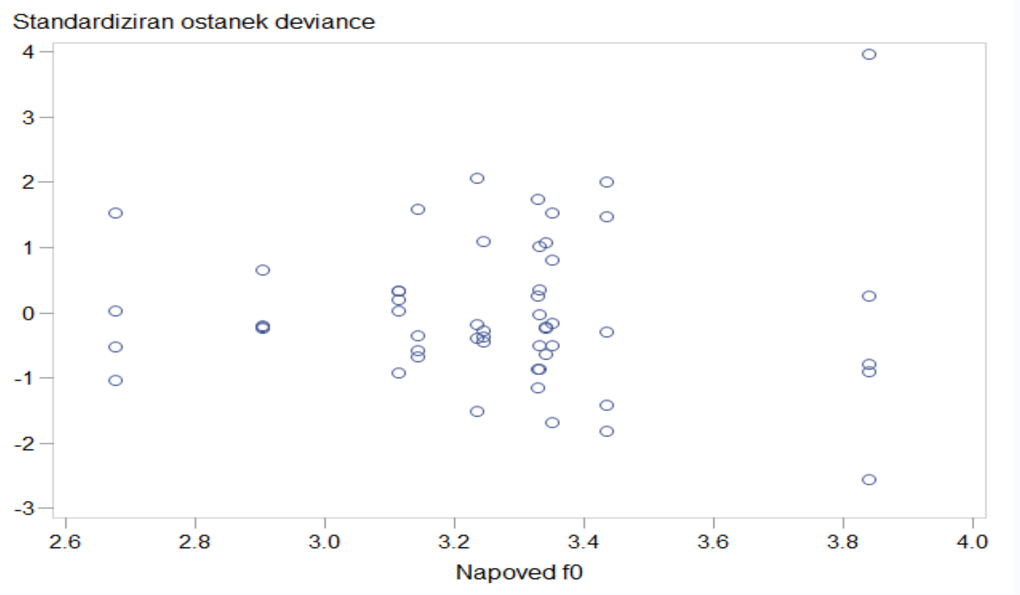
- porazdelitev napake je normalna,
- povezovalna funkcija je identiteta,
- vhodni parameter je koledarski mesec.

Tabela 7: Napoved razvojnega faktorja f_0

Kol. mesec	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Napoved GLM za f_0	3,84	3,35	3,33	3,11	3,433	3,14	2,90	3,23	3,25	3,33	3,34	2,68

Primernost modela lahko ocenimo s standardiziranimi ostanki deviance, ki so prikazani na Sliki 8.

Slika 8: Standardizirani ostanki deviance za razvojni faktor f_0



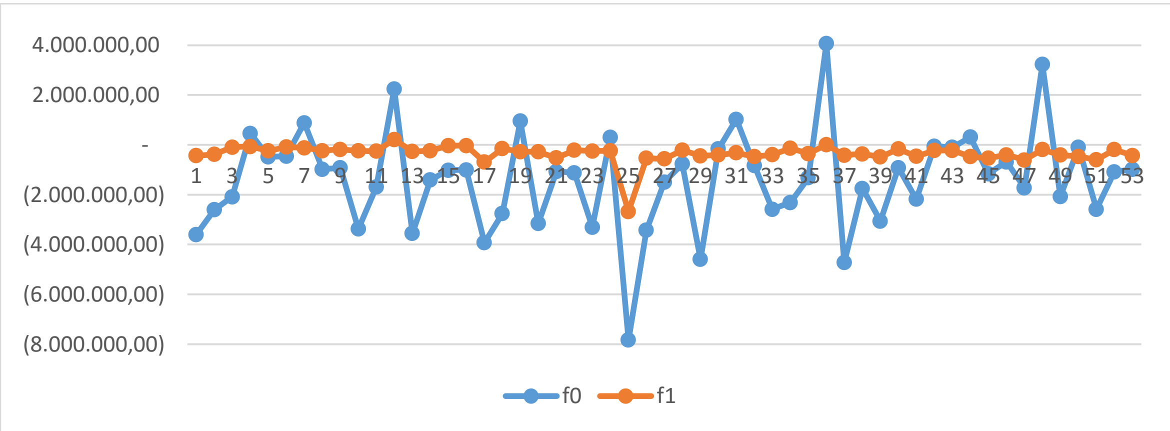
Kot je razvidno s Slike 8, so standardizirani ostanki deviance simetrični okoli osi x. Nimajo tudi velikih odklonov, zato sklepam, da je model ustrezen.

3.4 Ocena napake posamezne metode

Napako posamezne metode sem ocenil kot razliko med napovedjo končnega zneska zavarovalnin in točnim končnim zneskom za 53 zaporednih mesecev. To so vsi meseci, za katere je bilo na voljo 8 mesecev podatkov. Za točen končni znesek zavarovalnin sem vzel znesek po 8 razvojnih mesecih.

Na Sliki 9 je ocena napake za metodo CH po prvem in po drugem razvojnem mesecu.

Slika 9: Ocena napake metode CH (v EUR)

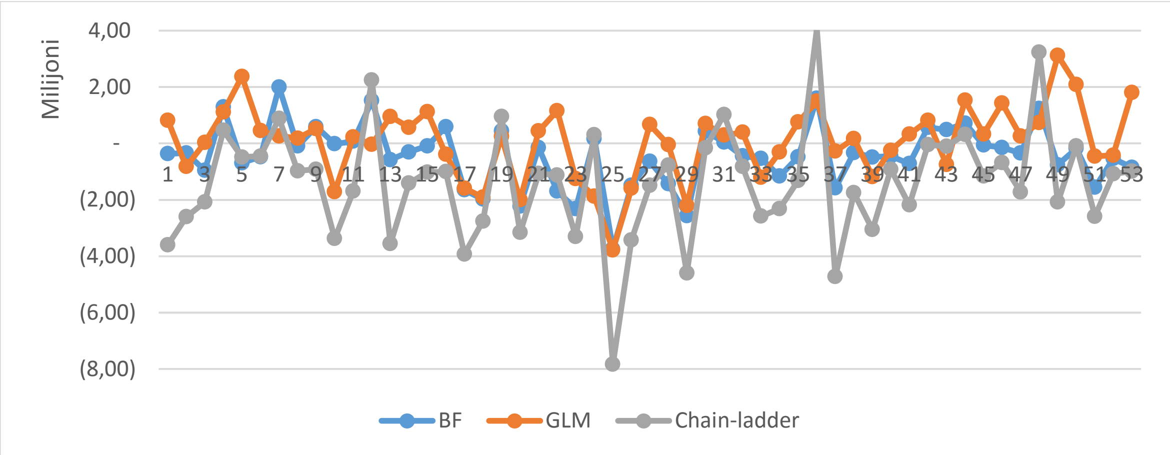


Napoved po prvem razvojnem mesecu (modra črta) je nezanesljiva. Večkrat podceni obveznosti za 4.000.000 EUR, kar v praksi pomeni, da bi zavarovalnica imela težave pri upravljanju z naložbami. Lahko bi se ji zgodilo, da bi vezala preveč sredstev in bi morala depozite odpoklicati, kar je povezano z dodatnimi stroški.

Napoved po drugem razvojnem mesecu je bolj zanesljiva in omogoča zavarovalnici učinkovito upravljanje s sredstvi. Izjema je 25. točka, ki predstavlja januar 2013. Podatki za ta mesec so nezanesljivi, zato velika napaka ni skrb vzbujajoča. Ob koncu leta so možni odmiki od normalnih vrednosti, ki so povezani s poslovnimi odločitvami. Le-te niso vedno v domeni zavarovalnice, izvajalci storitev lahko zdravstvene storitve fakturirajo pred koncem leta ali po začetku novega leta. Aktuarska funkcija mora biti pozorna na morebitne anomalije ob koncu leta.

Glede na Sliko 9 menimo, da je metoda CH ustrezna za vse razvojne mesece, razen za prvega.

Slika 10: Primerjava napake različnih metod (v EUR)



Glede na Sliko 10 se zdita metodi BF in GLM enakovredni. Pri obeh obstaja realno tveganje, da bo IBNR različen od ocene za 2.000.000 EUR.

Tabela 8: Ocena napake posamezne metode

Mera	**CH**	**BF**	**GLM**
Povpr. abs. napaka (v EUR)	-1.387.877,10	- 429.163,45	60.976,09
Povpr. rel. napaka (v %)	-6,70	-1,90	0,40
Std. odklon rel. napake (v %)	9,70	5,40	6,20

V Tabeli 8 so ocene napake posamezne metode pri izračunu IBNR po prvem razvojnem mesecu. Najmanjši standardni odklon relativne napake ima metoda BF, vendar sistematično podceni IBNR za 429.169 EUR. Zato se mi zdi uporaba metode GLM bolj primerna za izračun IBNR.

Obe metodi, BF in GLM imata približno 6 % standardnega odklona. To je tveganje, ki se ga ne da odpraviti, saj gre za tveganje, ki je posledica slučajnostne narave procesa (ni napaka ocene parametrov ali napaka modela).

