UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MAGISTRSKO DELO

UČINKOVITOST BONUS-MALUS SISTEMOV V AVTOMOBILSKIH ZAVAROVANJIH

Ljubljana, april 2012 VESNA ZAKOŠEK

IZJAVA O AVTORSTVU

Spodaj podpisana Vesna Zakošek, študentka Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, izjavljam, da sem avtorica magistrskega dela z naslovom Učinkovitost bonus-malus sistemov v avtomobilskih zavarovanjih, pripravljenega v sodelovanju s svetovalko doc. dr. Damjano Kokol Bukovšek.

Izrecno izjavljam, da v skladu z določili Zakona o avtorskih in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami) dovolim objavo magistrskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

S svojim podpisom zagotavljam, da

- je predloženo besedilo rezultat izključno mojega lastnega raziskovalnega dela;
- je predloženo besedilo jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem
  - poskrbela, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam v magistrskem delu, citirana oziroma navedena v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, in
  - pridobila vsa dovoljenja za uporabo avtorskih del, ki so v celoti (v pisni ali grafični obliki) uporabljena v tekstu, in sem to v besedilu tudi jasno zapisala;
- se zavedam, da je plagiatorstvo - predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih - kaznivo po Zakonu o avtorskih in sorodnih pravicah (Ur. l. RS, št. 21/1995 s spremembami);
- se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega magistrskega dela dokazano plagiatorstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom.

V Ljubljani, dne 2. aprila 2012 Podpis avtorice:

KAZALO

KAZALO TABEL

KAZALO SLIK

UVOD

Zavarovanje avtomobilske odgovornosti zavaruje zavarovanca pred odgovornostjo v prometni nesreči, torej pred odškodninskimi zahtevki tretjih oseb, udeleženih v prometni nesreči, ki jo je povzročil zavarovanec. Voznik lahko namreč povzroči nesrečo, katere odškodnina daleč presega njegove finančne zmožnosti. Da bi zagotovile finančno kritje takih nesreč, države za vsa vozila, ki vozijo po javnih cestah, zakonsko predpisujejo zavarovanje avtomobilske odgovornosti. S tem odgovornost za morebitno povzročeno škodo država prenese z voznika na zavarovalnico (Wieduwilt & Grünig, 2002). Kjer je zavarovanje avtomobilske odgovornosti zakonsko obvezno, predstavlja velik del premije premoženjskih zavarovanj, zato zavarovalnice posvečajo veliko pozornosti določanju premije tega zavarovanja.

Temelj zavarovalništva je prenos tveganja z zavarovanca na zavarovalnico v zameno za plačilo, ki mu pravimo premija. Zavarovalnica premijo, ki jo prejme od zavarovancev, uporabi za kritje škod, ki iz zavarovanja izhajajo. Zavarovancem, ki plačujejo enako premijo, naj bi se škode dogajale z enako verjetnostjo. Zavarovanci solidarno delujejo med seboj in prav je, da eni zavarovanci plačujejo za škode drugih, če imajo vsi enako verjetnost za škodo. Če vsi zavarovanci plačujejo enako premijo, vlada med njimi popolna solidarnost. Če pa nimajo vsi zavarovanci enake verjetnosti za škodo, je pravično, da zavarovalnica glede na tveganje, ki ga predstavljajo, določi različne premije. Bolj ko premije med zavarovanci variirajo, manjša je solidarnost med njimi (Lemaire, 1995).

Zavarovančeva premija je pošteno določena, če je sorazmerna tveganju, ki ga zavarovanec predstavlja za zavarovalnico (De Pril, 1978). Da bi premijo določile karseda natančno, zavarovalnice zavarovance razporedijo v skupine tako, da zavarovanci v isti skupini predstavljajo za zavarovalnico enako tveganje in zato plačujejo enako premijo (Pitrebois, Denuit & Walhin, 2003b). Če so si zavarovanci v isti skupini glede na tveganje, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, enaki, pravimo, da je skupina zavarovancev homogena. V nasprotnem primeru, ko tveganje zavarovancev znotraj skupine variira, pa pravimo, da je skupina zavarovancev heterogena.

Zavarovalnice zavarovance razlikujejo na podlagi več vrst spremenljivk. Najprej poskušajo iz vnaprej znanih lastnosti zavarovanca oceniti zanj primerno premijo. Ker lahko vrednosti tako opredeljenih spremenljivk določimo preden začne zavarovanje veljati, takim spremenljivkam pravimo *a priori* spremenljivke. S pomočjo *a priori* spremenljivk zavarovance razdelimo v *a priori* določene premijske razrede.

Vendar pa kljub uporabi velikega števila *a priori* spremenljivk premijski razredi ostajajo heterogeni (Morillo & Bermúdez, 2003). Nekaterih pomembnih spremenljivk namreč ne moremo izmeriti ali vpeljati v *a priori* določanje premije. Izkaže se, da preostalo heterogenost v *a priori* določenih premijskih razredih najbolje pojasnimo z *a posteriori* spremenljivkami (Antonio & Valdez, 2011). To so spremenljivke, katerih vrednost določimo glede na preteklo obnašanje zavarovanca. Daleč najpogosteje uporabljena *a posteriori* spremenljivka je preteklo število prijavljenih škod zavarovanca.

Večina razvitih držav uporablja pri določanju premije zavarovanja avtomobilske odgovornosti sistem, ki upošteva poleg *a priori* spremenljivk tudi *a posteriori* spremenljivke. Pri tem za upoštevanje *a posteriori* spremenljivk, torej preteklega škodnega dogajanja, pri določanju premije uporabljajo bonus-malus sistem. *Bonus-malus sistem* je množica pravil, ki zavarovancu vsako leto popravijo premijo glede na preteklo škodno dogajanje. V primeru brezškodnega leta bonus-malus sistem zavarovancu dodeli popust oziroma bonus glede na premijo v preteklem letu, v primeru prijavljene škode v tem letu pa mu dodeli doplačilo oziroma malus.

Zaradi pomembnosti primernega *a posteriori* razlikovanja zavarovancev in vedno večje konkurence med zavarovalnicami na podlagi bonus-malus sistemov je izbira primernega bonus-malus sistema ključnega pomena za zavarovalnice. Zato je potrebno bonus-malus sisteme med seboj primerjati in izbrati bonus-malus sistem, ki najbolj zadošča zahtevam trga in ustreza strategiji zavarovalnice.

Predmet obravnave magistrskega dela je določanje premije avtomobilskih zavarovanj, pri čemer je v ospredju določanje premije na podlagi preteklega škodnega dogajanja zavarovanca, torej bonus-malus sistemi.

Namen naloge je pokazati pomembnost učinkovitega *a posteriori* razlikovanja zavarovancev, konkretneje bonus-malus sistemov. Proučiti želimo načine, kako lahko primerjamo učinkovitost različnih bonus-malus sistemov. S pomočjo orodij za primerjanje učinkovitosti lahko zavarovalnice ugotovijo, ali je njihov bonus-malus sistem dovolj učinkovit in ali dosega želeno razlikovanje zavarovancev med seboj. Proučiti želimo tudi načine, kako lahko zavarovalnice svoj bonus-malus sistem izboljšajo in spremenijo, da dosežejo želeno stopnjo *a posteriori* razlikovanja med zavarovanci.

Cilj naloge je ovrednotiti in primerjati učinkovitost različnih bonus-malus sistemov. Za potrebe primerjave izberemo pet bonus-malus sistemov, in sicer nemškega, belgijskega ter tri slovenske: bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav, d.d., (v nadaljevanju Zavarovalnica Triglav), Zavarovalnice Tilia, d.d., (v nadaljevanju Zavarovalnica Tilia) in Zavarovalne družbe Adriatic Slovenica, d.d. (v nadaljevanju Adriatic Slovenica). Ugotoviti želimo, ali so slovenski bonus-malus sistemi učinkoviti in kakšen je vpliv razlik med njimi na njihovo učinkovitost ter jih primerjati z dvema tujima bonus-malus sistemoma. Pri tem uporabimo mere učinkovitosti, ki jih predlaga Lemaire (1995). Poleg tega želimo ugotoviti, kakšne so teoretične izboljšave primerjanih bonus-malus sistemov, in teoretično izboljšane bonus-malus sisteme primerjati z dejanskimi. Proučiti želimo tudi predloge tujih avtorjev za oblikovanje bonus-malus sistema in ovrednotiti njihove učinke, ko imamo za to dovolj podatkov.

Problematika je v slovenskem prostoru aktualna, ker slovenske zavarovalnice trenutno uporabljajo med seboj precej podobne bonus-malus sisteme in je konkurenca med zavarovalnicami na podlagi bonus-malus sistema še v povojih. Z magistrskim delom želimo predstaviti trenutno stanje na področju bonus-malus sistemov zavarovanja avtomobilske odgovornosti v Sloveniji in proučiti načine spreminjanja teh sistemov, ki jih predlagajo tuji avtorji.

V magistrski nalogi si postavimo naslednja raziskovalna vprašanja: Kako učinkoviti so obstoječi bonus-malus sistemi slovenskih zavarovalnic? Kako izboljšati obstoječe bonus-malus sisteme? Kako določiti premije v optimalnem bonus-malus sistemu? Kakšne bi morale biti premije opazovanih bonus-malus sistemov, da bi bili optimalni?

Magistrska naloga je razdeljena na šest poglavij. V prvih treh poglavjih podamo teoretično ozadje bonus-malus sistemov. V prvem poglavju predstavimo osnove razlikovanja zavarovancev med seboj, pri čemer obravnavamo razlikovanje tako na podlagi *a priori* kot tudi *a posteriori* spremenljivk. Različne vrste bonus-malus sistemov opišemo v drugem poglavju in opredelimo vrste, ki jih v nadaljevanju analiziramo. V tretjem poglavju predstavimo matematični model, s katerim lahko delovanje bonus-malus sistema opišemo. V tem poglavju predstavimo osnovne slučajne spremenljivke, potrebne za analizo bonus-malus sistemov, možne porazdelitve teh spremenljivk, določimo predpostavke, ki jih v nadaljevanju upoštevamo, in opišemo omejitve uporabljenega modela. V prvih treh poglavjih uporabimo zgolj teoretično-konceptualno metodo in postavimo osnove za nadaljnje empirične analize.

V četrtem poglavju najprej predstavimo opazovane bonus-malus sisteme, v nadaljevanju pa se osredotočimo na mere učinkovitosti in primerjavo bonus-malus sistemov med seboj. Za vsako mero učinkovitosti najprej predstavimo teoretično ozadje, nato pa to mero učinkovitosti ovrednotimo na opazovanih bonus-malus sistemih, ki jih glede na to mero učinkovitosti tudi razvrstimo. V tem delu uporabimo tako teoretično-konceptualno kot tudi empirično metodo. Glavni namen tega poglavja ni le primerjava učinkovitosti bonus-malus sistemov med seboj, pač pa tudi analiza obnašanja bonus-malus sistemov glede na spremembe osnovnih parametrov, ki jih v tretjem poglavju privzamemo. V tem delu uporabimo primerjalno in induktivno metodo, saj primerjamo bonus-malus sisteme med seboj in ugotavljamo, kako lastnosti bonus-malus sistemov vplivajo na njihovo učinkovitost.

V petem poglavju predstavimo predloge tujih avtorjev glede oblikovanja optimalnega bonus-malus sistema. Na začetku tega poglavja predstavimo kredibilnostno teorijo in teoretične ugotovitve pokažemo tudi na praktičnih primerih. V nadaljevanju predstavimo metode za določitev optimalnih odstotkov izhodiščne premije bonus-malus sistema, ki jih tudi praktično uporabimo na primeru opazovanih bonus-malus sistemov. V tem poglavju uporabimo teoretično-konceptualno, preiskovalno in primerjalno metodo, saj v njem ugotavljamo, kakšen je optimalni bonus-malus sistem in kako določiti premijo optimalnega bonus-malus sistema, ter primerjamo optimalne in dejanske odstotke izhodiščne premije opazovanih bonus-malus sistemov.

V zadnjem poglavju predstavimo teme s področja konkurenčnosti bonus-malus sistemov. Ugotavljamo, kakšni so izzivi pri določanju bonus-malus sistema na konkurenčnem trgu in kakšne so možne strategije zavarovalnice pri uporabi bonus-malus sistema kot konkurenčnega orodja. V tem delu uporabimo teoretično-konceptualno metodo.

V magistrskem delu večino teoretično opisanih pojmov tudi izračunamo in prikažemo bodisi številčno bodisi grafično. Glavna omejitev magistrskega dela je količina podatkov, saj bi ponekod za potrebe analiziranja potrebovali zelo razčlenjene podatke o portfelju avtomobilskih zavarovanj. V delu se omejimo na podatke Evropskega zavarovalnega komiteja (fr. *Comité Européen des Assurances*, v nadaljevanju CEA). Kjer pa želimo kakšno analizo prikazati in nam manjka le malo podatkov, za manjkajoče podatke uporabimo tiste iz knjig ali člankov. Vsi izračuni in analize v magistrski nalogi so izračunani s statističnim programom R.

1 DIFERENCIACIJA AVTOMOBILSKIH ZAVAROVANJ

Pitrebois et al. (2003b) kot eno glavnih nalog aktuarja navedejo strukturiranje premijskih razredov tako, da bodo škode pravično porazdeljene med zavarovanci. V ta namen aktuarji zavarovance razdelijo v premijske razrede, pri čemer vsi zavarovanci v istem razredu plačujejo enako premijo. Delitvi zavarovancev v premijske razrede pravimo *diferenciacija*. Da bi zavarovanci plačevali premijo, ki bi karseda ustrezala tveganju, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, morajo biti premijski razredi čimbolj homogeni.

Določanje premije avtomobilskih zavarovanj je posebej kompleksno zaradi močno heterogenih portfeljev. Zavarovalnica s heterogenim portfeljem ne more vsem zavarovancem zaračunati enake premije, ker sicer pride do nasprotne selekcije. Konkurenčna zavarovalnica namreč lahko zazna priložnost in zavarovance diferencira tako, da boljšim zaračuna nižjo premijo, slabšim pa višjo. V zavarovalnici z enakimi premijami dobri zavarovanci plačujejo preveč glede na tveganje, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, in zato prestopijo v konkurenčno zavarovalnico. Po drugi strani slabšim zavarovancem prenizko zaračunana premija v zavarovalnici z enakimi premijami ustreza in tam ostanejo. To lahko privede do spiralnega učinka in privede zavarovalnico z enakimi premijami do nesorazmernega deleža slabih zavarovancev v portfelju, zaradi česar mora povišati premijo. Konkurenčna zavarovalnica po drugi strani pridobi le boljše zavarovance, zaradi česar lahko premijo še dodatno zniža. Nujno je torej, da zavarovalnica razdeli zavarovance v čimbolj homogene skupine (Antonio & Valdez, 2011).

1.1 *A priori* diferenciacija

Najosnovnejši način diferenciacije zavarovancev je glede na lastnosti zavarovanca, ki jih poznamo, preden začne zavarovanje veljati, torej ob sklenitvi zavarovanja. Spremenljivke, na podlagi katerih zavarovance delimo v različne razrede pred začetkom veljavnosti zavarovanja, imenujemo *a priori spremenljivke*, ker lahko njihove vrednosti določimo, preden začne zavarovanec voziti. Denuit, Maréchal, Pitrebois in Walhin (2007) ter Lemaire (1995) kot glavne primere *a priori* spremenljivk navajajo starost, spol, poklic in kraj bivanja zavarovanca, tip in način uporabe vozila ter število vozil v gospodinjstvu.

V nadaljevanju je predstavljenih nekaj najpogosteje uporabljenih *a priori* spremenljivk:

- **Starost.** Denuit et al. (2007, str. 54–61, 94–97) na primeru belgijskega portfelja ugotovijo, da škodna pogostnost s starostjo strmo pada, pri čemer imajo mladi vozniki (stari od 18 do 24 let) skoraj za 40 % višjo škodno pogostnost od naslednje starostne skupine (25 do 30 let) in skoraj za enkrat višjo od skupine voznikov starejših od 60 let. Tudi Datamonitor (2006, str. 96–97) upraviči uporabo starosti kot *a priori* diferenciatorja, saj vozniki mlajši od 21 let naredijo 18 % vseh prekrškov, kar je v primerjavi s precej manjšim odstotkom teh voznikov v celotni populaciji voznikov veliko. Še posebej velik delež imajo mladi vozniki pri resnih prekrških, saj storijo četrtino prekrškov, ki povzročijo smrt ali telesne poškodbe. Datamonitor (2006) višjo škodno pogostnost mladih voznikov pripisuje vozniški neizkušenosti.

- **Spol.** Datamonitor (2006, str. 92–95) navaja, da v Angliji večino prometnih prekrškov prisodijo moškim. Poleg tega moški storijo več kot 90 % resnejših prekrškov, kot so nevarna vožnja in povzročitev telesnih poškodb ali smrti, in več kot 80 % manj resnih prekrškov. Tudi druge analize (na primer Boucher, Denuit & Guillén, 2007; Denuit et al., 2007; Bermúdez, 2009) potrjujejo, da je škodna pogostnost moških bistveno višja od škodne pogostnosti žensk. Denuit et al. (2007) ugotovijo tudi, da je vpliv starosti na škodno pogostnost pri ženskah povsem drugačen kot pri moških. Mladi vozniki imajo v prvem starostnem obdobju (18 do 24 let) precej višjo škodno pogostnost od mladih voznic, v naslednjih starostnih obdobjih pa se škodne pogostnosti med spoloma ne razlikujejo bistveno. Torej bi bilo dejansko treba zaračunati višjo premijo le prvi starostni skupini moških in ne vsem (Denuit et al., 2007). Poudarimo še, da ponekod zakonodaja prepoveduje uporabo določenih spremenljivk, navadno takih, ki jih zavarovanec ne more nadzorovati. Tako na primer Evropska unija prepoveduje uporabo spola kot diferenciatorja pri določanju zavarovalne premije (Direktiva Sveta 2004/113/ES; Sodba 2011/C 130/06, zadeva C-236/09). Pri razlikovanju med spoloma lahko v Evropski uniji obstajajo izjeme, a zavarovalne premije niso med njimi.

- **Kraj bivanja.** Škodna pogostnost zavarovancev, ki živijo v mestu je višja od škodne pogostnosti tistih, ki živijo na podeželju. Vendar pa imajo zavarovanci, ki živijo na podeželju, v povprečju višjo povprečno škodo od tistih, ki živijo v mestih (Denuit et al., 2007).

- **Način plačila premije.** Denuit et al. (2007) ugotovijo, da imajo zavarovanci, ki takoj plačajo premijo, občutno nižjo škodno pogostnost kot tisti, ki premijo plačajo v obrokih.

- **Moč motorja.** Tudi moč motorja po analizi Denuit et al. (2007) vpliva na škodno pogostnost. Avtorji ugotovijo, da imajo najvišjo škodno pogostnost vozniki avtomobilov z motorji v srednjem razredu in ne tisti z najmočnejšimi motorji. Podobno kot pri spolu je tudi škodna pogostnost glede na moč motorja različna za različne starostne skupine zavarovancev, in sicer so v njihovem vzorcu najbolj tvegani najmlajši zavarovanci, ki ne vozijo avtomobila z najmočnejšim motorjem.

- **Število prevoženih kilometrov.** Vsak prevožen kilometer poveča tveganje za zavarovalnico, vendar je zanesljiv podatek o številu prevoženih kilometrov težko dobiti na cenovno učinkovit način. Lemaire (1995, str. 4) navaja, da je bilo v Združenih državah Amerike (v nadaljevanju ZDA) prijavljanje prenizkega števila prevoženih kilometrov vir največ zavarovalniških prevar v državi. V zadnjem času je več zavarovalnic po svetu začelo uvajati sistem PAYD (angl. *pay as you drive*), pri katerem zavarovalnice s pomočjo navigacijskih naprav zavarovancu zaračunajo premijo ne le glede na število prevoženih kilometrov, ampak tudi glede na del dneva, v katerem je potoval, tipe prevoženih cest, hitrost vožnje ipd. (Denuit et al., 2007, str. xviii).

Pri izbiri spremenljivk za določanje zavarovalnih premij je ključen vpliv konkurence. Vsakič, ko konkurenca postavi nov faktor diferenciacije, mora zaradi konkurenčnosti zavarovalnica izboljšati svojo diferenciacijo, da ne bi izgubila boljših zavarovancev zaradi neupoštevanja tega faktorja. Če zavarovalnica tega ne naredi dovolj hitro, lahko izgubi boljše zavarovance in ji ostanejo le še slabši, torej pride do prej opisane nasprotne selekcije. To pojasnjuje razvejanost cenikov in uporabo velikega števila faktorjev v diferenciaciji ne le avtomobilskih, ampak tudi drugih zavarovanj (Denuit et al., 2007, str. xvi).

Vpliv *a priori* spremenljivk na premijo določimo s statistično analizo. Najbolj razširjena statistična tehnika v uporabni ekonometriji je multivariatna linearna regresija. Kaas, Goovaerts, Dhaene in Denuit, (2008, str. 231) menijo, da v aktuarski statistiki ta tehnika zaradi narave podatkov ni primerna, zato se v aktuarstvu najpogosteje za *a priori* diferenciacijo uporabljajo *posplošeni linearni modeli* (angl. *generalized linear models*), ki jih prvič predstavita Nelder in Wedderburn (1972). Tudi Antonio in Valdez (2011) kot primarno statistično orodje za izbiranje spremenljivk za namene diferenciacije navajata posplošene linearne modele. Po njunem mnenju imajo več prednosti, med drugim omogočajo prepoznavanje statistično pomembnih spremenljivk, kvantificiranje statističnih učinkov vsake spremenljive in iz tega izhajajoče napovedi premij. V razdelku 5.1.4 je podrobneje opisan najpogosteje uporabljan posplošen linearni model, Poissonov regresijski model, ki sta ga v okviru avtomobilskih zavarovanj prvič predstavila Dionne in Vanasse (1989).

1.2 *A posteriori* diferenciacija

Če so zavarovanci v posamezni homogeni skupini enako izpostavljeni tveganju, je povsem pravično, da zavarovanci brez škod plačujejo za škode drugih. Vendar pa to velja le, če so pri diferenciaciji upoštevani vsi pomembni dejavniki, ki vplivajo na tveganje. Pri avtomobilskih zavarovanjih na primer pri določanju premije težko upoštevamo individualne lastnosti vožnje posameznika, kot so natančnost presoje, odzivnost refleksov, agresivnost za volanom, poznavanje cestno prometnih predpisov in navade glede pitja alkohola, ker jih ne moremo oceniti na stroškovno učinkovit način (Lemaire, 1995, str. xvi). Kljub uporabi velikega števila *a priori* spremenljivk je obnašanje zavarovancev v vsaki premijski skupini še vedno precej heterogeno (Lemaire, 1995, str. 3). Pri avtomobilskih zavarovanjih se namreč izkaže, da števila posameznikovih bodočih škod ne moremo najbolje napovedati s spolom, starostjo, poklicem ali kakšno drugo *a priori* spremenljivko, ampak z njegovim preteklim škodnim dogajanjem (Denuit & Dhaene, 2001). Tudi Morillo in Bermúdez (2003) ugotovita, da je uporaba preteklega škodnega dogajanja zavarovanca potreben diferenciator, ki ga ne more nadomestiti niti dovolj veliko število *a priori* spremenljivk. Nekaterih diferenciatorjev namreč ne moremo izmeriti ali vpeljati v *a* *priori* diferenciacijo, zato znotraj *a priori* premijskih razredov ostaja heterogenost, ki jo najbolje pojasnimo s preteklim škodnim dogajanjem zavarovanca. Ker je spremenljivka, povezana s preteklim škodnim dogajanjem, znana šele po koncu veljavnosti preteklega zavarovalnega leta, ji pravimo *a posteriori spremenljivka*.

Brouhns, Guillén, Denuit in Pinquet (2003) utemeljujejo *a posteriori* diferenciacijo s korelacijo bodočega in preteklega števila škod. Posameznikova škodna zgodovina namreč določa tveganje, ki ga predstavlja za zavarovalnico. Pri tem avtorji ločijo resnično in opaženo koreliranost števila bodočih in preteklih škod. Resnična koreliranost bodočega in preteklega števila škod je po mnenju avtorjev negativna. Avtomobilska nesreča namreč lahko spremeni voznikovo dojemanje za volanom, zaradi česar ta postane previdnejši in boljši voznik, kar zmanjša verjetnost za škodo v prihodnosti. Poleg tega *a posteriori* diferenciacija vzpodbuja previdnejšo in varnejšo vožnjo ter negativno koreliranost škodne pogostnosti in preteklega števila škod. Vendar pa podatki kažejo, da je opažena korelacija ravno obratna – pozitivna, torej je za zavarovance, ki so prijavili škodo v preteklosti, večja verjetnost, da jo bodo tudi v prihodnosti. In ravno zaradi opažene pozitivne koreliranosti števila bodočih in preteklih škod je *a posteriori* diferenciacija upravičena.

Zavarovalnice so po Lemairovem mnenju (1995, str. xxii) vpeljale *a posteriori* diferenciacijo v določanje premije ne le, da bi slabši zavarovanci plačali več kot dobri, ampak tudi, da bi vzpodbudile zavarovance k previdnejši vožnji. Dionne in Vanasse (1992) upravičujeta obe obliki diferenciacije, *a priori* in *a posteriori*, tudi z asimetrijo informacij med zavarovalnico in zavarovancem. Asimetrija informacij se pojavlja v dveh oblikah: nasprotni selekciji in moralnemu hazardu. Do prej opisane nasprotne selekcije pride, ker zavarovanec pozna svoje vozniške navade in s tem tveganje, ki ga predstavlja za zavarovalnico, bolje kot zavarovalnica. Dober primer nasprotne selekcije so zavarovanja avtomobilskega kaska. Vozniki, ki poleg avtomobilske odgovornosti zavarujejo tudi avtomobilski kasko, imajo namreč višjo škodno pogostnost kot tisti, ki zavarujejo le avtomobilsko odgovornost. To je dokaz, da zavarovanci ob sklenitvi zavarovanja vedo o svojih vozniških sposobnostih več kot zavarovalnica. Zavarovalnica zaradi tega pomanjkanja informacij ob sklenitvi zavarovanja ne more postaviti premije, ki bi ustrezala tveganju, ki ga prevzema (Lemaire, 1995, str. 4).

Do moralnega hazarda po drugi strani pride, ko se obnašanje zavarovanca spremeni, ker je zavarovan. Moralni hazard lahko nastopi bodisi pred škodnim dogodkom, ko se zavarovanec zaradi veljavnosti zavarovanja obnaša manj previdno, bodisi ob škodnem dogodku, ko poskuša od zavarovalnice dobiti čim višjo odškodnino. Pri zavarovanjih avtomobilske odgovornosti je nasprotna selekcija zanemarljiv problem v primerjavi z moralnim hazardom, če zavarovalnica vsem zavarovancem zaračunava enako premijo. Če pa zavarovalnica uporablja *a priori* diferenciacijo, se zaradi heterogenosti *a priori* razredov nasprotni selekciji ne more izogniti (Denuit et al., 2007, str. xxi).

A posteriori diferenciacija zavarovance vzpodbuja k previdnejši vožnji in blaži učinek asimetrije informacij. Če bi uporabljali le *a priori* diferenciacijo, premijski razredi ne bi bili homogeni in premija ne bi bila poštena do zavarovancev. *A priori* spremenljivke kaznujejo posameznike, ki so domnevno slabi vozniki, čeprav ni nujno, da so to tudi v resnici, *a posteriori* spremenljivke pa določijo premijo na podlagi zavarovančevega preteklega škodnega obnašanja, torej popravijo morebitno napačno *a priori* oceno premije. Da bi zmanjšali razliko med posameznikovo *a priori* premijo in dejanskim tveganjem, ki ga predstavlja za zavarovalnico, zavarovalnica vpelje *a posteriori* diferenciacijo, s katero upošteva posameznikovo preteklo škodno dogajanje. Pri *a priori* diferenciaciji je glavna naloga določiti premijo novemu zavarovancu, o katerem še nimamo veliko podatkov. Več ko imamo izkušenj z zavarovancem, bolj postane uporaba *a posteriori* diferenciacije nujna, da popravimo *a priori* premijo tako, da bo zavarovanec plačal premijo, ki ustreza njegovemu tveganju (Antonio & Valdez, 2011).

Zavarovalnice v večini razvitih držav uporabljajo pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti sistem, ki pri določanju premije upošteva poleg *a priori* spremenljivk tudi *a posteriori* spremenljivke. Pri določanju premije torej zavarovalnice upoštevajo preteklo škodno dogajanje in zavarovanca brez škod v preteklem letu nagradijo z *bonusom*, tistega s škodo pa kaznujejo z *malusom*. Za tak način *a posteriori* določanja premije se je uveljavilo ime *bonus-malus sistem*. Bonus-malus sistem je v uporabi predvsem v kontinentalni Evropi in večini azijskih držav. V Angliji in ZDA se je uveljavila enostavnejša različica bonus-malus sistema, *sistem popustov za brezškodno dogajanje* (angl. *no-claim discount system*), v katerem se zavarovancem v primeru brezškodnega dogajanja podeljujejo popusti, v primeru škod pa ne dobijo malusa, ampak le izgubijo celoten popust (Denuit et al., 2007, str. xx).

Po Denuit et al. (2007, str. xx) začetki bonus-malus sistema segajo v leto 1910 v Veliko Britanijo. V 20. stoletju je večina evropskih držav uvedla bonus-malus sisteme, ki so bili na začetku enaki za vse zavarovalnice v državi. Leta 1992 je Evropska unija z Direktivo Sveta 92/49/EGS (v nadaljevanju Tretja direktiva) določila, da morajo njene članice z julijem 1994 opustiti zakonsko predpisane bonus-malus sisteme, saj naj bi omejevali konkurenco med zavarovalnicami in naj bi bili v nasprotju s popolno svobodo določanja cen, ki jo je direktiva implementirala. Baione, Levantesi in Menzietti (2002) menijo, da je Tretja direktiva prinesla velike spremembe v določanje premij avtomobilskih zavarovanj. Poleg sprememb glede bonus-malus sistemov se je namreč končalo tudi določanje premij s strani države, zaradi česar se je povečalo zanimanje za razvoj teorije o določanju premij avtomobilskih zavarovanj. Povod za deregulacijo določanja cen je bil nastanek Evropske unije kot območja s prostim trgom, ki seveda prepoveduje cenovne kartele.

S Tretjo direktivo je Evropska unija zavarovalnicam dala možnost, da uvedejo inovativnost in nove spremenljivke v določanje premije in vpeljejo nove bonus-malus sisteme. Evropska unija je dala jasno vedeti, da je uporaba zakonsko predpisanih bonus-malus sistemov praksa, ki krši pravila konkurence. V nekaterih državah, kot so na primer Italija, Španija in Portugalska, so zavarovalnice nove pogoje izkoristile in začele agresivno tekmovati med seboj tudi na podlagi bonus-malus sistemov. V drugih državah zavarovalnice niso reagirale tako agresivno in se je učinek Tretje direktive kazal predvsem v uporabi večjega števila *a priori* spremenljivk, ne pa toliko v uporabi različnih bonus-malus sistemov. Belgija, Francija in Luksemburg so poizkusile celo pravno doseči ohranitev zakonsko predpisanega bonus-malus sistema. Francija in Luksemburg sta presenetljivo uspela, Belgija pa je obdobje zakonsko obveznega bonus-malus sistema podaljšala za 10 let, tako da imajo tam šele od leta 2004 zavarovalnice pravico do postavitve lastnega bonus-malus sistema. Kljub temu večina zavarovalnic v Belgiji še vedno uporablja nekdanji zakonsko predpisan bonus-malus sistem (Viswanathan & Lemaire, 2005; Pitrebois, Denuit & Walhin, 2003a).

1.3 Povezanost *a priori* in *a posteriori* spremenljivk

Uporaba *a priori* in *a posteriori* spremenljivk je zelo odvisna od okolja. Bermúdez, Denuit in Dhaene (2001) pravijo, da je bil v Severni Ameriki tradicionalno večji poudarek na *a priori* diferenciaciji, torej so zavarovalnice uporabljale veliko *a priori* spremenljivk, medtem ko so v kontinentalni Evropi uporabljale manj *a priori* spremenljivk in bolj poudarjale *a posteriori* diferenciacijo. S popolno svobodo določanja cen so začele tudi v Evropi zavarovalnice uporabljati več *a priori* spremenljivk. V konkurenčnem okolju zavarovalnice poskušajo z vsemi razpoložljivimi informacijami izenačiti ceno svojih konkurentov.

Denuit et al. (2007, str. xviii–xix) pravijo, da morajo imeti zavarovalnice v primeru blažje *a priori* diferenciacije učinkovitejšo *a posteriori* diferenciacijo, to je učinkovitejši in bolj dodelan bonus-malus sistem. Na prostem trgu so zavarovalnice primorane čim bolj izenačiti premijo s tveganjem že *a priori*, torej morajo uporabljati čim več *a priori* diferenciatorjev, kar pa zmanjša potrebo po dodelanem bonus-malus sistemu (Lemaire, 1995, str. 6). Pitrebois et al. (2003b) pravijo, da je stopnja potrebne *a posteriori* diferenciacije odvisna od stopnje *a priori* diferenciacije, in sicer natančnejša ko je *a priori* diferenciacija, manjši morajo biti popravki premije *a posteriori*. Več o tem bomo navedli v razdelku 5.1.4.

Zavarovalni nadzor sedaj v mnogih državah ukinja diferenciacijo na podlagi dejavnikov, ki jih zavarovanec ne more nadzorovati, kot je na primer prej omenjena prepoved uporabe spola kot diferenciatorja pri premoženjskih in življenjskih zavarovanjih za članice Evropske unije. Vpliv ukinitve *a priori* spremenljivk lahko zavarovalnice omilijo bodisi z uvedbo drugih *a priori* spremenljivk, ki so približki za ukinjene spremenljivke, bodisi z večjim poudarkom na *a posteriori* spremenljivkah.

2 VRSTE BONUS-MALUS SISTEMOV

Po svetu se je razvilo mnogo različnih bonus-malus sistemov. V tem poglavju bomo predstavili nekaj večjih razlik med njimi.

2.1 Razredni in zvezni bonus-malus sistemi

Razredni bonus-malus sistemi so sistemi, pri katerih police razdelimo v končno število razredov, pri čemer je v vsakem obdobju vsaka polica v natanko enem razredu in je razred police za naslednje leto določen s trenutnim razredom in številom škod, prijavljenih zavarovalnici v tem letu (Andrade e Silva & Centeno, 2005). Razredni bonus-malus sistemi so najpogosteje uporabljani, zato se bomo v tem magistrskem delu osredotočili na njih. Določeni so

- s končnim številom razredov,
- z začetnim razredom, to je razredom, v katerega pride zavarovanec brez znane pretekle škodne zgodovine,
- s prehodi med razredi, odvisnimi od števila škod v preteklosti,
- z odstotkom izhodiščne premije, ki ga plačujejo zavarovanci v posameznem razredu.

Razredni bonus-malus sistemi so najpogostejši, vendar pa obstajajo tudi drugačni bonus-malus sistemi, kot je na primer zvezni bonus-malus sistem. *Zvezni bonus-malus sistem* nima bonus-malus razredov, med katerimi zavarovanci prehajajo, pač pa je zavarovančeva *a posteriori* premija določena kot zmanjšanje ali povečanje premije v preteklem letu glede na škodno dogajanje v tem letu. V literaturi je najpogosteje opisan primer zveznega bonus-malus sistema francoski bonus-malus sistem. V Franciji je bonus-malus sistem zakonsko predpisan in ne temelji na lestvici, pač pa uporablja koncept koeficientov zmanjšanja-povečanja (franc. *coefficient de réduction-majoration*). Zavarovanci ne prehajajo med vnaprej določenimi razredi, pač pa se jim premija vsako leto popravi glede na škodno dogajanje v preteklem obdobju. V primeru brezškodnega leta dobijo zavarovanci 5 % popust na predhodno premijo, za vsako škodo pa morajo plačati 25 % višjo premijo. Ker se koeficienti med seboj množijo, je vsaka škoda kaznovana za več kot prejšnja, na primer zavarovanec z izhodiščno premijo 100 v primeru ene škode plača 125, v primeru dveh $125 \times 1,25 = 156$ itn. Tudi bonusi se med seboj množijo, a to pomeni, da vsako leto brez škode prinese manjši popust kot predhodno. Odstotki popusta in doplačila na izhodiščno premijo so omejeni navzgor s 350 % in navzdol s 50 % izhodiščne premije. Francoski bonus-malus sistem je zanimiv tudi zaradi nekaterih drugih posebnosti, na primer razpolovljenega malusa v primeru deljene odgovornosti za škodo.

Pitrebois, Denuit in Walhin (2006a) naredijo aktuarsko analizo francoskega bonus-malus sistema, ki se jo da posplošiti na vse zvezne bonus-malus sisteme s koeficientom zmanjšanja-povečanja. Bonsdorff (2005) obravnava splošnejši primer zveznega bonus-malus sistema, v katerem nimamo podanih razredov, med katerimi zavarovanci prehajajo, pač pa interval premije, ki jo zavarovanci plačujejo, in pravila prehajanja.

2.2 Bonus-malus sistemi različnih vrst avtomobilskih zavarovanj

Avtomobilska zavarovanja vsebujejo več vrst kritij. Najpomembnejše med njimi je zavarovanje avtomobilske odgovornosti, ki je v večini držav zakonsko obvezno. Glavni cilj obveznega zavarovanja avtomobilske odgovornosti je kritje škod tretjim osebam za škode, povzročene na osebah in stvareh. Poleg te zavarovalne vrste pa lahko avtomobilsko zavarovanje krije tudi škodo na zavarovančevem lastnem avtomobilu (zavarovanje avtomobilskega kaska), asistenco v primeru okvare vozila, stroške zdravljenja ipd. Navadno lahko police vsebujejo več vrst kritij, kar omogoča ugotavljanje koreliranosti vrst avtomobilskih zavarovanj med seboj (Bermúdez & Karlis, 2011).

Zavarovalnice imajo lahko za različne vrste avtomobilskih zavarovanj različne, enake ali en sam bonus-malus sistem. Vzemimo za primer najpogostejši vrsti avtomobilskih zavarovanj, ki uporabljata bonus-malus sistem, zavarovanje avtomobilske odgovornosti in zavarovanje avtomobilskega kaska. V primeru različnih bonus-malus sistemov imata zavarovalni vrsti ločeni bonus-malus lestvici z različnimi razredi ter različnimi pravili prehajanja. Bonus-malus sistem pri avtomobilski odgovornosti takrat deluje povsem neodvisno od bonus-malus sistema avtomobilskega kaska, torej škoda na eni vrsti zavarovanja ne vpliva na bonus-malus razred druge vrste zavarovanja. Če imata zavarovalni vrsti enaka bonus-malus sistema, sta sicer po obliki enaka, torej imata enake razrede in pravila prehajanja, a delujeta, podobno kot v primeru različnih bonus-malus sistemov, neodvisno. Če pa je bonus-malus sistem en sam za obe zavarovalni vrsti, škoda na eni vrsti avtomobilskih zavarovanj vpliva na bonus-malus razred za obe vrsti zavarovanja tega zavarovanca. Večina evropskih zavarovalnic uporablja različna ali enaka bonus-malus sistema za omenjeni vrsti zavarovanj. En bonus-malus sistem za obe vrsti zavarovanja pa se uporablja na primer v Franciji, kjer je bonus-malus sistem vezan na zavarovanca in ne na zavarovalno polico. Premija posameznega zavarovanca predstavlja določen odstotek izhodiščne premije, ki se vsako leto popravi glede na preteklo škodno dogajanje in se uporabi za določitev premije pri vseh avtomobilskih zavarovanjih tega zavarovanca.

Uporaba enega bonus-malus sistema za zavarovanje omenjenih zavarovalnih vrst je na nek način smiselna, saj sta ti dve zavarovalni vrsti pozitivno korelirani, torej škoda na eni zavarovalni vrsti pomeni večjo verjetnost za škodo na drugi. Ker so škode pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti precej redke (ko pa se zgodijo, so zelo drage), je pomembno, da v določanje premije vključimo vse podatke, ki jih o zavarovancu poznamo, četudi so povezani z drugim zavarovalnim kritjem. Bonus-malus sistem, ki temelji zgolj na številu škod pri avtomobilski odgovornosti, je vedno manj smiseln, ko se škodna pogostnost spusti pod 5 % (Lemaire, 1995, str. 181). Po drugi strani pa je glede na analize CEA (2010, str. 34–39) škodna pogostnost pri zavarovanju avtomobilskega kaska v Sloveniji precej višja od škodne pogostnosti avtomobilske odgovornosti in bi z uporabo enega bonus-malus sistema kaznovali zavarovance, ki imajo zavarovani obe zavarovalni vrsti. Slednje ni smiselno, saj je v interesu zavarovalnice, da imajo zavarovanci pri njih sklenjenih več zavarovanj. Ker je v Franciji bonus-malus sistem zakonsko predpisan in zato vse zavarovalnice uporabljajo enak sistem, si tam zavarovalnice lahko privoščijo en bonus-malus sistem za več zavarovanj. Zavarovančev koeficient premije je v vsaki zavarovalnici enak in zavarovancu ne bi pomagalo, če bi imel zavarovan avtomobilski kasko v eni zavarovalnici, avtomobilsko odgovornost pa v drugi. V okolju zavarovalnic, ki konkurirajo na podlagi bonus-malus sistemov pa je uporaba enega bonus-malus sistema, če pri prehodnih pravilih upoštevamo le število škod, smiselna le, če sta škodni pogostnosti za ti dve zavarovalni vrsti enaki.

