UNIVERZA V LJUBLJANI

EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

# OPTIMIZACIJA PORTFELJA Z UPORABO BLACK IN LITTERMANOVEGA MODELA

Ljubljana, december 2008 BARBARA JEZA

**IZJAVA**

Študentka Barbara Jeza izjavljam, da sem avtorica tega diplomskega dela, ki sem ga napisala pod mentorstvom dr. Aleša Ahčana, in da dovolim njegovo objavo na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 9.12.2008 Podpis:___________________________

# KAZALO

# UVOD

Cilj vsakega vlagatelja je iz razpoložljivih finančnih instrumentov sestaviti učinkoviti portfelj (ang. *efficient portfolio*), ki ima pri določeni pričakovani donosnosti najmanjše tveganje. Način oblikovanja takšnega portfelja je leta 1952 rešil Herry M. Markowitz, ki se je v zgodovino zapisal kot oče moderne premoženjske teorije (ang. *Modern portfolio theory-MPT*). Končen rezultat njegovega modela izbire portfelja je parabolična meja učinkovitosti (ang. *efficient frontier*), na kateri se nahajajo vsi učinkoviti portfelji.

Markowitzev model, ki je v akademskih sferah preživel zob časa in predstavlja glavni koncept MPT, se je v praksi izkazal za precej manj uporabnega, kar se kaže v njegovi nepriljubljenosti med institucionalnimi in individualnimi vlagatelji. Ti so po večini mnenja, da so uteži v portfeljih, dobljenih z uporabo Markowitzevega modela, preveč ekstremne in neintuitivne, torej se ne skladajo z vlagateljevimi pričakovanji glede donosnosti posameznih finančnih sredstev (Michaud, 1989; Black & Litterman, 1992).

Težave, s katerimi se srečujejo vlagatelji pri uporabi Markowitzevega modela, so Fisherja Blacka in Roberta Littermana spodbudile k iskanju primernejših optimizacijskih modelov. Leta 1992 sta v članku *Global portfolio optimization* prvič predstavila izsledke svojih raziskav. Njun pristop k določanju optimalnih uteži je enak Markowitzevemu, temeljna razlika pa je v vhodnih parametrih. Black in Litterman namreč izpeljeta nov vektor pričakovanih donosnosti, ki nadomesti donosnosti, izračunane na podlagi minulih podatkov. Rezultat so optimizirani portfelji, ki so bolj diverzificirani, stabilnejši in hkrati tudi bolj intuitivni, saj odražajo pričakovanja vlagateljev.

Za izpeljavo novega vektorja pričakovanih donosnosti, ki služi za odločanje o alokaciji sredstev oziroma naložbe med posamezne investicije, sta po Blacku in Littermanu potrebna dva vira informacij. Prvi, ki se pridobi kvantitativno, so zahtevane oziroma ravnotežne donosnosti (angl. *equilibrium returns*), izračunane s CAPM, in služijo za določitev strateške alokacije med sredstvi. V procesu odločanja vlagatelj ravnotežne donosnosti prilagodi glede na svoja lastna pričakovanja, ki podajo informacijo, ali v določena sredstva investirati več ali manj, kot sledi iz ravnotežnih pričakovanj. Z združitvijo obeh virov informacij dobimo nov vektor pričakovanih donosnosti, ki se ga uporabi v procesu optimizacije.

Namen diplomskega dela je predstaviti Black in Littermanov model (v nadaljevanju B-L model) s teoretičnega vidika in preučiti, ali nov vektor pričakovanih donosnosti resnično pripomore k stabilnejšim in bolj intuitivnim portfeljem, ki odražajo pričakovanja vlagateljev. Delo je razdeljeno na pet poglavij. Uvodu sledi teoretični del, kjer je predstavljena terminologija finančnih izrazov. V drugem poglavju sta opisana Markowitzev optimizacijski model in CAPM, ki sta osnova za izgradnjo B-L modela. V tretjem poglavju je predstavljen in matematično razložen B-L model oziroma postopek, kako določiti nov vektor pričakovanih donosnosti. Predzadnje poglavje je namenjeno empirični raziskavi, v kateri je najprej opisana metodologija, nato pa je narejena primerjava med Markowitzevim in B-L modelom. Peto poglavje predstavlja sklep, kjer sem povzela ključne ugotovitve in podala predloge za nadaljnje raziskave.

# 1. TERMINOLOGIJA FINANČNIH IZRAZOV

## *1.1. Tveganje in donosnost*

Vlaganje na finančne trge je povezano s tveganjem, da realizirana donosnost ne bo enaka pričakovani, saj prihodnje donosnosti niso zajamčene. Kolikšna bo realizirana donosnost naložbe v razmerah negotovosti, ne more natančno napovedati nihče. Markowitz (1959) reši problem napovedovanja **pričakovanih donosnosti** (angl. *expected return*) s predpostavko, da porazdelitev donosnosti iz minulega obdobja predstavlja porazdelitev donosnosti v prihodnosti. Pričakovano donosnost izračuna na podlagi minulih podatkov kot aritmetično sredino[1] v $n$ opazovanih obdobjih. Če je $r_i$ donosnost v času $i$, $n$ pa ponazarja število opazovanih obdobij, je pričakovana donosnost $E(r)$ enaka (Ross et al., 2005, str. 276):

$$E(r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \tag{1.1}$$

Poleg pričakovane donosnosti vlagatelje zanima tudi tveganje. Za mero tveganja se uporabljajo različni statistični parametri. Po Markowitzu (1952, str. 80) sta najpogostejša **varianca** (angl. *variance*) in **standardni odklon donosnosti** (angl. *standard deviation of return*).

Varianca donosnosti naložbe pove, do katerega obsega obstaja verjetnost, da bo dejanska donosnost odstopala od pričakovane. Na podlagi minulih podatkov izračunamo vzorčno varianco donosnosti $i$-tega vrednostnega papirja kot (Bodie et al., 2005, str. 153):

$$\sigma_i^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(r_i - E(r))^2}{n} \tag{1.2}$$

Standardni odklon donosnosti dobimo tako, da varianco korenimo $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ . Primernost standardnega odklona in variance za mero negotovosti izhaja iz pogosto uporabljene predpostavke, da se donosnosti razpršenih premoženj porazdeljujejo normalno (Alexander,

[1] Aritmetična sredina je dobra mera centralne tendence le ob predpostavki, da se vrednosti slučajne spremenljivke porazdeljujejo vsaj približno normalno, v nasprotnem primeru so primernejše druge mere centralne tendence, kot sta na primer modus ali mediana (Mramor, 2002, str. 52).

1998, str. 131). V primerjavi z varianco je standardni odklon bolj intuitivna mera tveganja, saj je z normalno porazdelitvijo, ki jo popolnoma opišeta njena pričakovana vrednost in standardni odklon, povezan neposredno (Salomons, 2007, str. 5).

**Kovarianca donosnosti** (angl. *covariance of return*) meri, kako se donosnost posameznega vrednostnega papirja giblje glede na gibanje donosnosti drugega vrednostnega papirja. Na podlagi minulih opazovanj vzorčno kovarianco izračunamo po sledeči formuli (CFA, 2008, str. 234):

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left[r_{t,i} - E(r_i)\right] \left[r_{t,j} - E(r_j)\right]}{n-1} \tag{1.3}$$

Z vidika vlagatelja je zaželeno, da kovarianca med donosnostjo dveh vrednostnih papirjev zavzema čim večjo negativno vrednost, saj to pripomore k zmanjšanju tveganja celotnega portfelja. Kljub temu kovarianca ne more zavzeti poljubno velike negativne vrednosti. Iz definicije variance namreč sledi, da je vrednost kovariance omejena s pozitivno in negativno vrednostjo produktov standardnih odklonov donosnosti obeh vrednostnih papirjev (Jamnik, 1971, str. 187).

$$-\sigma_i \sigma_j \leq \sigma_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j \tag{1.4}$$

**Korelacijski koeficient** (angl. *correlation coefficient*) je statistična mera, ki predstavlja standardizirano vrednost kovariance (Birgham & Daves, 2004, str. 77):

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{1.5}$$

pri čemer je:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1. \tag{1.6}$$

Če je $\rho_{ij} = -1$, potem med donosnostjo dveh vrednostnih papirjev obstaja popolna negativna korelacija. Z vidika vlagatelja je to najugodnejši primer, saj je kovarianca najbolj negativna. V tem primeru lahko ob pravilni izbiri deležev dveh tveganih vrednostnih papirjev dosežemo, da je tveganost celotnega portfelja enaka nič (angl. *prfect hedge position*). Kadar je $\rho_{ij} = 1$, govorimo o popolni korelaciji. Donosnost obeh naložb se giblje v isti smeri, zato diverzifikacija ne pripomore k zmanjšanju tveganja (Bodie et al., 2005, str. 211). Učinek diverzifikacije na zmanjšanje tveganja je tem bolj pozitiven, čim nižja je korelacija med donosnostmi posameznih naložb.

**Normalna porazdelitev donosnosti** (angl. *normal distribution of returns*) finančnih sredstev je ena izmed ključnih predpostavk, na katerih je zasnovana MPT. Takšna predpostavka je zelo priročna, saj normalno porazdelitev popolnoma opišeta njena pričakovana vrednost in standardni odklon (Bodie et al., 2005, str. 186). Ali predpostavka o normalni porazdelitvi donosnosti resnično drži, sta preučevala Aparicio in Estrada (2001). V svoji študiji, v katero sta vključila vrednostne papirje trinajstih evropskih kapitalskih trgov in svetovni indeks, sestavljen iz 2249 delnic, sta analizirala, ali so bile donosnosti v obdobju 1990–1995 porazdeljene normalno. Hipotezo o normalni porazdelitvi sta v vseh primerih zavrnila. Porazdelitve donosnosti so bile asimetrične v različne strani in so imele v večini primerov debele repe in visoke vrhove. Pomembna ugotovitev je med drugim tudi, da se velika odstopanja od normalne porazdelitve pojavijo pri podatkih o dnevnih donosnostih, kar ne velja za mesečna opazovanja, kjer se je normalna porazdelitev izkazala za dobro aproksimacijo porazdelitve donosnosti.

Kadar se donosnosti ne porazdeljujejo normalno, varianca ne opiše tveganja v celoti. Sorrnette (1998, str. 262) pravi, da se tveganja ne da zajeti z enim samim parametrom, saj nanj vplivata tudi asimetrija in sploščenost porazdelitve donosnosti. Po Bodie, Kane, Marcus, Perrakis in Ryan (2005, str. 185) prvi centralni moment (pričakovana vrednost) predstavlja pričakovano nagrado, vsi višji momenti pa negotovost, ki je z njo povezana. Vsi parni centralni momenti (varianca, $M_4$ in drugi) opisujejo verjetnost pojava ekstremnih vrednosti, medtem ko neparni momenti ($M_3$ in drugi) predstavljajo mero asimetrije. Pozitivne vrednosti slednjih so pri tveganju nenaklonjenih vlagateljih zaželene, saj je porazdelitev asimetrična v desno. To pomeni, da je verjetnost pozitivnih donosnosti višja. Za normalno porazdelitev pri tem velja, da je mera sploščenosti enaka 0, mera asimetrije pa 3.

## *1.2. Lastnosti portfelja*

Racionalni vlagatelji svojega premoženja nikoli ne bodo naložili v en sam vrednostni papir, saj bi se s tem izpostavili prevelikemu tveganju. Eno izmed najpomembnejših stališč v MPT je, da je z diverzifikacijo tveganje portfelja moč zmanjšati, zato bodo vlagatelji svoje premoženje razpršili med različne vrednostne papirje. Po Radcliffeu (1997, str. 217) je posamezen vrednostni papir tvegan le toliko, kolikor prispeva k tveganju celotnega portfelja. Ob takšnem pristopu se lahko zgodi, da navidezno tvegan vrednostni papir celo stabilizira donosnost portfelja (Bodie et al., 2005, str. 217).

**Pričakovano donosnost portfelja,** sestavljenega iz $n$ vrednostnih papirjev, izračunamo kot tehtano aritmetično sredino pričakovanih donosnosti posameznih vrednostnih papirjev vključenih v portfelj (Markowitz, 1952, str. 81):

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1.8}$$

pri čemer je $w_i$ delež $i$-tega vrednostnega papirja, vsota vseh posameznih deležev pa je enaka 1. $E(r_i)$ predstavlja pričakovano donosnost vrednostnega papirja $i$.

Kadar je vrednostni papir izposojen, dobi utež $w_i$ negativen predznak. Če vlagatelj pričakuje padec cene vrednostnega papirja, si tega lahko izposodi in proda v upanju, da ga bo pozneje kupil ceneje in vrnil (Alexander et al., 1993, str. 30). Takšen način investiranja imenujemo kratka prodaja (angl. *short selling*). V nasprotju s kratko prodajo je dolga pozicija (angl. *long position*), ki označuje izraz za nakup vrednostnega papirja v pričakovanju, da bo njegova cena v prihodnosti narasla.

**Varianca donosnosti portfelja** je odvisna od variance donosnosti posameznega vrednostnega papirja kot tudi kovarianc donosnosti med njimi. Izračunamo jo po naslednji formuli (Markowitz, 1952, str. 81):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad i \neq j \tag{1.9}$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{1.10}$$

## *1.3. Razlogi za diverzifikacijo*

Na pomembnost diverzifikacije je med drugim opozoril tudi Sharpe, ko je v enem izmed svojih intervjujev dejal: *»Don't put all your eggs in one basket, or put them in the basket and watch it closely.«,* (Burton, 1998, str. 20). Z vključevanjem dodatnih vrednostnih papirjev v portfelj se volatilnost donosnosti portfelja znižuje vse do meje, pri kateri je moč razpršitve naložb omejena s splošnimi vplivi na tveganje (Ogorevc, 2004, str. 7).

Bodie et al. (2005, str. 246) vpliv diverzifikacije na tveganje celotnega portfelja izpeljejo ob predpostavki, da ima vsak vrednostni papir v celotnem portfelju enak vrednostni delež, ki znaša $w_i = 1/n$. V tem primeru lahko enačbo za izračun variance donosnosti portfelja

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad i \neq j \tag{1.11}$$

zapišemo kot:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma_{ij} \quad i \neq j \tag{1.12}$$

V enačbi (1.12) nastopa $n$ različnih varianc in $n(n-1)$ kovarianc. Če povprečje varianc in kovarianc donosnosti vrednostnih papirjev izrazimo kot:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \tag{1.13}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} \quad i \neq j \tag{1.14}$$

lahko varianco donosnosti portfelja definiramo:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\bar{\sigma}^2 + \frac{n-1}{n}\bar{\sigma}_{ij} \tag{1.15}$$

Če je povprečje kovarianc med donosnostmi vrednostnih papirjev enako nič in je celotno tveganje nesistematično,[2] lahko s povečevanjem števila vrednostnih papirjev tveganje portfelja v celoti odpravimo. Iz enačbe (1.16) je namreč razvidno, da se s povečevanjem števila naložb varianca donosnosti portfelja približuje vrednosti nič. Gre zgolj za hipotetičen primer, saj v praksi skoraj ni mogoče, da bi bile donosnosti vrednostnih papirjev med seboj popolnoma nepovezane.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_p^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\bar{\sigma}^2\right) = 0 \tag{1.16}$$

Korelacija med donosnostmi je večinoma pozitivna, zato je verjetnost, da bi tveganje v celoti odpravili, zelo majhna. S povečevanjem naložb v portfelju se prvi člen v enačbi (1.15) sicer zmanjšuje, vendar se vrednost drugega člena vedno bolj približuje $\bar{\sigma}_{ij}$. Iz tega sledi, da bo tudi popolnoma diverzificiran portfelj tvegan, saj se vplivu makroekonomskih dejavnikov, ki

---

[2] **Nesistematično ali specifično tveganje** (angl. *unsystematic or firm specific-risk*) je posledica naključnih dogodkov, kot so tožbe, stavke delavcev, uspešna in neuspešna implementacija tržnih dejavnosti, zadolženost, neizpolnjevanje pogodbenih obveznosti ter drugih dogodkov, specifičnih za posamezna podjetja oziroma panoge. Nesistematično tveganje je moč omejiti z razpršitvijo in pravilnim izborom kapitalskih naložb, saj imajo zgoraj omenjeni dejavniki različen vpliv na podjetja. Ker so stroški diverzifikacije zanemarljivi, finančni vlagatelji za izpostavljenost takšnemu tveganju niso nagrajeni s premijo (Brigham & Daves, 2004, str. 46).

prizadenejo vse vrednostne papirje na trgu, ni moč izogniti. V tem primeru imamo opravka s sistematičnim[3] tveganjem.

# 2. MODERNA PREMOŽENJSKA TEORIJA (MPT)

Temelje MPT je leta 1952 s svojim delom *Portfolio selection* postavil Harry M. Markowitz, za katerega je leta 1990 prejel Nobelovo nagrado. Namesto, da bi se osredotočil na izbiro posameznih vrednostnih papirjev (angl. *security selection*), je preučeval, kako iz danih vrednostnih papirjev sestaviti optimalni portfelj (angl. *optimal portfolio selection*). Markowitzev optimizacijski model je še danes osnova za kvantitativno alokacijo finančnih sredstev (Salomons, 2007, str. 13). Za razliko od njegovih predhodnikov, ki so se z izbiro portfelja ukvarjali bolj malo, Markowitz (1952) trdi, da za oblikovanje portfelja ni dovolj zgolj poznavanje značilnosti posameznih vrednostnih papirjev. Ključni element, na katerega se morajo vlagatelji osredotočiti, so korelacije med donosnostmi vrednostnih papirjev. Njihovo poznavanje omogoči oblikovanje portfelja z višjim pričakovanim donosom ob danem tveganju oziroma nižjim tveganjem ob dani pričakovani donosnosti. Tveganje je v Markowitzevem optimizacijskem modelu merjeno z varianco donosnosti. Če je portfelj sestavljen iz dveh ali več finančnih sredstev, je varianca portfelja odvisna tako od variance donosnosti posameznih finančnih sredstev kot kovarianc med njimi.

Naslednjo prelomnico v razvoju moderne premoženjske teorije predstavlja model za določanje cen dolgoročnih naložb (angl. *capital asset pricing model-CAPM*), ki so ga neodvisno drugo od drugega razvili Sharpe (1964), Litner (1965) in Mossin (1966). CAPM gradi na Markowitzevem modelu (Salomons, 2007, str. 13) in omogoča izračun zahtevane donosnosti posameznega vrednostnega papirja, če je trg kapitala v ravnotežju. Ker Markowitzev model in CAPM predstavljata osnovo za izgradnjo B-L modela, so v nadaljevanju podane njune ključne značilnosti.

## *2.1. Markowitzev model optimizacije portfelja*

Markowitz (1952, str. 77) opiše postopek oblikovanja portfelja kot dvostopenjski proces. V prvi fazi je treba na podlagi opazovanj in izkušenj ovrednotiti pričakovano donosnost finančnih sredstev, ki so nam na voljo, v drugi pa oblikovati portfelj, tako da določimo uteži izbranim finančnim sredstvom. Ob predpostavki, da so vlagatelji nenaklonjeni tveganju (angl. *risk averse*), bodo ti izbrali takšno kombinacijo deležev tveganih vrednostnih papirjev, pri kateri bo tveganje (merjeno z varianco donosnosti portfelja) ob dani pričakovani donosnosti

[3] **Sistematično ali tržno tveganje** (angl. *systematic or market risk*) povzročajo dejavniki, ki prizadenejo večino podjetij na trgu. Mednje prištevamo vojno, inflacijo, recesijo in višanje obrestnih mer. (Brigham & Daves, 2004, str. 46)

najmanjše oziroma pričakovana donosnost ob danem tveganju največja[4] (CFA, 2008, str. 229). Gre za racionalne kombinacije, ki so po Paretu učinkovite in omogočajo sestavo učinkovitega portfelja (angl. *efficient portfolio*). Če bi bil cilj finančnih vlagateljev izključno maksimiranje donosnosti, bi vsa svoja sredstva naložili v vrednosti papir z najvišjo pričakovano donosnostjo. Takšno ravnanje bi bilo nesmotrno, saj bi se s tem izpostavili prevelikemu tveganju, ki ga lahko deloma odpravijo z diverzifikacijo.

### 2.1.1. Meja učinkovitosti

Vsi učinkoviti portfelji se nahajajo na meji učinkovitosti (angl. *efficient frontier*), ki zagotavlja, da je ob danem tveganju pričakovana donosnost največja oziroma ob dani pričakovani donosnosti tveganje najmanjše. Za njeno izpeljavo potrebujemo po Markowitzu (1952) tri elemente: pričakovano donosnost, varianco donosnosti in kovarianco med donosnostmi finančnih sredstev, vključenih v portfelj.

