

UNIVERZA V LJUBLJANI  
EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

BOŠTJAN BARUT



UNIVERZA V LJUBLJANI  
EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

**UPORABA LEE-CARTERJEVEGA MODELA ZA IZDELAVO  
PROJEKCIJE STAROSTNO SPECIFIČNIH STOPENJ  
SMRTNOSTI SLOVENSKE POPULACIJE**

Ljubljana, april 2010

BOŠTJAN BARUT

## IZJAVA

Študent **Boštjan Barut** izjavljam, da sem avtor tega diplomskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom **doc. dr. Aleša Ahčana**, in da dovolim njegovo objavo na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 28.4.2010

Podpis: \_\_\_\_\_

## KAZALO

<b>UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>1 OPREDELITEV SMRTNOSTI</b> .....	<b>2</b>
1.1 STAROSTNO SPECIFIČNE STOPNJE SMRTNOSTI .....	2
1.2 TRENDI SMRTNOSTI V 20. STOLETJU .....	3
1.2.1 <i>Trendi starostno specifičnih stopenj smrtnosti</i> .....	3
1.2.2 <i>Trendi krivulje preživetja v 20. stoletju</i> .....	5
<b>2 ZGODOVINA RAZVOJA MODELOV ZA NAPOVEDOVANJE SMRTNOSTI</b> ....	<b>7</b>
2.1 PRVI MODELI ZA NAPOVEDOVANJE SMRTNOSTI .....	7
2.2 ZAČETNI PRISPEVKI K RAZVOJU MODELOV.....	7
2.3 MODERNI PRISPEVKI.....	8
2.4 NEDAVNI PRISPEVKI.....	8
<b>3 LEE-CARTERJEV MODEL</b> .....	<b>10</b>
3.1 DELITVE MODELOV.....	10
3.2 PREDSTAVITEV LEE-CARTERJEVEGA MODELA .....	11
3.2.1 <i>Lee-Carter-jev model</i> .....	12
3.2.2 <i>Nastavitev modela</i> .....	13
3.3 UPORABA LEE-CARTERJEVEGA MODELA ZA IZDELAVO NAPOVEDI PRIČAKOVANIH STAROSTNO SPECIFIČNIH STOPENJ SMRTNOSTI ZA SLOVENIJO .....	13
3.3.1 <i>Podatki</i> .....	14
3.3.2 <i>Pogoji za izdelavo modela</i> .....	15
3.3.3 <i>Metoda najmanjših kvadratov</i> .....	15
3.3.4 <i>Rezultati izračunov</i> .....	18
3.3.5 <i>Primerjava izračunanih vrednosti z dejanskimi</i> .....	23
3.3.6 <i>Projekcija <math>k_t</math></i> .....	24
3.3.7 <i>Izračun verjetnostnih intervalov <math>k_t</math></i> .....	25
3.3.8 <i>Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti</i> .....	29
3.3.9 <i>Slabosti Lee-Carterjevega modela</i> .....	32
<b>SKLEP</b> .....	<b>35</b>
<b>LITERATURA IN VIRI</b> .....	<b>36</b>

## KAZALO TABEL

Tabela 1: Izračunane vrednosti $a_x$ in $b_x$ za moško in žensko populacijo po starostnih razredih. ....	18
Tabela 2: Izračunane vrednosti $k_t$ za moško in žensko slovensko populacijo po letih. ....	21
Tabela 3: Odmiki mej verjetnostnih intervalov $k_t$ slovenske ženske populacije v letih 2008-2032 od centralne napovedi. ....	26
Tabela 4: Odmiki mej verjetnostnih intervalov $k_t$ slovenske moške populacije v letih 2008-2032 od centralne napovedi. ....	27
Tabela 5: Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije. ....	29
Tabela 6: Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije. ....	30

## KAZALO SLIK

Slika 1: Graf starostno specifičnih stopenj smrtnosti moških in žensk v Sloveniji leta 2007. ....	3
Slika 2: Grafa starostno specifičnih smrtnosti moških (zgoraj) in žensk (spodaj) v Belgiji v obdobjih 1880-1890, 1929-1932, 1968.-1972 in 2000-2002. ....	4
Slika 3: Trendi krivulje preživetja. ....	5
Slika 4: Krivulje preživetja belgijske moške (zgoraj) in belgijske ženske (spodaj) populacije v obdobjih 1880-1890, 1929-1932, 1968.-1972 in 2000-2002. ....	6
Slika 5: Krivulja starostno specifičnih smrtnosti sestavljena iz treh komponent. ....	9
Slika 6: Splošna oblika krivulje smrtnosti $a_x$ slovenske ženske populacije po starostnih razredih. ....	19
Slika 7: Splošna oblika krivulje smrtnosti $a_x$ slovenske moške populacije po starostnih razredih. ....	19
Slika 8: Krivulja $b_x$ slovenske ženske populacije po starostnih razredih. ....	20
Slika 9: Krivulja $b_x$ slovenske moške populacije po starostnih razredih. ....	20
Slika 10: Izračunane vrednosti $k_t$ slovenske ženske populacije. ....	22
Slika 11: Izračunane vrednosti $k_t$ slovenske moške populacije. ....	22
Slika 12: Primerjava logaritmov izračunanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v starostnih razredih 20-24, 40-44, 60-64 in 80-84 v obdobju od leta 1966 do 2007. ....	23
Slika 13: Graf izračunanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v vseh starostnih razredih v letih 1966 in 2006. ....	24
Slika 14: Graf dejanskih vrednosti $k_t$ in regresijske funkcije $k_t$ slovenske ženske populacije. ....	25
Slika 15: Graf dejanskih vrednosti $k_t$ in regresijske funkcije $k_t$ slovenske moške populacije. ....	25
Slika 16: Projekcija $k_t$ slovenske ženske populacije z verjetnostnimi intervali 80%, 90%, 95% in 98%. ....	28
Slika 17: Projekcija $k_t$ slovenske moške populacije z verjetnostnimi intervali 80%, 90%, 95% in 98%. ....	28
Slika 18: Graf logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v letih 1970, 1990 ter projekcij v letih 2010, 2030, 2050 in 2070. ....	31
Slika 19: Graf logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije v letih 1970, 1990 ter projekcij v letih 2010, 2030, 2050 in 2070. ....	31
Slika 20: Graf starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije v letih 1970, 2007 ter projekcij v letih 2018, 2032 in 2070. ....	34

## UVOD

V dvajsetem stoletju se je pričakovana življenjska doba hitro podaljševala tako v Sloveniji kot tudi v drugih državah. Iz podatkov Statističnega urada Republike Slovenije je razvidno, da je bila povprečna starost umrlih v letu 1966 58,7 let za moške in 66,5 za ženske. V letu 2007 pa je bila povprečna starost umrlih 69,1 let za moške in 78,2 za ženske. Hitro spoznanje, da se je življenjska doba v 42 letih podaljšala pri moških za 10,4 let in 11,7 let pri ženskah, nam prikazuje kako pomembno je poznavanje demografskih sprememb. Takšne demografske spremembe ponavadi smatramo za dobre, saj živimo dlje od naših prednikov, vendar se moramo ob tem zavedati, da imajo tudi velik vpliv na socialne sisteme v državi. Socialni sistemi niso pripravljeni na velike demografske spremembe, saj tako hitro podaljševanje življenjske dobe ni bilo pričakovano, kar se v Sloveniji še posebej kaže pri pokojninskem zavarovanju, saj je že danes jasno, da bodo razmere kmalu postale nevzdržne. Tudi kadar uporabljamo posodobljene tablice smrtnosti, te ne zajemajo trendov v prihodnosti in prav ti trendi predstavljajo tveganje za izplačevalce rent. Tveganje podcenjevanja verjetnosti preživetja je poznano pod imenom tveganje dolgoživosti. Tveganje dolgoživosti je problem tako za zavarovanca kot za institucijo, ki ga zavaruje.

Za posameznika ne moremo vedeti, koliko časa bo živel, lahko pa ocenimo, koliko časa bodo v povprečju živeli ljudje določene populacije. Ker si ljudje želimo biti preskrbljeni do konca svojega življenja varčujemo v različnih oblikah in si s tem poizkušamo zagotoviti dohodek na stara leta. Institucije, pri katerih varčujemo, potrebujejo čim bolj natančne ocene o pričakovani življenjski dobi, saj nam lahko le na ta način enakomerno izplačajo privarčevana sredstva ... Seveda ne morejo za vsakega posameznika izračunati njegove življenjske dobe, zato se zanašajo na zakon velikih števil. Vendar pa zakon velikih števil pri tveganju dolgoživosti odpove, saj se nam premakne povprečna vrednost in so zato potrebne natančne projekcije, na katere se lahko zanesemo. Če pri teh napovedih pride do napak, bodo oškodovani varčevalci ali pa institucije, pri katerih varčujejo, zato je zelo pomembno, da so projekcije natančne in pravilne.

Namen diplomske naloge je izdelati projekcijo starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske populacije, na katero se bomo lahko zanesli in jo bomo uporabili kot podlago za zavarovanje pred tveganjem dolgoživosti. Z izračuni in projekcijami se bodo ukvarjali predvsem aktuarji v zavarovalnicah in drugih institucijah, ki izplačujejo doživljenjske rente, koristi pa bodo imeli prav vsi zavarovanci. Natančne projekcije omogočajo zavarovalnicam, da bolj natančno ocenijo izplačila, ki jih čakajo v prihodnosti, in zato lahko ponudijo zavarovanja po pravičnejših cenah ob zavedanju, da so tveganja za njih in za zavarovance manjša.

Projekcijo starostno specifičnih stopenj smrtnosti bomo izdelali z uporabo Lee-Carterjevega modela, ki sta ga avtorja razvila za izdelavo projekcij starostno specifičnih stopenj smrtnosti ameriške populacije.

V prvem poglavju bomo predstavili osnovne značilnosti smrtnosti, ki so pomembne za izdelavo projekcij. Tako bomo opazovali, kako so se trendi smrtnosti spreminjali v preteklosti. V drugem poglavju sledi kratek pregled zgodovine razvoja modelov, na podlagi katerih so izdelovali projekcije smrtnosti. V tretjem poglavju bomo podrobno predstavili Lee-Carterjev model in z njegovo uporabo izdelali projekcijo starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske populacije.

## 1 OPREDELITEV SMRTNOSTI

Med vsemi demografskimi procesi se je demografija najprej začela zanimati za smrtnost, za katero se v slovenščini uporablja tudi izraz umrljivost. Demografska statistika definira smrt kot nastop trajne odsotnosti kakršnegakoli znaka življenja po živem rojstvu. Na ta način je smrt definirana kot dogodek. Dva glavna kriterija, po katerih lahko preučujemo smrtnost sta starost in vzrok smrti.

Na življenje človeka lahko gledamo kot na življenjski cikel, katerega značilnost je staranje. Za posameznika je značilno, da odrašča in dozoreva do spolne zrelosti, nakar doseže biološki vrhunec, verjetno nekje med 20. in 30. letom starosti. Temu sledi postopna akumulacija fizioloških pomanjkljivosti, kar pomeni naraščanje verjetnosti smrti. Začenjajo se pojavljati znaki starosti (Malačič, 2006, str. 111).

### 1.1 Starostno specifične stopnje smrtnosti

**Starostno specifična stopnja umrljivosti** je razmerje med številom umrlih določene starosti v koledarskem letu in številom prebivalstva enake starosti sredi istega leta, pomnoženo s 1000, v tujini včasih tudi s 100.000, saj imajo večjo populacijo in so zato takšni podatki smiselni. Izračunavamo jih za vsak spol posebej po formuli (1).

$$m_{m,x} = \frac{M_{m,x}}{P_{m,x(30.6)}} * 1000 \quad (1)$$

$m_{m,x}$ ;  $m_{f,x}$  = starostno specifična stopnja umrljivosti moških oziroma žensk

$M_{m,x}$ ;  $M_{f,x}$  = število umrlih moških oziroma žensk, starih x let

$P_{m,x(30.6)}$ ;  $P_{f,x(30.6)}$  = število moških oziroma žensk, starih x let, 30. junija

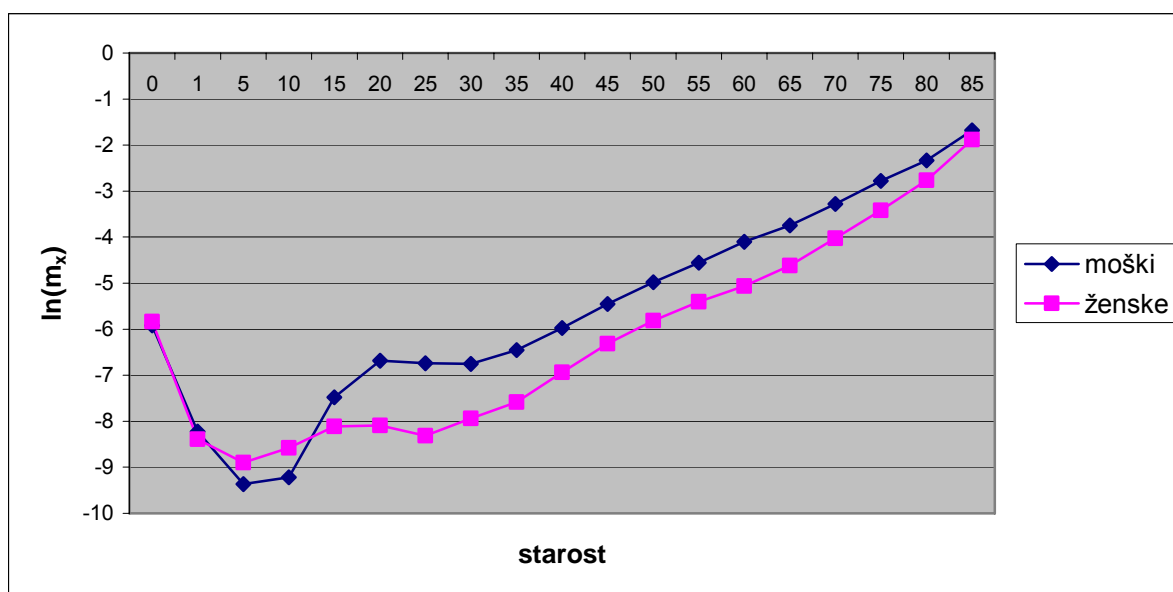
Starostno specifične stopnje smrtnosti so za mednarodne primerjave bistveno bolj primerne od splošne stopnje smrtnosti, saj na ta način izločimo vpliv starostne strukture prebivalstva. Število umrlih na 1000 prebivalcev je bistveno višje pri prebivalstvih s staro kot pri prebivalstvih z mlado strukturo prebivalstva, saj imajo ti več prebivalcev v starostnih razredih z višjimi stopnjami umrljivosti.

Slika 1 prikazuje starostno specifične stopnje smrtnosti v Sloveniji leta 2007. Na abscisni osi imamo starost, na ordinatni pa naravni logaritem starostno specifičnih stopenj umrljivosti.



Naravni logaritem na ordinatni osi smo uporabili zaradi večje preglednosti grafa, saj krivulja starostno specifičnih stopenj smrtnosti eksponentno narašča. Kot lahko opazimo iz grafa, je smrtnost v prvem letu po rojstvu zelo visoka, nato pa strmo upade in doseže najnižjo raven okoli 10. leta starosti. Nato začne naraščati, še posebej pri moški populaciji lahko opazimo strm vzpon in grbo smrtnosti med 15. in 25. letom, ki je posledica mladostniške norosti. V to mladostniško norost štejemo predvsem nesreče s smrtnim izidom in samomore. Krivulja nato eksponentno narašča, dokler se njena rast ne začne upočasnjevati pred koncem življenjskega cikla, kjer krivulja doseže najvišjo vrednost (Pitacco, Denuit, Haberman & Olivieri, 2009, str. 97).

Slika 1: Graf starostno specifičnih stopenj smrtnosti moških in žensk v Sloveniji leta 2007.



Vir: Statistični letopis Republike Slovenije 2008, str. 87, tabela 4.13.

Kot je razvidno iz grafa, je krivulja smrtnosti moških večino časa nad krivuljo žensk, kar pomeni, da je smrtnost moških skozi celotno obdobje izrazito višja od smrtnosti žensk. Izjema v letu 2007 je obdobje med 5. in 15. letom starosti, ki je najverjetneje posledica majhnega vzorca, ki ga predstavlja slovenska populacija, saj je ponavadi tudi v tem obdobju smrtnost žensk nižja od smrtnosti moških.

## 1.2 Trendi smrtnosti v 20. stoletju

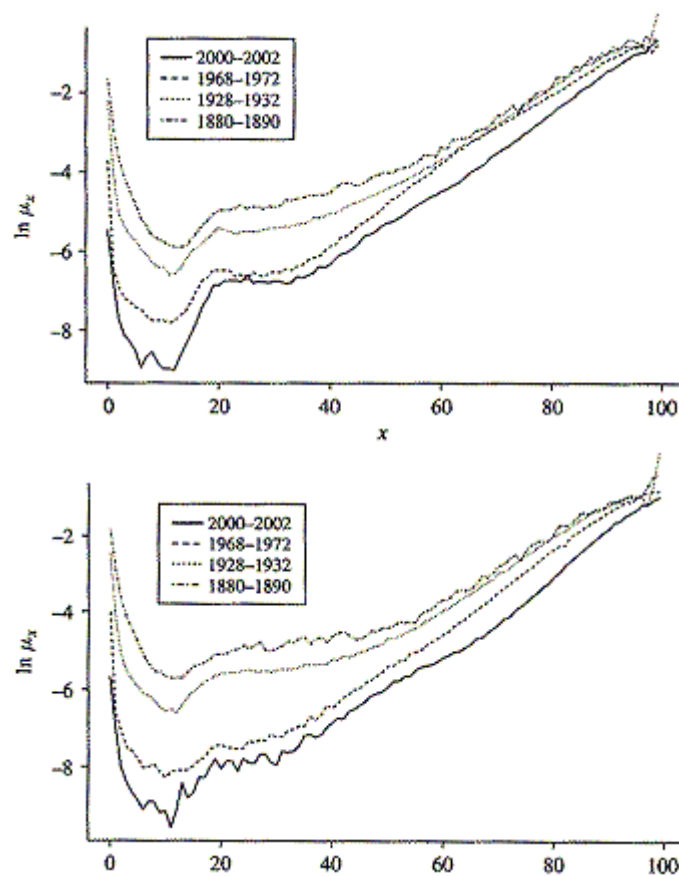
Da bomo lažje razumeli spremembe v smrtnosti v prihodnosti, si najprej oglejmo trende 20. stoletja. Trende smrtnosti v 20. stoletju je za belgijsko populacijo predstavil Michel Denuit.

### 1.2.1 Trendi starostno specifičnih stopenj smrtnosti

Trende za Belgijo si bomo ogledali, ker so na voljo podatki za daljše obdobje kot za Slovenijo. Na sliki 2 sta prikazana grafa logaritmov starostno specifičnih smrtnosti moških (zgoraj) in žensk (spodaj) v Belgiji v obdobjih 1880-1890, 1929-1932, 1968.-1972 in 2000-

2002. Iz slike je razvidno, da je v 20. stoletju prišlo do velikih sprememb. Prisoten je močan trend zniževanja smrtnosti, ki ga na grafu opazimo kot premik krivulj navzdol. Opazimo tudi, da je v opazovanem obdobju prišlo do sprememb v obliki krivulj. Iz grafa je dobro razvidno, da je do največjega napredka v zmanjšanju smrtnosti v 20. stoletju prišlo v mlajših letih človeškega življenja. To izboljšanje je predvsem posledica obvladovanja infekcijskih bolezni. Znižanje smrtnosti v preteklem stoletju za starostno skupino 20-30 let ženske populacije je posledica znižanja smrtnosti ob porodih. Grba smrtnosti okoli 18-25 leta starosti je postala zelo izrazita, še posebej pri mladih moških. Nesreče, poškodbe in samomori predstavljajo glavnino razlike med smrtnostjo moških in žensk pred 45 letom starosti.

Slika 2: Grafa starostno specifičnih smrtnosti moških (zgoraj) in žensk (spodaj) v Belgiji v obdobjih 1880-1890, 1929-1932, 1968.-1972 in 2000-2002.



Vir: E. Pitacco, M. Denuit, S. Haberman, & A. Olivieri, *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, 2009, str. 98, slika 3.2.

Za belgijske moške v starosti 20 let je prišlo do strukturne spremembe med leti 1940 in 1950, ko se je smrtnost iz visokih ravni zelo znižala. Od leta 1950 pa do danes je smrtnost moških v starosti 20 let upadala zelo počasi. To je še posebej značilno za grbo smrtnosti, pri kateri se moška smrtnost ni dosti znižala že od leta 1970. Pri starosti 40 let je, podobno kot pri starosti 20 let, po drugi svetovni vojni prišlo do znižanja smrtnosti. Po tem hitrem znižanju je bilo upadanje počasno vse od leta 1960, a vendar vseeno nekoliko hitrejšo kot v starostnem

razredu 20 let. V starostnih razredih 60 in 80 let je smrtnost do leta 1970 upadala počasi, nato pa je začela upadati veliko hitreje.

