UNIVERZA V LJUBLJANI

EKONOMSKA FAKULTETA

DIPLOMSKO DELO

AZIJSKE OPCIJE

Ljubljana, maj 2002

IZJAVA

Študent Jure Kapetan izjavljam, da sem avtor tega diplomskega dela, ki sem ga napisal pod mentorstvom dr. Dušana Mramorja, in dovolim objavo diplomskega dela na fakultetnih spletnih straneh.

V Ljubljani, dne

Podpis:

KAZALO

UVOD 1

1 OD ROBERTA BROWNA DO AZIJSKIH OPCIJ 2

1.1 KRATKA ZGODOVINA FINANČNE TEORIJE 2
1.2 OPREDELITEV IN KLASIFIKACIJA EKSOTIČNIH OPCIJ 5
1.2.1 UVOD 5
1.2.2 DEFINICIJA EKSOTIČNIH OPCIJ 6
1.2.3 UPORABA EKSOTIČNIH OPCIJ 8
1.2.4 KLASIFIKACIJA 9
1.2.5 EPILOG 10

2 AZIJSKE OPCIJE 11

2.1 DEFINICIJE 11
2.2 ZNAČILNOSTI 13
2.3 UPORABA (LOGIKA, SMISEL, MOTIV) 17

3 VREDNOTENJE 19

3.1 OSREDNJI PROBLEM 19
3.1.1 PRIMERJAVA MED ARITMETIČNIM IN GEOMETRIJSKIM POVPREČJEM 21
3.2 APO AZIJSKE OPCIJE 22
3.2.1 VORSTOVA APROKSIMACIJA 24
3.2.2 LEVYJEVA APROKSIMACIJA 25
3.2.3 APROKSIMACIJA TURNBULLA IN WAKEMANA 26
3.2.4 ZHANGOVA APROKSIMACIJA 27
3.2.5 UPORABA APROKSIMACIJ 27
3.3 ASO AZIJSKE OPCIJE 28
3.3.1 LINEARNA APROKSIMACIJA BOUAZIZA, BRIYSA IN CROUHYA 29
3.3.2 POPRAVKI CHUNGA, SCHACKLETONA IN WOJAKOWSKEGA 30
3.4 FAO AZIJSKE OPCIJE 31
3.5 AZIJSKE OPCIJE AMERIŠKEGA TIPA 32
3.6 DREVESA 32
3.6.1 HULL IN WHITE 34
3.6.2 CHALASANI, JHA IN VARIKOOTY 38
3.7 MONTE CARLO METODA 40

4 SKLEP 42

LITERATURA 45

VIRI 48

PRILOGA

Naključja so naklonjena pripravljenim.

Louis Pasteur

UVOD

Osnovno zadovoljstvo je – razumeti. [1]

Vsebina diplomskega dela so azijske opcije (ang. "*asian options*"). Gre za podvrsto eksotičnih opcij (ang. "*exotic options*"), ki je zaradi svojih značilnosti zanimiva tako za uporabnike, kot tudi za teoretike, ki se ukvarjajo z njihovim vrednotenjem. Eksotične opcije so se začele hitreje razvijati v devetdesetih letih prejšnjega stoletja in se danes precej pogosto uporabljajo. Njihovo popularnost gre pripisati predvsem zmožnosti, da se lahko z njihovo pomočjo uporabniki ustrezneje (in ceneje) zaščitijo pred tveganji s katerimi se soočajo.[2]

Danes so eksotične opcije pomembni gradniki mednarodnih finančnih trgov. To priznavajo tisti, ki imajo od njih neposredne koristi (npr. investicijske banke), tisti, ki jih uspešno uporabljajo za zmanjševanje izpostavljenosti pred tveganji (npr. podjetja) ter tudi tisti, ki skrbijo za red na finančnih trgih. Kljub zelo hitremu razvoju, so bile eksotične opcije predvsem v preteklosti deležne razmeroma velikega nezaupanja. Glavni razlog je bilo preslabo oz. napačno razumevanje teh kompleksnih finančnih produktov. Do neke mere je prevladovalo mnenje, da so ravno eksotične opcije med glavnimi krivci za splošno povečevanje nestanovitnosti. Skepsa o primernosti eksotičnih opcij ima svoje korenine v dejstvu, da je tudi trgovanje z navadnimi opcijami vse do leta 1973, ko je bila ustanovljena CBOE, veljalo v prvi vrsti za špekulativno.

Azijske opcije so med najbolj popularnimi eksotičnimi opcijami. Pridevnik "azijske" danes ne definira lokacije trgovanja. Kljub temu naj bi ga med prvimi začeli uporabljati v tokijski poslovalnici banke Bankers Trust. Uslužbenci te banke so tovrstne opcije prodajali tamkajšnjim podjetjem, ki so želela zavarovati svoje devizne pozicije. Spadajo med opcije, katerih vrednost je odvisna od gibanja osnovnega instrumenta v nekem obdobju in ne zgolj od vrednosti le-tega ob dospetju (ang. "*path-dependency*"). Ta dodatna spremenljivka je v primeru azijskih opcij povprečna vrednost cen osnovnega instrumenta (v nadaljevanju povprečje) v opazovanem obdobju. Splošno naj bi veljalo, da je pri opcijah, pri katerih je zavarovanje (ang. "*hedging*") enostavno, zapleteno prav njihovo vrednotenje. Omenjeno zelo dobro opiše azijske opcije, posebej v primeru, ko imamo opravka z opcijo na podlagi aritmetičnega povprečja (aritmetična azijska opcija). Izkaže se, da za take opcije doslej ni bilo mogoče izpeljati analitične formule kot je to npr. možno za navadno evropsko opcijo. Preostanejo numerične metode in različne aproksimacije.

Teorija, ki je v ozadju vrednotenja azijskih (tudi navadnih) opcij, temelji na odkritju botanika Roberta Browna iz leta 1828 (nekateri viri navajajo leto 1827). Ključni rezultat, ki ga uporablja se imenuje Brownovo gibanje, pri tem pa se izdatno opira na postopke, ki so sicer bolj običajni v fiziki, pri matematičnem opisovanju fizikalnih pojavov. Kljub temu posamezni avtorji svetujejo, da gre predpostavko o "znanstveni" teoriji vrednotenja opcij jemati z rezervo, saj naj bi bila le-ta premlada, da bi bila dovolj zanesljiva (Taleb, 1997). Tudi McGoun (2000) npr. opozarja na nevarnost pristranskosti, do katere lahko pride že pri začetnem postavljanju predpostavk in hipotez in zaradi katerih lahko pridemo do rezultatov, ki smo jih želeli, čeprav so le-ti izkrivljeni in niso nujno dober približek dejanskega stanja.

[1] Paul Krugman [URL: http://www.wws.princeton.edu/~pkrugman/howiwork.html].
[2] Izhajam iz teze, da je prvotni namen opcij zavarovanje pred tveganji in ne špekuliranje.

Pomembno je, da se vseskozi zavedamo kaj modeli (teorija) so in da nanje gledamo kot na približke dejanskemu stanju. To velja tudi za Brownovo gibanje.

Diplomsko delo je sestavljeno iz treh delov. V prvem delu začnem s kratkim kronološkim pregledom razvoja finančne teorije in opišem, kako je nastajala teorija vrednotenja opcij ter evolucijo, ki je v končni fazi pripeljala do eksotičnih oz. azijskih opcij. Ker je to conditio sine qua non za ustrezno razumevanje področja, ki ga obdelujem v diplomskem delu, poskušam dosledno navajati tudi najpomembnejše avtorje. Prvi del nadaljujem z opisom vzrokov, ki so botrovali nastanku eksotičnih opcij. Poleg tega jih opredelim, opišem njihove glavne značilnosti in navedem osnovne razloge, ki govorijo v prid njihove uporabe, podam pregled potencialnih nevarnosti pri njihovi uporabi ter jih ustrezno klasificiram. To je pomembno, saj se večina opisanega neposredno nanaša tudi na azijske opcije. Na koncu azijske opcije ustrezno uvrstim.

V drugem delu se natančneje posvečam opredelitvi in definiciji različnih vrst azijskih opcij, predstavitvi smisla oz. logike njihove uporabe (tudi s praktičnimi primeri) ter njihovih glavnih značilnosti, kar je izhodišče za vrednotenje, ki ga obravnavam v tretjem delu. V njem najprej natančno predstavim osrednji problem pri vrednotenju azijskih opcij, ki je osnova za opis različnih metod vrednotenja. Opisujem jih po vrsti, glede na čas njihovega nastanka. Ukvarjam se z geometrijskimi azijskimi opcijami in z aproksimacijami za aritmetične azijske opcije. Na dveh različnih pristopih prikažem tudi vrednotenje azijskih opcij s pomočjo dreves ter na koncu na kratko opišem še njihovo vrednotenje s pomočjo Monte Carlo metode.

Diplomsko delo sklenem z glavnimi ugotovitvami in slovarjem uporabljenih izrazov (v prilogi).