Nabor učinkovitih portfeljev, ki se nahajajo na meji učinkovitosti, matematično izračunamo tako, da z uporabo Lagrangeve metode ob danem tveganju, izraženim z varianco donosnosti portfelja, maksimiramo pričakovano donosnost (glej enačbo 2.1) ali ob dani pričakovani donosnosti portfelja minimiziramo tveganje (glej enačbo 2.2), (Mankert, 2004, str. 94):

$$\begin{cases} \max\ \vec{w}^T \vec{r} \\ \vec{w}^T \sum \vec{w} = \sigma_p^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

ali

$$\begin{cases} \min\ \vec{w}^T \Sigma \vec{w} \\ \vec{w}^T \vec{r} = E(r_p) \end{cases} \tag{2.2}$$

Pri čemer je:

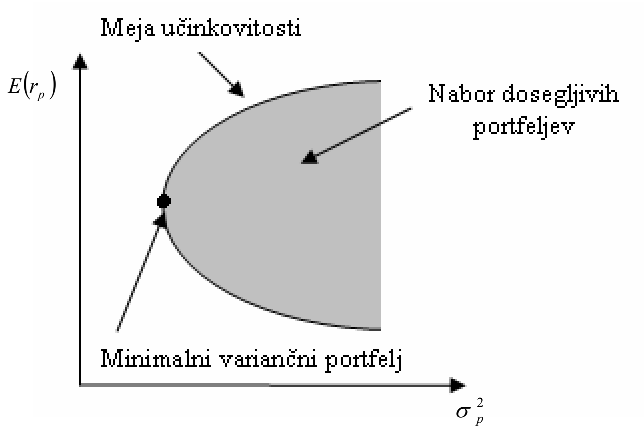
$\vec{w}$ - stolpčni vektor uteži tveganih vrednostnih papirjev v portfelju,
$\vec{r}$ - stolpčni vektor pričakovanih donosnosti vrednostnih papirjev,
$\sigma_p^2$ - varianca donosnosti portfelja,
$\sum$ - kovariančna matrika donosnosti vrednostnih papirjev,
$E(r_p)$ - pričakovana donosnost portfelja.

S spreminjanjem uteži tveganim vrednostnim papirjem lahko vlagatelj oblikuje različne portfelje. Nabor dosegljivih portfeljev (angl. *portfolio opportunity set*), ki odraža različne

[4] Ker Markowitzev model upošteva variabilnost donosnosti v povezavi s pričakovano donosnostjo, pravimo, da gre za t. i. »mean-variance« optimizacijski proces.

kombinacije med tveganjem in donosnostjo (Bodie et al., 2005, str. 215), prikazuje Slika 1. Kombinacije deležev tveganih vrednostnih papirjev, pri katerih vlagatelj doseže minimalno tveganje ob dani pričakovani donosnosti, se nahajajo na krivulji, ki jo imenujemo minimalni variančni set (angl. *minimum variance frontier*) (Bodie et al., 2005, str. 222). Vlagateljem so dosegljivi vsi portfelji, ki ležijo na krivulji in desno od nje (Mankert, 2004, str. 95). Zaradi predpostavke o racionalnem obnašanju vlagateljev, ki želijo maksimirati svoje premoženje, ti vedno izberejo takšen portfelj, ki se nahaja na krivulji, in sicer nad minimalnim variančnim portfeljem (Bodie et al., 2005, str. 223). Ta del krivulje imenujemo meja učinkovitosti. Na njej se nahaja nabor učinkovitih portfeljev, ki ob danem tveganju maksimirajo pričakovano donosnost oziroma ob dani pričakovani donosnosti minimizirajo tveganje (Mankert, 2004, str. 95).

*Slika 1: Nabor dosegljivih portfeljev in meja učinkovitosti*




*Vir:Bodie et al., Investments, 2005, str. 222.*

### 2.1.2. Premica trga kapitala

Oglejmo si, kaj se zgodi z mejo učinkovitosti, ko v analizo poleg tveganih vrednostnih papirjev vpeljemo še netvegane naložbe (angl. *risk free*). Značilnost netveganih naložb je nizka (netvegana) donosnost $r_f$ in varianca enaka nič ($\sigma_f^2 = 0$). To pomeni, da je pričakovana donosnost enaka dejanski, obenem pa med tvegano in netvegano naložbo ni nikakršne korelacije ($\rho_{i,f} = \sigma_{i,f} = 0$). Za netvegane naložbe se običajno smatrajo obveznice z jamstvom države oziroma zakladne menice (Engels, 2004, str. 14).

Predpostavimo, da imamo na voljo $d$ tveganih vrednostnih papirjev. V tem primeru je utež netveganega vrednostnega papirja v portfelju enaka (Mankert, 2004, str. 95):

$$w_f = 1 - \vec{e}^T \vec{w} \tag{2.3}$$

Pri čemer je:

$w_f$ - delež premoženja naloženega v netvegano naložbo,

$\vec{e}$ - enotski vektor velikosti $d \times 1$,

$\vec{w}$ - stolpčni vektor uteži tveganih vrednostnih papirjev.

Pričakovana donosnost portfelja je vsota med pričakovano donosnostjo tvegane in netvegane naložbe (Mankert, 2004, str. 95):

$$E(r_p) = \vec{w}^T \vec{r} + w_f r_f$$
$$E(r_p) = \vec{w}^T \vec{r} + (1 - \vec{w}^T \vec{e}) r_f = \vec{w}^T (\vec{r} - \vec{e} r_f) + r_f \tag{2.4}$$

Pri čemer je:

$E(r_p)$ - pričakovana donosnost portfelja,

$\vec{r}$ - stolpčni vektor pričakovanih donosnosti tveganih vrednostnih papirjev,

$r_f$ - netvegana obrestna mera.

Razlika $\vec{r} - \vec{e} r_f$ predstavlja vektor presežnih pričakovanih donosnosti $\vec{\mu}$ :

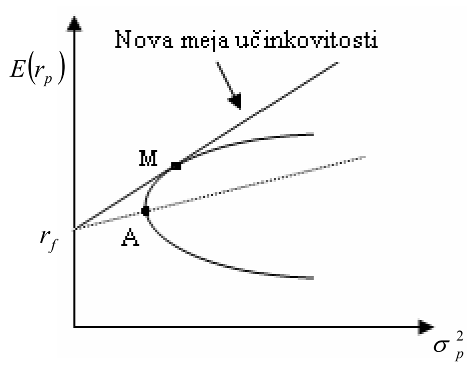
$$\vec{\mu} = \vec{r} - \vec{e} r_f = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 - r_f \\ \vdots \\ \vec{r}_d - r_f \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Z vključitvijo netvegane naložbe se nabor dosegljivih portfeljev, v katere lahko vlagatelji naložijo svoje premoženje, razširi. Nova meja učinkovitosti postane linearna premica, ki prikazuje različne kombinacije deležev med netvegano naložbo in portfeljem, sestavljenim iz tveganih vrednostnih papirjev. Iz Slike 2 je razvidno, da je nova meja učinkovitosti v točki M tangenta na staro mejo učinkovitosti. Točka M po Mramorju (2002, str. 66) ponazarja edino racionalno[5] kombinacijo tveganih vrednostnih papirjev, za katero se v literaturi uporablja tudi izraz tangentni portfelj. Portfelje, ki se nahajajo desno od točke M, izberejo tisti vlagatelji, ki so naklonjeni tveganju. To storijo tako, da si del premoženja sposodijo po netvegani obrestni meri in povečajo svojo pozicijo v tveganem portfelju (Brigham & Daves, 2004, str. 86). Ker je v tem primeru pozicija večja od sredstev na računu, pravimo, da vlagatelj izkorišča finančni vzvod.

[5] Učinkovitost naložbe se običajno meri s Sharpovim koeficientom, ki pove, kolikšna je presežna donosnost na enoto prevzetega tveganja. Bolj diverzificirani portfelji imajo višji Sharpov koeficient, kar pomeni da je nagrada na enoto tveganja višja.

Katera koli druga kombinacija deležev tveganih in netveganih vrednostnih papirjev, ki se ne nahaja na novi meji učinkovitosti, bi za vlagatelja pomenila manjšo donosnost ob danem tveganju. Vzemimo, da vlagatelj izbere portfelj tveganih vrednostnih papirjev, ki ga na Sliki 2 ponazarja točka A. Gre za minimalni variančni portfelj. V naslednjem koraku vlagatelj izračuna, kolikšen del premoženja mora naložiti v netvegano naložbo, da bi dosegel želeno pričakovano donosnost. Njegove možnosti predstavlja črtkana premica $r_f A$, ki poteka nižje od $r_f M$, kar pomeni, da bo vlagatelj pri istem tveganju dosegel nižjo donosnost (Mramor, 2002, str. 66).

*Slika 2: Nova meja učinkovitosti*




*Vir: Mramor, Teorija poslovnih financ, 2002, str. 65.*

Če predpostavimo, da imajo vlagatelji homogena pričakovanja glede donosnosti in variance vsakega vrednostnega papirja, hkrati pa je donosnost netveganih naložb za vse finančne vlagatelje enaka, bodo ti izbrali enako racionalno kombinacijo deležev tveganih vrednostnih papirjev; to je tržni portfelj. Ta vključuje vse tvegane vrednostne papirje, s katerimi se trguje na trgu. Ko je trg kapitala v ravnotežju (ni presežnega povpraševanja ali ponudbe), je relativni delež $i$-tega vrednostnega papirja, vključenega v tržni portfelj, proporcionalen njegovi tržni kapitalizaciji (Mramor, 2002, str. 67–68).

Novo mejo učinkovitosti, ki prikazuje različne kombinacije deležev med netvegano naložbo in tržnim portfeljem, imenujemo premica trga kapitala (angl. *capital market line-CML*). Njena enačba se glasi (Brigham & Daves, 2004, str. 86):

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \sigma_p \qquad (2.6)$$

Pri čemer je:

$E(r_p)$ - pričakovana donosnost portfelja,

$E(r_m)$ - pričakovana donosnost tržnega portfelja,

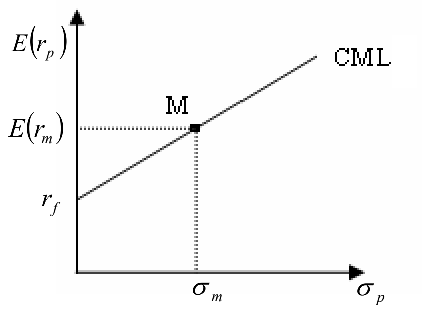
$r_f$ - netvegana obrestna mera,

$\sigma_p$ - standardni odklon donosnosti portfelja,

$\sigma_m$ - standardni odklon donosnosti tržnega portfelja.

Iz enačbe (2.6) sledi, da je pričakovana donosnost učinkovitega portfelja, sestavljenega iz tržnega portfelja in netvegane naložbe, enaka vsoti netvegane obrestne mere $r_f$ in premije za tveganje $(E(r_m) - r_f)/\sigma_m$ pomnožene s standardnim odklonom donosnosti portfelja $\sigma_p$. Na premici trga kapitala (glej Sliko 3) se nahajajo izključno učinkoviti portfelji, v katerih je nesistematično tveganje popolnoma izničeno z diverzifikacijo. Mera tveganja učinkovitega portfelja je v tem primeru standardni odklon donosnosti (Brigham & Daves, 2004, str. 87). Kadar imamo opravka z neučinkovitim portfeljem, to so vsi tisti, ki se nahajajo pod premico, standardni odklon ni verodostojna mera tveganja, zato je treba uporabiti koeficient β (Sharpe, 1970, str. 84). Več o β-ti v poglavju, kjer je razložen model CAPM.

*Slika 3: Premica trga kapitala – CML*




*Vir: Brigham & Daves, Intermediate financial managment, 2004, str. 87.*

Analizo oblikovanja portfelja smo začeli s predpostavko, da imamo na voljo le tvegane vrednostne papirje z varianco donosnosti, večjo od nič. S tem ko v analizo dodamo tudi netvegane naložbe, se proces oblikovanja portfelja spremeni, in sicer postane dvofazen. V prvi fazi je treba določiti tangentni portfelj tveganih vrednostnih papirjev, v drugi pa delež premoženja, ki ga vlagatelj investira v tvegano in netvegano naložbo. Ob predpostavki, da vlagatelji uporabljajo Markowitzev model in so njihova pričakovanja glede porazdelitev donosnosti homogena, vsi izberejo enak portfelj tveganih vrednostnih papirjev – tržni portfelj. Kolikšen delež svojega premoženja bo posamezen vlagatelj investiral v tržni portfelj in netvegano naložbo, je odvisno od njegove nenaklonjenosti tveganju. Tveganju nenaklonjeni vlagatelji bodo večji del svojega premoženja naložili v netvegano naložbo in obratno. Opisan dvofazni proces oblikovanja portfelja, ki je poznan tudi pod imenom **teorem o izbiri med premoženjema** (angl. *Two fund separation theorem*), je prvi definiral Tobin (1958).

### 2.1.3. Optimalni portfelj

Odnos do tveganja se med posamezniki razlikuje. Ljudje so lahko tveganju naklonjeni (angl. *risk seeking*), nenaklonjeni (angl. *risk averse*) ali so do njega nevtralni (angl. *risk neutral*). Od tega je odvisno, kolikšen delež svojega premoženja bodo razdelili med tvegane in netvegane naložbe oziroma kakšna bo sestava njihovega optimalnega portfelja (CFA, 2008, str. 228–229).

Ob predpostavki Markowitzevega modela, da se vlagatelji obnašajo racionalno, kar pomeni, da sprejemajo takšne odločitve, s katerimi maksimirajo svojo koristnost v danem obdobju, lahko problem izbire optimalnega portfelja tveganih vrednostnih papirjev rešimo z maksimiranjem funkcije koristnosti. Funkcijo koristnosti v danem primeru zapišemo kot (Bodie et al., 2005, str. 203):

$$U = E(r_p) - \frac{1}{2}\delta\sigma_p^2 \tag{2.7}$$

Parameter $\delta$ je mera nenaklonjenosti tveganju. Ker je odnos do tveganja subjektiven, je vrednost parametra $\delta$ za posameznike različna. Višja vrednost ponazarja večjo nenaklonjenost tveganju. Iz enačbe (2.7) je razvidno, da višja nenaklonjenost tveganju povečuje utež, ki jo ima varianca v funkciji koristnosti, kar zmanjšuje koristnost. Vrednost parametra $\delta$ bo za vlagatelje, ki so do tveganja nevtralni, enaka nič. Stopnja tveganja je v tem primeru irelevantna, saj se koristnost s prevzemanjem večjega tveganja ne zmanjšuje in je v vsakem primeru, ne glede na tveganje, enaka pričakovani donosnosti portfelja. Tveganju naklonjenim vlagateljem ($\delta < 0$) se ob večjem tveganju koristnost celo poveča (Bodie et al., 2005, str. 165–166).

Preden se lotimo matematične izpeljave optimalnega portfelja, je treba omeniti še eno predpostavko, na kateri temelji Markowitzev model. Ta upošteva, da so vlagatelji tveganju nenaklonjeni, zato je treba pri reševanju problema maksimiranja funkcije koristnosti zadostiti pogoju, da je $\delta \geq 0$. Problem v vektorski obliki zapišemo kot (Mankert, 2004, str. 96):

$$\max_{w} \; r_f + \vec{w}^T \vec{\mu} - \frac{\delta}{2}\vec{w}^T \sum \vec{w} \qquad \delta \geq 0 \tag{2.8}$$

Pri čemer je:

$$E(r_p) = r_f + \vec{w}^T \vec{\mu} \quad ^{6} \tag{2.9}$$

[6] Enačbo za pričakovano donosnost portfelja, sestavljenega iz tvegane in netvegane naložbe, izpeljemo iz enačbe (2.4) in (2.5).

$$\sigma_p^2 = \vec{w}^T \sum \vec{w} \tag{2.10}$$

Da bi dobili uteži optimalnega portfelja tveganih vrednostnih papirjev, je treba s prvim odvodom poiskati maksimum funkcije koristnosti v odvisnosti od $\vec{w}$. Rešitev je sledeča (Mankert, 2004, str. 97):

$$\max_w \; r_f + \vec{w}^T \vec{\mu} - \frac{\delta}{2} \vec{w}^T \sum \vec{w} \qquad \delta \geq 0 \tag{2.11}$$

$$\vec{\mu} - \frac{\delta}{2}\left(\sum \vec{w} + \sum^T \vec{w}\right) =^1 0$$

$$\vec{\mu} - \delta \sum \vec{w} = 0$$

$$\vec{w}^* = \left(\delta \sum\right)^{-1} \vec{\mu}$$

$=^1$ ker je kovariančna matrika simetrična velja: $\sum^T = \sum \Rightarrow \sum^T \vec{w} = \sum \vec{w}$ (Salomons, 2007, str.17).

Vektor $\vec{w}^*$ predstavlja uteži optimalnega portfelja, izračunane z Markowitzevim modelom, če so kovariančna matrika, pričakovane presežne donosnosti in parameter nenaklonjenosti tveganju znani.

### 2.1.4. Pomanjkljivosti Markowitzevega modela

Markowitzev model v MPT še danes velja za enega izmed ključnih konceptov, vendar je njegova uporaba med institucionalnimi in individualnimi vlagatelji relativno majhna (Drobetz, 2001, str. 59). Vzroki za njegovo nepriljubljenost so predstavljeni v naslednjih točkah:

- Prva težava nastopi pri vhodnih podatkih. Markowitzev model namreč zahteva vnos pričakovanih donosnosti, varianc in kovarianc za vsak vrednostni papir, ki je vključen v portfelj (Drobetz, 2001, str. 59). Pričakovane donosnosti je zelo težko napovedati, vlagatelji pa imajo običajno oblikovana natančna pričakovanja le glede nekaterih finančnih sredstev. Markowitz (1952) reši problem nepoznavanja ključnih parametrov tako, da predlaga uporabo pričakovanih donosnosti, izračunanih na podlagi minulih opazovanj. Black in Litterman (1992) trdita, da so tako narejene ocene slab približek donosom realiziranim v prihodnosti.

- Michaud (1989, str. 33) trdi, da Markowitzev optimizacijski model maksimira napake ocene, kar je posledica uporabe nenatančno in nepravilno ocenjenih pričakovanih donosnosti, varianc in kovarianc, ki vstopajo v model. Ocene teh so narejene na podlagi minulih podatkov, za katere Merton (1980) dokaže, da so neprimerna osnova za ocenjevanje parametrov v prihodnosti. Maksimiranje napake ocene se kaže v tendenci Markowitzevega modela, da daje dosti večjo utež vrednostnim papirjem z visokimi pričakovanimi donosnostmi, negativnimi korelacijami in nizkimi variancami (Michaud, 1989, str. 34). To je popolnoma sprejemljivo, vendar težava nastopi, ko so donosnosti napačno ocenjene. Vrednostni papirji z visokimi pričakovanimi donosnostmi izračunanimi na podlagi minulih podatkov so po mnenju Michauda veliko bolj podvrženi maksimiranju napake ocene.

- Vlagatelji pogosto svoja pričakovanja glede donosnosti vrednostnih papirjev izražajo v relativnem smislu (Salomons, 2007, str. 27). Takšen primer relativnega pričakovanja je na primer, da se bo vrednostni papir A na trgu odrezal bolje kot vrednostni papir B. Za razliko od B-L Markowitzev model vlagatelju ne omogoča, da bi svoja pričakovanja izrazil v relativnem smislu in jim hkrati pripisal različne stopnje zaupanja, ki odražajo negotovost v posamezno pričakovanje (Black & Litterman, 1992).

- Za Markowitzev model je značilno, da generira nestabilne portfelje, ki so zelo občutljivi na spremembe v vhodnih podatkih (Fisher & Statman, 1997). To pomeni, da že majhna sprememba v pričakovanih donosnostih močno spremeni sestavo uteži (Michaud, 1989, str. 35). Michaud za vzrok navede kovariančno matriko, ki je izračunana na podlagi pomanjkljivih minulih podatkov in je zato v slabem stanju (angl. *ill conditioned*) oziroma singularna ali skoraj singularna (Salomons, 2007, str. 28). Singularnost povzroča težave pri določanju inverza kovariančne matrike.

- Markowitzevi optimalni portfelji največkrat niso intuitivni, kar se odraža v velikih negativnih utežeh, ki jih dobijo posamezni vrednostni papirji v portfelju. V praksi se pogosto zgodi, da upravljavcem premoženja ni dovoljeno zavzeti obsežnih kratkih pozicij. Če z omejitvami preprečimo možnost kratkih prodaj, model pogosto predlaga takšno rešitev, v kateri imajo številni vrednostni papirji utež nič (Black & Litterman, 1992, str. 28). Velika nasičenost premoženja je po mnenju Michauda (1989) eden izmed ključnih razlogov za nepriljubljenost Markowizevega modela v praksi in hkrati nasprotuje načelu diverzifikacije (Salomons, 2007, str. 27). Če bi bili parametri uporabljeni pri optimizaciji portfelja gotovi, bi bilo smiselno investirati v takšne nasičene portfelje. Ker so pričakovane donosnosti zgolj približki prihodnjih donosov, je takšna investicijska strategija zelo tvegana (Salomons, 2007, str. 27).