Za belgijsko žensko populacijo pri starosti 20 in 40 let veljajo podobne lastnosti kot za moško populacijo, a z nekaj razlikami. Pri dvajsetih letih starosti opazimo upočasnitev upadanja smrtnosti okoli leta 1955. Pri štiridesetih letih starosti pa pride do upočasnitve upadanja smrtnosti po 1960 letu. V višjih starostnih razredih raven upadanja močno naraste šele po 1980 letu. Ta značilnost, da smrtnost hitreje upada v višjih starostnih razredih je bila opažena v več razvitih evropskih državah (Pitacco et al., 2009, str. 98).

V prilogi 1 je predstavljen graf starostno specifičnih smrtnosti za Slovenijo v letih 1966, 1976, 1986, 1996 in 2006, iz katerega so razvidne spremembe v smrtnosti slovenske moške populacije v zadnjih 40-ih letih.

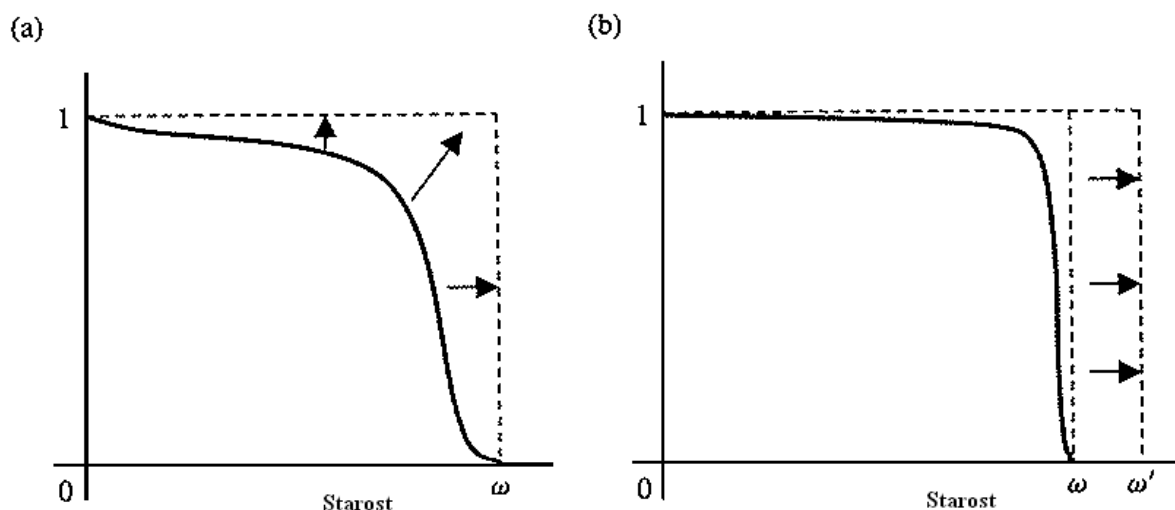
### 1.2.2 Trendi krivulje preživetja v 20. stoletju

Krivulja preživetja nam prikazuje odstotek ljudi, ki so živi ob določeni starosti. Zapišemo jo lahko s formulo (2), v kateri  $l_x$  predstavlja število živih ljudi starih  $x$  let, ki so predstavniki skupine, ki je imela na začetku opazovanja  $l_0$  predstavnikov.

$$l_x = l_0 * S(x) \quad (2)$$

Tablice smrtnosti bi lahko uporabili kot tabelo, ki opisuje krivuljo preživetja. Ta krivulja nam lepo ponazarja zakonitosti umiranja prebivalstva v odvisnosti od starosti.

Slika 3: Trendi krivulje preživetja.



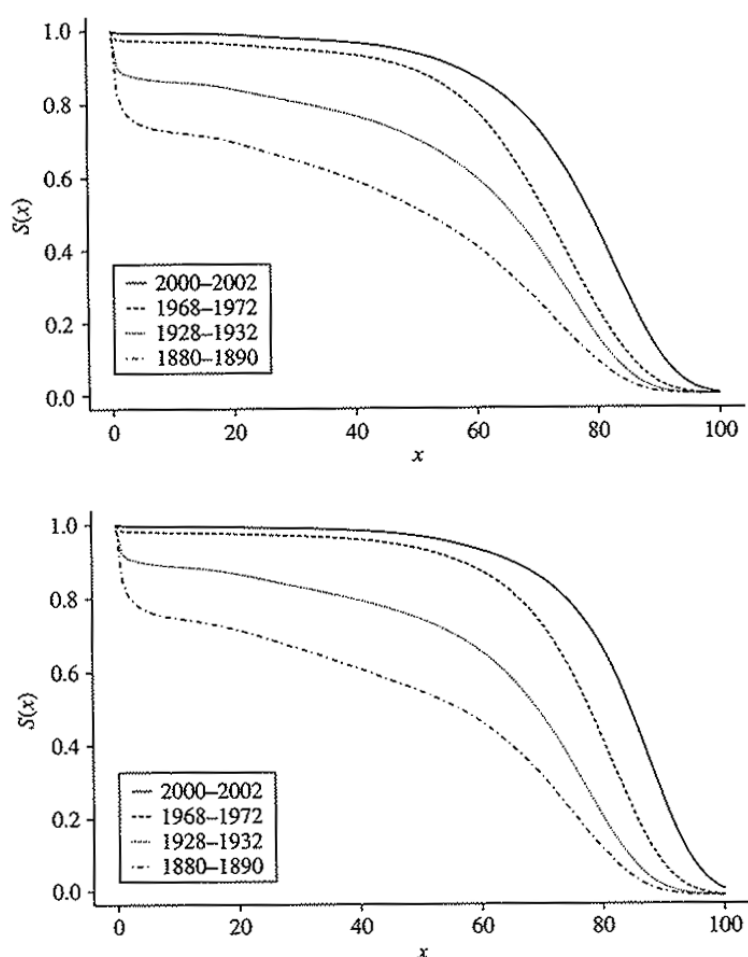
Vir: E. Pitacco, M. Denuit, S. Haberman, & A. Olivieri, *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, 2009, str. 138, slika 4.1.

Spremembe krivulje preživetja se kažejo v treh značilnostih. Prva značilnost je prikazana na sliki 3(a) in prikazuje, kako se krivulja preživetja premika v obliko pravokotnika. Povečuje se

koncentracija ljudi, ki umrejo okoli modusa. Druga značilnost je, kot posledica prve lastnosti, da se modus krivulje preživetja premika proti višjim starostim - temu pojavu pravimo razširitev krivulje preživetja. Druga značilnost je prikazana na sliki 3(b). Tretja značilnost pa je večja razpršitev smrti v mladih letih kot posledica nesreč. To je tako imenovana grba smrtnosti, ki je še posebej značilna za moško populacijo (Pitacco et al., 2009, str. 138).

Opisani trendi krivulje preživetja so lepo razvidni iz belgijskih podatkov, ki smo jih prikazali že v poglavju 1.2.1. Slika 4 prikazuje krivulje preživetja belgijske populacije za obdobja 1880-1890, 1928-1932, 1968-1972 in 2000-2002. Na zgornjem grafu so krivulje preživetja moške populacije, na spodnjem grafu pa so prikazane krivulje ženske populacije v naštetih obdobjih.

Slika 4: Krivulje preživetja belgijske moške (zgoraj) in belgijske ženske (spodaj) populacije v obdobjih 1880-1890, 1929-1932, 1968.-1972 in 2000-2002.



Vir: E. Pitacco, M. Denuit, S. Haberman, & A. Olivieri, *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, 2009, str. 110, slika 3.11

Za boljšo ponazoritev trendov spreminjanja krivulje preživetja si lahko ogledamo sliko 4, na kateri sta predstavljeni krivulji preživetja moške in ženske belgijske populacije v obdobju

1880-2002. Prvi dve zgoraj opisani lastnosti sta zelo lepo razvidni iz grafov, saj krivulji postajata vedno bolj pravokotni, modus pa se prav tako premika k višji starosti. Tretjo lastnost lahko opazimo v majhni razliki na grafu med moško in žensko populacijo pri starosti okoli 20 let, vendar je ta značilnost veliko bolj izrazito prikazana na grafu starostno specifičnih smrtnosti (slika 2) (Pitacco et al., 2009, str. 110).

## **2 Zgodovina razvoja modelov za napovedovanje smrtnosti**

### **2.1 Prvi modeli za napovedovanje smrtnosti**

Prvi model za napovedovanje pričakovane smrtnosti je najverjetneje sestavil švedski astronom H. Gylden. Svoje delo je predstavil Swedish Assurance Association v letu 1875, ko je grafično postavil premico, ki se je prilegala stopnjam smrtnosti švedske populacije v letih med 1750 in 1870. Nato je s podaljšanjem te premice tudi ekstrapoliral obnašanje smrtnosti švedske populacije v prihodnosti. Na podoben način je grafično ponazoril gibanje norveške populacije tudi T. Richardt, ki je svoje izračune uporabil za izračune pokojninskih skladov (Cramer & Wold, 1935, str. 168).

Trende smrtnosti in njihove vplive na življenjska zavarovanja in pokojninske sklade so začeli preučevati v začetku 20. stoletja, saj so se na področju aktuarstva po tem pojavile velike potrebe. Nordenmark je leta 1906 izpostavil, da je potrebno upoštevati izboljšave v smrtnosti, še posebej pri življenjskih rentah. Izpostavil je tudi, da je pri tem potrebno upoštevati kohortno smrtnost, ker le tako lahko izračunamo obveznosti, ki jih bo zavarovalnica imela do zavarovanca (Pitacco et al., 2009, str. 176).

Prve tablice smrtnosti je leta 1912 sestavil A. Lindstedt, ki je uporabil podatke iz gibanja švedske populacije, in tako za vsako starostno skupino  $x$  ekstrapoliral zaporedje letnih verjetnosti smrti. Iz tako zbranih podatkov  $q_x(t)$  je sestavil prve tablice smrtnosti, za izračun katerih je uporabljal horizontalni pristop. Ta njegov prispevek je bil verjetno prva projekcija starostno specifičnih funkcij (Cramer & Wold, 1935, str. 169).

### **2.2 Začetni prispevki k razvoju modelov**

Blaschke (v Pitacco et al., 2009, str. 176) je leta 1923 v modelu, ki je bil osnovan na teoriji Makehama, uporabil vertikalni pristop. Makehamove parametre je izračunal za tablice smrtnosti za vsako leto posebej na podlagi podatkov, nato pa je z ekstrapolacijo izračunal tri iskane parametre tudi za prihodnost.

Leta 1924 je Institute of Actuaries v Londonu predlagal horizontalno metodo za projekcijo smrtnosti, pri kateri so upoštevali, da verjetnosti smrtnosti v času naraščajo eksponentno. Od tu tudi izhaja ime eksponentni model. Eksponente modele, na osnovi začetnih modelov, še

danes uporabljajo v aktuarstvu za izračune pričakovane življenjske dobe (Cramer & Wold, 1935, str. 170).

Leta 1927 sta A.R. Davidson in A.R. Reid izdelala model, ki uporablja diagonalno metodo in je osnovan na teoriji Makehama. S tem lahko zaključimo z osnovnimi prispevki k napovedovanju pričakovanih smrtnosti. Sledijo pa modernejši prispevki, ki nadgrajujejo teorijo svojih predhodnikov (Davidson & Reid, 1927, str. 185).

### 2.3 Moderni prispevki

Modernejše prispevke k modeliranju smrtnosti in projekcijam smrtnosti, ki so jih v drugi polovici dvajsetega stoletja prispevali demografi, bi lahko strnili v tri najpomembnejše predloge: optimalne tablice smrtnosti (optimal life table), modelske tablice (model tables) in relacijske metode (relational methods).

Idejo optimalnih tablic smrtnosti je leta 1952 predstavil Bourgeois-Pichat. Glavno vprašanje je bilo: »Ali lahko smrtnost upada v neskončno ali imamo kakšno mejo? Če jo imamo, kakšna je ta meja?« Medtem ko večina metod za modeliranje smrtnosti ekstrapolira opazovane trende iz preteklosti, nam ta metoda omogoča drugačen pristop k modeliranju prihodnjih smrtnosti. Z metodo optimalnih tablic imamo drugačen pristop, saj z interpolacijo preteklih podatkov in tabelo mejnih smrtnosti ustvarimo model, ki ima omejitve v dolžini pričakovane življenjske dobe (Bourgeois-Pichat v Pitacco et al., 2009, str. 177).

Prve modelske tablice so leta 1955 sestavili Združeni narodi. Izbrali so večje število tablic smrtnosti s ciljem, da bi prikazali starostni vzorec smrtnosti v odvisnosti od različnih faktorjev, kot so socialna in ekonomska razvitost, razvitost zdravstva ter drugih. Nove tablice so indeksirali na pričakovano starost ob rojstvu in nato primerjali vplive posameznih faktorjev. Tako lahko pričakovano smrtnost napovedujemo v odvisnosti od posameznega parametra, ki pa ga je lažje napovedati v prihodnosti kot starostno specifične stopnje smrtnosti (Pitacco et al., 2009, str. 177).

Nov način napovedovanja smrtnosti je leta 1974 predlagal W. Brass (str. 126), ko je predstavil relacijsko metodo. Brass je predstavil logaritemsko transformacijo krivulje preživetja.

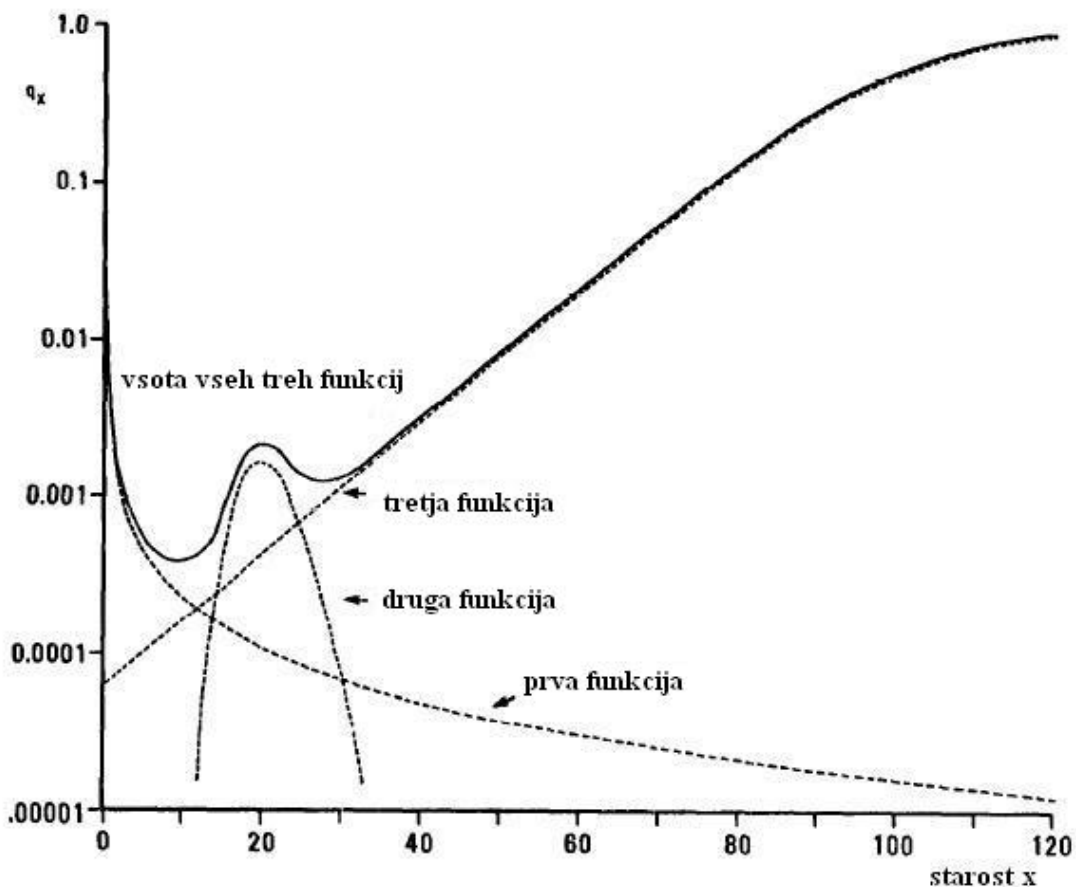
### 2.4 Nedavni prispevki

V zadnjih desetletjih dvajsetega stoletja je bilo predlaganih veliko modelov za izdelavo projekcij smrtnosti. Enega izmed njih sta predlagala Heligman in Pollard.

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x \quad (3)$$

V modelu (3)  $q_x$  predstavlja verjetnost smrti v enem letu za osebo staro  $x$  let,  $p_x$  pa verjetnost preživetja te osebe. Prvi del enačbe,  $A^{(x+B)^C}$ , opisuje smrtnost dojenčkov, drugi del,  $De^{-E(\ln x - \ln F)^2}$ , smrtnost v mladih letih in tretji del,  $GH^x$ , smrtnost na stara leta. Ko seštejemo vse tri funkcije skupaj, dobimo novo funkcijo, ki dobro opisuje starostno strukturo smrtnosti. Sestava nove funkcije je prikazana na sliki 5 in zelo dobro prikazuje vsa tri najpomembnejša obdobja krivulje starostno specifičnih smrtnosti (Heligman & Pollard, 1980, str. 51).

Slika 5: Krivulja starostno specifičnih smrtnosti sestavljena iz treh komponent.



Vir: L. Heligman & J. H. Pollard, *The age pattern of mortality at older ages*, 1980, str. 51.

V devetdesetih letih prejšnjega stoletja sta L. R. Carter in R. D. Lee predstavila novo metodo za napovedovanje starostno specifičnih stopenj smrtnosti. Lee-Carterjeva metoda obravnava starostno specifične stopnje smrtnosti. Medtem ko tradicionalne projekcije smrtnosti podajo točkovne ocene pričakovane smrtnosti, nam Lee-Carterjeva metoda eksplicitno dovoli naključne odmike v prihodnji smrtnosti, saj nam poda intervalne ocene prihodnje smrtnosti. Lee-Carterjeva metoda je v zadnjem času najbolj vpliven predlog s področja napovedovanja prihodnjih smrtnosti (Lee & Carter, 1992, str. 659).

Veliko raziskovalnega dela in reševanja aktuarskih vprašanj se direktno nanaša na Lee-Carterjevo metodo. V zadnjem času je bil ta model velikokrat nadgrajevan - tu lahko omenimo Renshawa in Habermana (2003, str 382), ki sta popravila Lee-Carterjev model tako, da bolje zajame grbo v smrtnosti, ki se pojavi med 20 in 40 letom. Prav tako so leta 2002 Brohns, Denuit in Vermunt nadgradili Lee-Carterjev model tako, da so spremenili regresijo iz navadne metode najmanjših kvadratov v Poissonovo regresijo (Brouhns, Denuit & Vermunt, 2002 str. 7).

### **3 Lee-Carterjev model**

Aktuarji, ki delajo na področju življenjskih zavarovanj in pokojninskih skladov, uporabljajo modele za napovedovanje tablic smrtnost v prihodnosti že desetletja. Glavni problem, s katerim se srečujejo, je v tem, da ljudje v povprečju živijo dlje kot so aktuarji predvideli s svojimi projekcijami tablic smrtnosti, ki so jih uporabili za svoje načrtovanje življenjskih zavarovanj ter izplačil pokojnin. Kar so potrebovali za odpravo teh nepravilnosti, je natančna ocena hitrosti izboljšav v smrtnosti. Tako je večina modelov v drugi polovici dvajsetega stoletja podcenila vplive dolgoživosti, saj so realno izmerjene izboljšave na področju smrtnosti konstantno presegale pričakovanja demografskih modelov, ki so jih uporabljali za projekcije. Posledično so zavarovalnice in skladi občasno izgubljali dobiček, občasno pa so morali razliko pokriti tudi s kapitalskimi rezervami. Glavna težava, ki so jo imeli pri upravljanju s tveganji, je bila, da se tveganja izboljšav v smrtnosti ne da razpršiti. Običajno tveganje je razpršljivo tveganje smrtnosti, ki je naključno razporejeno okoli fiksnih znanih tablic smrtnosti. Tveganje izboljšav v smrtnosti, ki ima vpliv na celoten portfelj, tako ne more biti razpršeno z uporabo zakona velikih števil. Tu lahko opazimo, da je tveganje dolgoživosti podobno investicijskemu tveganju v tem, da sta obe tveganji nerazpršljivi. Zato se pred tem tveganjem ne moramo zavarovati z običajnimi zavarovalnimi mehanizmi, kot je prodaja velikega števila zavarovalnih polic. Glavna razlika med investicijskim tveganjem in tveganjem dolgoživosti je v tem, da trenutno ne obstajajo veliki trgi, kjer bi se lahko zavarovali pred tveganjem dolgoživosti, tako kot se lahko zavarujemo pred investicijskim tveganjem. Zato se ta problem poizkuša reševati na dva načina. Prvi je poizkus izdelave čim boljših modelov za napovedovanje pričakovane smrtnosti. Eden izmed takih modelov je tudi Lee-Carterjev model, ki ob izboljšavah upošteva tudi stopnje tveganja v ocenah, saj rezultate lahko poda intervalno. Drugi način, s katerim se poizkušajo zavarovati pred tveganjem dolgoživosti, pa je prenos dela tveganja na kapitalske trge. Tako so se na trgu pojavile dolgoživostne obveznice (Pitacco et al., 2009, str. 181).