Pri tem omenimo še, da je v Evropi, na primer v Angliji, zavarovanje avtomobilske odgovornosti vedno manj zanimivo za zavarovalnice. Raje imajo namreč kombinirana avtomobilska zavarovanja, ki vključujejo poleg zavarovanja avtomobilske odgovornosti tudi druge vrste zavarovanj, ker naj bi ta pripeljala boljše zavarovance (Datamonitor, 2006, str. 47). Bauer in Melle (2007) navajata, da je škodni rezultat zavarovanja avtomobilske odgovornosti slabši kot pri zavarovanju avtomobilskega kaska. To lahko pojasnimo na več načinov. Datamonitor (2006) kot enega izmed razlogov za ta pojav omenja, da si mlajši vozniki, ki so najbolj tvegana skupina voznikov, kombiniranih avtomobilskih zavarovanj ne morejo privoščiti. Poleg tega je pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti za zavarovanca najpomembnejši dejavnik višina premije in ga ne zanima na primer kakovost škodnega servisa zavarovalnice, saj se zaradi posledic škode ne bo treba ukvarjati z zavarovalnico njemu, pač pa se bo moral oškodovanec. Iz tega razloga je pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti močen konkurenčni boj za zavarovance in morajo zavarovalnice podati čimbolj natančno premijo ter karseda zmanjšati dobiček na račun te vrste zavarovanj.

2.3 Bonus-malus sistemi glede na pravila prehajanja zavarovancev med razredi

Večina bonus-malus sistemov po svetu kaznuje le število škod, ne pa na primer njihove višine. To pomeni, da zavarovalnice menijo, da sta število prijavljenih škod in njihova višina neodvisni slučajni spremenljivki, da torej slabi zavarovanci povzročijo veliko število škod, ne pa nujno dražjih škod (Lemaire, 1995, str. 71). Vendar pa bonus-malus sistem, ki upošteva zgolj število škod, ni pravičen na primer do voznikov, ki živijo v mestih, saj ti v povprečju povzročijo večje število manjših škod, vozniki s podeželja pa manjše število velikih škod.

Poleg števila povzročenih škod avtorji predlagajo za prehajanje med razredi v bonus-malus sistemu tudi naslednje spremenljivke:

- **Višina škod.** Pinquet (1997) pokaže, da sta višina povprečne škode in škodna pogostnost pozitivno korelirani. Višino škode lahko upoštevamo glede na absolutni znesek kot Pinquet (1997) ter Frangos in Vrontos (2001) ali pa glede na vrste povzročenih škod. Lemaire (1995) pri drugi vrsti ločevanja na primer ločuje dve vrsti povzročenih škod: materialne, pri katerih gre zgolj za škodo na stvareh, in nematerialne, pri katerih gre tudi za poškodbe oseb. Nematerialne škode so v povprečju mnogo višje in so zato lahko upravičeno bolj kaznovane.

- **Delno povzročene in nepovzročene škode.** Običajni bonus-malus sistemi pri prehajanju med razredi upoštevajo le povzročene škode, francoski bonus-malus sistem pa upošteva tudi delno povzročene škode in za take škode zavarovancu prizna manjši malus (Pitrebois, Denuit & Walhin, 2006c). Pinquet (1998) zagovarja kaznovanje nepovzročenih škod, saj naj bi imeli zavarovanci, ki so večkrat udeleženi v nesrečah, kljub temu, da zanje niso krivi, v povprečju višjo škodno pogostnost.

- **Cestno prometni prekrški.** V Severni Ameriki kot enega od dejavnikov prehoda zavarovalnice upoštevajo zavarovančevo zgodovino kršitev cestno prometnih predpisov. V Massachusettsu (ZDA) na primer zavarovanec prehaja med razredi glede na število povzročenih in nepovzročenih nesreč ter kršitev cestno prometnih predpisov (Pitrebois et al., 2006c).

Pri tem velja omeniti, da so upoštevani dejavniki prehoda močno odvisni od državnega nadzora in državnega informacijskega sistema. V Franciji je zaradi postopka pri izplačevanju škod iz avtomobilske odgovornosti, ki je v uporabi v celi državi, mogoče upoštevati tudi nepovzročene škode. Tam namreč voznik, ki škode ni povzročil, dobi odškodnino za materialno škodo od svoje zavarovalnice, ta pa jo terja od zavarovalnice odgovorne stranke. Zato zavarovalnica ve tudi za nepovzročene škode voznika (Pinquet, 1998). Podobno je v primeru uporabe števila cestno prometnih prekrškov kot dejavnika prehoda. V ZDA imajo zavarovalnice direkten dostop do podatkov o prekrških voznikov, zato lahko te podatke uporabljajo pri določanju premije (Pinquet, 1997).

Podrobneje bomo o tej temi razpravljali v razdelku 5.1.3, povsod drugje pa bomo kot edini dejavnik prehoda med razredi upoštevali število škod.

3 MATEMATIČNI OPIS BONUS-MALUS SISTEMA

Matematični opis bonus-malus sistema povzemimo po Lemairu (1995, str. 6–9). V nadaljevanju bomo zaradi poenostavitve enačili zavarovalno obdobje z letom, saj so avtomobilske police navadno enoletne.

Privzemimo, da ima bonus-malus sistem *lastnost Markova*, torej da je bonus-malus razred zavarovanca za dano zavarovalno obdobje določen enolično z razredom predhodnega obdobja in številom prijavljenih škod v tem obdobju ter ni odvisen od števila škod v predhodnih obdobjih. Trenutno stanje zavarovanca je torej odvisno le od predhodnega, ne pa od tega, kako je predhodno stanje dosegel. V nekaterih bonus-malus sistemih je za zagotovitev lastnosti Markova potrebno uvesti navidezne razrede, ker je stanje zavarovanca v bonus-malus sistemu odvisno od škodnega dogajanja v več kot enem predhodnem letu. To se na primer zgodi pri bonus-malus sistemih s posebnim pravilom, ki zavarovancem v malus razredih zagotovi, da bodo po nekaj brezškodnih letih poslani v začetni razred. Primer takega bonus-malus sistema je belgijski bonus-malus sistem, ki ga Lemaire (1995, str. 8) prevede na bonus-malus sistem z lastnostjo Markova. Park, Lemaire in Chua (2010) kot glavni razlog, da lahko večino obstoječih bonus-malus sistemov prevedemo na take z lastnostjo Markova navajajo, da mora biti prehod iz ene zavarovalnice v drugo vedno enostaven, pri čemer za ta prehod ne sme biti potrebno poznavanje celotne škodne zgodovine zavarovanca.

Označimo z s število razredov bonus-malus sistema in jih oštevilčimo z $1, \ldots, s$, pri čemer je najnižji razred tisti z najnižjo premijo, najvišji pa tisti z najvišjo premijo. Zavarovanec, ki prvič vstopa v bonus-malus sistem, začne v začetnem razredu i_0. Premija po bonus-malus razredih je določena z vektorjem $b = (b_1, \ldots, b_s)^T$, pri čemer zavarovanec v i-tem razredu plačuje b_i odstotkov izhodiščne premije. Pri tem je izhodiščna premija za vsakega zavarovanca določena *a priori*, *a posteriori* pa premijo določimo tako, da izhodiščno premijo pomnožimo z odstotkom, ki ustreza bonus-malus razredu, v katerem se nahaja zavarovanec. Odstotku izhodiščne premije pravimo tudi *relativna premija*. Ker smo privzeli, da je najnižji razred tisti z najnižjo premijo, je $b_1 \leq \cdots \leq b_s$.

Za vsako možno število škod k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, lahko prehodna pravila predstavimo v obliki matrike $T_k = (t_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^s$, pri čemer je $t_{ij}^{(k)} = 1$, če gre zavarovanec ob k prijavljenih škodah iz i-tega v j-ti razred, in 0 sicer.

Označimo z λ škodno pogostnost. Potem je verjetnost, da gre zavarovanec v enem letu iz i-tega razreda v j-ti, enaka

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)},$$

pri čemer s $p_k(\lambda)$ označujemo verjetnost, da zavarovanec s škodno pogostnostjo λ v letu povzroči k škod. Prehodna matrika bonus-malus sistema je matrika verjetnosti prehodov med stanji za zavarovanca s škodno pogostnostjo λ in jo zapišemo kot

$$P(\lambda) = (p_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^s = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k.$$

Označimo z $\ell_n(\lambda) = (\ell_{n1}(\lambda), \ldots, \ell_{ns}(\lambda))^T$ porazdelitev zavarovancev po razredih v n-tem letu opazovanja bonus-malus sistema, torej je $\ell_{ni}(\lambda)$ verjetnost, da je zavarovanec s škodno pogostnostjo λ po n letih v i-tem razredu, $i = 1, \ldots, s$. Porazdelitev zavarovancev prvo leto opazovanja bonus-malus sistema oziroma začetna porazdelitev je $\ell_0 = \ell_0(\lambda)$ in je neodvisna od λ.

Za $n > 1$ dobimo porazdelitev zavarovancev v j-tem razredu kot

$$\ell_{nj}(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \ell_{n-1,i}(\lambda) p_{ij}(\lambda),$$

kar lahko v vektorski obliki zapišemo kot

$$\ell_n^T(\lambda) = \ell_{n-1}^T(\lambda) P(\lambda). \tag{1}$$

3.1 Stacionarno stanje bonus-malus sistema

Privzemimo za trenutek, da $\lim_{n\to\infty} \ell_n(\lambda)$ obstaja in jo označimo z $\ell_\infty(\lambda)$. Če v enačbi (1) pošljemo $n \to \infty$, dobimo

$$\ell_\infty^T(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \ell_n^T(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \ell_{n-1}^T(\lambda) P(\lambda) = \ell_\infty^T(\lambda) P(\lambda). \tag{2}$$

Če porazdelitev $\ell_\infty(\lambda)$ obstaja, je to levi lastni vektor prehodne matrike $P(\lambda)$ za lastno vrednost 1 (Kaas et al., 2008, str. 143).

Porazdelitvi zavarovancev $\ell_\infty(\lambda)$ pravimo *stacionarna porazdelitev zavarovancev*. Ko je porazdelitev zavarovancev po razredih enaka stacionarni porazdelitvi, pravimo, da je bonus-malus sistem dosegel *stacionarno stanje*. Element stacionarne porazdelitve $\ell_{\infty i}(\lambda)$ označuje verjetnost, da je zavarovanec s škodno pogostnostjo λ v i-tem razredu, ko je bonus-malus sistem v stacionarnem stanju. Stacionarna porazdelitev je porazdelitev, do katere bonus-malus sistem pride, ko se izniči učinek začetnega razreda in je vsak zavarovanec v tistem razredu, v katerem bi moral biti glede na svojo individualno škodno pogostnost.

Pokazali smo torej, kakšna je limitna porazdelitev zavarovancev, če obstaja. Pokažimo še, da zares obstaja, da torej bonus-malus sistem vedno skonvergira v stacionarno stanje. Dokaz povzemimo po Denuit et al. (2007, str. 175–176).

Porazdelitev zavarovancev s škodno pogostnostjo λ lahko v časovni točki n zapišemo kot

$$\ell_n^T(\lambda) = \ell_0^T(\lambda)P^n(\lambda).$$

Zanima nas, kaj se dogaja z matriko $P^n(\lambda)$, ko gre $n \to \infty$.

Ker vsaka vrstica matrike $P(\lambda)$ predstavlja verjetnostno porazdelitev zavarovancev po razredih, v katere vstopajo, so vsi elementi nenegativni in se po vrsticah seštejejo v 1. Matrika $P(\lambda)$ je torej stohastična z nenegativnimi vrednostmi. Potem je $P(\lambda)\overline{1} = \overline{1}$, pri čemer označujemo $\overline{1} = (1, \ldots, 1)^T$. Torej je $\overline{1}$ desni lastni vektor matrike $P(\lambda)$, ki pripada lastni vrednosti 1. Označimo lastne vrednosti matrike $P(\lambda)$ z $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, pri čemer je $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_s|$. Perron-Frobeniusov izrek nam zagotavlja, da za regularne stohastične matrike velja naslednje:

- $\lambda_1 = 1$ je največja leva lastna vrednost in je $|\lambda_i| < 1$ za $i = 2, \ldots, s$,
- levi lastni vektor matrike P za lastno vrednost 1 je stohastičen.

Matrika je regularna, če obstaja potenca te matrike, ki ima vse vrednosti strogo pozitivne. Prehodna matrika $P(\lambda)$ je regularna, če je za vsak par (i, j) možno priti iz stanja i v stanje j v končnem številu korakov. Tej lastnosti zadošča večina prehodnih matrik obstoječih bonus-malus sistemov, torej Perron-Frobeniusov izrek za te matrike velja.

Predpostavimo, da ima matrika $P(\lambda)$ same različne lastne vrednosti. Potem se jo da diagonalizirati in jo lahko zapišemo kot

$$P(\lambda) = VDV^{-1},$$

kjer smo z D označili diagonalno matriko z vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ na diagonali, matriki V in V^{-1} pa pišimo kot $V = (v_1, \ldots, v_s)$ in $V^{-1} = (u_1^T, \ldots, u_s^T)^T$. Za trenutek označimo desne lastne vektorje matrike $P(\lambda)$, pripadajoče lastnim vrednostim $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ z $x_1, \ldots, x_s$. Potem je za $i = 1, \ldots, s$

$$P(\lambda)x_i = \lambda_i x_i \iff VDV^{-1}x_i = \lambda_i x_i \iff DV^{-1}x_i = \lambda_i V^{-1}x_i.$$

Če potem označimo vektor $x_i' = V^{-1}x_i$, pridemo do enakosti

$$Dx_i' = \lambda_i x_i'.$$

Ker je D diagonalna matrika lastnih vrednosti, sledi, da je x'_i stohastičen vektor z enico na i-tem mestu. Potem je $x_i = Vx'_i = v_i$, torej so stolpci v_i matrike V ravno med seboj linearno neodvisni desni lastni vektorji prehodne matrike $P(\lambda)$. Na enak način lahko izpeljemo, da so transponirane vrstice u_i matrike V^{-1} med seboj linearno neodvisni levi lastni vektorji prehodne matrike $P(\lambda)$.

Sedaj lahko z indukcijo pokažemo, da za $n > 1$ velja $P^n(\lambda) = VD^nV^{-1}$:

$$P^n(\lambda) = P(\lambda)P^{n-1}(\lambda) = (VDV^{-1})(VD^{n-1}V^{-1}) = VD^nV^{-1} = V \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s^n \end{pmatrix} V^{-1}.$$

Ker so $|\lambda_i| < 1$ za $i = 2, \ldots, s$, je $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n = 0$, od koder sledi

$$P^\infty(\lambda) = \lim_{n\to\infty} P^n(\lambda) = v_1 u_1^T = \overline{1}\ell_\infty^T(\lambda) = (\ell_\infty^T(\lambda), \ldots, \ell_\infty^T(\lambda))^T,$$

kjer smo upoštevali, da je desni lastni vektor v_1, ki pripada lastni vrednosti 1, enak $\overline{1}$ in da je $u_1 = \ell_\infty(\lambda)$. Pri tem enak rezultat velja tudi, če lastne vrednosti λ_i ($i = 2, \ldots, s$) niso med seboj različne (Denuit et al., 2007, str. 175–176).

Pokazali smo torej, da matrika $P^n(\lambda)$ skonvergira, in videli, kakšna je njena limita. Če sedaj to navežemo na ugotovitve iz enakosti (2), dobimo

$$\begin{aligned} \ell_\infty^T(\lambda) &= \lim_{n\to\infty} \ell_n^T(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \ell_0^T(\lambda)P^n(\lambda) = \ell_0^T(\lambda)P^\infty(\lambda) \\ &= \left(\sum_{i=1}^s \ell_{0i}(\lambda)\ell_{\infty 1}(\lambda), \ldots, \sum_{i=1}^s \ell_{0i}(\lambda)\ell_{\infty s}(\lambda) \right) = \ell_\infty^T(\lambda). \end{aligned}$$

Dokazali smo torej, da:

- vsak bonus-malus sistem skonvergira v stacionarno stanje, ker $\lim_{n\to\infty} P^n(\lambda)$ obstaja,
- je stacionarna porazdelitev zavarovancev enaka levemu lastnemu vektorju prehodne matrike $P(\lambda)$ za lastno vrednost 1.

Vidimo, da je (i, j)-ti element matrike $P^n(\lambda)$ enak verjetnosti, da zavarovanec pride iz i-tega razreda v j-ti v n letih. Potem lahko razumemo (i, j)-ti element limitne matrike $P^\infty(\lambda)$ kot verjetnost, da zavarovanec pride iz i-tega razreda v j-ti razred v neskončno korakih. Ker so vse vrstice limitne matrike enake, je zavarovanec ne glede na to, v katerem razredu začne, z enako verjetnostjo v j-tem razredu. Torej se v stacionarnem stanju učinek začetnega razreda izgubi in bonus-malus sistem doseže želeno *a posteriori* diferenciacijo.

3.2 Porazdelitev števila in višine škod

Za določitev prehodne matrike $P(\lambda)$ potrebujemo verjetnosti prehodov med razredi. Za analizo bonus-malus sistema, v katerem zavarovanci prehajajo med razredi glede na število škod v predhodnem letu, torej potrebujemo porazdelitev števila škod.

Kot Denuit et al. (2007, str. 126–127) privzemimo osnovni zahtevi za modeliranje števila škod:

- število škod zavarovanca v opazovanem letu je neodvisno od števila njegovih škod v drugih zavarovalnih letih,

- škodna pogostnost in število škod za enega zavarovanca sta neodvisna od iste spremenljivke drugega zavarovanca.

3.2.1 Število škod v homogenem portfelju

Označimo z N slučajno spremenljivko, ki meri število povzročenih škod zavarovanca v letu. Naj bo N porazdeljena Poissonovo s parametrom λ, torej je

$$p_k(\lambda) = P(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lemaire (1995, str. 23) pokaže, da je Poissonova porazdelitev natanko tista porazdelitev, za katero velja, da je

- verjetnost škode na kratkem intervalu približno sorazmerna dolžini intervala,

- verjetnost več kot ene škode na takem intervalu zanemarljiva,

- število škod na disjunktnih intervalih med seboj neodvisno.

Če torej upoštevamo, da škode pri avtomobilskih zavarovanjih sledijo zgornjim trem lastnostim, ne moremo za modeliranje števila škod posameznika s škodno pogostnostjo λ uporabiti nobene druge porazdelitve kot Poissonovo (Lemaire, 1995, str. 23).

Denuit et al. (2007, pogl. 1.3.6) pokažejo izpeljavo Poissonove porazdelitve iz binomske znano tudi pod imenom *zakon malih števil*, saj je to porazdelitev števila dogodkov, ki se zgodijo redko, čeprav imajo veliko priložnosti, da bi se zgodili. Kot glavno lastnost Poissonove porazdelitve avtorji navajajo enako razpršenost, tj. varianca Poissonovo porazdeljene spremenljivke je enaka njenemu matematičnemu upanju.

S temi lastnostmi Poissonova porazdelitev predstavlja zelo dobro oceno števila škod posameznega zavarovanca in jo v ta namen v nadaljevanju tudi uporabljamo. Kjer v nadaljevanju predpostavimo homogen portfelj ali gledamo porazdelitev števila škod posameznega zavarovanca, uporabimo za škodno pogostnost podatek iz publikacije CEA (2010), ki se nanaša na povprečno škodno pogostnost članic CEA v letu 2008, in sicer

$$\lambda = 7\,\%.$$

Poudariti je treba, da povprečna škodna pogostnost med državami močno variira, in sicer od 3,4 % na Finskem do 11,9 % v Španiji. Bauer in Melle (2007, str. 16–18) kot razloge za variacijo škodne pogostnosti med državami omenjata poseljenost (Finska je na primer redko poseljena in ima posledično manj gost promet), infrastrukturo (kvaliteta cest), povprečno kvaliteto vozil (glede na varnost) in tipično obnašanje za volanom (uporaba varnostnih pasov, alkoholiziranost med vožnjo, hitrostne omejitve).

Ker bomo v nadaljevanju primerjali bonus-malus sisteme več držav, bi lahko razlikovanje povprečnih škodnih pogostnosti med državami vplivalo na interpretacijo rezultatov. Enak bonus-malus sistem v državi z višjo povprečno škodno pogostnostjo je namreč učinkovitejši kot v državi z nižjo povprečno škodno pogostnostjo. Vendar pa bomo primerjali le bonus-malus sisteme v državah s podobno škodno pogostnostjo.

Ker imajo v homogenem portfelju vsi zavarovanci enako škodno pogostnost, je Poissonova porazdelitev seveda primerna za tak portfelj. Kaj pa če gre za heterogen portfelj?

3.2.2 Število škod v heterogenem portfelju

Navadno se empirično pokaže, da Poissonova porazdelitev dobro oceni število povzročenih škod posameznega zavarovanca pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti, ni pa primerna za oceno porazdelitve heterogenega portfelja, v katerem škodne pogostnosti zavarovancev močno variirajo (Lemaire, 1995; Denuit & Dhaene, 2001; Boucher et al., 2007). Kot smo omenili v 1. poglavju, heterogenosti z *a priori* diferenciacijo ne moremo izničiti, zato moramo poiskati drugo porazdelitev za modeliranje števila škod v heterogenem portfelju.

Boucher et al. (2007) vidijo Poissonov model kot limitni primer heterogenega modela, ko gre varianca heterogene spremenljivke proti 0. Število prijavljenih škod pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti ima specifične lastnosti, ki jih moramo upoštevati, ko izbiramo porazdelitev, ki se prilega podatkom. Pri iskanju primerne porazdelitve števila škod po navajanju avtorjev naletimo na v nadaljevanju opisane pojave:

- **Prerazpršenost** (angl. *overdispersion*). Prerazpršenost slučajne spremenljivke označuje pojav, ko je varianca te spremenljivke večja od njenega matematičnega upanja. V primeru porazdelitve števila škod naj bi po mnenju avtorjev prerazpršenost nastala zaradi neupoštevanja pomembnih spremenljivk v *a priori* diferenciaciji.

- **Velik delež ničelnih vrednosti.** Velik delež ničelnih vrednosti pomeni, da v podatkih navadno naletimo na večje število polic brez prijavljenih škod, kot bi jih pri Poissonovi porazdelitvi pričakovali. Kot možni razlog za ta pojav avtorji navajajo željo zavarovancev po bonusu, saj zavarovanci manjše škode raje krijejo sami, da ne bi izgubili bonusa (glej razdelek 4.5). Trditev, da obstoj bonus-malus sistema vpliva na verjetnost, da zavarovanci prijavijo škodo zavarovalnici, Boucher et al. (2007) potrdijo tudi empirično.

- **Debeli desni repi porazdelitve.** Tretji pojav, ki ga avtorji tudi empirično opazijo, je, da se s tem, ko zavarovanec prijavi prvo škodo, poveča verjetnost, da bo v istem letu prijavil še kakšno. Matematično ta lastnost pomeni, da se podatkom o številu škod prilega porazdelitev z debelim desnim repom. Poissonova porazdelitev na primer nima dovolj debelega repa. Ta lastnost potrjuje splošno prepričanje zavarovalnic, da se zavarovanci delijo na dobre, ki ne povzročijo nobene škode, in slabe, ki povzročijo mnogo škod. Zavarovalnice se po tej teoriji ravnajo tudi v praksi, saj mnogo tržnih strategij temelji na pridobivanju čimveč dobrih zavarovancev in prepuščanju slabih drugim zavarovalnicam.

V nadaljevanju predstavljene porazdelitve števila škod poskušajo upoštevati omenjene pojave.

V heterogenem portfelju škodna pogostnost med zavarovanci močno variira, zato pri modeliranju števila škod v takem portfelju škodna pogostnost ni več konstantna, pač pa slučajna spremenljivka. Označimo jo z Λ. Predpostavimo, da je število povzročenih škod posameznika s škodno pogostnostjo λ, torej slučajna spremenljivka $N|(\Lambda = \lambda)$, porazdeljeno Poissonovo. Za slučajno spremenljivko N torej dobimo sestavljeno porazdelitev in ker je slučajna spremenljivka $N|\Lambda$ porazdeljena Poissonovo, pravimo porazdelitvi števila škod N *mešana Poissonova porazdelitev*.

Tremblay (1992) s hitrim izračunom pokaže, da zaradi lastnosti pogojne verjetnosti velja

$$\begin{aligned} E(N) &= E(E(N|\Lambda)) = E(\Lambda) \text{ in} \\ var(N) &= E(N^2) - E(N)^2 = E\left(E(N^2|\Lambda)\right) - E(\Lambda)^2 \\ &= E\left(var(N|\Lambda) + E(N|\Lambda)^2\right) - E(\Lambda)^2 = E(\Lambda) + var(\Lambda), \end{aligned}$$

torej je varianca spremenljivk z mešano Poissonovo porazdelitvijo večja od matematičnega upanja, za razliko od Poissonovo porazdeljenih spremenljivk, pri katerih je varianca enaka matematičnemu upanju. Prerazpršenost se, kot smo že omenili, navadno pokaže tudi v dejanskih podatkih in je z vidika zavarovalnic varnejša od enako razpršenosti, pri katerih je varianca enaka matematičnemu upanju.

Mešani Poissonovi modeli se med seboj razlikujejo glede na porazdelitev slučajne spremenljivke Λ. Po Shakedovem izreku ima mešana Poissonova porazdelitev večjo verjetnost ničle in debelejši desni rep kot Poissonova porazdelitev pri enakem matematičnem upanju, torej ustreza prej navedenim lastnostim (Denuit et al., 2007, str. 26).

Najpogosteje avtorji za slučajno spremenljivko Λ predpostavijo gama porazdelitev s parametri a in τ, kar pomeni, da je gostota slučajne spremenljivke Λ po Klugman, Panjer in Willmot (2004, str. 636) definirana kot

$$f_\Lambda(\lambda) = \frac{\tau^a \lambda^{a-1} e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(a)}.$$

Potem računamo

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{\tau^a \lambda^{a-1} e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(a)} d\lambda \\ &= \frac{\tau^a \Gamma(a+n)}{n!\Gamma(a)(\tau+1)^{a+n}} \int_0^\infty \frac{(\tau+1)^{a+n}\lambda^{a+n-1}e^{-\lambda(\tau+1)}}{\Gamma(a+n)} d\lambda \\ &= \binom{a+n-1}{a-1} \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^a \left(\frac{1}{\tau+1}\right)^n, \end{aligned} \tag{3}$$

kar pa je ravno porazdelitev negativno binomsko porazdeljene spremenljivke. Število škod N je torej po definiciji Klugman et al. (2004, str. 645) negativno binomsko porazdeljeno s parametroma a in τ.

Zaradi preprostosti uporabe in nekaj drugih teoretičnih lastnosti je negativni binomski model najpogosteje uporabljan. Empirične ugotovitve več avtorjev (na primer Lemaire, 1995; Boucher et al., 2007; Denuit et al., 2007; Dionne & Vanasse, 1992) so pokazale, da se negativna binomska porazdelitev podatkom prilega bistveno bolje kot Poissonova.

Namesto gama porazdelitve za slučajno spremenljivko Λ sta v literaturi najpogosteje predlagani inverzna Gaussova in lognormalna porazdelitev. Morillo in Bermúdez (2003) ter Tremblay (1992) zagovarjajo prvo porazdelitev. Poisson-inverzno Gaussov model se njihovim podatkom prilega bolje kot negativni binomski, medtem ko Lemaire (1995, str. 36) in Denuit et al. (2007, str. 32) ugotovijo, da je prilagajanje Poisson-inverzno Gaussovega modela podatkom približno enako dobro kot prilagajanje negativno binomskega modela. Po mnenju Denuit et al. (2007, str. 32) je Poisson-inverzno Gaussov model primeren za opisovanje in analiziranje desno-poševnih podatkov in je njegova glavna prednost, da lahko z njim opišemo celo vrsto oblik porazdelitev, od normalnih do zelo asimetričnih.

Z mešano Poissonovo porazdelitev smo upoštevali lastnosti, ki jih izpostavijo Boucher et al. (2007). Ker pa se avtorjem zdi, da ta model ne upošteva velikega deleža ničelnih škod v zadostni meri, predlagajo porazdelitev z inflacijo ničel (angl. *zero-inflated model*). Porazdelitev z inflacijo ničel je mešanica standardne številske porazdelitve z degenerirano porazdelitvijo skoncentrirano pri 0. Boucher in Denuit (2008) z uporabo porazdelitve z inflacijo ničel iz števila prijavljenih škod, o katerem imamo podatke, izpeljeta porazdelitev števila povzročenih nesreč. Več bomo o tem navedli v razdelku 3.2.3.

V nadaljevanju pri heterogenem portfelju zavarovancev uporabljamo negativno binomsko porazdelitev, pri čemer vzamemo parameter a enak kot Antonio in Valdez (2011), parameter τ pa izračunamo iz enakosti $E(N) = a/\tau$ in v prejšnjem razdelku določene škodne pogostnosti λ, torej predpostavimo

$$a = 1,4658 \text{ in } \tau = \frac{a}{\lambda} = 20,94.$$

3.2.3 Število povzročenih nesreč in število prijavljenih škod

Ko zavarovalnica uporablja bonus-malus sistem, ki je neodvisen od višine škod, zavarovanci v želji po ohranitvi bonusa sami poravnajo manjše škode. Ta pojav Lemaire (1995) imenuje *želja po bonusu* (angl. *hunger for bonus*). Zavarovalnica torej dejansko nima podatkov nesrečah, ki so jih povzročili zavarovanci, pač pa o škodah, ki so jih prijavili zavarovalnici.

Zaradi vpliva želje po bonusu moramo torej upoštevati razliko med opazovanimi in dejanskimi podatki. Opažena škodna pogostnost, torej pogostnost števila prijavljenih škod, je nižja od dejanske škodne pogostnosti, torej pogostnosti števila povzročenih nesreč. Opažena povprečna višina škode je, ravno obratno, višja od dejanske povprečne višine škode (Tremblay, 1992). Zaključki analiz so potem veljavni le, če ne spreminjamo obstoječih pravil, ki vplivajo na višino mejnega samopridržaja zavarovanca, torej mejnega zneska, do katerega se zavarovancu še splača samemu kriti škodo (Denuit et al., 2007, str. 51). Ob spreminjanju bonus-malus sistema bi tako morali upoštevati porazdelitev števila povzročenih in ne prijavljenih škod, saj se porazdelitev števila prijavljenih škod ob uvedbi novega sistema spremeni.

Natančneje si oglejmo enega izmed modelov, s katerim lahko izpeljemo pravo število povzročenih nesreč. V nadaljevanju razlikujemo med nesrečo in škodo, pri čemer s prvo označujemo vsako povzročeno nesrečo zavarovanca, z drugo pa vsako povzročeno nesrečo, ki jo zavarovanec prijavi zavarovalnici. V nadaljevanju opisan model je povzet po Denuit et al. (2007, str. 220).

Označimo kot Denuit et al. (2007, str. 220) z M_i število nesreč, z N_i pa število škod i-tega zavarovanca, $i = 1, \ldots, n$. Naj bo X_{ik} slučajna spremenljivka višine k-te nesreče i-tega zavarovanca in naj bodo X_{ik} neodvisne enako porazdeljene spremenljivke ($k = 1, \ldots, M_i$, $i = 1, \ldots, n$).

Z x_i označimo samopridržaj i-tega zavarovanca, kar pomeni, da ta zavarovanec zavarovalnici prijavi vsako škodo, višjo od x_i, nižje škode pa krije sam. Potem je

$$N_i = \sum_{k=0}^{M_i} I(X_{ik} > x_i),$$

kjer je $I(X_{ik} > x_i) = 1$, če je $X_{ik} > x_i$, in 0 sicer. Pričakovano število škod i-tega zavarovanca za $i = 1, \ldots, n$ je torej enako

$$\begin{aligned} E(N_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(M_i = k) \sum_{j=0}^{k} I(X_{ij} > x_i) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(M_i = k) k P(X_{i1} > x_i) = E(M_i) P(X_{i1} > x_i), \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali predpostavko o neodvisnosti in enaki porazdeljenosti $X_{i1}, \ldots, X_{iM_i}$. Sledi, da je pričakovano število nesreč enako

$$E(M_i) = \frac{E(N_i)}{P(X_{i1} > x_i)}.$$

Pričakovano število nesreč torej zlahka izračunamo, če imamo podano porazdelitev višine škod i-tega zavarovanca.

Pri analiziranju porazdelitve škod navadno po višini ločimo navadne in velike škode. Velike škode se obnašajo drugače kot navadne, torej imajo drugačno porazdelitev in jih navadno modeliramo ločeno. Ker pa so, kot izpostavljajo Denuit et al. (2007, str. 246–251), velike škode vedno prijavljene, nam jih za potrebe izpeljave porazdelitve števila povzročenih nesreč iz števila prijavljenih škod ni treba modelirati drugače kot običajno. Porazdelitev števila velikih škod je kar enaka porazdelitvi števila velikih nesreč. Zgornja izpeljava se torej nanaša le na navadne škode, kar pomeni, da moramo pri izpeljavi porazdelitve števila nesreč najprej izločiti velike škode, nato prevesti porazdelitev števila navadnih prijavljenih škod na število navadnih povzročenih nesreč in na koncu dodati zraven še porazdelitev velikih škod.

Ko imamo pogostnost nesreč, lahko pri modeliranju namesto škodne pogostnosti uporabimo pogostnost nesreč. V nadaljevanju bomo delali s številom prijavljenih škod.

3.2.4 Porazdelitev višine škod

Višino škod je mnogo težje modelirati kot število škod. V praksi imamo pri modeliranju višine škod težave predvsem s podatki. Velike škode iz zavarovanja odgovornosti se rešujejo več let in do zaključka reševanja njihove višine ne poznamo. Manj ko je preteklo časa od nastanka škode, manj so podatki o njeni višini zanesljivi. Za oceno višine škode lahko sicer uporabimo razvojne faktorje, vendar je ta ocena subjektivna. Poleg tega imamo za statistiko višine škod na voljo bistveno manj podatkov kot za škodno pogostnost, saj ima škodo manj kot 10 % polic (Denuit et al., 2007, str. 223).

Porazdelitev višine škode je odvisna od vrste zavarovanja. Zavarovanja glede na porazdelitev višine škod delimo na zavarovanja z debelim in tankim repom. Če ima zavarovanje debel rep, ima razmeroma velik delež visokih škod in je zgornja meja višine škod zelo visoka ali pa je sploh ni, pri tankem repu pa je ta delež razmeroma majhen. Primer zavarovanj s tankim repom so zavarovanja avtomobilskega kaska in nezgodna zavarovanja, medtem ko imajo dolg rep navadno zavarovanja odgovornosti. Glede na rep zavarovanja uporabimo primerno porazdelitev za modeliranje višine škod. Višina škod pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti ima navadno desno-poševno porazdelitev z debelim repom.

V literaturi (na primer Antonio & Valdez, 2011; Lemaire, 1995; Denuit et al., 2007) so kot primerne porazdelitve za modeliranje višine škod navedene gama, inverzna Gaussova in lognormalna porazdelitev, a Denuit et al. (2007, str. 223) opozarjajo, da porazdelitve višine škod, ki se večini podatkov (navadnim škodam) običajno dobro prilegajo, niso najboljše za modeliranje repa porazdelitve. Zato porazdelitev višine škod določajo ločeno za velike in navadne škode. Za modeliranje velikih škod predlagajo posplošeno Paretovo porazdelitev in teorijo ekstremnih vrednosti (angl. *extreme value theory*), za navadne škode pa prej omenjene porazdelitve.

Kaas et al. (2008, str. 66) predlagajo gama porazdelitev za modeliranje nenegativnih škod zavarovanj, ki nimajo debelega repa, kot je na primer zavarovanje avtomobilskega kaska. Lognormalna porazdelitev naj bi po Denuit et al. (2007, str. 235) vrnila precej podobne rezultate kot gama porazdelitev, Kaas et al. (2008, str. 71) pa jo opisujejo kot porazdelitev, primerno za modeliranje višine škod zavarovanj s srednje debelimi repi, na primer požarno zavarovanje. Inverzno Gaussovo porazdelitev Denuit et al. (2007, str. 233) opisujejo kot najprimernejšo za modeliranje nenegativne spremenljivke, ki ima visok začetni vrh, hiter padec in dolg desni rep. Po lastnostih je podobna gama in lognormalni porazdelitvi, a ni tako priljubljena, ker nima preproste matematične oblike.

Denuit et al. (2007, str. 231–235) opozarjajo, da imamo v podatkih pogosto navedeno skupno višino škod zavarovanca in ne njegovih posameznih škod. V takem primeru bi bilo prav, da bi delali s povprečno in ne s skupno višino škod zavarovanca. Vendar pa sta tako gama kot inverzna Gaussova porazdelitev zaprti za operacijo konvolucije, zato lahko normalno delamo tudi s podatki o skupni višini škod zavarovanca. Lognormalna porazdelitev pa za operacijo konvolucije ni zaprta, zato moramo modelirati škode zavarovancev, ki so prijavili natanko eno škodo, torej moramo delati s povprečno višino škode zavarovanca.

Označimo slučajno spremenljivko višine škod z X. Enako kot Lemaire (1995, str. 93) in Denuit et al. (2007, str. 246–247) bomo predpostavili lognormalno porazdelitev višine škod X, ki ima po Klugman et al. (2004, str. 638) pri parametrih μ in σ gostoto enako

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2},\ z = \frac{\log x - \mu}{\sigma}.$$

Oceno parametrov, potrebnih za porazdelitev višine škod, je težko dobiti (problematična je predvsem varianca višine škod), zato bomo združili podatke iz več virov, da bomo sestavili primerno porazdelitev za nadaljno uporabo. Parametre določimo na naslednji način:

- Parameter σ vzamemo enako kot Lemaire (1995, str. 93), torej podatek tajvanskega portfelja iz leta 1989:

$$\sigma^2 = 1,3569.$$

- Parameter μ izpeljemo enako kot škodno pogostnost iz podatkov publikacije CEA (2010), pri čemer upoštevamo povprečne podatke članic CEA za leto 2008. Članice CEA že uporabljajo bonus-malus sistem, zato je zaradi učinka želje po bonusu podatek o povprečni višini škode višji od dejanskega. Tudi višina povprečne premije ni taka, kot bi bila, če ne bi bilo želje po bonusu, saj jo zavarovalnice določajo glede na povprečno višino škode in škodno pogostnost. Kljub temu dane podatke uporabimo, in sicer pričakovano višino škode izračunamo iz povprečne premije (250 EUR), škodne pogostnosti (7 %) in dodatka za stroške (40 %). Nevarnostna premija je po Kaas et al. (2008, str. 119) enaka pričakovanim škodam, torej

  $$\textit{nevarnostna premija} = \textit{povprečna škoda} \times \textit{škodna pogostnost}.$$

  Nevarnostna premija je premija za zavarovalnico, ki je rizično nevtralna, ki torej ne predvideva varnostnega in stroškovnega dodatka. V nadaljevanju vedno predpostavimo *načelo pričakovane vrednosti*, po katerem zavarovanec plača nevarnostno premijo in stroške sorazmerne premiji, torej je po Dionne in Vanasse (1992)

  $$\textit{premija} = \textit{nevarnostna premija} + \textit{dodatek za stroške} \times \textit{premija}.$$

  Potem lahko iz zgornjih dveh enakosti izračunamo povprečno škodo kot

  $$\textit{povprečna škoda} = \frac{\textit{premija} \times (1 - \textit{dodatek za stroške})}{\textit{škodna pogostnost}} = 2.143 \text{ EUR}.$$

  Upoštevamo lahko, da je povprečna škoda enaka $E(X)$ in izračunamo parameter μ kot

  $$E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Longrightarrow \mu = \log(E(X)) - \frac{\sigma^2}{2} = 6,9914.$$

  Za primerjavo navedimo povprečno višino škode CEA v letu 2007, ki je enaka 3.180 EUR, kar bi pri enaki povprečni premiji pomenilo 11 % dodatka za stroške.

Enako kot pri škodni pogostnosti bomo tudi pri višini škod predpostavili enako porazdelitev za vse tri države, katerih bonus-malus sisteme bomo primerjali med seboj. Bauer in Melle (2007) navajata, da tudi višina povprečne škode po Evropi variira, in sicer je pri zavarovanju avtomobilske odgovornosti v državah srednje in vzhodne Evrope skoraj za polovico nižja od višine povprečne škode v državah zahodne Evrope. Vendar pa iz podatkov CEA (2010) lahko razberemo, da je v tistih državah, ki jih pri primerjanju bonus-malus sistemov opazujemo (Belgija, Nemčija in Slovenija), povprečna višina škod primerljiva.

4 UČINKOVITOST BONUS-MALUS SISTEMA

Bonus-malus sistemi se po državah in zavarovalnicah med seboj močno razlikujejo, a imajo vsi enak osnovni namen: čimbolj pravično določiti premijo posameznega zavarovanca glede na tveganje, ki ga predstavlja za zavarovalnico. Z učinkovitostjo merimo, kako dobro bonus-malus sistem služi svojemu osnovnemu namenu (De Pril, 1978). Ker zavarovanci ne poznajo osnov in namena delovanja bonus-malus sistema, Álvarez Jareño in Muñiz Rodríguez (2011) menita, da je smiselno uvesti mero, ki bi zavarovancem omogočala razvrščanje zavarovalnic glede na glavne lastnosti bonus-malus sistema. S tem bi bonus-malus sistemi postali bolj transparentni.

V tem poglavju si bomo ogledali, kako bonus-malus sisteme med seboj primerjati, torej kako meriti in primerjati učinkovitost posameznih sistemov.

Pri izračunih posameznih mer učinkovitosti bomo uporabili opisane predpostavke glede porazdelitve števila in višine škod iz 3. poglavja:

- število škod je porazdeljeno Poissonovo, torej gledamo učinkovitost bonus-malus sistema z vidika zavarovanca,
- škodna pogostnost je 7 %,
- višina škod je porazdeljena lognormalno s parametroma $\mu = 6,9914$ in $\sigma^2 = 1,3569$.

Poleg tega za modeliranje bonus-malus sistema predpostavimo še:

- prvo leto so vsi zavarovanci v začetnem razredu bonus-malus sistema,
- prihodi novih zavarovancev in odhodi obstoječih zavarovancev iz sistema niso upoštevani, torej predpostavimo zaprt portfelj.

Pri tem je zadnja predpostavka, torej da je portfelj zaprt, popolnoma nerealna. V okolju, kjer je bonus-malus sistem konkurenčno orodje, ne smemo zanemariti prihodov in odhodov zavarovancev v in iz portfelja, ker imajo predvsem za zavarovance z višjo škodno pogostnostjo posebno porazdelitev po bonus-malus razredih. Denuit in Dhaene (2001) v ta namen predlagata dodatno stanje v verigi Markova, v katero zavarovanec pride, ko zamenja zavarovalnico.