Kljub pomanjkljivostim Markovitzevega modela je bila ideja o maksimiranju pričakovane donosnosti ob danem tveganju oziroma minimiziranju tveganja ob dani pričakovani donosnosti tako privlačna, da so se poskusi iskanja primernejših modelov za optimizacijo portfelja nadaljevali. Danes vse večjo vlogo med vlagatelji pridobiva B-L model, ki temelji tako na Markowitzevem kot tudi modelu CAPM.

## *2.2. Model določanja cen dolgoročnih naložb (CAPM)*

Dvanajst let za tem, ko je Markowitz postavil osnove MPT, so Sharpe (1964), Litner (1965) in Mossin (1966) razvili model za določanje cen dolgoročnih naložb (CAPM). Gre za enofaktorski model za določanje cen vrednostnih papirjev, ki predpostavlja, da so donosnosti naložb medsebojno povezane prek vpliva enega skupnega faktorja. Ta je skupek vseh naložb na trgu, ki ga ponazarja tržni portfelj.

### 2.2.1. Predpostavke CAPM

CAPM je grajen na strogih predpostavkah o učinkovitem in popolnem delovanju finančnih trgov ter racionalnih vlagateljih s homogenimi pričakovanji, ki svoje premoženje investirajo v tržni portfelj in netvegano naložbo. Predpostavke lahko strnemo v naslednjih točkah (Alexander et al., 1993, str. 218):

1. Vlagatelji se na trgu kapitala obnašajo racionalno. To pomeni, da svoje premoženje investirajo v enega izmed portfeljev, nahajajočih se na meji učinkovitosti, pri čemer maksimirajo svojo funkcijo koristnosti.
2. Omogočen je prost dostop do trga kapitala. Vlagatelji lahko sredstva vložijo ali si jih sposodijo po netvegani obrestni meri. Obrestna mera se ne spreminja.
3. Vsi imajo homogena pričakovanja glede pričakovanih stopenj donosov, varianc in kovarianc.
4. Vsi imajo enako dolžino časovnega obdobja, v okviru katerega investirajo svoja sredstva.
5. Sredstva so popolnoma deljiva in se z njimi prosto trguje.
6. Ne obstajajo davki niti transakcijski stroški.
7. Trg kapitala je informacijsko učinkovit. Vsi udeleženci na trgu dobivajo informacije sočasno, ne da bi pri tem utrpeli stroške.

Takšne predpostavke zagotavljajo, da je trg kapitala v ravnovesju, torej ni precenjenih ali podcenjenih vrednostnih papirjev. Po Mramorju (2002, str. 73) gre za cene, ki so »prave« in odražajo donosnost, ki jo investitorji zahtevajo, da se jim nakup splača. V takšnih razmerah sta pričakovana in zahtevana donosnost enaki. Njuno neskladje bi namreč pomenilo neusklajenost med ponudbo in povpraševanjem na trgu kapitala, posledično pa bi bile cene vrednostnih papirjev prenizke ali previsoke.

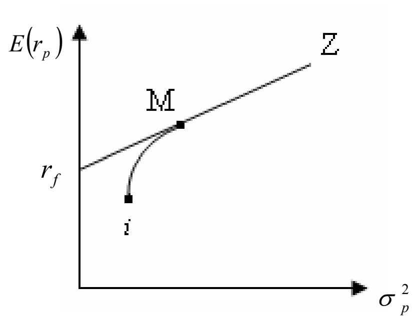
Zaradi predpostavke o homogenih pričakovanjih za vse vlagatelje obstaja le en optimalni portfelj tveganih vrednostnih papirjev. To je tržni portfelj, v katerem so uteži posameznih vrednostnih papirjev enake njihovi tržni kapitalizaciji. V ravnovesju vsi vlagatelji svoje premoženje vložijo v tržni portfelj, ki je učinkovit in se nahaja na premici trga kapitala, od njihove nenaklonjenosti tveganju pa je odvisno, ali zavzamejo kratko ali dolgo pozicijo v netvegani naložbi (Salomons, 2007, str. 29).

### 2.2.2. Izpeljava CAPM

Omenili smo že, da je standardni odklon donosnosti ustrezna mera tveganja izključno za učinkovite portfelje, ki so popolnoma diverzificirani. To ne velja za posamezne tvegane vrednostne papirje in neučinkovite portfelje. V ceni vrednostnega papirja, ki je inverzno povezana s pričakovano donosnostjo, namreč ni upoštevana celotna variabilnost donosnosti, saj se je nesistematičnemu tveganju z diverzifikacijo moč izogniti (Sharpe, 1970, str. 86). Ustrezno merilo za tržno tveganje posameznega vrednostnega papirja je torej samo tisto, ki pokaže, koliko posamezni vrednostni papir prispeva k tveganju celotnega portfelja (Mramor, 2002, str. 69). Kako napovedati odnos med tveganjem in pričakovano donosnostjo neučinkovitih portfeljev, ko je trg kapitala v ravnovesju, pojasnjuje CAPM.

Sharpe (1970, str. 86) CAPM izpelje tako, da preuči učinek vključitve $i$-tega tveganega vrednostnega papirja v tržni portfelj. Zanima ga, za koliko se bo povečalo tveganje in pričakovana donosnost novega portfelja v primerjavi s tržnim oziroma koliko bo dodani vrednostni papir $i$ doprinesel k tveganju in pričakovani donosnosti celotnega portfelja. Krivulja $i$M na Sliki 4 prikazuje različne kombinacije deležev med tržnim portfeljem in tveganim vrednostnim papirjem $i$. Premica $r_f$ MZ predstavlja premico trga kapitala, na kateri se nahajajo izključno učinkoviti portfelji, sestavljeni iz tržnega portfelja M in netvegane naložbe. V točki M je celotno premoženje naloženo v tržni portfelj, v točki $i$ pa v tvegan vrednostni papir. Ta portfelj ni učinkovit, saj poleg sistematičnega tveganja vključuje tudi nesistematično tveganje.

*Slika 4: Kombinacije deležev med tržnim portfeljem in tveganim vrednostnim papirjem $i$*




*Vir: Sharpe, Portfolio theory and capital markets, 1970, str. 86.*

Pričakovano donosnost in standardni odklon novega portfelja, sestavljenega iz vrednostnega papirja $i$ in tržnega portfelja, zapišemo kot:

$$E(r_p) = w_i E(r_i) + (1 - w_i) E(r_m) \tag{2.12}$$

$$\sigma_p = \left[\; w_i^2 \sigma_i^2 + (1 - w_i)^2 \sigma_m^2 + 2 w_i (1 - w_i) \sigma_{im} \;\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

$$w_i + w_m = 1 \tag{2.14}$$

Pri čemer je:

$E(r_i)$ - pričakovana donosnost tveganega vrednostnega papirja $i$,

$E(r_m)$ - pričakovana donosnost tržnega portfelja,

$w_i$ - delež premoženja naloženega v tvegan vrednostni papir $i$,

$w_m$ - delež premoženja naložen v tržni portfelj,

$\sigma_i^2$ - varianca donosnosti tveganega vrednostnega papirja $i$,

$\sigma_m^2$ - varianca donosnosti tržnega portfelja,

$\sigma_{im}$ - kovarianca med donosnostjo tveganega vrednostnega papirja $i$ in tržnega portfelja.

Da bi ugotovili spremembo pričakovane donosnosti in spremembo tveganja celotnega portfelja glede na spremembo deleža premoženja naloženega v tvegani vrednostni papir $i$, je treba poiskati prvi odvod enačbe (2.12) in (2.13) v odvisnosti od $w_i$. Z odvajanjem dobimo:

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial w_i} = E(r_i) - E(r_m) \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial w_i} = \frac{w_i(\sigma_i^2 + \sigma_m^2 - 2\sigma_{im}) + \sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_p} \tag{2.16}$$

Z uporabo pravila za posredno odvajanje iz enačbe (2.15) in (2.16) izpeljemo novo enačbo, ki nam prikaže spremembo pričakovane donosnosti celotnega portfelja glede na spremembo njegovega tveganja v odvisnosti dodatnega deleža $i$-tega tveganega vrednostnega papirja (Mramor, 2002, str. 71).

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{(E(r_i) - E(r_m))\sigma_p}{w_i(\sigma_i^2 + \sigma_m^2 - 2\sigma_{im}) + \sigma_{im} - \sigma_m^2} \tag{2.17}$$

Enačba (2.17) nam omogoča, da izračunamo naklon tangente na krivuljo $i$M pri različnih kombinacijah deležev tveganega vrednostnega papirja $i$ in tržnega portfelja M. Ob sprejetih predpostavkah racionalni vlagatelji svoje premoženje investirajo le v tržni portfelj M, delež premoženja naloženega v tvegani vrednostni papir $i$ pa je enak nič ($w_i = 0$). Nagib tangente na krivuljo $i$M je v točki M enak naklonu premice trga kapitala $r_f$MZ. Ob upoštevanju enakosti obeh naklonov zapišemo (Sharpe, 1970, str. 89):

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p}\bigg|_{W_i=0} = \frac{(E(r_i)-E(r_m))\sigma_p}{\sigma_{im}-\sigma_m^2} = \frac{E(r_m)-r_f}{\sigma_m} \tag{2.18}$$

Če iz enačbe (2.18) izrazimo $E(r_i)$, dobimo enačbo CAPM, ki omogoča izračun pričakovane oziroma zahtevane donosnosti učinkovitih in neučinkovitih portfeljev v razmerah, ko je trg kapitala v ravnovesju. Enačba CAPM se glasi:

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m)-r_f)\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{2.19}$$

Iz zgornje enačbe sledi, da je zahtevana donosnost tveganega vrednostnega papirja $i$ odvisna od netvegane stopnje donosa $r_f$ in premije za tveganje $(E(r_m)-r_f)\sigma_{im}/\sigma_m^2$.

### 2.2.3. Premija za tveganje v modelu CAPM

Premija za tveganje v modelu CAPM je odvisna od dveh količin (Mramor, 2002, str. 73):
- absolutne cene tveganja, ki jo vlagatelj zahteva za izpostavljenost tržnemu tveganju in je enaka razliki med pričakovano stopnjo donosa tržnega portfelja ter stopnjo donosa netvegane naložbe $(E(r_m)-r_f)$, ter
- relativnega obsega sistematičnega tveganja posameznega vrednostnega papirja. Gre za tveganje, ki ga z diverzifikacijo ni moč odpraviti in pove, koliko posamezni tvegani vrednostni papir relativno (nad- ali podpovprečno) prispeva k tveganju celotnega portfelja. Navadno ga označujemo z β (beta), njegova vrednost pa je enaka:

$$\beta = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{2.20}$$

Iz enačbe (2.20) sledi, da je koeficient $\beta$ standardizirana mera sistematičnega tveganja, ki ga izračunamo kot količnik kovariance donosnosti med tveganim vrednostnim papirjem $i$ in tržnim portfeljem ter varianco donosnosti tržnega portfelja (CFA, 2008, str. 263). Mramor (2002, str. 73) koeficient β definira kot mero tveganja posamezne naložbe, ki pove, koliko je gibanje donosnosti posamezne naložbe povezano z gibanjem tržne donosnosti. Z drugimi besedami β pove, za koliko odstotkov se spremeni tečaj delnice, če se borzni indeks spremeni za 1 %.

Vrednostne papirje, ki imajo β večjo od 1, uvrščamo med agresivne. Sistematično tveganje, ki so mu podvrženi, je višje od povprečja na trgu, posledično pa je višja tudi zahtevana stopnja donosnosti (Bodie et al., 2005, str. 259). Pri takšnih vrednostnih papirjih se nihanje donosnosti tržnega portfelja odraža v še večjem nihanju njihove donosnosti (CFA, 2008, str.

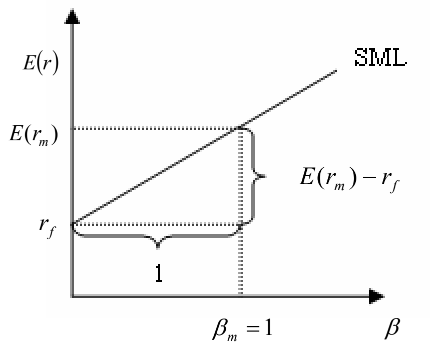
264). Obratno velja za vrednostne papirje z β manjšo od 1, ki spadajo med defenzivne (Bodie et al., 2005, str. 295). Redkejši so primeri, ko je β manjša od 0. V takšnem primeru je zahtevana stopnja donosnosti manjša od netvegane, vrednostni papir pa zmanjšuje tveganje celotnega portfelja (Alexander et al., 1993, str. 226).

Sedaj ko je $\beta$ definirana, lahko enačbo (2.19) zapišemo kot (Bodie et al., 2005, str. 258):

$$E(r_i) = r_f + (E(r_m) - r_f)\beta_i \tag{2.21}$$

Če vanjo vstavimo parametre in jo zrišemo grafično, dobimo premico trga vrednostnih papirjev (angl. *security market line-SML*), ki pojasnjuje odnos med zahtevano donosnostjo tveganih vrednostnih papirjev in tveganjem, merjenim s koeficientom $\beta$.

*Slika 5: Premica trga vrednostnih papirjev*




*Vir: Bodie et al., Investments, 2005, str. 260.*

Na premici trga vrednostnih papirjev se nahajajo izključno tisti vrednostni papirjih, katerih cene so »prave«, torej niso niti precenjeni niti podcenjeni.

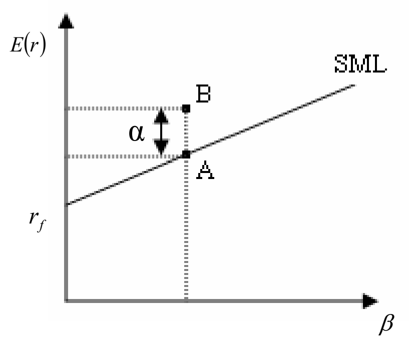
### 2.2.4. Neravnotežje na trgu kapitala

Neravnotežje na trgu kapitala je pojav, ko so nekateri vrednostni papirji precenjeni ali podcenjeni, njihove ocenjene donosnosti pa so prenizke ali previsoke glede na zahtevano stopnjo donosnosti, izračunano z modelom CAPM.

Ocene oziroma pričakovane donosnosti vlagatelji izračunajo s tehnično in fundamentalno analizo ter jih nato primerjajo z zahtevanimi donosnostmi, ki služijo kot referenčno izhodišče pri ugotavljanju neravnotežij. Kadar ocene niso usklajene z zahtevanimi donosnostmi, so vrednostni papirji precenjeni ali podcenjeni. Odmik ocene od zahtevane donosnosti imenujemo alfa (α) (Bodie at. al, 2005, str. 261).

Vrednostni papir je podcenjen, kadar je njegova ocenjena donosnost večja od zahtevane, izračunane s CAPM. Iz Slike 6 je razvidno, da se ocenjena donosnost nahaja nad SML, vrednost alfa pa je pozitivna. Cena vrednostnega papirja na trgu je prenizka glede na zahtevano donosnost, zato ga je smiselno kupiti. Obratno velja za vrednostne papirje, ki so precenjeni. Ocenjena donosnost se nahaja pod SML, vrednost alfa pa je negativna. Cena vrednostnega papirja je previsoka, zato ga je smiselno prodati. Kadar je ocenjena donosnost enaka zahtevani, je cena »prava«, finančni vlagatelj pa je indiferenten med prodajo in nakupom vrednostnega papirja (Sharpe, 1985, str. 163).

*Slika 6: Premica SML in vrednostni papir s pozitivno vrednostjo α*




*Vir: Bodie et al., Investments, 2005, str. 260.*

Model CAPM ima zaradi svojih lastnosti pomembno vlogo pri sprejemanju investicijskih odločitev. Vlagateljem namreč omogoča izračun zahtevane donosnosti, ki je »benchmark« za vrednotenje potencialnih naložb. Vsakdo, ki analizira vrednostne papirje, želi vedeti, ali je ob danem tveganju pričakovana donosnost, ki jo je ocenil s fundamentalno analizo, višja ali manjša od zahtevane donosnosti, izračunane s CAPM, in tako ugotoviti, ali je vrednostni papir pre- ali podcenjen (Bodie et al., 2005, str. 252).

# 3. BLACK IN LITTERMANOV MODEL

Težave, s katerimi se vlagatelji srečujejo pri uporabi Markowitzevega modela, so Fisherja Blacka in Roberta Littermana spodbudile k iskanju primernejših modelov za optimizacijo portfelja. B-L model, ki ga predstavita v članku *Global Portfolio Optimization* (1992), je teoretično zelo podoben Markowitzevemu, saj uteži v portfelju določi tako, da je ob dani pričakovani donosnosti tveganje minimizirano oziroma ob danem tveganju donosnost maksimirana. Temeljna razlika je v vhodnih podatkih, ki vstopajo v oba modela. Black in Litterman (1992) namreč izpeljeta nov vektor pričakovanih donosnosti, ki nadomesti donosnosti, izračunane na podlagi minulih podatkov. Rezultat so optimizirani portfelji, ki so bolj diverzificirani, stabilnejši in hkrati tudi bolj intuitivni, saj odražajo pričakovanja vlagateljev.

Za izpeljavo novega vektorja pričakovanih donosnosti, ki služi za odločanje o alokaciji sredstev oziroma naložbe med posamezne investicije, sta po Black-Littermanu (1992, str. 34) potrebna dva vira informacij. Prvi, ki se pridobi kvantitativno, so zahtevane oziroma ravnotežne donosnosti (angl. *equilibrium returns*), izračunane s CAPM, ki predstavljajo izhodiščno točko B-L modela. V procesu odločanja vlagatelj ravnotežne donosnosti prilagodi glede na svoja lastna pričakovanja, ki podajo informacijo, ali v določena sredstva investirati več ali manj, kot sledi iz ravnotežnih pričakovanj. Z združitvijo obeh virov informacij dobimo nov vektor pričakovanih donosnosti, ki se ga uporabi v procesu optimizacije.

## *3.1. Bayesianska statistika kot osnova za izgradnjo B-L modela*

Večina literature, ki razlaga B-L model, pri modeliranju parametrov izhaja iz bayesianske statistike. Rigorozno matematično izpeljavo B-L modela podata Satchell in Scowcroft (2000). Njuna osnovna predpostavka je, da je model zasnovan na bayesianski statistiki, ki omogoča učinkovito formulacijo novega vektorja pričakovanih donosnosti, ki je produkt dveh normalnih porazdelitev.

### 3.1.1. Razlika med bayesianskim in klasičnim pristopom obravnavanja statističnih parametrov

Temeljna razlika med bayesiansko in klasično statistiko izhaja iz načina obravnavanja parametrov, ki po Boeklu, Steinu in Bruggenu (2004, str. 41) niso predmet naključne variabilnosti, pač pa so njihove vrednosti negotove izključno zaradi pomanjkanja znanja, saj so nekatere časovne serije prekratke ali je na voljo premalo podatkov o realizaciji teh spremenljivk. V klasični statistični analizi se neznane parametre oceni na podlagi pridobljenih vzorčnih podatkov in se jih obravnava kot fiksne. Kakršna koli verjetnostna sklepanja o njihovih vrednostnih, ki so enolično določene, so zato nemogoča.

Bayesianska statistika ima vse neznane parametre za slučajne spremenljivke in hkrati omogoča kontinuirano osveževanje obstoječega nabora podatkov s podatki, pridobljenimi na podlagi novih opazovanj (Salomons, 2007, str. 44). Ocene parametrov so narejene na osnovi posteriorne porazdelitve (angl. *posterior distribution*), ki jo dobimo tako, da prvotna prepričanja glede parametrov (ta so ponazorjena s t. i. apriorno porazdelitvijo (angl. *prior distribution*)) nadgradimo z novo opazovanimi podatki, pri čemer oba vira informacij združimo z bayesianskim izrekom, opisanim v nadaljevanju.

### 3.1.2. Matematična formulacija bayesianskega izreka

V vsakdanjem življenju ljudje pogosto posodabljajo svoja trenutna prepričanja na podlagi novih informacij, ki jih prejmejo iz okolja. Bayesianski izrek, kot pravi Ruppert (2004, str. 9), natančno pove, kako posodobiti trenutna prepričanja (apriorne informacije) glede na novo pridobljene informacije. Zaradi človeške tendence, da nove informacije nepravilno ovrednotijo, jim dajejo prevelik ali premajhen poudarek, je po mnenju Edwardsa (1982) nujno potrebna uporaba matematičnih modelov.