Vzajemna zdravstvena zavarovalnica je v preteklosti oblikovala rezervacije na podlagi opazovanja trendov razvojnih faktorjev. Z uporabo metod BF in GLM je izboljšala točnost napovedi in učinkovitost upravljanja s kapitalom.

3.5 Izračun IBNR

IBNR sem izračunal po naslednjem postopku:

- izračunal sem razvojni faktor za prvi mesec v skladu z:
  - metodo CH,
  - metodo GLM,
  - metodo BF,
- odločil sem se za aritmetično povprečje metod BF in GLM,
- razvojne faktorje za ostale mesece sem izračunal po metodi CH,
- iz razvojnih faktorjev sem določil končni znesek zavarovalnine za posamezni mesec,
- prispevek k IBNR za posamezni mesec je razlika med končnim zneskom in že rešenim zneskom,
- IBNR je vsota prispevkov.

Primer: izračun IBNR za škode, nastale v mesecu maju 2016, nastalih v istem mesecu. Zaradi zaupnosti podatkov so vse številke v Tabeli 9 množene s konstanto. V Tabeli 9 je primerjava med tremi metodami.

Tabela 9: Primerjava rezultata IBNR treh različnih metod

Gotovinski tok	**CH**	**BF**	**GLM**
IBNR brez zadnjega meseca	367	367	367
Ocena za 1. mesec	2.476	2.338	2.433
Skupaj IBNR	2.844	2.705	2.801

Rezultati vseh treh metod so podobni, rezultata metod BF in GLM ležita znotraj intervala najboljše ocene. Ker je vsaka številka med 2.338 in 2.433 verjetna in bi jo lahko proglasil za najboljšo oceno, vzamem za najboljšo oceno aritmetično povprečje.

V izračunu IBNR niso upoštevane obveznosti za nadomestila, ki jih mora zavarovalnica izplačevati izvajalcem zdravstvenih storitev kot nadomestilo za elektronsko posredovanje podatkov, izvajalci pa teh nadomestil še niso zaračunali. Višino teh obveznosti ocenimo in prištejemo k izračunu IBNR.

4 IZRAČUN NAJBOLJŠE OCENE PREMIJSKE REZERVE

4.1 Predpostavke in podatki

4.1.1 Podatki

Podlaga za izračun premijske rezerve sta bila dva nabora podatkov:

- podatki o številu škodnih zahtevkov in znesku zavarovalnine,
- podatki o številu zavarovancev na določen dan 30. 6. 2014 in 30. 6. 2015,

Opazovani so bili vsi prijavljeni škodni zahtevki, ki so nastali med 1. 1. 2014 in 31. 12. 2015. Obdelava je bila narejena konec aprila 2016. Popis in IBNR sta bila zanemarjena. Na sam model ne vplivata bistveno, je pa treba končni rezultat korigirati. Podatke za december 2015 bi tako morali množiti z razvojnim faktorjem $f_3 = 1{,}0068$, podatke za november 2015 pa z razvojnim faktorjem $f_4 = 1{,}003$ (glej Tabelo 6).

Podatki o številu škodnih zahtevkov in skupni zavarovalnini so zbrani v naslednje kohorte:

- koledarski mesec,
- koledarsko leto,
- starost,
- spol.

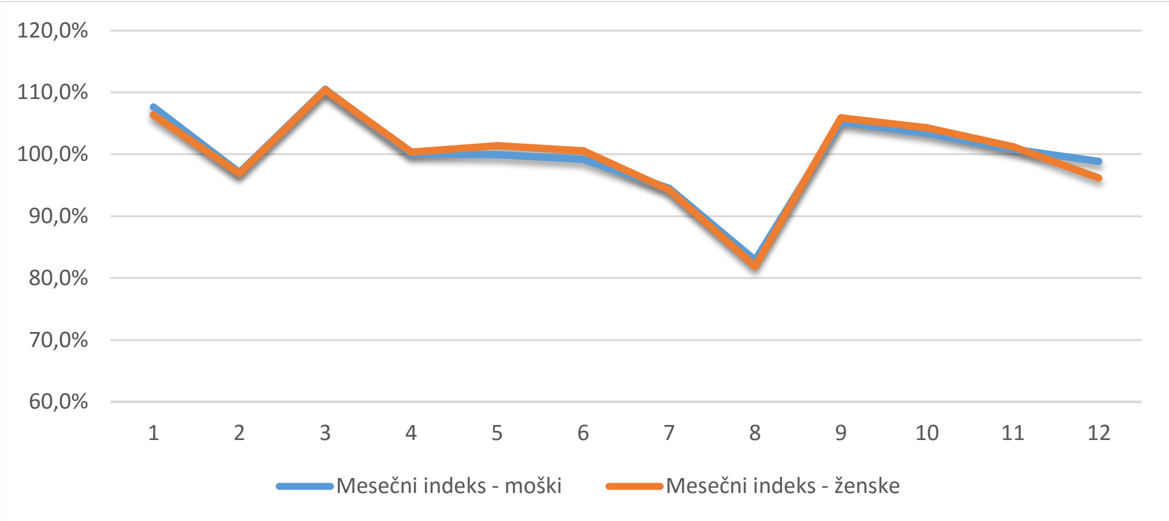
Idealno bi bilo, če bi bil na voljo tudi podatek o trajanju posamezne police. Vsota trajanj posameznih polic v vsaki kohorti bi predstavljala izpostavljenost. Tega podatka nisem imel, zato sem izpostavljenost ocenil kot število zavarovancev na dan 30. 6. 2014 in 30. 6. 2015. Število zavarovancev je bilo razdeljeno na enake kohorte kot podatki o številu zahtevkov in skupni zavarovalnini. Ker podatki vsebujejo več kot polovico slovenskega trga, ocenjujem, da je struktura opazovanega portfelja stabilna, zato je uporabljen približek primeren. Podatki vsebujejo več kot 1.100.000 letnih polic, razdeljenih v 4258 kohort.

Smiselno bi bilo narediti analizo ujemanja podatkov na nivoju posamezne police (negrupirani podatki) z različnimi porazdelitvami. Običajni testi za ujemanje porazdelitev so χ^2, test Kolmogorov-Smirnov in test Anderson-Darling. Engmann in Cousineau (2011) navajata, da sta tako test Kolmogorov-Smirnov kot Anderson-Darlington močnejša testa v primerjavi s testom χ^2. Prednost testa Anderson-Darlington pa je večja občutljivost v repih porazdelitve. Za preverjanje ujemanja porazdelitve bi bili potrebni podatki na nivoju posamezne police. Za vsako polico bi bilo treba določiti število škod, znesek zavarovalnin in trajanje police (izpostavljenost), kar pomeni, da bi bilo treba povezati škodni in premijski del. Taka analiza je vsekakor smiselna. V magistrskem delu je izpuščena, saj niso bili na voljo potrebni podatki. Namesto tega sem porazdelitve ocenil z GLM in kriterijem AIC (glej poglavje 2.5.2).

4.1.2 Sezonski efekt pri obsegu zdravstvenih storitev

Obseg zdravstvenih storitev ima jasno izražen sezonski efekt. V avgustu, ko je čas počitnic, je število storitev manjše, se pa poveča v septembru. To vpliva na škodno frekvenco. Na Sliki 11 je prikazan relativni odklon števila storitev po posameznih koledarskih mesecih glede na letno povprečje za moške in ženske.

Slika 11: Indeks števila storitev po koledarskih mesecih



Ker je sezonski efekt za moške in ženske zelo podoben, sem pri izračunu škodne frekvence upošteval enoten indeks kot del znanega efekta (glej poglavje 2.5).

4.1.3 Stroški

ActEd (2011, str. 53) razlikuje med neposrednimi stroški, ki jih lahko pripišemo določeni zavarovalni vrsti in posrednimi, kjer je za razdelitev stroškov potreben smiseln ključ delitve.

ActEd (2011, str. 54) navaja naslednje načine delitve stroškov:

- po zavarovalnem produktu,
- po času nastanka stroška (začetni, ob skadenci, končni),
- po ključu delitve (% premije, % zavarovalnin, fiksni znesek na polico).

Pri razdelitvi stroškov se upošteva, kaj je glavni dejavnik stroška. Proces prevzema rizikov življenjskih zavarovanj je na primer odvisen od zavarovalne vsote. Pri nizkih zavarovalnih vsotah so lahko v zavarovanje sprejeti vsi zavarovanci (na podlagi vprašalnika ali celo brez), pri visokih vsotah pa je potreben individualni sprejem. Individualni sprejem je dražji, zato je zavarovalna vsota smiseln ključ delitve za stroške prevzema rizikov. Med trajanjem zavarovanja pa ima zavarovalnica podobne stroške z administracijo iste vrste police, zato se zdi smiselno, da vsaki polici določimo fiksni znesek.

Stroški pridobivanja zavarovanj načeloma niso vključeni v premijsko rezervo, saj so pripoznani ob sklenitvi zavarovanja, ker gre pri dopolnilnem zavarovanju za kratkoročna zavarovanja, ki se sklepajo za obdobje enega leta. V primeru, da temu ni tako, je treba premijsko rezervo ustrezno korigirati. Podatke o številu novo sklenjenih polic glede na prodajni kanal in pravilnike o višini provizije lahko pridobimo v oddelku trženja in ustrezno ocenimo višino morebitnih neizplačanih provizij.