#### **3.1 Delitve modelov**

Poznamo dve vrsti projekcij smrtnosti:

- projekcije smrtnosti po vzrokih in
- starostno-periodne projekcije.



Pri projekcijah smrtnosti po vzrokih se zanašamo na informacije, ki jih imamo o trendih kadilskih navad, o trendih širjenja novih bolezni, izboljšavah medicinskega znanja in kirurgije ter drugih trendih. Tu se že pojavi prva težava, saj se ti dejavniki med seboj ne izključujejo in imamo tako lahko hkraten napredek širjenja bolezni. Vendar pa hkrati predvidevamo tudi izboljšave v zdravstvu na tem področju, zato je težko sestaviti skupen trend. Ker se nam to dogaja pri agregatnem napovedovanju smrtnosti, se lahko odločimo za raziskovanje vpliva na smrtnost samo enega dejavnika in si tako olajšamo delo, vendar pa kot rezultat dobimo samo vpliv enega dejavnika na smrtnost populacije. Projekcije po vzrokih nam nudijo dober vpogled v spremembe glavnih povzročiteljev smrti. Vendar pa imamo tudi tu velik problem prepletenosti vzrokov za smrt. Tako na primer lahko omenimo bolezni srca in ožilja ter pljučnega raka, za katera lahko zmotno mislimo, da sta nepovezani, vendar je med njima močna pozitivna korelacija, saj sta obe bolezni povezani s kajenjem. Za konec pa lahko omenimo, da ima pri dolgoročnih projekcijah smrtnosti po vzrokih glavni vpliv tisti trend, pri katerem se stopnja smrtnosti znižuje najpočasneje (Pitacco et al., 2009, str. 175).

Starostno-periodne projekcije smrtnosti poizkušajo prihodnje vzorce smrtnosti napovedati na podlagi izkušenj iz preteklih podatkov, ki jih imajo na razpolago. Gre predvsem za to, da na podlagi preteklosti pričakujemo, da se bodo enaki trendi na področju smrtnosti nadaljevali tudi v prihodnosti. Če zbrane podatke o pretekli smrtnosti obravnavamo kot številke, lahko z njimi naredimo preproste projekcije, s kakršnimi so pravzaprav začeli preučevati smrtnost. Če pa zbrane podatke razumemo kot izide naključnih spremenljivk, lahko z ekstrapolacijskimi postopki na osnovi statističnih predvidevanj predstavimo prihodnje trende smrtnosti tako s točkovno oceno kot tudi z intervalnimi ocenami. Eden izmed modelov, ki nam omogoča prav to, je tudi Lee-Carterjev model, ki je pravzaprav prvi stohastični model s področja modeliranja smrtnosti (Pitacco et al., 2009, str. 141).

### **3.2 Predstavitev Lee-Carterjevega modela**

Ronald D. Lee in Lawrence R. Carter sta v članku *Modeling and Forecasting U.S. Mortality* (1992, str. 659) predstavila nov model za izračun pričakovane smrtnosti v Združenih državah Amerike. Predstavila sta novo metodo, ki je ekstrapolativna in ne vključuje medicinskega znanja, vedenjskih lastnosti ter socialnih vplivov na spremembe v smrtnosti. To pomeni, da model ne more napovedati nenadnih izboljšav v smrtnosti, ki so posledica novih odkritij na področju zdravljenja ali odkritja novih revolucionarnih zdravil. Prav tako model ne more vsebovati nenadnih poslabšanj v smrtnosti, ki so posledica epidemij ali novih bolezni. Prednosti metode so, da združuje demografski model s statističnimi metodami časovnih serij in je trdno osnovana na obstojnih dolgoročnih zgodovinskih vzorcih in trendih, ki segajo do leta 1900. Medtem, ko večina metod predvideva zgornjo mejo dolžine človeškega življenja ali poizkušajo na drugačne načine utemeljiti upočasnitev podaljševanja življenjske dobe, Lee-Carterjev model omogoča, da starostno specifične stopnje smrtnosti eksponentno padajo brez omejitev.

Bolj podroben pristop k napovedovanju smrtnosti v prihodnosti zahteva upoštevanje stohastičnih lastnosti smrtnosti in prav to je prednost Lee-Carterjevega modela. Večina modelov, ki jih uporabljajo v aktuarstvu, pa uporablja preprosto ekstrapolacijo. Stohastičen model mora biti podprt predvsem z dvema lastnostima, ki sta:

- opazovane stopnje smrtnosti so rezultat naključnih spremenljivk pretekle smrtnosti in
- napovedane stopnje smrtnosti so ocene naključnih spremenljivk, ki predstavljajo prihodnjo smrtnost.

Stohastični modeli nam rezultate projekcije podajo kot točkovno oceno in intervalno oceno, za razliko od navadnih ekstrapolativnih modelov, ki nam rezultate podajo samo kot točkovno oceno. Za stohastične metode predvidevanja smrtnosti je potrebno predvideti tudi verjetnostno razporeditev naključnih smrtnosti ter način statistične razpršitve teh smrtnosti. Tako pri stohastičnih metodah izračunamo točkovno oceno in pa tudi intervalno oceno. Točkovna ocena je najbolj verjetna možnost in predstavlja centralno projekcijo. Intervalna ocena pa nam poda tako centralno projekcijo kot tudi verjetnostne intervale. Tako imamo v sredini centralno projekcijo, okoli katere imamo verjetnostne intervale. Verjetnosti interval, ki obsega najmanjše območje okoli centrale projekcije, ima najmanjšo verjetnost, da se bo uresničil, intervali, ki zajemajo večje območje, pa imajo večjo verjetnost, a so njihove napovedi manj natančne (Pitacco et al., 2009, str. 170).

### 3.2.1 Lee-Carter-jev model

Naj bo  $m(x,t)$  starostno specifična smrtnost za starost  $x$  v letu  $t$ . Matriko starostno specifičnih smrtnosti bomo umerili z modelom (4):

$$\ln[m(x,t)] = a_x + b_x * k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (4)$$

oziroma

$$m(x,t) = e^{a_x + k_t * b_x + \varepsilon_{x,t}} \quad (5)$$

s pravilno izbranimi starostno specifičnimi konstantami  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{b}_x$  in časovno spremenljivko  $\mathbf{k}_t$ . Ker je  $\mathbf{k}$  indeks stopnje smrtnosti, včasih zapišemo  $m(x,k)$ , s čimer mislimo  $e^{a_x + k * b_x}$ .  $\mathbf{k}$  včasih zapišemo tudi kot  $\mathbf{k}(\mathbf{t})$  ali  $\mathbf{k}_t$ . Generalna oblika smrtnosti po starosti je  $e^{a_x}$ .  $\mathbf{b}_x$  nam pove, katere stopnje upadajo hitreje in katere počasneje glede na spremembe v  $\mathbf{k}$  ( $d\ln(m_{x,t})/dt = b_x * dk/dt$ ). V principu bi bil  $\mathbf{b}_x$  lahko tudi negativen pri določeni starosti in tako bi stopnja smrtnosti pri tej starosti dolgoročno naraščala, medtem ko bi pri ostalih starostih padala. Vendar je v praksi zelo malo verjetno, da bi prišlo do tega, da bi smrtnost pri določeni starosti dolgoročno naraščala. Kadar je  $\mathbf{k}$  linearen skozi čas, se smrtnost pri posameznih starostih spreminja po svoji konstantni eksponentni stopnji. Ko gre  $\mathbf{k}_t$  v negativno neskončnost, gre vsaka starostno specifična stopnja smrtnosti na 0. Negativne stopnje smrtnosti se v tem modelu ne morejo pojaviti, kar je velika prednost za napovedovanje prihodnjih stopenj smrtnosti. Napaka  $\varepsilon_{x,t}$  s povprečjem 0 in varianco  $\sigma_\varepsilon^2$  odseva določen starostno specifičen zgodovinski vpliv, ki ga model ni zajel.

Iz dveh tabel starostno specifičnih stopenj smrtnosti lahko izračunamo celotno družino tabel starostno specifičnih stopenj smrtnosti z uporabo Lee-Carterjevega modela, ki upošteva tabele kot funkcijo  $k$  in ne kot funkcijo časa. Skalo nastavimo tako, da je  $k=0$  za eno tabelo in  $k=1$  za drugo tabelo. Nato nastavimo  $a_x = \ln[m(x,0)]$  in  $b_x = \ln[m(x,0)] - \ln[m(x,1)]$ , ko se  $k$  spreminja, tvorimo družino novih starostno specifičnih tabel, ki vključuje tudi obe tabeli, iz katerih izhaja. Za  $k$ -je med 0 in 1 model geometrično interpolira, za  $k$ -je manjše od 0 ali večje od 1 pa model ekstrapolira iz dveh osnovnih tabel.

To lastnost modela lahko uporabijo države, ki nimajo dobro razvite statistike prebivalstva in imajo zato pomanjkljive podatke. Vendar pa se moramo zavedati, da je ta postopek neprimeren za uporabo, kadar imamo več kot dve tablici smrtnosti. V takem primeru je primerneje izračunati  $a_x$ ,  $b_x$  in  $k(t)$  po postopku, ki sledi v poglavju 3.3.3 in minimizira kvadrate odstopanj od dane matrike starostno specifičnih stopenj smrtnosti. S tem modelom sta avtorja pokazala, da je mogoče pričakovane stopnje smrtnosti izračunati zelo natančno (Lee & Carter, 1992, str. 660).

### 3.2.2 Nastavitev modela

Ocenitev modela za dano matriko starostno specifičnih stopenj smrtnosti  $m_{x,t}$  iščemo kot rešitev enačbe (6) z uporabo metode najmanjših kvadratov:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x * k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (6)$$

Ta model je poddoločen (underdetermined), kar lahko vidimo kot sledi. Predpostavimo, da vektorji  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{k}$  predstavljajo eno rešitev. Potem za katerikoli skalar  $c$ , razen za  $c=0$ ,  $\mathbf{a}-\mathbf{bc}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{k}+c$ , prav tako veljajo kot rešitev. Prav tako je jasno, da če so  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{k}$  rešitev, so tudi  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{bc}$ ,  $\mathbf{k}/c$  rešitve iste enačbe. Tako je  $k$  determiniran samo do linearne transformacije,  $b$  je determiniran samo kot multiplikativna konstanta,  $a$  pa je definiran samo kot aditivna konstanta. Če postavimo dva dodatna pogoja, da je vsota  $b_x$  enaka ena in vsota  $k_t$  enaka nič, potem velja tudi to, da lahko  $a_x$  izračunamo kot povprečje v času.

Modela ne moremo izračunati z navadno regresijo, ker na desni strani enačbe nimamo neodvisnih spremenljivk, imamo samo parametre, ki jih moramo oceniti in indeks  $k(t)$ . Potrebno je uporabiti singularni vektorski razcep ali krajše SVD (singular value decomposition), s katerim poiščemo rešitev metode najmanjših kvadratov, ki jo uporabimo na matriki logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti potem, ko že poznamo povprečja logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti skozi čas (Lee & Carter, 1992, str. 660).

## 3.3 Uporaba Lee-Carterjevega modela za izdelavo napovedi pričakovanih starostno specifičnih stopenj smrtnosti za Slovenijo

Za Lee-Carterjev model smo se odločili predvsem zaradi dveh lastnosti. Kot prvo omenimo, da model predstavlja enega izmed najvplivnejših odkritij s področja predvidevanja smrtnosti. Druga pomembna lastnost Lee-Carterjevega modela je, da lahko potem, ko ocenimo parametre,

ki so odvisni od starosti ( $a_x$ ,  $b_x$ ), za vsako natančno izbrano vrednost časovnega indeksa  $k_t$  poiščemo vse starostno specifične stopnje smrtnosti, ki nam omogočajo sestavo celotnih tablic smrtnosti. To lahko storimo zato, ker sta  $a_x$  in  $b_x$  konstantna skozi celotno obdobje in tako lahko ob poznavanju  $k_t$  izračunamo starostno specifične stopnje smrtnosti za poljubno leto. Še ena pomembna lastnost Lee-Carterjevega modela, ki je prav tako vplivala na izbor tega modela, je, da nam tradicionalni projekcijski modeli podajo točkovno oceno pričakovanih smrtnosti, medtem ko nam Lee-Carterjev model dopušča negotovosti pri napovedovanju, tako imenovano tveganje dolgoživosti.

Lee-Carterjeva metoda je zelo dober pristop k projekcijam smrtnosti, ki opisuje logaritemsko funkcijo časovne serije starostno specifičnih smrtnosti  $m_{x,t}$ . Opisuje jo kot vsoto starostno specifičnih komponent  $a_x$  in produkta časovno se spreminjajočega parametra  $k_t$ , ki odraža generalni nivo smrtnosti in starostno specifične komponente  $b_x$ , ki opisuje, kako hitro oziroma počasi se smrtnost pri posamezni starosti spreminja, ko se spremeni generalni nivo smrtnosti (Russolillo, 2005, str. 39).

### 3.3.1 Podatki

Podatke o starostno specifičnih stopnjah smrtnosti slovenske populacije smo pridobili iz Statističnih letopisov Republike Slovenije, ki so objavljeni na spletnih straneh Statističnega urada Republike Slovenije (SURS). Ločeno smo zbrali podatke o ženski in moški populaciji, saj bomo v nadaljevanju naredili dva modela, za vsak spol posebej. Za obdobje od 1966 do 2007 smo tako zbrali podatke, ki so v prilogah 2 in 3. Podatki so zbrani v petletnih starostnih razredih, kar nam omogoča, da dobimo nekoliko večje število ljudi v posameznih razredih. Za oba spola smo tako za vsako koledarsko leto dobili skupine ljudi v starostnih razredih [0, 1-4, 5-9, 10-14 ... 75-79, 80-84]. Kot lahko vidimo, je prva skupina izjema, saj obsega le prvo leto starosti, posledično tudi druga skupina obsega le štiri leta, nato pa sledijo skupine, ki obsegajo petletne starostne razrede. V našem modelu je najstarejša starostna skupina 80-84 let. Za izdelavo Lee-Carterjevega modela bi bilo boljše, če bi imeli na razpolago tudi podatke o stopnjah smrtnosti za petletne razrede od 85 do 105 let, vendar SURS teh podatkov ne objavlja po razredih. Skupni razred, ki ga objavljajo kot 85+, smo izločili iz modela, saj imamo tako v ostalih starostnih razredih bolj natančne izračune in je s tem natančnost modela večja.

Koledarska leta smo označili z oznako  $t$  in sicer leto 1966 v našem modelu predstavlja  $t_1$ , leto 2007 pa  $t_{42}$ . Iz zbranih podatkov smo sestavili matriko  $m_{x,t}$  razsežnosti  $(m_x - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$ , kar je v našem primeru  $19 \times 42$ . Ker SURS podaja starostno specifične stopnje smrtnosti kot število umrlih v določeni starosti na 1000 prebivalcev, moramo to vrednost deliti s 1000 in tako dobimo verjetnost smrti v določeni starosti. Lahko omenimo, da večina drugih držav podaja podatke o umrlih na 100.000 prebivalcev, kar nakazuje na to, da se bomo ukvarjali z manjšim vzorcem in bodo nihanja med posameznimi leti večja.

Na tem mestu omenimo še, da je bila povprečna starost umrlih v letu 1966 za moške 58,7 let in 66,5 let za ženske. V letu 2007 pa je bila povprečna starost umrlih moških 69,1 let in 78,2 let za ženske. Iz tega je že razvidno, da se življenjska doba prebivalcev v Sloveniji podaljšuje. V obdobju 42 let se je življenjska doba moških podaljšala za 10,4 let življenjska doba žensk pa za 11,7. To nam prikazuje, kako pomembno je poznavanje demografskih sprememb za življenjska zavarovanja, pokojninske sklade ter celoten sistem pokojninskega zavarovanja. (Statistični letopisi Republike Slovenije od 1967 do 2008).

### 3.3.2 Pogoji za izdelavo modela

Za izdelavo modela potrebujemo podatke o smrtnosti slovenske populacije v posameznih letih ( $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ ) za posamezne starosti ( $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ ). Ko imamo zbrane vse podatke, kot je že opisano v poglavju 3.3.1, bi radi ocenili  $a_x$ -e,  $b_x$ -e in  $k_t$ -je. Zadnje, na žalost, ni mogoče brez vpeljave dodatnih omejitev, saj ima model (7) nešteto rešitev. Kot je opisano v poglavju 3.2.1, model 4 nima unikatne rešitve.

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x * k_t \quad (7)$$

Zato moramo uvesti dve dodatni omejitvi, ki nam bosta zagotovili unikatno rešitev in se bomo tako izognili uporabi skalarja c. Pogoja, ki ju lahko uporabimo, sta načeloma poljubna, vendar se v literaturi ponavadi uporabljata naslednja:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0 \quad (8)$$

in

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} b_x = 1 \quad (9)$$

S takšnimi pogoji predstavlja  $b_x$  delež spremembe v celotnem logaritmu smrtnosti, ki pripada določeni starosti. Včasih v literaturi zasledimo tudi drugačne pogoje. To pomeni, da ima verjetnost, povezana z modelom, v svoji okolici neskončno število enakovrednih maksimumov, kateri bi vsi podali identično napoved. Z uvedbo predpostavk (8) in (9) izberemo zgolj enega izmed teh enakovrednih maksimumov. Pomembno se je zavedati, da izbira pogojev ne vpliva na izračun modela in posledično na kvaliteto napovedi starostno specifičnih smrtnosti (Pitacco et al., 2009, str. 188).

### 3.3.3 Metoda najmanjših kvadratov

Model, ki ga navadno uporabljamo za oceno  $a_x$ -ov,  $b_x$ -ov in  $k_t$ -jev, je zapisan kot model (6), vendar smo ga zaradi pomembnosti tu zapisali ponovno:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x * k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (6)$$

za  $x = x_1, x_2, \dots, x_m$  in  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ , kjer  $m_x(t)$  predstavlja starostno specifično stopnjo smrtnosti pri starosti  $x$  v letu  $t$ . Imamo Gaussovo porazdelitev napak  $\varepsilon_{x,t}$  z aritmetično sredino

0 in varianco  $\sigma_\varepsilon^2$ , ki predstavlja vse starostno specifične zgodovinske vplive, ki niso zajeti v modelu. Predpostavimo, da imajo napake enako varianco pri vseh starostih, kar se včasih izkaže za vprašljivo domnevo. Starostno specifične smrtnosti so zaradi manjšega števila absolutnih smrtnosti pri visoki starosti bolj variabilne pri višji starosti kot pri nižji starosti.

Pomembno je omeniti, da model (6) ni preprost regresijski model, saj na desni strani nimamo nobenih opazovanih količin, ampak samo neznanke. Starost  $x$  in čas  $t$  sta obravnavana kot faktorja, vpliv na smrtnost pa je opisan z zaporedjem  $a_{x1}, a_{x2}, \dots, a_{xm}$  in  $b_{x1}, b_{x2}, \dots, b_{xm}$  za starost in z zaporedjem  $k_{t1}, k_{t2}, \dots, k_{tm}$  za čas. Velja omeniti, da je model (6) še posebej priročen takrat, ko imamo na razpolago samo manjše število starostno specifičnih stopenj  $m_x(t)$ .

Model (6) umerimo na matriko starostno specifičnih stopenj smrtnosti, ki je opisana v poglavju 3.3.1, z uporabo metode singularnega razcepa (SVD). Uporabimo metodo najmanjših kvadratov (10) in tako poiščemo  $a_x, b_x$  in  $k_t$ . Pri tem pa upoštevamo, da za  $\varepsilon_{x,t}$  velja normalna porazdelitev.

$$O_{LS}(a, b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln m_x(t) - a_x - b_x * k_t)^2 \quad (10)$$

Nato izračunamo  $a_x$  tako, da nastavimo:

$$\frac{\partial}{\partial a_x} O_{LS} = 0 \quad (11)$$

iz tega sledi:

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_x(t) = (t_n - t_1 + 1)a_x + b_x \sum_{t=t_1}^{t_n} k_t \quad (12)$$

Z upoštevanjem pogoja (8) sledi:

$$a_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln m_x(t) \quad (13)$$

Videli smo, da lahko rešitev enačbe (10) poiščemo pravzaprav v dveh delih. Kot smo ugotovili, lahko  $a_x$  izračunamo kot povprečje  $\ln m_x(t)$ . Kadar je model (6) nastavljen z navadno metodo najmanjših kvadratov, je vrednost  $a_x$  enaka povprečni vrednosti  $\ln m_x(t)$  v času  $t$ . Iz tega sledi, da eksponent  $a_x$  predstavlja splošno obliko krivulje smrtnosti. Neznanki  $b_x$  in  $k_t$  tako lahko poiščemo s singularnim razcepom matrike  $\ln m_x(t) - a_x$ .