V tem poglavju bodo predstavljene štiri mere, ki jih Lemaire (1995) predlaga za merjenje učinkovitosti bonus-malus sistema in primerjanje sistemov med seboj. Teoretične ugotovitve bomo ponazorili na primeru petih v nadaljevanju opisanih bonus-malus sistemov.

- **Belgijski bonus-malus sistem.** V Belgiji so v devetdesetih letih prejšnjega stoletja aktuarji sestavili bonus-malus sistem, ki so ga morale zavarovalnice v celi Belgiji uporabljati na podlagi zakona. Leta 1994 je Evropska unija prepovedala zakonsko predpisovanje bonus-malus sistemov in Belgija je uspela uvedbo te uredbe zadržati za deset let. Od leta 2004 imajo tudi v Belgiji zavarovalnice možnost uporabljati svoj bonus-malus sistem, a razen manjših popravkov še vedno uporabljajo državni bonus-malus sistem. Belgijski bonus-malus sistem je narejen podobno kot francoski, saj so razredi zastavljeni tako, da zavarovanec vsako leto plača 5 % nižjo premijo kot predhodno leto. V primeru škode je kaznovan s pet razredov višjim bonus-malus razredom, pri čemer se vsako leto spusti za en razred ne glede na škodno dogajanje (prva škoda je zato kaznovana le s štirimi razredi malusa). Najboljši zavarovanci plačujejo 54 % izhodiščne premije. Najnižji razred je *super-bonus razred*, kar pomeni, da se v lestvici ponovi večkrat, torej ima belgijski bonus-malus sistem ne enega, pač pa tri razrede z najnižjo relativno premijo. Super bonus razred deluje kot blažilec prve škode za dobre zavarovance, ki so mnogo let brez škode. Zavarovanci, ki prvič vstopajo v bonus-malus sistem, začnejo v razredu s 85 % relativno premijo (Lemaire, 1995, str. 11–19). Belgijski bonus-malus sistem ima posebno bonus pravilo, po katerem zavarovanec s štirimi zaporednimi brezškodnimi leti ne more biti v malus razredu. Če bi želeli to posebno pravilo obravnavati, bi morali razdeliti zgornje razrede bonus-malus lestvice na več podrazredov (Lemaire, 1995, str. 9–10). Pitrebois et al. (2003a) analizirajo belgijski bonus-malus sistem ob upoštevanju posebnega bonus pravila in ugotovijo, da je tak bonus-malus sistem manj strog kot sistem brez tega pravila. Posebnega bonus pravila v nadaljevanju ne bomo upoštevali.

- **Nemški bonus-malus sistem.** V Nemčiji bonus-malus sistem ni bil zakonsko predpisan, a ga je do sedaj kljub temu uporabljala večina zavarovalnic. Ta bonus-malus sistem se od ostalih predstavljenih precej razlikuje, ker premija zavarovanca v primeru brezškodnega dogajanja na začetku pada hitreje kot pri drugih sistemih, potem pa zavarovanec potrebuje dolgo časa, da pride do najnižjega razreda. Kazen v primeru škode je v nizkih razredih visoka glede na število razredov, ki jih preskoči, ne pa toliko glede na višino odstotka izhodiščne premije. Najboljši zavarovanci plačujejo 30 % izhodiščne premije in potrebujejo najmanj 18 let, da pridejo do najnižjega razreda. V začetnem razredu zavarovanci plačujejo 125 % izhodiščne premije (Lemaire, 1995, str. 139).

- **Bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav.** Slovenski bonus-malus sistemi so si med seboj zelo podobni. Bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav zavarovanca za vsako leto brez škode nagradi s 5 odstotnih točk nižjo izhodiščno premijo, v primeru škode pa ga kaznuje s tremi razredi malusa. Zavarovanci v najnižjem razredu plačujejo 50 % izhodiščne premije, tisti v začetnem razredu pa plačujejo 100 % izhodiščne premije (Zavarovalnica Triglav, d.d., 2011).

- **Bonus-malus sistem Adriatic Slovenice.** Zavarovalna družba Adriatic Slovenica ima enak bonus-malus sistem kot Zavarovalnica Triglav, le da je dodan še en bonus-malus razred s 45 % izhodiščne premije (Bonus-malus pri AO, 2011).

- **Bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia.** Zavarovalnica Tilia ima razrede v bonus-malus sistemu enake kot Zavarovalnica Triglav, le da ima super-bonus razred in se razred s 50 % relativno premijo ponovi štirikrat. Poleg tega ima posebno pravilo za prehajanje zavarovancev, po katerem vsak zavarovanec, ki plačuje manj kot 90 % izhodiščne premije, ob brezškodnem dogajanju preskakuje po dva premijska razreda, torej je vsako brezškodno leto upravičen do 10 odstotnih točk nižje izhodiščne premije (Hitreje do bonusa, 2011).

Tabele, v katerih prikazujemo prehodna pravila, relativne premije in začetne razrede opazovanih bonus-malus sistemov, so v Prilogi 1.

4.1 Konvergenca bonus-malus sistema

Glavni namen uvedbe bonus-malus sistema je popraviti nepravilnosti *a priori* določene premije in bolje ločiti dobre in slabe voznike med seboj. Da bi bonus-malus sistem dosegel ta namen, bi moral ta proces ločevanja potekati čim hitreje. Bonus-malus sistem želeno *a posteriori* diferenciacijo doseže, ko skonvergira v stacionarno stanje (Lemaire, 1995, str. 127).

Za zavarovalnice ni pomembno le, kako hitro bonus-malus sistem doseže stacionarno stanje, pač pa tudi, na kakšen način, torej po kakšni krivulji se stacionarnemu stanju približuje. Hitrost in način konvergence sta pomembna tako pri primerjavi bonus-malus sistemov med seboj kot tudi pri analizi samega bonus-malus sistema in njegovega finančnega učinka na prihodke zavarovalnice. Pri primerjanju bonus-malus sistemov med seboj navadno predpostavimo, da so bonus-malus sistemi dosegli stacionarno stanje, konvergenca bonus-malus sistema pa nam pove, ali lahko to predpostavko sploh uporabimo. Stopnja konvergence bonus-malus sistema nam pove, koliko časa nov bonus-malus sistem potrebuje za dosego stacionarnega stanja, in odraža občutljivost sistema na spremembo škodne pogostnosti, predvsem z vidika zavarovanca (Bonsdorff, 1992).

Različni bonus-malus sistemi potrebujejo različno dolgo časa, da pridejo do stacionarnega stanja. Preprostejši bonus-malus sistemi, takšni z majhnim številom stanj, pridejo do stacionarnega stanja hitreje, zapletenejši pa potrebujejo za konvergenco navadno več kot trideset let. Trideset let za dosego primerne premije je pretirano, saj ima posameznik v povprečju vozniški staž manj kot šestdeset let. Poleg tega se v tridesetih letih lahko okolje močno spremeni, kot smo lahko opazili na primer v avtomobilski industriji. Dejansko še noben bonus-malus sistem ni zdržal trideset let in je nerealno pričakovati, da kakšen bo (Lemaire, 1995, str. 62).

V 3. poglavju smo z množenjem trenutne porazdelitve zavarovancev in prehodne matrike dobili porazdelitev zavarovancev v naslednjem letu z $\ell_n^T(\lambda) = \ell_{n-1}^T(\lambda)P(\lambda)$. V Tabeli 1 na primeru Zavarovalnice Tilia prikazujemo prehajanje zavarovancev med razredi po razvojnih letih od začetka opazovanja bonus-malus sistema, torej prikazujemo $(\ell_n(\lambda))_{n=0}^{15}$. Razrede bonus-malus lestvice smo tako v omenjeni tabeli kot tudi povsod v nadaljevanju označili z relativno premijo v odstotkih. Podatki o porazdelitvi zavarovancev po bonus-malus razredih so v odstotkih. Iz prvega stolpca tabele vidimo, da so prvo leto vsi zavarovanci v začetnem razredu. Naslednje leto $93,24$ % zavarovancev ne prijavi škode in se pomakne en razred nižje od začetnega razreda, $6,53$ % zavarovancev prijavi eno škodo in se pomakne tri razrede višje od začetnega razreda, $0,23$ % zavarovancev pa prijavi več kot eno škodo in gre v najvišji bonus-malus razred. Ko so zavarovanci v razredu, v katerem plačujejo 90 % izhodiščne premije, se začnejo v primeru brezškodnega dogajanja pomikati po dva razreda nižje. S tabelo ponazorimo, kako zavarovanci prehajajo med razredi, in tako v opazovanje bonus-malus sistema dodamo časovni vidik. Po 15 letih se porazdelitev zavarovancev po razredih več ne spreminja bistveno, torej se bonus-malus sistem stacionarnemu stanju precej približa. Opozorimo še, da vsote po stolpcih v Tabeli 1 niso enake 100 % zgolj zaradi zaokroževalnih napak.

Tabela 1: Razvoj porazdelitve zavarovancev Zavarovalnice Tilia (v %)

Razred	**Razvojno leto**															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
50	0	0	0	0	0	0	0	0	57	53	64	66	74	76	78	79
50	0	0	0	0	0	0	0	61	0	0	7	13	7	4	6	8
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	1	3	1	1
50	0	0	0	0	0	0	66	0	0	7	14	7	5	6	8	6
55	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	1	3	1	1	1
60	0	0	0	0	0	70	0	0	4	12	3	1	1	3	1	1
65	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	1	3	1	1	1	1
70	0	0	0	0	76	0	0	4	12	2	1	2	4	1	1	1
75	0	0	0	0	0	0	9	0	0	1	2	0	0	0	0	0
80	0	0	0	81	0	0	5	13	2	1	2	4	0	0	1	1
85	0	0	0	0	0	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
90	0	0	87	0	0	5	14	1	1	2	4	0	0	1	1	0
95	0	93	0	0	5	15	0	1	2	4	0	0	1	1	0	0
100	100	0	0	0	16	0	0	1	4	0	0	1	1	0	0	0
110	0	0	0	17	0	0	1	5	0	0	1	1	0	0	0	0
120	0	0	12	0	0	1	4	0	0	1	1	0	0	0	0	0
135	0	7	0	0	1	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
150	0	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
170	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Da bi ugotovili, ali je bonus-malus sistem skonvergiral, primerjamo porazdelitev zavarovancev po bonus-malus razredih v n-tem razvojnem letu $\ell_n(\lambda)$ s stacionarno porazdelitvijo zavarovancev $\ell_\infty(\lambda)$. Za določitev oddaljenosti bonus-malus sistema od stacionarnega stanja najprej potrebujemo porazdelitev zavarovancev v stacionarnem stanju za vseh pet bonus-malus sistemov. V Tabeli 2 je prikazana stacionarna porazdelitev zavarovancev $\ell_\infty(\lambda)$ za vseh pet bonus-malus sistemov. Podatki so prikazani enako kot v Tabeli 1, torej so bonus-malus razredi označeni z relativno premijo b in so enako kot stacionarna porazdelitev zavarovancev po razredih $\ell_\infty(\lambda)$

prikazani v odstotkih.

Tabela 2: Stacionarna porazdelitev zavarovancev (v %)

Belgija		**Nemčija**		**Zavarovalnica Triglav**		**Adriatic Slovenica**		**Zavarovalnica Tilia**	
b	$\ell_\infty(\lambda)$	b	$\ell_\infty(\lambda)$	b	$\ell_\infty(\lambda)$	b	$\ell_\infty(\lambda)$	b	$\ell_\infty(\lambda)$
54	69,72	30	47,61	50	77,48	45	77,48	50	86,03
54	5,06	35	3,45	55	5,62	50	5,62	50	5,39
54	5,42	35	3,70	60	6,03	55	6,03	50	0,85
57	5,82	35	3,97	65	6,46	60	6,46	50	5,78
60	6,24	40	4,26	70	1,51	65	1,51	55	0,91
63	1,81	40	4,57	75	1,22	70	1,22	60	0,18
66	1,59	40	4,90	80	0,89	75	0,89	65	0,60
69	1,32	40	5,25	85	0,31	80	0,31	70	0,13
73	1,01	40	5,63	90	0,22	85	0,22	75	0,02
77	0,65	45	6,04	95	0,13	90	0,13	80	0,07
81	0,40	45	2,37	100	0,06	95	0,06	85	0,01
85	0,30	50	2,54	110	0,04	100	0,04	90	0,01
90	0,22	55	2,43	120	0,02	110	0,02	95	0,01
95	0,15	60	1,94	135	0,01	120	0,01	100	0,00
100	0,10	65	0,75	150	0,01	135	0,01	110	0,00
105	0,07	70	0,45	170	0,00	150	0,00	120	0,00
111	0,05	85	0,11	200	0,00	170	0,00	135	0,00
117	0,03	100	0,01			200	0,00	150	0,00
123	0,02	125	0,00					170	0,00
130	0,02	155	0,00					200	0,00
140	0,01	175	0,00						
160	0,01	200	0,00						
200	0,01								

Iz primerjave zadnjega stolpca Tabele 1 in stacionarne porazdelitve zavarovancev Zavarovalnice Tilia iz Tabele 2 razberemo, da bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia po 15 letih še ni skonvergiral. Poleg tega iz Tabele 2 vidimo, da se v vseh opazovanih bonus-malus sistemih zavarovanci zgoščajo v najnižjih razredih. Do tega pride, ker so v vseh realnih bonus-malus sistemih škode kaznovane s premajhnim malusom, oziroma so bonus-malus sistemi narejeni za zavarovance s povprečno škodno pogostnostjo višjo od dejanske. Sistem, ki vsako škodo kaznuje s tremi razredi malusa, je narejen za povprečno škodno pogostnost $1/4$. Voznik s tako škodno pogostnostjo vsaka štiri leta povzroči škodo, se v treh letih vrne v svoj izhodiščni razred in ponovno povzroči škodo. Ves čas se torej vrti okrog svojega izhodiščnega razreda. Vozniki z višjo škodno pogostnostjo se v takem bonus-malus sistemu zgoščajo v višjih razredih, tisti z nižjo škodno pogostnostjo pa se zgoščajo v nižjih razredih. Če bi bila povprečna škodna pogostnost manjša od $1/4$, bi prišlo do zgoščanja zavarovancev v najnižjih razredih, kar se dogaja v praksi (Lemaire, 1995, str. 13).

Iz stacionarnih porazdelitev zavarovancev po razredih v Tabeli 2 lahko jasno vidimo učinek kazni v primeru škode. V stacionarnem stanju preblagega bonus-malus sistema je večina zavarovancev razporejena med najnižjim razredom in razredom, v katerega pridejo zavarovanci iz najnižjega razreda v primeru ene škode. Tako je na primer pri belgijskem bonus-malus sistemu v stacionarnem stanju največ zavarovancev v najnižjem razredu, naslednji najbolj zastopan razred je tisti s 60 % relativno premijo, torej ravno tisti, v katerega pridejo zavarovanci iz najnižjega razreda ob prvi škodi. Manjši delež zavarovancev se nahaja še v razredih med najboljšim in kazenskim razredom za prvo škodo, v višjih razredih pa je zavarovancev malo. Zavarovanci se razporedijo med omenjenima dvema razredoma, ker je verjetnost dveh ali več škod majhna. Večja ko je torej kazen za prvo škodo za zavarovance v najnižjih razredih, bolj so zavarovanci porazdeljeni med razredi. In ravno zaradi velikega številčnega razpona med najnižjim razredom in kazenskim razredom za prvo škodo ima nemški bonus-malus sistem najbolj porazdeljene zavarovance po razredih. Iz stacionarne porazdelitve zavarovancev lahko vidimo stopnjo zgoščanja zavarovancev v nižjih razredih. Bolje ko so zavarovanci razporejeni po razredih, bolj je bonus-malus sistem učinkovit, saj bolje razlikuje zavarovance med seboj.

Kako bi torej natančno določili oddaljenosti bonus-malus sistema v določenem razvojem letu od stacionarnega stanja? Denuit et al. (2007, str. 184) definirajo *razdaljo bonus-malus sistema* v n-tem letu razvoja od stacionarnega stanja kot

$$d_{TV}(n) = \sum_{j=1}^{s} |\ell_{nj}(\lambda) - \ell_{\infty j}(\lambda)|.$$

Ker je

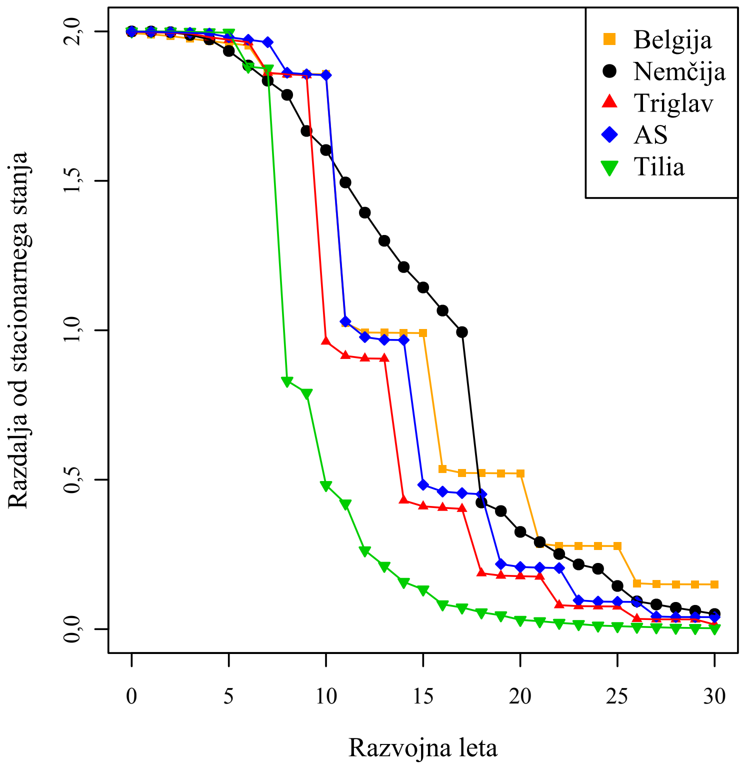
$$d_{TV}(n) = \sum_{j=1}^{s} |\ell_{nj}(\lambda) - \ell_{\infty j}(\lambda)| \leq \sum_{j=1}^{s} \ell_{nj}(\lambda) + \sum_{j=1}^{s} \ell_{\infty j}(\lambda) = 2,$$

vedno velja, da je $0 \leq d_{TV}(n) \leq 2$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$. V teoriji bonus-malus sistem skonvergira, ko je $d_{TV}(n) = 0$ za nek n. Ker bonus-malus sistemi v praksi redko dosežejo stacionarno stanje v realnem času in se mu dolgo časa približujejo na majhni razdalji, navadno določimo $\epsilon > 0$ in pravimo, da je bonus-malus sistem skonvergiral, ko je $d_{TV}(n) < \epsilon$ za nek n.

Slika 1 prikazuje graf razdalje bonus-malus sistema od stacionarnega stanja $d_{TV}(n)$ po letih razvoja n. Vsi bonus-malus sistemi se močno približajo stacionarnemu stanju, ko najboljši zavarovanci pridejo do najboljšega razreda (pri Zavarovalnici Tilia je to na primer po osmih letih). Razlog za večje preskoke pri grafih lahko pripišemo prehodu večjega deleža zavarovancev v najnižji razred. Tako je na primer pri Zavarovalnici Triglav opaznejši prehod v dvanajstem letu, ko najboljši zavarovanci pridejo v najboljši razred, ter tri leta kasneje, ko zavarovanci z eno škodo pridejo v najnižji razred. Vidimo, da bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia najhitreje konvergira proti stacionarnemu stanju, ker tam zavarovanci najhitreje pridejo do najnižjega razreda. Nemški bonus-malus sistem konvergira najpočasneje, vendar pri tem opomnimo, da opazujemo konvergenco porazdelitve zavarovancev in ne poprečne premije. Z vidika zavarovanca in zavarovalnice sta pri opazovanju bonus-malus sistema pomembna oba vidika konvergence.

Za primerjavo bonus-malus sistemov med seboj glede na hitrost konvergence Bonsdorff (1992) izpelje enotno mero. Konvergenco bonus-malus sistema določa druga največja lastna vrednost

Slika 1: Razdalja bonus-malus sistema od stacionarnega stanja



prehodne matrike $P(\lambda)$, λ_2 (spomnimo, da je $|\lambda_2| < 1$). Za vsak $\rho > |\lambda_2|$ namreč obstaja $a < \infty$, da je za vsak n ne glede na začetni razred i_0

$$d_{TV}(n) \leq a\rho^n. \tag{4}$$

Definiramo torej lahko *stopnjo konvergence*

$$r(\lambda) = \max(|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_s|) = |\lambda_2|.$$

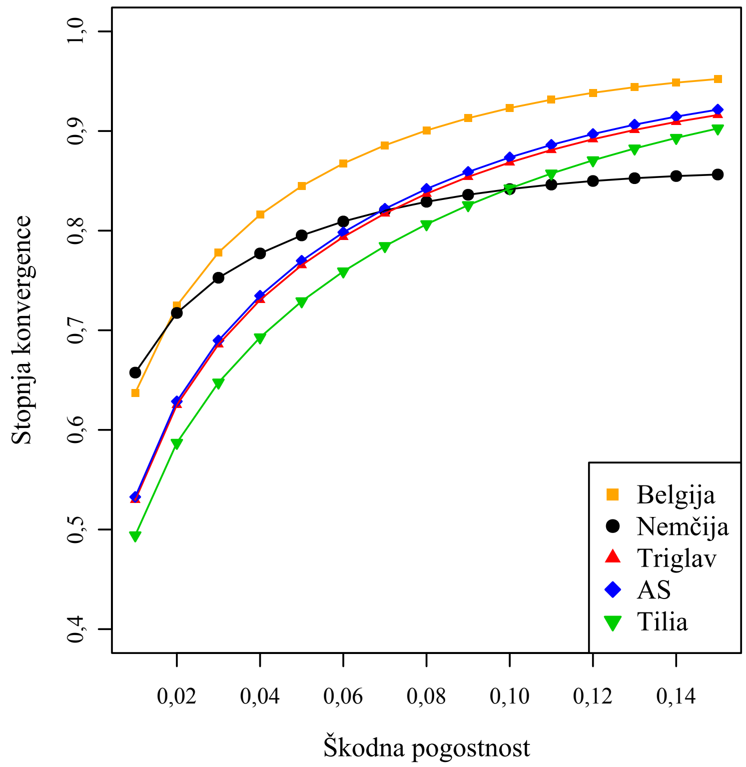
Bonsdorff (1992) pravi, da je $r(\lambda)$ stopnja konvergence, ker

- če je $\rho > r(\lambda)$, obstaja $a < \infty$, da velja (4),
- če je $\rho < r(\lambda)$, ne obstaja $a < \infty$, da bi veljalo (4).

Nižja ko je vrednost $r(\lambda)$, hitrejša je konvergenca.

Slika 2 prikazuje graf odvisnosti stopnje konvergence bonus-malus sistema od škodne pogostnosti. Vidimo, da se z izjemo nemškega bonus-malus sistema grafi $r(\lambda)$ obnašajo podobno. Bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav ima tako na primer za vse opazovane škodne pogostnosti λ nižjo stopnjo konvergence od belgijskega bonus-malus sistema, vendar je njun naklon podoben. Če torej škodno pogostnost malo spremenimo, se stopnja konvergence pri teh dveh bonus-malus sistemih spremeni za enak odstotek. Nemški bonus-malus sistem odstopa, in sicer se pri njem

Slika 2: Stopnja konvergence glede na škodno pogostnost



stopnja konvergence pri spreminjanju škodne pogostnosti povečuje za bistveno manjši odstotek kot pri drugih sistemih. Variiranje škodne pogostnosti torej pri nemškem bonus-malus sistemu ne spremeni hitrosti konvergence bonus-malus sistema.

V Tabeli 3 opazovane bonus-malus sisteme pri škodni pogostnosti 7 % primerjamo s stopnjo konvergence. Pri tej škodni pogostnosti najhitreje skonvergira bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia, najpočasneje pa belgijski bonus-malus sistem. Zanimivo je, da nemški sistem kljub temu, da ima veliko število razredov, ne skonvergira najpočasneje.

Tabela 3: Stopnja konvergence

Bonus-malus sistem	**Stopnja konvergence**
Belgija	0,89
Adriatic Slovenica	0,82
Nemčija	0,82
Zavarovalnica Triglav	0,82
Zavarovalnica Tilia	0,78

Preprostejši ko je bonus-malus sistem, hitreje skonvergira do stacionarnega stanja. Poleg preprostosti na hitrost konvergence bonus-malus sistema vplivajo tudi drugi elementi, ki definirajo bonus-malus sistem (Lemaire, 1995, str. 128–129):

- **Začetni razred.** Dlje ko je začetni razred od povprečnega stacionarnega razreda, počasneje sistem konvergira, kar pomeni, da bi z nižjim začetnim razredom zavarovalnice pohitrile konvergenco. Denuit et al. (2007, str. 184) predlagajo izbiro takega začetnega razreda, da bi bil čas, potreben za dosego stacionarnega stanja, minimalen. Vendar pa večina zavarovalnic uporablja višji začetni razred kot implicitno doplačilo za mlade voznike. Če bi torej zavarovalnica znižala začetni razred, bi morala hkrati močno povišati doplačilo za mlade voznike.

- **Prehodna pravila.** Če bi pogledali konvergenco bonus-malus sistema ob spreminjanju prehodnih pravil (tj. če škodo kaznujemo z različno visokimi padci v lestvici), bi ugotovili enako kot Lemaire (1995, str. 129), da imajo prehodna pravila zelo majhen učinek na hitrost konvergence. Avtor ugotovi, da strožja pravila sicer vplivajo na večjo variabilnost in počasnejšo konvergenco, a se to opazi šele po 25 letih v zelo blagi obliki.

Na začetku poglavja smo predpostavili, da so vsi zavarovanci na začetku opazovanja v začetnem razredu in da imamo zaprt portfelj. Če bi te predpostavke omilili ali opustili, je stacionarno stanje zaradi neenakomernega pritoka novih zavarovancev in vseskozi spreminjajočega ekonomskega okolja lahko nedosegljivo (Lemaire, 1995, str. 86). Realnejše predpostavke lahko bistveno vplivajo na konvergenco bonus-malus sistema:

- Ob realnejši začetni porazdelitvi zavarovancev, ki bi jo morali upoštevati, ker večina držav že uporablja bonus-malus sisteme, bi sistem hitreje skonvergiral. Za začetno porazdelitev zavarovancev bi morali upoštevati trenutno porazdelitev zavarovancev migriranih iz starega v novi sistem.

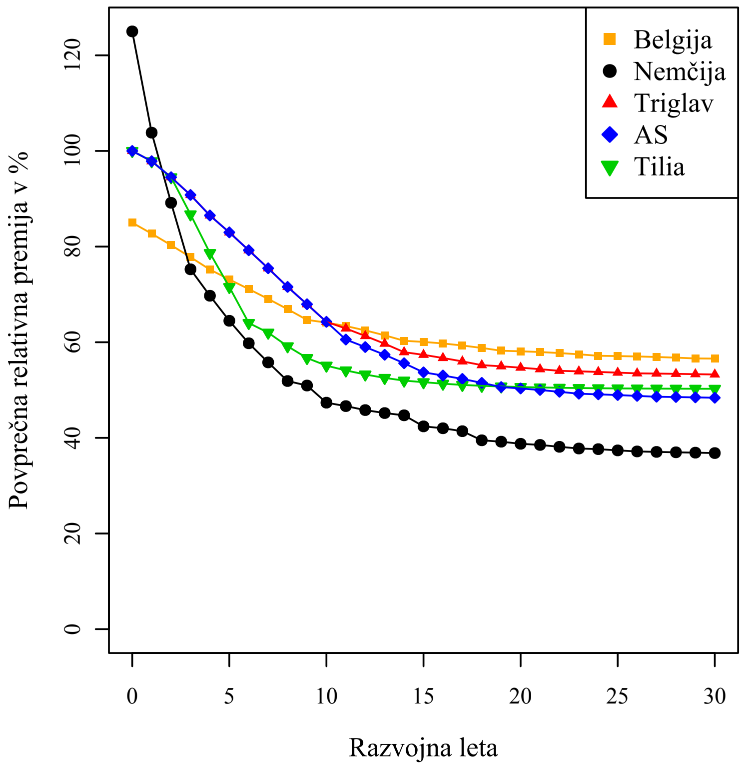
- Če bi pri simulaciji upoštevali tudi prihode in odhode zavarovancev v in iz bonus-malus sistema, bi bonus-malus sistem skonvergiral počasneje, ker bi določen delež zavarovancev konstantno prihajal v začetni razred.

4.2 Relativni stacionarni povprečni nivo

Prvo orodje za merjenje učinkovitosti bonus-malus sistemov, ki ga predlaga Lemaire (1995, str. 59), je relativni stacionarni povprečni nivo. *Relativni stacionarni povprečni nivo* (angl. *relative stationary average level*, v nadaljevanju RSAL) meri razred povprečnega zavarovanca, ko je bonus-malus sistem v stacionarnem stanju. Z RSAL merimo stopnjo zgoščevanja polic v najnižjih razredih bonus-malus sistema (Lemaire, 1995, str. 61).

V prejšnjem podpoglavju smo videli, kako porazdelitev zavarovancev konvergira proti stacionarnem stanju, in ovrednotili oddaljenost bonus-malus sistema od stacionarnega stanja. V tem podpoglavju vpeljemo mero za vrednotenje trenutne porazdelitve zavarovancev, povprečno relativno premijo. Povprečna relativna premija bonus-malus sistema predstavlja uteženo povprečje relativnih premij, pri čemer so uteži deleži zavarovancev v posameznih razredih. V n-tem razvojnem letu je povprečna relativna premija enaka $b^T \ell_n(\lambda)$, pri čemer je vektor odstotkov izhodiščne

Slika 3: Razvoj povprečne relativne premije



premije b neodvisen od n. S povprečno relativno premijo ovrednotimo porazdelitev zavarovancev s številom namesto z vektorjem. Ta mera je zelo pomembna za zavarovalnice, ko ocenjujejo pričakovan finančni učinek bonus-malus sistema.

Slika 3 prikazuje graf razvoja povprečne relativne premije po letih opazovanja bonus-malus sistemov. Povprečna relativna premija v prvih razvojnih letih strmo pada za vse bonus-malus sisteme, saj večina zavarovancev napreduje v nižje razrede, sčasoma pa skonvergira do stacionarne povprečne relativne premije. Hitrost konvergence je različna in je odvisna predvsem od števila razredov in prehodnih pravil. Začetni padec povprečne relativne premije je zelo očiten predvsem pri nemškem bonus-malus sistemu, ker tam zavarovancem brez škod premija prva leta najhitreje pada. Zavarovalnica Triglav in Adriatic Slovenica imata prvih 11 let enako povprečno relativno premijo, ker imata, dokler najboljši zavarovanci ne pridejo do razreda s 50 % relativno premijo, popolnoma enako porazdelitev zavarovancev po razredih. Šele naslednje leto, ko najboljši zavarovanci Adriatic Slovenice pridejo v razred s 45 % relativne premije, tisti pri Zavarovalnici Triglav pa ostanejo v istem razredu, se njuni povprečni relativni premiji začneta razlikovati. Finančno torej dodatni razred Adriatic Slovenice vpliva na njene prihodke od premij šele po 12 letih, če predpostavimo, da so na začetku opazovanja vsi zavarovanci v začetnem razredu. Povprečna relativna premija belgijskega bonus-malus sistema pada najpočasneje, saj se zavarovancu premija v primeru brezškodnega dogajanja niža najpočasneje med opazovanimi sistemi. Iz grafa vidimo, da glede na povprečno relativno premijo k stacionarni povprečni relativni premiji najhitreje skonvergira bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia.

Konvergenco bonus-malus sistema lahko vidimo tako iz Slike 1 kot tudi iz Slike 3, le da pri prvi gledamo konvergenco porazdelitve zavarovancev, pri drugi pa konvergenco povprečne relativne premije. Za primer nemškega bonus-malus sistema vidimo, da se povprečna relativna premija približa stacionarnemu stanju precej hitreje kot porazdelitev zavarovancev.

Povprečna relativna premija z leti konvergira proti stacionarni povprečni relativni premiji. Vendar pa ta mera ni primerna za primerjavo bonus-malus sistemov med seboj, ker imajo različne bonus-malus lestvice različne razpone. Nemška bonus-malus lestvica ima relativno premijo med 30 % in 200 %, belgijska pa med 54 % in 200 %. Povprečna relativna premija 60 % v belgijskem sistemu zato pomeni višjo stopnjo zgoščevanja v nižjih razredih kot v nemškem sistemu. Iz tega razloga za merjenje zgoščevanja normiramo stacionarni povprečni odstotek izhodiščne premije glede na razpon bonus-malus lestvice in dobimo mero, s katero lahko bonus-malus sisteme med seboj primerjamo. RSAL zato definiramo

$$RSAL = \frac{\textit{povprečna stacionarna relativna premija} - \textit{minimalna relativna premija}}{\textit{maksimalna relativna premija} - \textit{minimalna relativna premija}}.$$

Z RSAL merimo zgoščevanje zavarovancev v stacionarnem stanju glede na odstotek izhodiščne premije in je

$$RSAL = \frac{\ell_\infty^T(\lambda)b - b_1}{b_s - b_1},$$

kjer smo upoštevali, da je $b_1 \leq \cdots \leq b_s$. Izražen v odstotkih RSAL meri relativni položaj odstotka izhodiščne premije povprečnega zavarovanca v bonus-malus sistemu v stacionarnem stanju, pri čemer je najnižji odstotek izhodiščne premije postavljen na 0 %, najvišji pa na 100 %. Nizek RSAL torej pomeni, da ima večina zavarovancev odstotek izhodiščne premije blizu minimalnega odstotka izhodiščne premije in nakazuje, da se police zgoščajo v nižjih bonus-malus razredih, visok RSAL pa kaže na boljšo porazdeljenost polic med razredi. V idealnem bonus-malus sistemu bi bil RSAL enak 50 %. Lemaire (1995, str. 64) navaja, da so najboljši sistemi po tem kriteriju tisti z zelo preprostim bonus-malus sistemom, pri katerih v primeru škode zavarovanec izgubi ves pridobljeni bonus, torej tisti z visokimi kaznimi v primeru škode.

Lemaire (1998) meni, da je RSAL zelo surova mera učinkovitosti, ker nanjo pretežno vpliva relativna premija najredkeje zastopanega najvišjega razreda.

Z RSAL ne merimo razpršenosti po razredih, pač pa razpršenost zavarovancev glede na premijo, ki jo plačujejo, saj gledamo razpršenost, uteženo z relativno premijo. Oštevilčimo sedaj razrede z $1, \ldots, s$ in številčno določimo razred povprečnega zavarovanca bonus-malus sistema v stacionarnem stanju. Enako kot prej zaradi različnih lestvic bonus-malus sistemov to mero normiramo in dobimo relativni stacionarni povprečni razred (angl. *relative stationary average class*, v nadaljevanju RSAC)

$$RSAC = \frac{\textit{povprečni stacionarni razred} - 1}{s-1} = \frac{\ell_\infty^T(1, \ldots, s)^T - 1}{s-1}.$$

Ta mera nam poda povprečni številčni odmik zavarovanca od najnižjega razreda, medtem ko RSAL poda povprečni premijski odmik zavarovanca od najnižje relativne premije.

V Tabeli 4 z izpeljanima merama primerjamo opazovane bonus-malus sisteme. V prvem stolpcu tabele so vrednosti RSAL za opazovane bonus-malus sisteme, v drugem povprečna relativna premija bonus-malus sistema v stacionarnem stanju, v tretjem RSAC, v zadnjem pa povprečni razred zavarovancev v stacionarnem stanju. Prvi in tretji stolpec torej predstavljata normirani vrednosti drugega in četrtega stolpca. Opozorimo, da sta podatka v drugem in četrtem stolpcu vezana na posamezni bonus-malus sistem in z njima bonus-malus sistemov ne moremo primerjati. Za primerjavo sistemov lahko uporabljamo le RSAL in RSAC. Iz tabele je razvidno, da je glede na obe meri, RSAL in RSAC, najučinkovitejši nemški bonus-malus sistem, ki ima za zavarovance v najnižjem razredu v primeru škode največjo kazen in v katerem je večina zavarovancev v teh dveh razredih. Veliko razliko med RSAL in RSAC opazimo pri belgijskem bonus-malus sistemu. Če namreč gledamo relativni povprečni odstotek izhodiščne premije sistema v stacionarnem stanju, RSAL, je belgijski sistem na četrtem mestu med primerjanimi sistemi, če pa gledamo relativni povprečni razred, RSAC, pa se povzpne na drugo mesto. Razlog za to je predvsem super bonus razred belgijskega bonus-malus sistema, torej da imajo najnižji trije bonus-malus razredi enako relativno premijo. To prispeva k nižjemu relativnemu povprečnemu odstotku izhodiščne premije, na relativni povprečni razred pa ne vpliva.

Tabela 4: Relativni stacionarni povprečni nivo

Bonus-malus sistem	**RSAL**	**Povprečna relativna premija**	**RSAC**	**Povprečni bonus-malus razred**
Nemčija	3,82 %	36,49 %	16,84 %	4,54
Zavarovalnica Triglav	2,05 %	53,07 %	3,82 %	1,61
Adriatic Slovenica	1,98 %	48,06 %	3,60 %	1,61
Belgija	1,35 %	55,96 %	5,31 %	2,17
Zavarovalnica Tilia	0,15 %	50,22 %	1,83 %	1,35

Omenimo še, da pri zgornjih ugotovitvah predpostavimo zaprt portfelj, torej nobenih prihodov in odhodov zavarovancev. V odprtem portfelju bi bila vrednost RSAL večja, če bi predpostavili, da zavarovanci odhajajo iz nižjih razredov bonus-malus sistema, kot so tisti, v katere prihajajo (Lemaire, 1998).

4.3 Koeficient variacije premije

Zavarovanec sklene zavarovanje zato, da svoje tveganje prenese na zavarovalnico. Če zavarovalnica pri izračunavanju premije ne upošteva preteklega škodnega dogajanja, zavarovanec prenese na zavarovalnico celotno tveganje. Zaradi uvedbe bonus-malus sistema v določanje premije je premija zavarovanca vsako leto odvisna od škodnega dogajanja in se lahko iz leta v leto spremi-nja. Ker poskuša zavarovanec svoje tveganje s prenosom na zavarovalnice zmanjšati, mora biti variabilnost premije nižja od variabilnosti škod. Premija namreč ne more nihati bolj kot škode, saj sicer zavarovanje nima nobenega smisla. Bolj ko zavarovančeva premija variira, strožji je bonus-malus sistem in manjša je solidarnost med zavarovanci (Lemaire, 1995, str. 67).

Za mero variabilnosti premije izberemo koeficient variacije, ker je mera brez dimenzij. *Koeficient variacije* (angl. *coefficient of variation*) je enak deležu standardnega odklona v matematičnem upanju

$$CV = \frac{\sigma}{\mu},$$

pri čemer za bonus-malus sistem v stacionarnem stanju definiramo

$$\mu = \ell_\infty^T(\lambda)b, \quad \sigma^2 = \ell_\infty^T(\lambda)(b-\mu)^2,$$

torej je μ povprečna relativna premija bonus-malus sistema v stacionarnem stanju, σ pa predstavlja utežen odmik stacionarne relativne premije od povprečne stacionarne relativne premije po bonus-malus razredih. Na enak način definiramo tudi koeficient variacije v n-tem letu opazovanja bonus-malus sistema, le da v zgornjih enakostih $\ell_\infty(\lambda)$ zamenjamo z $\ell_n(\lambda)$.

Na Sliki 4 prikazujemo graf koeficienta variacije premije skozi leta opazovanja bonus-malus sistema. Koeficient variacije je v prvem letu opazovanja vedno 0, ker so vsi zavarovanci po predpostavki na začetku v začetnem razredu, torej je njihova premija enaka takratni povprečni relativni premiji. Pri vseh bonus-malus sistemih, razen pri nemškemu, koeficient variacije premije najprej raste, dokler najboljši zavarovanci ne dosežejo najnižjega razreda, potem pa pada, dokler sistem ne doseže stacionarnega stanja (Lemaire, 1995, str. 67–69). Vidimo, da premija na začetku najbolj variira pri Zavarovalnici Tilia, ampak ta variacija tudi najhitreje in najbolj pade. Pri nemškem bonus-malus sistemu koeficient variacije premije sicer ne raste ves čas, a konvergira proti zgornji meji. To pomeni, da nemški sistem zavarovancem zaračunava vedno bolj variabilno premijo in je iz tega vidika vedno bolj strog.

V Tabeli 5 primerjamo opazovane bonus-malus sisteme s koeficientom variacije premije v stacionarnem stanju. Strožji ko je bonus-malus sistem, večji je njegov koeficient variacije, saj je kazen za škodo bistveno višja premija. Vidimo, da je glede na to mero učinkovitosti nemški bonus-malus sistem najstrožji, ker zaradi visokih kazni v primeru škod premija zavarovancem najbolj variira. Zavarovalnica Triglav in Adriatic Slovenica imata zelo podobna sistema in zato tudi podobni vrednosti vseh mer učinkovitosti, vendar je glede na koeficient variacije bonus-malus sistem Adriatic Slovenice strožji, saj zavarovancem podeljuje nižje relativne premije in razmeroma višje kazni ob prvi škodi (kazen pri Adriatic Slovenici je enaka $\frac{60\%}{45\%}$ povišanju premije, pri Zavarovalnici Triglav pa $\frac{65\%}{50\%}$) in jih posledično s kaznijo tudi bolj kaznuje.

Loimaranta (1972) meni, da je glavna pomanjkljivost strogega sistema visoka variacija premije iz obdobja v obdobje, s čimer zavarovanje več ne podaja ekonomske varnosti. Variacija premije ne sme biti previsoka, saj sicer zavarovanje izgubi svoj osnovni namen, to je prenos tveganja z zavarovanca na zavarovalnico.