Posredne stroške, kot so stroški dela (razen stroškov dela komercialistov in šalteristov), stroški najema poslovnih prostorov … je treba smiselno razdeliti. Za razdelitev stroškov v Vzajemni zdravstveni zavarovalnici je zadolžen oddelek kontrolinga. Na podlagi podatkov, pridobljenih iz oddelka kontrolinga, pa stroške dodatno analizira tudi aktuariat.

4.1.4 Premije

Po konvenciji (ActEd 2012, str. 29) pri vrednotenju premijske rezervacije predpostavljamo, da je premija, ki zapade na začetku obdobja, že pripoznana. Če zavarovanec na primer mesečno plačuje premijo in naredimo izračun premijske rezerve na stanje na dan 31. marec, domnevamo, da je mesečna premija za april že pripoznana. Premija za mesec april je knjigovodsko že priznan prihodek in se knjiži kot gotovina ali pa kot kratkotrajna terjatev (odvisno od plačila). Zato je ne moremo šteti v premijsko rezervo.

Možno bi bilo alternativno sklepanje, da premija za april še ni pripoznana, v primeru, da je plačana in se knjigovodsko beleži kot aktivna časovna razmejitev. V tem primeru bi premijo za mesec april šteli v premijsko rezervo.

Oba načina sta možna, pomembno pa je, da aprilske premije ne štejemo dvakrat, med poslovne prihodke in kot gotovinski tok, ki zmanjšuje premijsko rezervo. Način obravnave premije za naslednje obdobje sodi v pravilnik, ki govori o izračunu najboljše ocene.

4.1.5 Inflacija

Efekt inflacije ni bil upoštevan. Zaradi nizke obrestne mere so zneski v zadnjih 58. mesecih primerljivi. Pri dopolnilnih zavarovanjih inflacija ni najbolj pomemben koledarski efekt. Ker zavarovalnice krijejo finančna doplačila zdravstvenih storitev, je obseg zavarovalnin odvisen od:

- obsega zdravstvenih storitev,
- cene zdravstvenih storitev,
- stopnje doplačila zdravstvenih storitev.

V primeru spremembe cen ali stopenj storitev je treba efekt upoštevati pri izračunu rizične premije. Obseg zdravstvenih storitev se izraža v povečani ali zmanjšani škodni frekvenci in ga lahko zaznamo z opazovanjem le-te.

4.1.6 Obrestna mera

Pri izračunu premijske rezerve v programskem orodju Mo.net je bila za diskontiranje gotovinskih tokov uporabljena ne-tvegana trenutna obrestna mera, kot jo redno objavlja evropski regulator EIOPA na svoji spletni strani. Iz trenutne obrestne mere sem izračunal terminsko obrestno mero v skladu s formulo (3). Iz letne obrestne mere sem izračunal mesečno ob predpostavki, da se obrestna mera med letom ne spreminja.

$$i_t^{mesečni} = \sqrt[12]{1 + i_t} \tag{86}$$

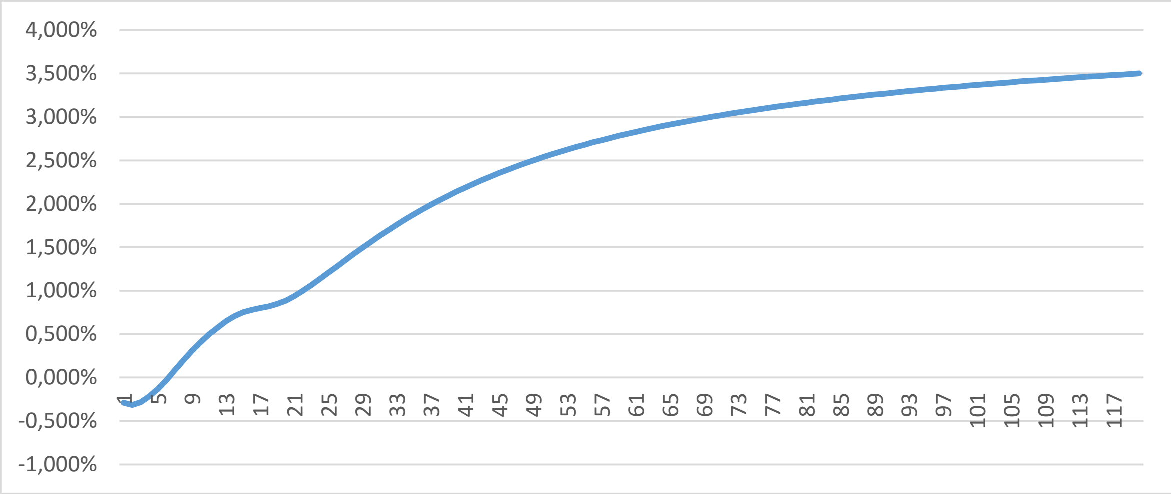
kjer je:

- $i_t^{mesečni}$ mesečna terminska obrestna mera
- i_t letna terminska obrestna mera

Mesečne obrestne mere sem vnesel v programsko orodje Mo.net, s katerim sem izračunal premijsko rezervo. Škodne rezerve nisem diskontiral, zato nominalna obrestna mera nanjo ne vpliva.

Kot je razvidno iz Slike 12, je v prvih 6. letih ne-tvegana obrestna mera negativna, kar pomeni, da se premijska rezerva v resnici povečuje in ne zmanjšuje. Bolj običajna je pozitivna obrestna mera. Ker je absolutno gledano obrestna mera majhna in ker je meja pogodb 2 meseca, obrestna mera ne vpliva pretirano na končen izračun. V preteklosti je bila običajna predpostavka, da ne-tvegana obrestna mera znaša 4 %. V trenutnih razmerah taka predpostavka ni primerna.

Slika 12: Ne-tvegana trenutna obrestna mera



Vir: EIOPA, Risk Free Term Structure, 2016.

4.1.7 Izravnalna shema

V skladu z ZZVZZ-UPB3 so se zavarovalnice, ki sklepajo dopolnilna zavarovanja, dolžne vključiti v izravnalno shemo. Namen izravnalne sheme je izravnati strukturne razlike med zavarovalnicami, kar omogoča univerzalno premijo.

V magistrskem delu je izračunana premijska rezerva in škodna rezerva brez upoštevanja izravnalne sheme. Efekt izravnalne sheme ocenimo na podlagi preteklih obračunov ob predpostavki, da se razmerje škodnih količnikov med tremi zavarovalnicami, ki ponujajo dopolnilno zavarovanje, ne bo spremenil.

4.1.8 Tablice smrtnosti

Zaradi kratke meje pogodb smrtnost in dolgoživost ne vplivata bistveno na premijsko rezervo. Zaradi sorazmerno kratke zgodovine Vzajemne zdravstvene zavarovalnice pri premijski rezervi uporabljamo zunanje podatke.

V okviru Institute and Faculty for Actuaries deluje skupina Continuous Mortality Investigation, ki zbira podatke o smrtnosti od zavarovalnic v Združenem kraljestvu. V preteklosti je skupina javno objavljala izsledke svojih študij. Zadnje javno dostopne tablice smrtnosti so *‘00’ series tables* (v nadaljevanju tablice 00). Tablice 00 temeljijo na izkustvih med leti 1999 in 2002. Tablice 00 vsebujejo različne tablice.

Vrsta zavarovanja posameznih tablic vpliva na tablice same. Ljudje, ki kupujejo pokojninske rente, običajno živijo dlje. Razlogov je več. Pokojninske rente kupuje bolj premožen sloj prebivalstva, ki je bolje osveščen in običajno živi bolj zdrav življenjski stil. Dopolnilno zavarovanje je v Sloveniji zelo razširjeno, praktično je zavarovana vsa populacija. Zato sem poskušal najti vrsto zavarovanja, kjer je efekt selekcije najmanjši. Zato sem vzel kombinirane tablice za ženske, ki kupijo rizično zavarovanje (ang. *temporary assurance*). Ker je v dopolnilno zavarovanje sprejeta vsaka oseba, doba selektivnosti ni bila upoštevana.

Na podlagi podatkov Statističnega urada Republike Slovenije (v nadaljevanju SURS) iz leta 2007 so bile narejene univerzalne tablice za splošno populacijo (v nadaljevanju SLO 2007). Aktuarji, ki so pripravljali zavarovalno-tehnične podlage, so predpostavili, da ima populacija, ki se zavaruje, 20 % nižjo smrtnost v primerjavi s celotno populacijo.