1 OD ROBERTA BROWNA DO AZIJSKIH OPCIJ

V zgodnjih petdesetih letih prejšnjega stoletja sem zasledil do takrat nepoznano knjigo, ki je gnila v knjižnici Univerze v Parizu. Ko sem jo odprl, sem dobil občutek, da imam pred sabo čisto nov svet. Med branjem sem se dogovoril za prevod v angleščino, saj sem želel razumeti prav vsak delček tega bisera.[3]

1.1 KRATKA ZGODOVINA FINANČNE TEORIJE

Začel je botanik, ki je v prvi tretjini 19. stoletja opazoval nepravilno gibanje delcev v tekočini čeprav verjetno ni pomislil, da bi lahko njegovo odkritje, ki ga danes poznamo kot Brownovo gibanje, s pridom uporabljali v finančni teoriji. Pod mentorstvom Henrija Poincareja je Louis Bachelier leta 1900 doktoriral. Njegova disertacija (*Théorie de la Spéculation*; prevod omenjenega dela v angleški jezik je mogoče najti v Cootner (1964)) je bila izjemna vsaj zaradi ene stvari in je pomenila velik korak naprej pri uporabi teorije verjetnosti v analizi finančnih trgov. Kot prvi je poskušal matematično, na osnovi konceptov teorije verjetnosti, opisati gibanje (dinamiko) cen delnic ($S = (S_t)_{t \geq 0}$), ki so takrat kotirale na borzi v Parizu. Pri oblikovanju modela gibanja cen delnic si je pomagal z Brownovim gibanjem.[4] Gre za zvezen slučajni proces, katerega prirastki so homogeni, med seboj neodvisni in normalno porazdeljeni. Začel je s preprosto predpostavko, da so najboljša napoved jutrišnjih cen

[3] Paul Samuelson o Bachelierjevi disertaciji. Povzeto po P. Boyle, F. Boyle (2001, str. 74).
[4] Uporabil je aritmetično Brownovo gibanje, pri katerem so prirastki konstantni in izraženi v denarni enoti.

današnje cene. Odnos $S = (S_t)_{t \geq 0}$ je obravnaval kot slučajni (stohastični)[5] proces. Pod drobnogled je vzel cene delnic $S^{(\Delta)} = S^{(\Delta)}_{k\Delta}$, katerih vrednost se spreminja na časovnih intervalih *0, Δ, 2Δ, …*, tako, da velja $S^{(\Delta)}_{k\Delta} = S_0 + \xi_\Delta + \xi_{2\Delta} + ... + \xi_{k\Delta}$, kjer so $\xi_{i\Delta}$ neodvisno identično porazdeljene slučajne spremeljivke, ki obsegajo vrednosti $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ in imajo verjetnost ½. Iz omenjenega sledi, da je aritmetična sredina $S^{(\Delta)}_{k\Delta}$ enaka S_0 (diference $\left|S^{(\Delta)}_{k\Delta} - S^{(\Delta)}_{(k-1)\Delta}\right|$ imajo povprečje (statistično) nič), varianca pa $\sigma(k\Delta)$. Če velja $k = \left(\frac{t}{\Delta}\right)$, $t > 0$, ima proces $S = (S_t)_{t \geq 0}$, ko je $S_t = \lim_{\Delta \to 0} S^{(\Delta)}_{\left(\frac{t}{\Delta}\right)\Delta}$ obliko $S_t = S_0 + \sigma W_t$[6], kjer je W_t standardno Brownovo gibanje oz. Wienerjev proces.[7] Na podlagi povedanega je izpeljal tudi formulo za ceno opcije, ki je bila nekakšen predhodnik Black-Scholesove enačbe (Shiryaev, 1999, str. 736). Glavna pomanjkljivost njegovega linearnega modela je, da lahko cene delnic S_t zavzamejo tudi negativne vrednosti, zato je uporaben zgolj za določene nivoje cen in za (zelo) kratka časovna obdobja.[8]

Poleg Bachelierja so se v 20. stoletju z vprašanjem obnašanja finančnih trgov ukvarjali tudi mnogi drugi.[9] Zanimalo jih je delovanje različnih trgov v pogojih negotovosti, oblikovanje cen (sprva dobrin in šele kasneje vrednostnih papirjev) in njihovo spreminjanje v času ter morebitna zmožnost njihovega napovedovanja. Porajalo se je tudi vprašanje tveganj na teh trgih. V tridesetih letih so se predvsem statistiki ukvarjali z vprašanjem morebitne predvidljivosti gibanja cen v prihodnosti na podlagi dejanskih (empiričnih) zgodovinskih podatkov. Prevladovalo je prepričanje, da se cene delnic gibljejo v določenih ciklih, da sledijo trendom in da je za napovedovanje njihovega gibanja v prihodnosti potrebno tovrstne značilnosti le identificirati.[10] Do večjih sprememb je prišlo v začetku petdesetih let prejšnjega stoletja. Eden prvih, ki so se ukvarjali s finančno teorijo v pogojih *negotovosti*, je bil Harry Markowitz, ki je leta že 1952 opozoril na pomen tveganja, ki ga z diverzifikacijo ni mogoče odpraviti (sistematično tveganje).[11] To seveda ne pomeni, da se tovrstnemu tveganju ni mogoče vsaj deloma "upreti". Ravno to je raison d'être izvedenih finančnih instrumentov. Nevtralizacija sistematičnega tveganja je osnovni namen zavarovanja pred tveganji. Bistveno je, da instrumenti, ki jih pri tem uporabljamo, upoštevajo slučajne spremembe cen v prihodnosti. Leta 1953 se je tudi M. Kendall osredotočil na vprašanje predvidljivosti gibanja cen delnic. Zanimalo ga je, če je mogoče s stohastičnimi procesi opisati dinamiko gibanja cen, ki so se sicer prosto oblikovale na trgih. S pomočjo statističnih metod je želel odkriti morebitno ciklično gibanje cen delnic in dobrin oz. določene zakonitosti v njihovem gibanju.

[5] Čibej (1998) stohastiko definira kot kombinacijo metod verjetnostnega računa in metod statističnega sklepanja.
[6] Bolj splošen zapis na desni strani vsebuje še pričakovani prirastek cene delnice, ki se ne spreminja (ang. "*drift*"; običajno ga označimo kot μ, tako, da bi prišteli μt).
[7] Norbert Wiener je leta 1923 predstavil rigorozno matematično izpejavo konceptov teorije, ki tvorijo jedro ugotovitev R. Browna. Še prej (leta 1905) je Albert Einstein razvil ustrezni model tega fizikalnega pojava. Aritmetična sredina procesa W_t je 0, varianca t, njegovi prirastki pa so med seboj neodvisni. Oba izraza sta sicer ekvivalentna.
[8] Uporabil je cene delnic in ne njihove logaritme cen (oz. donosnosti), kot je primer pri geometrijskem Brownovem gibanju. Zanj je značilno, da so pričakovani konstantni prirastki, izraženi relativno (v procentih). Posledično se nestanovitnost (merjeno v denarni enoti) poveča pri višjih cenah in obratno, ko cene padejo. To preprečuje negativne cene.
[9] Podrobno (z doslednim navajanjem originalnih avtorjev) o finančni teoriji in njeni zgodovini piše Shiryaev (1999).
[10] Verjetno posledica nepoznavanja teorije in zanemarjanje Bachelierja (s podobnimi razpravami in prepričanji se srečujemo tudi danes).
[11] Dober opis njegovega dela in nadaljnjega razvoja na podlagi njegovih idej lahko najdemo v Mramor (2000).

Sodeč po njegovi reakciji, je bil nad rezultati presenečen celo sam. Posamezne serije podatkov (cen) naj bi izgledale kot, da:"*…je sam hudič izbral slučajno vrednost in jo dodal trenutni ceni ter tako dobil naslednjo ceno...*" (Shiryaev, 1999, str. 38). Do enakih zaključkov je leta 1959 prišel tudi M.F.M. Osborne. Metode, ki jih je uporabljal v statistiki in fiziki, je želel preizkusiti na bolj "zemeljskih" stvareh, kot so cene delnic. Ugotovil je, da Brownovemu gibanju ne sledijo cene delnic, kar je bilo izhodišče Bachelierjeve analize, temveč njihovi logaritmi (logaritmi donosnosti). Ta zvezni slučajni proces (opišemo ga lahko kot vsoto med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk) lahko formalno zapišemo tudi kot $S_n = S_0 e^{H_n}$ (za $n \geq 1$), pri čemer velja $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, H_n pa je vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk h_1, ..., h_n. Njihove ideje je leta 1965 razvil P. Samuelson, ki je v finančno teorijo in prakso vpeljal geometrijsko (ekonomsko) Brownovo gibanje. Cene delnic naj bi se gibale v skladu s procesom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \qquad (1.1.).$$[12]

Ugotovil je, da bi morale biti cene delnic na konkurenčnih trgih vrednostnih papirjev martingali (slučajne spremenljivke, katerih prihodnje variacije (gibanje) so glede na dane informacije popolnoma nepredvidljive). V času *t* je ceno delnice zapisal kot

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \qquad (1.2.),$$

za $t \geq 0$, kjer je W_t Wienerjev proces. Enačbi (1.1.) oz. (1.2.) se danes splošno uporabljata za prikaz procesa, ki mu sledi osnovni instrument, ki je osnova za nek izvedeni finančni instrument. Pri tem je potrebno upoštevati dejstvo, da je stohastični opis (dela) realnega sveta vedno samo njegov model in je zato nujno samo njegov približek oz. poenostavljen matematični prikaz, ki običajno vključuje tisto, kar je za avtorja modela najpomembnejše (Čibej, 1998, str. 49). Kant naj bi dejal, da modeli, ki jih ustvarja človek ne delujejo dobro zato, ker bi odražali kakšno osnovno resnico o zunanjem svetu, temveč zato, ker je to edini način, da jo človek razume. Zanimivo je, da danes empirični podatki kažejo, da cene delnic sistematično odstopajo od tistih, ki bi jih lahko pričakovali na podlagi geometrijskega Brownovega gibanja.[13] Kljub temu je model zaradi svojih lastnosti splošno sprejet.

Zelo pomembno je ozadje omenjenih odkritij. Teorija učinkovitih trgov kapitala poenostavljeno govori o tem, da cene delnic odražajo vse informacije, takoj ko se le-te pojavijo. Spreminjale naj bi se le ob novih, nenadnih, nepričakovanih informacijah, ki v določenem trenutku postanejo dostopne na trgu. Investitorji verjamejo, da so cene pravične, saj vsi ravnajo podobno – racionalno.[14] Omenjeno je v skladu s tezo, da se cene gibljejo slučajno (cena je vsota slučajnih sprememb) in posplošitve v smislu martingalov (najboljša možna jutrišnja napoved so današnje cene). To torej pomeni, da je učinkovit trg martingal. Poleg tega po definiciji na racionalnih (pravičnih) trgih ni možnosti za arbitražo, kar je osrednja predpostavka teorije vrednotenja opcij. Trg, kjer možnosti za arbitražo ni, (kjer torej ni mogoče ustvariti netveganih dobičkov) je racionalen in učinkovit. Matematično to torej

---

[12] μ je pričakovana donosnost delnice oz. prirastek njene vrednosti (ang. "*drfit*"), σ nestanovitnost, *S* cena osnovnega instrumenta, *W* pa Wienerjev proces.
[13] Več o kritikah uporabe geometrijskega Brownovega gibanja lahko najdemo v Bouchaud, Potters (2000).
[14] O konceptu racionalnosti več v eseju M. Rubinsteina (2000).

pomeni, da so (diskontirane) cene delnic martingali, kar je ugotovil že P. Samuelson. Če torej naše najboljše napovedi za prihodnost temeljijo zgolj na informacijah, ki jih poznamo danes, to pomeni, da je najboljša napoved za jutrišnje (prihodnje) cene oz. vrednosti, ki jo lahko naredimo danes, trivialna (enaka je današnjim cenam).[15] Iz te ugotovitve je izhajal tudi Bachelier.