Matriko starostno specifičnih smrtnosti  $M$  v času sestavimo tako, kot je zapisano v poglavju 3.3.1.

$$M = \begin{bmatrix} m_{x_1}(t_1) & \cdots & m_{x_1}(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x_m}(t_1) & \cdots & m_{x_m}(t_n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Nato izračunamo novo matriko  $Z = \ln M$ -a dimenzij  $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$ .

$$Z = \begin{bmatrix} m_{x_1}(t_1) - a_{x_1} & \cdots & m_{x_1}(t_n) - a_{x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x_m}(t_1) - a_{x_m} & \cdots & m_{x_m}(t_n) - a_{x_m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pri iskanju najboljšega približka  $b_x k_t$ -jev  $z_{xt}$ -jem opazimo pomanjkanje interakcije med časom in starostjo, tako da so  $b_x$ -ji fiksirani v času,  $k_t$ -ji pa so fiksirani po starosti. Večina podatkov se ne uskladi s časovno invarianco  $b_x$ -jev, razen če postavimo optimalne pogoje, kot v (16).  $b_x$  in  $k_t$  poiščemo z metodo najmanjših kvadratov.

$$O_{LS}(b, k) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z_{xt} - b_x k_t)^2 \quad (16)$$

Rešitev poiščemo s singularnim razcepom matrike  $Z$ . Izrek o singularnem razcepu Demmel (2000, str. 125) zapisal: »Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  poljubna matrika z  $m \geq n$ . Potem lahko pišemo  $A = U \Sigma V^T$ , kjer je  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in zadošča enačbi  $U^T U = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  in zadošča enačbi  $V^T V = I$  in  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , kjer je  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . Stolpci  $u_1, \dots, u_n$  matrike  $U$  se imenujejo levi singularni vektorji. Stolpci  $v_1, \dots, v_n$  matrike  $V$  se imenujejo desni singularni vektorji. Elementi diagonalne matrike  $\Sigma$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  se imenujejo singularne vrednosti. (Če je  $m < n$ , je singularni razcep definiran s singularnim razcepom matrike  $A^T$ .)«

Natančneje definiramo matriki  $Z^T Z$  dimenzij  $(t_n - t_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$  in  $ZZ^T$  dimenzij  $(x_m - x_1 + 1) \times (x_m - x_1 + 1)$ . Naj bo  $u_1$  lastni vektor, ustrezne največje lastne vrednosti  $Z^T Z$  in  $v_1$  ustrezni lastni vektor  $ZZ^T$ . Najboljši približek  $Z$  z metodo najmanjših kvadratov je:

$$Z \approx Z^* = \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1^T \quad (17)$$

Iz tega sklepamo:

$$b = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j}} \quad (18)$$

in:

$$k = \sqrt{\lambda_1} * \left( \sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j} \right) * u_1 \quad (19)$$

Ob tem mora veljati, da

$$\sum_{j=1}^{x_m - x_i + 1} v_{1j} \neq 0 \quad (20)$$

Pogoja (8) in (9) sta ob tem izpolnjena z  $b_x$  in  $k_t$ . Zavedati se moramo, da druga in višje stopnje singularnega razcepa skupaj obsegajo ostanke. Za populacije z nizko smrtnostjo nam prva stopnja singularnega razcepa za Lee-Carterjev model pojasni 95% variance  $\ln(m_x(t))$ -jev (Pitacco et al., 2009, str. 189).

Zgoraj opisani singularni razcep smo opravili s programsko kodo napisano v Matlabu verzija 7.5.0.342, ki nam je izračunala vrednosti  $a_x$ ,  $b_x$  in  $k_t$ . Programska koda je v prilogi 4.

### 3.3.4 Rezultati izračunov

Programska koda iz priloge 4 nam poda izračunane vrednosti  $a_x$ ,  $b_x$  in  $k_t$  za vsak spol posebej.

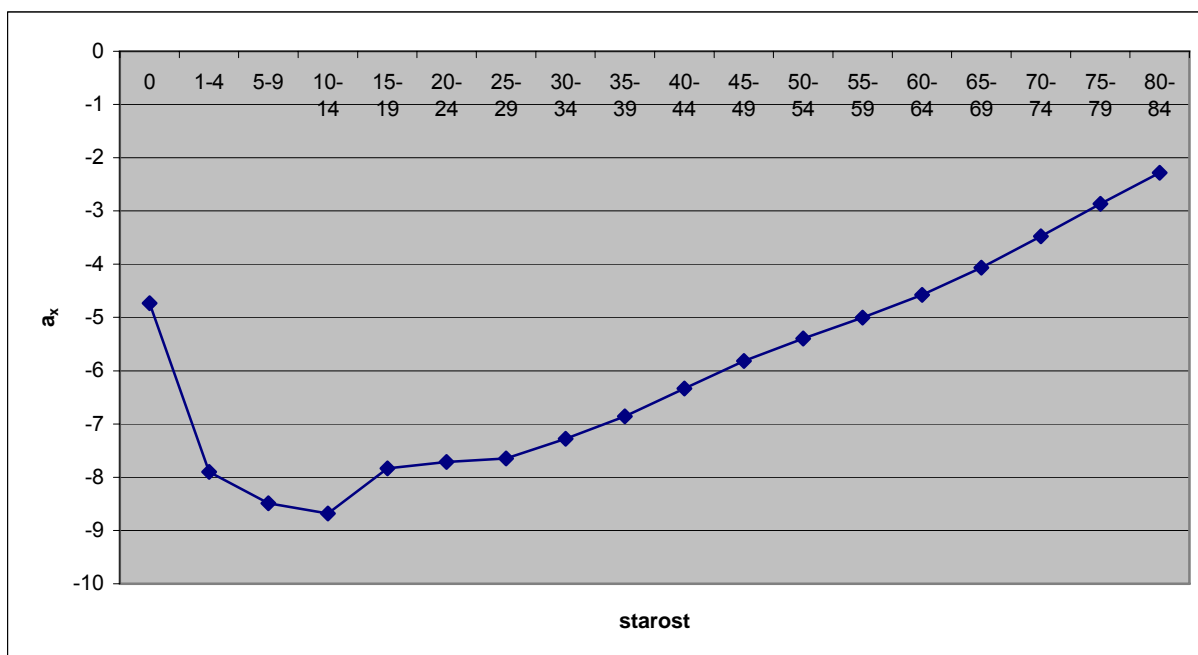
*Tabela 1: Izračunane vrednosti  $a_x$  in  $b_x$  za moško in žensko populacijo po starostnih razredih.*

starost	$a_x$ ženske	$a_x$ moški	$b_x$ ženske	$b_x$ moški
0	-4,7303	-4,5301	0,1199	0,1440
1-4	-7,8974	-7,5004	0,1204	0,1006
5-9	-8,4876	-8,1062	0,0772	0,1137
10-14	-8,6798	-8,0556	0,0615	0,0835
15-19	-7,8348	-6,9243	0,0429	0,0434
20-24	-7,7111	-6,3932	0,05	0,0455
25-29	-7,6481	-6,3874	0,0607	0,0516
30-34	-7,2804	-6,2340	0,0529	0,0560
35-39	-6,8594	-5,8742	0,0461	0,0550
40-44	-6,3346	-5,4454	0,0408	0,0449
45-49	-5,8147	-4,9966	0,037	0,0352
50-54	-5,3962	-4,5623	0,0272	0,0297
55-59	-5,0056	-4,1395	0,0357	0,0285
60-64	-4,573	-3,7204	0,0402	0,0287
65-69	-4,0662	-3,3054	0,0444	0,0315
70-74	-3,4737	-2,8603	0,0484	0,0358
75-79	-2,8675	-2,4032	0,0517	0,0376
80-84	-2,2827	-1,9570	0,0428	0,0347

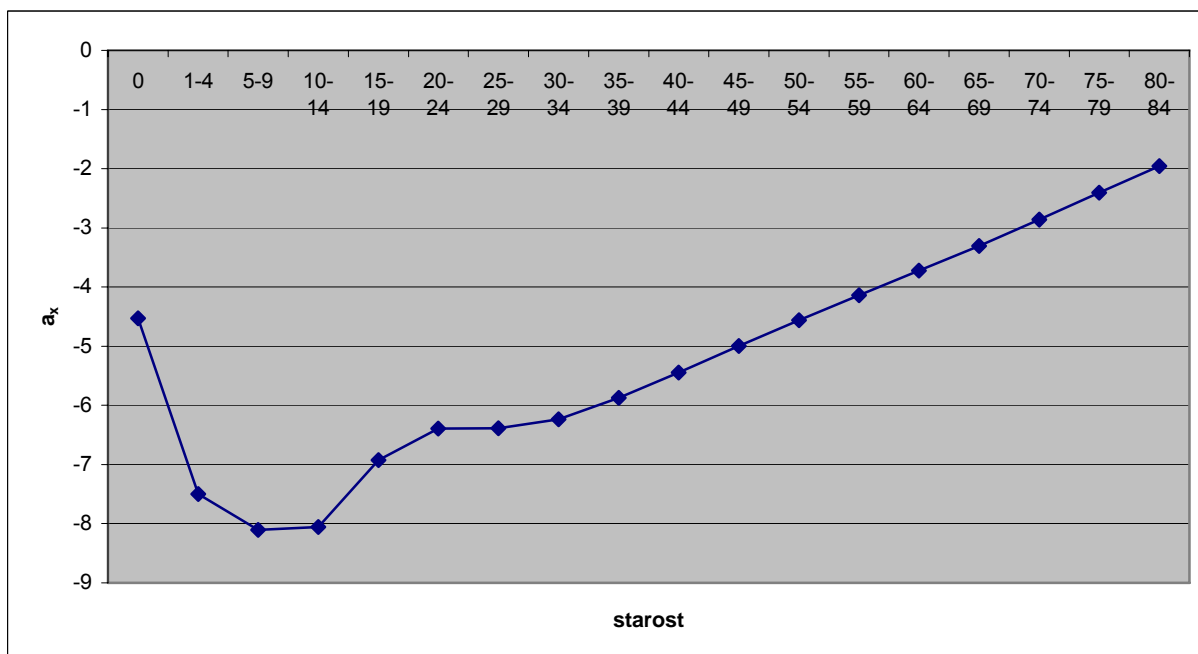
V tabeli 1 so zapisane izračunane vrednosti  $a_x$  in  $b_x$ , ki se v času ne spreminjajo. Vrednosti  $a_x$  predstavljajo splošno obliko smrtnosti, ki jo dobimo kot povprečje smrtnosti v času. Izračunani  $b_x$ -ji pa opisujejo odstopanja od povprečnega vzorca v času.



Slika 6: Splošna oblika krivulje smrtnosti  $a_x$  slovenske ženske populacije po starostnih razredih.



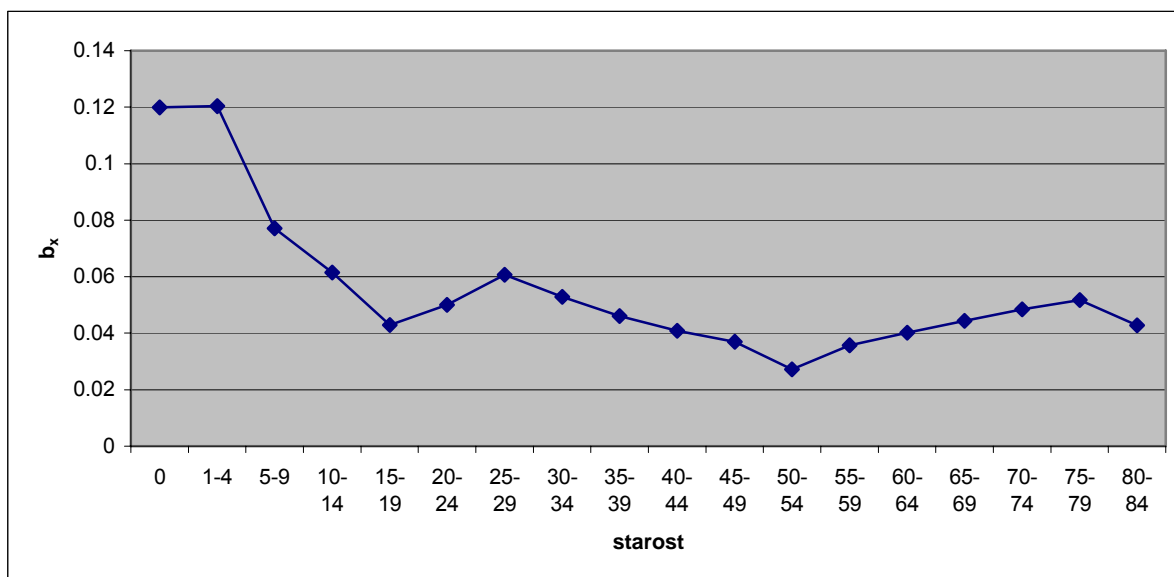
Slika 7: Splošna oblika krivulje smrtnosti  $a_x$  slovenske moške populacije po starostnih razredih.



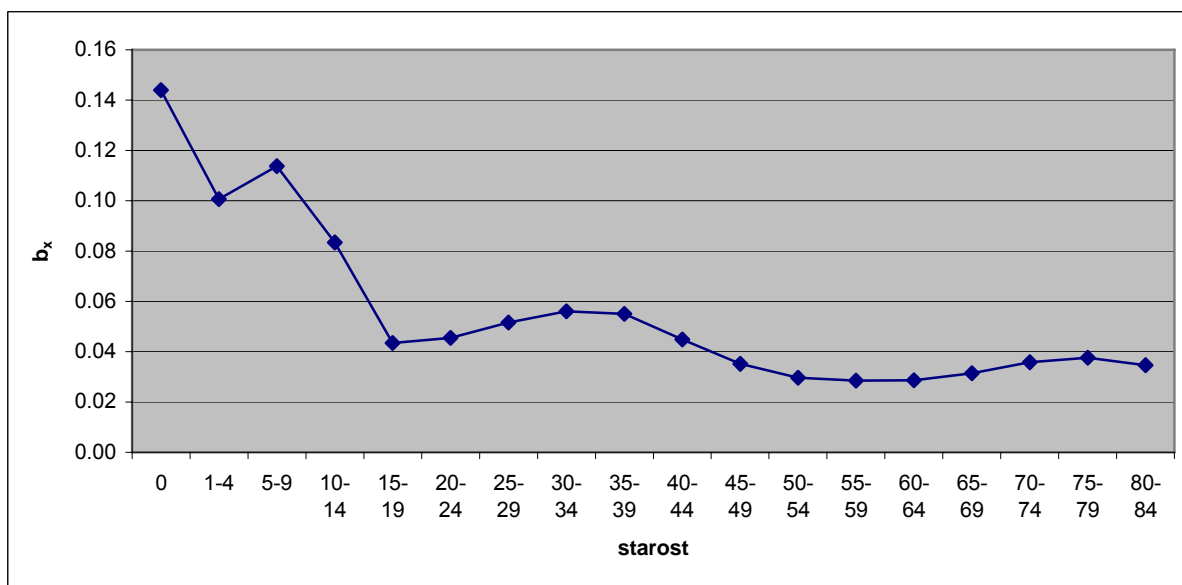
Na slikah 6 in 7 vidimo logaritem starostno specifičnih smrtnosti ženske (slika 6) in moške (slika 7) populacije. Iz slik je lepo razvidno, da imata krivulji povsem pričakovano obliko. Kot lahko vidimo, je smrtnost v prvem letu visoka, nato močno upade do starostnega razreda

15-20 let, kjer začne naraščati. Kot smo že opisali v poglavju 1.1, sledi grba smrtnosti, ki je pri moški populaciji veliko bolj izrazita kot pri ženski, saj se moški v mladih letih bolj izpostavljajo nevarnim situacijam in so tudi bolj nagnjeni k tveganju in samomorom. Krivulji smrtnosti moške in ženske populacije na to eksponentno naraščata, kar je v našem primeru linearna rast, saj se v izračunu ukvarjamo z  $\ln(m_{x,t})$ . Iz slik 6 in 7 je tudi razvidno, da so starostno specifične stopnje smrtnosti pri ženski populaciji ves čas nižje kot pri moški populaciji.

Slika 8: Krivulja  $b_x$  slovenske ženske populacije po starostnih razredih.



Slika 9: Krivulja  $b_x$  slovenske moške populacije po starostnih razredih.



S singularnim razcepom izračunane vrednosti  $b_x$  nam povedo, v katerih starostnih skupinah so spremembe v smrtnosti hitre in v katerih skupinah so počasne v odvisnosti od sprememb  $k_t$ .

Kadar imamo visok koeficient  $b_x$ , kot je razvidno iz slik 8 in 9, je to v prvih treh starostnih razredih, se starostno specifična smrtnost tega razreda hitro spreminja v času. Zato nam tudi smrtnost v teh starostnih razredih najhitreje upada. Ravno obratno je pri starostnih razredih, kjer je koeficient  $b_x$  majhen, saj so spremembe v smrtnosti manjše. Manjše spremembe so značilne za smrtnost v starejših letih, saj tam ni tako velikega vpliva izboljšav v zdravstvu, kot pri mlajših starostnih razredih. Pri Lee-Carterjevem modelu bi lahko pričakovali, da starostno specifične stopnje smrtnosti naraščajo in padajo hkrati. Vendar pa to ne drži, saj se smrtnosti po starostnih razredih spreminjajo za različne vrednosti, kar se odraža v  $b_x$ . Poleg tega lahko koeficient  $b_x$  zavzame tudi negativne vrednosti, vendar je to za modele, ki so nastavljeni na daljša obdobja, zelo malo verjetno. Če bi imeli v določenem starostnem razredu negativno vrednost  $b_x$ , bi to pomenilo, da smrtnost v tem starostnem razredu s časom narašča. Primerov z negativnim koeficientom  $b_x$  je zelo malo, predvsem se pojavljajo v nerazvitih državah, kjer je veliko ljudi okuženih z virusom HIV in AIDSom.

Tretja komponenta, ki smo jo s programom izračunali z uporabo singularnega razcepa, je  $k_t$ . Opisuje nam spremembe smrtnosti v času.  $k_t$  je v posameznem letu enak za vse starostne razrede, spreminja pa se po času, torej po letih. Izračunane vrednosti  $k_t$  po letih in ločeno po spolih so zapisane v tabeli 2.