Slika 4: Razvoj koeficienta variacije premije

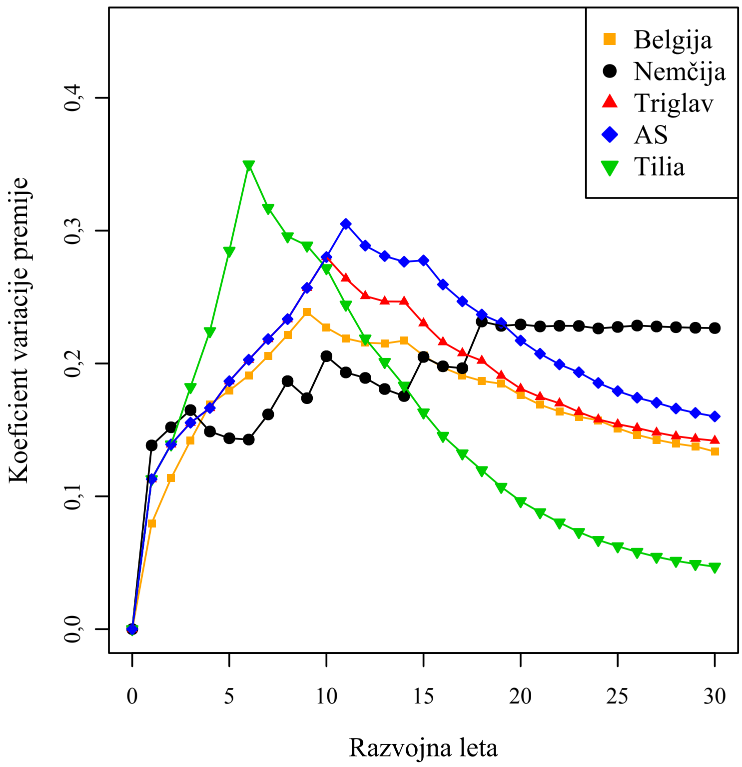


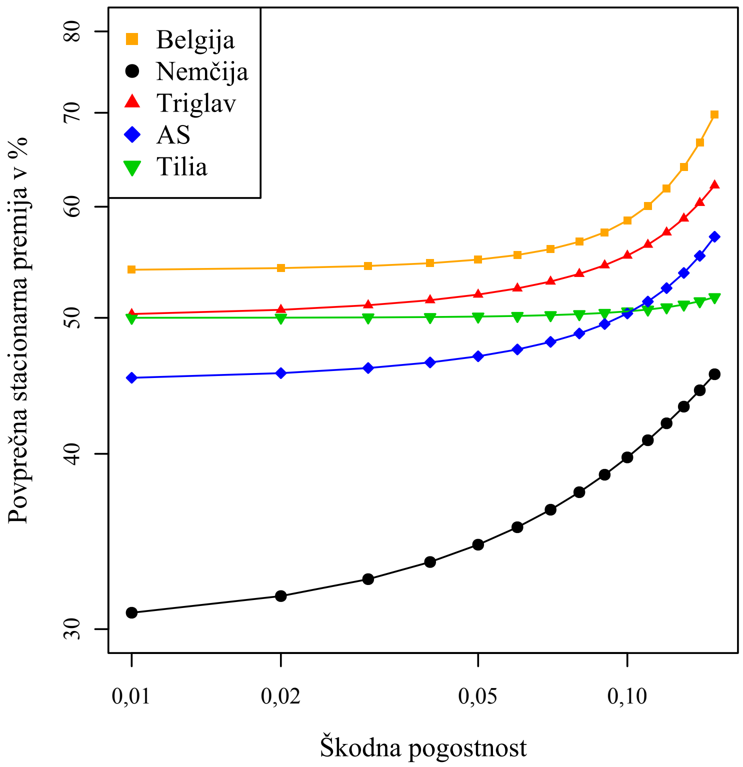
Tabela 5: Koeficient variacije premije

Bonus-malus sistem	**Koeficient variacije**
Nemčija	22,53 %
Adriatic Slovenica	14,65 %
Zavarovalnica Triglav	13,34 %
Belgija	10,65 %
Zavarovalnica Tilia	3,87 %

4.4 Elastičnost bonus-malus sistema

V idealnem bonus-malus sistemu bi morala nevarnostna premija naraščati linearno s škodno pogostnostjo λ. Zavarovanec, ki ima torej 10 % višjo škodno pogostnost od drugega zavarovanca, bi moral imeti tudi 10 % višjo nevarnostno premijo. *Elastičnost* bonus-malus sistema meri odziv bonus-malus sistema na spremembo škodne pogostnosti. Bonus-malus sistemu, v katerem nevarnostna premija narašča linearno s škodno pogostnostjo, pravimo, da je *popolnoma elastičen*. V praksi se premija poviša za manj, kot se poviša škodna pogostnost (Lemaire, 1995, str. 72). Za primerjavo bonus-malus sistemov definiramo več vrst elastičnosti.

Slika 5: Povprečna stacionarna premija glede na škodno pogostnost (log-log graf)



4.4.1 Loimarantova učinkovitost

Označimo s $\pi(\lambda) = \ell_\infty^T(\lambda)b$ stacionarno povprečno relativno premijo. *Loimarantovo učinkovitost* $\eta(\lambda)$ je prvič definiral Loimaranta (1972) kot elastičnost stacionarne povprečne relativne premije glede na škodno pogostnost, torej

$$\eta(\lambda) = \frac{d\pi(\lambda)/\pi(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d\log\pi(\lambda)}{d\log\lambda} = \frac{\pi'(\lambda)}{\pi(\lambda)}\lambda.$$

Loimarantovi učinkovitosti v nadaljevanju pravimo tudi *elastičnost* bonus-malus sistema. Ko je sistem popolnoma elastičen, je $\eta(\lambda) = 1$, navadno pa je $\eta(\lambda) < 1$ (Lemaire, 1995, str. 72).

Na Sliki 5 prikazujemo log-log graf povprečne relativne premije bonus-malus sistema v stacionarnem stanju $\pi(\lambda)$ glede na škodno pogostnost. Loimarantova učinkovitost bonus-malus sistema predstavlja naklon prikazane krivulje $\pi(\lambda)$. Iz grafa razberemo, da ima za realne škodne pogostnosti, ki se gibljejo med 5 % in 10 %, največji naklon nemški bonus-malus sistem. Bonus-malus sistemi Belgije, Zavarovalnice Triglav in Adriatic Slovenice imajo zelo podobne krivulje $\pi(\lambda)$, medtem ko je krivulja bonus-malus sistema Zavarovalnice Tilia najbolj položna za vse škodne pogostnosti λ.

Privzemimo sedaj kot Kaas et al. (2008, str. 142), da je $\eta(\lambda) < 1$, torej da se premija zavarovanca z višjo škodno pogostnostjo poviša za manj, kot se poviša škodna pogostnost. Kot smo že omenili, je to realna predpostavka, ki ji večina bonus-malus sistemov ustreza. Povprečna relativna premija kot funkcija škodne pogostnosti λ zavzame v limitnih vrednostih intervala $[0, \infty)$

vrednosti $\pi(0) = b_1$ in $\lim_{\lambda\to\infty} \pi(\lambda) = b_s < \infty$. Ker smo privzeli $\eta(\lambda) < 1$, velja

$$\frac{d}{d\lambda} \log \frac{\pi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\pi'(\lambda)}{\pi(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (\eta(\lambda) - 1) < 0,$$

torej je $\log \frac{\pi(\lambda)}{\lambda}$ strogo padajoča funkcija λ, od koder sledi, da enako velja za $\frac{\pi(\lambda)}{\lambda}$. Ker je poleg tega še

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\pi(\lambda)}{\lambda} = \infty \text{ in } \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\pi(\lambda)}{\lambda} = 0,$$

obstaja natanko ena škodna pogostnost λ_0, da velja

$$\pi(\lambda_0) = \lambda_0.$$

Škodno pogostnost λ_0 De Pril (1978) imenuje *centralna vrednost* bonus-malus sistema. Premija pri škodni pogostnosti λ_0 je natanko enaka prevzetemu tveganju zavarovalnice. Za zavarovanca s škodno pogostnostjo λ_0 premija ustreza tveganju in je zato pošteno določena. Velja

$$\begin{aligned} \text{za } \lambda > \lambda_0 : &\quad \tfrac{\pi(\lambda)}{\lambda} < \tfrac{\pi(\lambda_0)}{\lambda_0} = 1 \Rightarrow \quad \pi(\lambda) < \lambda, \\ \text{za } \lambda < \lambda_0 : &\quad \tfrac{\pi(\lambda)}{\lambda} > \tfrac{\pi(\lambda_0)}{\lambda_0} = 1 \Rightarrow \quad \pi(\lambda) > \lambda, \end{aligned}$$

kar pomeni, da zavarovanci s škodno pogostnostjo manjšo od λ_0 plačujejo previsoko premijo glede na tveganje, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, zavarovanci s škodno pogostnostjo večjo od λ_0 pa plačujejo prenizko premijo.

Kaas et al. (2008, str. 144–145) predlagajo več metod izračuna Loimarantove učinkovitosti. Za izračun lahko uporabimo aproksimacijo, saj za majhne h velja

$$\pi\left(\lambda(1+h)\right) \approx \pi(\lambda)\left(1 + \eta(\lambda)h\right).$$

Lahko pa tudi računsko izpeljemo Loimarantovo učinkovitost kot Kaas et al. (2008, str. 144–145). Označimo odvod vektorja $\ell_\infty(\lambda)$ z $g(\lambda) = (g_1(\lambda), \ldots, g_s(\lambda))^T$, torej je za $i = 1, \ldots, s$

$$g_i(\lambda) = \ell'_{\infty i}(\lambda).$$

Z odvajanjem enačbe $\sum_{i=1}^s \ell_{\infty i}(\lambda) = 1$ po λ dobimo

$$g^T(\lambda)\bar{1} = \sum_{i=1}^s g_i(\lambda) = 0. \tag{5}$$

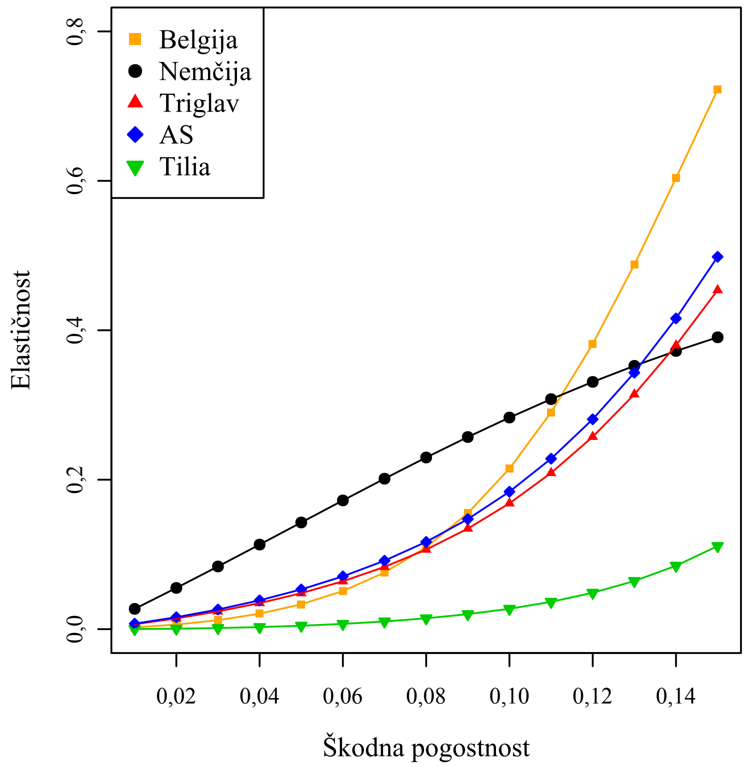
Iz enakosti $\pi(\lambda) = \ell_\infty^T(\lambda)b$ sledi

$$\pi'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^s \ell_{\infty i}(\lambda)b_i = \sum_{i=1}^s \ell'_{\infty i}(\lambda)b_i = \sum_{i=1}^s g_i(\lambda)b_i = g^T(\lambda)b.$$

Za izračun $\eta(\lambda)$ moramo sedaj le še poiskati $g(\lambda)$. Z odvajanjem enačbe $\ell_\infty^T(\lambda) = \ell_\infty^T(\lambda)P(\lambda)$ po λ dobimo

$$g_j(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^s \ell_{\infty i}(\lambda)p_{ij}(\lambda) = \sum_{i=1}^s g_i(\lambda)p_{ij}(\lambda) + \sum_{j=i}^s \ell_{\infty i}(\lambda)p'_{ij}(\lambda),$$

Slika 6: Elastičnost glede na škodno pogostnost



kar lahko prevedemo v matrično obliko kot

$$g^T(\lambda)\,(I - P(\lambda)) = \ell_\infty^T(\lambda)P'(\lambda), \tag{6}$$

pri čemer je element matrike $P'(\lambda) = (p'_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^s$ zaradi predpostavke o Poissonovi porazdelitvi enak

$$p'_{ij}(\lambda) \quad = \quad \frac{d}{d\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}t_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\left(t_{ij}^{(k+1)} - t_{ij}^{(k)}\right).$$

Sistem linearnih enačb (6) je nedoločen, ker matrika $I - P(\lambda)$ ni obrnljiva. Velja namreč $(I - P(\lambda))\,\overline{1} = 0$, kar pomeni, da ima $I - P(\lambda)$ netrivialno jedro in so vrstice matrike $I - P(\lambda)$ linearno odvisne. Zadnjo enakost sistema linearnih enačb (6) zato nadomestimo z enakostjo (5). Vsota koeficientov enakosti (5) je pozitivna, zato ne more biti linearna kombinacija drugih enačb (vsote njihovih koeficientov so ničelne) in je tako dobljeni sistem enačb rešljiv.

Graf 6 prikazuje Loimarantovo učinkovitost bonus-malus sistema v stacionarnem stanju glede na škodno pogostnost. Graf potrjuje, kar smo opazili pri prejšnjem grafu 5, torej da je nemški bonus-malus sistem za škodne pogostnosti na intervalu med 5 % in 10 % daleč najbolj učinkovit glede na Loimarantovo učinkovitost. V primeru višjih škodnih pogostnosti drugi bonus-malus sistemi, predvsem belgijski, postanejo bolj strogi. Elastičnost vseh opazovanih bonus-malus sistemov je za vse realne škodne pogostnosti daleč od popolne elastičnosti.

V Tabeli 6 primerjamo opazovane bonus-malus sisteme v stacionarnem stanju z Loimarantovo učinkovitostjo pri 7 % škodni pogostnosti. Najučinkovitejši glede na to mero je nemški bonus-malus sistem, v katerem se pri 10 % povečanju škodne pogostnosti povprečna stacionarna premija poveča za $2,01$ %.

Tabela 6: Elastičnost bonus-malus sistema

Bonus-malus sistem	**Elastičnost**
Nemčija	20,14 %
Adriatic Slovenica	9,16 %
Zavarovalnica Triglav	8,33 %
Belgija	7,57 %
Zavarovalnica Tilia	1,03 %

Tako definirana Loimarantova učinkovitost se nanaša le na zavarovance z enako škodno pogostnostjo, torej meri učinkovitost homogenega portfelja oziroma učinkovitost z vidika zavarovanca. Lemaire (1995, str. 89) z uvedbo škodne pogostnosti kot slučajne spremenljivke Λ definira *globalno učinkovitost*, torej elastičnost heterogenega portfelja, kot

$$\eta = \int_0^\infty \eta(\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

in z njo primerja bonus-malus sisteme.

4.4.2 De Prilova učinkovitost

Lemaire (1995, str. 86) kot dve večji pomanjkljivosti Loimarantove učinkovitosti navaja, da se nanaša izključno na stacionarno stanje bonus-malus sistema, ki v praksi ni nikoli doseženo, in da je neodvisna od začetnega razreda bonus-malus sistema. De Pril (1978) predstavi drugačno elastičnost bonus-malus sistema, *De Prilovo učinkovitost*.

Označimo z $\beta < 1$ diskontni faktor in z $v_i^{(n)}(\lambda)$ sedanjo vrednost pričakovanih plačil premij v naslednjih n letih za zavarovanca s škodno pogostnostjo λ, ki se nahaja v i-tem razredu. Potem za $i = 1, \ldots, s$ velja rekurzivna zveza

$$v_i^{(n)}(\lambda) = b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) v_{T_k(i)}^{(n-1)}(\lambda),$$

pri čemer se prvi del nanaša na premijo, ki jo zavarovanec plača sedaj, drugi del pa na sedanjo vrednost premije, ki jo bo naslednje leto plačal glede na škodno dogajanje v tem letu. S $T_k(i)$ smo označili razred, v katerega gre zavarovanec iz i-tega razreda ob k škodah.

Sedanja vrednost pričakovanih plačil v celotni prihodnji življenjski dobi za zavarovanca s škodno pogostnostjo λ, ki začne v i-tem razredu, je potem enaka

$$v_i(\lambda) = \lim_{n\to\infty} v_i^{(n)}(\lambda) = b_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) v_{T_k(i)}(\lambda). \tag{7}$$

Lemaire (1995, str. 87) dokaže, da ima sistem enačb $(v_1(\lambda), \ldots, v_s(\lambda))$ natanko eno rešitev.

De Prilovo učinkovitost definiramo kot elastičnost sedanje vrednosti pričakovanih bodočih premij zavarovanca v i-tem razredu glede na škodno pogostnost, torej

$$\mu_i(\lambda) = \frac{dv_i(\lambda)/v_i(\lambda)}{d\lambda/\lambda} = \frac{d\log v_i(\lambda)}{d\log\lambda} = \frac{v_i'(\lambda)}{v_i(\lambda)}\lambda.$$

Za izračun $\mu_i(\lambda)$ potrebujemo odvod $v_i'(\lambda)$. Ob upoštevanju predpostavke o Poissonovi porazdelitvi iz enakosti (7) izpeljemo

$$v_i'(\lambda) = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \left(\left(\frac{k}{\lambda} - 1 \right) v_{T_k(i)}(\lambda) + v'_{T_k(i)}(\lambda) \right),\ i = 1, \ldots, s.$$

Denuit et al. (2007, str. 244) pokažejo, da ima zgornji sistem linearnih enačb natanko eno rešitev.

Tako kot za Loimarantovo učinkovitost tudi za De Prilovo učinkovitost lahko pokažemo, da ob predpostavki $\mu_i(\lambda) < 1$ za vse λ in $i = 1, \ldots, s$, obstaja natanko ena centralna vrednost λ_0, pri čemer zavarovanci z nižjo škodno pogostnostjo plačujejo previsoko premijo, tisti z višjo škodno pogostnostjo pa prenizko.

Ker je De Prilova učinkovitost odvisna od začetnega razreda zavarovanca, Denuit et al. (2007, str. 244) predlagajo, da jo uporabimo za izbiro začetnega razreda tako, da maksimiziramo $\mu_i(\lambda)$ za vnaprej določeno vrednost λ. Poleg tega avtorji ugotovijo, da se vrednosti De Prilove in Loimarantove učinkovitosti v odvisnosti od škodne pogostnosti ne razlikujeta bistveno.

4.5 Povprečni optimalni samopridržaj

Kot smo že omenili v poglavju 3.2.3, zavarovanci majhne škode navadno poravnajo sami in jih ne prijavijo zavarovalnici, da bi se zavarovali pred povišanjem bodoče premije. Ta pojav je v literaturi znan kot želja po bonusu. Optimalni samopridržaj zavarovanca je znesek, do katerega se zavarovancu še splača nositi škodo samemu. Učinek samopridržaja je podoben franšizam, bonus-malus lestvica pa je v tem pogledu ekvivalentna množici franšiz, odvisnih od razreda bonus-malus sistema (Denuit et al., 2007, str. 251). Višji ko je optimalni samopridržaj, strožji je bonus-malus sistem. Če je optimalni samopridržaj v razumnih mejah, se zavarovalnica z njim zavaruje pred majhnimi škodami, ki ji povzročijo več administrativnih stroškov kot pa stroškov za škodo. Če pa je optimalni samopridržaj previsok, zavarovalnica prenese večino škod na zavarovanca in samo zavarovanje izgubi smisel. Glavni namen bonus-malus sistema je namreč boljše razlikovanje med dobrimi in slabimi vozniki, ne pa prenos škod z zavarovalnice na zavarovanca (Lemaire, 1995, str. 92).

Lemaire (1995, str. 92–97) sestavi optimalno strategijo zavarovanca s pomočjo dinamičnega programiranja. Optimalna strategija za vsak razred bonus-malus sistema poda optimalni samopridržaj, to je znesek, do katerega se zavarovancu ne splača prijaviti škode zavarovalnici. V tem podpoglavju bomo tako kot Lemaire (1995) izračunali optimalne strategije za opazovane bonus-malus sisteme in iz njih sestavili mero učinkovitosti, s katero bomo lahko sisteme tudi primerjali med seboj.

Predpostavke, ki jih bomo pri sestavi strategije uporabili, so:

- zavarovanci bodo vozili neomejeno število let,
- premijo plačujemo na začetku leta, škode pa plačujemo na sredi leta, torej so porazdeljene enakomerno med letom,
- število škod in višina škod sta neodvisni.

Ker v tem podpoglavju delamo s škodami in denarnimi tokovi, ne moremo več uporabljati le relativnih premij, pač pa določimo tudi povprečno in izhodiščno premijo. Da lahko bonus-malus sisteme med seboj primerjamo ne glede na lestvico, postavimo izhodiščno premijo v vsakem bonus-malus sistemu tako, da velja

$$\textit{povprečna premija} = \textit{povprečna relativna premija} \times \textit{izhodiščna premija}.$$

Vsi bonus-malus sistemi imajo potem enako povprečno premijo in različne izhodiščne premije. Privzamemo, da je povprečna premija enaka kot v razdelku 3.2.4, torej 250 EUR.

Definirajmo strategijo zavarovanca kot vektor $x = (x_1, \dots, x_s)^T$, pri čemer je x_i samopridržaj zavarovanca v i-tem razredu. Označimo kot v razdelku 3.2.4 z X slučajno spremenljivko, ki meri višino škode. Predpostavili smo, da je X porazdeljena lognormalno s parametroma (μ, σ^2), z f_X smo označili njeno gostoto, z F_X pa porazdelitveno funkcijo. Pri strategiji x označimo verjetnost, da zavarovanec v i-tem razredu v enem letu ne bo prijavil škode, s

$$p_i = P(X \le x_i) = \int_0^{x_i} f_X(y)dy = F_X(x_i).$$

Spomnimo, da je iz 3. poglavja $p_k(\lambda) = P(N = k)$. Potem je verjetnost, da bo zavarovanec iz i-tega razreda v enem letu prijavil k škod enaka

$$\begin{aligned} p_k^{(i)}(\lambda) &= \sum_{h=k}^{\infty} p_h(\lambda) \binom{h}{k} (1-p_i)^k p_i^{h-k} = \sum_{h=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^h}{h!} \frac{h!}{k!(h-k)!} (1-p_i)^k p_i^{h-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda(1-p_i)}(\lambda(1-p_i))^k}{k!}. \end{aligned}$$

Pričakovano število prijavljenih škod za zavarovanca v i-tem razredu v enem letu je potem $\lambda(1-p_i)$. Pričakovano višino neprijavljene škode označimo z

$$C_i^* = E(X | X \textit{ ni prijavljena}) = \frac{1}{p_i} \int_0^{x_i} y f_X(y)dy.$$

Zaradi predpostavke o neodvisnosti višine in števila škod bo zavarovanec v povprečju za neprijavljene škode plačal $C_i^* \lambda p_i$. Torej bo v enem letu plačal

$$C_i = B_i + \beta^{1/2} C_i^* \lambda p_i = B_i + \beta^{1/2} \lambda \int_0^{x_i} y f_X(y)dy,$$

pri čemer z $B = (B_1, \ldots, B_s)^T$ označujemo dejanske in ne več relativne premije, torej

$$B = b \times \textit{izhodiščna premija}.$$

Označimo z $z = (z_1, \ldots, z_s)^T$ vektor sedanje vrednosti pričakovanih bodočih plačil zavarovancev po razredih, pri čemer mora veljati

$$z_i = C_i + \beta \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(i)}(\lambda) z_{T_k(i)},\ i = 1, \ldots, s, \tag{8}$$

kjer se prvi del enačbe nanaša na plačila zavarovanca za tekoče leto, drugi pa rekurzivno na plačila v prihodnosti glede na bodoče škodno dogajanje. Lemaire (1995, str. 95) pokaže, da obstaja natanko ena rešitev zgornjega sistema enačb.

Za določitev optimalne strategije x upoštevamo, da ima zavarovanec, ki v časovni točki $t \in [0, 1)$ povzroči škodo višine y, dve možnosti:

- če škode ne prijavi, je pričakovana sedanja vrednost njegovih odhodkov v časovni točki t enaka

  $$\beta^{-t} C_i + y + \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(i)} \left(\lambda(1-t)\right) z_{T_{k+m}(i)},$$

  kjer je z m označeno število že prijavljenih škod v tem obdobju;

- če škodo zavarovalnici prijavi, je pričakovana sedanja vrednost njegovih odhodkov v časovni točki t enaka

  $$\beta^{-t} C_i + \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(i)} \left(\lambda(1-t)\right) z_{T_{k+m+1}(i)}.$$

Samopridržaj x_i je tista višina škode y, za katero sta zgornji dve možnosti enaki:

$$x_i = \beta^{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(i)} \left(\lambda(1-t)\right) \left(z_{T_{k+m+1}(i)} - z_{T_{k+m}(i)}\right). \tag{9}$$

Za manjkajoče vhodne parametre upoštevamo naslednje vrednosti:

- Za diskontni faktor uporabimo enako kot Lemaire (1995, str. 93) $\beta = 0,9$.
- Predpostavimo lahko, da je vrednost $t = 0$ (in zaradi tega tudi $m = 0$), saj Denuit et al. (2007, str. 253) pokažejo, da je vpliv časa nastanka škode na optimalni samopridržaj zavarovanca mnogo manjši od vpliva razreda, diskontnega faktorja in škodne pogostnosti.

Z enačbama (8) in (9) lahko iterativno rešujemo sistem $2s$ enačb z $2s$ neznankami, da določimo optimalno strategijo, na naslednji način:

1. Izberemo začetno strategijo x. Navadno za začetno strategijo izberemo kar $x = \overline{0}$, torej prijavljanje vseh škod.

2. Iterativno ponavljamo: pri dani strategiji x rešimo enačbo (8) in dobimo vektor z, potem pa dobljeni vektor z uporabimo v (9), da dobimo strategijo x.

Denuit et al. (2007, str. 254) menijo, da optimalnega samopridržaja ne smemo razumeti kot nivo, nad katerim zavarovanci prijavljajo škode, saj so nekatere škode, prijavljene zavarovalnicam, mnogo nižje. Optimalni samopridržaj je treba prej gledati kot mero učinkovitosti sistema. Ravno tako ta pristop zahteva necenzurirano število nesreč namesto števila škod, o čemer smo razpravljali v razdelku 3.2.3. Tega podatka navadno nimamo na voljo, ga pa lahko pri določenih predpostavkah izpeljemo.

V Tabeli 7 prikazujemo strategijo zavarovancev po bonus-malus razredih. Za začetno strategijo smo uporabili $x = \overline{0}$, torej da zavarovanci prijavijo zavarovalnici vse škode, dobljeni rezultat pa smo dobili po 30 iteracijah. V tabeli je relativna premija b prikazana v odstotkih, strategija zavarovancev x pa v evrih. Iz tabele lahko razberemo, da vsem bonus-malus sistemom razen nemškemu optimalni samopridržaj z razredom raste do najvišjih razredov. V najvišjih razredih optimalni samopridržaj v omenjenih bonus-malus sistemih pade, saj se zavarovancem v primeru škode premija ne poveča bistveno. V nemškem bonus-malus sistemu je situacija drugačna. Tam optimalni samopridržaj sicer pretežno narašča z bonus-malus razredom, a se vmes pojavi kakšen razred, ki izstopa, torej naraščanje ni monotono. Tako je v nemškem sistemu za zavarovanca v razredu s 70 % relativno premijo optimalni samopridržaj 394 EUR, v enem razredu nižje 534 EUR, v enem razredu višje pa 552 EUR. Do tega pride, ker je kazen v primeru škode v razredu s 70 % relativno premijo bistveno višja premija, nagrada v primeru brezškodnega dogajanja pa bistveno nižja premija. V nižjem in višjem razredu kazen in nagrada nista tako visoki.

Za primerjavo različnih bonus-malus sistemov z optimalnim samopridržajem vzamemo uteženo povprečje samopridržajev po začetnih razredih, pri čemer uporabimo stacionarno porazdelitev zavarovancev po razredih kot uteži. Dobljeni meri učinkovitosti pravimo *povprečni optimalni samopridržaj* (angl. *average optimal retention*, v nadaljevanju AOR) (Lemaire, 1995, str. 99).

Tabela 8 prikazuje v prvem stolpcu znesek povprečnega optimalnega samopridržaja za opazovane bonus-malus sisteme, v drugem delež zneska samopridržaja v povprečni stacionarni premiji in v tretjem delež zneska samopridržaja v izhodiščni premiji. Iz tabele je razvidno, da se zavarovancem v Zavarovalnici Tilia splača prijaviti že zelo nizke škode, ker je učinek kazni v bonus-malus sistemu zelo blag. V Nemčiji se, po drugi strani, zavarovancem splača kriti škode v višini $1,66$-kratnika povprečne premije.

Lemaire (1995, str. 119–121) opazuje tudi odvisnost optimalnega samopridržaja v odvisnosti ob β in λ. Ugotovi, da ima majhna napaka v oceni λ zelo majhen vpliv na oceno optimalnega samopridržaja. Odstotek spremembe diskontnega faktorja ima veliko večji vpliv na samopridržaj kot pa odstotek spremembe škodne pogostnosti. Zavarovanec, ki močno diskontira bodoča plačila, namreč škod ne želi plačevati sam.

Tabela 7: Optimalni samopridržaj zavarovancev

Belgija		**Nemčija**		**Zavarovalnica Triglav**		**Adriatic Slovenica**		**Zavarovalnica Tilia**	
b	x	b	x	b	x	b	x	b	x
54	81	30	381	50	154	45	169	50	15
54	126	35	381	55	236	50	259	50	42
54	178	35	352	60	308	55	338	50	73
57	236	35	327	65	372	60	408	50	119
60	291	40	443	70	428	65	469	55	169
63	343	40	494	75	479	70	524	60	232
66	394	40	443	80	528	75	574	65	285
69	444	40	511	85	575	80	621	70	349
73	496	40	469	90	640	85	668	75	400
77	546	45	432	95	722	90	735	80	536
81	595	45	517	100	839	95	820	85	665
85	642	50	459	110	958	100	946	90	814
90	695	55	522	120	1.092	110	1.076	95	883
95	751	60	418	135	1.277	120	1.224	100	992
100	795	65	534	150	1.014	135	1.428	110	1.106
105	835	70	394	170	725	150	1.134	120	1.238
111	881	85	552	200	395	170	810	135	1.425
117	967	100	740			200	441	150	1.126
123	1.160	125	613					170	800
130	980	155	872					200	433
140	798	175	872						
160	601	200	872						
200	356								

Opomba: Relativna premija b je v odstotkih, strategija x pa v EUR.

Tabela 8: Povprečni optimalni samopridržaj

Bonus-malus sistem	**AOR**	$\frac{\textbf{AOR}}{\textbf{povprečna premija}}$	$\frac{\textbf{AOR}}{\textbf{izhodiščna premija}}$
Nemčija	414 EUR	166 %	61 %
Adriatic Slovenica	216 EUR	87 %	42 %
Zavarovalnica Triglav	197 EUR	79 %	42 %
Belgija	141 EUR	56 %	32 %
Zavarovalnica Tilia	28 EUR	11 %	6 %

4.6 Transparentnost bonus-malus sistema

Posledica vpeljave bonus-malus sistema je, kot smo videli na Sliki 3, postopno zniževanje povprečne premije zavarovalnice. Poleg tega se zavarovanci zgoščujejo v nižjih razredih, ker so v praksi bonus-malus sistemi preblagi, torej premalo kaznujejo škode in preveč nagrajujejo brezškodno preteklo dogajanje. V praksi so zato bonus-malus sistemi finančno neuravnoteženi

(Lemaire, 1995). Bonus-malus sistem lahko finančno uravnotežimo s spreminjanjem prehodnih pravil, relativne premije ali, kot je to navadno v praksi, izhodiščne premije. Pri tem pride do netransparentnosti, saj zavarovalnica zavarovancu na polici obljubi popust, vendar ga zaradi težnje po finančni uravnoteženosti ne more zagotoviti (Baione et al., 2002).

Označimo z IP_n izhodiščno premijo v letu n, $n = 0, 1, \ldots$. Potem zavarovanec v i-tem razredu v letu n plača premijo $b_i \mathit{IP}_n$. Povprečno relativno premijo v n-tem letu opazovanja pri povprečni škodni pogostnosti λ izračunamo kot

$$\pi_n(\lambda) = b^T \ell_n(\lambda).$$

Po drugi strani predpostavimo, da je višina povprečne škode X enaka 1, in ne upoštevajmo dodatka za stroške. Potem zavarovalnica v enem letu v povprečju za škode plača $E(N)E(X) = E(N)$, pri čemer smo predpostavili, da je število škod neodvisno od višine škod.

Po Baione et al. (2002) je bonus-malus sistem v letu n *finančno uravnotežen*, če je povprečna premija enaka povprečnemu znesku izplačanih škod v letu, torej mora veljati

$$E(N) = \pi_n(\lambda)\mathit{IP}_n, \text{ za } n = 0, 1, \ldots.$$

Če predpostavimo, da se povprečni znesek izplačanih škod skozi leta ne spreminja, velja

$$\mathit{IP}_n \pi_n(\lambda) = \mathit{IP}_{n-1} \pi_{n-1}(\lambda). \tag{10}$$

Če zaradi nižanja povprečne relativne premije za doseganje finančne uravnoteženosti sistema izhodiščno premijo vsako leto popravimo, jo izračunamo kot

$$\mathit{IP}_n = \mathit{IP}_{n-1} \frac{\pi_{n-1}(\lambda)}{\pi_n(\lambda)}.$$

Iz zgornje enačbe lahko razberemo, da se zaradi zniževanja povprečne relativne premije izhodiščna premija viša in se lahko kljub prehodu v nižji bonus-malus razred premija posameznega zavarovanca $b_i \mathit{IP}_n$ celo poviša. Zavarovancu Zavarovalnice Triglav na primer, ki je trenutno v razredu s 70 % relativno premijo, zavarovalnica na polici v primeru brezškodnega dogajanja obljubi naslednje leto za 5 odstotnih točk nižjo relativno premijo, kar pri osnovi 70 % pomeni 7 % popust. Vendar pa v tem letu zaradi znižanja povprečne relativne premije povišamo izhodiščno premijo za 10 %, kar za zavarovanca pomeni 2 % doplačilo glede na lansko premijo. Delovanje zavarovalnice je v tem primeru netransparentno, ker dobri zavarovanci ne dobijo popusta, ki ga glede na sklenjeno polico pričakujejo. Poviševanje izhodiščne premije vodi v neskladje med popustom na premijo, definiranim v polici, in efektivnim popustom zavarovanca. Večina popusta lahko namreč izgine na račun povišanja izhodiščne premije. Neskladje med efektivnim popustom in popustom na polici ne zadošča zahtevi po transparentnosti med zavarovancem in zavarovalnico (Baione et al., 2002).

Verico (2002) poda za neupravičenost poviševanja izhodiščne premije zaradi zniževanja povprečne relativne premije še en argument. Zavarovanec, ki v bonus-malus sistem vstopi, ko je večina že v stacionarnem stanju, namreč plačuje razmeroma več premije kot tisti, ki je v bonus-malus sistem vstopil, ko je bila večina še v začetnem razredu. Po mnenju avtorice finančna solidarnost med generacijami zavarovancev, pri kateri zavarovanci, ki v bonus-malus sistem vstopijo kasneje, plačujejo za tiste, ki so v sistem vstopili prej, ni utemeljena.

Namesto spreminjanja izhodiščne premije zaradi spremembe povprečne relativne premije lahko spremenimo tudi relativne premije, kar je v praksi manj pogosto. V tem primeru relativne premije iz leta $n-1$ množimo s $\pi_{n-1}(\lambda)/\pi_n(\lambda)$. Pri tem načinu popravljanja povprečne premije se ločnica med bonus in malus razredi, kot jo definirajo Baione et al. (2002), spremeni. Avtorji pravijo, da malus razred ni tisti, ki ima relativno premijo večjo od 100 %, pač pa tisti, ki ima relativno premijo višjo od povprečne relativne premije. Spreminjanje ločnice med bonus in malus razredi se zdi smiselno, saj se povprečna relativna premija spremeni zaradi drugačnega razmerja med dobrimi in slabimi zavarovanci, zato je prav, da se spremeni tudi meja med njimi. Če popravljamo izhodiščno premijo, se ne spremeni ločnica med bonus in malus razredi, ampak le premija vseh zavarovancev.

V Tabeli 9 prikazujemo primerjavo med dejansko in transparentno bonus-malus lestvico. Pri tem transparentno bonus-malus lestvico $b^{(t)}$ dobimo tako, da dejansko bonus-malus lestvico b delimo s stacionarno povprečno relativno premijo $\pi(\lambda)$, torej je

$$b^{(t)} = \frac{b}{\pi(\lambda)}.$$

Iz Tabele 9 razberemo, da je pravih bonus razredov zaradi zgoščevanja zavarovancev v najnižjih razredih zelo malo in da je dejanski bonus zelo majhen. V primeru bonus-malus sistema Adriatic Slovenice so tako najboljši zavarovanci upravičeni le do $6\ \%$ popusta, vsi ostali pa glede na stacionarno povprečno relativno premijo plačujejo doplačilo.

4.7 Primerjava mer učinkovitosti

Predstavili smo torej štiri glavne mere učinkovitosti bonus-malus sistema: relativni stacionarni povprečni nivo, koeficient variacije premije, elastičnost in povprečni optimalni samopridržaj. Z njimi poskušamo določiti, kako strog je bonus-malus sistem, in glede na strogost bonus-malus sisteme primerjati. V praksi so bonus-malus sistemi premalo strogi, kar povzroča zgoščevanje zavarovancev v nižjih razredih in posledično slabšo *a posteriori* diferenciacijo. Strog bonus-malus sistem ima visok relativni stacionarni povprečni nivo, visok koeficient variacije premije, visoko elastičnost in visok povprečni optimalni samopridržaj. Strogost bonus-malus sistema določa stopnjo *a posteriori* diferenciacije.

V Tabeli 10 povzemamo vrednosti vseh štirih mer učinkovitosti za opazovane bonus-malus sisteme, torej relativni stacionarni povprečni nivo, koeficient variacije premije, elastičnost in povprečni optimalni samopridržaj.

Lemaire (1995, str. 103–115) analizira 30 bonus-malus sistemov in jih z omenjenimi merami učinkovitosti ovrednoti. Ugotovi, da so mere učinkovitosti med seboj močno pozitivno koreli-

Tabela 9: Primerjava dejanskih in transparentnih relativnih premij (v %)

Belgija		**Nemčija**		**Zavarovalnica Triglav**		**Adriatic Slovenica**		**Zavarovalnica Tilia**	
b	$b^{(t)}$	b	$b^{(t)}$	b	$b^{(t)}$	b	$b^{(t)}$	b	$b^{(t)}$
54	96	30	82	50	94	45	94	50	100
54	96	35	96	55	104	50	104	50	100
54	96	35	96	60	113	55	114	50	100
57	102	35	96	65	122	60	125	50	100
60	107	40	110	70	132	65	135	55	110
63	113	40	110	75	141	70	146	60	119
66	118	40	110	80	151	75	156	65	129
69	123	40	110	85	160	80	166	70	139
73	130	40	110	90	170	85	177	75	149
77	138	45	123	95	179	90	187	80	159
81	145	45	123	100	188	95	198	85	169
85	152	50	137	110	207	100	208	90	179
90	161	55	151	120	226	110	229	95	189
95	170	60	164	135	254	120	250	100	199
100	179	65	178	150	283	135	281	110	219
105	188	70	192	170	320	150	312	120	239
111	198	85	233	200	377	170	354	135	269
117	209	100	274			200	416	150	299
123	220	125	343					170	338
130	232	155	425					200	398
140	250	175	480						
160	286	200	548						
200	357								

Tabela 10: Primerjava mer učinkovitosti

Bonus-malus sistem	**RSAL**	**Koeficient variacije**	**Elastičnost**	**AOR**
Belgija	1,35 %	10,65 %	7,57 %	141 EUR
Nemčija	3,82 %	22,53 %	20,14 %	414 EUR
Zavarovalnica Triglav	2,05 %	13,34 %	8,33 %	197 EUR
Adriatic Slovenica	1,98 %	14,65 %	9,16 %	216 EUR
Zavarovalnica Tilia	0,15 %	3,87 %	1,03 %	28 EUR

rane. Enako lahko vidimo iz korelacijske matrike v Tabeli 11 za primer naših petih bonus-malus sistemov.

Zaradi visoke koreliranosti Lemaire (1995, str. 104) dobi idejo, da bi iz štirih mer učinkovitosti izpeljal eno, ki bi povzemala strogost bonus-malus sistema. Izpeljano mero učinkovitosti poimenuje indeks strogosti in z njim bonus-malus sisteme razvrsti glede na njihovo strogost. Za izpeljavo indeksa strogosti Lemaire (1995, str. 104) uporabi analizo glavnih komponent.

Tabela 11: Korelacija med merami učinkovitosti

	RSAL	CV	Elastičnost	AOR
RSAL	1,00	0,99	0,98	1,00
CV	0,99	1,00	0,98	0,99
Elastičnost	0,98	0,98	1,00	0,99
AOR	1,00	0,99	0,99	1,00

Glavni cilj analize glavnih komponent je izpeljava majhnega števila linearnih kombinacij množic spremenljivk, ki vsebujejo čimveč informacij o originalnih spremenljivkah. Indeks strogosti bonus-malus sistema je torej mera učinkovitosti, ki je linearna kombinacija originalnih štirih mer. Analiza glavnih komponent nam iz štirih mer učinkovitosti vrne štiri glavne komponente, torej štiri linearne kombinacije originalnih mer, ki so med seboj ortogonalne in nekorelirane, pri čemer prva pojasnjuje največji delež variance v vzorcu, druga drugi največji delež itd. Indeks strogosti je prva glavna komponenta analize glavnih komponent.