Vrhunec je opisana teorija dosegla leta 1973, ko sta bila objavljena dva izredno pomembna članka, ki danes predstavljata temelj in izhodišče vsej teoriji vrednotenja opcij.[16] Osnovna teza obeh je bila, da je racionalna cena opcije enaka minimalnemu potrebnemu znesku, ki omogoča izdajatelju opcije oblikovanje netveganega premoženja s katerim se lahko zavaruje. 14. oktobra 1997 sta bila M. Scholes in R.C. Merton (F. Black je umrl že pred tem) za izjemne dosežke nagrajena z Nobelovo nagrado za ekonomijo in ob tej priložnosti je tednik *The Economist* zapisal: "*Ekonomisti se včasih zdijo enako (ne)koristni kot čokoladni vrček za čaj, vendar letošnja Nobelova nagrada za ekonomijo dokazuje, da temu ni vedno tako.*" (Marsh, Kobayashi, 1998, str. 2).

1.2 OPREDELITEV IN KLASIFIKACIJA EKSOTIČNIH OPCIJ

Z izvedenimi finančnimi instrumenti lahko oblikujemo kakršnokoli strukturo finančnega izida. Če jo znamo narisati oz. opisati, bo nekdo izumil instrument, ki bo tak finančni izid omogočil.

Fischer Black[17]

1.2.1 Uvod

V diplomskem delu se z navadnimi opcijami (ang. "*plain vanilla*") ne bom posebej ukvarjal.[18] Pridevnik *eksotične* bo opredeljeval opcije, ki so predmet tega diplomskega dela.

Izvedeni finančni instrumenti so osrednje orodje pri zavarovanju pred različnimi vrstami tveganj že od začetka sedemdesetih let prejšnjega stoletja. Navadne opcije so bile osnovni predstavnik te prve generacije izvedenih finančnih instrumentov. Ko so sčasoma finančni trgi postajali bolj kompleksni, so postale preveč rigiden instrument. Glavne omejitve teh opcij lahko povzamemo v nekaj točkah (Zhang, 1998, str. 6):

- en osnovni instrument,
- začetek pogodbe (opcije) je vedno v sedanjosti,
- na finančni izid vpliva le cena osnovnega instrumenta ob dospetju opcije,
- pri nakupu opcije je vedno takoj jasno ali gre za nakupno ali za prodajno opcijo.

Po odprtju organiziranih borz (CBOE, CBOT, ...), specializiranih za trgovanje z opcijami, je trg navadnih opcij prešel v fazo zrelosti. Trgovanje z navadnimi opcijami je postajalo vse bolj

[15] Podrobnosti tu ne navajam. Več o temi si lahko zainteresirani bralec prebere npr. v Hull (2000) oz. Shiryaev (1999).
[16] Black Fischer, Scholes Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81 (1973), 3, str. 637-659 in Merton C. Robert: Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, št. 4, str. 141-183.
[17] Zhang (1998, str. VII).
[18] Bralec lahko o njih po mojem mnenju največ izve v Hull (2000), Wilmott (2000), Čopič (1997), Neftci (2000) in Baxter, Rennie (1999).

transparentno in dosegljivo širšemu krogu investitorjev. Poleg tega je okolje postajalo vse bolj kompleksno (povečevala se je nestanovitnost, spreminjala se je struktura izpostavljenosti) in pojavila se je potreba po drugačni vrsti zavarovanja s pomočjo opcij. Zato se je razvoj usmeril v opcije, ki bi bolj ustrezale zahtevam uporabnikov. Finančne institucije so začele iskati alternativne oblike opcij, s katerimi bi bilo mogoče zadovoljiti specifične potrebe strank in ki bi hkrati povečale obseg trgovanja z njimi. Te "nove" opcije naj bi bolj ustrezale posebnim potrebam finančnih investitorjev – bile naj bi ukrojene po meri uporabnikov oz. le-tem prilagojene (ang. "*customer tailored*", tudi "*customized*"). Želene finančne izide iz naslova trgovanja z opcijami so sprva replicirali sintetično, z linearnimi kombinacijami navadnih opcij, kar je bilo pogosto (pre)drago. Na temeljih originalne teorije vrednotenja opcij so nastali novi produkti, ki so omogočali boljše zavarovanje pred tveganji tudi na bolj nestanovitnih trgih. Za razvoj eksotičnih opcij je bilo zelo pomembno, da so bile v primerjavi z različnimi kombinacijami navadnih opcij razmeroma poceni. Del trgovanja z opcijami se je (ponovno) preselil na OTC trge, kjer so začeli trgovati z opcijami, ki se danes imenujejo eksotične. Vzporedno s tem, je na področje finančne teorije začelo vstopati čedalje več ljudi iz tehničnih znanosti. Pomembnejše vzroke za evolucijo eksotičnih opcij in glavne dejavnike, ki lahko motivirajo njihovo uporabo lahko povzamemo v nekaj točkah (Nelken, 1996, str. 7):

- večja sposobnost finančnih institucij, da ustvarjajo finančne instrumente z bolj zapletenimi strukturami finančnih izidov, kot posledica razvoja finančnega inženiringa;
- cenovno so eksotične opcije običajno bolj ugodne kot različne kombinacije navadnih opcij;
- večja fleksibilnost (tudi če eksotična opcija z želenim finančnim izidom ne obstaja, jo je vedno mogoče iznajti);
- potreba potencialnih uporabnikov po bolj dovršenih orodjih za upravljanje s tveganji;
- konkurenca med akterji na finančnih trgih (v smislu: če zmorejo oni, zmoremo tudi mi);
- želja po večji donosnosti tam, kjer so obrestne mere nizke.

Zhang (1998, str. 660-662) dodaja tudi (sprva) nekoliko pomanjkljivo regulacijo in boljšo možnost odzivanja na tržne spremembe pri upravljanju s premoženjem. V enem stavku lahko povzamemo (Bouaziz, Briys, Crouhy, 1994): "*Deregulacija na področju finančnih storitev, konkurenčni pritiski, odsotnost patentov za finančne produkte*[19] *in zmožnost posnemanja storitev konkurentov – vse to finančne institucije nenehno sili k iskanju optimalnega izvedenega finančnega instrumenta.*"

1.2.2 Definicija eksotičnih opcij

Eksotične opcije so podobne pornografski literaturi. Včasih jih ni mogoče definirati, vendar jih lahko prepoznamo, ko jih vidimo. Poleg tega je njihova definicija odvisna od specifičnih trenutnih razmer (časa in kraja). Necenzurirana verzija romana D.H. Lawrence-a "Lady Chatterly's Lover" je bila v Firencah na voljo že leta 1928, v Londonu pa šele leta 1960."

William Margrabe[20]

Če navadne opcije imenujemo opcije prve generacije, so eksotične *opcije druge generacije*. Imenujemo jih tudi opcije za posebne namene (ang. "*special-purpose*" ali preprosteje

[19] O najnovejšem na tem področju glej Lerner (2000).
[20] Povzeto po zbirki DerivaQuote.

"*custom*"). Vsaka vrsta eksotičnih opcij služi določenemu, posebnemu namenu, ko bi bila uporaba navadnih opcij običajno neprimerna in predraga. Hull (2000, str. 458) definira eksotične opcije *kot izvedene finančne instrumente, pri katerih so možni bolj zapleteni in prilagodljivejši finančni izidi kot pri standardnih (evropskih in ameriških) opcijah*. Namenjene so specifičnim potrebam uporabnikov, so bolj fleksibilne, z njimi pa se večinoma trguje na OTC trgih. Ker so ukrojene po meri, naj bi bolj učinkovito prenašale tveganje med kupci in prodajalci in jim zato lahko rečemo tudi instrumenti za upravljanje s tveganji (ang. "*risk management products*", Zhang, 1998, str. XIII).

Eksotične opcije obstajajo več kot 30 let. "*Down-and-out*" nakupne opcije (spadajo med opcije z mejo, ang. "*barrier options*") naj bi bile v ZDA na voljo že od leta 1967. kjer naj bi se z njimi trgovalo na OTC trgih (Nelken, 1996, str. 4). Že leta 1970 naj bi jih začela uporabljati investicijska banka Donaldson, Lufkin and Jenrette. Prvi strokovni članek o eksotičnih opcijah je bil napisan leta 1969. Štiri leta pred odprtjem CBOE je G. L. Snyder s člankom *Alternative Forms of Options* kot prvi začel z resnejšo obravnavno tovrstnih izvedenih finančnih instrumentov. Osredotočil se je ravno na "*down-and-out*" opcije, čeprav je sam uporabil izraz "*limited-risk special options*" (Zhang, 1998, str. 9). Kljub temu naj bi se pridevnik *eksotične* prvič pojavil v seriji člankov M. Rubinsteina in E. Reinerja v reviji *RISK* v letih 1990-1992. Ti članki so bili kasneje izdani v obliki monografije z naslovom *Exotic Options* (zadnja verzija, ki jo uporabljam tudi v tem delu je iz maja 1992).[21] Bila sta prva, ki sta eksotične opcije bolj natančno sistemizirala in za njihovo vrednotenje uporabila serijo modelov, ki so temeljili na Black-Scholesovi enačbi.

V smiselnost razvoja in obstoja eksotičnih opcij so sprva mnogi dvomili, zato je trgovanje z njimi postalo bolj aktivno ravno v letih, ko sta omenjena avtorja začela objavljati svoje članke, ki so doživeli velik odziv v akademski sferi in končno tudi med uporabniki v finančni industriji. Kljub temu zavest o tveganjih med uporabniki teh kompleksnejših instrumentov, ni bila ustrezno razvita. Razmere, v katerih je potekal razvoj eksotičnih opcij v tistem času lahko ponazorim s sloganom nekega oglasa, v katerem so investitorjem ponujali široko paleto, po meri ukrojenih opcij: "*Povejte, kakšno opcijo želite. Izdali jo bomo.*" (povzeto po Rubinstein, 1992, str. 1). Kot bomo videli kasneje, se je na začetku devetdesetih let začela tudi bolj natančna obravnava in razvoj azijskih opcij. Glavne značilnosti eksotičnih opcij so naslednje (Nelken, 1999, str. 5-6):

- zapletena struktura oz. nelinearnost finančnih izidov (vrednost delte[22] je pri navadni opciji vedno med 0 in 1, pri eksotičnih opcijah pa lahko njena vrednost zavzema ekstremne pozitivne ali negativne vrednosti oz. z drugimi besedami: ekstremno se spreminja tudi gama); [23]

---

[21]V Nelken (1996, str. 4-5) je podan seznam strokovnih člankov, ki obravnavajo različne vrste eksotičnih opcij že pred letom 1990.