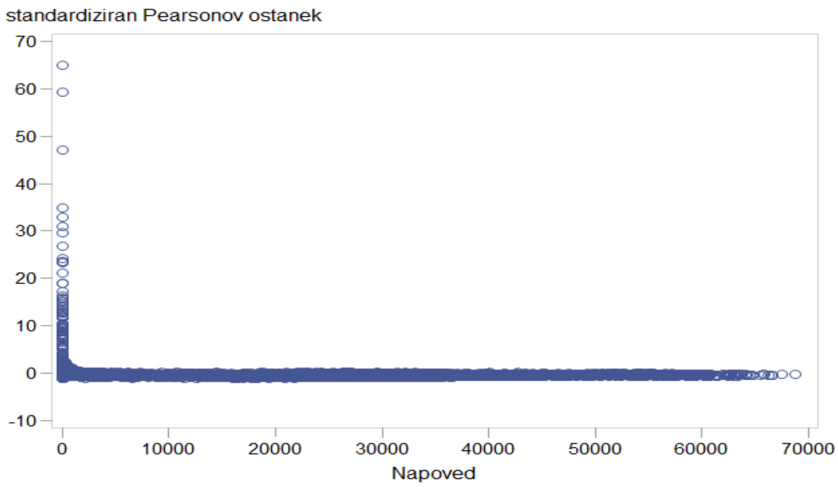
Za določitev smrtnosti žensk je uporabljeno povprečje tablic 00 in 80 % od SLO2007. Povprečne vrednosti se zdijo smiselne, 80 % od SLO2007 pa ohranja enako osnovo, kot jo imajo ostali zavarovalni produkti. Ker imajo glede na tablice 00 ženske v povprečju enako smrtnost kot moški, starejši za 4 leta, so bili moški postarani za 4 leta.

4.1.9 Anomalije

Eden od možnih načinov preverjanja primernosti podatkov in uporabljenega modela je, da izračunamo izbrani model in si ogledamo ostanke, na primer standardiziran Pearsonov ostanek ali ostanek deviance.

V poglavju 2.7.2 sem izbral en model škodne frekvence z uporabo AIC in količnika verjetnosti. Izbrani model je imel porazdelitev gama in vhodne parametre spol, starost ter interakcijo med spolom in starostjo. Na Sliki 13 je prikazan graf standardiziranih Pearsonovih ostankov v odvisnosti od napovedi.

Slika 13: Standardizirani Pearsonovi ostanki pred nadomestitvijo



Na Sliki 13 vidimo, da ima nekaj točk nesorazmerno visok standardiziran Pearsonov ostanek. Smiselno je pogledati, pri katerih zavarovancih je ostanek tako nesorazmerno visok. V Tabeli 10 je 18 dogodkov z največjim standardiziranim Pearsonovim ostankom.

Tabela 10: Dogodki z najvišjim std. Pearsonovim ostankom

Mesec	**Spol**	**Starost**	**Zavarovalnine**	**Št. polic**	**Št. storitev**	**Napoved št. storitev**	**Std. Pearsonov ostanek**
9	Ž	16	35,87	2	18	0,7127	56,21
8	Ž	17	132,40	4	21	1,0894	42,35
11	M	16	10,78	2	10	0,6780	31,86
11	Ž	16	64,22	8	36	2,7291	28,25
12	Ž	17	81,95	6	25	1,9318	27,67
10	Ž	16	65,85	6	20	2,1043	19,71
4	Ž	17	41,77	4	12	1,3285	18,61
10	M	15	36,63	2	6	0,7111	17,23
7	Ž	16	13,20	4	10	1,2731	15,88
7	M	15	44,86	6	14	1,9360	14,44
5	Ž	17	143,55	6	14	2,0029	13,88
6	Ž	16	38,04	6	14	2,0240	13,71
3	M	15	24,82	4	10	1,5113	13,01
12	M	16	3,40	1	2	0,3259	11,90
12	Ž	16	12,60	6	12	1,9680	11,81
6	Ž	17	156,77	4	8	1,3245	11,67
12	M	15	7,11	2	4	0,6650	11,62

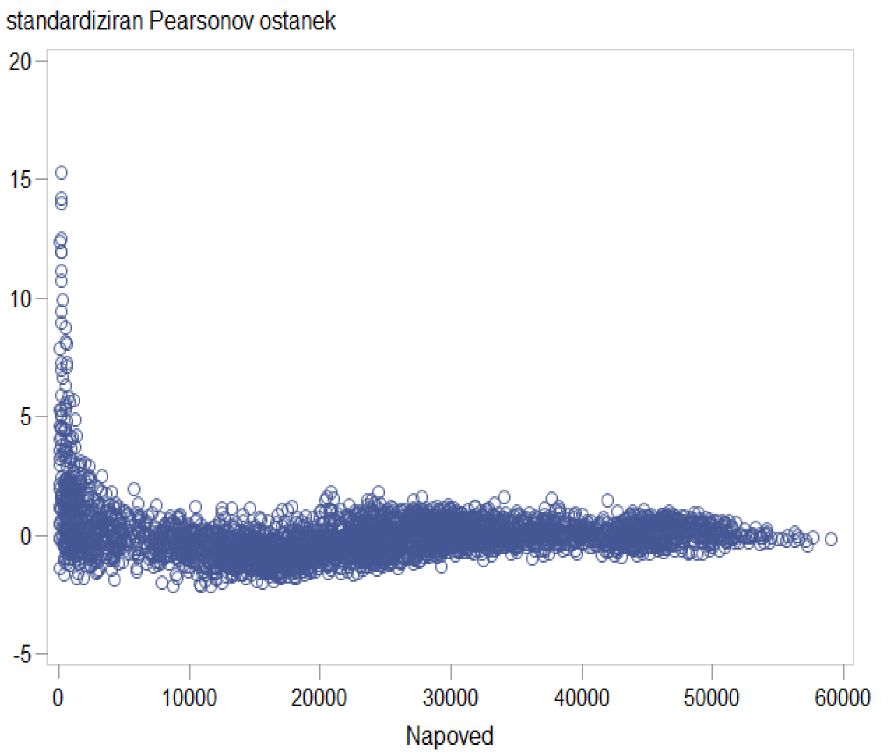
Problematični so zavarovanci, mlajši od 18 let. Običajno mladi sklenejo dopolnilno zavarovanje po koncu šolanja, to je med 18. in 19. letom. Del populacije, ki študira, pa običajno sklene zavarovanje okrog 25. leta. Majhen del populacije dočaka pozno starost, zato imajo kohorte z visoko starostjo veliko varianco.

Neznani avtor (2010) predlaga, da take dogodke odstranimo iz analize, ponovno zaženemo model in primerjamo rezultate. Vendar to ni najbolje, saj v model vnesemo selekcijo. Bolje je, če take dogodke nadomestimo z modelnimi točkami, ki realno prikazujejo stanje. Za vse kohorte s starostjo manj kot 19 let ali več kot 95 let naredimo sledeče:

- preštejemo število polic za vsak koledarski mesec,
- odstranimo kohorte,
- ustrezno povečamo kohorte moških s starostjo 20 let za mesec maj,
- ustrezno povečamo kohorte žensk s starostjo 95 let za maj,
- ponovimo izračun.

Mesec maj sem izbral zato, ker ima mesečni indeks najbližje 1,0. Kohorta z zavarovanci, starimi 20 let, vsebuje širok del populacije, manjkajo samo študenti, ki redno študirajo, zato je primerna za nadomestitev mlajših zavarovancev. Nadomestitev anomalij močno vpliva na statistiko modela. Na Sliki 14 so standardizirani Pearsonovi ostanki po nadomestitvi anomalij. Po odstranitvi anomalij je največja vrednost okrog 15, pred tem pa je bila več kot 60.

Slika 14: Standardizirani Pearsonovi ostanki po nadomestitvi



Po nadomestitvi zavarovancev, mlajših od 19 in starejših od 95 let, je manj ekstremnih vrednosti standardiziranega Pearsonovega ostanka. Znižala se je tudi vrednost AIC. Model je imel pred nadomestitvijo vrednost AIC 83.608, po nadomestitvi pa vrednost 68.501. Lahko sklepamo, da je bila nadomestitev upravičena.

4.2 Deterministični in stohastični modeli

Škodno rezervo je možno določiti z uporabo determinističnega ali stohastičnega modela. Deterministični modeli so lažje razumljivi za organe ravnanja in upravljanja, saj je koncept porazdelitve verjetnosti pri stohastičnih modelih (ActEd 2011, str. 21) težje razumljiv.

Stohastični modeli so kompleksnejši in dražji. Testirajo več različnih scenarijev in s tem lažje odkrijejo kombinacijo dejavnikov, ki pripeljejo do kritične situacije.

Po mnenju ActEd (2011, str. 21) je dober model tisti, ki:

- je ustrezno dokumentiran,
- je zmožen ustrezno prikazati tveganja produktov, ki jih simulira,
- ima parametre z vsemi bistvenimi lastnostmi za odločanje,
- ima parametre s smiselnimi vrednostmi,
- je enostavno razložljiv,
- katerega rezultati modela omogočajo zunanjo revizijo,
- ni bolj kompleksen, kot je to potrebno,
- omogoča nadaljnji razvoj in spremembe,
- ima nabor različnih metod za implementacijo.