Analizo glavnih komponent bi lahko naredili tudi mi, vendar primerjamo med sabo premajhno število bonus-malus sistemov. Poleg tega so si trije izmed primerjanih bonus-malus sistemov med seboj zelo podobni in analiza ne bi vrnila verodostojnih rezultatov.

Lemaire (1995, str. 115) ugotavlja, da je koeficient variacije premije kot mera strogosti zelo blizu indeksa strogosti, saj sta močno korelirani. Pri tem je za izračun indeksa strogosti potrebno najprej izračunati vse mere učinkovitosti in jih v linearni kombinaciji sešteti. Uporaba koeficienta variacije premije je torej mnogo preprostejša in hitrejša ter ni bistveno manj natančna. Park et al. (2010) Lemairovo ugotovitev upoštevajo in pri primerjavi azijskih bonus-malus sistemov uporabijo koeficient variacije premije kot edino mero učinkovitosti.

Indeks strogosti se tako kot mere učinkovitosti, iz katerih smo ga izpeljali, nanaša na stacionarno stanje bonus-malus sistema. Če bi bile originalne štiri mere učinkovitosti izračunane glede na prehodno stanje bonus-malus sistema, bi se tudi indeks strogosti nanašal na prehodno stanje (Lemaire, 1995, str. 115).

Spomnimo še enkrat, da smo za vse bonus-malus sisteme privzeli enako porazdelitev višine in števila škod. Če bi upoštevali, da imajo Nemčija, Belgija in Slovenija različne porazdelitve števila in višine škod, bi bile vrednosti mer učinkovitosti različne. Pri višji povprečni škodni pogostnosti je namreč enak bonus-malus sistem učinkovitejši kot pri nižji, saj so potrebne nižje kazni v primeru škode.

Lemaire (1995) ugotovi, da na razvoj bonus-malus sistema vpliva ekonomski razvoj države in kultura. Bolj ko je zavarovalništvo v državi razvito, strožji je bonus-malus sistem. V državah v razvoju imajo bonus-malus sistemi navadno malo razredov in preprosta prehodna pravila. Poleg tega njegov vzorec bonus-malus sistemov kaže, da imajo države s podobnimi geografskimi vzorci enako stroge bonus-malus sisteme. Park et al. (2010) potrdijo, da enake trditve veljajo tudi za srednjo in vzhodno Azijo. Ugotovijo, da bolj ko se trg razvija, bolj ko zavarovanci zavarovalništvo poznajo, bolj je bonus-malus sistem strog. Bonus-malus sistem naj bi se s časom razvijal tako, da čimbolje odseva spreminjajoče se gospodarske razmere. Zaradi gospodarskega razvoja se namreč povečuje promet, škodna pogostnost pa se s poostrovanjem cestno prometnih predpisov, izgradnjo vedno boljših cest in raznimi ukrepi za povečanje varnosti na cesti zmanjšuje. Posledično morajo zavarovalnice uvajati vedno strožji bonus-malus sistem, bolj kaznovati povzročene škode, s čemer lahko dodeljujejo boljšim zavarovancem večje popuste.

Omeniti velja, da strog bonus-malus sistem ni nujno dober sistem. Strog sistem pomeni manjšo solidarnost, večjo segmentacijo, večjo diferenciacijo in poosebljenje tveganja, ne moremo ga pa opredeliti kot boljšega ali slabšega (Lemaire, 1995, str. 111).

5 OPTIMALNI BONUS-MALUS SISTEM

V prejšnjem poglavju smo primerjali različne bonus-malus sisteme med seboj glede na učinkovitost njihove *a posteriori* diferenciacije. V tem poglavju bomo ugotavljali, kakšen je optimalni bonus-malus sistem, ki zavarovance najbolje diferencira med seboj. Poglavje je razdeljeno na dva dela. V prvem delu bomo izpeljali kredibilnostno formulo, s katero lahko določimo optimalno premijo za zavarovanca, ki je imel v preteklih letih določeno število škod. Ker pa je kredibilnostna formula v praksi prezapletena za uporabo, se za *a posteriori* diferenciacijo uporabljajo bonus-malus sistemi. V drugem delu poglavja bomo zato za dani bonus-malus sistem izpeljali optimalne relativne premije.

5.1 Kredibilnostna formula

Pri kredibilnostni teoriji uporabljamo pretekle podatke, da dobimo natančno oceno dejanskega stanja. V avtomobilskih zavarovanjih lahko kredibilnostne tehnike uporabimo za ponovno ovrednotenje škodne pogostnosti glede na opazovane pretekle podatke (Pitrebois et al., 2006a).

Pri določanju premije zavarovanca lahko zavarovalnica uporabi dve robni tehniki. Pri uporabi prve tehnike vsem zavarovancem zaračuna enako premijo, ki je enaka oceni povprečnega tveganja v portfelju. To tehniko zavarovalnica izbere, ko ima homogen portfelj zavarovancev. Pri drugi tehniki zavarovalnica vsakemu zavarovancu zaračuna premijo, ustrezajočo njegovemu individualnemu škodnemu dogajanju, kar je smiselno v popolnoma heterogenem portfelju. Ta tehnika je seveda uporabna šele, ko imamo o zavarovancu dovolj podatkov. Ker navadno nimamo niti homogenega portfelja niti dovolj podatkov o posameznem zavarovancu, da bi uporabili drugo tehniko, uporabimo linearno kombinacijo obeh tehnik, ki ji pravimo *kredibilnostna formula*. Utež, dano škodnemu dogajanju posameznika, imenujemo *kredibilnostni faktor* (Kaas et al., 2008, str. 203). V kredibilnostnem modelu premijo določimo s kredibilnostno formulo kot linearno kombinacijo premije, določene na podlagi individualnih izkušenj z zavarovancem, in premije, določene na podlagi izkušenj s celotnim portfeljem zavarovalnice.

S kredibilnostno formulo lahko določimo premijo za police iz heterogenega portfelja, ko imamo malo podatkov o škodah posameznika, a dovolj o škodah v portfelju. Kredibilnostni faktor odraža, koliko lahko verjamemo škodnemu dogajanju posameznega zavarovanca (Denuit et al., 2007, str. 121).

Izpeljimo sedaj kredibilnostni model za določanje premij kot Lemaire (1995, str. 155–159), pri čemer upoštevamo v 3. poglavju definirane oznake.

Opazujmo zavarovanca s škodno pogostnostjo λ. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je nevarnostna premija enaka škodni pogostnosti λ, torej da je povprečna višina škode enaka 1. Zavarovanca opazujemo t let in z N_i označimo slučajno spremenljivko, ki meri število škod, ki jih je v i-tem letu povzročil zavarovanec ($i = 1, \ldots, t$). Označimo skrajšano $\overline{N} = (N_1, \ldots, N_t)$. Predpostavimo za začetek, da se zavarovančeve vozniške izkušnje z leti ne spreminjajo in da so posamezna leta med seboj neodvisna, torej da so za zavarovanca s škodno pogostnostjo λ slučajne spremenljivke N_i neodvisne in enako porazdeljene.

V časovni točki $t + 1$ poznamo škode zavarovanca za preteklih t let, $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_t)$, in želimo čimbolje oceniti škodno pogostnost λ. Označimo najboljšo oceno škodne pogostnosti λ v časovni točki $t + 1$ s $\Psi_{t+1} = \Psi(k_1, \ldots, k_t)$, $t = 1, 2, \ldots$. S Ψ_1 označimo *a priori* oceno λ, torej najboljšo oceno škodne pogostnosti, ko zavarovanca šele začnemo opazovati in še nimamo podatkov o njegovem škodnem dogajanju.

Označimo z $R_{t+1}(\Psi_{t+1}, \lambda)$ *funkcijo tveganja* zavarovalnice v točki $t + 1$. Funkcija tveganja je enaka pričakovani izgubi zavarovalnice $\mathcal{L}(\lambda - \Psi_{t+1})$, če zavarovalnica privzame oceno Ψ_{t+1} za škodno pogostnost λ. Za funkcijo izgube $\mathcal{L}$ navadno privzamemo, da je nenegativna in konveksna funkcija. Velja

$$R_{t+1}(\Psi_{t+1}, \lambda) = E\left(\mathcal{L}\left(\lambda - \Psi(\overline{N})\right)\right) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{N}^t} \mathcal{L}\left(\lambda - \Psi(\overline{k})\right) p(\overline{k}|\lambda),$$

pri čemer označujemo porazdelitev števila škod zavarovanca s škodno pogostnostjo λ skrajšano s $p(\overline{k}|\lambda) = P(\overline{N} = \overline{k}|\Lambda = \lambda)$.

Potem je celotna pričakovana izguba zavarovalnice za tega zavarovanca enaka

$$R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots; \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} R_t(\Psi_t, \lambda) = \sum_{t=1}^{\infty} E\left(\mathcal{L}\left(\lambda - \Psi(\overline{N})\right)\right).$$

Iščemo tako zaporedje ocen škodne pogostnosti $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$, da bo celotna izguba zavarovalnice minimalna za vsak λ. Ker Lemaire (1995, str. 157) ugotovi, da tako zaporedje v splošnem ne obstaja, iščemo takega, ki minimizira povprečno tveganje zavarovalnice

$$R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots) = \int_0^{\infty} R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots; \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda,$$

pri čemer je f_{Λ} gostota slučajne spremenljivke škodne pogostnosti Λ. Lemaire (1995, str. 157, izrek Walda in Wolfowitza) pravi, da vedno obstaja zaporedje $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$, ki minimizira

$R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$. Ker je

$$R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots) = \int_0^\infty \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\overline{k} \in \mathbb{N}^t} \mathcal{L}\left(\lambda - \Psi(\overline{k})\right) p(\overline{k}|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda, \tag{11}$$

lahko z upoštevanjem Bayesovega izreka (Klugman et al., 2004, str. 362), po katerem velja

$$f_{\Lambda|N_1,\ldots,N_t}(\lambda|k_1, \ldots, k_t) = \frac{p(k_1, \ldots, k_t|\lambda) f_\Lambda(\lambda)}{p(k_1, \ldots, k_t)}, \tag{12}$$

z zamenjavo vrstnega reda integriranja in seštevanja, z upoštevanjem omejenosti verjetnostne porazdelitve z 1 in še z upoštevanjem nenegativnosti funkcije izgube prevedemo problem minimiziranja izraza (11) na minimiziranje

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\left(\lambda - \Psi(\overline{k})\right) f_{\Lambda|\overline{N}}(\lambda|\overline{k}) d\lambda = E\left(\mathcal{L}\left(\Lambda - \Psi(\overline{N})\right) | \overline{N} = \overline{k}\right) \tag{13}$$

za vse $t = 1, 2, \ldots$ in $\overline{k} \in \mathbb{N}^t$.

Bonus-malus sistem, določen s funkcijo $\Psi : \mathbb{N}^t \to \mathbb{R}$, ki minimizira izraz (13), Lemaire (1995, str. 159) definira kot *optimalni bonus-malus sistem*. Frangos in Vrontos (2001) pravita, da bi moral biti optimalni bonus-malus sistem:

- pravičen, torej bi moral vsak zavarovanec plačevati premijo sorazmerno svojemu tveganju,
- finančno uravnotežen, torej bi morala biti povprečna premija vsako leto konstantna,
- smiseln, torej bi moralo večje število škod povzročiti višjo premijo, brezškodno leto pa nižjo premijo.

Ideja pri sestavi optimalnega bonus-malus sistema je naslednja: ko določimo število razredov in prehodna pravila, lahko optimalne deleže izhodiščne premije določimo tako, da maksimiziramo asimptotično natančnost napovedi, torej minimiziramo pričakovano izgubo v izrazu (13) (Norberg, 1976). Pitrebois, Denuit in Walhin (2003c) pravijo, da je napovedna natančnost mera učinkovitosti bonus-malus sistema. Bonus-malus sistem je namreč dober pri razlikovanju med dobrimi in slabimi zavarovanci, če je premija, ki jo zavarovanci plačajo, blizu tisti, ki bi jo glede na tveganje, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, morali plačati.

Pri izračunu premije predpostavimo v podpoglavju 3.2.4 omenjeno načelo pričakovane vrednosti, torej da je zaračunana premija sorazmerna pričakovanemu številu nesreč (Denuit & Dhaene, 2001, str. 3).

V nadaljevanju bomo predpostavili negativni binomski model, torej da je število škod posameznega zavarovanca $N|\Lambda = \lambda$ porazdeljeno Poissonovo, škodna pogostnost Λ pa ima gama porazdelitev s parametroma a in τ. Lemaire (1995, str. 166–175) sestavi tudi optimalne bonus-malus sisteme za druge porazdelitve števila škod, a ugotovi, da se bistveno ne razlikujejo od negativnega binomskega modela. Poleg tega pri analiziranju posplošenega mešanega Poissonovega modela ugotovi, da je za zavarovance z visoko škodno pogostnostjo *a posteriori* porazdelitev števila škod približno negativno binomska, kar dodatno podpre uporabo tega modela. Morillo in Bermúdez (2003) izpeljeta optimalni bonus-malus sistem za Poisson-inverzno Gaussov model, Boucher in Denuit (2008) pa za model z inflacijo ničel.

Pri določitvi optimalnega bonus-malus sistema lahko uporabimo različne funkcije izgube $\mathcal{L}$. Funkcija izgube mora biti nenegativna, ker moramo kaznovati obe napaki, previsoko in prenizko premijo. Poleg tega navadno predpostavljamo, da je izguba zavarovalnice naraščajoča funkcija napake v oceni škodne pogostnosti λ. Večja, ko je napaka pri oceni škodne pogostnosti (tj. razlika med dejansko škodno pogostnostjo λ in ocenjeno škodno pogostnostjo $\Psi(k_1, \ldots, k_t)$), večja bi morala biti vrednost funkcije izgube $\mathcal{L}$. Če je napaka pri oceni pozitivna, zavarovalnica zaračunava prenizko premijo in ima izgubo. Pri negativni napaki pri oceni je premija previsoka in ima zavarovalnica dobiček. V tem primeru zavarovalnica tvega, da druga zavarovalnica bolj realno oceni tveganje zavarovanca, zaradi česar zavarovanec zamenja zavarovalnico. Potem pride do nasprotne selekcije, pri kateri zavarovalnici ostanejo le slabši zavarovanci in mora posledično premijo višati, s čimer dobrih zavarovancev ne more privabiti. Da bi večje napake bolj kaznovali, predpostavimo, da je funkcija izgube konveksna funkcija napake pri oceni.

Navadno se za funkcijo izgube uporabi kvadratno ali eksponentno funkcijo. Glavna prednost kvadratne funkcije izgube je enostavnost računanja. Lemaire (1995, str. 183) uporabi poleg kvadratne in eksponentne tudi nekaj drugih funkcij izgube, a pri nobeni ne dobi finančno uravnoteženega bonus-malus sistema. V nadaljevanju bomo izpeljali optimalni bonus-malus sistem za omenjeni funkciji izgube, kvadratno in eksponentno.

5.1.1 Kvadratna funkcija izgube

Najbolj klasična izbira funkcije izgube je *kvadratna funkcija izgube*, definirana kot

$$\mathcal{L}(x) = x^2.$$

Trditev 5.1.1 *Minimum*

$$E\left((\Lambda - \Psi(N_1, \ldots, N_t))^2\right) \tag{14}$$

po vseh merljivih funkcijah $\Psi : \mathbb{N}^t \to \mathbb{R}$ *je dosežen pri*

$$\Psi_{quad}(N_1, \ldots, N_t) = E(\Lambda | N_1, \ldots, N_t).$$

Dokaz 5.1.2 *Dokažimo kot Bermúdez et al. (2001) in računajmo*

$$\begin{aligned} E\left(\left(\Lambda - \Psi(\overline{N})\right)^2\right) &= E\left(\left(\Lambda - \Psi_{quad}(\overline{N}) + \Psi_{quad}(\overline{N}) - \Psi(\overline{N})\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(\Lambda - \Psi_{quad}(\overline{N})\right)^2\right) + E\left(\left(\Psi_{quad}(\overline{N}) - \Psi(\overline{N})\right)^2\right), \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je

$$\begin{aligned} & E\left((\Lambda - \Psi_{quad}(\overline{N}))(\Psi_{quad}(\overline{N}) - \Psi(\overline{N}))\right) \\ = \ & E\left(E\left((\Lambda - \Psi_{quad}(\overline{N}))(\Psi_{quad}(\overline{N}) - \Psi(\overline{N}))|\overline{N}\right)\right) \\ = \ & E\left((\Psi_{quad}(\overline{N}) - \Psi(\overline{N}))E(\Lambda - \Psi_{quad}(\overline{N})|\overline{N})\right) = 0. \end{aligned}$$

Minimum izraza (14) *je torej dosežen, ko je* $\Psi \equiv \Psi_{quad}$. $\square$

Pri uporabi kvadratne funkcije izgube mora torej zavarovalnica zavarovancem zaračunati nevarnostno premijo, enako njihovi pričakovani škodni pogostnosti glede na preteklo škodno dogajanje.

Uporabimo sedaj predpostavko negativnega binomskega modela in neodvisnosti števila škod zavarovancev pri znani škodni pogostnosti ter računajmo kot Lemaire (1995, str. 160). Označimo $k = \sum_{i=1}^{t} k_i$ in računamo

$$\begin{aligned} p(k_1, \ldots, k_t|\lambda) &= \prod_{i=1}^{t} p(k_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{t} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k_i}}{k_i!} = \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{k_1! \cdots k_t!} \\ p(k_1, \ldots, k_t) &= \int_0^\infty p(k_1, \ldots, k_t|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{k_1! \cdots k_t!} \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda}\lambda^{a-1}}{\Gamma(a)} d\lambda \\ &= \frac{\tau^a \Gamma(a+k)}{\Gamma(a)(\tau+t)^{a+k} k_1! \ldots k_t!}. \end{aligned}$$

Iz zgornjih enačb in Bayesove enakosti (12) sledi

$$\begin{aligned} f_{\Lambda|\overline{N}}(\lambda|\overline{k}) &= \frac{p(\overline{k}|\lambda) f_\Lambda(\lambda)}{p(\overline{k})} = \frac{\frac{e^{-t\lambda}\lambda^{k}}{k_1! \cdots k_t!} \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda}\lambda^{a-1}}{\Gamma(a)}}{\frac{\tau^a \Gamma(a+k)}{\Gamma(a)(\tau+t)^{a+k} k_1! \ldots k_t!}} \\ &= \frac{(\tau+t)^{a+k} e^{-(\tau+t)\lambda} \lambda^{a+k-1}}{\Gamma(a+k)}, \end{aligned}$$

kar je ravno gostota gama porazdelitve s parametroma $a + k$ in $\tau + t$. Torej je slučajna spremenljivka $\Lambda|\overline{N} = \overline{k}$ gama porazdeljena in je po Klugman et al. (2004, str. 636) njeno matematično upanje enako

$$\Psi_{quad}(k_1, \ldots, k_t) = E(\Lambda|N_1 = k_1, \ldots, N_t = k_t) = \frac{a+k}{\tau+t}. \tag{15}$$

Iz zgornjega izraza vidimo, da je višina premije v kredibilnostnem modelu odvisna le od skupnega števila škod k v zadnjih t letih, ne pa od porazdelitve števila škod po zavarovalnih letih. Tej lastnosti realni bonus-malus sistem ne more zadostiti, ker je premija v bonus-malus sistemu običajno omejena navzgor in je zato za zavarovanca vedno bolje zgostiti vse škode v enem letu, kot pa imeti škodo vsakih nekaj let (Lemaire, 1995, str. 163).

Enakost (15) lahko zapišemo tudi kot

$$\Psi_{quad}(k_1, \ldots, k_t) = \rho_{quad}\frac{k}{t} + (1 - \rho_{quad})\frac{a}{\tau}, \text{ kjer je } \rho_{quad} = \frac{t}{t+\tau},$$

torej je premija linearna kombinacija *a priori* premije $\frac{a}{\tau}$ in *a posteriori* premije $\frac{k}{t}$. Faktor $\frac{a}{\tau}$ predstavlja *a priori* določeno premijo, ki je enaka za vse zavarovance, faktor $\frac{k}{t}$ pa je popravek *a priori* določene premije glede na izkušnje s posameznim zavarovancem. Optimalni bonus-malus sistem v negativnem binomskem modelu pri uporabi kvadratne funkcije izgube sovpada s kredibilnostno formulo, definirano na začetku podpoglavja (Bermúdez et al., 2001). Kredibilnostni faktor ρ_{quad} glede na izkušnje raste od 0 za $t = 0$, do 1, ko gre $t \to \infty$. Za nove zavarovance je $t = 0$ in vsi plačajo enako premijo, $\frac{a}{\tau}$. Ko pa pošljemo $t \to \infty$, torej ko zavarovanca spremljamo že dolgo časa, gre njegova premija $\Psi_{quad}(k_1, \ldots, k_t) \to \frac{k}{t}$, torej sčasoma postane enaka lastnemu tveganju zavarovanca. Varianca premije $var(\Lambda|\overline{N} = \overline{k}) = \frac{a+k}{(\tau+t)^2}$ gre proti 0, ko gre $t \to \infty$, s čimer je konvergenca proti limiti zagotovljena. Dolgoročno gledano bodo torej vsi zavarovanci plačali premijo, enako svojemu tveganju (Lemaire, 1995, str. 163).

Gigante, Picech in Sigalotti (2000) pravijo, da se mora pomen *a priori* določenega dela premije manjšati s časom, saj pridobivamo več in več informacij o individualnih lastnostih zavarovanca, dokler ne postane premija povsem odvisna od *a posteriori* dela premije. Posledično imajo v optimalnem bonus-malus sistemu zavarovanci z enako škodno pogostnostjo in različno *a priori* oceno tveganja sčasoma enako premijo.

Zelo zaželena lastnost bonus-malus sistemov je finančna uravnoteženost, o kateri smo razpravljali že v razdelku 4.6. Lemaire (1995, str. 161) zapiše zahtevo po finančni uravnoteženosti bonus-malus sistema kot

$$E\left(\Psi(N_1, \ldots, N_t)\right) = E(\Lambda).$$

Optimalni bonus-malus sistem, dobljen s kvadratno funkcijo izgube, je finančno uravnotežen, ker zaradi verižne lastnosti pogojne verjetnosti velja

$$E\left(\Psi_{quad}(N_1, \ldots, N_t)\right) = E\left(E(\Lambda|N_1, \ldots, N_t)\right) = E(\Lambda).$$

Finančna uravnoteženost pomeni, da vpeljava bonus-malus sistema nima vpliva na letno premijo zavarovalnice ob ohranitvi enake izhodiščne premije (Denuit & Dhaene, 2001). Tej lastnosti bonus-malus sistem zadošča šele v stacionarnem stanju, v prehodnem času pa je potrebno za dosego finančne uravnoteženosti uporabiti tehnike, predstavljene v podpoglavju 4.6. Opazovani bonus-malus sistemi niso finančno uravnoteženi, saj imajo stacionarno povprečno relativno premijo manjšo od 100 %.

Sestavimo torej optimalni bonus-malus sistem s kvadratno funkcijo izgube. Pri tem predpostavimo v 3. poglavju določena parametra negativne binomske porazdelitve $a = 1,4658$ in $\tau = \frac{a}{\lambda} = 20,94$, kjer je privzeta povprečna škodna pogostnost $\lambda = 7$ %.

Sedaj nas zanima, kako se glede na kumulativno število škod spreminja premija zavarovanca po letih. Zavarovalna premija se izračuna po enačbi (15). Ker je v tej enačbi na začetku premija enaka $\frac{a}{\tau}$, za boljšo primerjavo optimalnega bonus-malus sistema z dejanskim postavimo začetno zavarovalno premijo na 100 % in torej računamo

$$\frac{(a+k)/(\tau+t)}{a/\tau} = \frac{\tau(a+k)}{a(\tau+t)}.$$

V Tabeli 12 prikazujemo odstotke začetne *a priori* določene premije v optimalnem bonus-malus sistemu pri predpostavki kvadratne funkcije izgube in negativnega binomskega modela s škodno pogostnostjo $\lambda = 7$ %. Zavarovanec ob vstopu v bonus-malus sistem plačuje 100 % začetne premije. Po enem letu se mu premija v primeru brezškodnega leta zniža na $95,44$ %, v primeru ene škode pa mora plačevati $160,55$ % začetne premije. Po dveh letih v primeru dveh brezškodnih let plačuje $91,28$ %, v primeru ene škode v preteklih dveh letih pa $153,56$ % začetne premije itn.

Tabela 12: Optimalni bonus-malus sistem pri kvadratni funkciji izgube za $\lambda = 7$ % (v %)

Leto	**Kumulativno število škod**				
	0	1	2	3	4
0	100,00				
1	95,44	160,55	225,67	290,78	355,89
2	91,28	153,56	215,83	278,10	340,38
3	87,47	147,14	206,81	266,49	326,16
4	83,96	141,24	198,52	255,80	313,08
5	80,72	135,80	190,87	245,94	301,01
6	77,73	130,76	183,78	236,81	289,84
7	74,95	126,08	177,21	228,34	279,47

Poudarimo še enkrat, da v tabeli optimalnega bonus-malus sistema prikazujemo razmerje med začetno premijo in premijo po določenem številu škod v opazovanem časovnem obdobju in ne relativnih premij. Ker je dobljeni optimalni bonus-malus sistem finančno uravnotežen, je uteženo povprečje deležev premij v vsakem opazovanem letu enako 100 %. Optimalni bonus-malus sistem ni primerljiv z bonus-malus sistemi, opazovanimi v prejšnjem poglavju, saj je v teh sistemih povprečna relativna premija nižja od 100 %. Za primerjanje opazovanih bonus-malus sistemov moramo množiti optimalni bonus-malus sistem s povprečno relativno premijo primerjanega bonus-malus sistema.

Poglejmo še učinek višje škodne pogostnosti na optimalni bonus-malus sistem. Povečanje škodne pogostnosti $\lambda = \frac{a}{\tau}$ pri nespremenjenem parametru a pomeni zmanjšanje parametra τ. Od tod sledi, da se za enak t vrednost $\rho_{quad} = \frac{t}{\tau+t}$ poviša, kar pomeni, da se pri višji škodni pogostnosti v optimalnem bonus-malus sistemu poveča vpliv individualnega škodnega dogajanja na premijo. To je smiselno, saj *a priori* slabši vozniki potrebujejo večje popuste v primeru brezškodnega dogajanja in manjše maluse v primeru škod. Denuit et al. (2007, str. 133) pravijo, da je v primeru višje povprečne škodne pogostnosti bonus-malus sistem manj strog, ker se za tako skupino zavarovancev že *a priori* pričakuje veliko škod, zaradi česar je že osnovna premija naravnana višje. Popusti za zavarovance brez prijavljenih škod se povečujejo z *a priori* pričakovano škodno pogostnostjo, kazni pa se manjšajo. Več škod ko zavarovalnica pričakuje glede na *a priori* spremenljivke, večji je popust v primeru brezškodnega dogajanja. *A priori* slabi vozniki imajo veliko tudi *a posteriori* pričakovano škodno pogostnost, saj je toliko manjša verjetnost za brezškodno dogajanje.

V Tabeli 13 prikazujemo optimalni bonus-malus sistem pri kvadratni funkciji izgube na enak način kot v prejšnji tabeli, le da upoštevamo višjo škodno pogostnost, in sicer $\lambda = 10$ %. Parameter a ohranimo enak kot prej, torej $a = 1,4658$. Če primerjamo Tabeli 12 in 13, vidimo, da je pri višji škodni pogostnosti optimalni bonus-malus sistem manj strog, torej so bonusi v primeru brezškodnega dogajanja večji in malusi v primeru škod manjši.

Tabela 13: Optimalni bonus-malus sistem pri kvadratni funkciji izgube za $\lambda = 10$ % (v %)

Leto	**Kumulativno število škod**				
	0	1	2	3	4
0	100,00				
1	93,61	157,48	221,34	285,21	349,07
2	87,99	148,02	208,06	268,09	328,12
3	83,01	139,64	196,27	252,91	309,54
4	78,56	132,16	185,75	239,35	292,95
5	74,57	125,43	176,30	227,17	278,04
6	70,96	119,36	167,77	216,18	264,59
7	67,68	113,85	160,02	206,20	252,37

Lemaire (1995, str. 166) pri predpostavljenih parametrih belgijskega portfelja izpelje optimalni bonus-malus sistem za Belgijo. Belgijski bonus-malus sistem ima bonus-malus lestvico zelo podobno tisti iz prvega stolpca Tabele 13, saj so belgijski parametri precej podobni parametrom uporabljenim za to tabelo (leta 1996 je bila povprečna škodna pogostnost v Belgiji 10,11 %). Vendar pa, kot izpostavlja avtor, belgijski bonus-malus sistem uporablja bistveno blažje kazni v primeru škode kot optimalni bonus-malus sistem. Z enakimi bonusi in manjšimi malusi v primerjavi z optimalnim bonus-malus sistemom dobimo finančno neuravnotežen bonus-malus sistem. Optimalni bonus-malus sistem je precej strog, saj dobi zavarovanec v primeru škode 50 % do 75 % kazen, kar pa je v praksi težko implementirati. Malusi optimalnega bonus-malus sistema so zaradi zahteve po finančni uravnoteženosti previsoki, da bi bili tržno sprejemljivi. Finančna uravnoteženost namreč pomeni, da morajo velike kazni manjšine zavarovancev izravnati skromne popuste večine zavarovancev. Strogost sistema lahko vidimo tudi v številu brezškodnih let, potrebnih za izničitev kazni, ki jo zavarovanec dobi zaradi škode, in je 12 let za zavarovanca s 7 % škodno pogostnostjo in 10 let za tistega z 10 % škodno pogostnostjo. Visoka dolžina obdobja, potrebnega za izničitev malusa, je smiselna, saj v portfelju z 10 % povprečno škodno pogostnostjo pričakujemo, da povprečen zavarovanec vsakih deset let prijavi škodo.

5.1.2 Eksponentna funkcija izgube

Ko zavarovalnica določi premijo, lahko nastopita dve napaki: izračunana premija je bodisi prenizka in ima zavarovalnica izgubo bodisi previsoka in zavarovalnica tvega izgubo zavarovanca. Premija, dobljena s kvadratno funkcijo izgube, minimizira vsoto kvadratov napak pri oceni, torej pozitivne in negativne napake obravnava na enak način. Morillo in Bermúdez (2003) izpostavita, da s kvadratno funkcijo izgube pridemo do optimalnega bonus-malus sistema, ki ima tržno nesprejemljivo visoke maluse v primeru škode. Z vidika zavarovancev in zavarovalnice je v konkurenčnem okolju zaračunavanje previsoke premije bolj problematično, zato se zavarovalnice osredotočijo na strategijo, ki bolj kaznuje previsoko premijo kot pa prenizko. Uporaba asimetrične funkcije izgube zmanjša maluse na račun zmanjšanja bonusov. Ker so realne škodne pogostnosti majhne, razmeroma veliko zmanjšanje malusov povzroči razmeroma majhno zmanjšanje bonusov. Skupina slabih zavarovancev je tako majhna, da je dovolj, da dobrim zavarovancem čisto malo zvišamo premijo, da jo lahko slabim bistveno znižamo (Lemaire, 1995, str. 198). Denuit et al. (2007, str. 149–155) ter Morillo in Bermúdez (2003) kot primerno asimetrično funkcijo izgube predlagajo eksponentno funkcijo.

Eksponentno funkcijo izgube definiramo z

$$\mathcal{L}(x) = e^{-cx},\ c \geq 0.$$

Tako definirana funkcija $\mathcal{L}$ je asimetrična in bolj kaznuje negativne vrednosti x. Pri določanju optimalnega bonus-malus sistema minimiziramo izraz (13), torej $\mathcal{L}(\Lambda - \Psi(\overline{N}))$. Eksponentna funkcija izgube bolj kaznuje previsoko zaračunano premijo, torej ko je $\Lambda < \Psi(\overline{N})$.

Trditev 5.1.3 *Minimum $E\left(e^{-c\left(\Lambda-\Psi(\overline{N})\right)}\right)$ po vseh merljivih funkcijah $\Psi : \mathbb{N}^t \to \mathbb{R}$ pri pogoju finančne uravnoteženosti, torej $E\left(\Psi(\overline{N})\right) = E(\Lambda)$, je dosežen pri*

$$\Psi_{exp}(\overline{N}) = E(\Lambda) + \frac{1}{c}\left(E\left(\log E(e^{-c\Lambda}|\overline{N})\right) - \log E\left(e^{-c\Lambda}|\overline{N}\right)\right). \tag{16}$$

Dokaz 5.1.4 *Dokažimo kot Denuit in Dhaene (2001) ter Bermúdez et al. (2001). Najprej izračunajmo*

$$\begin{aligned} e^{c\Psi_{exp}(\overline{N})} &= \frac{e^{cE(\Lambda)}e^{E\left(\log E(e^{-c\Lambda}|\overline{N})\right)}}{E\left(e^{-c\Lambda}|\overline{N}\right)} \quad \textit{in} \\ E\left(\Psi(\overline{N}) - \Psi_{exp}(\overline{N})\right) &= E\left(\Psi(\overline{N})\right) - E\left(\Psi_{exp}(\overline{N})\right) \\ &= E(\Lambda) - E(\Lambda) - \frac{1}{c}E\left(E\left(\log E(e^{-c\Lambda}|\overline{N})\right) - \log E\left(e^{-c\lambda}|\overline{N}\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

pri čemer smo pri drugem izračunu upoštevali pogoj finančne uravnoteženosti. Potem lahko pišemo

$$\begin{aligned} E\left(e^{-c(\Lambda-\Psi(\overline{N}))}\right) &= E\left(E\left(e^{-c(\Lambda-\Psi(\overline{N}))}|\overline{N}\right)\right) = E\left(e^{c\left(\Psi(\overline{N})-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)}e^{c\Psi_{exp}(\overline{N})}E\left(e^{-c\Lambda}|\overline{N}\right)\right) \\ &= E\left(e^{c\left(\Psi(\overline{N})-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)}e^{cE(\Lambda)}e^{E\left(\log E(\exp(-c\Lambda)|\overline{N})\right)}\right) \\ &= e^{cE(\Lambda)}e^{E\left(\log E(\exp(-c\Lambda)|\overline{N})\right)}E\left(e^{c\left(\Psi(\overline{N})-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)}\right). \end{aligned}$$

Po Jensenovi neenakosti velja $E(e^X) \geq e^{E(X)}$, zato velja

$$\begin{aligned} E\left(e^{-c\left(\Lambda-\Psi(\overline{N})\right)}\right) &\geq e^{cE(\Lambda)}e^{E\left(\log E(\exp(-c\Lambda)|\overline{N})\right)}e^{cE\left(\Psi(\overline{N})-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)} \\ &= e^{cE(\Lambda)}e^{E\left(\log E(e^{-c\Lambda}|\overline{N})\right)} = E\left(e^{c\Psi_{exp}(\overline{N})}E\left(e^{-c\Lambda}|\overline{N}\right)\right) \\ &= E\left(E\left(e^{-c\left(\Lambda-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)}|\overline{N}\right)\right) = E\left(e^{-c\left(\Lambda-\Psi_{exp}(\overline{N})\right)}\right). \end{aligned}$$

Sledi, da je minimum izraza (16) *dosežen pri $\Psi \equiv \Psi_{exp}$.* $\square$

Pri negativnem binomskem modelu je

$$E(e^{-c\Lambda}|\overline{N}=\overline{k}) = \int_0^\infty e^{-c\lambda}\frac{(\tau+t)^{a+k}\lambda^{a+k-1}e^{-\lambda(\tau+t)}}{\Gamma(a+k)}d\lambda = \left(\frac{\tau+t}{\tau+t+c}\right)^{a+k},$$

od koder sledi, da je minimum eksponentne funkcije izgube dosežen, ko je

$$\begin{aligned}\Psi_{exp}(k_1,\ldots,k_t) &= \frac{a}{\tau}+\frac{k\tau-at}{c\tau}\log\left(1+\frac{c}{\tau+t}\right)\\ &= \frac{k}{t}\rho_{exp}+\frac{a}{\tau}(1-\rho_{exp}),\ \text{ kjer je }\ \rho_{exp}=\frac{t}{c}\log\left(\frac{\tau+t+c}{\tau+t}\right),\end{aligned}$$

torej je nevarnostna premija tudi pri eksponentni funkciji izgube linearna kombinacija *a priori* pričakovane škodne pogostnosti in *a posteriori* popravka premije. Tudi v primeru uporabe eksponentne funkcije izgube pri negativnem binomskem modelu optimalni bonus-malus sistem sovpada s kredibilnostno formulo, pri čemer je ρ_{exp} kredibilnostni faktor (Bermúdez et al., 2001). Ker pri $x \geq 0$ velja $\log(1+x) \leq x$, lahko hitro preverimo, da velja

$$\rho_{exp} = \frac{t}{c}\log\left(1+\frac{c}{\tau+t}\right) \leq \frac{t}{t+\tau} = \rho_{quad},$$

kar pomeni, da ima pri kvadratni funkciji izgube *a posteriori* popravek premije $\frac{k}{t}$ večjo utež kot pri eksponentni funkciji izgube in smo z eksponentno funkcijo izgube dobili blažji bonus-malus sistem (Bermúdez et al., 2001).

Z nekaj računanja pokažemo, da je

$$\lim_{c\to 0}\rho_{exp} = \rho_{quad},\ \ \lim_{c\to\infty}\rho_{exp} = 0\ \text{ in }\ \frac{d}{dc}\rho_{exp} < 0,$$

kar pomeni, da kredibilnostni faktor ρ_{exp} s parametrom c pada od ρ_{quad} proti 0. Večji ko je faktor asimetrije c, manj je strogo *a posteriori* popravljanje premije. Ko gre $c \to \infty$, premija ni več odvisna od prijavljenih škod, saj vsi zavarovanci v enem premijskem razredu plačajo enako premijo in premije ne določamo več *a posteriori*. Ko pa gre $c \to 0$, dajemo preteklim škodam toliko teže kot pri kvadratni funkciji izgube.

Eksponentna funkcija izgube je asimetrična, pri čemer parameter c odraža stopnjo asimetričnosti, torej odraža, kako strog je popravek premije zaradi izkušenj. Premija, dobljena z eksponentno funkcijo izgube, ohranja finančno uravnoteženost bonus-malus sistema, saj je

$$E\left(\Psi_{exp}(\overline{N})\right) = E(\Lambda).$$

Z eksponentno funkcijo izgube lahko omilimo *a posteriori* popravke premije v primeru škod, pri čemer ohranimo finančno uravnoteženost (Denuit et al., 2007, str. 155). Ta funkcija izgube daje več uteži napakam, izhajajočim iz previsoko zaračunane premije, kot pa tistim, ki pridejo iz prenizko zaračunane premije. Iz tega razloga so malusi v tako pridobljenih optimalnih bonus-malus sistemih manjši, bonusi pa zaradi zahteve po finančni stabilnosti prav tako (Denuit et al., 2007, str. 194).

V Tabeli 14 prikazujemo optimalni bonus-malus sistem za zavarovalnico s povprečno škodno pogostnostjo 7 % in parametrom a negativne binomske porazdelitve, enakim $a = 1,4658$, pri eksponentni funkciji izgube za $c = 10$. Pri tem podobno kot pri kvadratni funkciji izgube v tabeli niso prikazane vrednosti $\Psi_{exp}(\overline{k})$, pač pa normirane vrednosti, torej

$$\frac{\Psi_{exp}(\overline{k})}{a/\tau} = 1 + \frac{k\tau - at}{ac} \log\left(1 + \frac{c}{\tau + t}\right).$$

Opazimo, da so pri eksponentni funkciji izgube v Tabeli 14 v primerjavi s kvadratno iz Tabele 12, ki je ekvivalentna eksponentni funkciji izgube za $c = 0$, tako bonusi kot malusi manjši. Bonusi so se pri višjem parametru c pomanjšali bistveno manj kot malusi.

Tabela 14: Optimalni bonus-malus sistem pri eksponentni funkciji izgube za $c = 10$, $\lambda = 7$ % (v %)

Leto	**Kumulativno število škod**				
	0	1	2	3	4
0	100,00				
1	96,24	149,89	203,54	257,19	310,84
2	92,76	144,45	196,14	247,82	299,51
3	89,53	139,39	189,26	239,12	288,98
4	86,51	134,68	182,84	231,01	279,18
5	83,70	130,28	176,86	223,44	270,02
6	81,06	126,16	171,25	216,35	261,45
7	78,58	122,29	166,00	209,70	253,41

Če škodno pogostnost λ povečamo, se enako kot pri kvadratni funkciji izgube parameter τ zmanjša, kredibilnostni faktor $\rho_{exp} = \frac{t}{c}\log(1 + \frac{c}{t+\tau})$ pa se pri nespremenjenih vrednostih parametrov t in c poveča. Enako kot pri kvadratni funkciji izgube se torej tudi pri eksponentni funkciji izgube v kredibilnostni formuli za določitev premije utež individualnemu škodnemu dogajanju zavarovanca pri večji škodni pogostnosti poveča. Za višjo škodno pogostnost torej dobimo manj strog bonus-malus sistem z večjimi bonusi in manjšimi malusi. V Tabeli 15 vidimo optimalni bonus-malus sistem pri višji škodni pogostnosti in enakem c kot v Tabeli 14, torej $\lambda = 10$ % in $c = 10$.

Denuit in Dhaene (2001) kot glavno prednost določanja optimalnega bonus-malus sistema z eksponentno funkcijo navajata svobodo pri določanju strogosti bonus-malus sistema z enim samim parametrom. Parameter $c > 0$ določa strogost bonus-malus sistema. Več teže daje napaki iz previsoko zaračunane premije kot tisti iz prenizke premije. Posledično so bonusi in malusi v tako pridobljenih optimalnih bonus-malus sistemih nižji. Manjši ko je c, bolj je optimalni bonus-malus sistem strog.