[22]*Delta* je definirana kot prvi odvod vrednosti opcije glede na vrednost osnovnega isntrumenta. Meri spremembo (v %) vrednosti opcije zaradi spremembe vrednosti osnovnega isntrumenta. *Gama* je definirana kot drugi odvod vrednosti opcije, glede na vrednost osnovnega instrumenta. Meri občutljivost delte na spremembe vrednosti osnovnega instrumenta. Kaže, kako hitro postanemo nezavarovani, o se spreminja cena osnovnega instrumenta. *Vega* je definirana kot prvi odvod vrednosti opcije, glede na nestanovitnost osnovnega instrumenta. Meri občutljivost vrednosti opcije na spremembo nestanovitnosti osnovnega instrumenta.

[23] Zato je vpliv eksotičnih opcij na trg osnovnega instrumenta večji kot pri navadnih opcijah. Imamo npr. opcijo z dvojno mejo, vrednost osnovnega instrumenta je blizu meje, smo blizu dospetja opcije. Nekdo, ki je tako opcijo prodal se sooča z veliko vrednostjo delte (Nelken, 199, str. 170, prikaže primer, ko je le-ta 1000 %). Še huje je, če je delta negativna, tako da mora prodajalec kupiti ustrezno količino osnovnega instrumenta. Poleg tega, da gre običajno za velike zneske, s svojimi nakupi uporabnik podpira ceno osnovnega instrumenta (čeprav želi, da bi cena padla in bi opcija postala ničlna). To se odrazi na promptni ceni osnovnega instrumenta.

- težje vrednotenje in zavarovanje pozicij;
- ker so namenjene točno določenemu krogu uporabnikov s specifičnimi željami, je običajno promet z njimi nizek (zapiranje pozicij na sekundarnem trgu ni vedno mogoče[24]);
- eksotične opcije so specifični izvedeni instrumenti, zato moramo pred nakupom le-teh poznati več parametrov kot pri navadnih opcijah (sami moramo določiti izvršilno ceno, morebitne meje ipd.);
- večina investitorjev ima dolge pozicije (prodajalci pa nasprotno, zgolj kratke).

1.2.3 Uporaba eksotičnih opcij

Eksotične opcije se pogosto uporablja na trgih dobrin, deviznih trgih, trgih vrednostnih papirjev (delnice, vrednostni papirji s fiksnimi donosi), energetskih trgih ipd. V diplomskem delu bom s primeri v nadaljevanju predstavil le uporabo azijskih opcij (primere uporabe ostalih eksotičnih opcij je mogoče najti v Nelken, 1996, str. 48-50 in 102-119), na tem mestu pa se bom bolj posvetil odgovoru na vprašanje, kdaj uporabljati eksotične opcije oz. natančneje, kateri so tisti potrebni pogoji, ki morajo biti pri tem izpolnjeni. Sledijo nekatera osnovna izhodišča.

Kot posledica nekaterih medijsko odmevnejših stečajev, ki jim je botrovala uporaba izvedenih finančnih instrumentov, so njihovi uporabniki postali previdnejši. Tisti, ki so še pred leti slepo uporabljali novosti, so svoj "umik" argumentirali s tem, da je eksotičnost zavoljo le-te same, zgolj zgodovina. Eksotične opcije finančni investitorji navadno uporabljajo v dveh primerih. Tisti, ki so izpostavljeni kompleksnim tveganjem, lahko le-ta učinkovito zavarujejo (z njimi upravljajo). Poleg tega omogočajo natančno oblikovanje želenih (posebnih) pozicij. Izraz *eksotične* zato ni nujno najbolj ustrezen, čeprav nakazuje, da tovrstni produkti niso namenjeni vsem udeležencem finančnih trgov (predpogoj je ustrezno poznavanje osnovnih izvedenih finančnih instrumentov). Leta 1993 je skupina G-30[25] izdelala študijo z naslovom *Derivatives: Practices and Principles* (http://risk.ifci.ch/136160.htm). V tej obsežni študiji je mogoče najti različne smernice in priporočila, ki naj bi jih upoštevali vsi uporabniki izvedenih finančnih instrumentov, predvsem pa tisti, ki se ukvarjajo z eksotičnimi opcijami. V nadaljevanju navajam le nekatere ključne poudarke:

- Potrebno je razumevanje tveganja, ki je povezano z uporabo posameznega instrumenta. O tveganjih je potrebno seznaniti vse, ki pri transakciji sodelujejo.
- Razumevanje tveganja mora preseči zgolj osnovno poznavanje opcijskih mer občutljivosti (delt, gam ipd.) in mora upoštevati celo vrsto možnih tržnih scenarijev.
- Eksotični izvedeni instrument mora omogočati odpiranje specifičnih (in želenih) pozicij.
- Poznati moramo davčne in računovodske implikacije uporabe tovrstnih instrumentov.
- Pred uporabo moramo za različne možne scenarije izvesti simulacije, ki nam pomagajo oceniti morebitne izgube in zanje oblikovati ustrezne rezervacije.
- Dodatna korist, ki jo imamo z uporabo eksotične pozicije, mora biti večja od stroškov vzpostavitve le-te.

---

[24] Običajno so jo sicer vzdrževalci likvidnosti (ang. "*market makers*") pripravljeni odkupiti, vendar po ceni, ki za nas ni ugodna.
[25] www.group30.org.

Eksotične opcije lahko primerjamo z elektriko. Če jih uporabljamo v prave namene ter na pravi način so izjemno koristne. V nasprotnem primeru so lahko posledice tragične.[26] Možnosti uporabe posameznih eksotičnih opcij in njihovih medsebojnih kombinacij so neskončne. Osrednji motivi so *večanje donosnosti, boljša zaščita pred tveganji*, ki je bolje prilagojena strukturi izpostavljenosti uporabnika in *zniževanje stroškov* zavarovanja (premije, ki jih plačamo za enako zaščito so nižje kot pri kombinacijah običajnih opcij).

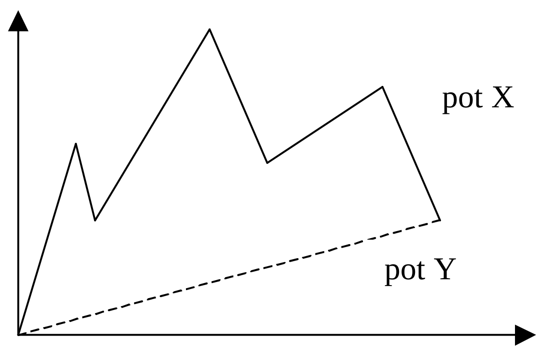
1.2.4 Klasifikacija

Ker uporabniki eksotičnih izvedenih finančnih instrumentov nenehno težijo k čim večji prilagodljivosti le-teh lastnim potrebam, vedno znova nastajajo nove vrste eksotičnih opcij. Njihova natančna klasifikacija bi bila torej nemogoča (in verjetno tudi nesmiselna). Prikazal bom enega od načinov, ki je razmeroma preprost, a zadosten za umestitev azijskih opcij. Zhang (1998) eksotične opcije deli v tri skupine: [27]

- opcije odvisne od celotne poti oz. gibanja osnovnega instrumenta (ang. "*path-dependent*"),
- opcije, ki so napisane na več instrumentov (ang. "*multiasset*" oz. "*correlation*" opcije)[28] in
- druge eksotične opcije.

Podrobno bom opisal le prvo skupino, kamor sodijo azijske opcije. Če na ceno navadnih opcij gibanje vrednosti osnovnega instrumenta v življenjski dobi opcije (neposredno) ne vpliva in je pomembna le vrednost osnovnega instrumenta ob dospetju, je glavna lastnost "*path-dependent*" opcij ravno v tem, da je njihova vrednost odvisna od poti, ki ji sledi osnovni instrument (oz. vsaj še od ene vrednosti v življenjski dobi opcije). Opcija z mejo (ang. "*barrier option*") lahko npr. postane nična, če v opazovanem obdobju pred dospetjem opcije, vrednost osnovnega instrumenta preseže neko raven. Bistvo tovrstnih opcij je v tem, da je njihova vrednost (in tudi veljavnost) neposredno odvisna od gibanja cen osnovnega instrumenta v nekem obdobju in ne zgolj od vrednosti ob dospetju opcije (slika 1).

Slika 1: Dve različni poti (X, Y), ki vodita do iste končne vrednosti



Vir: Lasten prikaz.

[26] O vprašanjih zavarovanja pred tveganji pri uporabi eksotičnih opcij obširno piše Taleb (1997).

[27] Rubinstein (1992) eksotičnih opcij ne deli glede na njihove značilnosti, temveč omenja 11 različnih vrst opcij, (tudi azijske). Bolj natančen je Nelken (1996, str. 10-44), ki eksotične opcije razvršča po njihovih značilnostih.

[28] Na vrednost takih opcij ob dospetju in na finančni izid (dobiček ali izgubo) vplivata vsaj dva instrumenta. Pri tem ni pomembno, ali gre pri osnovnih instrumentih za enako vrst sredstev (npr. dve delnici) ali pa so le-ti različni (ang. "*cross-asset*"). Ključno vlogo imajo korelacijski koeficienti med posameznimi osnovnimi instrumenti (od tod tudi ime opcij).

Obe poti na sliki 1 sicer vodita do iste končne vrednosti, vendar je pot Y precej bolj stanovitna. Opcija, ki bila napisana na instrument, ki bi se gibal v skladu z njo, bi bila cenejša od tiste, ki bi bila napisana na instrument, ki bi sledil poti X. Pot Y je v resnici manj verjetna, vendar lahko z uporabo azijskih opcij pridemo do podobno "gladke" poti.

Opcije, ki so odvisne od gibanja osnovnega instrumenta, lahko delimo še naprej in sicer na tiste, ki so od poti (gibanja) osnovnega instrumenta

- šibko odvisne (ang. "*weak*" ali "*soft path-dependent*", tudi "*memoryless*") in
- močno odvisne (ang. "*strong*" ali "*hard path-dependent*", tudi "*strong memory*").