Vzajemna zdravstvena zavarovalnica lahko modelira premijsko rezervo z uporabo determinističnega modela, saj ima na voljo dovolj podatkov, da realno oceni škodne tablice. Ker se struktura portfelja ne spreminja bistveno, bi Vzajemna zdravstvena zavarovalnica lahko uporabila tudi modelne točke, izračunala premijsko rezervacijo za modelne točke in ekstrapolirala premijsko rezervacijo za celoten portfelj.

Smiselno pa je analizirati vpliv števila storitev, cene storitev in višine doplačila. To lahko storimo z različnimi scenariji. Spremenimo vhodne parametre, na primer povečamo škodno frekvenco za 2 %, 5 %, 10 % …, preračunamo premijsko rezervacijo in ocenimo razliko, ki nastane.

4.3 Izračun rizične premije

Rizično premijo sem izračunal z uporabo gama-log-normalnega modela iz poglavja 2.4.2. Gama-log-normalni model rizične premije je sestavljen iz:

- modela škodne frekvence z gama porazdelitvijo,
- modela povprečne zavarovalnine z log-normalno porazdelitvijo.

4.4.1 Model škodne frekvence

Model škodne frekvence ima naslednje vhodne parametre:

- spol,
- starost,
- interakcija spola in starosti.

Mesečni indeks in izpostavljenost sta obravnavana kot znan efekt. V Tabeli 11 so predstavljene ocene parametrov modela škodne frekvence, izračunane z metodo največjega verjetja.

Tabela 11: Ocena parametrov modela škodne frekvence

Parameter	Spol	ŠP	Ocena	St. napaka	95-% interval zaupanja	
Starost*spol	M	1	0,0328	0,0002	0,0325	0,0331
Starost*spol	Ž	1	0,0259	0,0002	0,0256	0,0262

Zaradi sorazmerno velikega števila podatkov so parametri natančno določeni. Izračunan je tudi 95-odstotni interval zaupanja. V praksi to pomeni, da lahko s 95-odstotno verjetnostjo pričakujemo, da je resnična vrednost parametra Starost*spol za moške med 0,0325 in 0,0331.

Na podoben način so izračunani tudi ostali parametri. Rezultat modela je pričakovano število storitev. Če pričakovano število storitev delimo z izpostavljenostjo, dobimo škodno frekvenco.

Iz Slike 14 je razvidno, da so standardizirani Pearsonovi ostanki simetrični okoli x-osi in imajo konstantno varianco. Izjema so vrednosti z majhnim številom pričakovanih storitev. To je razumljivo, saj majhno število zavarovancev v posameznih kohortah lahko privede do večjega koeficienta variabilnosti.

4.4.2 Model povprečne zavarovalnine

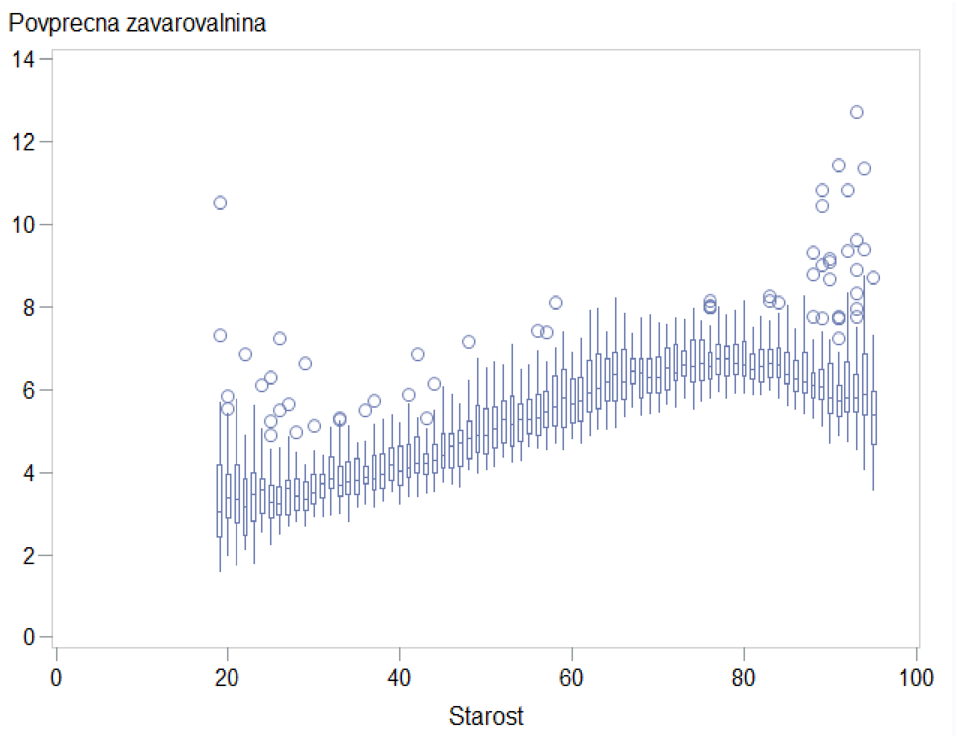
Model povprečne zavarovalnine ima naslednje vhodne parametre:

- spol,
- starost,
- kvadrat starosti,
- interakcija starosti in spola.

Kvadrat starosti je uporabljen, ker podatki kažejo, da povprečna zavarovalnina ni čisto linearno odvisna. Na Sliki 15 so prikazane povprečne zavarovalnine glede na starost.

Na Sliki 15 je razvidno, da relacija med povprečno zavarovalnino in starostjo ni v celoti linearna, zato sem uporabil tudi kvadratni člen.

Slika 15: Povprečna zavarovalnina glede na starost (v EUR)



Izpostavljenost je obravnavana kot utež. V Tabeli 12 so ocene parametrov modela povprečne zavarovalnine, izračunane z metodo največjega verjetja.

Tabela 12: Ocena parametrov modela povprečne zavarovalnine

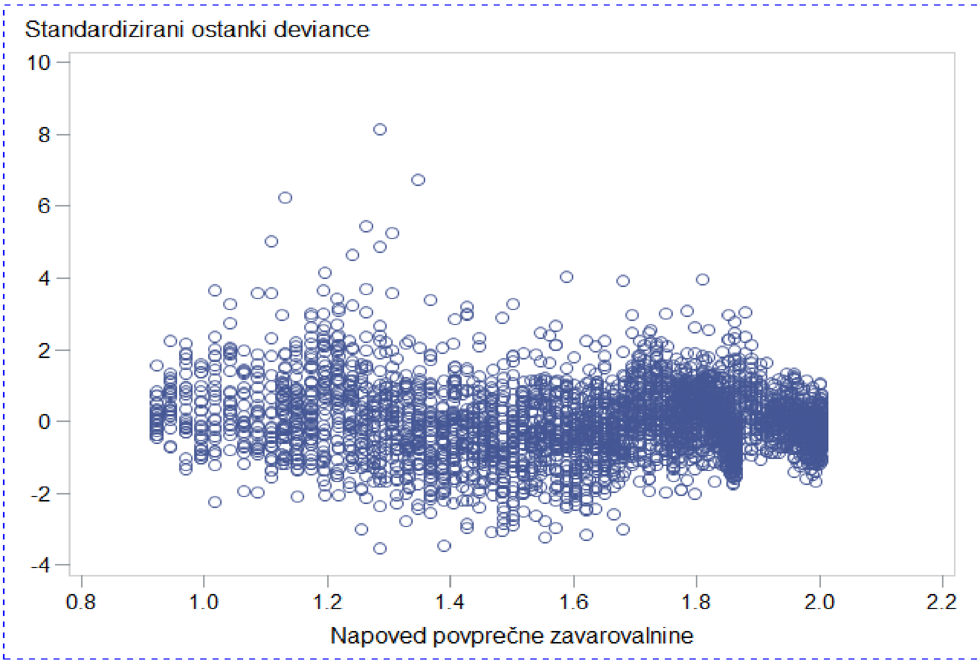
Parameter	Spol	ŠP	Ocena	Std. napaka	95-% interval zaupanja	
Spol	M	1	0,2211	0,0095	0,2025	0,2397
Starost*spol	M	1	-0,0009	0,0002	-0,0012	-0,0005
Starost*Starost		1	-0,0002	0,0000	-0,0002	-0,0002

Ocena parametra Starost^2 je negativna, kar je v skladu s Sliko 15. Vidimo, da je povprečna zavarovalnina za moške višja kot za ženske, da pa se razlika z leti manjša.

Na podoben način so izračunani tudi ostali parametri. Rezultat modela je povprečje logaritma zavarovalnine. Povprečno zavarovalnino dobimo z enačbo (60) iz poglavja 2.3.3.

Primernost modela lahko preverimo, če pogledamo standardizirane ostanke deviance, ki so prikazani na Sliki 16. Ker so ostanki simetrični na os x in enakomerno razpršeni, lahko sklepamo, da je log-normalna porazdelitev ustrezna.

Slika 16: Standardizirani ostanki deviance



4.4.3 Model rizične premije

Oba modela škodne frekvence in povprečne zavarovalnine sestavimo v model rizične premije z enačbo (46) iz poglavja 2.4.2. Dobljeno rizično premijo množimo z mesečnim faktorjem za vsak mesec posebej. Tako dobimo škodne tablice, ločene po:

- spolu,
- starosti,
- koledarskem mesecu.