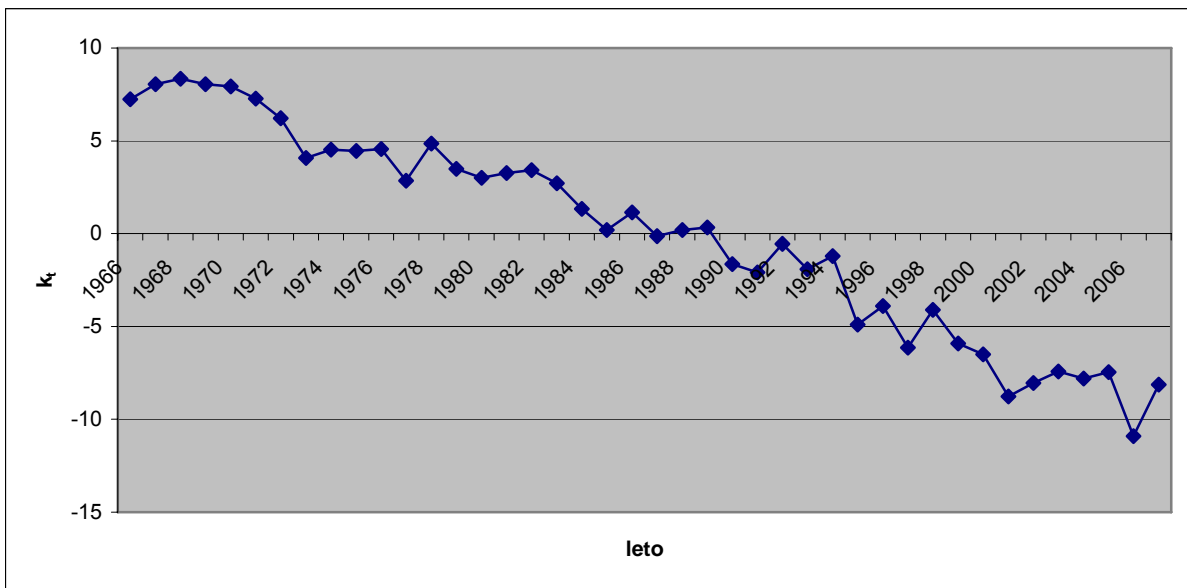
*Tabela 2: Izračunane vrednosti  $k_t$  za moško in žensko slovensko populacijo po letih.*

leto	$k_t$ -ženske	$k_t$ -moški	leto	$k_t$ -ženske	$k_t$ -moški	leto	$k_t$ -ženske	$k_t$ -moški
1966	7,2407	6,5065	1980	3,0061	2,0481	1994	-1,2002	-1,8583
1967	8,0411	5,9979	1981	3,2596	2,9451	1995	-4,8962	-3,3661
1968	8,3426	6,7696	1982	3,4243	3,2707	1996	-3,9062	-3,7593
1969	8,0567	6,9746	1983	2,7223	2,1839	1997	-6,1385	-2,6198
1970	7,9357	6,2332	1984	1,3382	2,0927	1998	-4,1098	-3,8072
1971	7,2673	6,5055	1985	0,1985	1,7649	1999	-5,9234	-4,9132
1972	6,2137	6,0576	1986	1,1357	1,1057	2000	-6,5097	-5,9465
1973	4,077	5,2613	1987	-0,1395	0,6748	2001	-8,7638	-6,7815
1974	4,5333	3,2143	1988	0,1918	-0,0934	2002	-8,0464	-5,7711
1975	4,4661	4,6144	1989	0,3255	-1,1178	2003	-7,4247	-8,0092
1976	4,5593	4,0964	1990	-1,6443	-1,1641	2004	-7,7969	-7,9672
1977	2,8481	4,9279	1991	-2,0906	-1,3621	2005	-7,4511	-7,9991
1978	4,8548	4,3393	1992	-0,5429	-2,0492	2006	-10,9124	-9,4157
1979	3,4838	3,3232	1993	-1,9051	-2,6518	2007	-8,1204	-10,2549

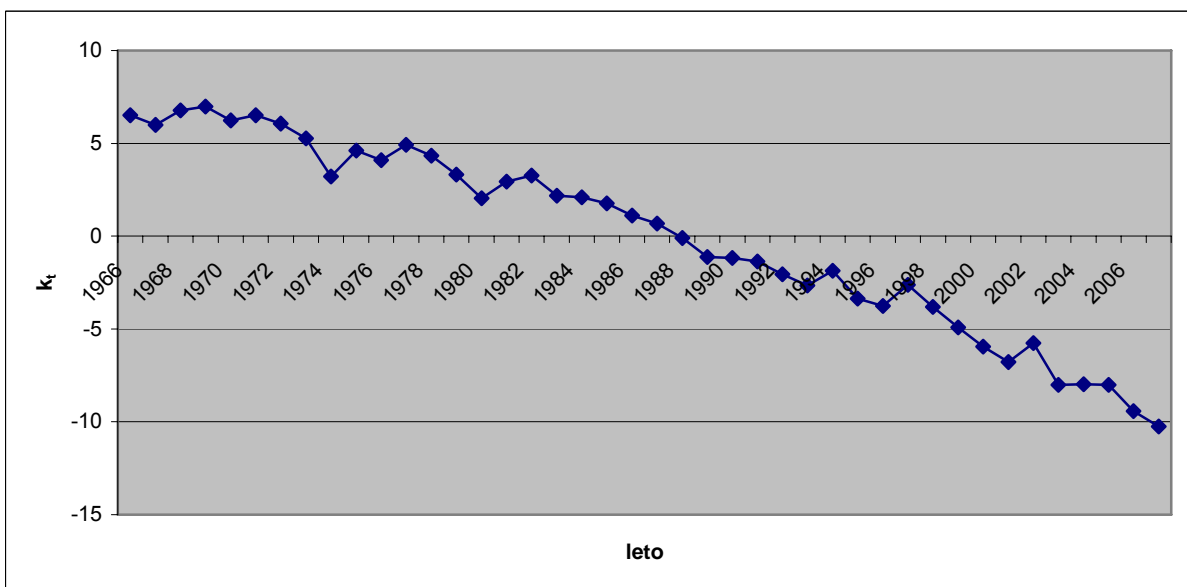
S podatki iz tabele 2 smo narisali grafa  $k_t$ -jev, ki sta na slikah 10 in 11, za moško in žensko populacijo, iz katerih je razvidno, da krivulja upada, torej s časom upada tudi smrtnost. Kot lahko opazimo iz grafov, je trend krivulje  $k_t$  linearen tako za moške kot za ženske. Krivulji moške in ženske populacije linearno upadata od 1966 do 2007. Tu se nekoliko pozna majhnost vzorca slovenske populacije, saj je linearnost pri državah z večjim vzorcem populacije bolj izrazita. Pri slovenski populaciji je varianca zaradi manjšega vzorca večja. Zaradi linearnega upadanja in konstantne variance je krivulja zelo primerna za ekstrapolacijo,

ki jo bomo naredili v nadaljevanju ter z njo izračunali pričakovane starostno specifične smrtnosti. Poudariti moramo, da  $k_t$  upada linearno, vendar to ne pomeni, da tudi pričakovana življenjska doba upada linearno. Prav tako tudi funkcija starostno specifičnih stopenj ne upada linearno. Pričakovana življenjska doba nam v prvih obdobjih narašča dvakrat hitreje kot v zadnjih obdobjih. Zaradi tega pričakovana življenjska doba ne narašča linearno, ampak počasneje, kar je tudi bistvena prednost Lee-Carterjevega modela pred modeli, ki direktno izračunavajo pričakovano življenjsko dobo tako, da jo podaljšujejo linearno in morajo zato pri projekcijah dodajati omejitve, ki to rast upočasnjujejo.

Slika 10: Izračunane vrednosti  $k_t$  slovenske ženske populacije.



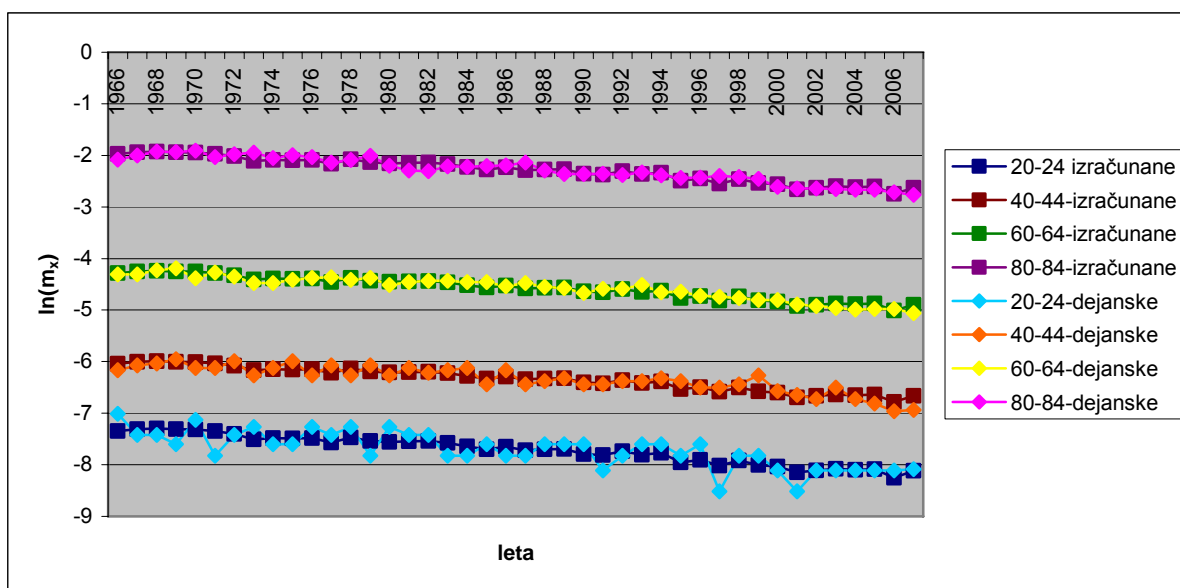
Slika 11: Izračunane vrednosti  $k_t$  slovenske moške populacije.



### 3.3.5 Primerjava izračunanih vrednosti z dejanskimi

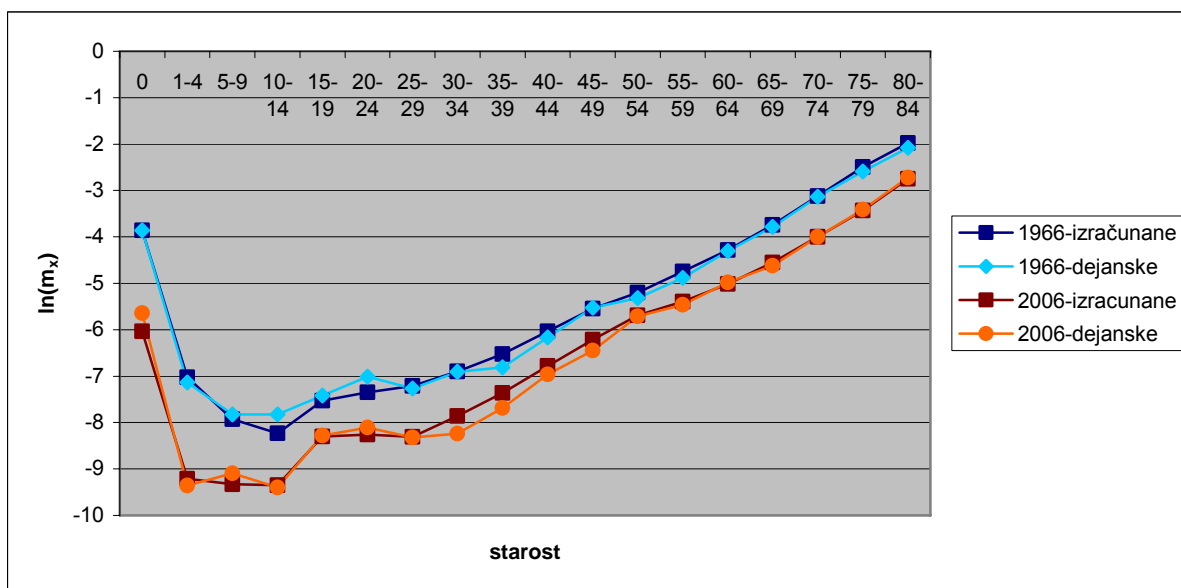
Z izračunanimi vrednostmi iz poglavja 3.3.4 smo preverili, kako natančen je naš model in sicer tako, da smo izračunali starostno specifične stopnje smrtnosti za obdobje od 1966 do 2007 in rezultate primerjali z dejanskimi vrednostmi, na podlagi katerih smo nastavili Lee-Carterjev model. Na sliki 12 so narisani logaritmi starostno specifičnih stopenj smrtnosti v posameznih starostnih razredih in sicer smo narisali smrtnosti v razredih 20-24, 40-44, 60-64 in 80-84. Na grafu so narisani tako izračunani kot tudi dejanski logaritmi starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije za obdobje med leti 1966 in 2007. Kot lahko vidimo, je za vsa obdobja Lee-Carterjev model nastavljen dobro, še največja odstopanja imamo v starostnem razredu 20-24 let. Ker so smrtnosti v tem starostnem razredu nizke, je vpliv odstopanj na izračune pričakovane življenjske dobe majhen. Pri slovenski moški populaciji so odstopanja podobna kot pri ženski, le da so odstopanja v starostnem razredu 20-24 let nekoliko manjša kot pri ženski populaciji.

*Slika 12: Primerjava logaritmov izračunanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v starostnih razredih 20-24, 40-44, 60-64 in 80-84 v obdobju od leta 1966 do 2007.*



Na sliki 13 smo natančnost modela predstavili še na drugačen način in sicer tako, da smo narisali graf pričakovanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v vseh starostnih razredih v letih 1966 in 2006. Ponovno vidimo, da je model dober, saj so izračunane vrednosti natančne, največja odstopanja imamo v starostnih razredih, kjer so stopnje smrtnosti nizke. Pri primerjavi izračunanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj moške populacije dobimo podobne rezultate kot pri ženski populaciji.

Slika 13: Graf izračunanih in dejanskih starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v vseh starostnih razredih v letih 1966 in 2006.



### 3.3.6 Projekcija $k_t$

Kot smo že ugotovili v poglavju 3.3.4, ima funkcija  $k_t$  v času padajočo linearno obliko. Zato smo poiskali njeno linearno regresijsko funkcijo:

$$y'' = a + b * x \quad (21)$$

Linearno regresijsko funkcijo smo poiskali z upoštevanjem predpostavke metode najmanjših kvadratov:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_i'')^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 = F(a, b) = \min \quad (22)$$

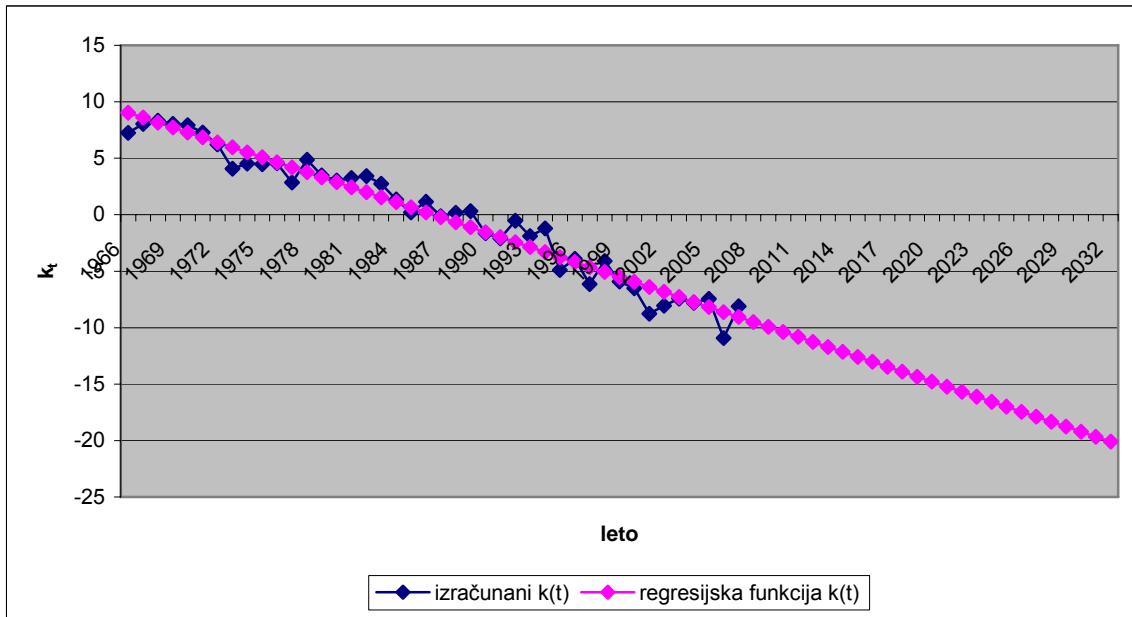
V nadaljevanju smo izračunali regresijski koeficient  $b$  in regresijsko konstanto  $a$ :

$$b = \frac{n * \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i * \sum_{i=1}^n y_i}{n * \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (23)$$

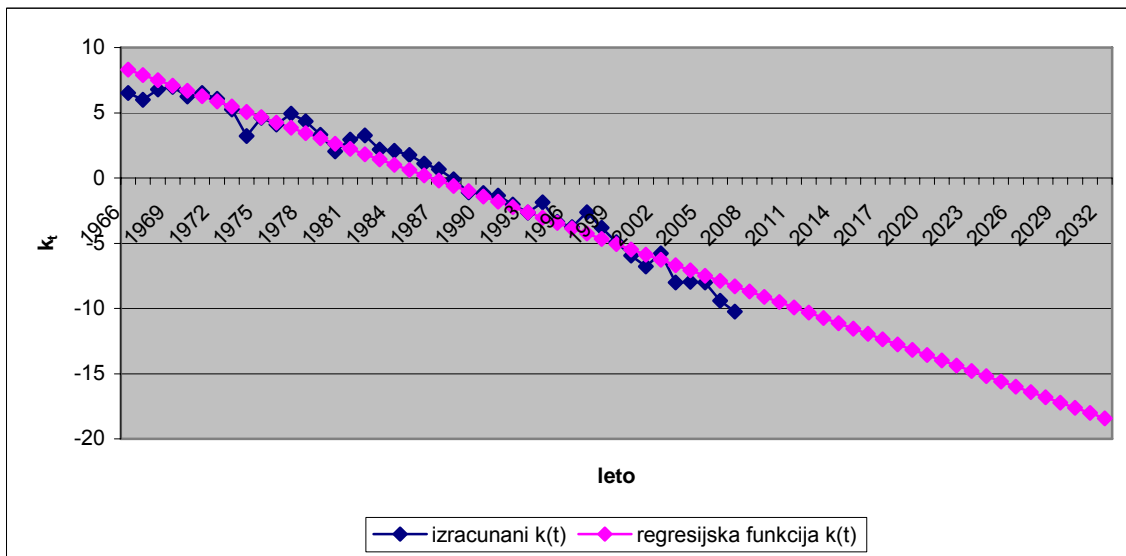
$$a = \frac{1}{n} * (\sum_{i=1}^n y_i - b * \sum_{i=1}^n x_i) \quad (24)$$

Ko smo izračunali regresijski koeficient in regresijsko konstanto, smo zapisali regresijsko funkcijo, ki smo ju narisali na slikah 14 in 15. Slika 14 prikazuje regresijsko funkcijo  $k_t$  ženske populacije, slika 15 pa moške. Novo funkcijo smo tudi ekstrapolirali in tako predpostavili vrednosti  $k_t$  v prihodnosti, ki jih bomo kasneje uporabili za projekcijo starostno specifičnih stopenj smrtnosti v Sloveniji za naslednjih 25 let. Na slikah 14 in 15 smo z modro barvo označili dejanske vrednosti  $k_t$ , z roza barvo pa regresijsko funkcijo  $k_t$ .

Slika 14: Graf dejanskih vrednosti  $k_t$  in regresijske funkcije  $k_t$  slovenske ženske populacije.



Slika 15: Graf dejanskih vrednosti  $k_t$  in regresijske funkcije  $k_t$  slovenske moške populacije.



### 3.3.7 Izračun verjetnostnih intervalov $k_t$

Za izračun intervalnih ocen starostno specifičnih stopenj smrtnosti potrebujemo tudi verjetnostne intervale  $k_t$ . Napake smo izračunali tako, da smo od dejanske vrednosti  $k_t$  odšteli trend  $k_t$  v vseh letih preučevanega obdobja. Tako smo izračunali napake v posameznih letih. Ko smo tako izračunali 42 napak za vsak spol posebej, smo uporabili programsko kodo napisano v Matlabu verzija 7.5.0.342, ki je zapisana v prilogi 5. Z njo smo ustvarili matriko, v katero smo v naključnem vrstnem redu 100000-krat zapisali izračunane napake. Napake smo nato seštevili po letih, saj se nam napake pri projekcijah za več let naprej seštevajo. Kot izračun smo dobili 100000 možnih napak za vsako posamezno leto v naslednjih 25 letih.

Izmed teh napak pa smo poiskali, kolikšna je verjetnost, da bo napaka znotraj intervala. Tako smo poiskali zgornje in spodnje meje verjetnostnih intervalov. Napake smo nato razvrstili po velikosti in poiskali intervale, pri katerih je verjetnost, da bo  $k_t$  znotraj intervala 80%, 90%, 95% in 98%. Po opisanem postopku izračunane zgornje in spodnje meje verjetnostnih intervalov smo zapisali v tabelah 3 in 4.