Vrednost prvih lahko splošno zapišemo kot *V(S, t)*, kar pomeni, da nanjo vpliva le vrednost osnovnega instrumenta (*S*) in čas (*t*). Za vrednotenje teh opcij je pomembna zgolj informacija o ravni osnovnega instrumenta v določenem obdobju (npr. ali je osnovni instrument dosegel neko raven – posamično vrednost). Mednje sodijo opcije z mejo (ang. "*barrier options*").

Azijske opcije sodijo v drugo skupino. Njihova vrednost je, poleg *S* in *t*, funkcija vsaj še ene neodvisne spremenljivke, tj. celotne poti (gibanja) osnovnega instrumenta (poznati moramo vse, v pogodbi določene vrednosti v nekem obdobje). Zapišemo lahko *V(S, t, pot)*. Če želimo take opcije vrednotiti moramo v primeru azijskih opcij poznati povprečje vrednosti osnovnega instrumenta do trenutka *t* (ang. "*running average*"), ki predstavlja dodatno neodvisno spremenljivko. Uporaba tovrstnih opcij je običajno optimalna pri trgovanju z dobrinami, kjer so nenadni skoki (premiki) v cenah bolj verjetni (npr. nafta). S pomočjo opcije, katere vrednost je odvisna npr. od tedenskih zaključnih cen skozi celotno leto, lahko izničimo morebitne poskuse manipulacij s ceno osnovnega instrumenta, česar nam navadne opcije ne omogočajo. To je še posebej pomembno, ko se bliža dospetje opcije. Poleg tega lahko s pomočjo takih opcij zelo dobro zajamemo svoja pričakovanja glede prihodnjega gibanja cen nekega osnovnega instrumenta, na katerega je opcija izdana.

1.2.5 Epilog

Pomanjkanje nadzora in prešibka zavest o tveganjih povezanih z izvedenimi finančnimi instrumenti sta pripeljala do nekaterih, tudi medijsko precej odmevnih, finančnih zlomov (Wilmott, 2000, str. 819-832). Izjava Rona Bakerja iz banke Barings iz leta 1994, se sicer ne navezuje neposredno na eksotične opcije, a je kljub temu zelo pomenljiva: "*Nick Leeson, ki ga večina od vas pozna in za katerega ste vsi zagotovo že slišali, vodi našo pisarno v Singapurju na način, ki ga posnemajte*." [29] Konec zgodbe o banki Barings poznamo.

Strahu pred napačno uporabo eksotičnih izvedenih finančnih instrumentov ne bi smeli zamenjevati s strahom pred instrumenti samimi, kar uporabnike pogosto odvrača od njihove uporabe. [30] Podjetja, ki se zavedajo pomena učinkovitega upravljanja s tveganji, lahko pridejo

[29] Povzeto po zbirki DerivaQuote.

[30] V dokaz navajam naslednji izjavi (povzeto po zbirki DerivaQuote). "*Izvedenih finančnih instrumentov ne smemo mistificirati, saj so nepogrešljivo orodje pri upravljanju s tveganji na finančnih trgih. Če jih ne bi poznali, bi jih morali izumiti...Hkrati z njihovim razvojem, moramo nujno nadgrajevati tudi sisteme in postopke nadzora*." (bivši predsednik ameriške SEC Arthur Levitt). Podobnega menja je tudi predsednik ameriške centralne banke Alan Greenspan: "*Z izvedenimi finančnimi instrumenti moramo ravnati nadvse previdno, vendar pri tem ne smemo onemogočati inovacij in napredka. Tveganje je namreč potreben pogoj za gospodarski razvoj in boljši življenjski standard.*"

s smotrno uporabo eksotičnih opcij do nove konkurenčne prednosti. Na drugi strani lahko finančni investitorji s pomočjo eksotičnih opcij natančno uravnavajo svoje pozicije in tako zmanjšajo nestanovitnost (predvsem kratkoročnih) donosov. Odgovor na vprašanje, kdaj naj bi nekdo (podjetje, finančni investitor) uporabil eksotičen izvedeni finančni instrument, pri čemer želimo kratek in jasen odgovor, je jasen. Takrat, ko so koristi (dodana oz. ohranjena vrednost) večje od stroškov njihove uporabe. Tu se srečamo z vprašanjem vrednotenja eksotičnih opcij.

2 AZIJSKE OPCIJE

2.1 DEFINICIJE

Omenil sem, da azijske opcije sodijo v skupino opcij, ki so odvisne od gibanja osnovnega instrumenta v nekem časovnem intervalu. To pomeni, da na njihovo ceno ne vpliva zgolj cena osnovnega instrumenta na dan dospetja (in seveda izvršilna cena), temveč tudi to, kako se je tržna cena osnovnega instrumenta gibala skozi življenjsko dobo opcije. V nadaljevanju podajam osnovne (ključne) definicije, ki jih bom uporabljal v diplomskem delu.

Definicija 1: Azijske opcije so tiste opcije, katerih vrednost ob dospetju je odvisna od povprečja cen osnovnega instrumenta v nekem obdobju. Poznamo štiri skupine azijskih opcij:

a) t.i. "*average price*" oz. "*average rate*" opcije (v nadaljevanju APO), katerih vrednost ob dospetju lahko zapišemo kot $\max[\phi P - \phi X, 0]$, kjer je ϕ binarni operator, ki ima v vrednost 1 (nakupna opcija) oz. –1 (prodajna opcija). Vidimo, da se od navadnih opcij razlikujejo po tem, da smo ceno osnovnega instrumenta ob dospetju (S_T), nadomestili s povprečjem cen osnovnega instrumenta v nekem obdobju (P). Pri APO je izvršilna cena fiksna (vnaprej določena).

b) t.i. "*average strike*" oz. "*floating strike*" opcije (v nadaljevanju ASO), katerih vrednost ob dospetju lahko zapišemo kot $\max[\phi S_T - \phi P, 0]$, pri čemer sta S_T in ϕ enaka kot v a). Če za APO velja, da imajo izvršilno ceno določeno vnaprej, je pri ASO le-ta neko povprečje P. ASO azijske opcije nam omogočajo, da cena, ki jo plačamo za nek osnovni instrument v nekem obdobju ni višja od končne tržne cene.

c) t.i. "*flexible average*" opcije (v nadaljevanju FAO), ki so lahko oblike a) ali b), s to razliko, da je P tehtano povprečje.[31]

d) t.i. *azijske opcije ameriškega tipa* (ang. "*US-style asian options*"), ki so lahko tipa a), b) ali c).[32]

[31] Definiram ga v okviru Definicije 2.
[32] V diplomskem delu se sicer večinoma ukvarjam le z evropskimi opcijami. Kjer temu ne bo tako, bo posebej navedeno.

Definicija 2: Glede na vrsto povprečja *P* iz Definicije 1 poznamo:

a) *aritmetične* azijske opcije, če je *P* definiran kot aritmetično povprečje *n* pozitivnih števil:

- v primeru, ko gre za *diskretni* vzorec vrednosti (diskretna aritmetična azijska opcija)[33]

$P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$, i=1, 2, 3, ..., n, v_i je i-ta vrednost osnovnega instrumenta;

- v primeru, ko gre za *zvezni* vzorec vrednosti (zvezna aritmetična azijska opcija)

$P(a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b S(t)dT$, a in b sta poljubni časovni točki v življenjski dobi opcije, *S(t)* pa je podan z enačbo (1.2.).

b) *geometrijske* azijske opcije, če je *P* definiran kot geometrijsko povprečje *n* pozitivnih števil:

- v primeru, ko gre za *diskretni* vzorec vrednosti (diskretna geometrijska azijska opcija)

$P = (\prod_{i=1}^{n} v_i)^{1/n}$, i=1, 2, 3, ..., n, v_i je definiran v okviru Definicije 2;

- v primeru, ko gre za *zvezni* vzorec vrednosti (zvezna geometrijska azijska opcija)

$P(a,b) = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log S(t)dT\right)$, pri čemer so vsi simboli enaki kot zgoraj.

c) opcije, ko je *P* definiran kot *tehtano* povprečje: [34]

- v primeru, ko gre za *aritmetično* povprečje

$P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i v_i$, ω_i[35] je utež, ki jo pripišemo posamezni vrednosti v_i ($\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$) oz.

- v primeru, ko gre za *geometrijsko* povprečje

$P = \prod_{i=1}^{n} v_i^{\omega_i}$.

Definicija 3: Doba v kateri izračunavamo povprečje (v nadaljevanju doba povprečenja – *D*; *T* je čas dospetja opcije) je lahko:

a) enaka življenjski dobi opcije (D=T; navadna azijska opcija – ang. "*vanilla*" azijske opcije),
b) krajša od življenjske dobe opcije (D<T; ang. "*forward starting*" oz. "*deffered*" azijske opcije),

---

[33] Glede na to, katere vrednosti osnovnega instrumenta upoštevamo pri izračunavanja ustreznega povprečja. Če v nekem obdobju, ko izračunavamo povprečje (npr. 1 leto) vzamemo mesečne cene (torej skupaj 12 različnih vrednosti) gre za diskretni vzorec cen. V primeru, ko so časovni intervali med posameznimi zajemi zelo majhni, se vsote spremenijo v integrale. Tak način zajema imenujemo zvezni (število zajemov *n* se v tem primeru približuje neskončnosti, dolžina časovnega intervala med dvema zajemoma *h* pa se približuje nič).

[34] Posameznim cenam osnovnega instrumenta S_1, S_2, …, S_n pripišemo različen pomen, kar pomeni, da jim pripišemo različne uteži ω_1, ω_2, …, ω_n. Lahko so tipa ASO ali APO. Obravnaval bom le diskretne azijske opcije.

[35] Če je ω_i enak *1/n* gre za običajno aritmetično povprečje z enakimi utežmi.

c) daljša od življenjske dobe opcije (D>T; ang. "*in-process*" oz. "*in-progress*" azijsko opcijo).

Omenim naj, da se zvezno vzorčenje predvsem zaradi praktičnih razlogov ne uporablja pogosto. V povprečja je namreč težko vključiti vsako kotirano ceno osnovnega instrumenta, saj so lahko podatki nezanesljivi, poleg tega pa natančen čas kotacije posamezne cene ni nujno znan. Zato običajno uporabimo le ključne cene (npr. zaključne tečaje). Kot bomo videli v nadaljevanju, nekateri avtorji menijo, da je zvezni vzorec dovolj dober približek diskretnega, ko so intervali med zajemi vrednosti kratki.[36] V nadaljevanju bom za označevanje posameznih lastnosti azijskih opcij besedni zvezi "azijske opcije" dodajal ustrezne pridevnike.