4.4 Izračun premijske rezerve z determinističnim modelom

Vzajemna zdravstvena zavarovalnica uporablja za izračun premijske rezerve komercialni model Mo.net podjetja OAC plc. Škodne tablice iz poglavja 4.4.4 vstavimo v model Monet. Škodne tablice se uporabljajo, ker je tako implementiran model. Namesto škodnih tablic bi lahko vnesli model v obliki parametrov, vendar bi to zahtevalo spremembo modela. Bi pa taka sprememba olajšala vzdrževanje modela.

Mo.net izračuna premijsko rezervo za vsako polico posebej in sešteje pričakovane gotovinske tokove po vrsti zavarovanja (v skladu z delegirano uredbo) in mesecu dospetja.

V izračunu premijske rezerve niso upoštevana nadomestila, ki jih zavarovalnica plačuje izvajalcem zdravstvenih storitev kot nadomestilo za elektronsko pošiljanje podatkov. Oceno teh stroškov naredi aktuariat.

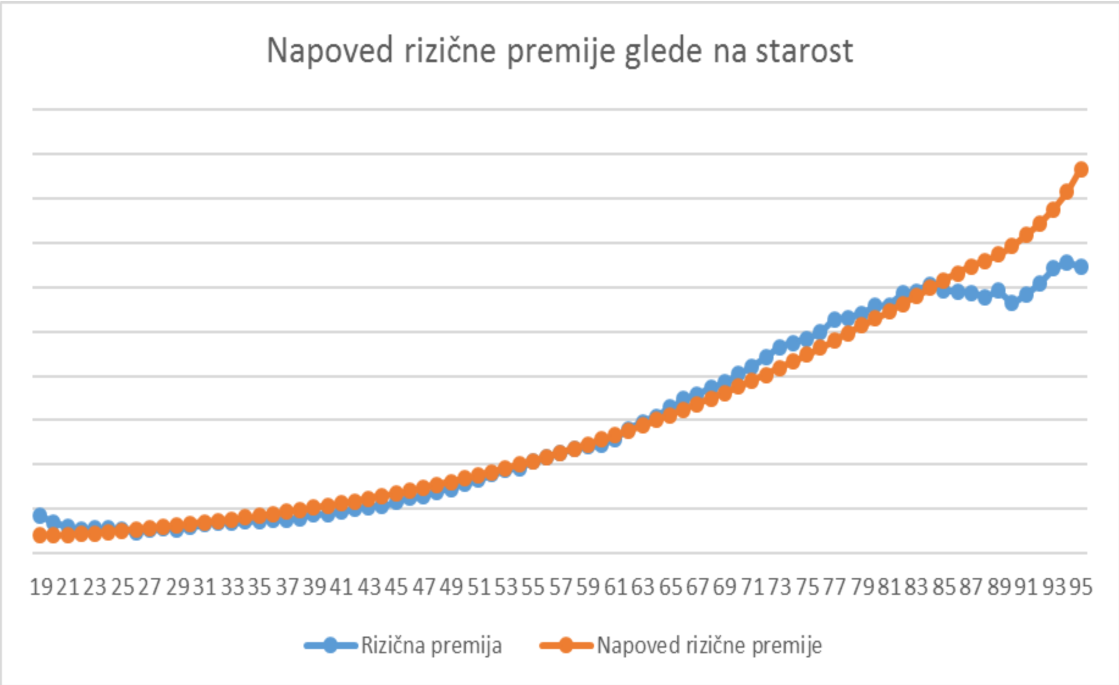
4.5 Primerjava rezultatov

4.5.1 Primerjava med podatki in napovedjo modela

Model rizične premije sem testiral na podatkih, ki so bili uporabljeni za modeliranje. Model je napovedal manjšo rizično premijo za 0,537 %.

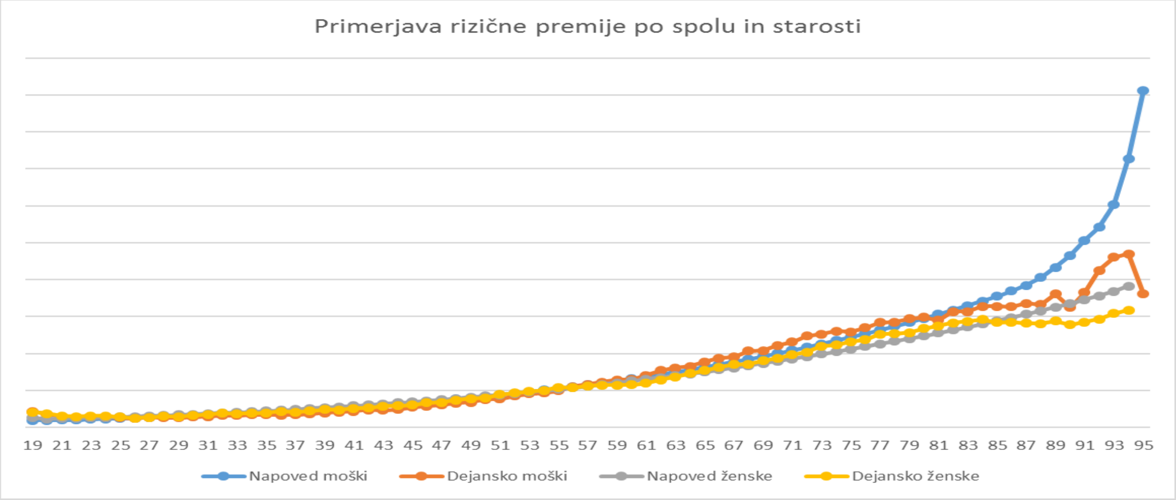
Na Sliki 17 je primerjava med dejansko rizično premijo in napovedjo modela za različne starosti. Napoved za rizične premije nad 92 leti se zdi visoka, vendar je izpostavljenost majhna in nepomembna, kar je razvidno iz Slike 19, saj so zavarovalnine v tem segmentu nizke.

Slika 17: Primerjava rizične premije glede na starost



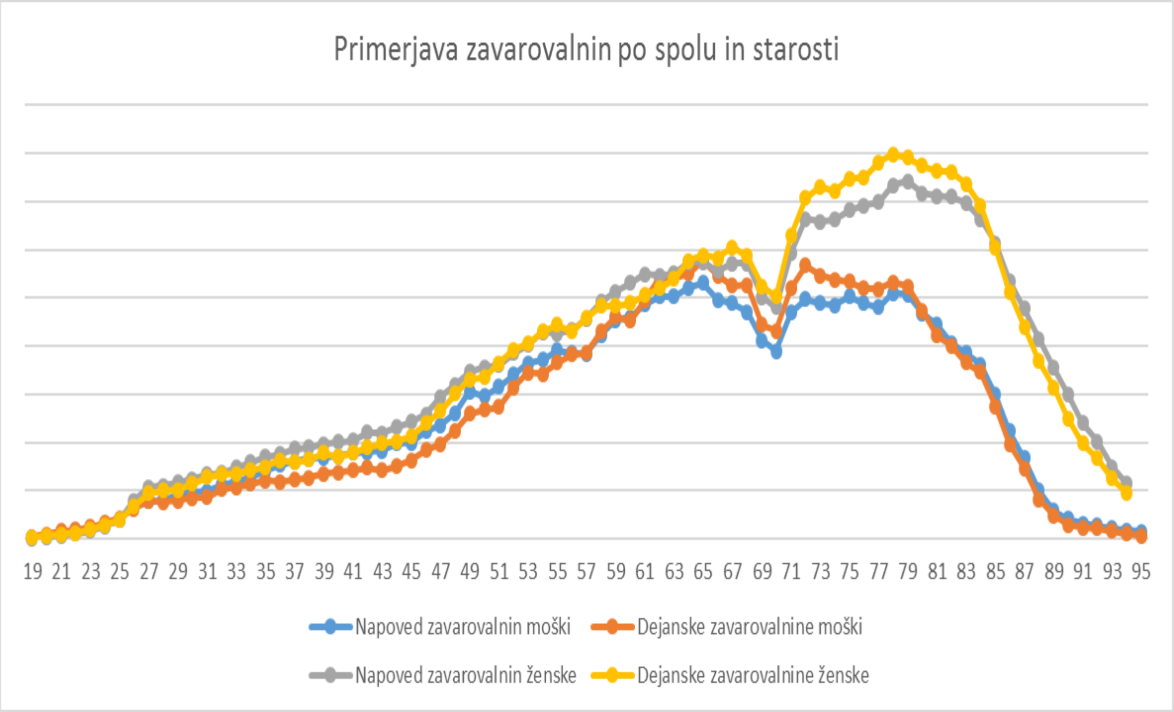
Na Sliki 18 je primerjava med napovedano in dejansko rizično premijo razdeljena po spolu in starosti. Model napoveduje višjo rizično premijo za moške po 81. letu in ženske po 85. letu. Napoved za moške se zdi pretirana. V primeru spremembe starostne strukture lahko pričakujemo dvig povprečne rizične premije in skupne vsote zavarovalnin.