Bayesianski izrek v primeru zvezne slučajne spremenljivke[7] (angl. *continuous variable*), kot so cene vrednostnih papirjev in njihove donosnosti, zapišemo (Ruppert, 2004, str. 54):

$$f(\theta|y)=\frac{\pi(\theta)f(y|\theta)}{\int \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta} \tag{3.1}$$

Pri čemer je:

$\pi(\theta)$ - apriorna porazdelitvena funkcija parametra $\theta$, ki odraža naša prepričanja pred opazovanjem podatkov;

$f(y|\theta)$ - verjetnostna funkcija (angl. *likelihood function*), ki je interpretirana kot pogojna gostota podatkov $Y$ glede na parameter $\theta$;

$f(\theta|y)$ - posteriorna porazdelitvena funkcija parametra $\theta$ glede na opazovane podatke $Y$;

$f(y)$ - marginalna gostota $Y$ ali normalizacijska konstanta[8] izračunana po formuli $f(y)=\int \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta$.

Bayesianske cenilke parametrov odčitamo iz posteriorne porazdelitve. Pričakovano vrednost posteriorne porazdelitve je pri tem enaka (Ruppert, 2004, str. 54):

$$E(\theta|y)=\int \theta f(y|\theta)d\theta \tag{3.2}$$

V nadaljevanju je predstavljen primer, s katerim želim pokazati, kako iz apriorne in pogojne porazdelitve izpeljemo posteriorno porazdelitev parametra.

*Primer 1:* Ugotoviti želimo, kolikšna je verjetnost, da bo cena vrednostnega papirja na določen dan narasla. Ker imamo na voljo premalo podatkov o realizaciji opazovane

[7] Zvezne slučajne spremenljivke so tiste, katerih vrednost je lahko katero koli število z nekega intervala, njihova porazdelitev pa je podana z gostoto verjetnosti. Verjetnost, da zvezna slučajna spremenljivka zavzame točno določeno vrednost, je enaka 0. Izračunamo lahko le verjetnost, da se vrednost zvezne slučajne spremenljivke nahaja znotraj določenega intervala. V splošnem gostoto verjetnosti $f(x)$, da zvezna slučajna spremenljivka $X$ zavzame vrednost z intervala $[a,b)$, izračunamo po formuli (Stöcker, 2006, str. 681):

$$P(a \le X < b)=\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

[8] V procesu integriranja $f(y)$ postane konstanta. To zagotavlja, da je ploščina območja, ki ga omejuje posteriorna porazdelitvena funkcija, enaka 1.

spremenljivke, je smiselno definirati apriorno porazdelitev. Na podlagi minulih podatkov za podobne vrednostne papirje sklepamo, da je verjetnost dviga cene, ki jo ponazorimo s parametrom $\theta$, lahko katero koli realno število na intervalu od 0 do 1, pri čemer so vrednosti blizu ½ verjetnejše. Natančneje apriorno porazdelitev parametra opišemo s funkcijo (Ruppert, 2004, str. 55):

$$\pi(\theta) = 6\theta(1-\theta) \text{ in } 0<\theta<1. \tag{3.3}$$

V naslednjem koraku je treba definirati ustrezen verjetnostni model. Predpostavimo, da $k$ predstavlja število, ki pove, kolikokrat je cena v dveh zaporednih dnevih narasla (velikost vzorca je v tem primeru enaka dva). Gre za Bernoullijevo zaporedje dveh neodvisnih poskusov, pri čemer ima vsak poskus samo dva možna izida: poskus je lahko uspešen (dogodek $A$ - cena naraste) ali neuspešen (dogodek $\overline{A}$ - cena ostane nespremenjena ali pade). Število uspešnih poskusov $k$ je binomska slučajna spremenljivka, ki šteje enote v slučajnem vzorcu z izidom $A$. Vse enote imajo isto verjetnost dogodka $A$ (to je verjetnost $\theta$), poskusi pa so med seboj neodvisni. Verjetnost, da se v dveh dneh dogodek A zgodi natanko $k$ -krat, izračunamo po Bernullijevi[9] formuli:

$$f(k|\theta) = \binom{2}{k}\theta^k(1-\theta)^{2-k}, \quad y = 0,1,2\,. \tag{3.4}$$

Na podlagi opazovanj ugotovimo, da je cena vrednostnega papirja v dveh opazovanih dneh narasla dvakrat, torej je $k$ enak 2. Pogojna porazdelitev je v tem primeru opisana z verjetnostno funkcijo:

$$f(2|\theta) = \binom{2}{2}\theta^2(1-\theta)^{2-2} = \theta^2 \tag{3.5}$$

Posteriorna porazdelitev parametra $\theta$ glede na opazovane podatke $k$ in njegovo pričakovano vrednost izračunamo z bayesianskim izrekom in obrazcem za izračun pričakovane vrednosti:

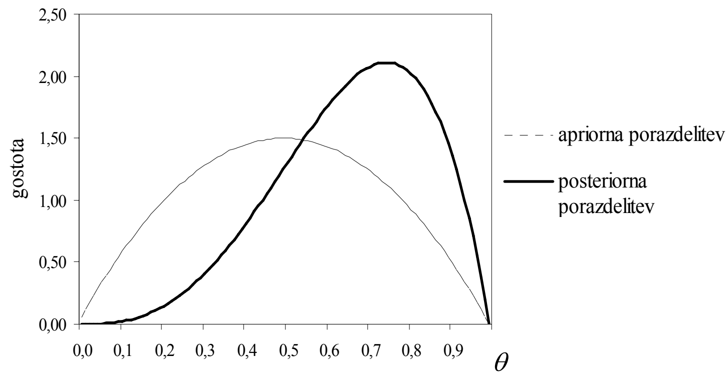
$$f(\theta|2) = \frac{6\theta^3(1-\theta)}{\int 6\theta^3(1-\theta)d\theta} = 20\theta^3(1-\theta) \tag{3.6}$$

$$E(\theta|2) = \int 20\theta^4(1-\theta)d\theta = \frac{20}{30} = 66{,}67\% \tag{3.7}$$

[9] V splošnem Bernoullijevo formula zapišemo kot (Goldberg, 1987, str. 253): $P(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ . Pri tem $P(k)$ predstavlja verjetnost, da se dogodek $A$ z verjetnostjo $p$ v $n$ poskusih zgodi natanko $k$ - krat.

Apriorna in posteriorna porazdelitev sta prikazani na Sliki 7. Posteriorna porazdelitev je v primerjavi z apriorno pomaknjena v desno, saj smo na podlagi opazovanj ugotovili, da je cena vrednostnega papirja v dveh dneh narasla dvakrat. Z opazovanjem gibanja cene vrednostnega papirja smo tako dobili nove informacije, s katerimi smo nadgradili naša apriorna prepričanja, po katerih je bila vrednost parametra enaka 50 %. Na podlagi posteriorne porazdelitve lahko zaključimo, da je verjetnost dviga cene na določen dan oziroma pričakovana vrednost ocenjevanega parametra enaka 67 %.

*Slika 7: Apriorna in posteriorna porazdelitev*




*Vir: Lastni izračuni in Ruppert, Statistics and finance: An introduction, 2004, str. 56.*

## *3.2. Black in Littermanov algoritem*

B-L model z uporabo bayesianskega izreka združi ravnotežne donosnosti s pričakovanji vlagateljev v nov vektor pričakovanih donosnosti. Pri tem se predpostavlja, da investitorji svoja prvotna oziroma apriorna pričakovanja oblikujejo na podlagi znanja, ki ga imajo o ravnotežnih donosnostih na trgu. Ravnotežne donosnosti služijo za določitev strateške alokacije med sredstvi. V proces odločanja nato vključijo tudi lastna pričakovanja, s katerimi nadgradijo apriorne informacije oziroma ravnotežne donosnosti (Salomons, 2007, str. 45). Na podlagi lastnih pričakovanj vlagatelji določijo taktično alokacijo, in sicer tako, da se nekaterim naložbam izpostavijo bolj ali manj, kot to izhaja iz strateških uteži.

Black in Litterman (1992, str. 42) predpostavita pri izpeljavi novega vektorja pričakovanih donosnosti, da imajo tako ravnotežna kot lastna pričakovanja glede donosnosti normalno porazdelitev.[10] Takšna predpostavka zagotavlja, da je posteriorna porazdelitev donosnosti, ki je izračunana kot produkt apriorne in pogojne porazdelitve, normalna. Apriorno porazdelitev,

[10] Predpostavka o normalni porazdelitvi donosnosti finančnih sredstev je sprejeta izključno zaradi matematične priročnosti, saj omogoča, da enačbo za posteriorno porazdelitev, iz katere odčitamo vrednost ocenjevanih parametrov, izpeljemo tudi analitično. Pogosto se zgodi, da takšna predpostavka ni verodostojna in se donosnosti ne porazdeljujejo normalno. Ker bayesianski pristop v tem primeru ni analitično rešljiv, je treba za izračun posteriorne porazdelitve uporabiti zahtevnejše metode, kot je na primer monte carlo z markovskimi verigami (metoda MCMC) (Scherer & Martin, 2005, str. 301–302).

ki ima enako strukturo kot posteriorna, imenujemo konjugirana apriorna porazdelitev (Walters, 2008, str. 3).

Druga ključna predpostavka za izpeljavo B-L modela se nanaša na standardni odklon donosnosti naložb. Black in Litterman (1992, str. 42) predpostavita, da je kovariančna matrika donosnosti znana in hkrati pozitivno definitna.

Cilj B-L modela je ob upoštevanju zgornjih predpostavk določitev posteriorne porazdelitve donosnosti, iz katere odčitamo srednje vrednosti, ki so osnova za alokacijo naložb na podlagi t. i. »mean-variance« optimizacije.

### 3.2.1. Formulacija apriorne porazdelitve v B-L modelu

Black in Litterman (1992, str. 42) predpostavita, da imamo na voljo $n$ sredstev, katerih donosnosti[11] $(r)$ se porazdeljujejo normalno s pričakovano vrednostjo $E(\vec{r})$ in varianco $\sum$. $E(\vec{r})$ je slučajna spremenljivka, ki je nepoznana in se porazdeljuje normalno. Njena porazdelitev je zmnožek dveh normalnih porazdelitev (apriorne in pogojne).

Apriorno porazdelitev $E(\vec{r})$, kot pravi Salomons (2007, str. 46) izpeljeta hevristično, pri čemer sklepata, da trg kapitala neprestano teži k ravnotežju; torej stanju, v katerem ni precenjenih in podcenjenih vrednostnih papirjev. Zaradi pomanjkljivosti trga kapitala, v smislu pomanjkanja likvidnosti in negotovih informacij, bodo na trgu vedno obstajale nepravilno ocenjene naložbe, katerih cene se bodo zaradi delovanja agentov, ki z arbitražnimi posli preprečujejo deviacije od ravnotežnega stanja, prilagodile na dolgi rok (Litterman et al., 2003). Zaradi težnje trga po vzpostavitvi ravnotežja je po mnenju Blacka in Littermana (Black & Litterman, 1992, str. 29) povprečna vrednost pričakovanih donosnosti $E(\vec{r})$ enaka ravnotežnim donosnostim $\vec{\pi}$, ki so izračunane s CAPM. Enačba za izračun vektorja ravnotežnih donosnosti $\vec{\pi}$, ki predstavlja aritmetično sredino apriorne porazdelitve, se razlikuje od standardnega zapisa CAPM (Black in Litterman, 1992, str. 43):

$$\vec{\pi} = \delta \sum \vec{w}_m \tag{3.8}$$

Pri čemer je:

$\delta$ - koeficient nenaklonjenosti tveganju,

$\sum$ - kovariančna matrika donosnosti finančnih sredstev v portfelju,

$\vec{w}_m$ - vektor uteži, izračunanih na podlagi tržne kapitalizacije finančnih sredstev.

[11] Ko govorimo o donosnostih, imata Black in Litterman (1992) v mislih presežne donosnosti, ki so izračunane kot razlika med donosnostjo naložbe in domačo netvegano obrestno mero.

Če enačbo CAPM preoblikujemo, ugotovimo, da gre v obeh primerih za isto enačbo (Satchell & Scowcroft, 2000, str. 139):

$$
\begin{aligned}
E(r_i) - r_f &= \beta\left(E(r_m) - r_f\right) \\
E(\vec{r}) - r_f &=^1 \vec{\beta}\left(E(r_f) - r_f\right) \\
\vec{\pi} &=^2 \vec{\beta}\mu_m =^3 \frac{\operatorname{cov}\left(\vec{r}, \vec{r}^{\,T}\vec{w}_m\right)}{\sigma_m^2}\mu_m \\
&=^4 \frac{\operatorname{cov}\left(\vec{r}, \vec{r}^{\,T}\right)w_m}{\sigma_m^2}\mu_m = \\
&=^5 \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m^2}\operatorname{cov}\left(\vec{r}, \vec{r}^{\,T}\right)\vec{w}_m \\
&=^6 \delta \sum \vec{w}_m
\end{aligned}
$$

$=^1$ transformacija enačbe iz enodimenzionalne v vektorsko formulo

$=^2$ $\vec{\pi} = E(\vec{r}) - r_f$ in $\mu_m = E(r_m) - r_f$

$=^3$ $\vec{\beta} = \dfrac{\operatorname{cov}\left(\vec{r}, \vec{r}^{\,T}\vec{w}_m\right)}{\sigma_m^2}$

$=^4$ $\operatorname{cov}(aX, Y) = a\operatorname{cov}(X, Y)$, ob pogoju, da $a$ ni slučajna spremenljivka

$=^5$ urejanje enačbe

$=^6$ $\delta = \dfrac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m^2} = \dfrac{\mu_m}{\sigma_m^2}$ in $\Sigma = \operatorname{cov}\left(\vec{r}, \vec{r}^{\,T}\right)$

Ker predpostavke, na katerih temelji CAPM, zagotavljajo, da na trgu kapitala ni podcenjenih ali precenjenih vrednostnih papirjev, in imajo vsi racionalni vlagatelji svoje premoženje naloženo v tržni portfelj, moramo za izračun ravnotežnih donosnosti uporabiti tržne uteži ($\vec{w}_m$) (Salomons, 2007, str. 41). Te dobimo tako, da tržno kapitalizacijo posameznih finančnih sredstev, ki je zmnožek tržne cene s številom izdanih vrednostnih papirjev, delimo s tržno kapitalizacijo portfelja.

Ko so ravnotežne donosnosti določene, je treba definirati varianco $E(\vec{r})$. Ker ravnotežne donosnosti niso ocenjene, ampak so izračunane s CAPM, neposredna izpeljava variance apriorne porazdelitve ni možna. Po mnenju Blacka in Littermana (1992, str. 34) je negotovost v oceni pričakovane vrednosti $E(\vec{r})$ manjša od negotovosti samih donosnosti $(r)$. To pomeni, da je treba varianco donosnosti $\Sigma$ skrčiti, in sicer tako, da jo pomnožimo s proporcionalno konstanto $\tau$, ki predstavlja gotovost v apriorno porazdelitev. Vrednost $\tau$ se po prepričanju Blacka in Littermana (1992), He in Littermana (1999), Lee (2000) in Idzorka (2004) giblje med 0 in 1.

Glede apriorne porazdelitve lahko sklenemo naslednjo predpostavko: *$E(\vec{r})$ je slučajna spremenljivka, ki se porazdeljuje normalno, s povprečno vrednostjo $\vec{\pi}$ in varianco $\sum\tau$:* $E(\vec{r}) \sim N(\vec{\pi}, \sum\tau)$.

### 3.2.2. Formulacija pogojne porazdelitve v B-L modelu

Drugi vir informacij, potrebnih za izpeljavo novega vektorja pričakovanih donosnosti, so subjektivna pričakovanja vlagateljev. Na podlagi lastnih pričakovanj in gotovosti glede lastnih pričakovanj se določi pogojno porazdelitev $E(\vec{r})$.

Predpostavimo, da ima vlagatelj na voljo $n$ finančnih sredstev, glede katerih ima oblikovanih $k$ pričakovanj. Black in Litterman matematično pričakovanja izrazita v naslednji obliki (Black & Litterman, 1992, str. 42):

$$PE(\vec{r}) = \vec{Q} + \vec{\varepsilon} \qquad \text{in} \qquad \vec{\varepsilon} \sim N(0,\Omega) \tag{3.9}$$

V matriki $P \in R^{k \times n}$ je določeno, na katera finančna sredstva se nanašajo pričakovanja. Donosnosti finančnih sredstev, izražene na osnovi lastnih pričakovanj, so zajete v vektorju $\vec{Q} \in R^k$. Vektor $\vec{\varepsilon} \in R^k$ ali vektor napak ocen izraža negotovost vlagateljev v posamezna pričakovanja. Napake ocen se porazdeljujejo normalno s pričakovano vrednostjo 0 in varianco $\Omega \in R^{k \times k}$. Zaradi predpostavke, da so pričakovanja med seboj neodvisna, je matrika $\Omega$ diagonalna, kar pomeni, da imajo vsi nediagonalni elementi vrednost 0. $i$-ti diagonalni element matrike $\Omega$ je ponazorjen z $\omega_i$ in predstavlja varianco $i$-te napake ocene, ki je inverzno povezana s stopnjo zaupanja v $i$-to pričakovanje. Če je varianca napake ocene enaka nič, je stopnja zaupanja v vlagateljevo lastno pričakovanje 100 %. Vektor $E(\vec{r})$ je nepoznan vektor pričakovanih donosnosti, katerega oceno želimo poiskati (Salomons, 2007, str. 42).

### *3.2.2.1. Izražanje pričakovanj in določanje matrike P*

Pričakovanja so lahko izražena v *absolutnem* ali *relativnem* smislu (Idzorek, 2005, str. 7). Primer absolutnega pričakovanja je, da bo donosnost vrednostnega papirja A konec obdobja enaka 10 %. Ker je absolutne donosnosti težko natančno napovedati, je med vlagatelji pogostejše izražanje relativnih pričakovanj. To je na primer, da bo donosnost vrednostnega papirja B za 3 % višja od donosnosti vrednostnega papirja C. Po mnenju Idzorka (2004), Salomonsove (2007), Mankertove (2006) in Waltersa (2008) je izražanje relativnih pričakovanj ena izmed ključnih prednosti, ki jih ima B-L model pred Markowitzevim.

Število pričakovanj, ki jih lahko vlagatelji podajo, je prilagodljivo. V skrajnih primerih je pričakovanj toliko, kolikor je v portfelju finančnih sredstev, ali pričakovanj ni (Salomons, 2007, str. 37). Matrika $P$ pri tem omogoča, da lastna pričakovanja povežemo s finančnimi sredstvi, na katera se nanašajo pričakovanja.

Oglejmo si določanje matrike $P$ na primeru, povzetem po Idzoreku (2005, str. 11–13). Predpostavimo, da imamo na voljo 8 finančnih sredstev. Njihove uteži v portfelju so podane v spodnji tabeli.

*Tabela 1: Finančna sredstva in njihove uteži v portfelju*

| Razredi finančnih sredstva | Utež |
|---|---|
| 1. US bonds | 19,34% |
| 2. International bonds | 26,13% |
| 3. US Large growth | 12,09% |
| 4. US Large value | 12,09% |
| 5. US small growth | 1,34% |
| 6. US small value | 1,34% |
| 7. International developed equity | 24,18% |
| 8. International emerging equity | 3,49% |
| **Vsota** | **100%** |

*Vir: Idzorek, A step-by-step guide to the black-litterman model, 2005, str. 5.*

Predpostavimo, da ima vlagatelj glede donosnosti finančnih sredstev oblikovana tri pričakovanja:

***Pričakovanje 1***: *Donosnost sredstev v razredu »International bonds« bo za 0,25 % višja od »US bonds«.*

***Pričakovanje 2:*** US *large growth« in »US small growth« se bodo na trgu odrezale za 2 % bolje kot »US large value« in »US small value«*

***Pričakovanje 3:*** *Presežna donosnost finančnih sredstev v razredu »International developed equity« bo enaka 5,25 %.*

Donosnosti, izražene na podlagi lastnih pričakovanj, so zajete v vektorju $\vec{Q} = [0{,}25 \quad 2 \quad 5{,}25]^T$. Vsakemu pričakovanju v matriki $P$ pripada $1 \times n$ vrstični vektor, pri čemer je $n$ število finančnih sredstev v portfelju. Velikost matrike $P$, s katero povežemo pričakovanja s finančnimi sredstvi, je v tem primeru $3 \times 8$.