Tuja literatura omenja še dve posebni vrsti azijskih opcij. Predpostavimo, da imamo štiri cene osnovnega instrumenta 80, 105, 90 in 110 (denarnih enot) iz katerih računamo povprečje. Izvršilna cena je 100, uporabljamo aritmetična povprečja. Pri t.i. "*floored*" azijski opciji, povprečje izračunamo tako, da vse cene osnovnega instrumenta, ki so nižje od izvršilne cene, zamenjamo z njo (dobljeno povprečje je enako (100+105+100+110)/4=103.75). Na drugi strani pri izračunu povprečja za "*super"* azijsko opcijo ne upoštevamo nobene cene osnovnega instrumenta, ki je nižja od izvršilne cene. Ustrezno povprečje torej znaša (105+110)/2=107.5. Obe opciji sta se pojavili, ker so uporabniki želeli pozitivne finančne izide tudi v primerih, ko so bile cene osnovnih instrumentov dalj časa v življenjski dobi opcije nizke in so nato močno poskočile. Razvidno je, da je izkupiček pri njiju večji kot v primeru navadne nakupne azijske opcije, vendar je zato višja tudi cena take opcije.

2.2 ZNAČILNOSTI

V Definiciji 1 sem opisal glavno lastnost azijskih opcij. Povprečne vrednosti, ki jih računamo s pomočjo povprečij, definiranih v okviru Definicije 2 nihajo precej manj, kot posamezne vrednosti osnovnega instrumenta. Azijske opcije so bolj odporne na morebitne manipulacije s tržno ceno osnovnega instrumenta, in so običajno cenejše kot navadne opcije, kar omogoča neposredno znižanje stroškov zavarovanja z opcijskimi pogodbami. Na tem mestu bom načel nekatera vprašanja, ki jih bom bolj podrobno predstavil v nadaljevanju diplomskega dela in ki so pomembna pri vrednotenju ter uporabi azijskih opcij. Gre za *verjetnostno porazdelitev* povprečij, *odnos med aritmetičnim* in *geometrijskim povprečjem*, *recipročno vrednost povprečja*, *zavarovanje pozicij*, *oblikovanje vzorca vrednosti* (iz katerega računamo povprečje) in *odnos med vrednostjo navadne in azijske opcije*.

Kot bomo videli kasneje, imata povprečji, definirani v Definiciji 2 oz. njuni *verjetnostni porazdelitvi* ključno vlogo pri vrednotenju azijskih opcij. Na tem mestu naj omenim le, da je najpomembnejša razlika ta, da so geometrijska povprečja lognormalno porazdeljena (npr. Hull, 2000, str. 239-241), če predpostavimo, da so lognormalno porazdeljene tudi cene osnovnih instrumentov (to velja, če se gibljejo v skladu z geometrijskim Brownovim gibanjem). Na drugi strani za aritmetična povprečja omenjeno ne velja. Zaradi tega je vrednotenje geometrijskih azijskih opcij enostavnejše. Ustrezno analitično rešitev dobimo kar z razširitvijo Black-Scholesovega modela. Pri aritmetičnih azijskih opcijah si moramo pomagati z aproksimacijami in numeričnimi metodami. Z vidika vrednotenja azijskih opcij je potrebno omeniti tudi, da ima ustrezna parcialna diferencialna enačba tri neodvisne spremenljivke (poleg osnovnega instrumenta in časa še dodatno, ki opisuje povprečje (P)).

[36] Če to drži, je izpeljava formule za vrednotenje lažja, saj je tudi Brownovno gibanje zvezen proces.

Odnos med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem je naslednji dejavnik, ki ga je pri vrednotenju azijskih opcij potrebno upoštevati. Aritmetično povprečje je vedno večje od ustreznega geometrijskega povprečja (Zhang, 1998, str. 141-142), zato velja, da je aritmetična nakupna (prodajna) azijska opcija vedno dražja (cenejša) od ekvivalentne geometrijske azijske opcije. V primeru, ko sta obe povprečji enaki (ko so vse vrednosti, ki jih uporabimo pri računanju povprečja enake), sta enaki tudi ceni opcij.

Nadalje naj omenim posebnost, ki jo s pridom uporabljajo nekateri trgovci z azijskimi opcijami. Za primer naj služi valutni par USD/DEM. Ker *recipročna vrednost povprečja* ni nujno enaka povprečju recipročnih vrednosti, moramo biti pri azijskih opcijah, ki so napisane (izdane) na valute, pozorni na valuto kotacije. Pri običajnih opcijah (npr. nakupna v USD/prodajna v DEM) je vseeno v kateri valuti so kotirane. Pri azijskih opcijah je valuta kotacije izredno pomembna. Za ponazoritev predpostavimo, da je 1 USD enak 2 DEM (primer je povzet po Nelken, 1999, str. 199-200). Nemški klient kupi ATM[37] nakupno opcijo na USD (s tem dobi pravico do nakupa USD po ceni 2 DEM ob dospetju). Izvršilna cena je 2 DEM/USD. Cena take opcije je 0.2654 DEM. Ista opcija je lahko denominirana tudi v USD. V tem primeru gre za prodajno opcijo na DEM z izvršilno ceno 0.5 USD/DEM. Cena take opcije je 0.0663 USD.[38] Razmerje med cenama obeh opcij je 4.00. Če omenjene izračune ponovimo z azijskima opcijama, znaša razmerje med obema vrednostima znaša 3.88 (nakupna USD opcija je vredna 0.1413 DEM, prodajna DEM opcija pa 0.0364 USD).

Zelo pomembno je tudi, da je azijske opcije, ki se bližajo dospetju, lažje delta *zavarovati*. Cene osnovnega instrumenta, ki še niso vključene v povprečju, postajajo v tem primeru manj pomembne in imajo manjši vpliv na povprečje. Delta opcije je zato nižja.

Eno ključnih vprašanj pri vrednotenju azijskih opcij je tudi *oblikovanje vzorca iz katerega računamo* povprečje. Zanima nas, kakšen vpliv ima spreminjanje pogostosti zajema vrednosti osnovnega instrumenta na ceno azijske opcije. V pomoč je lahko naslednja tabela.

Tabela 1: Razlike med cenami nakupnih geometrijskih azijskih opcij v primeru diskretnega oz. zveznega vzorca vrednosti osnovnega instrumenta iz katerih računamo geometrijsko povprečje

število opazovanih vrednosti – *n*	časovni interval ($h=1/n$) med dvema zajemoma v letih	cena diskretne azijske opcije	razlika med ceno diskretne in zvezne opcije v %
12	0.083333	20.117	9.1
52	0.019230	18.825	2.1
253	0.003952	18.519	0.4
506	0.001976	18.479	0.2
1012	0.000988	18.459	0.1
neskončno	0	18.440	0

Vir: Zhang, 1998, str. 124.

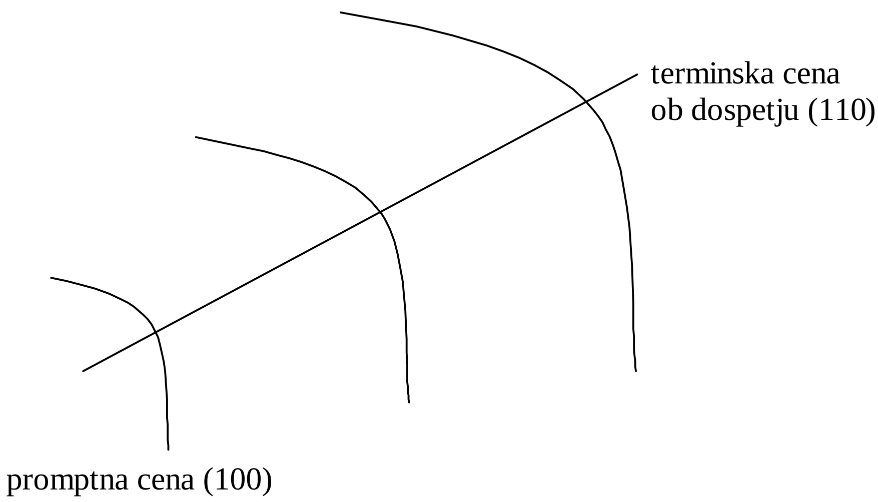
V primeru diskretnega vzorca je pri izračunu uporabljenih 12, 52, 253, 506 oz. 1012 vrednosti (doba povprečenja je enaka življenjski dobi opcije, cene so v d.e.). Razlika med cenama se z

[37] Opcija je na meji (ang. "*at-the-money*"). V nadaljevanju bom uporabljal tudi kratici ITM (opcija se splača; ang. "*in-the-money*") in OTM (opcija se ne splača; ang. "*out-of-the-money*").
[38] Pri vrednotenju moramo biti pozorni na to, da v formuli, ki smo jo uporabili za vrednotenje nakupne USD opcije, tujo netvegano obrestno mero zamenjamo z domačo.

naraščanjem števila vrednosti, ki jih vključimo v izračun povprečja, hitro manjša. Ko cene zajemamo zelo pogosto, je ta razlika zanemarljiva. Pri dovolj velikem številu opazovanj bi lahko formula za zvezno opcijo nadomestila tisto za diskretno opcijo. Pri manj pogostih opazovanjih razlika postane prevelika. Če bi uporabljali mesečne vrednosti, bi znašala kar 9.1 %. Iz povedanega sledi, da so cene azijskih opcij s povečevanjem števila opazovanih vrednosti (oz. manjšanjem časovnega intervala med dvema upoštevanima vrednostma) čedalje nižje. Nestanovitnost povprečja se niža, saj ga izračunavamo iz čedalje večjega števila podatkov. Zhang (1998, str. 128) posploši, da so rezultati dobljeni z enačbami za zvezne geometrijske azijske opcije dovolj dober približek za diskretne, ko zajemamo vrednosti tedensko oz. pogosteje.