Slika 18: Primerjava rizične premije glede na spol in starost



Na sliki 19 je primerjava med napovedjo in dejanskimi zavarovalninami po spolu in starosti. Vidimo, da so še posebej visoke izplačane zavarovalnine ženskam, starim od 71 do 87 let. V primeru podaljšanja življenjske dobe lahko pričakujemo višje stroške zavarovalnin, kar lahko povzroči dvig premije. V primeru moških, starih nad 93 let, model napoveduje še posebej visoke rizične premije. V tem segmentu je izpostavljenost majhna, zato visoka rizična premija ne vpliva posebej na premijsko rezervo.

Slika 19: Primerjava zavarovalnin glede na spol in starost



4.5.2 Primerjava med premijsko rezervo in prenosno premijo

Premijsko rezervo bi lahko ocenili s prenosno premijo. Prenosna premija je tisti del sredstev zavarovalnice, ki jih je zavarovalnica že zaračunala, se pa nanašajo na prihodnje računovodsko obdobje. Če na primer zavarovalnica izda račun za plačilo letne premije za zavarovalno leto, ki se začne 1. marca, potem je na dan 31. marca zaslužila 1/12 letne premije. Preostalih 11/12 letne premije se nanaša na obdobje po 31. marcu, zato jih zavarovalnica ne upošteva pri izračunu dobička.

Prenosna premija naj bi bila dobra ocena za obveznost zaradi prihodnjih dogodkov, saj je zavarovalnica oblikovala premije tako, da naj bi pokrivale vse zavarovalnine in stroške (ActEd 2013). Praviloma naj bi prenosna premija zadostovala za kritje prihodnjih obveznosti. V primeru, da se spremenijo okoliščine, ki bistveno vplivajo na rizično premijo, če na primer zakonodajalec spremeni stopnjo doplačil, potem se lahko zgodi, da prenosna premija ne zadostuje več za pokrivanje prihodnjih obveznosti.

Vzajemna zdravstvena zavarovalnica deluje na principu vzajemnosti in stremi k nizkim premijam. Ustvarjanje dobička ni primarni cilj zavarovalnice. Zato ima prenosna premija manj vgrajene varnostne rezerve. Primerjava med premijsko rezervo in prenosno premijo je dober test razumnosti za dopolnilna zavarovanja.

Slabost prenosne premije je, da zaradi medgeneracijske solidarnosti prenosna premija ne vsebuje informacije o strukturi portfelja. V primeru strukturnih sprememb prenosna premija ni dobra ocena.

Premijsko rezervo sem primerjal s prenosno premijo. Premijsko rezervo sem izračunal za celoten portfelj na dan 31. 12. 2015 in 31. 3. 2016, kot je opisano v poglavju 4.4. Prenosna premija je razvidna iz računovodskih podatkov. V Tabeli 13 je primerjava med premijsko rezervo in prenosno premijo, osnova za primerjavo je prenosna premija na dan 31. 12. 2015:

Tabela 13: Primerjava med premijsko rezervo in prenosno premijo (v%)

Mera	31. 3. 2016	31. 12. 2015
Prenosna premija	114	100
Premijska rezerva	139	117

Iz Tabele 15 je razvidno, da prenosna premija ne zadošča za pokritje obveznosti zaradi prihodnjih dogodkov. Zato lahko ovržemo hipotezo, da razliko med premijsko rezervo in prenosno premijo lahko pojasnimo z efektom koledarskega meseca. Razlika med prenosno premijo in premijsko rezervo leži v spremenjenem škodnem izkustvu.

Ima pa prenosna premija podobni sezonski efekt kot premijska rezerva. To potrjuje hipotezo, da je premijska rezerva podobna prenosni premiji.

4.6 Test občutljivosti

Izračun najboljše ocene je smiselno preveriti s testom občutljivosti, s katerim preverimo, kako robusten je model in kateri vhodni parametri imajo največje finančne posledice, na kar opozarja tudi ActEd (2011).

Parameter razvojni faktor po prvem mesecu ima velik vpliv na občutljivost metode CH, kar je razvidno iz Tabele 6. Prvi razvojni faktor ima povprečno vrednost 3,476 in standardni odklon 0,375. To pomeni, da lahko z 2/3-verjetnostjo pričakujemo, da prvi razvojni faktor leži med 3,09 in 3,84. Druge metode so bolj natančne. Metoda GLM je na primer ocenila, da prvi razvojni faktor za koledarski mesec maj leži znotraj intervala 3,14 in 3,71 s 95-odstotno verjetnostjo. Standardni odklon za prvi razvojni faktor za koledarski mesec maj je 0,217, kar je 43 % manj kot pri metodi CH. S Slike 10 pa je razvidno, da je napaka ostalih metod običajno pod 2 milijonoma EUR.

Premijska rezerva je linearno odvisna od rizične premije. Glavni dejavniki tveganja premajhne premijske rezerve, ki jim je izpostavljena Vzajemna zdravstvena zavarovalnica, so:

- povečana stopnja doplačil,
- povečan obseg zdravstvenih storitev,
- povišana cena zdravstvenih storitev,
- sprememba nabora zdravstvenih storitev, ki jih krije obvezno zdravstveno zavarovanje.

Povečana stopnja doplačil in povišana stopnja zdravstvenih storitev vplivata na povprečno zavarovalnino, povečan obseg in sprememba nabora zdravstvenih storitev pa vplivata na škodno frekvenco. Vsi dejavniki neposredno vplivajo na rizično premijo in premijsko rezervo. Zanimivo bi bilo opazovati korelacijo med rizično premijo in stopnjo rasti bruto gospodarskega prihodka skozi daljše obdobje.

Občutljivost izračuna premijske rezerve glede preostalih parametrov lahko ocenimo s spreminjanjem vhodnih parametrov, kot na primer:

- povečanje ali zmanjšanje stopnje smrtnosti,

- povečanje stroškov in medicinske inflacije.

Vpliv vsakega od zgornjih scenarijev ocenimo tako, da:

- izračunamo najboljšo oceno tako, da v model vstavimo parametre z najboljšo oceno,
- izračunamo najboljšo oceno tako, da v model vstavimo spremenjen parameter,
- izračunamo razliko med najboljšima ocenama.

Tabela 14: Rezultati testa občutljivosti premijske rezerve (v%)

Scenarij	**Relativna razlika (v%)**
Najboljša ocena	/
Smrtnost 110 %	-0,04
Smrtnost 90 %	+0,099
Obrestna mera 0 %	+0,0471
Stroški 110 % in inflacija višja za 1 %	+1,178

Ker je model sorazmerno neobčutljiv, zgornji testi zadoščajo (Tabela 14). V nasprotnem primeru bi bilo primerno, da testiramo več scenarijev, na primer interakcijo med smrtnostjo, odpovedmi in povišanjem stroškov.

Smiselno bi bilo narediti analizo strukturnih sprememb portfelja Vzajemne zdravstvene zavarovalnice.

SKLEP

V magistrskem delu je prikazan proces določitve zavarovalno-tehničnih rezervacij za dopolnilno zdravstveno zavarovanje brez upoštevanja izravnalne sheme v skladu s smernicami Solventnosti II.

Ker na škodno frekvenco vplivajo drugačni dejavniki kot na povprečno zavarovalnino, je bila vsaka komponenta modelirana posebej. Za aproksimacijo škodne frekvence je bila uporabljena porazdelitev gama, za povprečno zavarovalnino pa log-normalna porazdelitev.

Metodi BF in GLM omogočata bolj natančen izračun škodnih rezervacij, zmanjšujeta tveganje neustrezne škodne rezerve in izboljšujeta upravljanje s kapitalom. Ker metoda BF sistematično podceni škodno rezervo za približno 400.000,00 EUR, je metoda GLM bolj primerna, čeprav ima malenkost višji standardni odklon relativne napake.

Vzajemna zdravstvena zavarovalnica z uporabo škodnih tablic za izračun premijske rezerve zajame večino karakteristik rizične premije. Ključna prednost analize GLM je v razumevanju dejavnikov in pravočasni identifikaciji trendov. Omogočila bi tudi lažjo implementacijo modela Mo.net, če bi se le-ta kdaj spreminjal. Vzajemna zdravstvena zavarovalnica lahko z uporabo GLM-analize redno spremlja rizično premijo in zagotavlja ustreznost premije in premijske rezerve, s čimer znižuje tveganje prevzema rizikov in operativno tveganje. Ker ima rezultat metode GLM preprosto strukturo, je ta metoda primerna za razvoj novih modelov in jo bo Vzajemna zdravstvena zavarovalnica uporabila pri izdelavi modelov za projekcijo škodne rezerve v prihodnosti, ki so potrebni za drugi steber Solventnosti II, ki se imenuje ORSA.

Prenosna premija je podobna premijski rezervi. Obe imate podoben sezonski efekt, ki je posledica dejstva, da nekateri zavarovanci plačujejo letno premijo. Zato sta premijska in prenosna premija konec marca višji kot ob koncu leta. Efekt koledarskega meseca ni razlog za glavno razliko med premijsko rezervo in prenosno premijo. Premijska rezerva je višja od prenosne premije zaradi spremembe v škodnem izkustvu.