*Tabela 3: Odmiki mej verjetnostnih intervalov  $k_t$  slovenske ženske populacije v letih 2008-2032 od centralne napovedi.*

leto	10%	90%	5%	95%	2.50%	97.50%	1%	99%
2008	-1.5019	1.1768	-1.8843	1.4372	-2.3016	1.8858	-2.3609	2.1117
2009	-2.0318	1.8801	-2.5488	2.3444	-3.0862	2.8007	-4.1726	3.3230
2010	-2.4772	2.3051	-3.2042	2.9239	-3.8315	3.3864	-4.9110	4.2804
2011	-2.8204	2.6866	-3.6570	3.3731	-4.3610	3.9404	-5.7282	5.0546
2012	-3.1333	3.0156	-4.0689	3.8017	-4.8557	4.4369	-6.4072	5.7478
2013	-3.4424	3.3032	-4.4197	4.1899	-5.3010	4.9157	-6.9831	6.3429
2014	-3.7056	3.5794	-4.7728	4.5506	-5.7061	5.3233	-7.5150	6.9023
2015	-3.9472	3.8395	-5.0924	4.8663	-6.0931	5.7066	-8.0315	7.3994
2016	-4.1800	4.0693	-5.3985	5.1671	-6.4726	6.0903	-8.5229	7.8973
2017	-4.3990	4.2901	-5.6919	5.4593	-6.8002	6.4487	-8.9281	8.3205
2018	-4.6087	4.5029	-5.9643	5.7375	-7.0994	6.7335	-9.3364	8.7013
2019	-4.8060	4.6956	-6.2202	5.9779	-7.4398	7.0519	-9.7671	9.1410
2020	-5.0201	4.8850	-6.4410	6.2330	-7.7054	7.3112	-10.1382	9.5245
2021	-5.1875	5.0682	-6.7090	6.4696	-8.0679	7.6334	-10.4400	9.9010
2022	-5.3741	5.2771	-6.9350	6.7156	-8.3557	7.8798	-10.8798	10.2657
2023	-5.5511	5.4384	-7.1901	6.9410	-8.5979	8.1589	-11.2032	10.6238
2024	-5.7122	5.6047	-7.3701	7.1443	-8.8584	8.4400	-11.5856	10.9258
2025	-5.8747	5.7722	-7.5895	7.3705	-9.1190	8.6474	-11.8972	11.2836
2026	-6.0234	5.9460	-7.7967	7.5703	-9.3491	8.9133	-12.2155	11.5674
2027	-6.1564	6.0751	-7.9928	7.7711	-9.5715	9.1542	-12.5517	11.9574
2028	-6.3069	6.2220	-8.1473	7.9478	-9.8353	9.3973	-12.8528	12.2416
2029	-6.4585	6.4017	-8.3453	8.1378	-10.0639	9.6521	-13.1405	12.4822
2030	-6.5863	6.5338	-8.5516	8.3286	-10.2778	9.8598	-13.4485	12.8408
2031	-6.7284	6.6900	-8.7587	8.4946	-10.5214	10.0598	-13.7722	13.0800
2032	-6.8651	6.8464	-8.9185	8.6993	-10.7430	10.2658	-13.9609	13.3659



Tabela 4: Odmiki mej verjetnostnih intervalov  $k_t$  slovenske moške populacije v letih 2008-2032 od centralne napovedi.

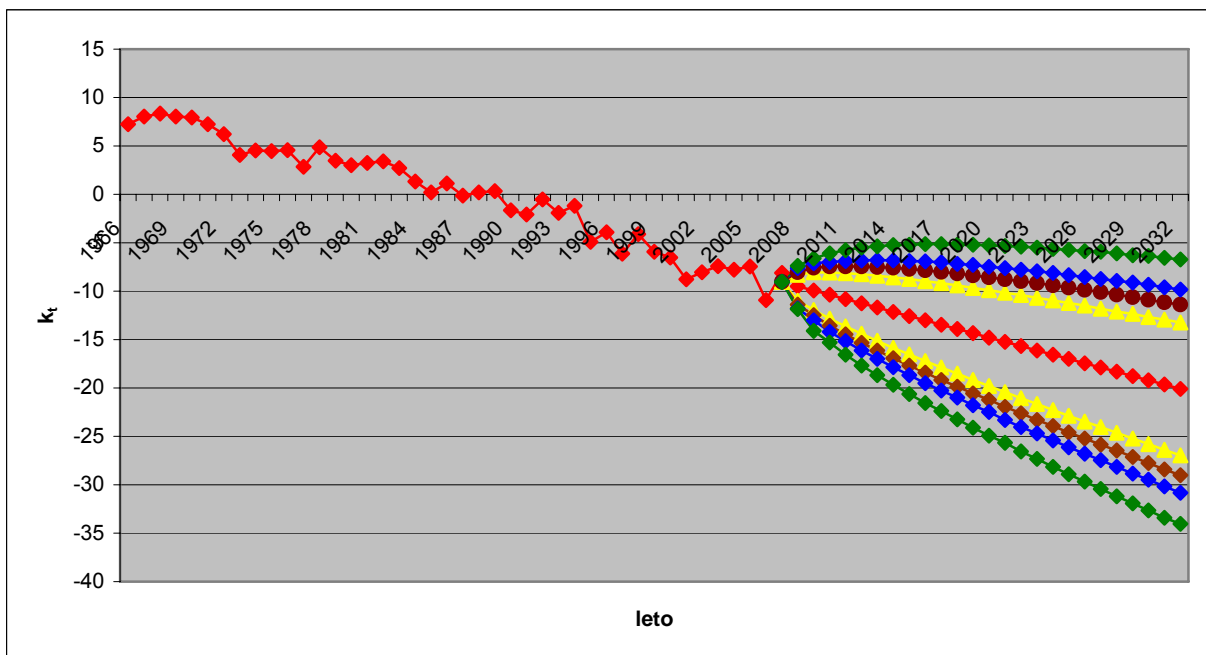
leto	10%	90%	5%	95%	2.50%	97.50%	1%	99%
2008	-1.5187	1.0806	-1.8479	1.1790	-1.8991	1.4483	-1.9529	1.6324
2009	-1.7895	1.6265	-2.3025	1.9773	-2.7573	2.2983	-3.7470	2.7131
2010	-2.1532	2.0304	-2.8207	2.4893	-3.3978	2.8594	-4.3658	3.5292
2011	-2.4530	2.3493	-3.2239	2.8990	-3.8577	3.3639	-5.1415	4.1954
2012	-2.7434	2.6438	-3.5711	3.2582	-4.3081	3.8268	-5.7068	4.7481
2013	-3.0023	2.8942	-3.9003	3.5758	-4.6945	4.2247	-6.2185	5.2812
2014	-3.2283	3.1240	-4.1822	3.8639	-5.0356	4.5777	-6.6755	5.7781
2015	-3.4399	3.3335	-4.4486	4.1446	-5.3639	4.9181	-7.0799	6.2335
2016	-3.6697	3.5209	-4.7250	4.4117	-5.6843	5.2307	-7.6124	6.6104
2017	-3.8445	3.7400	-4.9911	4.6720	-5.9905	5.5799	-8.0055	7.0164
2018	-4.0210	3.9293	-5.2140	4.9116	-6.2772	5.8395	-8.3774	7.3834
2019	-4.1896	4.0824	-5.4349	5.1606	-6.5684	6.0938	-8.6996	7.7190
2020	-4.3618	4.2563	-5.6292	5.3859	-6.8119	6.3740	-9.0225	8.0700
2021	-4.5039	4.4116	-5.8348	5.5950	-7.0739	6.6330	-9.3573	8.3719
2022	-4.6701	4.5886	-6.0429	5.8002	-7.2847	6.8779	-9.6395	8.7032
2023	-4.8270	4.7586	-6.2290	5.9703	-7.4967	7.0780	-9.9279	9.0312
2024	-4.9771	4.9051	-6.4307	6.1528	-7.7111	7.2961	-10.2974	9.3503
2025	-5.1326	5.0342	-6.5977	6.3386	-7.9251	7.5131	-10.5790	9.6418
2026	-5.2642	5.1943	-6.8014	6.5307	-8.1304	7.7409	-10.8039	9.9361
2027	-5.3827	5.3067	-6.9811	6.7013	-8.3356	7.9546	-11.0276	10.3041
2028	-5.5100	5.4377	-7.1507	6.8897	-8.5412	8.1449	-11.2650	10.4730
2029	-5.6328	5.5680	-7.3432	7.0269	-8.7286	8.3734	-11.5703	10.7354
2030	-5.7563	5.6892	-7.4847	7.1998	-8.9239	8.5819	-11.7480	11.0222
2031	-5.8818	5.8138	-7.6562	7.3846	-9.1371	8.7339	-12.0071	11.2431
2032	-5.9705	5.9308	-7.8048	7.5217	-9.3149	8.9060	-12.3338	11.4635

Z odmiki mej verjetnostnih intervalov od centralne napovedi, ki smo jih zapisali v tabelah 3 in 4, lahko funkciji  $k_t$  narišemo z intervali zaupanja. Intervale zaupanja lahko uporabimo tudi pri izračunih starostno specifičnih stopnjah smrtnosti in tako izračunamo intervalne starostno specifične stopnje smrtnosti. To je zelo uporabna lastnost Lee-Carterjevega modela in vseh stohastičnih modelov na splošno, saj lahko sami izberemo verjetnostne intervale, na katerih bodo temeljile naše odločitve. Takšnim rezultatom lahko bolj zaupamo, saj nam povedo dosti več kot točkovne ocene, ki so rezultat večine ostalih modelov.

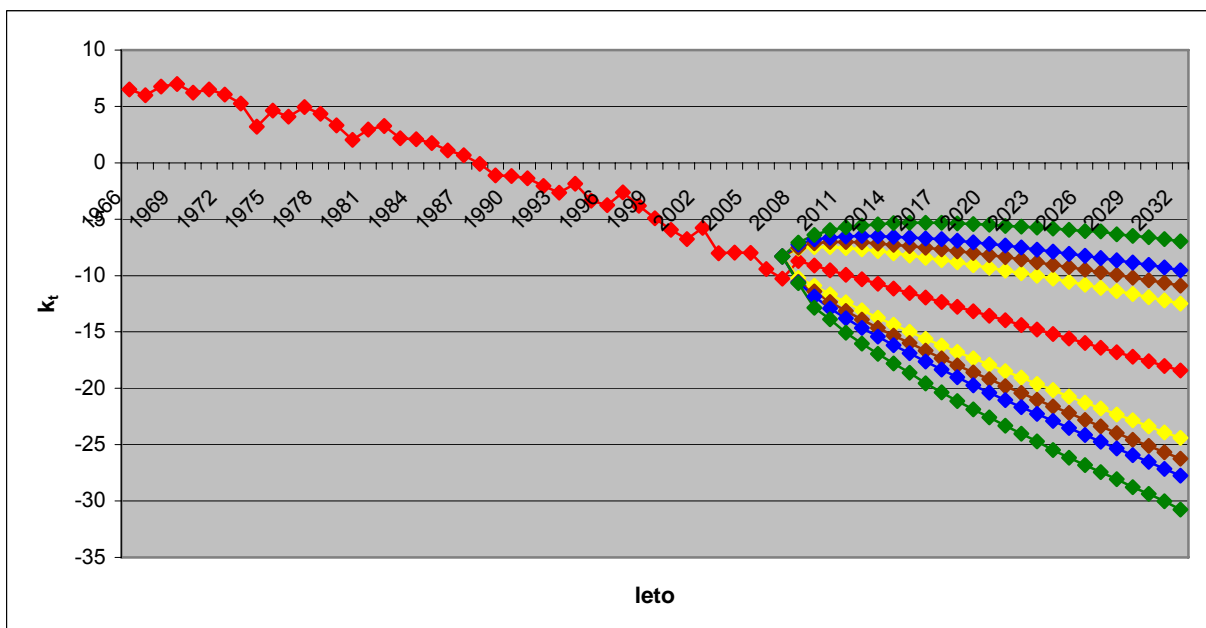
Na slikah 16 in 17 smo narisali projekciji  $k_t$  za obdobje 2008-2032. Rdeča krivulja predstavlja dejanske vrednosti  $k_t$  do leta 2007, v obdobju 2008-2032 pa centralno napoved  $k_t$ . Na slikah so tudi verjetnostni intervali zaupanja in sicer sta z rumeno barvo narisani meji intervala,

znotraj katerega se  $k_t$  nahaja z verjetnostjo 80%, z rjavo barvo sta narisani meji intervala, znotraj katerega se  $k_t$  nahaja z verjetnostjo 90%, z modro barvo sta narisani meji intervala, znotraj katerega se  $k_t$  nahaja z verjetnostjo 95% in z zeleno sta označeni meji intervala, znotraj katerega se  $k_t$  nahaja z verjetnostjo 98%.

Slika 16: Projekcija  $k_t$  slovenske ženske populacije z verjetnostnimi intervali 80%, 90%, 95% in 98%.



Slika 17: Projekcija  $k_t$  slovenske moške populacije z verjetnostnimi intervali 80%, 90%, 95% in 98%.



### 3.3.8 Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti

Za izdelavo projekcije starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske populacije smo zbrali vse potrebne podatke. Za rešitev enačbe 4 poznamo vse neznanke v posameznih letih in za vse starostne razrede, zato nam izračun starostno specifičnih stopenj ni povzročal težav. Za izračun logaritma starostno specifičnih stopenj smrtnosti v določenem letu pri določeni starosti v enačbo vstavimo podatke  $a_x$ ,  $b_x$  in  $k_t$  za želeno starost v izbranem letu. Izračun enačbe (4) antilogaritmiramo in kot rezultat dobimo starostno specifično stopnjo smrtnosti. Ker Slovenski statistični urad podatke o starostno specifičnih stopnjah smrtnosti podaja kot število umrlih na 1000 prebivalcev, smo naše rezultate pomnožili s tisoč in tako dobili rezultate, ki so primerljivi s podatki, ki jih objavlja SURS. Izračunane projekcije so zapisane v tabelah 5 in 6. Če bi hoteli izračunati intervalne ocene starostno specifičnih stopenj smrtnosti za želeno starost v izbranem letu, zgolj spremenimo  $k_t$  in sicer tako, da namesto točkovne ocene  $k_t$  vstavimo  $k_t$ -je, ki predstavljajo meje verjetnostih intervalov, ki so izračunani v poglavju 3.3.7, in tako izračunamo intervalne ocene starostno specifičnih stopenj smrtnosti.

*Tabela 5: Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije.*

starost	2010	2015	2020	2025	2030	2040	2050	2060	2070
0	2.5427	1.9513	1.4975	1.1492	0.8819	0.5194	0.3059	0.1801	0.1061
1-4	0.1066	0.0817	0.0626	0.0480	0.0368	0.0216	0.0127	0.0075	0.0044
5-9	0.0925	0.0780	0.0658	0.0554	0.0468	0.0333	0.0236	0.0168	0.0120
10-14	0.0898	0.0784	0.0684	0.0597	0.0522	0.0398	0.0303	0.0231	0.0176
15-19	0.2535	0.2306	0.2098	0.1908	0.1736	0.1436	0.1188	0.0983	0.0814
20-24	0.2665	0.2387	0.2137	0.1914	0.1714	0.1374	0.1102	0.0884	0.0709
25-29	0.2540	0.2222	0.1943	0.1699	0.1486	0.1137	0.0870	0.0665	0.0509
30-34	0.3979	0.3540	0.3150	0.2803	0.2494	0.1974	0.1563	0.1237	0.0980
35-39	0.6505	0.5875	0.5307	0.4793	0.4329	0.3532	0.2881	0.2351	0.1918
40-44	1.1616	1.0615	0.9701	0.8865	0.8101	0.6766	0.5650	0.4719	0.3941
45-49	2.0322	1.8728	1.7258	1.5905	1.4657	1.2448	1.0571	0.8978	0.7625
50-54	3.4188	3.2196	3.0319	2.8552	2.6888	2.3844	2.1146	1.8753	1.6630
55-59	4.6260	4.2754	3.9513	3.6518	3.3750	2.8828	2.4623	2.1032	1.7965
60-64	6.8046	6.2266	5.6978	5.2139	4.7710	3.9950	3.3452	2.8011	2.3455
65-69	10.8137	9.8039	8.8884	8.0584	7.3059	6.0052	4.9360	4.0572	3.3349
70-74	18.7614	16.8599	15.1511	13.6156	12.2356	9.8811	7.9797	6.4442	5.2041
75-79	33.2401	29.6543	26.4554	23.6015	21.0555	16.7578	13.3373	10.6150	8.4484
80-84	65.4256	59.5261	54.1586	49.2751	44.8319	37.1114	30.7204	25.4300	21.0507

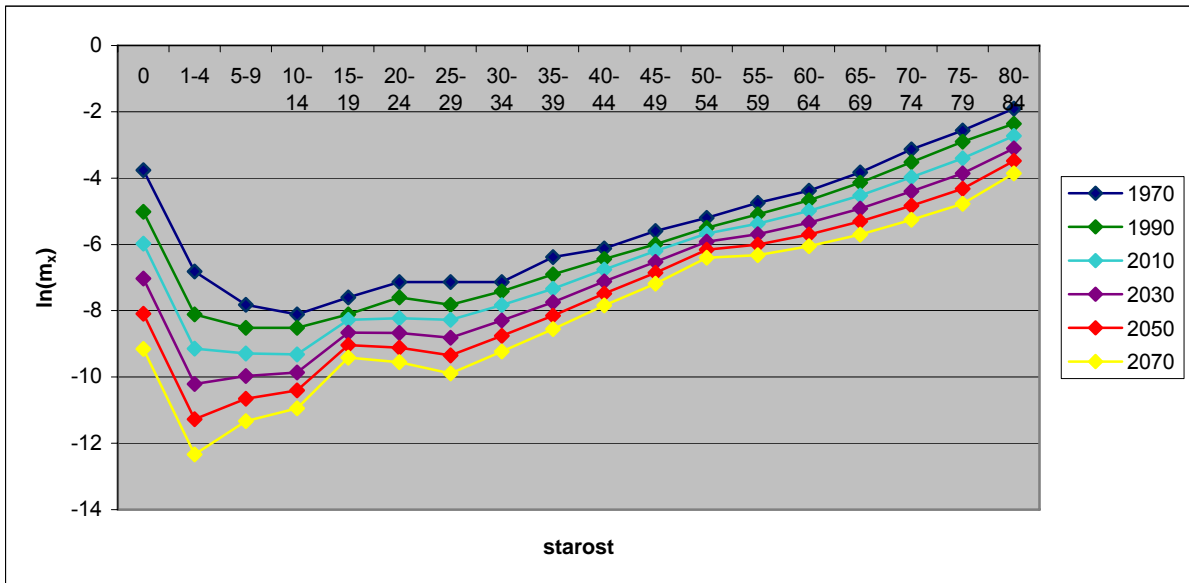
*Tabela 6: Projekcija starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije.*

starost	2010	2015	2020	2025	2030	2040	2050	2060	2070
0	2.7380	2.0455	1.5281	1.1417	0.8529	0.4760	0.2657	0.1483	0.0828
1-4	0.2122	0.1731	0.1412	0.1152	0.0940	0.0625	0.0416	0.0277	0.0184
5-9	0.1022	0.0812	0.0645	0.0512	0.0407	0.0257	0.0162	0.0102	0.0065
10-14	0.1433	0.1210	0.1022	0.0863	0.0729	0.0520	0.0371	0.0264	0.0188
15-19	0.6508	0.5960	0.5459	0.5000	0.4579	0.3841	0.3222	0.2703	0.2267
20-24	1.0850	0.9895	0.9024	0.8230	0.7505	0.6242	0.5192	0.4318	0.3591
25-29	1.0297	0.9276	0.8355	0.7526	0.6780	0.5501	0.4464	0.3622	0.2939
30-34	1.1512	1.0278	0.9176	0.8192	0.7314	0.5830	0.4647	0.3704	0.2953
35-39	1.6655	1.4900	1.3329	1.1925	1.0668	0.8538	0.6833	0.5469	0.4377
40-44	2.8152	2.5706	2.3472	2.1432	1.9569	1.6316	1.3603	1.1341	0.9456
45-49	4.8363	4.5036	4.1938	3.9053	3.6366	3.1535	2.7345	2.3712	2.0562
50-54	7.8680	7.4088	6.9763	6.5692	6.1857	5.4847	4.8632	4.3121	3.8234
55-59	12.1463	11.4652	10.8223	10.2154	9.6426	8.5915	7.6549	6.8205	6.0770
60-64	18.4344	17.3937	16.4117	15.4851	14.6109	13.0076	11.5803	10.3097	9.1784
65-69	27.1825	25.5028	23.9270	22.4485	21.0613	18.5389	16.3186	14.3642	12.6438
70-74	40.7212	37.8738	35.2255	32.7623	30.4714	26.3589	22.8015	19.7242	17.0622
75-79	63.2262	58.5912	54.2959	50.3155	46.6269	40.0412	34.3856	29.5288	25.3580
80-84	101.5467	94.6566	88.2340	82.2472	76.6666	66.6157	57.8824	50.2941	43.7006

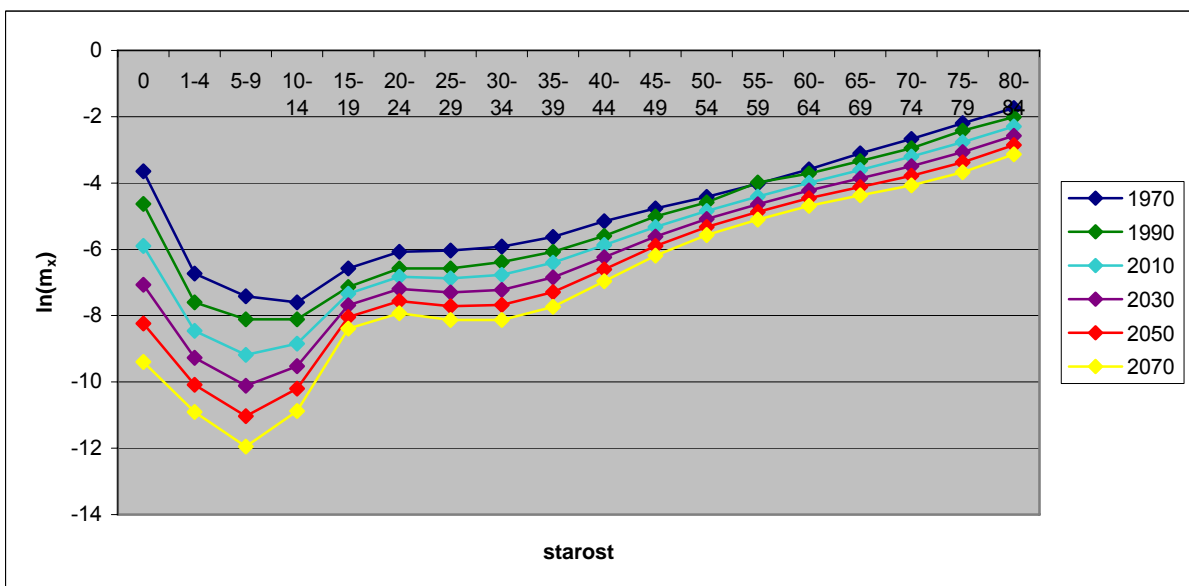
Projekcije iz tabel 5 in 6 lahko predstavimo tudi grafično. Na slikah 18 in 19 smo narisali grafe starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske in moške populacije v letih 1970, 1990, 2010, 2030, 2050 in 2070. Zaradi boljše preglednosti smo narisali logaritme starostno specifičnih stopenj smrtnosti. Iz tabel in grafov je razvidno, da starostno specifične stopnje smrtnosti upadajo, zato se posledično podaljšuje življenjska doba. V projekcijah je najbolj izrazito znižanje starostno specifičnih stopenj smrtnosti v mladih letih. Stopnje smrtnosti v starostnem razredu 0-1 zaradi hitrega upadanja v preteklosti zelo hitro upadajo tudi v projekcijah. Podobno velja tudi za starostne razrede 1-15. Nekateri kritiki Lee-Carterjevega modela so to izpostavili kot glavni problem modela, saj te stopnje premočno upadejo. Sledi zelo izrazita grba smrtnosti, še posebej pri moški populaciji. Če primerjamo stopnje smrtnosti moške populacije v letu 1970 s projekcijo v letu 2070, vidimo, koliko bolj izrazita postane grba smrtnosti, saj smrtnost v nižjih starostnih razredih veliko hitreje upada kot v starostnih razredih 15-30, zato grba postaja vedno bolj izrazita. Višje smrtnosti v grbi smrtnosti so posledica nesreč in mladostniške norosti, zato tehnološki napredek in razvoj medicine težko znižujeta te stopnje smrtnosti. V višjih starostnih razredih se stopnje smrtnosti znižujejo počasneje, to je posledica tehnološkega napredka, razvoja medicinske tehnologije ter bolj zdravega življenjskega stila. Zaradi računanja z logaritmi je upadanje smrtnosti vedno počasnejše in zato model ne potrebuje omejitev zgornje starostne meje.