Pri vrednotenju azijskih opcij si lahko pomagamo tudi z *odnosom med vrednostjo navadne in azijske* opcije. Slednja naj bi bila (skoraj) vedno cenejša od sicer enake navadne opcije. Zanima nas, ali obstaja kakšna preprosta "povezava" med premijama obeh opcij. Nelken (1999, str. 191-192) predlaga preprosto pravilo palca, po katerem naj bi bila vrednost azijske ATM opcije približno polovico ATM opcije evropskega tipa. Naj bosta današnja cena osnovnega instrumenta in izvršilna cena 100. Evropsko opcijo vrednotimo s pomočjo obrestnih mer, katerih časovna struktura je poenostavljeno prikazana na Sliki 2. Predpostavimo, da je cena ob dospetju 110. Cena navadne opcije je odvisna od cene ob dospetju (110) in od nestanovitnosti osnovnega instrumenta. Vrednotimo jo upoštevajoč porazdelitev ob dospetju (lok pri 110). Ker je bila izvršilna cena 100, je izkupiček 10 d.e. V nasprotju s tem, moramo pri azijski opciji upoštevati več možnih porazdelitev okoli prihodnjih cen osnovnega instrumenta. Ko se premikamo dlje v prihodnost (desno na Sliki 2), loki postajajo vse večji, saj je cene osnovnega instrumenta čedalje težje napovedovati (kar nakazuje večjo nestanovitnost). Ustrezno povprečje izračunamo na podlagi vseh lokov. Intuitivno bi lahko povprečje znašalo 105, kar pomeni, da bi bil izkupiček azijske opcije 5 d.e. Zato je smiselno, da je cena ATM azijske opcije približno polovico cene ATM evropske opcije. Ta skrajna poenostavitev občasno daje dobre rezultate.

Slika 2: Časovna struktura obrestnih mer (premica), in možne lognormalne porazdelitve vrednosti osnovnega instrumenta okoli nje (loki)



Vir: Nelken, 1999, str. 192.

Do takšnih razlik v premijah prihaja zato, ker je cena azijskih opcij odvisna od povprečnih vrednosti osnovnega instrumenta. Če bi nas nekdo vprašal koliko meri v višino neka naključno izbrana oseba, bi verjetno pravo višino precej zgrešili. Variabilnost višin posameznih oseb je namreč precej velika. Lahko pa bi poskušali ugotoviti povprečno višino oseb, ki bi prečkale cesto v določenem času. V tem primeru bi na večjem vzorcu lažje razmeroma natančno določili njihovo povprečno višino.

Zhang (1998, str. 116-117) nižjo ceno azijske opcije razloži nekoliko drugače. Razvije enačbi za t.i. "*effective mean*" ($T^{sa}_{\mu,n-j}$) in "*effective volatility*" (T^{sa}_{n-j}) časovni funkciji. Oba intervala (efektivni čas) sta definirana tako, da s tem, ko za izračun povprečja uporabimo več vrednosti, njuna vrednost pada. Tako sta vedno manjša od dejanskega časa do dospetja T (krajši čas do dospetja pomeni nižjo nestanovitnost in zato nižjo ceno opcije). Z njuno pomočjo lahko izračunamo prilagojeni aritmetično sredino in varianco povprečja. Ključno je, da je zmnožek $\sigma^2 T^{sa}_{n-j}$ manjši. Intuicija v ozadju te rešitve je, da z večjim vzorcem, morebiten posamezen skok v ceni osnovnega instrumenta čedalje manj vpliva na končni finančni izid. Ker je tveganje manjše, je nižja tudi cena opcije.

Razlike med cenami navadnih in azijskih opcij pa je smiselno opazovati nekoliko širše. Če je doba povprečenja odložena daleč v prihodnost, npr. na zadnji teden pri opciji z dospetjem eno leto ("*forward-starting*" oz. "*deffered*"), je cena obeh opcij ob nakupu precej podobna. Taka opcija je v očeh kupca danes zelo podobna navadni opciji. Za boljšo predstavo vzemimo naslednji primer.[39] Imamo azijsko opcijo, pri kateri povprečje izračunavamo med 12. marcem 2001 in 12. decembrom 2001in navadno opcijo, ki dospe 12. decembra 2001. Ob nakupu (12. septembra 1999), sta ceni obeh opcij precej podobni, saj je doba povprečenja precej oddaljena. Ob začetku dobe povprečenja je evropska opcija skoraj dvakrat dražja od azijske opcije, kar je v skladu s pravilom palca, ki sem ga opisal zgoraj. Z naraščanjem časovnega intervala med nakupom opcije in začetkom dobe povprečenja cena azijske opcije, ceteris paribus, konvergira k ceni navadne evropske opcije. Vrednost navadne opcije je v bistvu limita azijske opcije, ko je doba povprečenja infinitezimalen časovni interval pred dospetjem opcije.

Tabela 2: Primerjava cen navadne in azijske opcije.

Datum	navadna opcija	azijska opcija
12. september 1999	15.54	15.40
12. september 2000	11.28	8.99
12. december 2000	9.95	7.04
12. marec 2001	8.47	4.72

Opomba: Promptna cena je 100 d.e. Cene so v d.e.
Vir: Nelken, 1999, str. 195.

Opisano je moč uporabiti tudi kot trgovalno strategijo. Na začetku življenjske dobe obeh opcij (12. september 1999) kupimo evropsko opcijo in prodamo azijsko. Transakcija stane 0.14 d.e. 12. marca 2001 (začetek dobe povprečenja) omenjeno transakcijo obrnemo (prodamo evropsko opcijo in kupimo azijsko). Zaslužek znaša 3.75 d.e. (oz .neto zaslužek 3.61 d.e.). Vendar je potrebno biti pri tovrstni strategiji pazljiv. Pri izračunu premij je bila uporabljena ista promptna cena za obe opciji, skozi celotno obravnavano obdobje. 12. marca 2001 je ta razlika tolikšna le, če sta obe opciji ATM. Ker sta bili opciji ATM že ob nakupu, temu takrat ne bo nujno tako. Če bi bila promptna cena 80 d.e., bi bila cena azijske opcije 0.06 d.e.,

[39] Povzet po Nelken (1999, str. 195-196). Opcije se običajno uporabljajo za krajša obdobja (do enega leta).

navadne pa 1.06 d.e. Razlika bi znašala le 1.00 d.e. Na splošno bo razlika manjša, če opciji ne bosta ATM in bo zato strategija manj donosna.

Kdaj bo azijska opcija dražja od navadne? Cena azijske opcije, pri kateri se je doba povprečenja začela še pred njenim nakupom, bo odvisna od tega, kolikšen del vzorca vrednosti iz katerega bomo izračunali končno povprečje sestavljajo vrednosti osnovnega instrumenta pred nakupom opcije. Tu je pomembno predvsem to, kako so se gibale tržne cene osnovnega instrumenta od začetka dobe povprečenja do datuma nakupa azijske opcije. Če gredo v povprečje tedenske vrednosti osnovnega instrumenta med 1.1. in 31.12. (nakup opcije 1.12.), je končno povprečje v večji meri že določeno. V primeru, ko je vrednost doslej izračunanega povprečja nad izvršilno ceno (opcija je ITM), bo imetnik take opcije, zelo verjetno deležen ugodnega finančnega izida. Cena opcije bo visoka (obratno velja, če je vrednost povprečja doslej nižja od izvršilne cene), lahko tudi višja od cene evropske opcije, kar poudarjata tudi Turnbull, Wakeman (1991).[40]

2.3 UPORABA (LOGIKA, SMISEL, MOTIV)

Za lažje razumevanje azijskih opcij oz. smiselnosti njihovega obstoja in uporabe, bom v nadaljevanju predstavil nekaj primerov. V praksi se največ uporabljajo aritmetične APO azijske opcije z enakimi utežmi, ki so evropskega tipa. Kljub temu se občasno uporabljajo tudi geometrijske azijske opcije, ki so zanimive zato, ker jih je mogoče vrednotiti z razširitvijo klasične Black-Scholesove formule.

Prvi primeri uporabe azijskih opcij segajo na konec sedemdesetih oz. v sredino osemdesetih let prejšnjega stoletja. Azijske opcije so bile takrat del obveznic, ki so bile vezane na različne dobrine (ang. "*commodity-linked*"). Omenim naj dve taki obveznici, ki ju v tuji literaturi omenjajo kot prva primera uporabe logike azijskih opcij:

- *Mexican Petrobond iz leta 1977*: obveznica, pri kateri je bila višina vračila glavnice določena na podlagi 25-dnevnih povprečij cen nafte.

- *obveznice nizozemskega podjetja Oranje Nassau iz leta 1985*: obveznice z dospetjem osem let, pri katerih je bila vrednost glavnice, ki jo bo podjetje vrnilo, določena kot maksimum povprečja 10.5 soda nafte vrste Brent Blend v zadnjem letu pogodbe in nominalne vrednosti obveznice ob izdaji. Povprečje je bilo izračunano na podlagi mesečnih cen nafte, ob izdaji pa je bila nominalna vrednost obveznic enaka omenjeni količini nafte. Šlo je torej za ATM opcije.

Podjetje iz drugega primera je lahko zaradi tega "dodatka" h klasični obveznici ponudilo za eno odstotno točko nižjo kuponsko obrestno mero. Ker so bili dobički podjetja neposredno povezani s ceno nafte (ob visoki ceni nafte so bili višji[41]), višja vrednost, ki so jo morali plačati ob dospetju obveznice, ni bila problematična. V primeru nizkih cen nafte, bi opcija, dospela brez vrednosti. Drugi razlog za uporabo je bil v tem, da se je podjetje na ta način želelo zavarovati pred nepričakovanimi premiki v cenah nafte, ko se je bližal datum dospetja

[40] Vidimo, da gre pri povprečenju za dva nasprotujoča si efekta. Po eni strani se zmanjša varianca, po drugi strani pa lahko hkrati naraste gotovost, da bo opcija ITM.
[41] Dobički bi bili dovolj visoki (in bi opcija končala ITM) le, če bi bila cena nafte dovolj visoka skozi večji del zadnjega leta trajanja pogodbe in ne le ob dospelosti.

obveznic. Nadaljnje primere uporabe azijskih opcijah lahko najdemo npr. v Nelken (1996, str. 175) ali Kemnova, Vorst (1990), Heenk, Kemnova, Vorst (1990) ter Easton (1996).

V nadaljevanju navajam klasičen šolski primer, s katerim je razmeroma lahko prikazati osnovno logiko in motiv za uporabo azijskih opcij.