Tabela 15: Optimalni bonus-malus sistem pri eksponentni funkciji izgube za $c = 10$, $\lambda = 10$ % (v %)

Leto	Kumulativno število škod				
	0	1	2	3	4
0	100,00				
1	95,06	144,45	193,84	243,22	292,61
2	90,60	137,62	184,64	231,66	278,68
3	86,54	131,41	176,28	221,16	266,03
4	82,83	125,75	168,67	211,58	254,50
5	79,44	120,56	161,69	202,81	243,94
6	76,31	115,79	155,27	194,75	234,23
7	73,43	111,39	149,35	187,31	225,27

5.1.3 Upoštevanje višine škod

Večina bonus-malus sistemov pri prehajanju med premijskimi razredi v bonus-malus sistemu upošteva zgolj število prijavljenih škod in ne njihove višine. Ta sistem ni pošten do zavarovancev v mestu, ki sicer povzročajo večje število škod, a je njihova višina bistveno nižja od višine tistih, ki jih povzročijo zavarovanci, ki živijo na podeželju. Poleg tega se je znesek izplačanih škod kljub padcu števila škod povečal, kar pomeni, da višina škod raste, škodna pogostnost pa pada (Datamonitor, 2006, str. 73). V tem razdelku bomo pokazali, kako poleg števila škod pri prehajanju zavarovancev med razredi upoštevamo tudi višino škode.

Lemaire (1995, str. 205) predlaga dva načina za ločevanje škod glede na njihovo višino, in sicer glede na mejni znesek ter glede na vrsto škode.

Če kot dejavnik prehoda v bonus-malus sistemu poleg števila škod upoštevamo višino škode glede na mejni znesek, ločimo majhne škode, katerih višina je nižja od mejnega zneska, in velike škode, katerih višina je višja od mejnega zneska. Ker pa ob prijavi škode njene končne višine ne poznamo in jo težko ocenimo, ob naslednji sklenitvi zavarovanja tudi težko določimo bonus-malus razred zavarovanca glede na višino škode. Poleg tega bi se škode višine okoli mejnega zneska obnašale nenavadno zaradi želje zavarovancev po bonusu.

Pinquet (1997) sestavi optimalni bonus-malus sistem, ki poleg števila škod upošteva tudi višino izplačanih škod. Ugotovi, da sta višina škode in škodna pogostnost pozitivno korelirani, a je na primeru francoskih podatkov korelacija zelo šibka. Zavarovanci, ki prijavijo več škod, imajo torej v povprečju tudi višje škode. Avtor primerja model, v katerem pri prehajanju zavarovancev med bonus-malus razredi upoštevamo število škod, in model, v katerem upoštevamo višino škod. Ugotovi, da v drugem modelu traja dlje, da postanejo pri določanju premije *a posteriori* škodne izkušnje pomembnejše od *a priori* znanih lastnosti. Frangos in Vrontos (2001) razvijeta optimalni bonus-malus sistem, ki upošteva poleg števila škod in višine izplačanih škod tudi *a priori* diferenciacijo. O optimalnih bonus-malus sistemih, ki upoštevajo *a priori* diferenciacijo, bomo razpravljali v naslednjem razdelku. Višina škod v bonus-malus sistemu je za zavarovalnico po mnenju avtorjev pomembnejša kot število škod, saj je to tisti dejavnik, ki določa odhodke zavarovalnice in s tem tudi višino premije. Poleg tega imajo zavarovanci v bonus-malus sistemu, ki upošteva višino škod, možnost prijaviti manjše škode, s čimer se želja po bonusu zmanjša, torej je škodna pogostnost prijavljenih škod bolj podobna škodni pogostnosti povzročenih nesreč. Bonsdorff (2005) pri prehodih med razredi v bonus-malus sistemu upošteva število škod in kumulativni znesek škod preteklih let, pri čemer ne dela z razrednim, pač pa z zveznim bonus-malus sistemom.

Drugi možni način ločevanja škod glede na njihovo višino je, da škode razdelimo na več vrst, pri čemer imajo različne vrste škod v povprečju različne višine. Pri tem lahko škode na vrste razdelimo na različne načine. Lemaire (1995, str. 205) predlaga delitev na tiste škode, ki se nanašajo zgolj na premoženjsko škodo (v nadaljevanju *materialne škode*), in tiste, ki vsebujejo tudi škodo na osebah (v nadaljevanju *nematerialne škode*). Ker je višina nematerialnih škod navadno bistveno višja od višine materialnih, se zdi smiselno, da bi bolj kaznovali zavarovance, ki povzročijo nematerialno škodo. Datamonitor (2006, str. 73) na primer kot glavni razlog za to, da zneski izplačanih škod rastejo kljub padanju števila škod, navaja rast povprečne škode za škode na osebah. Poleg tega so navadno zavarovalne vsote za škodo na osebah višje kot zavarovalne vsote za škodo na stvareh, kar kaže na to, da je pričakovana višina povprečne škode na prvi skupini škod višja od pričakovane višine škode na drugi skupini škod (Wieduwilt & Grünig, 2002). Ker zavarovalnica navadno že ob prijavi škode ve, ali gre tudi za škodo na osebah ali ne, je problem določanja bonus-malus razreda ob naslednji sklenitvi, če pri prehodu upoštevamo ti dve vrsti škode, bistveno manjši, kot če upoštevamo mejni znesek. Poleg tega je razlikovanje med materialnimi in nematerialnimi škodami precej natančno opredeljeno, medtem ko pri razlikovanju z mejnim zneskom naletimo še na problem določanja mejnega zneska.

Avtorji predlagajo tudi druge vrste škod poleg ločevanja materialnih in nematerialnih, o čemer smo razpravljali v podpoglavju 2.3. Pitrebois et al. (2006c) ločujejo med škodami z delno in polno odgovornostjo. To ločevanje pozna francoski bonus-malus sistem, ki dovoljuje zmanjšano kazen za zavarovanca, ki je le delno odgovoren za nastanek škode. Pinquet (1998) predlaga razlikovanje med povzročenimi in nepovzročenimi škodami, ki naj bi bile pozitivno korelirane med seboj. Tako razlikovanje pride v poštev na primer v Franciji, kjer poravnava odgovornostnih škod v avtomobilskih zavarovanjih poteka na tak način, da za škodo izvesta zavarovalnici obeh strank v nesreči, povzročitelja in oškodovanca. Ravno tako smo omenili primer Massachusettsa (ZDA), kjer pri *a posteriori* določanju premije ne upoštevajo zgolj števila prijavljenih škod, temveč tudi število povzročenih in nepovzročenih škod zavarovanca ter njegove kršitve cestno prometnih predpisov.

V tem razdelku bomo kot Lemaire (1995, str. 205) izpeljali optimalni bonus-malus sistem, pri čemer bomo kot dejavnik prehoda zavarovancev med bonus-malus razredi upoštevali število materialnih in nematerialnih škod.

Ko ločujemo škode na materialne in nematerialne, posebej modeliramo število teh dveh tipov škod. Označimo z Υ slučajno spremenljivko škodne pogostnosti nematerialnih škod. Privzemimo kot Lemaire (1995, str. 206), da je število nematerialnih škod $\Upsilon|\Lambda = \lambda$ beta porazdeljeno s parametroma β_1 in β_2, torej je

$$f_{\Upsilon|\Lambda}(\upsilon|\lambda) = \frac{(\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_1-1}(1-\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_2-1}}{\lambda B(\beta_1,\beta_2)}$$

za $\upsilon \in (0,\lambda)$. Potem lahko izračunamo matematično upanje slučajne spremenljivke $\Upsilon|\Lambda = \lambda$ kot

$$E(\Upsilon|\Lambda=\lambda) = \int_0^\lambda x\frac{(\frac{x}{\lambda})^{\beta_1-1}(1-\frac{x}{\lambda})^{\beta_2-1}}{\lambda B(\beta_1,\beta_2)}dx = \lambda\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},$$

torej je delež nematerialnih škod enak $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}$. Pri predpostavki gama porazdelitve škodne pogostnosti vseh škod Λ je potem gostota slučajnega vektorja (Λ,Υ)

$$\begin{aligned} f_{\Lambda,\Upsilon}(\lambda,\upsilon) &= f_{\Upsilon|\Lambda}(\upsilon|\lambda)f_\Lambda(\lambda) = \frac{(\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_1-1}(1-\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_2-1}}{\lambda B(\beta_1,\beta_2)}\frac{\tau^a\lambda^{a-1}e^{-\lambda\tau}}{\Gamma(a)} \\ &= \frac{\tau^a}{\Gamma(a)B(\beta_1,\beta_2)}e^{-\tau\lambda}\lambda^{a-\beta_1-1}\upsilon^{\beta_1-1}\left(1-\frac{\upsilon}{\lambda}\right)^{\beta_2-1}. \end{aligned}$$

Označimo s K_i slučajno spremenljivko števila nematerialnih škod, z N_i slučajno spremenljivko števila vseh škod v i-tem letu opazovanja za $i = 1,\ldots,t$ in $\overline{K} = (K_1,\ldots,K_t)$ ter $\overline{N} = (N_1,\ldots,N_t)$. Predpostavimo, da je število nematerialnih škod $K_i|[N_i = n_i, \Lambda = \lambda, \Upsilon = \upsilon]$ binomsko porazdeljeno s parametroma n_i in $\frac{\upsilon}{\lambda}$, torej je

$$p_{K_i|[N_i,\Lambda,\Upsilon]}(k_i|n_i,\lambda,\upsilon) = \binom{n_i}{k_i}\left(\frac{\upsilon}{\lambda}\right)^{k_i}\left(1-\frac{\upsilon}{\lambda}\right)^{n_i-k_i} \text{ za } i=1,\ldots,t.$$

Pri znanih škodnih pogostnostih so spremenljivke K_i, enako kot N_i, med seboj neodvisne za $i = 1,\ldots,t$. Označimo $\overline{k} = (k_1,\ldots,k_t)$, $\overline{n} = (n_1,\ldots,n_t)$, $k = \sum_{i=1}^t k_i$ in $n = \sum_{i=1}^t n_i$ ter izračunajmo *a posteriori* gostoto slučajne spremenljivke Υ po t letih opazovanja kot

$$\begin{aligned} f_{\Upsilon|[\Lambda,\overline{N},\overline{K}]}(\upsilon|\lambda,\overline{n},\overline{k}) &= \frac{p_{\overline{K}|[\overline{N},\Lambda,\Upsilon]}(\overline{k}|\overline{n},\lambda,\upsilon)f_{\Upsilon|[\Lambda,\overline{N}]}(\upsilon|\lambda,\overline{n})}{p_{\overline{K}|[\overline{N},\Lambda]}(\overline{k}|\overline{n},\lambda)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^t\binom{n_i}{k_i}(\frac{\upsilon}{\lambda})^{k_i}(1-\frac{\upsilon}{\lambda})^{n_i-k_i}\frac{(\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_1-1}(1-\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_2-1}}{\lambda B(\beta_1,\beta_2)}}{\int_0^\lambda\prod_{i=1}^t\binom{n_i}{k_i}(\frac{\xi}{\lambda})^{k_i}(1-\frac{\xi}{\lambda})^{n_i-k_i}\frac{(\frac{\xi}{\lambda})^{\beta_1-1}(1-\frac{\xi}{\lambda})^{\beta_2-1}}{\lambda B(\beta_1,\beta_2)}d\xi} \\ &= \frac{(\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_1+k-1}(1-\frac{\upsilon}{\lambda})^{\beta_2+n-k-1}}{\lambda B(\beta_1+k,\beta_2+n-k)}, \end{aligned}$$

torej je slučajna spremenljivka $\Upsilon|[\Lambda,\overline{N},\overline{K}]$ beta porazdeljena s parametroma β_1+k in β_2+n-k. Potem je pri predpostavki kvadratne funkcije izgube *a posteriori* pričakovano število nematerialnih škod v časovni točki $t+1$ enako

$$E(\Upsilon|\Lambda=\lambda,\overline{N}=\overline{n},\overline{K}=\overline{k}) = \frac{\beta_1+k}{\beta_1+\beta_2+n}\lambda = \left((1-\rho^c_{quad})\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}+\rho^c_{quad}\frac{k}{n}\right)\lambda, \quad (17)$$

kjer je kredibilnostni faktor enak $\rho^c_{quad} = \frac{n}{\beta_1+\beta_2+n}$. Pričakovano število nematerialnih škod je torej linearna kombinacija *a priori* deleža števila nematerialnih škod in popravka zaradi dejanskega deleža nematerialnih škod zavarovanca. Pri $t = 0$, ko zavarovanci vstopijo v sistem in z njimi še nimamo škodnih izkušenj, vsi dobijo enak popravek premije za nematerialne škode, $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}$. Ko pa gre $t \to \infty$, gre pričakovani delež nematerialnih škod proti lastnemu deležu zavarovanca, $\frac{k}{n}$.

Opazimo, da je enačba (17) neodvisna od parametra t, torej se *a posteriori* pričakovani delež nematerialnih škod spremeni le, če je prijavljena nova škoda, s časom pa se ne spreminja.

Pogojno na število vseh škod sta število materialnih in število nematerialnih škod negativno korelirani. Denuit et al. (2007, str. 260–264) v portfelju, ki ga obravnava, ugotovi, da sta škodna pogostnost materialnih škod in škodna pogostnost nematerialnih škod pozitivno korelirani, kar pomeni, da več ko je prijavljenih škod enega tipa, več lahko pričakujemo škod drugega tipa. Torej sta število materialnih in nematerialnih škod pogojno glede na število vseh škod negativno korelirani, nepogojno pa pozitivno korelirani.

Vzemimo optimalni bonus-malus sistem iz Tabele 12, torej tistega, dobljenega s kvadratno funkcijo izgube. Če želimo v optimalnem bonus-malus sistemu upoštevati tudi višino škod, moramo v sistem vpeljati število nematerialnih škod k. Potem elemente navadnega bonus-malus sistema množimo z normirano pričakovano škodno pogostnostjo nematerialnih škod, torej

$$\frac{(a+n)/(\tau+t)}{a/\tau}\frac{(\beta_1+k)/(\beta_1+\beta_2+n)}{\beta_1/(\beta_1+\beta_2)}.$$

V Tabeli 16 prikazujemo tako dobljeni optimalni bonus-malus sistem, torej delež premije, ki ga mora plačati zavarovanec, ki je imel v zadnjih t letih n škod, od katerih je bilo k nematerialnih, glede na premijo, plačano v prvem letu. Pri tem predpostavimo, da ima zavarovanec 7 % škodno pogostnost. Parameter β_1 vzamemo enako kot Lemaire (1995, str. 208), in sicer $\beta_1 = 1,34$, za izračun drugega parametra beta porazdelitve pa upoštevamo 8 % delež nematerialnih škod (Pitrebois et al., 2006c) in dobimo $\beta_2 = 15,39$.

Tabela 16: Optimalni bonus-malus sistem, ki upošteva višino škod, za $\lambda = 7$ % (v %)

Leto		**Število vseh (*n*) in nematerialnih škod (*k*)**									
	n	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2
	k	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
0		100									
1		95	151	202	247	287	265	352	431	502	503
2		91	145	193	236	275	253	337	412	480	481
3		87	139	185	226	263	243	323	395	460	461
4		84	133	177	217	253	233	310	379	441	442
5		81	128	170	209	243	224	298	364	424	425
6		78	123	164	201	234	216	287	351	409	409
7		75	119	158	194	226	208	277	338	394	395

Iz Tabele 16 vidimo, da je v optimalnem bonus-malus sistemu, ki upošteva višino škod, delež premije v primeru brezškodnega dogajanja zavarovanca enak kot v Tabeli 12, kjer višina škod ni upoštevana kot dejavnik prehoda. Malusi za materialno škodo so nižji, kot bi bili v bonus-malus sistemu, ki višine škod ne upošteva. Malusi za nematerialne škode so po drugi strani bistveno višji od malusov v navadnem bonus-malus sistemu. Če primerjamo stolpec za $n = 1$ in $k = 1$ s stolpci za $k = 0$, vidimo, da so malusi v primeru ene nematerialne škode ekvivalentni malo manj kot štirim materialnim škodam. Malus za eno nematerialno škodo bi moral biti torej enak malusu za štiri materialne škode. Lemaire (1995, str. 210) pride do podobnega rezultata in to utemeljuje s tem, da je višina nematerialnih škod toliko višja od višine materialnih.

Višja škodna pogostnost ima na optimalni bonus-malus sistem, ki upošteva višino škod, enak učinek kot na tistega, ki višine škod ne upošteva. *A posteriori* popravek premije, ki se nanaša na nematerialno škodo $\frac{\beta_1+k}{\beta_1+\beta_2+n}$, je namreč od škodne pogostnosti λ neodvisen. V Tabeli 17 prikazujemo enak optimalni bonus-malus sistem pri višji škodni pogostnosti, in sicer $\lambda = 10$ %. S primerjavo Tabel 16 in 17 vidimo, da je učinek višanja škodne pogostnosti enak kot pri primerjavi Tabel 12 in 13, torej so pri višji škodni pogostnosti bonusi večji in malusi manjši.

Tabela 17: Optimalni bonus-malus sistem, ki upošteva višino škod, za $\lambda = 10$ % (v %)

Leto		**Število vseh (*n*) in nematerialnih škod (*k*)**									
	n	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2
	k	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2
0		100									
1		94	149	198	242	282	260	345	423	492	493
2		88	140	186	227	265	244	325	397	463	464
3		83	132	175	214	250	230	306	375	436	437
4		79	125	166	203	236	218	290	355	413	414
5		75	118	157	193	224	207	275	337	392	393
6		71	113	150	183	214	197	262	320	373	374
7		68	107	143	175	204	188	250	305	356	357

Na enak način kot Lemaire (1995) obravnava razlikovanje med materialnimi in nematerialnimi škodami, lahko obravnavamo tudi dve drugi vrsti škod. Če bi obravnavali več kot dve vrsti škod, Lemaire (1995) predlaga posplošitev z Dirichletovo porazdelitvijo. Posplošen primer razlikovanja med več kot dvema vrstama škod v okviru kredibilnostne teorije obravnava Pinquet (1998).

5.1.4 Integriran bonus-malus sistem

Navadno *a priori* in *a posteriori* spremenljivke obravnavamo kot neodvisne. Tako v prejšnjem delu poglavja definiran optimalni bonus-malus sistem predpostavlja, da imajo vsi zavarovanci v portfelju enako *a priori* škodno pogostnost in da do razlik v škodnih pogostnostih pride zgolj zaradi individualnih škodnih pogostnosti. Izhodiščna premija je funkcija *a priori* faktorjev, bonus-malus koeficienti pa so odvisni zgolj od zgodovine prijavljenih škod. Izhodiščna premija torej variira med vnaprej določenimi premijskimi razredi, potem pa glede na preteklo škodno dogajanje uporabimo enake bonus-malus koeficiente za vse vnaprej določene premijske razrede (Bermúdez et al., 2001).

Oglejmo si za primer zavarovanca A, ki živi v mestu, in zavarovanca B, ki živi na podeželju, pri čemer imata oba enako škodno pogostnost. Ker imajo zavarovanci, ki živijo v mestu, v povprečju višjo škodno pogostnost, ima zavarovanec A na začetku zavarovanja zaradi kraja bivanja višjo *a priori* premijo, zavarovanec B pa nižjo. Oba sta enako dobra voznika, zato pri enakem škodnem dogajanju sčasoma oba prideta v isti bonus-malus razred, a zavarovanec A ves čas plačuje višjo premijo kot zavarovanec B. *A posteriori* popravek premije je namreč za oba voznika enak in zavarovancema premije ne izenači. Poleg tega zavarovancu A premija pada z enakim bonus-malus koeficientom kot zavarovancu B, čeprav smo nižjo škodno pogostnost zavarovanca B upoštevali že pri *a priori* premiji (Lemaire, 1995, str. 177).

Z bonus-malus sistemom želimo premijo popraviti glede na preteklo škodno dogajanje, da bi zmanjšali preostalo heterogenost v *a priori* določenih premijskih razredih. Če pa pri sestavi bonus-malus sistema *a priori* segmentacije ne upoštevamo, dvakrat kaznujemo slabe voznike in nagradimo dobre. Zavarovanci, ki ob sklenitvi zavarovanja dobijo *a priori* popuste, so nagrajeni tudi *a posteriori*, ker zasedajo nižje razrede bonus-malus sistema. Obratno se zavarovanci, ki so kaznovani ob sklenitvi, tudi *a posteriori* zbirajo v višjih razredih in so posledično dvojno kaznovani (Bermúdez et al., 2001).

Celovit pristop k določanju cene avtomobilskih zavarovanj bi moral naenkrat upoštevati vse spremenljivke, tako *a priori* kot *a posteriori* (Lemaire, 1995, str. 177). Pravičen bonus-malus sistem bi moral upoštevati diferenciacijo glede na preteklo škodno dogajanje, a le dokler ta diferenciacija ni zajeta že v izhodiščni premiji. Bonus-malus razred lahko delno pojasnimo že z lastnostmi, ki so vključene v premijski cenik. Pošteno bi bilo, da bi ločili *a posteriori* diferenciacijo, torej bonus-malus sistem, od *a priori* diferenciacije (Taylor, 1997).

A priori klasifikacijo bi torej morali dopolniti z *a posteriori* informacijami. Če obeh korakov diferenciacije ne integriramo v enotni model, lahko pride do nekonsistentnosti. Dionne in Vanasse (1989) predstavita bonus-malus sistem, ki upošteva *a priori* in *a posteriori* informacije posameznega zavarovanca, in v Poissonov model uvedeta regresijsko komponento, da bi pri oceni škodne pogostnosti uporabila vse informacije, ki so na voljo. V enotni model združita *a priori* in *a posteriori* diferenciacijo in se s tem znebita nekaj problemov v zvezi z nekonsistentnostjo.

Uvedimo regresijsko komponento v Poissonov in negativno binomski model kot Dionne in Vanasse (1989). Uvedba regresijske komponente je del *a priori* diferenciacije. Ker je mnogokrat omenjena v literaturi, jo tu zapišemo eksplicitno, a se podrobneje z njo ne bomo ukvarjali.

Privzemimo, da pri *a priori* diferenciaciji upoštevamo m spremenljivk. Zavarovance lahko glede na vrednosti teh spremenljivk razdelimo v I *a priori* razredov, pri čemer imajo zavarovanci v i-tem *a priori* razredu vrednosti *a priori* spremenljivk enake $A_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})^T$, $i = 1, \ldots, I$. *A priori* škodno pogostnost zavarovanca *a priori* tipa i lahko zapišemo z uvedbo regresijske komponente kot $e^{A_i^T \kappa}$, kjer smo s κ označili vektor koeficientov, ki ga lahko določimo na primer z metodo največjega verjetja. Dionne in Vanasse (1989) sta pokazala, da se negativni binomski model z regresijsko komponento bolje prilega podatkom kot model brez regresijske komponente.

Bermúdez et al. (2001) ugotovijo, da je kljub uporabi Poissonovega regresijskega modela prileganje podatkom še vedno slabo, če ne upoštevamo *a posteriori* informacij. Z vidika zavarovalnice so zavarovanci v posameznem *a priori* razredu med seboj enaki, vendar pa tudi znotraj teh razredov ostaja heterogenost. V regresijsko komponento zato dodamo slučajno spremenljivko, ki meri vpliv *a posteriori* informacij na škodno pogostnost. Ločimo torej *a priori* predvideno škodno pogostnost in nepojasnjeni del ter zapišemo škodno pogostnost zavarovanca *a priori* tipa i kot

$$\Lambda_i = e^{A_i^T \kappa}\Theta,$$

kjer je Θ slučajna spremenljivka *a priori* nepojasnjene škodne pogostnosti. Pri tem smo predpostavili, da imajo vsi zavarovanci v portfelju enako porazdelitev *a priori* nepojasnjenega dela škodne pogostnosti Θ.

Predpostavimo, da je tako kot prej število škod zavarovanca *a priori* tipa i, torej slučajna spremenljivka $N_i|\Theta = \theta$, porazdeljena Poissonovo s parametrom $e^{A_i^T \kappa}\theta$ in da je Θ gama porazdeljena s parametroma (a, a). Označimo $\eta_i = e^{A_i^T \kappa}$ in računamo

$$\begin{aligned} P(N_i = k) &= \int_0^\infty P(N_i = k|\Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-\eta_i \theta}(\eta_i \theta)^k}{k!} \frac{a^a \theta^{a-1} e^{-\theta a}}{\Gamma(a)} d\theta \\ &= \binom{a+k-1}{a-1} \left(\frac{a}{a+\eta_i}\right)^a \left(\frac{\eta_i}{a+\eta_i}\right)^k. \end{aligned}$$

Porazdelitev tako definirane slučajne spremenljivke N_i je torej enaka kot v definiciji (3) pri $\tau = \frac{a}{\eta_i}$ in enakem a. Sledi torej, da je pri tej parametrizaciji slučajna spremenljivka N_i porazdeljena negativno binomsko s parametroma a in $\frac{a}{\eta_i}$.

Ker je Θ gama porazdeljena s parametroma (a, a), je $E(\Theta) = 1$ in $var(\Theta) = \frac{1}{a}$. Enakost $E(\Theta) = 1$ in neodvisnost *a priori* škodne pogostnosti η_i ter *a posteriori* popravka Θ nam zagotavlja, da je

$$E(N_i) = E\left(E(N_i|\Theta)\right) = E(\eta_i \Theta) = \eta_i,$$

kar pomeni, da z uvedbo slučajne spremenljivke Θ ohranimo pričakovano število škod po *a posteriori* diferenciaciji enako tistemu *a priori* in je pričakovana *a posteriori* škodna pogostnost enaka tisti, pričakovani *a priori*. Z varianco $var(\Theta) = \frac{1}{a}$ lahko kvantificiramo stopnjo heterogenosti znotraj *a priori* razredov, in sicer večji ko je parameter a, bolj so razredi homogeni.

Ločili smo torej *a priori* in *a posteriori* del škodne pogostnosti. Optimalnemu bonus-malus sistemu, ki upošteva *a priori* diferenciacijo, pravimo *integriran optimalni bonus-malus sistem* (angl. *integrated ratemaking*). Glede na zgornjo notacijo je slučajna spremenljivka Θ ocena *a posteriori* tveganja zavarovanca, katere matematično upanje je enako 1, kar pomeni, da je slučajna spremenljivka Θ "resnična" relativna premija.

Podobno kot v prejšnjih dveh podpoglavjih izpeljimo najboljšo oceno škodne pogostnosti i-tega zavarovanca v časovni točki $t+1$, pri čemer poznamo njegovo preteklo škodno dogajanje $\overline{N}_i = (N_{i1}, \ldots, N_{it})$. Ker se *a priori* določene spremenljivke zavarovanca lahko z leti spreminjajo, označimo kot Bermúdez et al. (2001) z $I_i(j)$ *a priori* razred, v katerem se zavarovanec v letu j nahaja, $j = 1, \ldots, t$. Privzamemo lahko neodvisnost med škodnim dogajanjem različnih zavarovancev, torej neodvisnost slučajnih vektorjev $\overline{N}_i$ za različne i, ne pa neodvisnosti znotraj posameznega slučajnega vektorja $\overline{N}_i$. Spremenljivke $N_{i1}, \ldots, N_{it}$ ne morejo biti neodvisne med seboj, ker bi bila sicer *a posteriori* diferenciacija nesmiselna. Če pa popolnoma poznamo lastnosti zavarovanca, torej njegovo individualno škodno pogostnost, postane spremenljivka Θ deterministična in so $N_{ij}|\Theta = \theta$ neodvisne med seboj za $j = 1, \ldots, t$. Kot smo ugotovili prej, so slučajne spremenljivke $N_{ij}|\Theta = \theta$ Poissonovo porazdeljene s parametrom $\eta_{I_i(j)}\theta$, slučajne spremenljivke N_{ij} pa negativno binomsko s parametroma a in $\frac{a}{\eta_{I_i(j)}}$.

Označimo s $\overline{k}_i = (k_{i1}, \ldots, k_{it})$ dejansko škodno dogajanje i-tega zavarovanca, $k_i = \sum_{j=1}^t k_{ij}$ in $\eta_{(i)} = \sum_{j=1}^t \eta_{I_i(j)}$. Potem lahko za tega zavarovanca izračunamo gostoto

$$
\begin{aligned}
f_{\Theta|\overline{N}_i}(\theta|\overline{k}_i) &= \frac{P(\overline{N}_i = \overline{k}_i|\Theta = \theta) f_\Theta(\theta)}{P(\overline{N}_i = \overline{k}_i)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^t \frac{e^{-\eta_{I_i(j)}\theta}(\eta_{I_i(j)}\theta)^{k_{ij}}}{k_{ij}!} \frac{a^a \theta^{a-1} e^{-\theta a}}{\Gamma(a)}}{\int_0^\infty \prod_{j=1}^t \frac{e^{-\eta_{I_i(j)}\xi}(\eta_{I_i(j)}\xi)^{k_{ij}}}{k_{ij}!} \frac{a^a \xi^{a-1} e^{-\xi a}}{\Gamma(a)} d\xi} \\
&= \frac{e^{-\theta(\eta_{(i)}+a)} \theta^{a+k_i-1} (\eta_{(i)} + a)^{a+k_i}}{\Gamma(a + k_i)}.
\end{aligned}
$$

Sledi, da je slučajna spremenljivka $\Theta|\overline{N}_i = \overline{k}_i$ gama porazdeljena s parametroma $a + k_i$ in $\eta_{(i)} + a$.

Iz trditve 5.1.1 sledi, da je za zavarovanca i pri kvadratni funkciji izgube minimum izraza

$$
E\left(\left(\Lambda_i - \Psi(\overline{N}_i)\right)^2 |\overline{N}_i = \overline{k}_i\right)
$$

po vseh merljivih funkcijah $\Psi : \mathbb{N}^t \to \mathbb{R}$ dosežen pri

$$
\begin{aligned}
\Psi_{quad}^{int}(k_{i1}, \ldots, k_{it}) &= E(\Lambda_i|\overline{N}_i = \overline{k}_i) = \eta_{I_i(t+1)} E(\Theta|\overline{N}_i = \overline{k}_i) \\
&= \eta_{I_i(t+1)} \frac{a + k_i}{a + \eta_{(i)}} = \eta_{I_i(t+1)} \left(\rho_{quad}^{int} \frac{k_i}{\eta_{(i)}} + (1 - \rho_{quad}^{int}) \times 1\right), \quad (18)
\end{aligned}
$$

kjer je $\rho_{quad}^{int} = \frac{\eta_{(i)}}{a+\eta_{(i)}}$. *A posteriori* premija zavarovanca i v časovni točki $t+1$ je torej enaka produktu *a priori* določene izhodiščne premije $\eta_{I_i(t+1)}$ in bonus-malus faktorja.

Večja ko je varianca Θ, torej manjši ko je parameter a, večji je ρ_{quad}^{int} in s tem večja utež za preteklo škodno dogajanje zavarovanca. Poleg tega ρ_{quad}^{int} narašča z $\eta_{(i)}$, kar pomeni, da večja ko je bila pretekla *a priori* določena škodna pogostnost, večja bo utež preteklemu škodnemu dogajanju. Po drugi strani je za zelo majhen $\eta_{(i)}$ tudi ρ_{quad}^{int} zelo majhen in je zato bonus-malus faktor približno enak 1, kar pomeni, da je *a posteriori* premija približno enaka *a priori* premiji. *A priori* slabši zavarovanci imajo torej v integriranem bonus-malus sistemu pri določanju premije večji poudarek preteklemu škodnemu dogajanju (Bermúdez et al., 2001).

Na enak način kot za kvadratno funkcijo izgube lahko za i-tega zavarovanca pri eksponentni funkciji izgube kot posledico trditve 5.1.3 izpeljemo minimum matematičnega upanja

$$
E\left(e^{-c(\Lambda_i - \Psi(\overline{N}_i))}|\overline{N}_i = \overline{k}_i\right) \quad (19)
$$

po vseh merljivih funkcijah $\Psi : \mathbb{N}^t \to \mathbb{R}$ pri pogoju finančne uravnoteženosti. Ker je slučajna spremenljivka $\Theta|\overline{N}_i = \overline{k}_i$ gama porazdeljena, je

$$\begin{aligned} E(e^{-c\Lambda_i}|\overline{N}_i = \overline{k}_i) &= \int_0^\infty e^{-c\eta_{I_i(t+1)}\xi} \frac{(a+\eta_{(i)})^{a+k_i}\xi^{a+k_i-1}e^{-\xi(a+\eta_{(i)})}}{\Gamma(a+k_i)} d\xi \\ &= \left(\frac{a+\eta_{(i)}}{a+\eta_{(i)}+c\eta_{I_i(t+1)}}\right)^{a+k_i}. \end{aligned}$$

Potem lahko izračunamo

$$\begin{aligned} E\left(\log E\left(e^{-c\Lambda_i}|\overline{N}_i\right)\right) &= E\left((a+\sum_{j=1}^t N_{ij})\log\frac{a+\eta_{(i)}}{a+\eta_{(i)}+c\eta_{I_i(t+1)}}\right) \\ &= (a+\eta_{(i)})\log\frac{a+\eta_{(i)}}{a+\eta_{(i)}+c\eta_{I_i(t+1)}}. \end{aligned}$$

Sedaj lahko funkcijo Ψ, pri kateri je dosežen minimum izraza (19), zapišemo kot Denuit et al. (2007, str. 151), in sicer

$$\begin{aligned} \Psi_{exp}^{int}(k_{i1},\ldots,k_{it}) &= E(\Lambda_i) + \frac{1}{c}\left(E\left(\log E\left(e^{-c\Lambda_i}|\overline{N}_i\right) - \log E\left(e^{-c\Lambda_i}|\overline{N}_i = \overline{k}_i\right)\right)\right) \\ &= \eta_{I_i(t+1)} + \frac{k_i-\eta_{(i)}}{c}\log\left(1+\frac{c\eta_{I_i(t+1)}}{a+\eta_{(i)}}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

torej je *a posteriori* premija $\Psi_{exp}^{int}(\overline{k}_i)$ enaka *a priori* premiji $\eta_{I_i(t+1)}$, povečani za korekcijski člen. Ta korekcijski člen je pozitiven, ko je $k_i > \eta_{(i)}$, torej se premija poviša, ko zavarovanec prijavi več škod, kot smo jih pričakovali.

Definirajmo kot Denuit et al. (2007, str. 152) utež, dano preteklemu škodnemu dogajanju k_i v enakosti (20), z

$$\rho_{exp}^{int} = \frac{1}{c}\log\left(1+\frac{c\eta_{I_i(t+1)}}{a+\eta_{(i)}}\right).$$

Izračunamo lahko, da velja

$$\lim_{c\to 0}\rho_{exp}^{int} = \frac{\eta_{I_i(t+1)}}{a+\eta_{(i)}},\quad \lim_{c\to\infty}\rho_{exp}^{int} = 0 \text{ in } \frac{d}{dc}\rho_{exp}^{int} < 0.$$

Iz prve limite sledi, da je

$$\lim_{c\to 0}\Psi_{exp}^{int}(\overline{k}_i) = \Psi_{quad}^{int}(\overline{k}_i),$$

iz druge pa

$$\lim_{c\to\infty}\Psi_{exp}^{int}(\overline{k}_i) = \eta_{I_i(t+1)}.$$

S povečevanjem parametra c se torej utež preteklemu škodnemu dogajanju zmanjšuje tudi pri integriranem bonus-malus sistemu.

Primerjajmo sedaj zavarovanca i in j, za $i \neq j$, pri čemer ima prvi nižjo *a priori* škodno pogostnost, torej je $E(\Lambda_i) < E(\Lambda_j)$ in $\eta_{(i)} < \eta_{(j)}$. Gigante et al. (2000) izpeljejo, da potem pri enakem preteklem škodnem dogajanju zavarovancev $\overline{k}_i = \overline{k}_j$ velja

$$\frac{a+k_i}{a+\eta_{(i)}} > \frac{a+k_j}{a+\eta_{(j)}}.$$

Iz (18) in zgornje neenakosti sledi, da se pri kvadratni funkciji izgube pri *a priori* nižji škodni pogostnosti premija vsako leto popravi za višji faktor. To pomeni, da bo v primeru brezškodnega dogajanja zavarovanec z *a priori* nižjo pričakovano škodno pogostnostjo dobil manjši popust, v primeru škod pa bo dobil večji malus kot zavarovanec z višjo *a priori* škodno pogostnostjo. Če bi imela oba tipa zavarovancev enako *a priori* premijov časovni točki $t+1$, torej če bi veljalo $\eta_{I_i(t+1)} = \eta_{I_j(t+1)}$, bi bila premija zavarovanca j nižja kot premija zavarovanca i. Enako velja v primeru eksponentne funkcije izgube.

Poleg tega lahko kot Gigante et al. (2000) ugotovimo, da prej omenjena zavarovanca i in j pri enakem škodnem dogajanju sčasoma prideta do enake premije. V primeru kvadratne funkcije izgube namreč velja

$$\frac{\Psi_{quad}^{int}(\overline{k}_i)}{\Psi_{quad}^{int}(\overline{k}_j)} = \frac{\eta_{I_i(t+1)}\frac{a+k_i}{a+\eta_{(i)}}}{\eta_{I_j(t+1)}\frac{a+k_j}{a+\eta_{(j)}}} = \frac{\eta_{I_i(t+1)}}{\eta_{I_j(t+1)}}\frac{a+\eta_{(j)}}{a+\eta_{(i)}} = \frac{\eta_{I_i(t+1)}}{\eta_{I_j(t+1)}}\frac{a+\sum_{l=1}^{t}\eta_{I_j(l)}}{a+\sum_{l=1}^{t}\eta_{I_i(l)}}. \tag{21}$$

Smiselno lahko predpostavimo, da se količnik $\eta_{I_i(t+1)}/(a+\sum_{l=1}^{t}\eta_{I_i(l)})$ obnaša kot $1/t$, kar pomeni, da se $\eta_{I_i(t)}$ v odvisnosti od t spreminja s faktorjem, manjšim od t ($\eta_{I_i(t)} < O(t)$). Potem razmerje (21) konvergira proti 1, ko gre $t \to \infty$, kar pomeni, da bosta imela zavarovanca različnih tipov z enako škodno zgodovino sčasoma enako premijo, česar pri navadnem bonus-malus sistemu ne dosežemo. Enako bi lahko pokazali za eksponentno funkcijo izgube.

Bermúdez et al. (2001) ugotovijo, da upoštevanje *a priori* diferenciacije v optimalnem bonus-malus sistemu zmanjša tako bonuse kot maluse. Del heterogenosti smo namreč upoštevali v *a priori* diferenciaciji, zaradi česar je preostala heterogenost manjša in mora biti *a posteriori* diferenciacija blažja. V integriranem bonus-malus sistemu so pri *a priori* boljših voznikih bonusi manjši kot pri slabših, vendar imajo zaradi bistveno nižje izhodiščne premije boljši vozniki kljub temu vedno nižjo premijo. Bonus za *a priori* boljše voznike mora biti vedno manjši od bonusa *a priori* slabših voznikov in obratno za maluse. Lemaire (1995, str. 179) to ponazori na primeru zavarovanca A, ki živi v mestu, in zavarovanca B, ki živi na podeželju. Zavarovanec A v integriranem bonus-malus sistemu začne z višjo premijo kot v navadnem, a se njegova premija v primeru brezškodnega dogajanja niža mnogo hitreje. Zavarovanec B ima po drugi strani na začetku nižjo premijo, ki pa glede na preteklo škodno dogajanje pada počasneje kot v navadnem bonus-malus sistemu. Bonus-malus lestvici za ta dva zavarovanca se obnašata enako kot v primeru različnih škodnih pogostnosti, o čemer smo razpravljali pri primerjavi Tabel 12 in 13.

Denuit et al. (2007, str. 189) povzamejo, da

- ko uporabljamo samo *a priori* diferenciacijo, mora biti *a posteriori* diferenciacija manj stroga;
- ko uporabljamo tako *a priori* kot tudi *a posteriori* diferenciacijo, mora biti bonus za dobre voznike vedno manjši od bonusa za slabe voznike.

Pri integriranem optimalnem bonus-malus sistemu ima vsaka vrsta zavarovancev glede na *a priori* spremenljivke drugačen bonus-malus sistem. Ta pristop zahteva predvsem mnogo podatkov.

Pri negativnem binomskem modelu za določitev optimalnega bonus-malus sistema zadoščata povprečje in varianca portfelja, pri uvedbi regresijske komponente in integriranega bonus-malus sistema pa poleg tega potrebujemo še individualne lastnosti zavarovanca. Poleg tega je potrebna informacijska podpora, ki takšen bonus-malus sistem omogoča (Lemaire, 1995, str. 180). Pri tem moramo upoštevati, da je prezapleten bonus-malus sistem manj razumljiv in za zavarovalnice v konkurenčnem smislu nima prave dodane vrednosti, če zavarovanci ne razumejo njegovega pomena.

Denuit et al. (2007, str. 190) predlagajo uporabo več bonus-malus lestvic glede na *a priori* lastnosti zavarovancev. Pri tem predlagajo, da izberemo le nekaj pomembnejših *a priori* lastnosti, iz katerih sledijo večje razlike v škodni pogostnosti, in glede na te lastnosti zgradimo različne bonus-malus sisteme. Starost na primer je pogosto vključena v *a priori* diferenciacijo, kar zviša premijo za mlade voznike. Poleg *a priori* doplačila morajo mladi vstopiti v bonus-malus lestvico precej nad povprečnim razredom. Vstopni bonus-malus razred je torej dodatno implicitno doplačilo za nove voznike, ki ga lahko izračunamo s formulo $\frac{b_{i_0}-\pi(\lambda)}{\pi(\lambda)}$ (Lemaire, 1995, str. 64). Boucher in Denuit (2006) sta pokazala, da je razred mladih voznikov zelo heterogen. Večina škod, ki jih prijavijo mladi vozniki, je namreč skoncentrirana na le nekaj polic. Avtorja namesto visoke *a priori* premije za mlade voznike predlagata primerno bonus-malus lestvico, s katero bi dosegli pravičnejšo premijo. Denuit et al. (2007, str. 293–295) predlagajo dva načina, kako lahko ta pojav upoštevamo s pomočjo integriranega bonus-malus sistema:

- upoštevamo heterogenost tega razreda in v prvih letih pri mladih voznikih uporabimo strožja prehodna pravila v obstoječem bonus-malus sistemu;
- mlade voznike najprej umestimo v poseben sistem popustov za brezškodno dogajanje, v katerem je vsako brezškodno leto nagrajeno z enim razredom bonusa, vsaka škoda pa povzroči skok v začetni, najvišji razred. Ko mladi vozniki pridejo do najnižjega razreda tega posebnega sistema, jih pošljemo v navaden bonus-malus sistem na njihov stacionarni povprečni nivo.