Finančnim sredstvom, na katera se pričakovanja nanašajo, je treba pripisati uteži. Te se v matriki $P$ lahko določi na dva načina. Satchell in Scowcroft (2000) uporabita metodo enakih uteži (angl. *equally weighted method*), ki je ponazorjena v enačbi (3.11). Prva in druga vrstica v matriki P se nanašata na prvo in drugo pričakovanje, ki sta relativni. Vsota uteži v primeru relativnih pričakovanj mora biti enaka 0. Finančnim sredstvom, za katera menimo, da so podcenjena (»International bonds«, *»US large growth« in »US small growth*), pripišemo pozitivno utež, saj jih je v danem trenutku smiselno kupiti. Ker imajo pri tej metodi vsa podcenjena finančna sredstva enako utež, to izračunamo tako, da vrednost 1 delimo s številom podcenjenih sredstev, omenjenih v posameznem pričakovanju. Tako sta na primer v pričakovanju 2 dve sredstvi podcenjeni, zato vsaki od njiju pripišemo utež 0,5. Obratno velja za precenjena sredstva, v katerih je smiselno zavzeti kratko pozicijo, zato dobijo negativno utež. V primeru absolutnih pričakovanj (tretja vrstica v matriki $P$) celotno utež pripišemo finančnemu sredstvu, na katerega se nanaša pričakovanje, torej »International developed equity«.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} E(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 2 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \vec{\varepsilon} \tag{3.10}$$

Idzorek (2005, str. 12) je mnenja, da zgoraj opisan način določanja uteži dodatno prispeva k maksimiranju napake ocene, saj se zaradi neupoštevanja tržne kapitalizacije posameznih finančnih sredstev pojavljajo velike spremembe optimalnih uteži, zlasti pri sredstvih z majhno kapitalizacijo. Da bi se temu izognili, predlaga, da se uteži določajo na podlagi tržnih vrednosti. Ob upoštevanju slednjega enačbo (3.11) zapišemo kot:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & -0{,}9 & 0{,}1 & -0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} E(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 2 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \vec{\varepsilon} \tag{3.11}$$

#### *3.2.2.2. Pomen stolpčnega vektorja Q*

Z vektorjem $\vec{Q}$ vlagatelj opredeli relativno pričakovano uspešnost (donosnost) finančnih sredstev. Pomen vektorja $\vec{Q}$ je moč razložiti z naslednjim primerom. Predpostavimo, da imamo na voljo tri finančna sredstva: $A, B \; in \; C$. Glede gibanja njihovih donosnosti pričakujemo, da bo donosnost finančnega sredstva $A$ za 2 % višja od $B$. Pričakovanje matematično izrazimo s formulo $PE(\vec{r}) = \vec{Q}$, kjer je $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vektor $E(\vec{r}) = \begin{pmatrix} E(r_A) & E(r_B) & E(r_C) \end{pmatrix}$ je nepoznan in ga je treba določiti na podlagi posteriorne porazdelitve. Spremenljivka $\vec{Q} = 2\%$ predstavlja relativno napoved gibanja pričakovanih donosnosti. Množenje posameznih členov v enačbi $PE(\vec{r}) = \vec{Q}$ razloži njen pomen: $PE(\vec{r}) = E(r_A) - E(r_B) = 2\%$, in sicer je razlika v pričakovanih donosnostih med finančnima sredstvoma $A$ in $B$ enaka 2 % (Salomons, 2007, str. 43).

#### *3.2.2.3. Negotovost glede lastnih pričakovanj*

B-L model vlagateljem omogoča, da lastnim pričakovanjem pripišejo določeno stopnjo zaupanja. Višja stopnja zaupanja oziroma večja gotovost v lastna pričakovanja povzroči, da so pričakovane donosnosti, ki jih razberemo iz posteriorne porazdelitve, bližje lastnim pričakovanjem kot ravnotežnim donosnostim (Wolfgang, 2001, str. 66).

Stopnja zaupanja v lastno pričakovanje je inverzno povezana z negotovostjo oziroma varianco napake ocene $\omega$, ki je sestavni del kovariančne matrike $\Omega$ (Walters, 2008, str. 8). Če je vlagatelj 100 % prepričan, da se bo njegovo pričakovanje uresničilo, in je torej napaka ocene $\varepsilon$ enaka 0, potem je tudi njena varianca, s katero izražamo gotovost v lastna pričakovanja, nič. V splošnem kovariančno matriko $\Omega$ zapišemo kot (Mankert, 2006, str. 38):

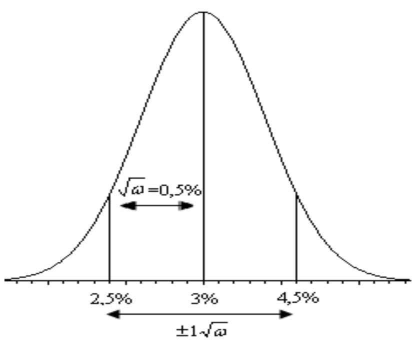
$$\Omega = \begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \omega_k \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Eden izmed načinov določanja kovariančne matrike $\Omega$ je, da izračunamo variance donosnosti lastnih pričakovanj. To najlažje storimo tako, da definiramo interval zaupanja, znotraj katerega pričakujemo, da se bo nahajala pričakovana donosnost (Walters, 2008, str. 8). Vzemimo primer, ko vlagatelj s 67-odstotno stopnjo zaupanja napoveduje, da se bo pričakovana donosnost nahajala na intervalu od 2,5 % do 3,5 %. Ker vemo, da se donosnosti porazdeljujejo normalno in se 67 % normalne porazdelitve nahaja znotraj 1 standardnega odklona od aritmetične sredine (v našem primeru je ta enaka 3 %), varianco $\omega$ izračunamo na naslednji način:

$$1\times\sqrt{\omega}+3\%=2{,}5\% \quad \text{ali} \quad -1\times\sqrt{\omega}+3\%=3{,}5\%\,. \tag{3.13}$$

Izračunana varianca v tem primeru znaša $(0{,}5\%)^2$, kar lahko ponazorimo tudi grafično (glej Sliko 8).

*Slika 8: Grafična interpretacija stopnje zaupanja*




He in Litterman (1999) izbereta drugačen pristop k določanju negotovosti v lastna pričakovanja, in sicer predpostavita, da bo varianca pričakovanih donosnosti proporcionalna varianci donosnosti sredstev. Varianco posameznega pričakovanja izračunata tako, da upoštevata varianco apriorne porazdelitve (Walters, 2008, str. 8).

$$\omega_i = p_i(\tau\Sigma)p_i^T \text{ ali } \Omega = P(\tau\Sigma)P^T \tag{3.14}$$

Pri čemer je:

$p_i$ - $1 \times n$ vrstični vektor v matriki $P$, ki pove, na katera finančna sredstva se nanaša $i$-to pričakovanje.

Takšen način določanja variance donosnosti glede lastnih pričakovanj daje pri izpeljavi posteriorne porazdelitve enako utež lastnim pričakovanjem in ravnotežnim donosnostim, zato postane tudi končna rešitev manj odvisna od faktorja $\tau$ (Walters, 2008, str. 8).

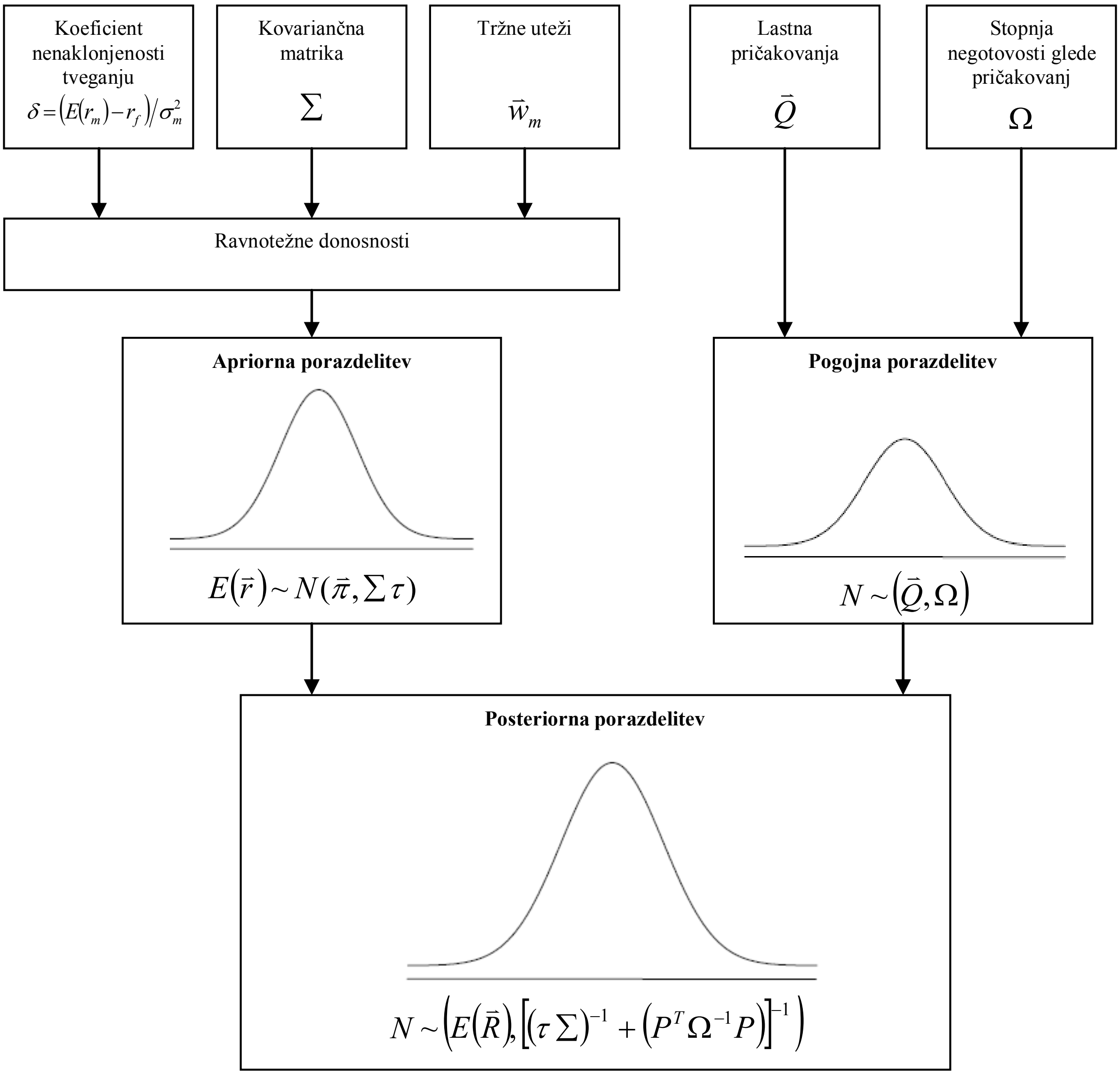
Glede nove porazdelitve $E(\vec{r})$, ki je v tem primeru zaradi vključitve lastnih pričakovanj pogojna, sklenemo naslednjo predpostavko: $PE(\vec{r})|E(\vec{r})$ *se porazdeljuje normalno, s povprečno vrednostjo* $\vec{Q}$ *in diagonalno kovariančno matriko* $\Omega$: $PE(\vec{r})|E(\vec{r}) \sim N(\vec{Q},\Omega)$.

### 3.2.3. Posteriorna porazdelitev v B-L modelu

Cilj B-L modela je določitev posteriorne porazdelitve $E(\vec{r})|PE(\vec{r})$, kjer so v parametrih skrita lastna pričakovanja in ravnotežne donosnosti. Ta porazdelitev je osnova za alokacijo med sredstvi na podlagi »mean-variance« optimizacije.

Kako doseči posteriorno porazdelitev $E(\vec{r})$, pojasnjuje Slika 9. Predpostavka je, da se donosnosti sredstev $(r)$ porazdeljujejo normalno s pričakovano vrednostjo $E(\vec{r})$ in varianco $\Sigma$. $E(\vec{r})$ je nepoznana slučajna spremenljivka, katere oceno želimo poiskati. Prvi vir informacij o porazdelitvi $E(\vec{r})$ so ravnotežne donosnosti $\vec{\pi}$. Ravnotežne donosnosti $\vec{\pi} = \delta\Sigma\vec{w}_m$ predstavljajo povprečna vrednost apriorne porazdelitve, ki ima varianco ($\Sigma\tau$) proporcionalno varianci donosnosti sredstev, saj je negotovost v oceni pričakovane vrednosti $E(\vec{r})$ manjša od negotovosti samih donosnosti $(r)$. Drugi vir informacij so lastna pričakovanja in gotovosti vlagateljev glede lastnih pričakovanj, ki so izražena kot $PE(\vec{r}) = \vec{Q} + \vec{\varepsilon}$ in določajo novo porazdelitev $E(\vec{r})$. Ta je zaradi vključitve lastnih pričakovanj pogojna $PE(\vec{r})|E(\vec{r})$ s povprečno vrednostjo $\vec{Q}$ in varianco $\Omega$. Tako ravnotežna kot tudi naša pričakovanja glede donosnosti imajo normalno porazdelitev, zato je tudi posteriorna porazdelitev, ki jo dobimo z uporabo bayesianskega izreka, normalna.

*Slika 9: Določitev posetriorne porazdelitve in novega vektorja pričakovanih donosnosti, ki služi za odločanje o alokaciji sredstev na podlagi »mean-variance« optimizacije*




*Vir: Idzorek, A step-by-step guide to the black-litterman model, 2005, str. 16.*

Black in Litterman (1992) ne navedeta izpeljave posteriorne porazdelitve, poudarita le, da je nov vektor pričakovanih donosnosti $E(\vec{R})$ dobljen kot zmnožek dveh normalnih porazdelitev. Podrobno izpeljavo lahko najdemo v Satchell in Scowcroft (2000) ter Salomons (2007). V obeh primerih je posteriorna porazdelitev izpeljana z uporabo bayesianskega izreka, ki se v tem primeru glasi (Salomons, 2007, str. 45–47):

$$f\left(E(\vec{r}) \middle| PE(\vec{r})\right) = \frac{f\left(E(\vec{r})\right) \, f\left(PE(\vec{r}) \middle| E(\vec{r})\right)}{f\left(PE(\vec{r})\right)} \tag{3.14}$$

Povprečna vrednost posteriorne porazdelitve $E(\vec{R})$ oziroma nov vektor pričakovanih donosnosti je enak (Salomons, 2007, str. 49):

$$E(\vec{R}) = \left[(\tau\,\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\,\Sigma)^{-1}\vec{\pi} + P^T\Omega^{-1}\vec{Q}\right] \tag{3.15}$$

Prvi člen v enačbi (3.15) je normalizacijska konstanta. Z drugim členom izračunamo tehtano povprečje med ravnotežnimi ($\vec{\pi}$) in pričakovanimi donosnostmi ($\vec{Q}$), pri čemer sta ponderja faktor $(\tau\Sigma)^{-1}$ in $(P^T\Omega^{-1})$.

V odsotnosti subjektivnih pričakovanj ($P = 0$) iz enačbe (3.15) sledi, da je nov vektor pričakovanih donosnosti enak ravnotežnim donosnostim: $E(\vec{R}) = \left[(\tau\,\Sigma)^{-1}\right]^{-1}\left[(\tau\,\Sigma)^{-1}\vec{\pi}\right] = \vec{\pi}$ (Salomons, 2007, str. 49). Uteži v optimalnem portfelju so v tem primeru enake tržni kapitalizaciji posameznih sredstev. Ker vlagatelj svoje premoženje naloži v tržni portfelj, ki se običajno uporablja kot kriterijski indeks oziroma »benchmark« za merjenje uspešnosti naložbe, pravimo, da gre za t. i. strateško alokacijo sredstev (Wolfgang, 2001, str. 64).

Pri taktični alokaciji naložb se vlagatelj na podlagi lastnih pričakovanj odloči, da se bo nekaterim naložbam bolj oziroma manj izpostavil od preostalih, ker bodo po njegovem mnenju dosegale nadpovprečno oziroma podpovprečno donosnost na trgu (Jackson, 2003, str. 98). Odmik uteži od strateške alokacije je pri tem odvisen od stopnje zaupanja v lastna pričakovanja. Iz enačbe (3.15) je razvidno, da je v primeru večje negotovosti vrednost ponderja $(P^T\Omega^{-1})$ nižja, zato so odmiki $E(\vec{R})$ od ravnotežnih donosnosti $\vec{\pi}$ manjši.

Ekstremen primer je, kadar je stopnja zaupanja vlagatelja v lastna pričakovanja 100 %. To pomeni, da je vrednost diagonalne kovariančne matrike enaka nič, zaradi česar ne moremo poiskati njenega inverza. V tem primeru je vektor pričakovanih donosnosti $E(\vec{R})$ enak vektorju lastnih pričakovanj glede donosnosti $\vec{Q}$, izračunamo pa ga po naslednji formuli (Wolfgang, 2001, str. 68):

$$E(\vec{R}) = \pi + \tau\Sigma P'(P\tau P')^{-1}(Q - P\pi) \tag{3.16}$$

# 4. EMPIRIČNI DEL

Na osnovi teoretičnih izhodišč MPT lahko začnemo z empiričnim raziskovanjem. V empiričnem delu skušam na podlagi primerov ilustrirati razlike med Markowitzevim in B-L optimizacijskim procesom ter hkrati pokazati, da B-L model ponudi vlagateljem strateško izhodišče za določanje alokacije med sredstvi in tudi sistematičen način, kako od izhodišča odstopati upoštevajoč lastna pričakovanja.

## *4.1. Opis podatkov*

Podatke o mesečnih donosnostih sem zajela na spletni strani Ken French (http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/). Upoštevana časovna serija podatkov zajema obdobje od 1.7.1934 do 31.12.2004, torej 846 mesecev. V portfelj, katerega uteži želim optimizirati, so vključeni vsi vrednostni papirji, ki so v omenjenem obdobju kotirali na borzah American Stock Exchange, New York Stock Exchange in NASDAQ. Vrednostni papirji so na podlagi Fama-Frenchove industrijske klasifikacije razvrščeni v dvanajst portfeljev: potrošne dobrine (NoDur), trajne dobrine (Durbl), proizvodnja (Manuf), energetika (Enrgy), kemijska industrija (Chems), poslovna oprema (BusEq), telekomunikacije (Telcm), oskrba (Utils), trgovina (Shops), zdravstvo (Hlth), finance (Money) in drugo (Other). Merilo za uvrstitev vrednostnega papirja v posamezni industrijski sektor oziroma portfelj je štirimestna klasifikacijska koda SIC (Standard industry classification), ki jo je imelo podjetje glede na svojo dejavnost konec junija v posameznem letu (glej Prilogo 1). Mesečne donosnosti portfeljev so v obravnavanem obdobju izračunane kot tehtana aritmetična sredina mesečnih donosnosti vrednostnih papirjev pripadajočih posameznemu sektorju, pri čemer so ponderji njihove tržne uteži.

Za netvegano obrestno mero $(r_f)$ sem vzela tri mesečne državne zakladne menice (angl. *t-bills*), ki jih izdaja Ameriška centralna banka. Njihova povprečna vrednost je znašala za obdobje od 1.7.1934 do 31.12.2004 3,95 %.