Izračunane starostno specifične stopnje smrtnosti lahko uporabimo v zavarovalništvu za izračune premij pri življenjskih zavarovanjih, za projekcije denarnih tokov pri pokojninskih skladih ter za izračune pričakovane življenjske dobe. Za zadnje bi potrebovali še nekoliko več podatkov in sicer bi potrebovali podatke o smrtnosti v petletnih starostnih razredih 85-109, ki pa jih SURS na žalost ne objavlja in zato tudi nismo izdelali projekcije teh starostnih razredov.

Slika 18: Graf logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske ženske populacije v letih 1970, 1990 ter projekcij v letih 2010, 2030, 2050 in 2070.



Slika 19: Graf logaritmov starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije v letih 1970, 1990 ter projekcij v letih 2010, 2030, 2050 in 2070.



### 3.3.9 Slabosti Lee-Carterjevega modela

Lee-Carterjev model ima nekaj prednosti pred ostalimi ekstrapolativnimi metodami, ampak prav tako kot ostali ima osnovno slabost ekstrapolacije. Zgodovinski vzorci se bodo v prihodnosti morda spremenili in lahko pride do strukturnih sprememb. Model prav tako ne vključuje nobenih novih spoznanj s področja medicine in sprememb življenjskega stila, ki bi lahko imeli vpliv na smrtnost, saj avtorja zagovarjata teorijo, da je do takšnih sprememb prihajalo že v preteklosti in so zato pravzaprav že vključena v model (Lee, 2000, str. 80).

Ronald Lee je leta 2000 v svojem članku (str. 85) še posebej izpostavil naslednje slabosti Lee-Carterjevega modela:

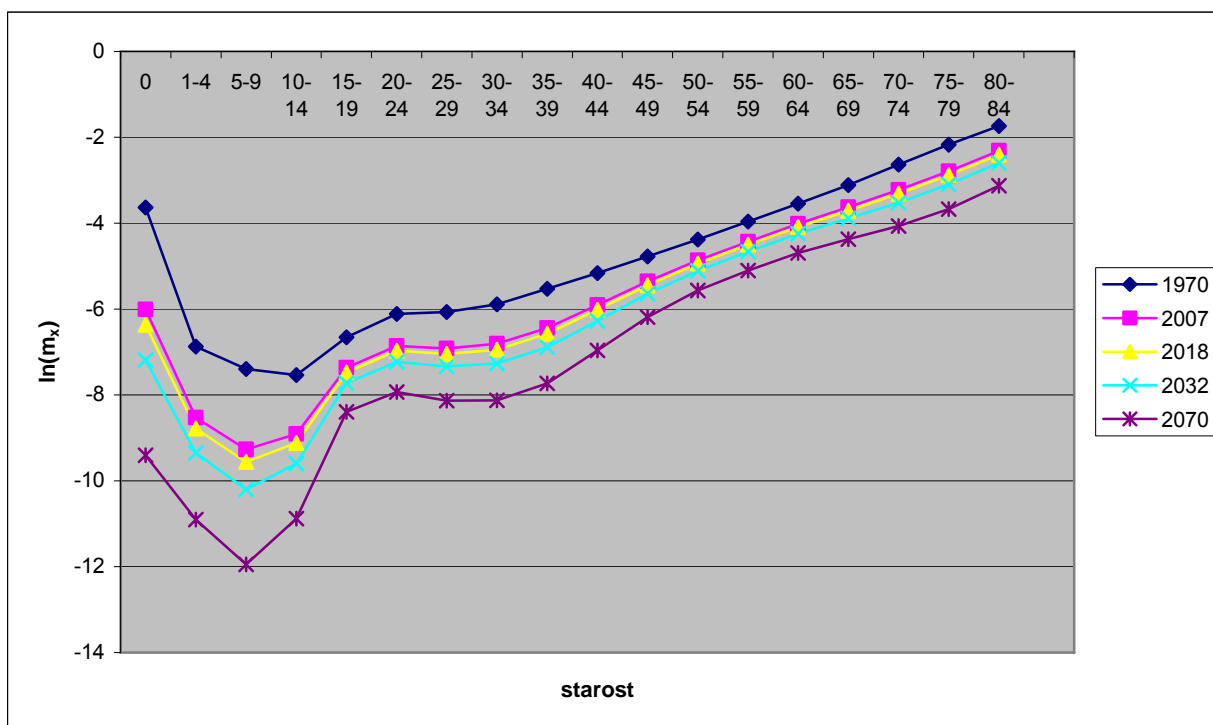
- V modelu sta upoštevala zgodovinske podatke od leta 1900 do 1996 in ugotovila, da je  $k_t$  upadal linearno. Vendar sta se zavedala, da  $k_t$  ni mogel upadati linearno skozi celotno zgodovinsko obdobje. Saj sta z ekstrapolacijo trenda v preteklost ugotovila, da bi dosegal zelo visoke starostno specifične stopnje smrtnosti že v začetku 19. stoletja. Tako sta prišla do zaključka, da se je moral trend  $k_t$  v preteklosti spremeniti. Tu se pojavi vprašanje ali bo sedanji trend veljal tudi v 21. stoletju? Lee je sklenil, da bi zaradi stalnih bioloških in medicinskih raziskav, ki so bile prisotne v preteklem stoletju, lahko pričakovali, da se bo enak trend nadaljeval tudi v prihodnjem stoletju.
- Metoda predvideva določen vzorec sprememb v starostni porazdelitvi smrtnosti. Tako stopnje upadanja smrtnosti pri različnih starostih v času vedno obdržijo enako razmerje do smrtnosti v ostalih starostnih razredih. V praksi pa to ne drži, saj se hitrost upadanja smrtnosti pri različnih starostih lahko spreminja. Primer takega spreminjanja je upočasnjevanje upadanja smrtnosti v starostnih razredih od 5 do 50 let v ZDA, v primerjavi z mlajšimi in starejšimi. Metoda takšnih sprememb ne more upoštevati. Metodo bi sicer lahko spremenili tako, da bi upoštevala takšne spremembe, vendar ni znano, ali bi se taka metoda izkazala za dobro pri napovedovanju starostno specifičnih stopenj smrtnosti.
- Metoda naredi projekcijo na podlagi predvidevanja, da se bodo nadaljevali trendi iz preteklosti in pri tem ne upošteva drugih informacij o prihodnjih trendih. Če bi imeli prepričljive razloge o tem, da bodo trendi upadanja smrtnosti v prihodnosti hitrejši ali počasnejši, bi lahko na podlagi tega popravili model tako, da bi to upošteval. Vendar prepričljivih razlogov, na podlagi katerih bi lahko popravili model, ponavadi nimamo na razpolago.
- Metoda najlažje upošteva napoved negotovosti, ki izhaja iz negotovosti pri napovedovanju  $k_t$ . Prav tako lahko upošteva tudi negotovosti v trendih pričakovane smrtnosti. Težave se pojavijo pri negotovosti, ki izhaja iz napak pri ocenjevanju koeficientov  $b_x$ , saj je te napake težko oceniti in jih vključiti v model. Ostale napake

izhajajo predvsem iz tega, ker predpostavljamo, da so napake nekorelirane med starostnimi razredi.

- Po mnenju nekaterih ljudi so intervali zaupanja pri Lee-Carterjevem modelu preozki in zato pravijo, da podcenjujejo negotovosti o prihodnji pričakovani življenjski dobi. Trdijo tudi, da bi morali biti intervali širši zaradi negotovosti, ki je povezana z izdelavo modela in negotovosti v zvezi s tem ali bodo prihodnji trendi res ostali enaki trendom iz preteklosti. Prav tako se krešejo menja v zvezi s tem, ali bo zaradi novih odkritij v medicini in tehnologiji začela smrtnost upadati hitreje ali se bodo pojavile bolezni, ki bodo odporne na zdaj znana zdravila in bodo zato upočasnila upadanja smrtnosti v prihodnosti.
- Razhajanje napovedi med spoloma. Pri uporabi Lee-Carterjevega modela za izdelavo projekcij smrtnosti kanadske populacije je v napovedih prišlo do velikih razhajanj med spoloma in sicer tako, da se je pričakovana življenjska doba žensk povečevala veliko hitreje od moških. To je posledica divergentnih trendov zgodovinskih podatkov, ki so posledica življenjskega stila v preteklosti, kot je na primer začetek kajenja pri moških v mlajših letih. Večina raziskovalcev s področja demografije pričakuje, da se bodo razlike v pričakovani življenjski dobi med spoloma v prihodnosti zmanjševale.

Lee in Carter sta že v svojem članku leta 1992 opozorila, da starostno specifične smrtnosti v posameznih starostnih intervalih padajo z enakim trendom skozi celotno obdobje. Posledica tega je, da pri dolgoročnih projekcijah smrtnost v starostnih razredih 1-15 let zelo močno upade ter da temu sledi bolj izrazita grba smrtnosti (Lee & Carter, 1992, str. 666). To je lepo razvidno na sliki 20, kjer opisano lahko opazujemo pri projekciji za leto 2070. Prav tako pa lahko opazimo tudi, da smrtnost dojenčkov upade pod 1 na 1000 živo rojenih, kar je pravzaprav tudi nekoliko vprašljivo. Vendar pa je potrebno omeniti, da so stopnje smrtnosti v nižjih starostnih razredih nizke, zato imajo napake pri projekcijah v teh starostnih razredih manjši vpliv na končne izračune.

Slika 20: Graf starostno specifičnih stopenj smrtnosti slovenske moške populacije v letih 1970, 2007 ter projekcij v letih 2018, 2032 in 2070.



Ena od slabosti uporabe Lee-Carterjevega modela za izdelavo projekcij starostno specifičnih smrtnosti slovenske populacije je tudi, da SURS objavlja podatke o starostno specifičnih smrtnostih le do starostnega razreda 80-84, v zadnji starostni razred pa spadajo vse osebe, ki so starejše od 85 let. Starostnega razreda 85+ v našem modelu nismo upoštevali, saj bi za natančne izračune potrebovali tudi starostne razrede 85-89, 90-94 ...

Ob vseh naštetih slabostih pa se moramo vedno zavedati, da modeli, s katerimi smo naredili projekcije na podlagi preteklih podatkov ob ekstremnih dogodkih odpovedo. Juha M. Alho (1992, str. 673) je na to opozoril v komentarju članka, ki sta ga zapisala Lee in Carter leta 1992. Še posebej ju je kritiziral, ker sta iz svojega modela pri izračunu intervalov zaupanja izločila epidemijo, ki se je v Ameriki pojavila 1918. Vendar sta mu na to odgovorila, da model deluje v normalnih razmerah, vendar pa prav tako kot vsi ostali model odpove ob hudih naravnih nesrečah ali jedrskih vojnah. Sklenila sta, da model ne more upoštevati takšnih enkratnih dogodkov, saj bi tako dobili preveč popačene rezultate. Z upoštevanjem epidemije v svojih izračunih bi Lee in Carter pri rezultatih dobila širše intervale zaupanja, zato sta namesto dejanskih podatkov iz leta 1918 uporabila prilagojene podatke, kot da epidemije ne bi bilo.



## SKLEP

Ob pregledu strokovne literature in izdelavi modela smo prišli do ugotovitve, da sta Ronald Lee in Lawrence Carter s svojim modelom naredila velik napredek v razvoju demografskih modelov. Večina novejših demografskih modelov temelji na njunih spoznanjih in pravzaprav nadgrajuje njuna spoznanja. Temeljna prednost njunega modela izhaja iz tega, da model uporablja starostno specifične stopnje smrtnosti in ne agregatov, kot jih je uporabljala večina predhodnih modelov. Zaradi upoštevanja starostno specifičnih stopenj v projekcijah upoštevata vse elemente tablic smrtnosti.

Projekcije so zasnovane na trdnih temeljih in transparentnih domnevah, da se bo vsaka starostno specifična smrtnost nadaljevala z upadanjem po zgodovinski eksponenti stopnji. Model prav tako poda pomembne informacije o verjetnosti napovedi in ob tem lahko rečemo tudi, da so projekcije dosti bolj verjetne, kot smo pričakovali pred izdelavo modela, saj so intervali zaupanja ozki.

Projekcije starostno specifičnih stopenj smrtnosti, ki smo jih izračunali v diplomski nalogi, in seveda natančen opis postopka izračuna, so zelo uporabni za pokojninske sklade, zavarovalnice ter za vse izplačevalce doživljenjskih rent. Izdelali smo projekcijo starostno specifičnih stopenj smrti celotne slovenske populacije. Institucije, ki potrebujejo projekcije starostno specifičnih stopenj smrtnosti bodisi za izračun rente, ki pripada zavarovancu, bodisi za izračun premije življenjskega zavarovanja, bi morale izdelati model in narediti projekcijo na podlagi lastnih zavarovancev, saj bi tako izdelali projekcijo trendov svojih zavarovancev. V primeru, da bi ugotovili, da nimajo dovolj velikega števila zavarovancev, pa bi lahko uporabili podatke slovenske populacije. Pri izdelovanju projekcij bi lahko upoštevali svoje potrebe in tako izdelali projekcije zgolj za tiste starostne razrede, ki bi jih zanimali, tako bi bile tudi napovedi bolj natančne.

Izdelana projekcija bi bila najbolj primerna za izračun pričakovane življenjske dobe slovenske populacije, vendar pa le te zaradi pomanjkanja podatkov o stopnjah smrtnosti v razredih nad 85 let ne moremo izračunati. Načeloma bi lahko dodali tudi starostno skupino 85+, vendar bi se s tem povečale napake projekcije. Z upoštevanjem skupine 85+ izgubimo veliko informacij o vzorcih smrtnosti starejše populacije.

Prepričani smo, da bodo z modeli, kot so Lee-Carterjev in drugi, ki so pravzaprav nadgradnje Lee-Cartejevega modela, v prihodnosti izdelovali projekcije, ki jih bodo uporabljale zavarovalnice ter druge institucije, ki se ukvarjajo z rentami ter življenjskimi zavarovanji, saj bodo le tako lahko izdelovali dovolj natančne projekcije, ki bodo posledično omogočale večjo konkurenčnost na zavarovalniških trgih ter hkrati nudile zaščito tako zavarovalnicam kot tudi zavarovancem.

## LITERATURA IN VIRI

1. Alho, J. M. (1992). Comment on Modelling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, **87**(14), 673-674.
2. Brass, W. (1974). Mortality models and their uses in demography, *Transactions of the Faculty of Actuaries*, **33**, 123-132.
3. Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002). Measuring the longevity risk in mortality projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, **2**, 49-63.
4. Cramer, H. & Wold, H. (1935). Mortality variations in Sweden: a study in graduation and forecasting. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **18**, 161-241.
5. Davidson, A. R. & Reid, A. R. (1927). On the calculation of rates of mortality. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, **11**(105), 183-232.
6. Demmel, J. W. (2000). *Uporabna numerična linearna algebra*. Ljubljana: DMFA-založništvo
7. Heligman, L. & Pollard, J. H. (1980). The age pattern of mortality at older ages. *Journal of the Institute of Actuaries*, **107**, 49-80.
8. Lee, R. D. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal*, **4**(1), 80-93.
9. Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modelling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, **87**(14), 659-675.
10. Malačič, J. (2006). *Demografija : teorija, analiza, metode in modeli*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
11. Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S. & Olivieri, A. (2009). *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford: Oxford University Press.
12. Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2003). On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics & Economics*. **32**(3), 379-401.
13. Russolillo, M. (2005). *Lee-Carter Mortality Forecasting: Methodological and Computational Issues* (doktorska disertacija). Napoli: Università degli Studi di Napoli Federico II.

14. Statistični urad Republike Slovenije. (od 1967 do 2008). *Statistični letopisi Republike Slovenije 1967-2008*. Ljubljana: Statistični urad Republike Slovenije.