5.2 Optimalne relativne premije bonus-malus sistema

V kredibilnostnih modelih premijo izračunamo tako, da upoštevamo škodno zgodovino posameznega zavarovanca in celotnega portfelja zavarovalnice. V predhodnih poglavjih smo izpeljali kredibilnostne formule (15), (16), (18) in (20) za *a posteriori* oceno tveganja zavarovanca. Ker povprečnemu zavarovancu v kredibilnostnem modelu ni zlahka razvidno, kako so bonusi in malusi določeni in kakšna bo drugo leto njegova premija, če škodo prijavi ali ne, so se razvili bonus-malus sistemi (Antonio & Valdez, 2011). Pitrebois et al. (2003c) izpostavijo, da kredibilnostne formule v praksi za določanje premije ne moremo uporabiti predvsem zaradi komercialnih razlogov, včasih pa tudi regulatornih. Bonus-malus sistemi so tržna poenostavitev kredibilnostne teorije.

Glavna razlika med kredibilnostno formulo in bonus-malus sistemom je, da kredibilnostna formula vsakemu zavarovancu določi premijo glede na njegovo celotno škodno zgodovino, v bonus-malus sistemu pa zavarovanec prehaja med razredi glede na preteklo škodno dogajanje. Za določitev bonus-malus sistema potrebujemo poleg kredibilnostnih formul še število razredov in prehodna pravila. Relativna premija je v bonus-malus lestvici analogna teoretičnim bonus-malus koeficientom iz kredibilnostne teorije (Brouhns et al., 2003).

Brouhns et al. (2003) navedejo določene pomanjkljivosti bonus-malus sistemov v primerjavi s kredibilnostnimi modeli. Prva je, da se, ker bonus-malus sistemi niso dovolj strogi, zavarovanci začnejo sčasoma zgoščati v najnižjih razredih bonus-malus lestvice. Poleg tega bonus-malus sistemi ne obravnavajo vseh škod na enak način, saj so bonus-malus lestvice omejene navzgor. Zavarovancu se vedno bolj splača prijaviti vse škode v enem letu, kot pa jih porazdeliti po letih. Boucher in Denuit (2008) sta na primeru podatkov španske zavarovalnice pokazala, da so zavarovanci, ki prijavijo vse škode v enem zavarovalnem letu, slabši vozniki kot tisti, ki prijavljajo škode v različnih zavarovalnih obdobjih.

Norberg (1976) prvi predstavi idejo, kako določiti optimalne relativne premije bonus-malus sistema pri kvadratni funkciji izgube. Coene in Doray (1996) izpeljeta analitične formule za relativne premije pri kvadratni funkciji izgube, Taylor (1997) pa poleg tega pri določitvi optimalnih relativnih premij prvi upošteva še integriran bonus-malus sistem. Pitrebois et al. (2003c) Taylorjevo delo nadaljujejo in izpeljejo analitične formule za določitev optimalnih relativnih premij integriranega bonus-malus sistema. Z eksponentno funkcijo izgube v navadnem bonus-malus sistemu optimalne relativne premije izpeljeta Denuit in Dhaene (2001), v integriranem bonus-malus sistemu pa Denuit et al. (2007).

V tem podpoglavju bomo predstavili, kako določiti optimalne relativne premije integriranega bonus-malus sistema, in pokazali, kakšne so optimalne relativne premije opazovanih bonus-malus sistemov.

5.2.1 Izpeljava optimalnih relativnih premij

Povzemimo izpeljavo optimalnih relativnih premij bonus-malus sistema v stacionarnem stanju po Pitrebois et al. (2003c). Označimo z $L(\lambda)$ slučajno spremenljivko, ki meri bonus-malus razred zavarovanca s škodno pogostnostjo λ, ko je bonus-malus sistem v stacionarnem stanju. Potem je $P(L(\lambda) = l) = \ell_{\infty l}(\lambda)$. Imejmo enako kot v 5.1.4. razdelku I *a priori* razredov in označimo z ω_i delež zavarovancev v i-tem *a priori* razredu. Označimo z L bonus-malus razred naključnega zavarovanca v portfelju, ko je bonus-malus sistem v stacionarnem stanju. Če enako kot v prejšnjem razdelku razdelimo škodno pogostnost zavarovanca v i-tem *a priori* razredu na *a priori* predvideno škodno pogostnost η_i in preostalo škodno pogostnost zavarovanca Θ, ki ima matematično upanje enako 1, potem z bonus-malus sistemom dejansko želimo oceniti slučajno spremenljivko Θ. Potem je v skladu z notacijo iz razdelka 5.1.4

$$P(L = l) = \sum_{i=1}^{I} \omega_i \int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i \theta) f_\Theta(\theta) d\theta,$$

pri čemer spomnimo, da je η_i škodna pogostnost zavarovanca v i-tem *a priori* razredu. Izpeljemo lahko

$$f_{\Theta|L=l}(\theta) = \frac{P(L=l|\Theta=\theta)f_\Theta(\theta)}{P(L=l)} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\omega_i\ell_{\infty l}(\eta_i\theta)f_\Theta(\theta)}{\sum_{i=1}^{I}\omega_i\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i\xi)f_\Theta(\xi)d\xi}. \tag{22}$$

Norberg (1976) definira, da so pri kvadratni funkciji izgube optimalne relativne premije tiste, ki minimizirajo matematično upanje kvadrata razlike med *a posteriori* delom škodne pogostnosti Θ in relativno premijo r_L slučajnega zavarovanca, torej ki minimizirajo izraz

$$E\left((\Theta - r_L)^2\right) = \sum_{l=1}^{s} E\left((\Theta - r_L)^2|L=l\right)P(L=l).$$

Rešitev zgornje enačbe izpeljemo podobno kot pri v prejšnjih poglavjih izpeljanih kredibilnostnih formulah in dobimo

$$\begin{aligned} r_l^{quad} &= E(\Theta|L=l) = \int_0^\infty \theta f_{\theta|L=l}(\theta)d\theta \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{I}\omega_i\int_0^\infty \theta\ell_{\infty l}(\eta_i\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{\sum_{i=1}^{I}\omega_i\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i\xi)f_\Theta(\xi)d\xi}. \end{aligned} \tag{23}$$

Zaradi verižne lastnosti pogojne verjetnosti je $E(r_l^{quad}) = 1$, od koder sledi finančna uravnoteženost dobljenega bonus-malus sistema. Vpeljava bonus-malus sistema z optimalnimi relativnimi premijami r_l^{quad} torej nima vpliva na letno premijo zavarovalnice.

Za razliko od prejšnjega podpoglavja sedaj ne izpeljujemo optimalnega bonus-malus sistema s kredibilnostno formulo, pač pa določamo optimalne relativne premije bonus-malus sistema s podanim številom razredov in pravili prehajanja med razredi. Dobljena optimalna relativna premija (23) je primerljiva s faktorjem $\frac{a+k_i}{a+\eta_{(i)}}$ iz enačbe (18), torej s faktorjem, s katerim smo pomnožili *a priori* premijo v kredibilnostni formuli za integriran bonus-malus sistem. Pri tem kredibilnostno formulo izpeljemo za vsak *a priori* tip zavarovanca posebej, optimalne relativne premije pa določimo enake za celoten portfelj, torej za vse *a priori* določene premijske razrede, vendar pri določitvi njihove višine upoštevamo *a priori* diferenciacijo.

Če pri določitvi optimalnih relativnih premij ne upoštevamo *a priori* diferenciacije, so vsi η_i enaki za $i = 1, \dots, I$ in lahko definiramo $\eta = \eta_1 = \cdots = \eta_I$. Z η je označena *a priori* pričakovana škodna pogostnost celotnega portfelja in enačba (23) se poenostavi na

$$r_l^{quad} = \frac{\int_0^\infty \theta\ell_{\infty l}(\eta\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta\xi)f_\Theta(\xi)d\xi}. \tag{24}$$

Sedaj lahko izpeljemo tudi škodno pogostnost zavarovancev v posameznem razredu

$$\begin{aligned} E(\Lambda|L=l) &= \sum_{i=1}^{I}\eta_i P(\Lambda=\eta_i|L=l) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{I}\eta_i\omega_i\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{\sum_{i=1}^{I}\omega_i\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i\xi)f_\Theta(\xi)d\xi}. \end{aligned}$$

Iz zgornje enakosti vidimo, kako se *a priori* in *a posteriori* diferenciacija prepletata. Če matematično upanje $E(\Lambda|L = l)$ narašča z bonus-malus razredom, bodo zavarovanci, ki so že *a priori* plačali nižjo premijo, nagrajeni tudi *a posteriori*, ker se bodo nahajali v nižjih razredih bonus-malus sistema. Obratno bodo zavarovanci, ki so imeli ob sklenitvi police višjo premijo, tudi *a posteriori* kaznovani z višjim bonus-malus razredom. Če ne upoštevamo podatkov iz *a priori* diferenciacije, je $E(\Lambda|L = l) = \eta$ in ne moremo ugotoviti prepletanja *a priori* in *a posteriori* diferenciacije (Denuit et al., 2007, str. 186).

Denuit et al. (2007, pogl. 4.6) izpeljejo optimalne relativne premije r_L integriranega bonus-malus sistema pri eksponentni funkciji izgube, ki minimizirajo izraz

$$E\left(e^{-c(\Theta - r_L)}\right)$$

pri pogoju $E(r_L) = 1$. Rešitev tega problema izpeljemo enako kot v razdelku 5.1.2 in dobimo

$$\begin{aligned} r_l^{exp} &= 1 + \frac{1}{c}\left(E\left(\log E(e^{-c\Theta}|L)\right) - \log E(e^{-c\Theta}|L = l)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{s} P(L = i)\log\frac{\sum_{k=1}^{I}\omega_k\int_0^\infty e^{-c\theta}\ell_{\infty i}(\eta_k\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{P(L = i)} \\ &- \frac{1}{c}\log\frac{\sum_{k=1}^{I}\omega_k\int_0^\infty e^{-c\theta}\ell_{\infty l}(\eta_k\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{P(L = l)}. \end{aligned} \tag{25}$$

V primeru, ko *a priori* diferenciacije pri določanju relativnih premij ne upoštevamo, se zgornja enačba poenostavi v

$$\begin{aligned} r_l^{exp} &= 1 + \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{s} P(L = i)\log\frac{\int_0^\infty e^{-c\theta}\ell_{\infty i}(\eta\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{P(L = i)} \\ &- \frac{1}{c}\log\frac{\int_0^\infty e^{-c\theta}\ell_{\infty l}(\eta\theta)f_\Theta(\theta)d\theta}{P(L = l)}, \end{aligned} \tag{26}$$

kar sta izpeljala Denuit in Dhaene (2001). Pomen parametra c je enak kot v prejšnjem podpoglavju, torej gre $r_l^{exp} \to r_l^{quad}$, ko gre $c \to 0$, in se strogost bonus-malus sistema z manjšanjem c povečuje (Denuit et al., 2007, str. 196).

Določimo za začetek optimalne relativne premije Taylorjevega $-1/+n$ bonus-malus sistema z devetimi razredi (Taylor, 1997). V tem sistemu je zavarovanec za vsako brezškodno leto nagrajen z enim razredom bonusa, vsaka škoda pa je kaznovana z n razredi malusa. Ker nimamo podatkov o *a priori* diferenciaciji, dobljene optimalne relativne premije temeljijo na enačbah (24) in (26). Če predpostavimo negativno binomsko porazdelitev portfelja s parametroma $\lambda = 7$ % in $a = 1,4658$, dobimo za Taylorjevi bonus-malus lestvici $-1/+2$ in $-1/+4$ optimalne relativne premije, ki so prikazane v Tabeli 18. Za vsak bonus-malus sistem prvi stolpec v tabeli predstavlja delež zavarovancev v posameznem razredu, ko je bonus-malus sistem v stacionarnem stanju, drugi stolpec optimalne relativne premije pri kvadratni funkciji izgube, tretji in četrti stolpec pa optimalne relativne premije v primeru eksponentne funkcije izgube $r_l^{exp}(c)$ za $c = 5$ in $c = 10$. Podatki so v odstotkih.

Tabela 18: Optimalne relativne premije za $-1/+n$ bonus-malus sistem za $\lambda = 7$ % (v %)

	– 1 / + 2				**– 1 / + 4**			
l	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}	$r_l^{exp}(5)$	$r_l^{exp}(10)$	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}	$r_l^{exp}(5)$	$r_l^{exp}(10)$
1	84,99	86,65	94,84	96,41	71,16	77,63	89,35	92,67
2	6,16	144,90	125,44	117,38	5,16	129,86	120,46	113,78
3	6,61	150,51	126,32	117,94	5,53	134,49	121,35	114,33
4	1,14	204,51	145,64	133,24	5,94	139,45	122,23	114,89
5	0,79	218,39	146,97	134,24	6,37	144,78	123,11	115,44
6	0,18	266,44	158,81	145,70	1,85	192,35	141,91	130,29
7	0,09	289,56	160,22	147,13	1,62	203,32	143,04	131,12
8	0,03	331,62	166,54	155,58	1,35	216,94	144,42	132,17
9	0,01	361,73	167,44	157,28	1,03	234,90	146,42	133,74

Tudi pri Taylorjevih lestvicah ugotovimo, da je v primeru preblagega bonus-malus sistema močno zgoščevanje polic v najnižjih razredih. Optimalna relativna premija je nastavljena tako, da je $E(r_L) = \sum_{l=1}^{s} \ell_{\infty l}(\lambda) r_l = 1$, zato so zaradi velikega deleža zavarovancev v nižjih razredih dobljene optimalne relativne premije v Taylorjevi lestvici za skoraj vse razrede večje od 100 %. Bonus v smislu relativne premije, nižje od 100 %, dobijo le zavarovanci v najnižjem razredu, ostali pa plačujejo malus. Vidimo, da v strožjem bonus-malus sistemu postanejo popusti za brezškodno dogajanje pomembnejši, torej so bonusi večji in malusi manjši. Poleg tega lahko iz tabele razberemo, da s kvadratno funkcijo izgube dobimo lestvico največjega razpona, torej največje bonuse in maluse. Pri eksponentni funkciji izgube se z večanjem parametra c tako bonusi kot malusi zmanjšujejo. Denuit et al. (2007, pogl. 4.5) ugotovijo, da so *a posteriori* popravki premije blažji, če pri določitvi relativne premije upoštevamo *a priori* diferenciacijo, kot če je ne.

V Tabeli 19 prikazujemo enako kot v Tabeli 18 optimalne relativne premije za Taylorjev bonus-malus sistem, pri čemer upoštevamo višjo povprečno škodno pogostnost, $\lambda = 10$ %. Če primerjamo obe tabeli, ugotovimo, da so pri višji povprečni škodni pogostnosti zaradi boljše razporejenosti zavarovancev po razredih relativne premije manjše.

Z dobljenima formulama za določanje relativne premije lahko torej poljubnemu bonus-malus sistemu s podanim številom razredov in prehodi med njimi določimo optimalno relativno premijo. Izračunajmo torej optimalne relativne premije za opazovane bonus-malus sisteme. Kot smo že omenili, je $E(r_L) = 1$, torej so optimalne relativne premije določene tako, da je povprečna stacionarna relativna premija enaka 100 %. Optimalne relativne premije, ki smo jih prikazali v Tabeli 18, so dejansko transparentne relativne premije, kot smo jih definirali v podpoglavju 4.6. Zato bomo optimalne relativne premije opazovanih bonus-malus sistemov za primerjavo z dejanskimi preračunali tako, da se bodo z dejanskimi ujemale pri vrednosti 100 %. Računali bomo torej normirane optimalne relativne premije

$$\hat{r}_l = \frac{r_l}{r_{l_{100\ \%}}},$$

Tabela 19: Optimalne relativne premije za $-1/+n$ bonus-malus sistem za $\lambda = 10$ % (v %)

	– 1 / + 2				**– 1 / + 4**			
l	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}	$r_l^{exp}(5)$	$r_l^{exp}(10)$	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}	$r_l^{exp}(5)$	$r_l^{exp}(10)$
1	77,93	79,73	91,86	94,32	59,33	69,46	83,59	88,77
2	8,20	131,52	122,89	115,47	6,24	115,79	115,38	110,12
3	9,06	137,79	124,15	116,26	6,90	121,02	116,66	110,91
4	2,22	184,09	143,55	131,55	7,62	126,72	117,94	111,70
5	1,63	198,62	145,41	132,95	8,42	132,98	119,20	112,49
6	0,51	238,98	157,11	144,24	3,38	174,80	137,92	127,17
7	0,30	261,97	159,01	146,17	3,11	187,35	139,51	128,33
8	0,11	298,07	165,07	154,32	2,74	202,88	141,41	129,76
9	0,06	327,62	166,24	156,51	2,27	222,76	143,99	131,80

pri čemer smo z $l_{100\ \%}$ označili indeks razreda s 100 % dejansko relativno premijo.

V Tabeli 20 prikazujemo normirane optimalne relativne premije $\hat{r}_l$ za opazovane bonus-malus sisteme. Za vsak bonus-malus sistem je v prvem stolpcu prikazana dejanska relativna premija, v drugem pa relativna premija pri kvadratni funkciji izgube. Podatki so v odstotkih.

Iz Tabele 20 vidimo, da kvadratna funkcija izgube podeljuje večje bonuse in manjše maluse kot dejanska lestvica, oziroma so razlike med razredi večje kot pri dejanskih premijah. Na Sliki 7 vidimo primerjavo dejanskih in optimalnih relativnih premij opazovanih bonus-malus sistemov v odvisnosti od bonus-malus razreda. Zanimivo je, da je tako pri nemškem kot tudi pri belgijskem bonus-malus sistemu dejanska relativna premija precej podobna optimalni, pri slovenskih bonus-malus sistemih pa optimalna relativna premija pada veliko hitreje kot dejanska. Pri slovenskih bonus-malus sistemih opazimo, da so razmerja med optimalnimi relativnimi premijami po razredih večja kot pri dejanskih relativnih premijah, od koder sledi, da optimalne relativne premije bolje diferencirajo zavarovance med seboj. Če pogledamo na primer bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav, vidimo, da pri kvadratni funkciji izgube optimalna relativna premija pada hitreje kot dejanska, malusi pa rastejo počasneje.

Poleg tega pri primerjavi optimalnih in dejanskih relativnih premij Zavarovalnice Triglav, Adriatic Slovenice in Zavarovalnice Tilia v Tabeli 20 ugotovimo enako kot Coene in Doray (1996), da lahko s strožjimi pravili prehajanja in večjim številom razredov v optimalnem sistemu pridemo do večjih bonusov.

Ker kvadratna funkcija izgube podeljuje večje bonuse in manjše maluse, je tudi povprečna relativna premija v stacionarnem stanju pri normirani optimalni relativni premiji nižja od dejanske, kot lahko vidimo iz Tabele 21. Da bi torej zavarovalnice uvedle bonus-malus sistem z optimalnimi relativnimi premijami, prikazanimi v Tabeli 20, bi morale bodisi povišati izhodiščno premijo bodisi pomnožiti optimalne relativne premije z ustreznim faktorjem, da bi povprečna stacionarna relativna premija ostala enaka.

Tabela 20: Optimalne relativne premije opazovanih bonus-malus sistemov (v %)

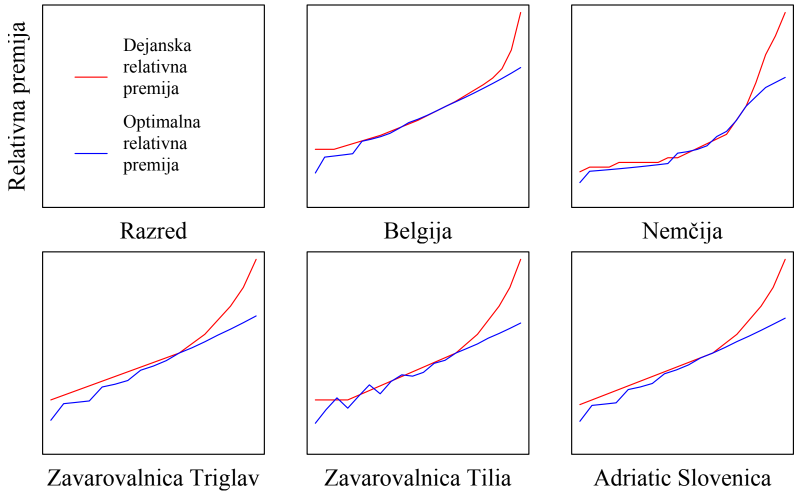
Belgija		**Nemčija**		**Zavarovalnica Triglav**		**Adriatic Slovenica**		**Zavarovalnica Tilia**	
b_l	$\hat{r}_l^{quad}$	b_l	$\hat{r}_l^{quad}$	b_l	$\hat{r}_l^{quad}$	b_l	$\hat{r}_l^{quad}$	b_l	$\hat{r}_l^{quad}$
54	29	30	18	50	28	45	27	50	25
54	46	35	31	55	46	50	44	50	40
54	47	35	31	60	47	55	45	50	52
57	48	35	32	65	49	60	47	50	41
60	49	40	33	70	64	65	61	55	54
63	63	40	34	75	67	70	64	60	66
66	65	40	35	80	71	75	68	65	57
69	68	40	36	85	82	80	78	70	70
73	71	40	38	90	86	85	82	75	77
77	77	45	39	95	92	90	87	80	75
81	82	45	50	100	100	95	95	85	79
85	86	50	51	110	106	100	100	90	89
90	90	55	54	120	112	110	106	95	92
95	95	60	58	135	119	120	112	100	100
100	100	65	68	150	125	135	118	110	105
105	105	70	73	170	132	150	124	120	110
111	109	85	85	200	140	170	131	135	116
117	114	100	100			200	137	150	121
123	119	125	110					170	126
130	124	155	120					200	132
140	130	175	125						
160	135	200	131						
200	141								

Tabela 21: Optimalne in dejanske stacionarne povprečne relativne premije

Bonus-malus sistem	**Dejanska premija**	**Optimalna premija**
Belgija	55,96 %	36,30 %
Nemčija	36,49 %	29,26 %
Zavarovalnica Triglav	53,07 %	33,64 %
Zavarovalnica Tilia	50,22 %	27,71 %
Adriatic Slovenica	48,06 %	32,30 %

V Tabeli 20 opazimo tudi, da optimalne relativne premije ne naraščajo povsem linearno z bonus-malus razredom, torej ne velja nujno, da višji razred zavarovanca pomeni višjo premijo in lahko zavarovanec v boljšem razredu plačuje višjo premijo. Tako pri bonus-malus sistemu Zavarovalnice Tilia za kvadratno funkcijo izgube dobimo nemonotono lestvico optimalnih relativnih premij, saj je relativna premija v četrtem razredu s 50 % dejansko relativno premijo nižja kot v nižjem in višjem razredu. Tak bonus-malus sistem je tržno nesprejemljiv, ker ima v njem zavarovanec lahko v primeru brezškodnega leta višjo premijo, v primeru škode pa nižjo premijo. Gilde in Sundt (1989) ter Pitrebois, Denuit in Walhin (2004) zato predlagajo linearno lestvico oblike

Slika 7: Primerjava dejanskih in optimalnih relativnih premij



$r_l^{lin} = \alpha_1 + \alpha_2 l$. Po Norbergovem kriteriju maksimalne natančnosti, torej pri kvadratni funkciji izgube, minimiziramo izraz

$$E\left((\Theta - r_L^{lin})^2\right) = E\left((\Theta - \alpha_1 - \alpha_2 L)^2\right).$$

Z odvajanjem zgornjega izraza po α_1 in α_2 dobimo

$$\alpha_2 = \frac{cov(L,\Theta)}{var(L)}, \quad \alpha_1 = E(\Theta) - \frac{cov(L,\Theta)}{var(L)} E(L).$$

Če ne upoštevamo *a priori* diferenciacije, dobimo kot Pitrebois et al. (2004)

$$\begin{aligned}
E(L) &= \sum_{l=1}^{s} l \int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta\theta) f_\Theta(\theta) d\theta, \\
var(L) &= \sum_{l=1}^{s} (l - E(L))^2 \int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta\theta) f_\Theta(\theta) d\theta, \\
cov(L,\Theta) &= E(L\Theta) - E(L)E(\Theta) = \sum_{l=1}^{s} l \int_0^\infty \theta \ell_{\infty l}(\eta\theta) f_\Theta(\theta) d\theta - E(L).
\end{aligned}$$

Andrade e Silva in Centeno (2005) ugotovita, da so tudi linearne optimalne relativne premije lahko problematične, saj lahko postanejo negativne. Avtorja zato predlagata geometrijsko bonus-malus lestvico, v kateri je povečanje premije med razredi podano z odstotkom premije.

V tem razdelku smo pokazali, kako za poljubna prehodna pravila in število razredov določimo optimalne relativne premije v bonus-malus razredu. Problem določitve učinkovitega bonus-malus sistema smo torej prevedli na določanje učinkovitih prehodnih pravil in števila razredov. V naslednjih razdelkih bomo pri določitvi optimalnih relativnih premij upoštevali tudi nekatere dodatne dejavnike, in sicer višino škod, časovno odvisnost škodne pogostnosti in prehodno, torej nestacionarno stanje bonus-malus sistema. Poleg tega nekateri avtorji navajajo tudi druge možne dejavnike, ki lahko vplivajo na optimalne relativne premije. Englund, Guillén, Gustafsson, L. H. Nielsen in J. P. Nielsen (2008) na primer izpeljejo, kako lahko pri določanju relativne premije upoštevamo več zavarovalnih vrst in koreliranost med njimi.

5.2.2 Upoštevanje višine škod

V razdelku 5.1.3 smo izpeljali optimalni bonus-malus sistem v okviru kredibilnostne teorije, ki poleg števila škod kot dejavnik prehoda upošteva tudi višino škode. Pri tem smo škode ločili na materialne in nematerialne, saj so prve v povprečju bistveno nižje. V tem razdelku bomo določili optimalne relativne premije za bonus-malus sistem, v katerem bomo kot dejavnik prehoda poleg števila škod upoštevali tudi različne vrste škod.

Izpeljimo optimalne relativne premije za bonus-malus sistem, ki upošteva višino škod kot Pitrebois et al. (2006c). Avtorji ne predpostavijo beta porazdeljenosti števila nematerialnih škod kot Lemaire (1995), pač pa uporabljajo polinomsko porazdelitev in omogočijo ločevanje med več kot dvema vrstama škod.

Razlikujmo med τ različnimi vrstami škod in označimo s $q_{i1}, \ldots, q_{i\tau}$ verjetnosti škod posameznih tipov za zavarovanca v *a priori* razredu i. Potem je $\sum_{j=1}^{\tau} q_{ij} = 1$. Z $N_i^{(1)}, \ldots, N_i^{(\tau)}$ označimo slučajne spremenljivke števila škod posameznega tipa za zavarovanca v *a priori* razredu i. Potem je skupno število škod zavarovanca tipa i enako $N_i = \sum_{j=1}^{\tau} N_i^{(j)}$. Enako kot v razdelku 5.1.4 predpostavimo, da je slučajna spremenljivka $N_i|\Theta = \theta$ porazdeljena Poissonovo s parametrom $\eta_i\theta$ za $i = 1, \ldots, I$, pri čemer je η_i *a priori* pojasnjen del škodne pogostnosti. Predpostavimo kot Pitrebois et al. (2006c), da je za zavarovanca tipa i slučajni vektor $(N_i^{(1)}, \ldots, N_i^{(\tau)})$ polinomsko porazdeljen s parametri $(q_{i1}, \ldots, q_{i\tau})$, torej da je

$$P(N_i^{(1)} = k_1, \ldots, N_i^{(\tau)} = k_\tau) = \frac{k!}{k_1! \cdots k_\tau!} q_{i1}^{k_1} \cdots q_{i\tau}^{k_\tau},$$

če je $k = \sum_{j=1}^{\tau} k_j$, in 0 sicer. Potem so zaradi lastnosti polinomske porazdelitve slučajne spremenljivke $N_i^{(j)}|N_i = k$ binomsko porazdeljene za $j = 1, \ldots, \tau$ in $i = 1, \ldots, I$, torej je

$$P(N_i^{(j)} = k_j | N_i = k) = \binom{k}{k_j} q_{ij}^{k_j} (1 - q_{ij})^{k-k_j}.$$

Izračunamo lahko

$$\begin{aligned} P(N_i^{(j)} = k_j|\Theta = \theta) &= \sum_{k=k_j}^{\infty} P(N_i^{(j)} = k_j|N_i = k, \Theta = \theta) P(N_i = k|\Theta = \theta) \\ &= \sum_{k=k_j}^{\infty} \binom{k}{k_j} q_{ij}^{k_j} (1 - q_{ij})^{k-k_j} \frac{e^{-\eta_i\theta}(\eta_i\theta)^k}{k!} \\ &= e^{-q_{ij}\eta_i\theta} \frac{(q_{ij}\eta_i\theta)^{k_j}}{k_j!}, \end{aligned}$$

od koder sledi, da je slučajna spremenljivka $N_i^{(j)}|\Theta = \theta$ porazdeljena Poissonovo s parametrom $q_{ij}\eta_i\theta$. Poleg tega so slučajne spremenljivke $N_i^{(j)}|\Theta = \theta$ med seboj neodvisne za $j = 1 \ldots, \tau$, saj velja

$$\begin{aligned} & P(N_i^{(1)} = k_1, \ldots, N_i^{(\tau)} = k_\tau|\Theta = \theta) \\ = \; & P(N_i^{(1)} = k_1, \ldots, N_i^{(\tau)} = k_\tau|\Theta = \theta, N_i = k) P(N_i = k|\Theta = \theta) \\ = \; & \frac{k!}{k_1! \cdots k_\tau!} q_{i1}^{k_1} \cdots q_{i\tau}^{k_\tau} e^{-\eta_i\theta} \frac{(\eta_i\theta)^k}{k!} = \prod_{j=1}^{\tau} e^{-\eta_i\theta q_{ij}} \frac{(\eta_i\theta q_{ij})^{k_j}}{k_j!} = \prod_{j=1}^{\tau} P(N_i^{(j)} = k_j|\Theta = \theta). \end{aligned}$$

Zgornji izraz predstavlja verjetnost, da bo imel zavarovanec s škodno pogostnostjo $\eta_i\theta$ v i-tem *a priori* razredu $k_1, \ldots, k_\tau$ škod posameznega tipa. Analogno kot v 3. poglavju iz zgornjega izraza določimo verjetnost $p_{mn}(\eta_i\theta; \overline{q}_i)$, da gre zavarovanec s škodno pogostnostjo $\eta_i\theta$ in verjetnostno porazdelitvijo vrst škod $\overline{q}_i = (q_{i1}, \ldots, q_{i\tau})^T$ iz bonus-malus razreda m v razred n, za $m, n = 1, \ldots, s$. Prehodna matrika za takega zavarovanca je potem enaka

$$P(\eta_i\theta; \overline{q}_i) = (p_{mn}(\eta_i\theta; \overline{q}_i))_{m,n=1}^{s}.$$

Analogno kot v 3. poglavju izpeljemo stacionarno porazdelitev zavarovancev s škodno pogostnostjo $\eta_i\theta$ in verjetnostno porazdelitvijo tipov škod $\overline{q}_i$ in jo označimo z $\ell_\infty(\eta_i\theta; \overline{q}_i)$. Označimo z $L(\eta_i\theta; \overline{q}_i)$ analogno kot v razdelku 5.2 slučajno spremenljivko, ki meri razred zavarovanca s škodno pogostnostjo $\eta_i\theta$ in porazdelitvijo vrst škod $\overline{q}_i$ v stacionarnem stanju bonus-malus sistema.

Potem dobimo optimalne relativne premije pri kvadratni funkciji izgube analogno kot v razdelku 5.2 z

$$r_l = E(\Theta | L = l) = \frac{\sum_{i=1}^{I} \omega_i \int_0^\infty \theta \ell_{\infty l}(\eta_i\theta; \overline{q}_i) f_\Theta(\theta) d\theta}{\sum_{i=1}^{I} \omega_i \int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta_i\theta; \overline{q}_i) f_\Theta(\theta) d\theta}.$$

V primeru, ko pri določanju relativnih premij ne upoštevamo *a priori* diferenciacije, se zgornja enakost poenostavi na

$$r_l = \frac{\int_0^\infty \theta \ell_{\infty l}(\eta\theta; \overline{q}) f_\Theta(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\eta\theta; \overline{q}) f_\Theta(\theta) d\theta}.$$

V Tabeli 22 primerjamo stacionarno porazdelitev in optimalne relativne premije treh bonus-malus sistemov. Prvi sistem, označen z $-1/+m/+n$, pri prehajanju zavarovancev med razredi upošteva različne vrste škod, in sicer razlikuje med materialnimi in nematerialnimi škodami. V tem bonus-malus sistemu gredo zavarovanci v primeru brezškodnega dogajanja za en razred nižje, v primeru materialne škode m razredov višje, v primeru nematerialne škode pa n razredov višje. Druga dva bonus-malus sistema sta v prejšnjem razdelku predstavljena Taylorjeva $-1/+n$ bonus-malus sistema, ki pri prehodu med razredi upoštevata le eno vrsto škod. Uporabljena parametra λ in a sta enaka 7 % in $1,4658$. Verjetnost posameznih vrst škod vzamemo kot Pitrebois et al. (2006c), in sicer 92 % verjetnost materialne škode in 8 % verjetnost nematerialne škode.

Optimalne relativne premije za bonus-malus sistem $-1/+2/+4$ so bližje premijam sistema $-1/+2$ kot pa sistema $-1/+3$. Večina škod je namreč materialnih, zato se navaden bonus-malus sistem obnaša le malo strožje kot sistem, ki ima za vse škode enako kazen kot naš sistem za materialno škodo. In v skladu s tem je v primerjavi z $-1/+2$ sistemom stopnja zgoščevanja v sistemu, ki nematerialne škode kaznuje strožje kot materialne, nižja, bonusi so večji, malusi pa manjši. Če bi predpostavili večji delež nematerialnih škod, bi bile tako optimalne relativne premije kot tudi stacionarna porazdelitev zavarovancev bonus-malus sistema $-1/+2/+4$ bližje tistim, dobljenim v sistemu $-1/+3$.

Tabela 22: Optimalne relativne premije za $-1/+m/+n$ bonus-malus sistem (v %)

	– 1 / + 2 / + 4		**– 1 / + 2**		**– 1 / + 3**	
l	$\ell_{\infty l}$	r_l	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}	$\ell_{\infty l}$	r_l^{quad}
1	83,81	85,76	84,99	86,65	77,69	81,30
2	6,08	143,31	6,16	144,90	5,63	135,43
3	6,52	148,80	6,61	150,51	6,04	140,35
4	1,59	189,12	1,14	204,51	6,48	145,62
5	1,32	196,80	0,79	218,39	1,51	195,04
6	0,35	244,54	0,18	266,44	1,23	206,58
7	0,23	262,65	0,09	289,56	0,89	222,34
8	0,07	303,72	0,03	331,62	0,31	262,85
9	0,04	329,94	0,01	361,73	0,22	282,75

5.2.3 Omogočanje spreminjanja škodne pogostnosti zavarovanca s časom

Do sedaj smo privzeli, da se škodna pogostnost zavarovanca s časom ne spreminja. Lemaire (1995, str. 24) meni, da je to stroga predpostavka, saj vozniške izkušnje in starost vplivajo na tveganje zavarovanca. Tudi Brouhns et al. (2003) utemeljujejo upoštevanje odvisnosti škodne pogostnosti od časa s tem, da se faktorji, ki jih ne moremo zajeti v *a priori* diferenciaciji in vplivajo na vozniške sposobnosti, s časom spreminjajo. Spremenijo se lahko naenkrat (na primer nenadne spremembe v voznikovem življenju, kot so ločitev, živčni zlom ipd.) ali postopno (na primer učinek učenja vožnje). Poleg tega je zavarovanec lahko previdnejši voznik zaradi izkušenj s preteklimi škodami in zavedanja posledic nesreče. Pinquet, Guillén in Bolancé (2001) na primeru portfelja večje španske zavarovalnice pokažejo, da se škodna pogostnost s časom spreminja in da je časovna oddaljenost škode pomemben dejavnik pri napovedovanju števila bodočih škod. Škoda v bližnji preteklosti zavarovanca namreč napoveduje prihodnje škode veliko bolje kot škoda v bolj oddaljeni preteklosti.

Pinquet et al. (2001) ugotovijo, da se model, v katerem dopuščamo odvisnost škodne pogostnosti od časa, podatkom prilagaja veliko bolje, kot tisti, v katerem privzamemo časovno neodvisnost škodne pogostnosti. Avtorji izpeljejo kredibilnostni model, ki upošteva starost škod, medtem ko Brouhns et al. (2003) določijo optimalne relativne premije za tak bonus-malus sistem, pri čemer pri izračunu relativnih premij upoštevajo tudi *a priori* diferenciacijo. Brouhns et al. (2003) kot glavno razliko med bonus-malus sistemom, ki upošteva spreminjanje škodne pogostnosti s časom, in navadnim bonus-malus sistemom navajajo, da veriga Markova ni več homogena. Homogenost verige Markova pomeni, da je razred zavarovanca v bonus-malus lestvici v časovni točki $t+1$ določen z razredom v točki t in s številom škod v vmesnem obdobju. Če upoštevamo časovno odvisnost škodne pogostnosti, bonus-malus razred zavarovanca ni več odvisen le od preteklega leta, pač pa tudi od predhodnih let. To pomeni, da za določanje relativnih premij v tem primeru ne moremo uporabiti klasičnih tehnik.

Pinquet et al. (2001) primerjajo optimalni bonus-malus sistem s časovno-odvisno komponento in tistega brez nje. Ugotovijo, da prvi sistem podeljuje v primeru brezškodnega dogajanja manjše bonuse dobrim zavarovancem kot drugi. Po drugi strani pa so v prvem sistemu bonusi za zavarovance, ki so imeli kakšno škodo v bližnji preteklosti, mnogo višji. Tako so slabi zavarovanci, ki naenkrat nakažejo izboljšanje, *a posteriori* bolj nagrajeni kot dobri zavarovanci in jih lahko zavarovalnice vzpodbudijo k previdnejši vožnji. V optimalnem bonus-malus sistemu, ki upošteva starost škod, zavarovanci potrebujejo manj časa, da izničijo malus, kot v modelu, v katerem starost škod ni upoštevana. Starost škode je po mnenju avtorjev pomembna, saj se učinek škode na škodno pogostnost sčasoma izniči. Brouhns et al. (2003) pri primerjavi optimalnih relativnih premij v obeh modelih dobijo pri bonus-malus sistemu, ki ne upošteva starosti škod, večje bonuse in večje maluse kot pri sistemu, ki časovno odvisnost upošteva. Pri tem zavarovanci v tem bonus-malus sistemu prehajajo med razredi ne le na podlagi števila prijavljenih škod v preteklem letu, pač pa tudi glede na druge časovno odvisne dejavnike.

5.2.4 Prehodno obdobje bonus-malus sistema

Metoda za določitev optimalnih relativnih premij, kot smo jo razvili v tem poglavju, temelji na stacionarni porazdelitvi bonus-malus sistema. Ker večina bonus-malus sistemov potrebuje razmeroma dolgo časa, da dosežejo stacionarno stanje, Denuit et al. (2007, pogl. 8) predlagajo upoštevanje prehodnega stanja pri določitvi optimalnih relativnih premij.

Uporaba asimptotičnega kriterija pri določitvah optimalnih relativnih premij je pri nekaterih bonus-malus sistemih manj primerna kot pri drugih. Denuit et al. (2007, str. 319) omenjajo, da ponekod zavarovalnice privabljajo zavarovance tako, da tistim, ki pridejo do najnižjega razreda, dovolijo, da v njem ostanejo do konca življenja ne glede na njihovo škodno dogajanje. V tem primeru je stacionarna porazdelitev degenerirana, saj sčasoma vsi zavarovanci skonvergirajo v najnižji razred. Asimptotični kriterij je pri analizi tega sistema neuporaben in morajo vsi izračuni temeljiti na prehodnih porazdelitvah.

V tem poglavju bomo kot Denuit et al. (2007, pogl. 8) pri izpeljavi optimalnih relativnih premij upoštevali starost polic v portfelju in s tem v izračunu premije zajeli prehodne lastnosti bonus-malus sistema.

Označimo z L_n razred naključno izbranega zavarovanca v bonus-malus lestvici po n letih, z L razred takega zavarovanca v stacionarnem stanju in z A slučajno spremenljivko, ki predstavlja starost police. Porazdelitev slučajne spremenljivke A je določena s

$$P(A = n) = a_n, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

kar pomeni, da je a_n delež n let starih polic v portfelju. Potem s slučajno spremenljivko L_A označimo razred zavarovanca, ki je v bonus-malus sistemu A let. Zaradi poenostavitve predpostavimo, da je A neodvisna od *a priori* in *a posteriori* dela škodne pogostnosti.