Ker se pričakovane donosnosti in standardni odkloni največkrat izražajo na letni ravni, so v Tabeli 2 opisne statistike anualizirane. Če so vzorčni podatki mesečni, izračunamo povprečno letno donosnost in letni standardni odklon po naslednji formuli (Alexander, 1998, str. 125):

$$r_L = (1 + r_m)^{\wedge 12} - 1 \tag{4.1}$$

$$\sigma_L = \sigma_m \times \sqrt{12} \tag{4.2}$$

*Tabela 2: Povprečne letne donosnosti, letni standardni odkloni, presežne donosnosti, mere asimetrij in mere sploščenosti, izračunane na podlagi mesečnih podatkov, za obdobje od 1.7.1934 do 31.12.2004 ter tržna kapitalizacija portfeljev v decembru 2004*

| Portfelj | Pričakovana donosnost $r_L$ | Standardni odklon $\sigma_L$ | Presežna donosnost $\mu = r_L - r_f$ | Mera asimetrije $S$ | Mera sploščenosti $K$ | Tržna utež $w_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 13,1% | 14,7% | 9,1% | 2,7 | -0,4 | 5,8% |
| **Durbl** | 14,3% | 21,2% | 10,4% | 2,9 | -0,1 | 1,3% |
| **Manuf** | 13,8% | 19,3% | 9,9% | 4,8 | -0,2 | 7,4% |
| **Enrgy** | 14,7% | 18,6% | 10,7% | 2,3 | 0,0 | 6,3% |
| **Chems** | 12,7% | 16,6% | 8,8% | 3,0 | -0,1 | 3,2% |
| **BusEq** | 14,6% | 22,5% | 10,6% | 1,7 | -0,2 | 16,8% |
| **Telcm** | 11,1% | 14,6% | 7,2% | 2,3 | -0,1 | 5,4% |
| **Utils** | 11,6% | 16,0% | 7,7% | 2,5 | 0,0 | 3,3% |
| **Shops** | 13,5% | 17,9% | 9,6% | 2,9 | -0,3 | 9,0% |
| **Hlth** | 14,5% | 17,4% | 10,6% | 2,2 | 0,0 | 10,7% |
| **Money** | 14,6% | 18,5% | 10,7% | 2,7 | -0,3 | 20,2% |
| **Other** | 11,7% | 19,8% | 7,8% | 3,4 | -0,4 | 10,6% |

*Tabela 3: Kovariančna matrika donosnosti portfeljev v obdobju od 1.7.1934 do 31.12.2004*

| | NoDur | Durbl | Manuf | Enrgy | Chems | BusEq | Telcm | Utils | Shops | Hlth | Money | Other |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | 0,0018 | 0,0018 | 0,0019 | 0,0013 | 0,0016 | 0,0018 | 0,0011 | 0,0013 | 0,0019 | 0,0016 | 0,0019 | 0,0019 |
| **Durbl** | 0,0018 | 0,0038 | 0,0028 | 0,0018 | 0,0022 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0015 | 0,0024 | 0,0017 | 0,0025 | 0,0027 |
| **Manuf** | 0,0019 | 0,0028 | 0,0031 | 0,0021 | 0,0023 | 0,0030 | 0,0014 | 0,0015 | 0,0023 | 0,0019 | 0,0025 | 0,0029 |
| **Enrgy** | 0,0013 | 0,0018 | 0,0021 | 0,0029 | 0,0017 | 0,0019 | 0,0010 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0021 |
| **Chems** | 0,0016 | 0,0022 | 0,0023 | 0,0017 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0011 | 0,0013 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0020 | 0,0022 |
| **BusEq** | 0,0018 | 0,0028 | 0,0030 | 0,0019 | 0,0022 | 0,0042 | 0,0017 | 0,0014 | 0,0024 | 0,0021 | 0,0025 | 0,0029 |
| **Telcm** | 0,0011 | 0,0014 | 0,0014 | 0,0010 | 0,0011 | 0,0017 | 0,0018 | 0,0010 | 0,0014 | 0,0011 | 0,0015 | 0,0015 |
| **Utils** | 0,0013 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0014 | 0,0010 | 0,0021 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0017 | 0,0016 |
| **Shops** | 0,0019 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0014 | 0,0019 | 0,0024 | 0,0014 | 0,0013 | 0,0027 | 0,0018 | 0,0022 | 0,0023 |
| **Hlth** | 0,0016 | 0,0017 | 0,0019 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0021 | 0,0011 | 0,0012 | 0,0018 | 0,0025 | 0,0018 | 0,0019 |
| **Money** | 0,0019 | 0,0025 | 0,0025 | 0,0018 | 0,0020 | 0,0025 | 0,0015 | 0,0017 | 0,0022 | 0,0018 | 0,0029 | 0,0025 |
| **Other** | 0,0019 | 0,0027 | 0,0029 | 0,0021 | 0,0022 | 0,0029 | 0,0015 | 0,0016 | 0,0023 | 0,0019 | 0,0025 | 0,0033 |

Povprečna stopnja nenaklonjenosti tveganju $(\delta)$ vlagatelja, ki se odloči za naložbo v izbrane portfelje, znaša 3,75[12]. Ta je izračuna po formuli:

$$\delta = \frac{\vec{w}_m^T \vec{r}_L - r_f}{\vec{w}_m^{\ T} \sum \vec{w}_m}, \tag{4.4}$$

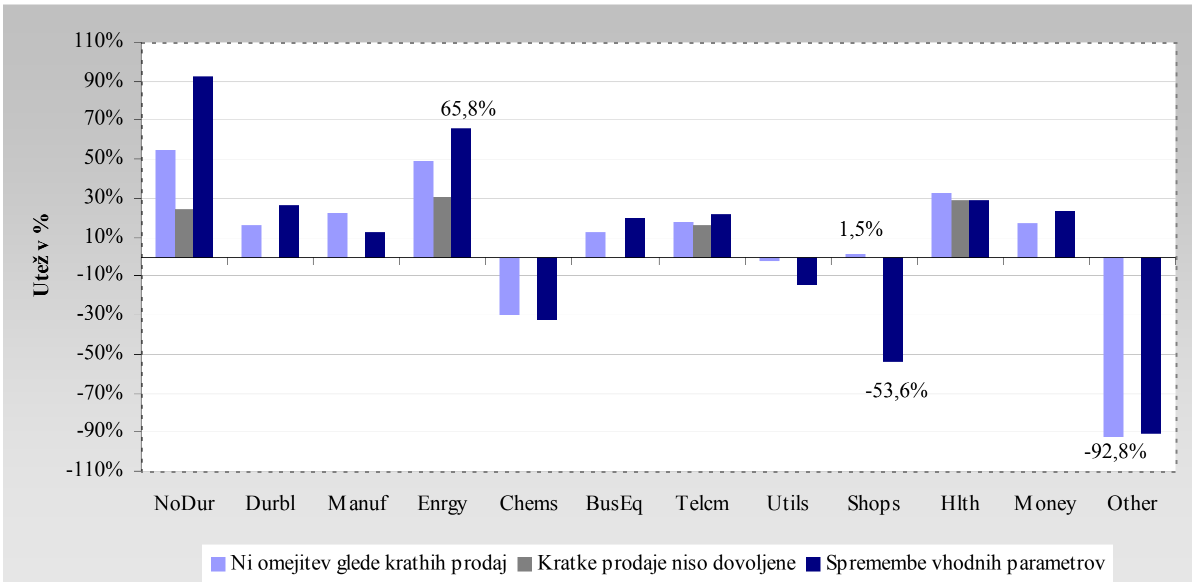
[12] Običajno se vrednost koeficienta $\delta$ giblje med 2 in 4, pri čemer višje vrednosti pomenijo večjo nenaklonjenost tveganju.

## *4.2. Pomanjkljivosti Markowitzevega modela*

Pogosta kritika Markowitzevega modela je, da oblikuje nestabilne portfelje, ki so zelo občutljivi na spremembe v vhodnih podatkih. Že majhna sprememba v pričakovanih donosnostih močno spremeni sestavo optimalnih uteži. Optimalni portfelji zaradi velikih negativnih vrednosti uteži, ki jih dobijo posamezna finančna sredstva, največkrat niso intuitivni. V praksi upravljavci premoženja takšne naložbene strategije težko implementirajo, bodisi zaradi zakonskih omejitev ali prevelike izpostavljenosti tveganju. Hkrati Markowitzev model vlagatelju ne omogoča, da bi svoja pričakovanja izrazil v relativnem smislu ter jim pripisal različne stopnje zaupanja, ki bi odražale njegovo negotovost glede uresničitve posameznih pričakovanj.

Rezultati simulacije uporabe Markowitzevega modela, ki so prikazani na Sliki 10, dokazujejo, da držijo zgoraj navedene trditve. Če v procesu optimizacije ne postavimo omejitev glede kratkih prodaj, kar trije izbrani portfelji (Chems, Utils in Other) dobijo negativno utež, torej je v njih smiselno zavzeti kratko pozicijo. Največja negativna vrednost znaša -92,52 % in pripada portfelju Other. Gre za izrazito ekstremno vrednost, ki jo večina institucionalnih vlagateljev ne bi smela ali bila pripravljena zavzeti, saj bi se s tem izpostavili previsokemu tveganju.

*Slika 10: Uteži optimalnega portfelja v primeru treh različnih scenarijev, izračunane z uporabo Markowitzevega modela*




Empirična analiza hkrati potrjuje, da drži trditev o občutljivosti uteži na spremembe v vhodnih parametrih. Predpostavimo, da vlagatelj pričakuje, da bo donosnost portfelja Enrgy 5 % višja od portfelja Shops. Ker znaša razlika med povprečnimi donosnostmi, izračunanimi na podlagi minulih opazovanj, 0,77 %, je treba to prilagoditi za preostalih 4,33 %. To storimo tako, da zvišamo pričakovano donosnost portfelju Enrgy za 2,165 % in hkrati za enak % znižamo donosnost portfelja Shops. Iz rezultata sledi, da se zaradi visokih korelacij med donosnostmi optimalne uteži spremenijo za vse izbrane portfelje (glej Sliko 10). Najbolj se spremeni utež portfelja Shops, in sicer z 1,5 % na -53,6 %, portfelju Enrgy pa se poviša na 65,8 %. Obe spremembi sta konsistentni z izraženim pričakovanjem, saj je zaradi negativnih napovedi v portfelju Shops smiselno pozicijo zmanjšati in jo hkrati povečati v portfelju Energy, vendar so spremembe v utežeh zelo velike.

## *4.3. Optimizacija portfelja po B-L zgledu: občutljivost optimalnih uteži na spremembe v vhodnih parametrih*

### 4.3.1. Pričakovane donosnosti in optimalne uteži: eno pričakovanje

B-L model vlagatelju ponudi rešitev, kako pristopiti k alokaciji sredstev, če so mu pričakovane donosnosti neznane. Za izhodiščno točko mu služijo ravnotežne donosnosti[13] (glej Sliko 11). Te v procesu »mean-variance« optimizacije povzročijo, da so uteži v optimalnem portfelju enake trenutni tržni kapitalizaciji sredstev $(w_m)$. Gre za strateško alokacijo, s katero si vlagatelj zagotovi, da bo donosnost njegove naložbe enaka kriterijskemu indeksu oziroma povprečni donosnosti na trgu. Od strateške alokacije so možni odmiki, ki so odvisni od vlagateljevih lastnih pričakovanj. Ta služijo za določitev taktične alokacije.

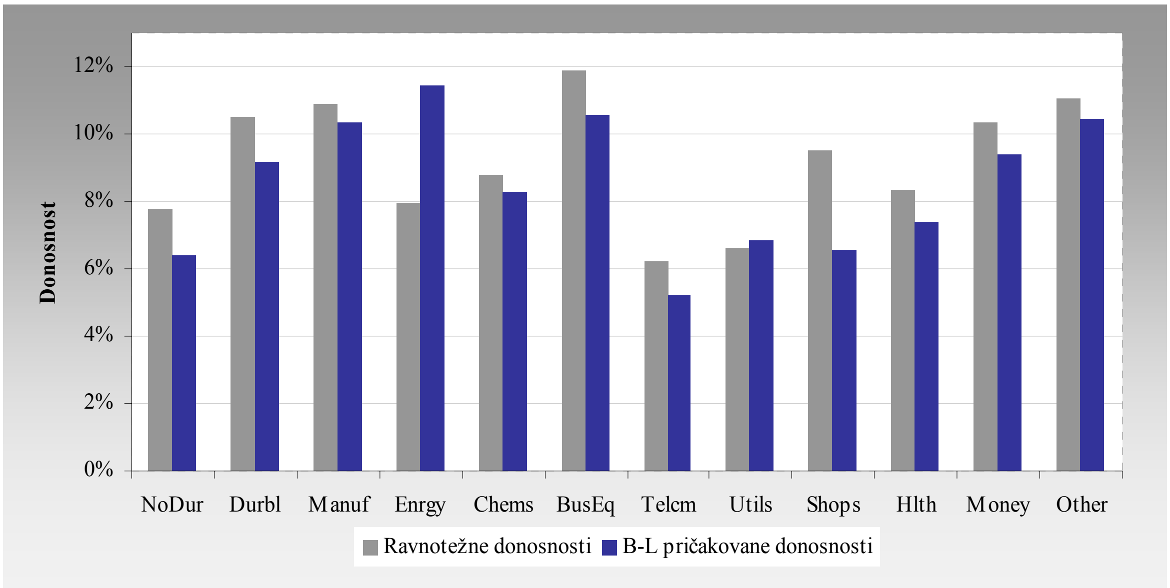
Oglejmo si primer taktične alokacije sredstev, ko vlagatelj z 90-odstotno stopnjo zaupanja pričakuje, da se bo razlika v pričakovani donosnosti med portfeljem Enrgy in Shops nahajala na intervalu od 3 do 7 %. Povprečna vrednost razlike je 5 %, varianca napake ocene glede pričakovane donosnosti pa je enaka $(1{,}22\%)^2$.

V nasprotju s tradicionalnim Markowitzevim modelom B-L model omogoča sistematično prilagoditev pričakovanih donosnosti od njihovih strateških vrednosti, v skladu z izraženimi pričakovanji. V našem primeru je smiselno, upoštevajoč pričakovanje, v portfelju Shops zavzeti kratko in dolgo pozicijo v portfelju Enrgy (glej Sliko 11). Pričakovana donosnost tega portfelja se prilagodi tako, da se njena vrednost zviša nad ravnotežno donosnostjo. Povišanje znaša manj kot pričakovana razlika (5 %), kar je po mnenju Heja in Littermana (1999, str. 6) normalno, saj to odraža negotovost v lastno pričakovanje. Enako glede prilagoditve velja za portfelj Shops, le da se v tem primeru donosnost prilagodi navzdol. Ker je korelacija med donosnostmi vseh preostalih portfeljev s portfeljem Shops tesnejša, se zmanjšajo tudi njihove pričakovane donosnosti. Izjema je le portfelj Utils, ki je tesneje povezan s portfeljem Enrgy in se mu zato pričakovana donosnost zviša (glej Prilogo 4). Prilagoditev pričakovanih donosnosti preostalih portfeljev, za katere pričakovanja niso implicitno podana, je zelo

[13] V obravnavanem primeru je predpostavljeno, da je vrednost $\tau$ enaka 0,3.

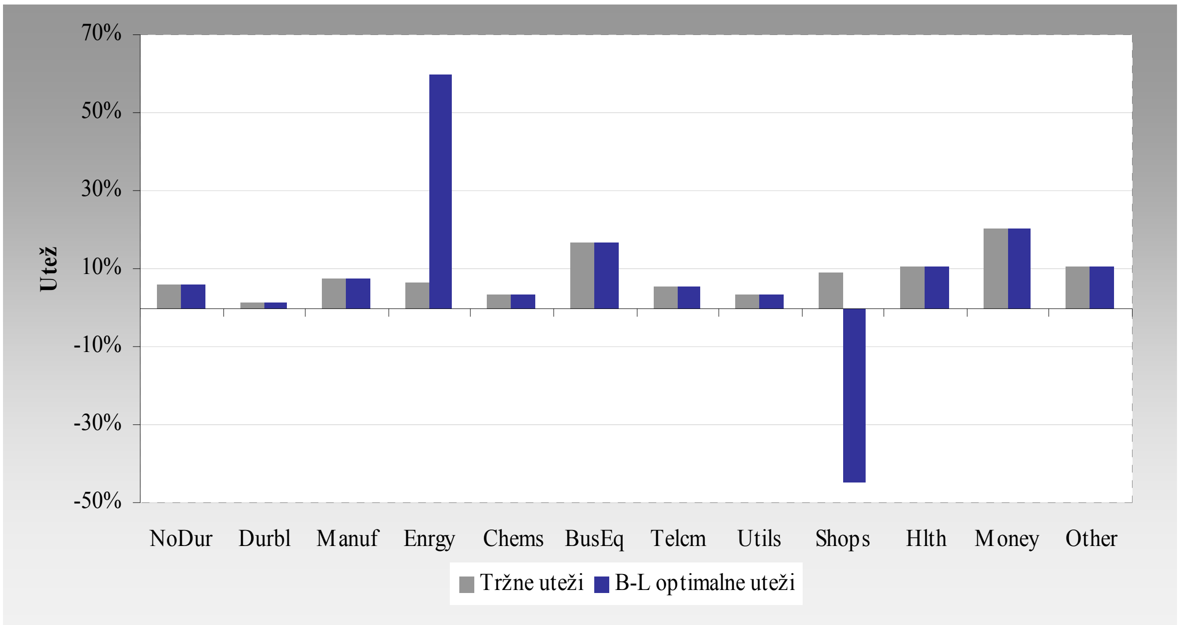
pomembna lastnost B-L modela, saj pozitivno vpliva na zmanjšanje problema maksimiranja napake ocene, na katerega je prvotno opozoril Michaud (1989). Napake ocen pričakovanih donosnosti se namreč pri množenju členov $P, \tau\sum$ in $\Omega$ razpršijo prek kovarinčne matrike.

*Slika 11: Ravnotežne in prilagojene pričakovane donosnosti, izračunane z uporabo B-L modela*




B-L pričakovane donosnosti nato uporabimo v »mean-variance« optimizacijskem procesu.

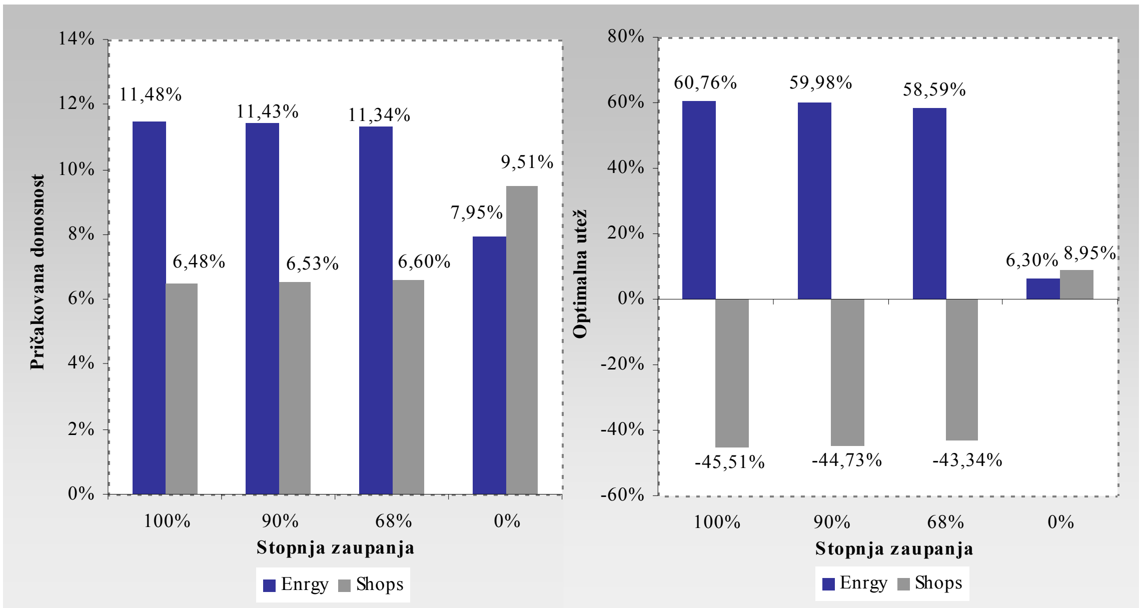
*Slika 12: Tržne in prilagojene uteži v B-L modelu, izračunane na podlagi novega vektorja pričakovanih donosnosti*




Iz Slike 12 je razvidno, da optimalne uteži portfeljev, na katera se pričakovanje ni nanašalo, ostanejo nespremenjene. Ker ima vlagatelj pozitivno mnenje glede donosnosti energetskega sektorja, je smiselno, da vanj investira več svojega premoženja in manj v portfelj Shops. Končni rezultat B-L modela je zelo intuitiven, saj se optimalne uteži obeh portfeljev (Enrgy, Shops) prilagodijo v skladu z izraženimi pričakovanji, medtem ko druge ostanejo na ravni strateških oziroma tržnih uteži.

Naslednji štirje scenariji pojasnjujejo (glej Sliko 13), kako se spremenijo pričakovane donosnosti in optimalne uteži, ko se spremeni stopnja zaupanja v lastno pričakovanje, preostali parametri pa ostanejo nespremenjeni. Še vedno predpostavljamo, da bo povprečna razlika med portfeljema Enrgy in Shops 5 %.

*Slika 13: Vpliv stopnje zaupanja v lastno pričakovanje na spremembe v pričakovanih donosnostih in optimalnih utežeh*




Ker je v prvem scenariju stopnja zaupanja 100 %, je razlika med pričakovanima donosnostma enaka napovedani $(11{,}48\% - 6{,}48\% = 5\%)$. Optimalna utež portfelja Enrgy v celotnem portfelju je enaka 60,76 %, portfelja Shops pa -45,51 %. Bolj ko se stopnja zaupanja znižuje, manjša je razlika med pričakovanima donosnostma in manjši je odmik optimalnih uteži od tržnih. Ta rezultat je po mnenju Heja in Littermana (1999, str. 10) intuitiven, saj je vlagatelj zaradi večje negotovosti v svoje pričakovanje pripravljen tvegati manj. Z zniževanjem stopnje zaupanja v lastna pričakovanja taktična alokacija vedno manj odstopa od strateške. Ko je stopnja zaupanja enaka 0 % in je torej vlagatelj glede svojih pričakovanj popolnoma negotov, pričakovane donosnosti in optimalne uteži ostanejo enake ravnotežnim (gre za strateško alokacijo).

### 4.3.2. Pričakovane donosnosti in optimalne uteži: več pričakovanj

Do sedaj smo predpostavljali, da ima vlagatelj samo eno (relativno) pričakovanje glede donosnosti sredstev. B-L model je dovolj prilagodljiv, da v analizo alokacije vpeljemo več pričakovanj. V nadaljevanju je opisan primer, ki pojasni, kako lahko vlagatelj v svojo analizo alokacije vključi mnenja finančnih analitikov in kako izbira $\tau$ vpliva na optimalno alokacijo med sredstvi.