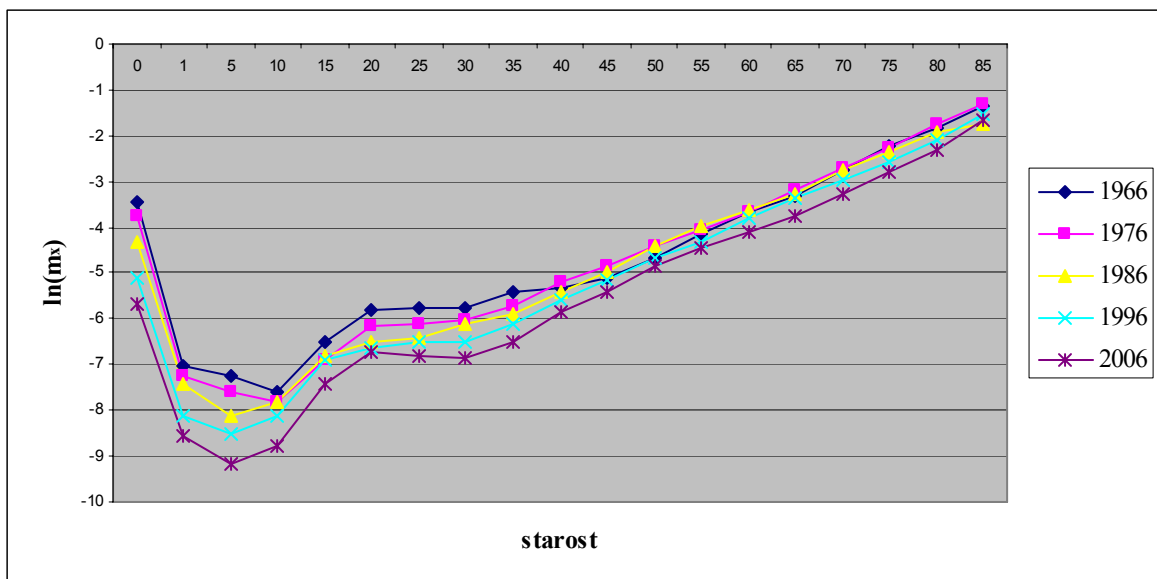


## **PRILOGE**

## KAZALO PRILOG

<i>Priloga 1: Starostno specifične smrtnosti moških v Sloveniji v letih 1966, 1976, 1986, 1996 in 2006.....</i>	<i>1</i>
<i>Priloga 2: Starostno specifične stopnje smrtnosti slovenske ženske populacije v obdobju 1966-2007.....</i>	<i>2</i>
<i>Priloga 3: Starostno specifične stopnje smrtnosti slovenske moške populacije v obdobju 1966-2007.....</i>	<i>5</i>
<i>Priloga 4: Programska koda za izračun <math>a_x b_x k_t</math> .....</i>	<i>8</i>
<i>Priloga 5: Programska koda za izračun intervalov zaupanja. ....</i>	<i>9</i>

**Priloga 1: Starostno specifične smrtnosti moških v Sloveniji v letih 1966, 1976, 1986, 1996 in 2006.**



**Priloga 2: Starostno specifične stopnje smrtnosti slovenske ženske populacije v obdobju 1966-2007.**

leto	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
<b>SKUPAJ</b>	<b>8.2</b>	<b>8.9</b>	<b>9.3</b>	<b>9.7</b>	<b>9.1</b>	<b>9.1</b>	<b>9.4</b>	<b>9.4</b>	<b>8.9</b>
0	21.1	22.8	22.6	21.9	23.3	22.6	18.7	20	16.1
1-4	0.8	1.1	1.2	1	1.1	1	0.7	0.4	0.6
5-9	0.4	0.6	0.4	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.3
10-14	0.4	0.3	0.4	0.3	0.3	0.3	0.4	0.2	0.2
15-19	0.6	0.5	0.4	0.6	0.5	0.6	0.4	0.7	0.6
20-24	0.9	0.6	0.6	0.5	0.8	0.4	0.6	0.7	0.5
25-29	0.7	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7	0.6	0.5	0.6
30-34	1	0.9	1.1	0.8	0.8	1.1	1.1	1	0.9
35-39	1.1	1.3	1.5	1.3	1.7	1.5	1.4	1.3	1.4
40-44	2.1	2.3	2.4	2.6	2.2	2.2	2.5	1.9	2.2
45-49	4	3.6	3.9	3.9	3.7	3.7	3.2	3.3	3.7
50-54	4.9	5.1	5.9	5.5	5.5	5.3	5	5.4	5.3
55-59	7.6	8.3	8.6	9	8.7	8	8.9	8.3	7.6
60-64	13.5	13.5	14.6	15.2	12.5	14	12.9	11.4	11.4
65-69	22.7	23.5	23.3	24.9	21.8	22.8	25.5	22.1	21
70-74	43.4	45.4	45.9	50.2	43.8	40.9	41.1	40.3	37.9
75-79	75.1	86.3	87.1	91.3	77.3	77.9	82.2	80.7	72.3
80-84	125	135.4	145.5	144.6	148.4	130.7	138.4	143.1	128.4
85+	220.7	245.6	259.8	259.1	244.8	224.7	215.8	236.1	222.3

leto	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
<b>SKUPAJ</b>	<b>9.4</b>	<b>9.5</b>	<b>8.9</b>	<b>9.2</b>	<b>9.2</b>	<b>9.2</b>	<b>9.2</b>	<b>9.5</b>	<b>9.9</b>
0	14.8	16	15.7	13.9	13.9	13.8	12	12.4	12.7
1-4	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.8
5-9	0.3	0.2	0.2	0.4	0.3	0.2	0.2	0.3	0.2
10-14	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
15-19	0.5	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4
20-24	0.5	0.7	0.6	0.7	0.4	0.7	0.6	0.6	0.4
25-29	0.6	0.7	0.6	0.7	0.7	0.5	0.7	0.7	0.6
30-34	1	1.1	0.8	0.9	0.8	0.8	1.1	0.8	0.8
35-39	1.2	1.2	1.3	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.1
40-44	2.5	1.9	2.3	1.9	2.3	1.9	2.2	2	2.1
45-49	3.3	3.5	3.7	3.7	3.5	3.9	3.6	3.7	3.6
50-54	5.2	4.7	4.8	5.3	5.5	4.8	5.3	5.1	5.5
55-59	8.6	8.2	7.5	7.1	7.8	7.6	7.8	7.6	8.5
60-64	12.1	12.6	12.7	12.1	12.6	11	11.6	11.9	11.9
65-69	22.1	20.8	20	19.3	19.8	18.9	19.9	19.1	21.5
70-74	39.8	38.9	35.6	38	35.9	34.4	34.1	36.1	37.2
75-79	73	96.3	62.3	61.9	66.3	62.4	61.1	65.9	65.6
80-84	136.3	131	117.8	123.9	134.7	111.1	100.7	99.4	109.6
85+	226.4	263	218.7	225	275.3	233.1	201.5	208.2	208.2

se nadaljuje



nadaljevanje

leto	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
<b>SKUPAJ</b>	<b>9.8</b>	<b>9.6</b>	<b>9.5</b>	<b>9.5</b>	<b>9.1</b>	<b>8.8</b>	<b>8.8</b>	<b>9.2</b>	<b>9.1</b>
0	12.4	10	10.4	10.8	8.9	7.5	6.6	5.6	8.1
1-4	0.3	0.3	0.5	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4	0.4
5-9	0.2	0.3	0.2	0.1	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2
10-14	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2
15-19	0.4	0.4	0.3	0.5	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4
20-24	0.4	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.3	0.4
25-29	0.4	0.4	0.7	0.5	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4
30-34	0.7	0.7	0.6	0.9	0.7	0.6	0.6	0.5	0.6
35-39	1.2	1.2	0.9	1.2	1	1.1	1	1	1.1
40-44	2.2	1.6	2.1	1.6	1.7	1.8	1.6	1.6	1.7
45-49	3.5	2.9	2.8	3.3	2.6	3.2	2.5	3	3.2
50-54	5.2	4.9	4.9	5	4.6	4.2	4.1	4.7	4.2
55-59	7.6	7.3	6.9	7.1	7.3	6.7	6.1	6.6	6
60-64	11.6	11.6	10.7	11.4	10.6	10.3	9.4	10.2	10.2
65-69	20	20.3	17.3	16.7	17.8	16.2	16	16.6	15.6
70-74	35.2	34.4	33.6	32.6	31.4	30.8	29.6	30.8	27.5
75-79	66	62.6	61.9	60	56.4	51.7	55.2	54.2	54.8
80-84	108.5	110.1	111.6	117.7	101	94	94.4	94.8	92.6
85+	212.4	193.1	179.2	176.7	167.4	162.1	164.4	199.4	192.8

leto	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
<b>SKUPAJ</b>	<b>9.5</b>	<b>9.3</b>	<b>9.1</b>	<b>8.9</b>	<b>9.1</b>	<b>9.2</b>	<b>9.1</b>	<b>8.9</b>	<b>8.7</b>
0	5.4	6.8	5.1	3.5	4.6	4.1	4.2	4.3	3.4
1-4	0.4	0.3	0.1	0.3	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1
5-9	0.1	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0001	0.2	0.1
10-14	0.2	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1
15-19	0.3	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4	0.3	0.4	0.3
20-24	0.5	0.5	0.4	0.5	0.2	0.4	0.4	0.3	0.2
25-29	0.4	0.5	0.4	0.5	0.3	0.4	0.3	0.4	0.3
30-34	0.7	0.7	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
35-39	1.1	1	1	1.1	1	0.8	0.7	0.8	0.7
40-44	1.7	1.8	1.7	1.5	1.5	1.6	1.9	1.4	1.3
45-49	2.7	2.7	2.8	2.8	2.5	2.6	2.5	2.6	2.3
50-54	4.2	4.1	4.3	4.4	3.6	4	4.3	3.9	3.9
55-59	6.5	6.3	5.4	5.8	5.7	5.3	5.6	5	5.8
60-64	11	9.5	9.6	8.9	8.7	8.5	8.2	8.2	7.5
65-69	15.7	16.1	15.8	14.6	14.2	14.5	14.4	13	12.6
70-74	28.6	26.4	26.7	24.5	23.8	24.9	25.4	22.7	22.2
75-79	54.8	55.9	46.3	42.4	44.7	43.3	40	40.5	37.7
80-84	97.1	91.9	87.5	87.9	90.6	89.2	85.7	73.3	71.2
85+	197	187.5	182.1	179.3	184.9	177.7	169.5	170.6	166.1

se nadaljuje

nadaljevanje

leto	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>SKUPAJ</b>	<b>8.8</b>	<b>9.2</b>	<b>8.9</b>	<b>9.2</b>	<b>8.7</b>	<b>8.9</b>
0	2.7	3.8	4.2	3.9	3.6	2.9
1-4	0.2	0.1	0.1	0.3	0.1	0.2
5-9	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
10-14	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	0.2
15-19	0.3	0.4	0.3	0.1	0.3	0.3
20-24	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
25-29	0.2	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2
30-34	0.5	0.5	0.5	0.6	0.3	0.4
35-39	0.9	0.7	0.7	0.7	0.5	0.5
40-44	1.2	1.5	1.2	1.1	0.9	1.0
45-49	2.4	2	2.5	2	1.6	1.8
50-54	3.6	3.4	3.9	3.2	3.3	3.0
55-59	4.8	5.2	5	4.8	4.2	4.5
60-64	7.3	7	6.8	6.9	6.9	6.3
65-69	12.1	12.2	11.1	10.8	9.9	9.9
70-74	21.2	22.1	19.8	19.6	18.3	17.9
75-79	38.3	39.4	36.4	36.3	33.0	32.7
80-84	71.1	70.3	69.6	69.3	65.9	63.0
85+	171.4	185	167.2	178.6	156.6	152.4

*Vir: Statistični letopisi Republike Slovenije 1977-2008.*

**Priloga 3: Starostno specifične stopnje smrtnosti slovenske moške populacije v obdobju 1966-2007**

leto	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
<b>SKUPAJ</b>	<b>10.3</b>	<b>10.6</b>	<b>11.4</b>	<b>12.2</b>	<b>11.2</b>	<b>11.1</b>	<b>11.5</b>	<b>10.8</b>	<b>10.6</b>
0	32.3	30.6	31.3	29.1	26.1	30.3	24.3	23.6	21.6
1-4	0.9	1	1.2	1.3	1.2	1	1	1.1	0.7
5-9	0.7	0.6	0.8	0.6	0.6	0.7	0.7	0.5	0.3
10-14	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.6	0.5	0.5	0.4
15-19	1.5	1.4	1	1.4	1.4	1.1	1.3	1.4	1.1
20-24	3	2.1	1.8	2	2.3	2.1	2	2.3	2.2
25-29	3.1	2.1	2.7	2.1	2.4	2.6	2.3	2.2	2.2
30-34	3.1	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.4	2.4
35-39	4.4	3.6	3.7	3.8	3.6	3.8	4.1	3.7	3.7
40-44	4.9	4.8	5.3	6	5.8	5.7	5.6	5.6	5.2
45-49	6.1	6.3	7.8	8.3	8.5	7.8	7.7	7.9	8.3
50-54	9.5	10.4	11.4	11.6	12	11.5	12.2	9.1	11.1
55-59	15.7	15.2	17.3	19.7	18	18.2	17.5	18.1	15.1
60-64	25.3	27.6	29.8	30.8	27.8	27.9	27.7	26.2	26.1
65-69	36.8	41.6	42.7	49.6	44.7	44	47.1	42.8	41.2
70-74	64.4	68.2	77.3	87.1	69.5	68.7	71.5	65.2	64.3
75-79	107.9	114	120	129.8	111.8	107.6	121.9	111.5	108.8
80-84	159.9	176.4	173.9	186.2	175	169.1	186.7	170.5	166.2
85+	255.5	286.8	320	290	320.9	257.6	261.4	235	268.3

leto	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
<b>SKUPAJ</b>	<b>11.1</b>	<b>10.9</b>	<b>10.8</b>	<b>11.2</b>	<b>10.8</b>	<b>10.8</b>	<b>10.6</b>	<b>11.1</b>	<b>11.6</b>
0	20.7	23.7	19.7	19.8	17.2	16	14	15.6	14.4
1-4	1.1	0.7	0.8	0.9	0.7	0.8	0.8	0.6	0.6
5-9	0.5	0.5	0.6	0.5	0.5	0.2	0.4	0.6	0.4
10-14	0.4	0.4	0.7	0.4	0.4	0.4	0.5	0.4	0.3
15-19	1.2	1	1.3	1.5	0.9	1.2	1.2	1.2	1
20-24	2	2.1	2.3	2.2	2.1	2.1	2.1	1.8	1.6
25-29	2	2.2	2.1	1.9	2	2.1	1.9	1.9	1.9
30-34	2.3	2.4	2.4	2.5	2.2	2.3	2.4	2.2	2.3
35-39	3.7	3.3	3.5	3.6	3.3	3.3	3.4	3.5	3.5
40-44	5.5	5.6	5	5	5.4	5.4	4.8	5.4	5.3
45-49	7.9	7.9	8.6	8.1	8.7	8.5	8.3	9.1	8.9
50-54	11.5	11.9	11.7	12.4	12	12.9	12.5	15	14
55-59	18.2	17.5	15.8	17.1	17.2	17.4	18.2	18.5	20.7
60-64	26.8	25.3	26.1	25.4	25.1	23.7	25.6	27.5	27.7
65-69	42.2	41.2	38.5	39.7	40.9	39.4	38.6	41.5	43.5
70-74	67.9	65.5	65.2	70.3	66.1	64.2	61.1	62.2	66.6
75-79	108.2	101.8	99.6	98.2	108	94.7	100	95.9	111
80-84	186.2	173.3	167.4	188.5	171.1	153.2	126.8	136.5	147.2
85+	279.6	272.9	294.6	307	248.8	286.3	236.8	251.8	261.3

se nadaljuje

nadaljevanje

leto	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
<b>SKUPAJ</b>	<b>11.1</b>	<b>10.8</b>	<b>10.5</b>	<b>10.8</b>	<b>10.3</b>	<b>10.1</b>	<b>9.9</b>	<b>10.1</b>	<b>10.3</b>
0	15.6	16	13.5	11.6	11	8.2	9.7	10.3	9.5
1-4	0.6	0.6	0.6	0.6	0.5	0.6	0.5	0.4	0.4
5-9	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.3	0.2	0.2
10-14	0.3	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2
15-19	0.9	1	1.1	0.9	0.9	0.9	0.8	1	0.9
20-24	1.8	1.8	1.5	1.9	1.5	1.7	1.4	1.8	1.7
25-29	1.9	1.8	1.6	1.6	1.5	1.8	1.4	1.5	1.4
30-34	2.4	2.2	2.2	2.1	1.9	1.9	1.7	1.7	2.2
35-39	3.2	2.9	2.7	2.9	3.2	2.9	2.3	3.1	2.9
40-44	4.9	4.6	4.4	4.9	4.4	4.1	3.7	4.2	4
45-49	8.2	7.9	7	7.5	7	6.5	6.7	6.6	6.1
50-54	14.1	12.6	12	13.2	12.1	11.2	10.2	9.9	9.7
55-59	19.6	19.7	19.1	21.1	18.3	18.7	18.6	16.8	16.4
60-64	27.1	27.7	26.3	28.4	26.4	26.1	24.4	25.2	26.8
65-69	41.4	39.3	37.6	37.9	39.1	35.8	35.6	36.4	37.5
70-74	61.8	57.7	63.6	58.1	59.2	55.4	52.3	55.5	51.1
75-79	100.7	99.5	95	92.3	86.8	86.8	88.9	86.1	86.5
80-84	146.1	148.1	145.7	143.5	143.1	132.3	133.4	134	137.2
85+	232.5	201.8	173.2	175.7	169.4	175.9	160.7	221.6	237.7

leto	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
<b>SKUPAJ</b>	<b>10.6</b>	<b>10.2</b>	<b>10</b>	<b>9.8</b>	<b>10</b>	<b>10.1</b>	<b>10</b>	<b>9.8</b>	<b>9.9</b>
0	1.6	6.1	6	6.1	5.6	6.4	4.8	5.6	4.8
1-4	1.8	0.5	0.4	0.3	0.3	0.4	0.4	0.2	0.1
5-9	0.2	0.3	0.2	0.2	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2
10-14	0.3	0.2	0.3	0.3	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2
15-19	0.9	1.3	0.9	1	0.7	1	0.8	0.7	1
20-24	1.9	1.5	1.4	1.3	1.3	1.4	1.2	1.2	1.2
25-29	1.7	1.8	1.2	1.5	1.5	1.1	1.2	1	1.3
30-34	2.2	1.9	1.7	1.5	1.7	1.7	1.4	1.3	1.5
35-39	2.9	2.8	2.1	2.2	2.4	2.3	2.1	2.1	2.1
40-44	4.5	4.2	3.9	3.8	3.6	3.7	3.3	3.2	3.1
45-49	6.2	6.4	5.9	5.7	5.8	5.7	5.9	5.5	5.6
50-54	10.2	10.3	9.5	9.3	9.4	8.9	8.7	8.1	8.2
55-59	17.4	14.7	14.8	13.3	13.9	13.6	12.7	13.4	13.4
60-64	25.9	25	24.1	22.7	23.6	21.6	21.7	19.6	19.9
65-69	37.7	35.8	35.6	34.7	33.2	34.7	33.9	32	30.7
70-74	53.2	52.6	51.7	51	48.3	51.3	47.7	49.9	45.7
75-79	89	82.8	79.2	76.4	77.4	74.2	72.2	73.9	72.2
80-84	140.4	128.9	125.9	124.2	123.2	130.9	124.4	113.8	108.1
85+	235.4	214.1	214.3	213.1	219.3	204.5	218.7	202.3	215.2

se nadaljuje

nadaljevanje

leto	2002	2003	2004	2005	2006	2007
<b>SKUPAJ</b>	<b>9.9</b>	<b>10.3</b>	<b>9.7</b>	<b>9.6</b>	<b>9.4</b>	<b>9.5</b>
0	4.9	4.1	3.6	4.4	3.4	2.7
1-4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.3
5-9	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
10-14	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1
15-19	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6
20-24	1.2	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2
25-29	1.2	1.1	1.1	1.3	1.1	1.2
30-34	1.4	1.2	1.1	1.1	1.1	1.2
35-39	1.9	2	1.8	1.4	1.5	1.6
40-44	3	3.2	3	2.7	2.9	2.5
45-49	4.8	5.6	5	4.6	4.5	4.3
50-54	8.4	8.5	7.5	7.1	7.7	6.9
55-59	12.7	12.6	11.9	10.1	11.4	10.5
60-64	20	18.4	17.1	17	16.3	16.5
65-69	28.7	29.8	26.6	25.4	23.4	23.7
70-74	47.2	46.9	43.1	41	38.5	37.7
75-79	68.2	70.3	68.5	68.1	60.6	62.3
80-84	111.8	119.8	108.4	103	97.3	96.9
85+	223.9	231.4	205.1	217.5	191.1	187.1

*Vir: Statistični letopisi Republike Slovenije 1977-2008.*

## Priloga 4: Programska koda za izračun $a_x$ , $b_x$ , $k_t$ .

```
clc
clear
LCrawData = importdata('data\surspodatki.xls'); %%vnos podatkov iz datoteke
mx = LCrawData.data.Sheet1;
[narrow, ncol] = size(mx);
headers = LCrawData.textdata.Sheet1;
alpha=mean(mx'); %%izračun vrednosti alpha
Z = (mx) - repmat(alpha', 1, ncol); %%repmat ustvari matriko imenovano
alpha' dimenzij 1 krat ncol(št. stolpcev)
[U,S,V] = svd(Z); %%singularni razcep matrike

beta = U(:, 1)./sum(U(:, 1)); %%izračun vrednosti beta
kappa = S(1,1).*sum(U(:, 1)) .* V(:,1); %%izračun vrednosti kappa
alpha= alpha' ;

%%izpis rezultatov

alpha
beta
kappa
```

## Priloga 5: Programska koda za izračun intervalov zaupanja.

```
function f=barut(x, bStrpLength, confidenceLevel)%% vnos parametrov: za
koliko let vnaprej želimo izračunati meje (x mora biti manjši od 40), vnos
števila ponovitev in vnos intervalov zaupanja v odstotkih
if(x > 40)
    error('x has to be less or equal to 40');
end
y=xlsread('podatki');%% uvoz podatkov iz datoteke
dd=bootrsp(y, bStrpLength);
distr=zeros(2,x);
for i=1:1000
    for j=2:x
        dd(j,i)=dd(j-1,i)+dd(j,i);
    end
end

for k=1:x
    dd(k,:)=sort(dd(k,:)); %%razvrsti vrednosti po velikosti in poišče meje
intervalov zaupanja
    distr(1, k)=sort(dd(k, ceil(bStrpLength * (100 - confidenceLevel) /
100)));
    distr(2, k)=sort(dd(k, floor(bStrpLength * confidenceLevel / 100)));
end
f=distr';
```