Označimo z $r_{L_A}^{(A)}$ relativno premijo naključnega zavarovanca iz portfelja. Zavarovanci s policami starimi n let imajo torej relativno premijo enako $r_{L_n}^{(n)}$. Za skupino zavarovancev s policami starimi

n let torej v primeru kvadratne funkcije minimiziramo

$$Q_n = E\left(\left(\Theta - r_{L_n}^{(n)}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{I} w_i \int_0^{\infty} \sum_{l=1}^{s} (\theta - r_l^{(n)})^2 \ell_{nl}(\eta_i\theta) f_\Theta(\theta) d\theta.$$

Minimum Q_n je dosežen pri

$$r_l^{(n)} = E(\Theta | L_n = l) = \frac{\sum_{i=1}^{I} w_i \int_0^{\infty} \theta \ell_{nl}(\eta_i\theta) f_\Theta(\theta) d\theta}{\sum_{i=1}^{I} w_i \int_0^{\infty} \ell_{nl}(\eta_i\theta) f_\Theta(\theta) d\theta}.$$

Očitno je $\lim_{n\to\infty} r_l^{(n)} = r_l^{quad}$ iz enakosti (23). Ker je v prehodnem stanju manj zavarovancev v nižjih razredih in je prehodna verjetnost, da si v najnižjem razredu, manjša od stacionarne, prehodne optimalne relativne premije $r_l^{(n)}$ v splošnem podcenjujejo stacionarne r_l^{quad}. V prehodnem sistemu so zaradi uravnoteževanja majhnega števila zavarovancev v nižjih razredih bonusi večji, malusi pa manjši kot pri stacionarnem sistemu (Denuit et al., 2007, str. 299–301).

Asimptotična optimalna relativna premija r_l^{quad} je po Denuit et al. (2007, str. 297) primerna, ko je večina zavarovancev blizu svojega stacionarnega stanja. V praksi imajo zavarovalnice precejšen delež razmeroma novih polic, zato je pri določitvi optimalnih relativnih premij smiselno uporabiti kriterij Q_n, pri čemer upoštevamo porazdelitev polic po njihovi starosti n. Minimiziramo torej

$$Q = E\left(\left(\Theta - r_{L_A}^{(A)}\right)^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q_n.$$

Minimum zgornjega izraza je dosežen pri

$$\begin{aligned} r_l^{tr} &= E(\Theta | L_A = l) = \sum_{n=1}^{\infty} r_l^{(n)} P(A = n | L_A = l) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{I} w_i \int_0^{\infty} \theta \ell_{nl}(\eta_i\theta) f_\Theta(\theta) d\theta}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{I} w_i \int_0^{\infty} \ell_{nl}(\eta_i\theta) f_\Theta(\theta) d\theta}. \end{aligned}$$

Primerjajmo sedaj optimalne relativne premije portfeljev z različno porazdelitvijo starosti polic. Predpostavimo tri različne portfelje zavarovancev glede na starost polic. Predpostavljeno porazdelitev starosti polic v vsakem portfelju prikazujemo v Tabeli 23. V prvem stolpcu je prikazana porazdelitev polic mladega portfelja, ki ima večji delež mladih polic, v drugem porazdelitev polic zrelega portfelja, ki ima police enakomerno porazdeljene po starostih, v tretjem pa star portfelj, ki ima večji delež starih polic. Podatek o starosti polic je v letih.

Vzemimo sedaj v razdelku 5.2.1 predstavljena Taylorjeva bonus-malus sistema $-1/+2$ in $-1/+4$. V Tabeli 24 prikazujemo optimalne relativne premije za ta dva bonus-malus sistema v prehodnem obdobju, pri čemer za posamezen portfelj upoštevamo porazdelitev starosti polic iz Tabele 23.

Iz Tabele 24 lahko razberemo prej navedene lastnosti prehodnih optimalnih relativnih premij $r_l^{(n)}$. Optimalne relativne premije v prehodnih bonus-malus sistemih so nižje od optimalnih relativnih premij bonus-malus sistema v stacionarnem sistemu, torej so bonusi večji, malusi pa

Tabela 23: Porazdelitev starosti polic

Starost polic	**Mlad portfelj**	**Zrel portfelj**	**Star portfelj**
0	40 %	25 %	10 %
10	40 %	25 %	10 %
20	10 %	25 %	40 %
30	10 %	25 %	40 %

Tabela 24: Optimalne relativne premije v prehodnem obdobju (v %)

Razred	**– 1 / + 2**				**– 1 / + 4**			
	Mlad portfelj	Zrel portfelj	Star portfelj	Stacionarno stanje	Mlad portfelj	Zrel portfelj	Star portfelj	Stacionarno stanje
1	82,73	84,52	85,66	86,65	74,22	75,89	76,92	77,63
2	135,66	141,43	144,56	144,90	118,20	121,88	126,76	129,86
3	150,13	149,84	149,56	150,51	130,63	132,52	133,63	134,49
4	194,94	200,69	203,77	204,51	135,53	137,45	138,58	139,45
5	208,26	213,72	217,74	218,39	143,38	144,04	144,46	144,78
6	219,44	230,38	247,61	266,44	183,68	187,63	190,57	192,35
7	101,27	102,49	107,22	289,56	104,31	107,26	117,49	203,32
8	285,34	300,17	316,18	331,62	215,37	216,12	216,61	216,94
9	309,32	326,66	345,27	361,73	231,28	232,99	234,17	234,90

manjši. Večji ko je delež starejših polic, bližje bodo optimalne relativne premije stacionarnim. V primeru strožjega bonus-malus sistema je razlika med optimalnimi relativnimi premijami mladega in stacionarnega portfelja razmeroma manjša.

Bonus-malus sistem v prehodnem obdobju z relativnimi premijami r_l^{tr} je finančno uravnotežen, saj je

$$E(r_{L_A}^{tr}) = E\left(E(\Theta|L_A)\right) = E(\Theta) = 1.$$

Vendar pa finančna uravnoteženost drži le, dokler ostaja porazdelitev polic po starosti enaka. Ker se porazdelitev polic po starosti skozi čas spreminja, moramo uporabiti enega od v podpoglavju 4.6 opisanih načinov za ohranitev finančne uravnoteženosti. Pomembno je, da pri določitvi relativnih premij upoštevamo pričakovano spreminjanje porazdelitev polic po starosti in relativne premije po potrebi skozi čas spreminjamo. Denuit et al. (2007, str. 305–306) pravijo, da je razvoj pričakovanih prihodkov zavarovalnice eden najpomembnejših parametrov pri določanju premije.

Prav bi bilo, da zavarovalnica svoj bonus-malus sistem občasno spremeni, in sicer ne le zaradi spreminjanja porazdelitve polic po starostih, pač pa tudi zaradi spreminjanja škodne pogostnosti skozi čas. Škodna pogostnost se namreč skozi leta bistveno spreminja zaradi dejavnikov kot so cestno prometni nadzor, izgradnja cest, lastnosti avtomobilov ipd. Tako je bila na primer leta 1971 škodna pogostnost v Belgiji 22 %, leta 1997 10 %, leta 2008 pa 7 % (Lemaire, 1995; CEA, 2010). Ker je bonus-malus sistem neposredno povezan s škodno pogostnostjo, take spremembe terjajo spremembo bonus-malus sistema. Ko postane porazdelitev polic po razredih neuravnovešena, je zgrešen glavni cilj uporabe tega sistema – da bi slabi vozniki plačevali bistveno višjo premijo kot dobri (Lemaire, 1995, str. 14)

6 BONUS-MALUS SISTEM KOT KONKURENČNO ORODJE

Zavarovalnice med seboj tekmujejo na podlagi *a priori* in *a posteriori* spremenljivk. Pri tem evropske zavarovalnice *a priori* spremenljivke uporabljajo v smislu konkurenčnosti že nekaj časa, uporaba *a posteriori* spremenljivk v konkurenčne namene pa še ni povsod utečena.

Leta 1992 je Evropska unija s Tretjo direktivo prepovedala zakonsko predpisovanje bonus-malus sistemov, saj je bonus-malus sistem eden od elementov konkurence na prostem trgu in se ga ne bi smelo omejevati. Liberalizacija *a posteriori* diferenciacije zavarovalnicam dovoljuje, da uporabljajo bonus-malus sisteme kot konkurenčno orodje. Nič jim na primer ne prepoveduje, da ne bi za privabljanje različnih kategorij zavarovancev uporabljale različnih bonus-malus lestvic za te kategorije zavarovancev (Pitrebois et al., 2003b). Kljub temu so zavarovalnice v nekaterih evropskih državah šele nedavno začele uporabljati bonus-malus sisteme kot konkurenčno orodje.

Uporaba bonus-malus sistemov se po evropskih državah močno razlikuje. V Belgiji na primer vse zavarovalnice še vedno uporabljajo enak bonus-malus sistem, na Portugalskem pa je praktično vsaka zavarovalnica razvila svoj bonus-malus sistem. Zavarovanci na Portugalskem veliko prehajajo med zavarovalnicami, kar Denuit in Dhaene (2001) delno pojasnjujeta z veliko konkurenco, delno pa s premajhnim razkrivanjem podatkov med zavarovalnicami. Zavarovanci lahko namreč ob menjavi zavarovalnice prikrijejo preteklo škodno dogajanje in se tako izognejo morebitnemu malus razredu. Slabi zavarovanci zato raje menjajo zavarovalnico, kot da bi ostajali v malus razredih, škodna pogostnost novih zavarovancev pa je visoka. Avtorja poudarjata, da zavarovalnice v praksi ne morejo uporabljati načel kredibilnostne teorije, da bi torej premija zavarovancev ustrezala tveganju, ki ga za zavarovalnico predstavljajo, če na nivoju države ne obstaja informacijski sistem, v katerem bi lahko vsaka zavarovalnica preverila škodno zgodovino zavarovanca. V takem okolju se bonus-malus sistem uporablja predvsem za zmanjšanje moralnega hazarda in postane motiv za previdnejšo vožnjo.

Trenutna situacija glede *a posteriori* diferenciacije je v Sloveniji bližje Portugalski kot Belgiji. Do pred nedavnim so vse zavarovalnice uporabljale enak bonus-malus sistem. Ko so se nekatere zavarovalnice odločile za spremembo bonus-malus sistema predvsem iz konkurenčnih razlogov, niso izvedle korenitih sprememb sistema, temveč le manjše lepotne popravke. Tako je na primer Zavarovalnica Triglav obdržala enak bonus-malus sistem, Adriatic Slovenica je dodala dodatni razred z nižjim odstotkom izhodiščne premije, Zavarovalnica Tilia pa je spremenila prehodna pravila. Poleg tega tako kot na Portugalskem tudi v Sloveniji ni informacijskega sistema, ki bi omogočal nadzor nad škodnim dogajanjem zavarovancev, zato malus razredi nimajo pravega učinka.

Za nadaljno razpravo predpostavimo, da obstaja primeren informacijski sistem na nivoju države, ki omogoča primerno prehajanje zavarovancev med bonus-malus sistemi. Če je bonus-malus sistem element konkurence, dobi določanje tega sistema druge razsežnosti, saj mora zavarovalnica upoštevati obnašanje svojega sistema glede na druge. Zavarovalnica mora upoštevati tako morebitne izgube zavarovancev ob vpeljavi bonus-malus sistema kot tudi možnosti prehodov zavarovancev iz ene zavarovalnice v drugo zaradi ugodnejših prehodnih pravil in začetne razvrstitve v lestvico bonus-malus sistema.

V konkurenčnem okolju se lahko zgodi, da je manj strog bonus-malus sistem tržno uspešnejši in privablja ne le več, pač pa tudi boljše zavarovance. Dolgoročno gledano je tak bonus-malus sistem obsojen na propad, saj bo začetno prehajanje zavarovancev zaradi manj strogega sistema sčasoma ponehalo, zavarovanci se bodo zgostili v najnižjih razredih in pomen bonus-malus sistema se bo izgubil. Zavarovalnica lahko s takim bonus-malus sistemom zavarovance privabi, kasneje pa mora sistem spremeniti. Poraja se vprašanje, ali v konkurenčnem okolju bonus-malus sistem sploh še služi svojemu namenu. Pitrebois, Denuit in Walhin (2006b) menijo, da je nesmiselno, da bi zavarovalnice uporabljale enako *a posteriori* diferenciacijo, če uporabljajo različno *a priori* diferenciacijo, zaradi v razdelku 5.1.4 omenjene prepletenosti teh dveh vrst diferenciacij. Zavarovalnica brez *a priori* diferenciacije ima namreč veliko bolj heterogen portfelj kot zavarovalnica z *a priori* diferenciacijo in bi morala zato prva uporabljati strožji bonus-malus sistem kot druga. V praksi zavarovalnice ne uporabljajo različnih bonus-malus sistemov zaradi prepletenosti *a priori* in *a posteriori* diferenciacije, pač pa kot konkurenčno orodje.

6.1 Strategija zavarovalnice

Subramanian (1998) izpostavi, da kljub temu, da lahko zavarovalnice tekmujejo na podlagi bonus-malus sistema, praksa kaže, da se v večini držav trudijo, da bi obdržale enak bonus-malus sistem. Glavni razlog za to je po mnenju avtorice, da zavarovanci premalo poznajo pomen določanja premij na podlagi škodnih izkušenj. Za zavarovalnice je zato lažje oglaševati *a priori* določljive popuste in ugodnosti, kot je na primer popust za voznike s podeželja, kot pa razložiti, da bonus-malus sistem dolgoročno gledano znižuje premijo dobrim voznikom. Kot drugi možni razlog avtorica navaja negotovost zavarovalnice glede potez konkurence. Zavarovalnice namreč težko napovejo, ali bo vpeljava bolj učinkovitega bonus-malus sistema privabila dobre ali slabe voznike in ali bo to povečalo ali zmanjšalo njihov tržni delež. Avtorica predstavi preprost model, v katerem v dveh možnih scenarijih zavarovalnica, ki uporablja manj strog sistem, sčasoma izpade iz trga.

Subramanian (1998) predpostavi trg, na katerem delujeta le dve zavarovalnici, zavarovalnica A in zavarovalnica B. Zavarovalnici imata po predpostavki enaka tržna deleža, enako premijo in enak bonus-malus sistem, ki je pri obeh zavarovalnicah v stacionarnem stanju. Avtorica uporabi izsledke raziskav, po katerih le približno tretjina zavarovancev izbere zavarovalnico na podlagi nizke premije, ostali se odločajo bodisi na podlagi zastopnika bodisi zavarovalnice.

V prvem scenariju avtorica analizira primer, ko zavarovalnica A prvo leto doda nov razred v bonus-malus sistem z najnižjim odstotkom izhodiščne premije, izhodiščne premije pa ne spremeni takoj, temveč šele na koncu leta. Zavarovalnica B ne reagira in svojega sistema in premije ne spreminja. Zavarovalnici na koncu vsakega leta prilagodita premije tako, da je finančno ravnotežje premij in škod ponovno vzpostavljeno. Zavarovalnica A ima zaradi novega razreda nižjo povprečno relativno premijo in mora zaradi tega povišati izhodiščno premijo. Po drugi strani pridobi več boljših zavarovancev, zaradi česar ima razmeroma manj škod in lahko premijo zniža. Zavarovalnici B se zgodi obratno, torej izgubi nekaj boljših zavarovancev, zaradi česar ima razmeroma več škod in mora premijo povišati. Izguba prihodkov za preteklo leto ni nadomeščena. Kot rezultat tega scenarija zavarovalnica B po nekaj letih popolnoma izgubi svoj tržni delež. Zavarovalnica A namreč pridobiva boljše zavarovance zavarovalnice B in ji hkrati pošilja slabše zavarovance. Povprečna relativna premija zavarovalnice A je sicer nižja, a je zato izhodiščna premija višja kot v zavarovalnici B, zato se slabšim zavarovancem bolj splača biti v zavarovalnici B, saj imajo tam enak bonus-malus razred pri nižji izhodiščni premiji. Čeprav se tržni deleži ne spreminjajo bistveno, se kvaliteta portfelja zavarovalnice B slabša.

V drugem scenariju zavarovalnica B po petih letih reagira in ustvari bonus razred s še nižjo relativno premijo, kot je bila tista, ki jo je uvedla zavarovalnica A prvo leto. Avtorica pokaže, da zaradi tega ukrepa zavarovalnica B ne le pridobi nazaj svoj prvotni tržni delež, pač pa tudi sčasoma uspe izločiti zavarovalnico A s trga.

Po teh dveh scenarijih bolj agresivna zavarovalnica sčasoma uspe pregnati konkurenco s trga in zmaga strožji bonus-malus sistem. Zaradi svobode določanja premij sčasoma prevladajo strogi bonus-malus sistemi in je manj solidarnosti med zavarovanci (Subramanian, 1998).

Viswanathan in Lemaire (2005) predvidita trg z dvema zavarovalnicama, pri čemer omilita predpostavke iz modela Subramanian (1998). S simulacijo preučujeta, kaj bi se dogajalo z njunima tržnima deležema in povprečno škodno pogostnostjo, če bi ena zavarovalnica uvedla bonus razred z najnižjo relativno premijo. Ugotovita, da so izidi lahko močno različni ob različnih predpostavkah in morajo zato zavarovalnice dobro poznati tržne razmere in obnašanje zavarovancev, preden se vključijo v tekmovanje na podlagi bonus-malus sistema. Zavarovalnice ne smejo uporabljati agresivne strategije pri konstrukciji bonus-malus sistema, če niso prepričane, kako bodo zavarovanci reagirali. Pred kakršnokoli agresivno strategijo avtorja priporočata raziskave trga in zavarovancev.

Viswanathan in Lemaire (2005) pravita, da bonus-malus sistem od zavarovancev zahteva dobro poznavanje zavarovalništva in da zavarovanci sami težko primerjajo bonus-malus sisteme med seboj. Nekateri zavarovanci imajo kratkoročni pogled na zavarovanje in primerjajo le premijo za naslednje leto, drugi pa ocenijo svoje bodoče škode in glede na to izberejo zavarovalnico. Zavarovalnice morajo v vsakem primeru zavarovance obveščati in učiti o pomenu in prednostih bonus-malus sistema. Oglaševanje je močno tržno orodje za širitev informacij do zavarovancev, vendar navadno ne uči zavarovancev o pomenu in prednostih načinov določanja premije, kot je bonus-malus sistem.

6.2 Pravila prehajanja med lestvicami

V tržnem okolju, v katerem zavarovanje ponuja več zavarovalnic, lahko pričakujemo, da bodo zavarovanci prehajali od ene zavarovalnice k drugi. V državno reguliranem okolju, kjer je en bonus-malus sistem obvezen za vse zavarovalnice, bodo zavarovanci podvrženi enakim *a posteriori* popravkom premije ne glede na to, za katero zavarovalnico se odločijo. Ko zavarovanec menja zavarovalnico, mora od prejšnje zavarovalnice najprej pridobiti potrdilo o pridobljenem bonus-malus razredu in številu škod v preteklem zavarovalnem letu. Nova zavarovalnica mu na podlagi tega potrdila izračuna premijo. Zavarovalnice v takem okolju tekmujejo na podlagi *a priori* diferenciacije (Denuit et al., 2007, str. 167–168).

Kjer pa trg ni reguliran in lahko vsaka zavarovalnica oblikuje svoj bonus-malus sistem, zavarovalnice med seboj tekmujejo tudi na podlagi *a posteriori* spremenljivk. V takem okolju zavarovanec težko izbere optimalno zavarovalnico, saj se med drugim razlikujejo glede na kazni v primeru škod. Poleg tega morajo zavarovalnice vedeti, v kateri razred novega zavarovanca umestiti (Denuit et al., 2007, str. 168). Pitrebois et al. (2006b) navedejo dva problema, na katera naletijo zavarovalnice, ko se na trgu uporabljajo različni bonus-malus sistemi:

- kako naj zavarovanci prehajajo iz starih v nove bonus-malus sisteme iste zavarovalnice,
- kako naj zavarovanci prehajajo med različnimi bonus-malus lestvicami različnih zavarovalnic.

V tem podpoglavju se bomo osredotočili na prvi problem.

Ko želimo zavarovanca prestaviti iz ene bonus-malus lestvice v drugo, želimo, da bo čim bližje svojemu razredu v originalni bonus-malus lestvici. Pri tem Pitrebois et al. (2006b) kot "blizu" razumejo, da je *a posteriori* učinek v novi bonus-malus lestvici čim bližje tistemu v stari lestvici.

Vzemimo torej dva bonus-malus sistema, starega in novega, pri čemer ima stari s_1 razredov, novi pa s_2. Označimo z L_1 slučajno spremenljivko, ki meri razred v stari lestvici, z L_2 pa tisto za razred v novi lestvici. Za vsak razred l_1 iz stare lestvice iščemo najbližji razred l_2 iz nove lestvice. Pitrebois et al. (2006b) predlagajo, da za vsak razred $l_1 \in \{1, \ldots, s_1\}$ iz stare lestvice poiščemo razred $l_2 \in \{1, \ldots, s_2\}$ iz nove lestvice, ki minimizira eno od spodnjih razdalj:

$$(r_{L_1=l_1} - r_{L_2=l_1})^2, \tag{27}$$

$$\max_{\theta} \left| F_{\Theta|L_1=l_1}(\theta) - F_{\Theta|L_2=l_2}(\theta) \right|, \tag{28}$$

$$\int_0^{\infty} \left| f_{\Theta|L_1=l_1}(\theta) - f_{\Theta|L_2=l_2}(\theta) \right| d\theta. \tag{29}$$

Pri minimiziranju razdalje (27) primerjamo pričakovana *a posteriori* slučajna učinka starega in novega bonus-malus sistema. Zavarovanca umestimo v novi lestvici v razred, ki ima najbližjo relativno premijo tisti v prejšnji lestvici. Ker so dejanske bonus-malus lestvice navadno normalizirane, moramo relativne premije navadno izračunati posebej.

Pri minimiziranju razdalj (28) in (29) primerjamo porazdelitvene funkcije *a posteriori* slučajnih učinkov starega in novega bonus-malus sistema.

Pitrebois et al. (2006b) ugotovijo, da uporaba različnih razdalj ne vrne zelo različnih pravil prehajanja. Zelo pa na pravila prehajanja vpliva *a priori* diferenciacija. Avtorji *a priori* diferenciacijo upoštevajo tako, da v definicijah zgornjih razdalj za $i = 1, 2$ spremenljivko $\Theta | L_i = l_i$ zamenjajo s spremenljivko $\Theta | L_i = l_i, \Lambda = \lambda$, pri čemer po Bayesovi enakosti velja

$$f_{\Theta | L_i = l_i, \Lambda = \lambda}(\theta) = \frac{\ell_{\infty l}(\lambda\theta) f_\Theta(\theta)}{\int_0^\infty \ell_{\infty l}(\lambda\xi) f_\Theta(\xi) d\xi}.$$

Avtorji ugotovijo, da ima zavarovanec z višjo *a priori* škodno pogostnostjo bistveno drugačna pravila prehajanja kot zavarovanec z nižjo škodno pogostnostjo. Vendar pa je v primeru upoštevanja *a priori* diferenciacije pri določanju pravil prehajanja med lestvicami teh pravil lahko zelo veliko, kar je v praksi težko izvedljivo.

Določanje pravil prehajanja med različnimi bonus-malus sistemi različnih zavarovalnic je mnogo bolj zapleteno kot določanje pravil prehajanja med različnimi bonus-malus sistemi ene zavarovalnice. Pomembno je, da je dobljeni prehod pravičen tako do zavarovancev, ki v sistem vstopajo, kot tudi do obstoječih zavarovancev. Če je na tržišču veliko zavarovalnic in ima vsaka svojo bonus-malus lestvico, lahko situacija postane nepregledna. V taki situaciji zavarovanci množično prehajajo med zavarovalnicami in je optimalni bonus-malus sistem ter optimalna pravila prehajanja med sistemi težko postaviti.

SKLEP

Zavarovalnice imajo pri izbiri bonus-malus sistema pred seboj težko nalogo. V konkurenčnem okolju je namreč izbira bonus-malus sistema odvisna od mnogo dejavnikov, od katerih je zagotovo najpomembnejši tržno okolje, v katerem se zavarovalnica nahaja. Zato je mnogokrat prezrt glavni namen bonus-malus sistema, to je čimboljša *a posteriori* diferenciacija zavarovancev.

V magistrskem delu smo ugotovili, da svojemu namenu, to je diferenciaciji zavarovancev med seboj, najbolje služijo strogi bonus-malus sistemi, pri katerih je stopnja zgoščevanja zavarovancev v nižjih bonus-malus razredih najnižja. Strogost bonus-malus sistema smo merili z različnimi merami učinkovitosti, ki so na opazovanih bonus-malus sistemih vrnile zelo podobne rezultate. Empirično smo pokazali, da bolj ko bonus-malus sistem kaznuje škodno dogajanje, bolj je učinkovit pri diferenciranju zavarovancev med seboj, saj so zavarovanci bolje porazdeljeni med razredi.

Ugotovili smo, da lahko učinkovitost bonus-malus sistemov izboljšamo s strožjimi prehodnimi pravili ali povečanjem razmerij med relativnimi premijami bonus-malus sistemov. Večje ko je razmerje relativnih premij, bolj bonus-malus sistem zavarovance med seboj razlikuje. Pri tem višine relativnih premij niso pomembne toliko, kolikor so pomembna razmerja med njimi. To smo pokazali s transparentnimi bonus-malus sistemi, saj bonus-malus sistemi z majhnimi razmerji med relativnimi premijami in blagimi prehodnimi pravili niso imeli pravih bonus razredov.

Pri danih predpostavkah smo izpeljali optimalne bonus-malus sisteme in ugotavljali, kako naj bi se ti bonus-malus sistemi spreminjali ob spremembah posameznih predpostavk. Ugotovili smo, da bi morali biti pri višji škodni pogostnosti bonusi večji in malusi manjši. Ker se škodna pogostnost zaradi različnih dejavnikov skozi čas spreminja, bi morali spreminjati tudi bonus-malus sisteme. Poleg tega smo pokazali, da bi bilo zaradi prepletenosti *a priori* in *a posteriori* diferenciacije smiselno, da bi zavarovalnice uporabljale različne bonus-malus lestvice za *a priori* različne zavarovance. Tako bi bila diferenciacija zavarovancev in s tem višina njihove premije primernejša.

Ker se v praksi konkurenčnost in učinkovitost bonus-malus sistema izključujeta, *a posteriori* diferenciacija ne pride do izraza. Zavarovanci namreč ne poznajo glavnega namena bonus-malus sistema, zato je za zavarovalnico manj učinkovit bonus-malus sistem bolj konkurenčen. Vendar pa, kot ugotovimo, tak sistem dolgoročno ne vzdrži. Zavarovalnice si morajo prizadevati za večjo konkurenčnost na podlagi utemeljene diferenciacije in upoštevati ter utemeljevati dolgoročno vzdržne rešitve, če želijo dolgoročno uspešno delovati. Pri tem je ključnega pomena, da uspejo tudi zavarovancem razložiti, da je strožji bonus-malus sistem pravičnejši in da imajo v takem bonus-malus sistemu dobri zavarovanci nižjo premijo kot v manj strogem bonus-malus sistemu.

LITERATURA IN VIRI

1. Álvarez Jareño, J. A., & Muñiz Rodríguez, P. (2011). *Index of ranking for bonus-malus system.* Madrid: ASTIN Colloquia.
2. Andrade e Silva, J. M., & Centeno, M. L. (2005). A note on bonus scales. *The Journal of Risk and Insurance*, *72*(4), 601–607.
3. Antonio, K., & Valdez, E. A. (2011). Statistical concepts of a priori and a posteriori risk classification in insurance. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 1–38.
4. Baione, F., Levantesi, S., & Menzietti, M. (2002). The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market. *ASTIN Bulletin*, *32*(1), 159–170.
5. Bauer, T., & Melle, L. (2007). *European motor markets.* Zurich: Swiss Reinsurance Company.
6. Bermúdez, L. (2009). A priori ratemaking using bivariate Poisson regression models. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*, 135–141.
7. Bermúdez, L., Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. *Journal of Actuarial Practice*, *9*, 84–112.
8. Bermúdez, L., & Karlis, D. (2011). Bayesian multivariate Poisson models for insurance ratemaking. *Insurance: Mathematics and Economics*, *48*, 226–236.
9. Bonsdorff, H. (1992). On the convergence rate of bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, *22*(2), 217–223.
10. Bonsdorff, H. (2005). On asymptotic properties of bonus-malus systems based on the number and on the size of the claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, *4*, 309–320.
11. *Bonus-malus pri AO.* Najdeno 3. novembra 2011 na spletnem naslovu http://www.adriatic-slovenica.si/za-fizicne-osebe/vrste-zavarovanj/vozila/motorna-vozila/avtomobilska-odgovornost-ao/bonus-in-malus-pri-ao
12. Boucher, J.-P., & Denuit, M. (2006). Fixed versus random effects in Poisson regression models for claim counts: A case study with motor insurance. *ASTIN Bulletin*, *36*(1), 285–301.
13. Boucher, J.-P., & Denuit, M. (2008). Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation. *Insurance: Mathematics and Economics*, *42*, 727–735.
14. Boucher, J.-P., Denuit, M., & Guillén, M. (2007). Risk classification for claim counts: A comparative analysis of various zero-inflated mixed Poisson and hurdle models. *North American Actuarial Journal*, *11*(4), 110–131.
15. Brouhns, N., Guillén, M., Denuit, M., & Pinquet, J. (2003). Bonus-malus scales in segmented tariffs with stochastic migration between segments. *The Journal of Risk and Insurance*, *70*(4), 577–599.
16. Coene, G., & Doray, L. G. (1996). A financially balanced bonus-malus system. *ASTIN Bulletin*, *26*(1), 107–116.
17. Comité Européen des Assurances. (2010). *CEA statistics no. 38: The European insurance*

market. Brussels: Comité Européen des Assurances.

18. Datamonitor. (2006). *UK motor insurance 2005.* London: Datamonitor.
19. De Pril, N. (1978). The efficiency of a bonus-malus system. *ASTIN Bulletin*, *10*(1), 59–72.
20. Denuit, M., & Dhaene, J. (2001). Bonus-malus scales using exponential loss functions. *Blätter der Deutshce Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, *25*, 13–27.
21. Denuit, M., Maréchal, X., Pitrebois, S., & Walhin, J. F. (2007). *Actuarial modelling of claim counts: Risk classification, credibility and bonus-malus systems.* New York: John Wiley & Sons.
22. Dionne, G., & Vanasse, C. (1989). A generalization of actuarial automobile insurance rating models: The negative binomial distribution with a regression component. *ASTIN Bulletin*, *19*, 199–212.
23. Dionne, G., & Vanasse, C. (1992). Automobile insurance ratemaking in the presence of asymetrical information. *Journal of Applied Econometrics*, *7*, 149–165.
24. Direktiva Sveta 2004/113/ES z dne 13. decembra 2004 o izvajanju načela enakega obravnavanja moških in žensk pri dostopu do blaga in storitev ter oskrbi z njimi. *Uradni list Evropske unije* L 373, 21. december 2004, 37—43.
25. Direktiva Sveta 92/49/EGS z dne 18. junija 1992 o spremembah direktiv 73/239/EGS in 88/357/EGS in o uskladitvi zakonov in drugih predpisov o neposrednem zavarovanju razen življenjskega zavarovanja (tretja direktiva o premoženjskem zavarovanju). *Uradni list Evropske unije* L 228/1, 06/Zv.1, 11. avgust 1992, 346–368.
26. Englund, M., Guillén, M., Gustafsson, J., Nielsen, L. H., & Nielsen, J. P. (2008). Multivariate latent risk: A credibility approach. *ASTIN Bulletin*, *38*(1), 137–146.
27. Frangos, N. E., & Vrontos, S. D. (2001). Design of optimal bonus-malus systems with a frequency and a severity component on an individual basis in automobile insurance. *ASTIN Bulletin*, *31*(1), 1–22.
28. Gigante, P., Picech, L., & Sigalotti, L. (2000). *Bonus-malus experience rating and rating factors.* Brussels: ASTIN Colloquia.
29. Gilde, V., & Sundt, B. (1989). On bonus systems with credibility scales. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2*, 92–107.
30. *Hitreje do bonusa.* Najdeno 3. novembra 2011 na spletnem naslovu http://www.zavtilia.si/si/avto/prednosti_ugodnosti/#k2
31. Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory using R.* Berlin: Springer.
32. Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2004). *Loss models: From data to decisions* (2nd ed.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
33. Lemaire, J. (1995). *Bonus-malus systems in automobile insurance.* Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers.
34. Lemaire, J. (1998). Bonus-malus mystems: The European and Asian approach to merit-rating. *North American Actuarial Journal*, *2*(1), 26–38.
35. Loimaranta, K. (1972). Some asymptotic properties of bonus systems. *ASTIN Bulletin*,

6(3), 233–245.

36. Morillo, I., & Bermúdez, L. (2003). Bonus-malus systems using an exponential loss function with an inverse Gaussian distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, *33*, 49–57.
37. Nelder, J. A., & Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, *135*(3), 370–384.
38. Norberg, R. (1976). A credibility theory for automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*, 92–107.
39. Park, S., Lemaire, J., & Chua, C. T. (2010). Is the design of bonus-malus systems influenced by insurance maturity or national culture? - Evidence from Asia. *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice*, *35*(1), 7–27.
40. Pinquet, J. (1997). Allowance for cost of claims in bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, *27*(1), 33–57.
41. Pinquet, J. (1998). Designing optimal bonus-malus systems from different types of claims. *ASTIN Bulletin*, *28*(2), 205–220.
42. Pinquet, J., Guillén, M., & Bolancé, C. (2001). Allowance for the age of claims in bonus-malus systems. *ASTIN Bulletin*, *31*(2), 337–348.
43. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2003a). Fitting the Belgian bonus-malus system. *Belgian Actuarial Bulletin*, *3*(1), 58–62.
44. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2003b). *Marketing and bonus-malus systems.* Brussels: ASTIN Colloquia.
45. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2003c). Setting a bonus-malus scale in the presence of other rating factors: Taylor's work revisited. *ASTIN Bulletin*, *33*(2), 419–436.
46. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2004). Bonus-malus scales in segmented tariffs: Gilde & Sundt's work revisited. *Australian Actuarial Journal*, *10*(1), 107–125.
47. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2006a). An actuarial analysis of the French bonus-malus system. *Scandinavian Actuarial Journal*, *5*, 247–264.
48. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2006b). How to transfer policyholders from one bonus-malus scale to the other. *Blatter Deutsche Gesellschaft fur Versicherungsmathematik*, *27*(4), 607–617.
49. Pitrebois, S., Denuit, M., & Walhin, J. F. (2006c). Multi-event bonus-malus scales. *The Journal of Risk and Insurance*, *73*(2), 517–528.
50. Sodba Sodišča (veliki senat) z dne 1. marca 2011 (predlog za sprejetje predhodne odločbe Cour constitutionnelle – Belgija) – Association Belge des Consommateurs Test- Achats ASBL, Yann van Vugt, Charles Basselier proti Conseil des ministres (Zadeva C-236/09). *Uradni list Evropske unije* C 130/4, 30. april 2011, 2011/C 130/06.
51. Subramanian, K. (1998). Bonus-malus systems in a competitive environment. *North American Actuarial Journal*, *2*(1), 38–44.
52. Taylor, G. (1997). Setting a bonus-malus scale in the presence of other rating factors. *ASTIN Bulletin*, *27*(2), 319–327.

53. Tremblay, L. (1992). Using the Poisson inverse Gaussian in bonus-malus system. *ASTIN Bulletin*, *22*(1), 97–106.
54. Verico, P. (2002). Bonus-malus systems: “Lack of transparency” and adequacy measure. *ASTIN Bulletin*, *32*(2), 315–318.
55. Viswanathan, K. S., & Lemaire, J. (2005). Bonus-malus systems in a deregulated environment: Forecasting market shares using diffusion models. *ASTIN Bulletin*, *35*(1), 299–319.
56. Wieduwilt, K., & Grünig, R. (2002). *Minimum covers in European liability insurance.* Zurich: Swiss Reinsurance Company.
57. Zavarovalnica Triglav, d.d. (2011). *Splošni pogoji za zavarovanje avtomobilske odgovornosti.* Ljubljana: Zavarovalnica Triglav, d.d.

PRILOGA

Priloga 1: Prehodne matrike bonus-malus sistemov

V Tabelah 1, 2, 3, 4 in 5 prikazujemo podatke o opazovanih bonus-malus sistemih. V tabelah so v prvem stolpcu zaporedne številke bonus-malus razredov, v drugem pripadajoča relativna premija, v tretjem pa je z enico označen začetni razred, torej razred, v katerega vstopi zavarovanec brez znane škodne zgodovine. V zadnjih šestih stolpcih so prikazane številke bonus-malus razredov kamor umestimo zavarovanca, ki je v preteklem letu prijavil k škod.

Tabela 1: Belgijski bonus-malus sistem

Razred	**Relativna premija**	**Začetni razred**	**Bonus-malus razred v primeru *k* škod**					
			$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k\geq 5$
1	54%	0	1	5	10	15	20	23
2	54%	0	1	6	11	16	21	23
3	54%	0	2	7	12	17	22	23
4	57%	0	3	8	13	18	23	23
5	60%	0	4	9	14	19	23	23
6	63%	0	5	10	15	20	23	23
7	66%	0	6	11	16	21	23	23
8	69%	0	7	12	17	22	23	23
9	73%	0	8	13	18	23	23	23
10	77%	0	9	14	19	23	23	23
11	81%	0	10	15	20	23	23	23
12	85%	1	11	16	21	23	23	23
13	90%	0	12	17	22	23	23	23
14	95%	0	13	18	23	23	23	23
15	100%	0	14	19	23	23	23	23
16	105%	0	15	20	23	23	23	23
17	111%	0	16	21	23	23	23	23
18	117%	0	17	22	23	23	23	23
19	123%	0	18	23	23	23	23	23
20	130%	0	19	23	23	23	23	23
21	140%	0	20	23	23	23	23	23
22	160%	0	21	23	23	23	23	23
23	200%	0	22	23	23	23	23	23

Vir: J. Lemaire, Bonus-malus systems in automobile insurance, 1995, tabela B-2.

Tabela 2: Nemški bonus-malus sistem

Razred	**Relativna premija**	**Začetni razred**	**Bonus-malus razred v primeru *k* škod**					
			$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k \geq 5$
1	30%	0	1	10	14	16	22	22
2	35%	0	1	10	14	16	22	22
3	35%	0	2	10	14	16	22	22
4	35%	0	3	10	14	16	22	22
5	40%	0	4	12	15	17	22	22
6	40%	0	5	13	16	17	22	22
7	40%	0	6	13	16	17	22	22
8	40%	0	7	14	16	17	22	22
9	40%	0	8	14	16	17	22	22
10	45%	0	9	14	16	17	22	22
11	45%	0	10	15	17	18	22	22
12	50%	0	11	15	17	18	22	22
13	55%	0	12	16	17	18	22	22
14	60%	0	13	16	17	18	22	22
15	65%	0	14	17	18	19	22	22
16	70%	0	15	17	18	19	22	22
17	85%	0	16	18	19	22	22	22
18	100%	0	17	19	22	22	22	22
19	125%	1	18	20	22	22	22	22
20	155%	0	18	22	22	22	22	22
21	175%	0	18	22	22	22	22	22
22	200%	0	18	22	22	22	22	22

Vir: J. Lemaire, Bonus-malus systems in automobile insurance, 1995, tabela B-8.

Tabela 3: Bonus-malus sistem Zavarovalnice Triglav

Razred	**Relativna premija**	**Začetni razred**	**Bonus-malus razred v primeru *k* škod**					
			$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k \geq 5$
1	50%	0	1	4	7	10	13	13
2	55%	0	1	5	8	11	14	14
3	60%	0	2	6	9	12	15	15
4	65%	0	3	7	10	13	16	16
5	70%	0	4	8	11	14	17	17
6	75%	0	5	9	12	15	17	17
7	80%	0	6	10	13	16	17	17
8	85%	0	7	11	14	17	17	17
9	90%	0	8	12	15	17	17	17
10	95%	0	9	13	16	17	17	17
11	100%	1	10	14	17	17	17	17
12	110%	0	11	15	17	17	17	17
13	120%	0	12	16	17	17	17	17
14	135%	0	13	17	17	17	17	17
15	150%	0	14	17	17	17	17	17
16	170%	0	15	17	17	17	17	17
17	200%	0	16	17	17	17	17	17

Vir: Zavarovalnica Triglav, Splošni pogoji za zavarovanje avtomobilske odgovornosti, 2011.

Tabela 4: Bonus-malus sistem Adriatic Slovenice

Razred	**Relativna premija**	**Začetni razred**	**Bonus-malus razred v primeru *k* škod**					
			$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k\geq 5$
1	45%	0	1	4	7	10	13	13
2	50%	0	1	5	8	11	14	14
3	55%	0	2	6	9	12	15	15
4	60%	0	3	7	10	13	16	16
5	65%	0	4	8	11	14	17	17
6	70%	0	5	9	12	15	18	18
7	75%	0	6	10	13	16	18	18
8	80%	0	7	11	14	17	18	18
9	85%	0	8	12	15	18	18	18
10	90%	0	9	13	16	18	18	18
11	95%	0	10	14	17	18	18	18
12	100%	1	11	15	18	18	18	18
13	110%	0	12	16	18	18	18	18
14	120%	0	13	17	18	18	18	18
15	135%	0	14	18	18	18	18	18
16	150%	0	15	18	18	18	18	18
17	170%	0	16	18	18	18	18	18
18	200%	0	17	18	18	18	18	18

Vir: Bonus-malus pri AO, 2011.

Tabela 5: Bonus-malus sistem Zavarovalnice Tilia

Razred	**Relativna premija**	**Začetni razred**	**Bonus-malus razred v primeru *k* škod**					
			$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k\geq 5$
1	50%	0	1	4	7	10	13	13
2	50%	0	1	5	8	11	14	14
3	50%	0	1	6	9	12	15	15
4	50%	0	2	7	10	13	16	16
5	55%	0	3	8	11	14	17	17
6	60%	0	4	9	12	15	18	18
7	65%	0	5	10	13	16	19	19
8	70%	0	6	11	14	17	20	20
9	75%	0	7	12	15	18	20	20
10	80%	0	8	13	16	19	20	20
11	85%	0	9	14	17	20	20	20
12	90%	0	10	15	18	20	20	20
13	95%	0	12	16	19	20	20	20
14	100%	1	13	17	20	20	20	20
15	110%	0	14	18	20	20	20	20
16	120%	0	15	19	20	20	20	20
17	135%	0	16	20	20	20	20	20
18	150%	0	17	20	20	20	20	20
19	170%	0	18	20	20	20	20	20
20	200%	0	19	20	20	20	20	20

Vir: Hitreje do bonusa, 2011.