Tabela 4 prikazuje napovedi analitikov za posamezne industrijske sektorje. Simbol »+« pomeni, da je bilo izraženo pozitivno mnenje glede sektorja, simbol »-« pa odraža negativno mnenje. Na podlagi preštetih simbolov »+« in »-« so industrijski portfelji razvrščeni v eno izmed petih skupin: zelo primeren za prodajo (ZPP), primeren za prodajo (PP), nevtralen (N), primeren za nakup (PN) in zelo primeren za nakup (ZPN).

*Tabela 4: Napovedi analitikov za posamezni industrijski sektor v letu 2005*

| | Banc of America | Goldman Sachs | Lehman Bro | Merrill Lynch | Morgan Stanely | PNC Advisors | Prudential | Smith Barney | Klsifikacija |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **NoDur** | + | - | - | + | | | | | N |
| **Durbl** | - | | | - | - | | - | | ZPP |
| **Manuf** | | | + | | | + | | | PN |
| **Enrgy** | + | | | | | - | + | | PN |
| **Chems** | + | | + | - | | + | | - | N |
| **BusEq** | - | + | | - | - | | - | | ZPP |
| **Telcm** | - | + | | + | | | + | | PN |
| **Utils** | - | - | - | + | | - | | | ZPP |
| **Shops** | | | | | - | | | | PP |
| **Hlth** | + | + | | + | + | | | + | ZPN |
| **Money** | + | | | | + | + | | | ZPN |
| **Other** | | | | | + | | | +/- | N |

*Vir: Wall street journal.*

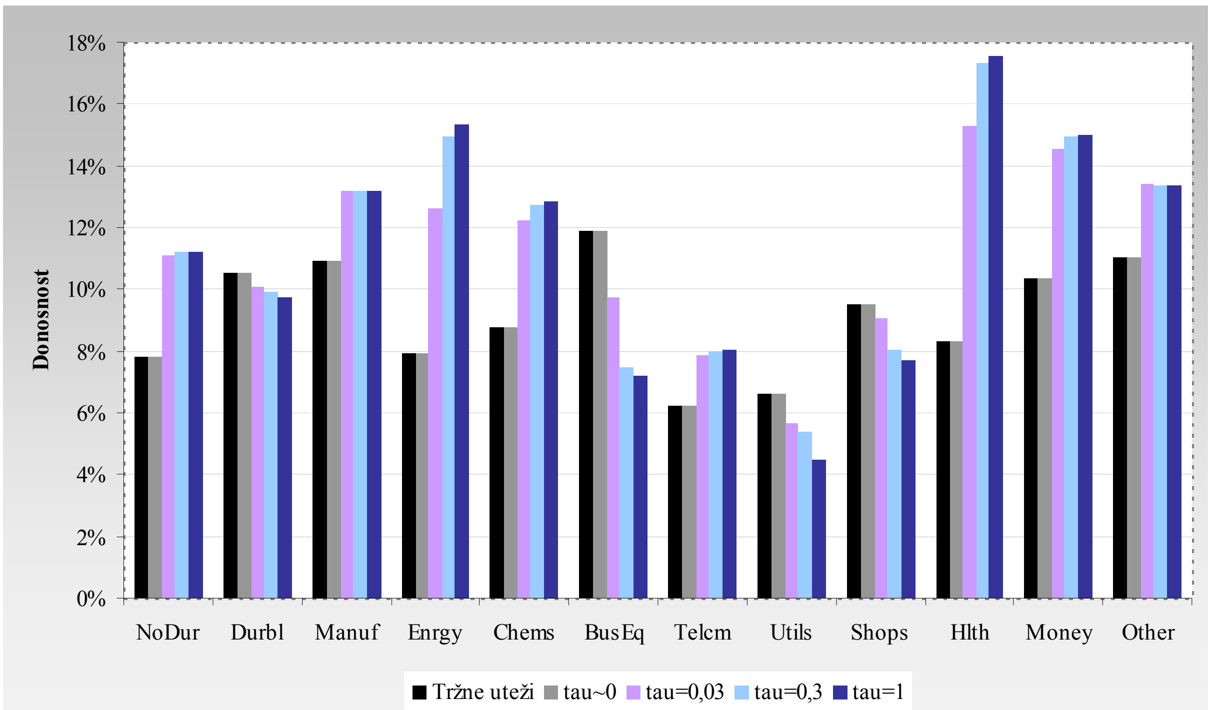
Predpostavimo, da vlagatelj z 90-odstotno stopnjo zaupanja napoveduje, da se bo razlika v pričakovani donosnosti med portfelji ZPN in ZPP nahajala na intervalu od 7 do 13 %. Povprečna vrednost razlike je torej enaka 10 %, pri čemer varianca napake ocene izraženega pričakovanja znaša $(1{,}8\%)^2$. Drugo pričakovanje se nanaša na portfelje z oznako PN in PP, vanj pa ima vlagatelj 68-odstotno stopnjo zaupanja. Pričakuje, da bo razlika med donosnostmi na intervalu od 3 do 7 %, s povprečno vrednostjo 5 % in varianco $(2\%)^2$. Zadnje pričakovanje je absolutno in se nanaša na portfelj Money (ZPN). Vlagatelj z 99-odstotno stopnjo zaupanja napoveduje, da se bo pričakovana donosnost portfelja Money nahajala na intervalu od 13 do 17 %, s povprečno vrednostjo 15 % in varianco $(0{,}78\%)^2$. Da bi lahko izračunali nov vektor pričakovanih donosnosti, je treba pričakovanja izraziti matematično z matrikami $P$, $\vec{Q}$ in $\Omega$. Uteži v matriki $P$ so določene na podlagi tržne kapitalizacije portfeljev (glej Tabelo 5.).

*Tabela 5: Subjektivna pričakovanja glede donosnosti, zapisana v matrični obliki*

| P | | | | | | | | | | | | Q | Ω | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -0,06 | 0 | 0 | 0 | -0,78 | 0 | -0,15 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10% | 0,00032 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0,39 | 0,33 | 0 | 0 | 0,28 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 5% | 0 | 0,00040 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15% | 0 | 0 | 0,00006 |

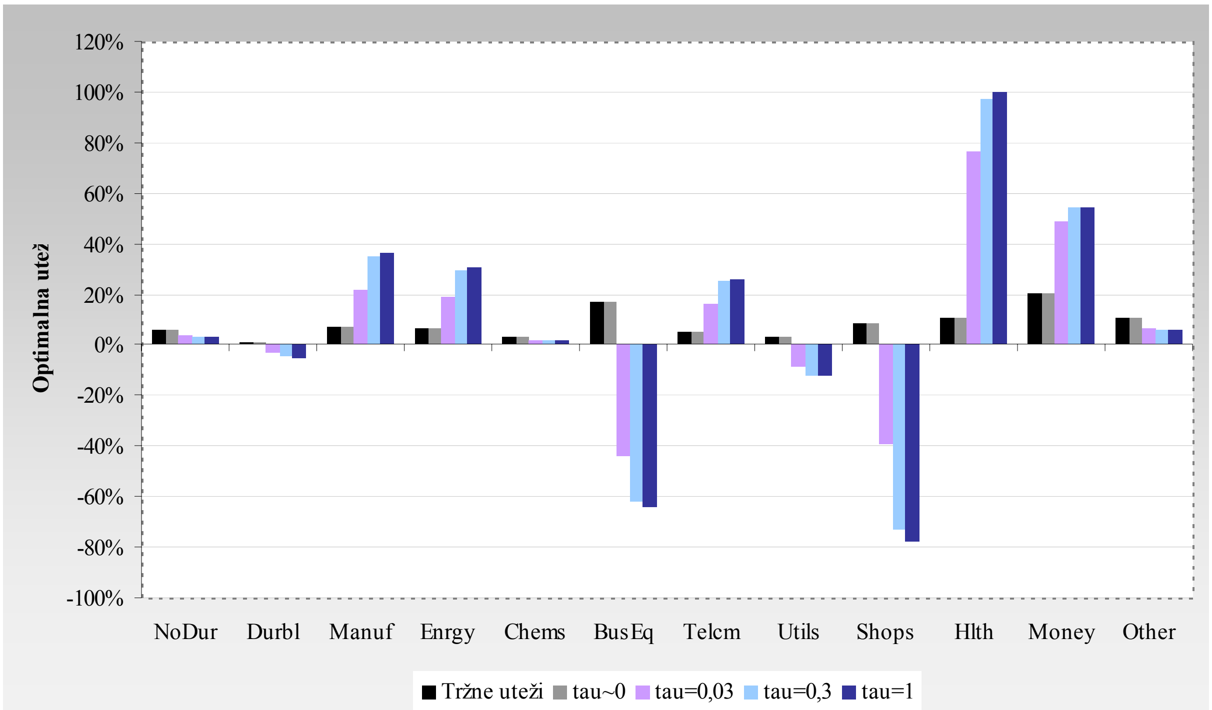
Iz Slike 14 je razvidno, da se pričakovane donosnosti prilagodijo v skladu z izraženimi pričakovanji, pri čemer je velikost odmika od ravnotežnih donosnosti odvisna od vrednosti $\tau$ in stopnje zaupanja v izraženo pričakovanje. Kadar je vrednost $\tau$ blizu nič in je torej negotovost v apriorno porazdelitev parametrov zelo majhna, so pričakovane donosnosti zelo blizu ravnotežnim. Večja negotovost v apriorno porazdelitev se odraža skozi višjo vrednostjo $\tau$. Iz spodnje slike je razvidno, da se v primeru, ko vrednost $\tau$ narašča proti 1, pričakovane donosnosti vedno bolj oddaljujejo od ravnotežnih v skladu z izraženimi pričakovanji. Vsem portfeljem, ki so uvrščeni v skupini ZPN (Hlth, Money) in PN (Manuf, Enrgy, Telcm), pričakovane donosnosti narastejo nad ravnotežne, ne glede na izbrano vrednost $\tau$. Obratno velja za portfelje v skupini ZPP (Durbl, BusEq, Shops) in ZP (Shops), za katere analitiki verjamejo, da so precenjeni (pričakovana donosnost je pod ravnotežno oziroma zahtevano) in jih je smiselno prodati. Spremenijo se tudi pričakovane donosnosti portfeljev v skupini N, za katere niso navedena pričakovanja. Ker imajo portfelji NoDur, Chems in Others tesnejše korelacije s portfelji v skupini ZPN in PN, so se njihove pričakovane donosnosti prilagodile navzgor.

*Slika 14: Ravnotežne in B-L pričakovane donosnosti pri različnih vrednostih $\tau$ (tau)*



Slika 15 prikazuje, kakšni so rezultati optimizacije, ko v procesu določanja novega vektorja pričakovanih donosnosti uporabimo različne vrednosti $\tau$. Tudi v tem primeru se odmik optimalnih uteži od tržnih povečuje s povečevanjem vrednosti $\tau$. Optimalne uteži portfeljev, za katere so analitiki podali pozitivna pričakovanja (Mnuf, Enrgy, Telcm, Hlth, Money), se povečajo, ne glede na to, kolikšna je vrednost $\tau$. Obratno velja za portfelje, glede katerih so bila podana negativna pričakovanja (Durbl, BusEq, Utils, Shops). Tem se optimalna utež v primerjavi s tržno zmanjša.

*Slika 15: Tržne in optimalne uteži, izračunane z B-L modelom pri različnih vrednostih $\tau$ (tau)*




Optimalne uteži portfeljev NoDur, Chems in Other se od tržnih ne bi smele razlikovati, saj se na te portfelje ni nanašalo nobeno pričakovanje. Odmiki so posledica normalizacije uteži, ki je potrebna vsakokrat, ko imamo opravka z absolutnimi pričakovanji. V skladu s temi je namreč smiselno zavzeti izključno eno pozicijo (kratko ali dolgo), kar povzroči, da je vsota uteži v portfelju manjša oziroma večja od 100 %, zato je uteži smiselno normalizirati.

## 5. SKLEP

Herry M. Markowitz je leta 1952 postavil temelje moderni premoženjski teoriji, ko je v svojem delu *Portfolio Selection* matematično formuliral, kako ob danem tveganju maksimirati pričakovano donosnost naložbe oziroma ob dani pričakovani donosnosti minimizirati tveganje. Kljub velikemu uspehu, ki ga je njegova teorija doživela v akademskih sferah, se model v praksi ni izkazal najbolje. Pogosta tarča kritik so vhodni parametri $E(r_i)$ in $\sigma_i$, ki vstopajo v proces optimizacije in povzročajo, da so predlagane uteži v optimalnih portfeljih preveč ekstremne, ne odražajo investitorjevih pričakovanj, portfelji pa so zelo nestabilni. Postopek ocenjevanja vhodnih parametrov je zelo pomemben in hkrati zahteven proces, saj so naložbe v vrednostne papirje tvegane, zaradi česar obstaja verjetnost, da dejanska donosnost ne bo enaka pričakovani. Markowitz reši problem napovedovanja pričakovanih donosnosti s predpostavko, da se donosnosti v prihodnosti porazdeljujejo enako kot donosnosti iz minulega obdobja, pri čemer poudari, da mora za izračun teh vrednostih obstajati tudi boljši način, ki vključi več informacij (Markowitz, 1952, str. 51).

Black in Litteraman izpeljeta leta 1992 nov vektor pričakovanih donosnosti, kjer so v parametrih skrita lastna pričakovanja in ravnotežne donosnosti izračunane z modelom CAPM. Te odražajo, kakšna so dolgoročna pričakovanja na trgu in služijo za določitev strateške alokacije med sredstvi, za katero velja, da so optimalne uteži enake relativni tržni kapitalizaciji sredstev v portfelju. V odsotnosti vsakršnih subjektivnih pričakovanj je za vlagatelja namreč najpametneje, da premoženje naloži v portfelj, tehtan s tržno kapitalizacijo finančnih sredstev, saj si tako zagotovi, da bo donosnost njegove naložbe enaka donosnosti izbranega kriterijskega indeksa. Poleg ravnotežnih donosnosti vlagatelji v proces odločanja vključijo tudi lastna pričakovanja, na podlagi katerih določijo taktično alokacijo naložb. Kolikšen bo odmik taktičnih od strateških uteži, je odvisno od stopnje zaupanja v lastna pričakovanja in gotovosti glede ravnotežnih donosnosti.

V diplomskem delu sem želela preveriti, ali kritike, ki se nanašajo na Markowitzev model, res držijo, in kakšna je občutljivost B-L modela na spremembe v vhodnih parametrih. V analizo so bili vključeni vsi vrednosti papirji, ki so v obdobju od 1.7.1934 do 31.12.2004 kotirali na borzah American Stock Exchange, New York Stock Exchange in NASDAQ. Vrednostni papirji so bili na podlagi Fama-Frenchove industrijske klasifikacije razvrščeni v dvanajst portfeljev. Ti so skupaj tvorili en sam portfelj, ki je bil predmet optimizacije.

Rezultati simulacije uporabe Markowitzevega modela so pokazali, da držijo trditve o občutljivosti uteži na spremembe v vhodni parametrih. Zaradi visokih korelacij med donosnostmi posameznih portfeljev so se optimalne uteži spremenile tudi tistim portfeljem, pri katerih je ostala pričakovana donosnost nespremenjena. Iz tega vidika so optimalni portfelji zelo nestabilni, pričakovane donosnosti ocenjene na podlagi minule porazdelitve donosnosti pa neuporabne.

Analiza B-L modela kaže na to, da tehnika, ki sta jo razvila Black in Litterman, omogoča razlikovanje med močnimi pričakovanji in dvoumnimi predpostavkami glede pričakovanih donosnosti. To se odraža tudi v odmikih optimalnih uteži od njihovih strateških vrednosti. Z zviševanjem stopnje zaupanja v lastna pričakovanja taktična alokacija vedno bolj odstopa od strateške, kar velja izključno za tista finančna sredstva, glede katerih je implicitno podano mnenje. Iz tega vidika so optimalni portfelji zelo stabilni na spremembe v vhodnih parametrih in odražajo pričakovanja vlagateljev. Hkrati odpravi model tudi težavo maksimiranja napake ocene, saj se napake ocene pričakovanih donosnosti pri množenju členov $P, \tau \sum$ in $\Omega$ razpršijo prek kovariančne matrike. Zaradi visokih korelacij med donosnostmi vrednostnih papirjev se namreč prilagodijo tudi donosnosti tistih vrednostnih papirjev, glede katerih vlagatelji ne podajo pričakovanj.

Izpostaviti velja težavo pri določanju gotovosti v apriorno porazdelitev oziroma porazdelitev ravnotežnih donosnosti. Ker ravnotežne donosnosti niso ocenjene, ampak so izračunane s CAPM, ni možna neposredna izpeljava variance apriorne porazdelitve. Ker je po mnenju Blacka in Littermana (1992) negotovost v oceni pričakovane vrednosti $E(\bar{r})$ manjša od negotovosti samih donosnosti $(r)$, je treba skrčiti varianco donosnosti $\sum$, in sicer tako, da jo pomnožimo s proporcionalno konstanto $\tau$. Mnenja, kolikšna naj bo njena vrednost, so raznolika. Zanimivo bi bilo, če bi se nadaljnje raziskave osredotočile na to, kako enolično določiti vrednost parametra $\tau$ in nov vektor pričakovanih donosnosti, kadar se te ne porazdeljujejo normalno.

# LITERATURA IN VIRI


1. Alexander, C. (1998). *Risk Management and Analysis. Measuring and Modeling financial Risk, Financial Engineering*. New York: John Wiley and Sons.

2. Alexander, G.J., Sharp, W.F. & Bailey, J.V. (1993). *Fundamentals of investments*. ($2^{nd}$ ed.) Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall International.

3. Aparicio, F.M. & Estrada, J. (2001). Empirical Distribution of Stock Returns: European Securities Markets, 1990-1995. *European Journal of Finance*, 7 (1), 1-21.

4. Black, F. & Litterman, R. (1992). Global Portfolio optimization. *Financial Analyst Journal*, 48 (5), 28-43.

5. Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., Perrakis, S. & Ryan, P.J. (2005). *Investments*. ($5^{th}$ Canadian ed.) Toronto: McGraw-Hill Ryerson.

6. Brigham, E.F. & Daves, P.R. (2004). *Intermediate Financial management*. ($8^{th}$ ed.) Ohio: South-Western/Thomson.

7. Burton, J. (1998, Maj/Junij). Revisting The Capital Asset Pricing Model. *Dow Jones Asset Manager*, str. 20.

8. CFA Institute (2008). *CFA Program Curriculum level 1 2008: Corporate Finance and Portfolio Management*. Charlottesville: CFA Institute.

9. Drobetz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? Putting the Black-Litterman approach at work. *Financial market and portfolio management*, 15 (1), 59-75.

10. Edwards, W. (1982*). "Conservatism in Human Information Processing", in Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. New York: Cambridge University Press.

11. Engels, M. (2004). *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz. Master Thesis*. Leiden: Leiden University.

12. Fisher, K.L. & Statman, M. (1997). The Mean-Variance-Optimization Puzzle: Security Portfolios and Food Portfolios. *Financial Analysts Journal*, 53(4), 41-50.

13. Goldberg, S. (1987). *Probability: an introduction*. New York: Dover Publications, Inc.

14. Idzorek, T. M. (2005, 26. april). A step-by-step guide to the black-litterman model, incorporating user-specified confidence levels. *Zephyr Associates Working Paper*. Najdeno 23. septembra 2008 na spletnem naslovu http://corporate.morningstar.com/ib/documents/MethodologyDocuments/IBBAssociates/BlackLitterman.pdf

15. Jackson, C. (2003). *Active Investment management*. New York: John Wiley and Sons.

16. Jamnik, R. (1971). *Verjetnostni račun*. Ljubljana: Mladinska knjiga.

17. Kim, J.J. (2005, 11.januar). What Wall Street's Best Are Telling Their Clients. *Wall Street Journal.* Najdeno 4. oktobra 2008 na spletnem naslovu http://online.wsj.com/article/SB110540040784122109.html

18. Lee, W. (2000). *Advanced theory and methodology of tactical asset allocation*, New York: John Wiley & Sons.

19. Litterman, R. & The Quantitative Resources Group (2003). *Modern Investment. Management: an Equilibrium Approach*. New Jersey: Wiley.

20. Litterman, R. & He, G. (1999, december). The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios. *Investment Management Research, Goldman Sachs Quantitative Resources Group*. Najdeno 23. septembra 2008 na spletnem naslovu http://www.som.yale.edu/Faculty/zc25/Investments/GS-ModelIntuition.pdf

21. Mankert, C. (2006). *The Black-Litterman Model: mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice. Licentiate thesis*. Stockholm: Royal institute of technology.

22. Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

23. Markowitz, Harry M. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.

24. Merton, R. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economic*s, 8, 323–361.

25. Michaud, R.O. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal?. *Financial Analysts Journal*, 45 (1), 31-42.

26. Mramor, D. (2002). *Teorija poslovnih financ*. (2.natis.) Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

27. Ogorevc, A. (2004). *Meja učinkovitosti slovenskega trga kapitala. Diplomsko delo*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.

28. Radcliffe, R. C. (1997). *Investments, Concepts-Analysis-Strategy*. (5th ed.) Reading: Addison-Wesley.

29. Ross, S.A., Westerfield, R.W., Jaffe, J.F. & Roberts, G.S. (2005). *Corporate finance*. (4th Canadian ed.) Toronto: McGraw-Hill Ryerson.

30. Ruppert, D. (2004). *Statistics and finance: An introduction*. New York: Springer.

31. Salomons, A. (2007). *The Black-Litterman model Hype or Improvement?* Groningen: University of Groningen.

32. Satchell, S. & Scowcroft, A. (2000). A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1 (2), 138-150.

33. Scherer, B. & Martin, R. D. (2005). *Introduction to modern portfolio optimization with NUOPT and SPLUS and S+Bayes*. Berlin Heidelberg: Springer.

34. Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio theory and capital markets*. New York: McGraw-Hill.

35. Sharpe, W. F. (1985). *Investments*. (3rd ed.) Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

36. Sornette, D. (1998). Large deviations and portfolio optimization. *Physica A*, 256 (1-2), 251-283.

37. Stöcker, H. (2006). *Matematični priročnik z osnovami računalništva*. (4.izd.) Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

38. Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Economic Studies*, 25, 65-86.

39. *U.S. Department of Treasury*. Najdeno 6. oktobra 2008 na spletnem naslovu http://www.treas.gov/]

40. van Boekel, M. A. J. S., Stein, A. & van Bruggen, A. H. C. (2004). *Bayesian statistics and quality modelling in the agro-food produciton chain*. Dordrecht: Kluwer Academic.

41. Walters, J. (2008, 27. januar). The Black-Litterman Model: A Detailed Exploration. *Blacklitterman.org*. Najdeno 20. septembra 2008 na spletnem naslovu http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf

42. Wolfgang, D. (2001). How to Avoid Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting theBlack-Litterman Approach at Work. *Financial Markets and Portfolio Management*,15(1), 59–75.

# PRILOGE

## Kazalo prilog

## Priloga 1: Fama-Frenchova industrijska klasifikacija po sektorjih

V tabeli so povzeti opisi dvanajstih sektorjev, ki so oblikovani na podlagi Fama-Frenchove industrijske klasifikacije. Vrednostni papirji, ki so v obdobju od 1.7.1934 do 31.12.2004 kotirali na borzah American Stock Exchange, New York Stock Exchange in NASDAQ so v posamezni portfelj razvrščeni na podlagi štiri mestne SIC kode, ki jo je podjetje imelo konec junija v posameznem letu.

*Tabela 1:Opis dvanajstih industrijskih sektorjev in SIC kode vrednostnih papirjev uvrščenih v posamezni sektor*

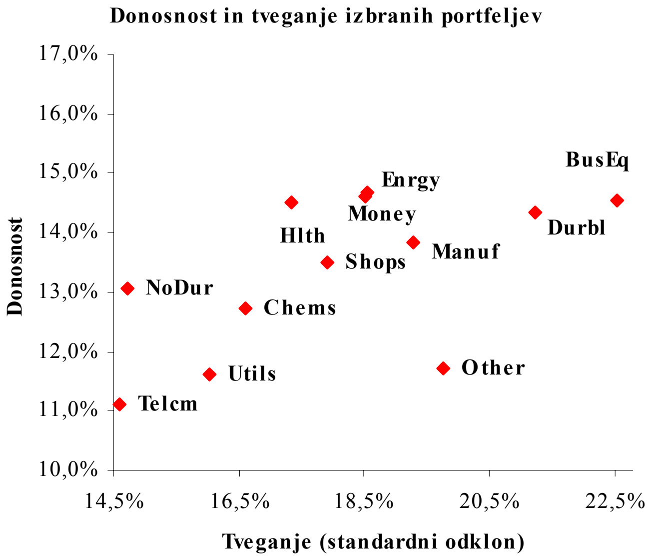
| Ime | Opis sektorja | SIC koda |
|---|---|---|
| **NoDur** | Netrajni proizvodi za široko porabo (hrana, tobačni izdelki, tekstil, usnje, igrače…) | 0100-0999, 2700-2749 2000-2399, 2770-2799 3100-3199, 3940-3989 |
| **Durbl** | Trajni proizvodi za široko porabo (Avtomobili, pohištvo, hišni pripomočki…) | 2500-2519, 2590-2599 3630-3659, 3710-3711 3714-3714, 3716-3716 3750-3751, 3792-3792 3900-3939, 3990-3999 |
| **Manuf** | Proizvodnja strojev, tovornjakov, letal, | 2520-2589, 2600-2699 2750-2769, 3000-3099 3200-3569, 3580-3629 3700-3709, 3712-3713 3715-3715, 3717-3749 3752-3791, 3793-3799 3830-3839, 3860-3899 |
| **Enrgy** | Pridelava energetskih surovin (nafta, premog zemeljski plin in sorodni proizvodi) | 1200-1399, 2900-2999 |
| **Chems** | Kemikalije in kemični izdelki | 2800-2829, 2840-2899 |
| **BusEq** | Poslovna oprema (računalniki, programska oprema in elektronske naprave) | 3570-3579, 3660-3692 3694-3699, 3810-3829 7370-7379 |
| **Telcm** | Telefonski in televizijski prenos | 4800-4899 |
| **Utils** | Oskrba | 4900-4949 |
| **Shops** | Trgovina na drobno, trgovina na debelo in nekatere druge storitve (pralnice) | 5000-5999, 7600-7699 7200-7299 |
| **Hlth** | Zdravstvena oskrba, medicinska oprema, zdravila | 2830-2839, 3693-3693 3840-3859, 8000-8099 |
| **Money** | Finančna dejavnost | 6000-6999 |
| **Other** | Rudarstvo, gradbeništvo, zabava, prevoz, hotelirstvo, poslovne storitve… | |

*Vir: French, http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/, 11.11.2008*

## Priloga 2: Pričakovana donosnost in tveganje 12 portfeljev

Pričakovane donosnosti in standardni odkloni posameznih portfeljev, ki so prikazani na Sliki 1, so izračunani na podlagi mesečnih opazovanj v obdobju od 1.7.1934 do 31.12.2004.

*Slika 1: Pričakovana donosnost in tveganje 12 portfeljev*



**Priloga 3: Optimalne uteži izračunane z uporabo Markowitzevega modela**

V prvem primeru sem portfelj optimizirala tako, da nisem postavila nikakršnih omejitev glede kratkih prodaj. Zaradi ekstremnih negativnih vrednosti nekaterih optimalnih uteži sem optimizacijo izvedla še enkrat, in sicer sem tokrat postavila omejitve (kratke prodaje niso bile dovoljene). Večina portfeljev je v tem primeru dobila utež nič. Velika nasičenost v posameznih sredstvih nasprotuje načelu diverzifikacije, zato bi bila takšna strategija izredno nevarna, saj bi se vlagatelj izpostavil prevelikemu nesistematičnemu tveganju. Pri tretji optimizaciji sem testirala, kako se spremenijo uteži v optimalnem portfelju, če spremenimo pričakovanja glede donosnosti portfelja Enrgy in Shops, in sicer sem predpostavila, da je razlika med portfeljema 5%.

*Tabela 2: Optimalne uteži v primeru treh različnih scenarijev izračunane z uporabo Markowitzevega modela*

| Portfelj | Brez omejitev | Z omejitvami | Spremembe v vhodnih parametrih |
|---|---|---|---|
| **Chems** | 54,85% | 24,25% | 92,79% |
| **Durbl** | 16,48% | 0,00% | 26,17% |
| **Manuf** | 22,25% | 0,00% | 12,09% |
| **Enrgy** | 49,15% | 30,94% | 65,82% |
| **Chems** | -29,65% | 0,00% | -32,50% |
| **BusEq** | 12,05% | 0,00% | 19,37% |
| **Telcm** | 18,34% | 15,73% | 21,80% |
| **Utils** | -2,12% | 0,00% | -14,17% |
| **Shops** | 1,53% | 0,00% | -53,63% |
| **Hlth** | 32,84% | 29,08% | 28,80% |
| **Money** | 17,04% | 0,00% | 23,71% |
| **Other** | -92,78% | 0,00% | -90,25% |

## Priloga 4: Pričakovane donosnosti in optimalne uteži: eno pričakovanje

V Tabeli 3 so povzete pričakovane donosnosti izračunane z uporabo B-L modela pri različnih stopnjah zaupanja v lastno pričakovanje glede donosnosti portfelja Enrgy in Shops. Kadar 100% verjamemo v lastno pričakovanje, je razlika med pričakovanima donosnostma (Enrgy-Manuf) takšna, kot smo jo napovedali. Manjša ko je stopnja zaupanja, manjši so odmiki oziroma razlika med B-L pričakovanimi donosnostmi in ravnotežnimi donosnostmi.

*Tabela 3:Občutljivost B-L pričakovanih donosnosti na spremembe v stopnji zaupanja glede lastnega pričakovanja*

| Portfelj | Stopnja zaupanja v lastno pričakovanje | | | | Ravnotežne donosnosti | Razlika med B-L in ravnotežnimi donosnostmi | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100% | 90% | 68% | 0% | | 100% | 90% | 68% | 0% |
| NoDur | 6,35% | 6,37% | 6,41% | 7,79% | 7,79% | -1,44% | -1,42% | -1,38% | 0,00% |
| Durbl | 9,13% | 9,15% | 9,18% | 10,52% | 10,52% | -1,39% | -1,37% | -1,34% | 0,00% |
| Manuf | 10,30% | 10,31% | 10,33% | 10,91% | 10,91% | -0,61% | -0,60% | -0,58% | 0,00% |
| **Enrgy** | **11,48%** | **11,43%** | **11,34%** | **7,95%** | **7,95%** | **3,53%** | **3,48%** | **3,39%** | **0,00%** |
| Chems | 8,26% | 8,26% | 8,28% | 8,80% | 8,80% | -0,54% | -0,54% | -0,52% | 0,00% |
| BusEq | 10,51% | 10,53% | 10,57% | 11,89% | 11,89% | -1,38% | -1,36% | -1,32% | 0,00% |
| Telcm | 5,24% | 5,25% | 5,27% | 6,21% | 6,21% | -0,97% | -0,96% | -0,94% | 0,00% |
| Utils | 6,87% | 6,86% | 6,86% | 6,62% | 6,62% | 0,25% | 0,24% | 0,24% | 0,00% |
| **Shops** | **6,48%** | **6,53%** | **6,60%** | **9,51%** | **9,51%** | **-3,03%** | **-2,98%** | **-2,91%** | **0,00%** |
| Hlth | 7,38% | 7,40% | 7,42% | 8,34% | 8,34% | -0,96% | -0,94% | -0,92% | 0,00% |
| Money | 9,39% | 9,40% | 9,43% | 10,35% | 10,35% | -0,96% | -0,95% | -0,92% | 0,00% |
| Other | 10,43% | 10,44% | 10,46% | 11,04% | 11,04% | -0,61% | -0,60% | -0,58% | 0,00% |
| Enrgy-Manuf | **5,00%** | **4,90%** | **4,74%** | **-1,56%** | **-1,56%** | - | - | - | - |

V Tabeli 4 so povzete optimalne uteži zgoraj opisanih scenarijev. Kadar je stopnja zaupanja v lastno pričakovanje 100%, je odmik optimalnih uteži od tržnih največji. Nato se postopoma zmanjšuje, vse dokler nismo v lastno pričakovanje popolnoma negotovi. Takrat so optimalne uteži enake tržnim.

*Tabela 4:Občutljivost B-L optimalnih uteži na spremembe v stopnji zaupanja glede lastnega pričakovanja*

| Portfelj | Stopnja zaupanja v lastno pričakovanje | | | | Tržne uteži | Razlika med B-L in tržnimi utežmi | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100% | 90% | 68% | 0% | | 100% | 90% | 68% | 0% |
| NoDur | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Durbl | 1,34% | 1,34% | 1,34% | 1,34% | 1,34% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Manuf | 7,35% | 7,35% | 7,35% | 7,35% | 7,35% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| **Enrgy** | **60,76%** | **59,98%** | **58,59%** | **6,30%** | **6,30%** | **54,46%** | **53,68%** | **52,29%** | **0,00%** |
| Chems | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| BusEq | 16,83% | 16,83% | 16,83% | 16,83% | 16,83% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Telcm | 5,36% | 5,36% | 5,36% | 5,36% | 5,36% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Utils | 3,32% | 3,32% | 3,32% | 3,32% | 3,32% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| **Shops** | **-45,51%** | **-44,73%** | **-43,34%** | **8,95%** | **8,95%** | **-54,46%** | **-53,68%** | **-52,29%** | **0,00%** |
| Hlth | 10,69% | 10,69% | 10,69% | 10,69% | 10,69% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Money | 20,22% | 20,22% | 20,22% | 20,22% | 20,22% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Other | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |

## Priloga 5: Pričakovane donosnosti in optimalne uteži: več pričakovanj

V Tabeli 5 so povzete pričakovane donosnosti izračunane z uporabo B-L modela pri različnih vrednostih $\tau$. Kadar je vrednost $\tau$ blizu nič in je gotovost v apriorno porazdelitev zelo visoka, bodo pričakovane donosnosti zelo malo odstopale od ravnotežnih. Pri višjih vrednostih $\tau$ so razlike med B-L pričakovanimi donosnostmi in ravnotežnimi vse višje, donosnosti pa se vedno bolj približujejo subjektivnim pričakovanjem.

*Tabela 5: Občutljivost B-L pričakovanih donosnosti na spremembe v negotovosti glede apriorne porazdelitve oziroma spremembe v vrednosti $\tau$*

| Portfelj | $\tau$ | | | | Ravnotežne donosnosti | Razlika med B-L in ravnotežnimi donosnostmi | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ~0 | 0,03 | 0,30 | 1,00 | | ~0 | 0,03 | 0,30 | 1,00 |
| NoDur | 7,79% | 11,08% | 11,20% | 11,18% | 7,79% | 0,00% | 3,29% | 3,41% | 3,39% |
| Durbl | 10,52% | 10,10% | 9,92% | 9,76% | 10,52% | 0,00% | -0,42% | -0,60% | -0,76% |
| Manuf | 10,91% | 13,20% | 13,19% | 13,21% | 10,91% | 0,00% | 2,29% | 2,28% | 2,30% |
| Enrgy | 7,95% | 12,65% | 14,96% | 15,32% | 7,95% | 0,00% | 4,70% | 7,01% | 7,37% |
| Chems | 8,80% | 12,21% | 12,76% | 12,83% | 8,80% | 0,00% | 3,41% | 3,96% | 4,03% |
| BusEq | 11,89% | 9,75% | 7,48% | 7,20% | 11,89% | 0,00% | -2,14% | -4,41% | -4,69% |
| Telcm | 6,21% | 7,85% | 7,99% | 8,01% | 6,21% | 0,00% | 1,64% | 1,78% | 1,80% |
| Utils | 6,62% | 5,65% | 5,38% | 4,48% | 6,62% | 0,00% | -0,97% | -1,24% | -2,14% |
| Shops | 9,51% | 9,08% | 8,01% | 7,67% | 9,51% | 0,00% | -0,43% | -1,50% | -1,84% |
| Hlth | 8,34% | 15,29% | 17,34% | 17,57% | 8,34% | 0,00% | 6,95% | 9,00% | 9,23% |
| Money | 10,35% | 14,57% | 14,94% | 14,98% | 10,35% | 0,00% | 4,22% | 4,59% | 4,63% |
| Other | 11,04% | 13,44% | 13,35% | 13,34% | 11,04% | 0,00% | 2,40% | 2,31% | 2,30% |

V Tabeli 6 in 7 so povzete optimalne uteži zgoraj opisanih scenarijev, pri čemer so uteži v Tabeli 7 normalizirane tako, da je njihov seštevek enak 100%. Kadar je vrednost $\tau$ blizu nič in je gotovost v apriorno porazdelitev zelo visoka, bodo optimalne uteži zelo malo odstopale od tržnih. Pri višjih vrednostih $\tau$ se razlika med B-L optimalnimi utežmi in tržnimi povečuje v skladu z lastnimi pričakovanji.

*Tabela 6: Občutljivost B-L optimalnih uteži na spremembe v negotovosti glede apriorne porazdelitve oziroma spremembe v vrednosti $\tau$*

| Portfelj | $\tau$ | | | | Tržne uteži | Razlika med B-L optimalnimi in tržnimi utežmi | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ~0 | 0,03 | 0,30 | 1,00 | | ~0 | 0,03 | 0,30 | 1,00 |
| NoDur | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 5,83% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| Durbl | 1,34% | -5,31% | -8,36% | -8,73% | 1,34% | 0,00% | -6,65% | -9,70% | -10,07% |
| Manuf | 7,35% | 35,11% | 61,22% | 65,36% | 7,35% | 0,00% | 27,76% | 53,87% | 58,01% |
| Enrgy | 6,30% | 29,79% | 51,89% | 55,38% | 6,30% | 0,00% | 23,49% | 45,59% | 49,08% |
| Chems | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 3,19% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| BusEq | 16,83% | -69,53% | -109,25% | -114,08% | 16,83% | 0,00% | -86,36% | -126,08% | -130,91% |
| Telcm | 5,36% | 25,29% | 44,04% | 47,01% | 5,36% | 0,00% | 19,93% | 38,68% | 41,65% |
| Utils | 3,32% | -13,30% | -20,93% | -21,86% | 3,32% | 0,00% | -16,62% | -24,25% | -25,18% |
| Shops | 8,95% | -62,22% | -129,19% | -139,78% | 8,95% | 0,00% | -71,17% | -138,14% | -148,73% |
| Hlth | 10,69% | 121,43% | 172,34% | 178,53% | 10,69% | 0,00% | 110,74% | 161,65% | 167,84% |
| Money | 20,22% | 77,95% | 95,39% | 97,68% | 20,22% | 0,00% | 57,73% | 75,17% | 77,46% |
| Other | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 10,62% | 0,00% | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| **Skupaj** | **100,00%** | **158,85%** | **176,79%** | **179,15%** | **100,00%** | - | - | - | - |

*Tabela 7: Občutljivost B-L optimalnih uteži na spremembe v negotovosti glede apriorne porazdelitve oziroma spremembe v vrednosti $\tau$*

| **Portfelj** | $\tau$ | | | | **Tržne uteži** | **Razlika med B-L optimalnimi in tržnimi utežmi** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **~0** | **0,03** | **0,30** | **1,00** | | **~0** | **0,03** | **0,30** | **1,00** |
| **NoDur** | 5,83% | 3,67% | 3,30% | 3,26% | 5,83% | 0,00% | -2,16% | -2,53% | -2,57% |
| **Durbl** | 1,34% | -3,34% | -4,73% | -4,88% | 1,34% | 0,00% | -4,68% | -6,07% | -6,22% |
| **Manuf** | 7,35% | 22,10% | 34,63% | 36,48% | 7,35% | 0,00% | 14,75% | 27,28% | 29,13% |
| **Enrgy** | 6,30% | 18,75% | 29,35% | 30,91% | 6,30% | 0,00% | 12,45% | 23,05% | 24,61% |
| **Chems** | 3,19% | 2,01% | 1,80% | 1,78% | 3,19% | 0,00% | -1,18% | -1,39% | -1,41% |
| **BusEq** | 16,83% | -43,77% | -61,80% | -63,68% | 16,83% | 0,00% | -60,60% | -78,63% | -80,51% |
| **Telcm** | 5,36% | 15,92% | 24,91% | 26,24% | 5,36% | 0,00% | 10,56% | 19,55% | 20,88% |
| **Utils** | 3,32% | -8,37% | -11,84% | -12,20% | 3,32% | 0,00% | -11,69% | -15,16% | -15,52% |
| **Shops** | 8,95% | -39,17% | -73,07% | -78,03% | 8,95% | 0,00% | -48,12% | -82,02% | -86,98% |
| **Hlth** | 10,69% | 76,44% | 97,48% | 99,66% | 10,69% | 0,00% | 65,75% | 86,79% | 88,97% |
| **Money** | 20,22% | 49,07% | 53,96% | 54,53% | 20,22% | 0,00% | 28,85% | 33,74% | 34,31% |
| **Other** | 10,62% | 6,69% | 6,01% | 5,93% | 10,62% | 0,00% | -3,93% | -4,61% | -4,69% |
| **Skupaj** | **100,00%** | **100,00%** | **100,00%** | **100,00%** | **100,00%** | - | - | - | - |