Potrdil sem hipotezo, da je koledarski mesec pomemben pri izračunu IBNR, ostali dejavniki pa manj. Napovedi metod BF in GLM, ki upoštevata koledarski mesec, se od dejanske vrednosti razlikujeta za največ 2.000.000 EUR. Metoda CH, ki ne upošteva koledarskega meseca, pa v dveh primerih podceni IBNR za več kot 4.000.000 EUR.

Potrdil sem hipotezo, da je prenosna premija podobna premijski rezervi. Obe imata podoben sezonski efekt, ki je posledica dejstva, da nekateri zavarovanci plačujejo letno premijo. V Vzajemni zdravstveni zavarovalnici uporabljamo primerjavo med premijsko rezervo in prenosno premijo kot hiter test za grobo oceno pravilnosti izračuna.

Ovrgel sem hipotezo, da lahko razliko med premijsko rezervo in prenosno premijo pojasnimo z efektom koledarskega meseca. Glavna razlika med premijsko rezervo in prenosno premijo je v spremembi škodnega izkustva. Spremembo škodnega izkustva bomo skrbno spremljali.

V magistrskem delu sem modeliral vse vrste zdravstvenih storitev z enotnim modelom. Smiselno bi bilo ponoviti analizo za vsako vrsto zdravstvene storitve posebej in preveriti, ali pride do spremembe dejavnikov. Prav tako bi bilo smiselno analizirati korelacijo med številom storitev dopolnilnega zavarovanja in številom sklenjenih zavarovanj zdravstvenega zavarovanja v tujini. Zdravstveno zavarovanje v tujini bi lahko bil nadomestek za dejavnik, ki bi meril zmanjšanje obsega zdravstvenih storitev zaradi poletnih dopustov.

Smiselno bi bilo preveriti tudi vpliv zunanjih dejavnikov, kot je obseg zdravstvenih storitev, ki jih načrtuje ministrstvo za zdravje. Ker nimamo vpogleda v podatke ministrstva za zdravje, bi lahko preverili korelacijo z rastjo bruto družbenega prihodka.

Glede na visoko rizično premijo odraslih moških nad 91 let bi bilo smiselno spremljati ta segment oziroma uporabiti primeren aktuarski preudarek.

LITERATURA IN VIRI

1. Anderson, D., Feldblum, S., Modlin, C., Schirmacher, D., Schirmacher, E., & Thandi, N. (2005) *A Practitioner′s Guide to Generalized Linear Models*. Arlington: Watson Wyatt.
2. ActEd (2005). *Subject CT3 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
3. ActEd (2012). *Subject CT5 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
4. ActEd (2005b). *Subject CT6 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
5. ActEd (2011). *Subject CA1 Revision Notes* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
6. ActEd (2014). *Subject CA2 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
7. ActEd (2015). *Subject CA3 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
8. ActEd (2016). Subject ST2 Course Notes (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
9. ActEd (2012b). *Subject ST7 Revision Notes* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
10. ActEd (2013). *Subject ST7 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
11. ActEd (2013b). *Subject ST8 Combined Material Pack* (interno gradivo). Oxford: ActEd Ltd.
12. Bessis, J. (2002) *Risk Management in Banking*, John Wiley and Sons.
13. Continuous Mortality Investigation (2006), *'00' series tables*. Najdeno 1. marca 2016 na spletnem naslovu https://www.actuaries.org.uk/learn-and-develop/continuous-mortality-investigation/cmi-mortality-and-morbidity-tables/00-series
14. Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, S., & Walhin, J. F. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems*, Willey.
15. Direktiva 2015/35/EC (*Ur. l. EU* 17. 1. 2015, v nadaljevanju direktiva 2015/35).
16. Direktiva 2009/138/EC (*Ur. l. EU* 17. 12. 2009, v nadaljevanju direktiva 2009/138).
17. Dreksler,S., Kirk, J., & Piper, J. (2013) Solvency II Technical Provisions – what actuaries will be doing differently. *British Actuarial Journal*, 18, 523–545.
18. Dunn, P. (2014) Tweedie exponential family models. Najdeno 1. marca 2016 na spletnem repositoriju http://www.r-project.org/package=tweedie
19. EIOPA (2014). Technical Specification for the Preparatory Phase (Part I). Najdeno 1. marca 2016 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf
20. EIOPA (2015). Guidelines on contract boundaries. Najdeno 1. marca 2016 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/Publications/Guidelines/Contract_boundaries_Final_docudocu_EN.pdf

21. Risk Free Term Structure, Najdeno 1. maja 2016 na spletnem naslovu https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures
22. England, P., & Verrall, R. (2002) Stochastic claims reserving in general insurance, članek predstavljen The Institute of Actuaries Najden 1. marca 2016 na spletni strani https://www.actuaries.org.uk/sites/default/files/documents/pdf/sm0201.pdf
23. Engmann, S., & Cousineau, D. (2011) Comparing Distributions: The Two-Sample Anderson-Darling Test as An Alternative to The Kolmogorov-Smirnoff Test, *Journal of Appied Quanitative Methods*, 6:2.
24. Hartl, T. (2010) Fitting a GLM to Incomplete Development Triangles. Najdeno 1. marca 2016 na spletni strani http://www.casact.org/pubs/forum/10fforum/Hartl_Fitting.pdf
25. Jong, P., & Heller, G. (2008). *Generalized Linear Models for Insurance Data*. Cambridge: Cambridge University Press.
26. Kaas, R., Goovaerts M., Dhaene, J., & Denuit,M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory Using R 2nd Edition*. Heidelberg: Springer-Verlag.
27. Kuščer, I., & Kodre, A. (1994) *Matematika v fiziki in tehniki*, Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
28. Meyers, G. (2011) The Retrospective Testing of Stochastic Loss Reserve Models. Najden 1. marca 2016 na spletni strani http://www.casact.org/pubs/forum/11sumforum/Meyers-Shi.pdf
29. Neznan avtor (2010) Diagnosing Problems in Linear and Generalized Linear Models. Najdeno 1. maja 2016 na spletnem naslovu http://uk.sagepub.com/sites/default/files/upm-binaries/38503_Chapter6.pdf
30. Odell, D., & Munroe, D. (2009) About the bootstrap. *The Actuary*, 2009(11).
31. Rakić, V., (2016) *Primerjava metod alokacije kapitala med zavarovalne vrste v sklopu Solventnosti II* (magistrsko delo) Ljubljana: Univerza v Ljubljani.
32. Robert, C., Casella, G. (2010) *Introducing Monte Carlo Methods with R (Use R!) Kindle Edition*. Heidelberg: Springer. Verlag.
33. Sklep o podrobnejših navodilih za vrednotenje zavarovalno-tehničnih rezervacij, *Ur. l. RS*, št. 93/15.
34. Sklep o podrobnejših pravilih in merilih upoštevanja osebne okoliščine spola, *Ur. l. RS*, št. 4/2016.
35. Sklep o podrobnejših pravilih in minimalnih standardih za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij, *Ur. l. RS*, št. 94/14.
36. Sklep o uporabi modula tveganja življenjskih zavarovanj, *Ur. l. RS*, št. 9/2016.
37. Sraka, R. (2013) Zdravstvena zavarovanja za dolgoživo družbo, najden 1. marca 2016 na spletnem naslovu http://www.zav-zdruzenje.si/.../Zdravstvena-zavarovanja-za-dolgozivo-druzbo/
38. Taylor, G. (2009) The Chain Ladder and Tweedie Distributed Claims Data, *Variance* 3:1, 96–104.

39. The Faculty of Actuaries, The Institute of Actuaries (2002). *Formulae and Tables for Examinations of The Faculty of Actuaries and The Institute of Actuaries,* The Faculty of Actuaries.
40. Tratar Ferbar, L., & Strmčnik, E. (2016) The comparison of Holt-Winters method and Multiple regression method: A case study, najdeno 18. junija 2016 na spletnem naslovu http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.04.115
41. Triglav Zdravstvena zavarovalnica (2011), Splošni pogoji dopolnilnega prostovoljnega zdravstvenega zavarovanja -ZZ11. Najdeno 1. marca na spletnem naslovu https://www.zdravstvena.net/pdf/splosni%20pogoji_koncna_zz11.pdf
42. Zakon o zavarovalništvu (ZZavar-1), *Ur. l. RS*, št. 93/2015.
43. Zakon o zavarovalništvu (ZZavar-UPB7), *Ur. l. RS*, št. 99/2010.
44. Zakon o zdravstvenem varstvu in zdravstvenem zavarovanju (uradno prečiščeno besedilo) (ZZVZZ-UPB3), Ur. l. RS, št. 72/2006.
45. Yan, J., Guszcza, J., Flynn, M., & Wu, C.S., (2009) Applications of the Offset in Property-Casualty Predictive Modeling. Najdeno 1. marca 2016 na spletnem naslovu https://www.casact.org/pubs/forum/09wforum/yan_et_al.pdf