Ameriško podjetje ki izvaža v Nemčijo, vsak mesec prejme 1 milijon EUR. Omenjeno podjetje svoje obveznosti plačuje z USD. Očitno se podjetje sooča s tečajnim tveganjem. Ker se boji depreciacije evra proti USD, želi svojo izpostavljenost (denarni tok) v koledarskem letu zavarovati. S pomočjo opcij ima tri osnovne možnosti:

a) kupi 12 prodajnih opcij (za vsak mesec leta eno) s skupno pogodbeno vrednostjo 12 milijonov EUR, ki se med seboj razlikujejo le po datumu dospetja;

b) kupi eno prodajno opcijo s pogodbeno vrednostjo 12 milijonov EUR, ki dospe na koncu leta ali

c) kupi azijsko prodajno opcijo s pogodbeno vrednostjo 12 milijonov EUR, pri kateri se povprečje računa na podlagi mesečnih deviznih tečajev USD/EUR z dospetjem na koncu leta.

Cenovno je najbolj ugodno zavarovanje z azijsko opcijo[42], ker omogoča zavarovanje na podlagi povprečja večih deviznih tečajev (kar zmanjša nestanovitnost). Zagotavlja skupni denarni pritok, najmanj v višini povprečja, kar je običajno zadostno zavarovanje. Nadalje je možnost b) dražja od možnosti a). Vzrok je v tem, da lahko na b) gledamo kot na 12 identičnih prodajnih opcij za 1 milijon EUR. Vsaka taka opcija ima dospetje 12 mesecev in je zato dražja od posameznih opcij iz a). Denarni tok je v primeru uporabe možnosti a) vedno višji kot pri uporabi c), vendar gre pri a) za nadzavarovanje, ki je zato dražje (velja, ob ugodnem gibanju tečaja USD/EUR). Poleg tega lahko pride pri drugi opciji (ko denarne pritoke v EUR vsak mesec zamenjamo v USD) do tega, da nismo deležni nikakršne zaščite. Če je tečaj nizek skozi celo leto (EUR je šibak), bodo denarni tokovi v USD nizki (tu bi bila opcija ITM). V primeru, ko ob dospetju tečaj močno naraste (EUR močan), opcija dospe OTM.[43]

Zanimiv primer uporabe azijskih opcij so tudi življenjska zavarovanja zavarovalnice Winterthur Insurance, ki je del Credit Suisse Group. Omenjena zavarovalnica prodaja police življenjskega zavarovanja, katerih vrednosti so vezane na švicarski borzni indeks (*SMI*, *Swiss Market Index*), oz. na njegovo povprečno vrednost. Tovrstni finančni produkt je koristen tako za zavarovalnico, ki se pred prevelikim izplačilom v primeru velike rasti *SMI* zavaruje z azijsko opcijo, ki je precej cenejša od običajne, kot tudi za zavarovance, ki niso izpostavljeni le neki določeni vrednosti *SMI*-ja v trenutku nastopa dogodka, ki terja izplačilo zavarovalne vsote (več na spletni strani http://www.winterthur.com).

Omenim naj, da Longstaff (1995) podrobno piše o tem, kako je mogoče z azijskimi opcijami na obrestno mero učinkovito zavarovati višino stroškov kapitala oz. doseči neko povprečno vrednost le-teh.

---

[42] Izračuni so v Nelken (1996, str. 177-179).

[43] Omenjenemu bi se lahko izognili tako, da bi EUR menjali v USD le na koncu leta. Med letom bi jih nalagali v obliki depozitov do konca leta. Če bi medtem potrebovali USD, bi si jih morali izposoditi. Pojavi se dodatni strošek v obliki razlike med obema obrestnima merama.

Glavne prednosti azijskih opcij so torej naslednje (Nelken, 1999, str. 194):

- nižja premija,
- boljši zajem izpostavljenosti podjetij,
- nižja nestanovitnost,
- manjša negotovost glede poravnave ob dospetju opcije, saj morebitne spremembe v ceni osnovnega instrumenta blizu dospetja opcije nimajo ključnega vpliva,[44]
- nizke vrednosti opcijskih mer občutljivosti, ko se bliža konec dobe povprečenja oz. dospetje opcije (takrat je finančni izid azijske opcije že relativno trdno določen, azijske opcije pa so dejansko kot gotovina; delta in vega take opcije sta nizki).

3 VREDNOTENJE

Vprašanje vrednotenja azijskih opcij je eno bolj zanimivih področij finančne teorije. Geometrijske azijske opcije ne predstavljajo posebnih problemov pri vrednotenju, saj je moč uporabiti nekoliko razširjeno originalno Black-Scholesovo formulo. Večjo težavo predstavljajo aritmetične azijske opcije. Aritmetično povprečje namreč ni lognormalno porazdeljeno, kar onemogoča neposredno aplikacijo Black-Scholesovih metod. V strokovnih člankih lahko zasledimo tri osnovne načine reševanja tega problema. Nekateri so aritmetične azijske opcije poskušali vrednotiti s pomočjo numeričnih metod (drevesa, Monte Carlo metoda), drugi so ustrezno popravili analitično rešitev za geometrijske azijske opcije oz. so si pri vrednotenju aritmetičnih azijskih opcij pomagali z geometrijskim povprečjem. Zelo pogosto pa je cilj določenega postopka vrednotenja aproksimacija porazdelitvene funkcije aritmetičnega povprečja (na podlagi ustreznih momentov). Sam bom različne načine vrednotenja prikazal kronološko.

Poglavje je razdeljeno na več delov. Najprej nekoliko bolj natančno opišem, zakaj analitičnih formul za aritmetične azijske opcije ni.[45] Poleg tega predstavim težave, ki se pojavljajo pri uporabi geometrijskega povprečja kot aproksimacije aritmetičnega povprečja.[46] Nadaljujem z vrednotenjem APO in ASO azijskih opcij, na kratko analiziram vrednotenje FAO azijskih opcij ter azijskih opcij ameriškega tipa. Na koncu prikažem vrednotenje azijskih opcij s pomočjo dreves in Monte Carlo metode. Slednja na splošno služi kot merilo za oceno natančnosti posameznih aproksimacij.

3.1 OSREDNJI PROBLEM

Doslej ni bilo mogoče izpeljati analitične formule za diskretne aritmetične azijske opcije. Osrednja predpostavka Black-Scholesovega modela je, da osnovni instrument sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju, kar pomeni, da so njegove vrednosti lognormalno porazdeljene. Geometrijsko povprečje lognormalno porazdeljenih spremenljivk (v našem

[44] To je še posebej pomembno takrat, ko se po daljšem obdobju gibanja cene osnovnega instrumenta v eno smer, le-ta obrne v nasprotno smer. Pri navadni opciji omenjeno bistveno vpliva na finančni izid.
[45] Omenjeno velja za azijske opcije, pri katerih diskretno zajemamo vrednosti, ki jih vključujemo v povprečja. Za azijske opcije, pri katerih upoštevamo zvezni vzorec, je sicer zelo kompleksna eksplicitna rešitev možna (Vorst, 1992, str. 192), vendar pa je lahko taka rešitev kot smo videli v Tabeli 1 slab približek.
[46] Geometrijske azijske opcije se uporablja predvsem kot osnovo (izhodišče) za aproksimacijo aritmetičnih azijskih opcij in kot spodnjo mejo, s pomočjo katere lahko zmanjšamo standardni odklon Monte Carlo simulacij.

primeru so to vrednosti osnovnega instrumenta), je tudi samo lognormalno porazdeljeno, saj gre za zmnožek omenjenih spremenljivk.[47] Za vsoto lognormalno porazdeljenih spremenljivk to ne velja, saj verjetnostne porazdelitve take vsote ne poznamo. Zato za diskretne aritmetične azijske opcije enostavna rešitev ne obstaja oz., kot sta zapisala Rogers, Shi (1995): "...*zanje verjetno nikoli ne bomo poznali enostavnega analitičnega izraza*."

To lahko prikažem z zelo preprostim primerom. Diskretno lahko geometrijsko Brownovo gibanje zapišemo kot

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \sqrt{t} z \qquad (3.1.),$$

kjer je z slučajna, normalno porazdeljena spremenljivka, ostali simboli pa enaki kot zgoraj. Ceno osnovnega instrumenta, ki je v zveznem času podana z enačbo (1.2.) lahko zapišemo kot

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t} z \right) \qquad (3.2.).^{48}$$

Vzemimo za primer, da geometrijsko povprečje računamo za štiri dni. Tedaj lahko geometrijsko povprečje (G) s pomočjo enačbe (3.2.) zapišemo kot

$$G = \left[S_0 S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{1}{365}} z_1 \right) S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{1}{365}} (z_1 + z_2 \right) * \right.$$

$$\left. * S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{3}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{1}{365}} (z_1 + z_2 + z_3) \right) \right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{6}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{1}{365}} (3z_1 + 2z_2 + z_3) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Proces ima eksponentno obliko, kar omogoča neposredno uporabo Black-Scholesovega modela. Če postopek ponovimo na primeru aritmetičnega povprečja (A) dobimo:

$$A = \frac{1}{4}\left[S_0 + S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{1}{365}} z_1 \right) + S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{2}{365}} (z_1 + z_2) \right) + \right.$$

$$\left. + S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{3}{365}\sigma^2 + \sigma\sqrt{\frac{3}{365}} (z_1 + z_2 + z_3) \right) \right].$$

Rezultat je v primeru aritmetičnega povprečja enak, kot pri linearni kombinaciji opcij na medsebojno neodvisne osnovne instrumente (z_1, z_2, ...z_n so med seboj neodvisni) z enako nestanovitnostjo. Tako zapisanega aritmetičnega povprečja ni mogoče zapisati kot $S_t = S_0 \exp(.)$. Omenjeno je, kot je zapisal Taleb (1997, str. 410):"…*povzročilo precej*

[47] To bom v tem diplomskem delu privzel kot dejstvo. Dokaz lahko zainteresirani bralec najde npr. v Hansen, Jørgenson (1997).
[48] Enačba je zaradi poenostavitve zapisana brez pričakovanega prirastka cene (ang. "*drft*").

prelivanja črnila...", saj onemogoča neposredno uporabo (predpostavk) Black-Scholesovega modela.[49]

3.1.1 Primerjava med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem

Logično nadaljevanje opisanega je, da bi aritmetične azijske opcije vrednotili s pomočjo ustreznih geometrijskih azijskih opcij za katere analitične formule poznamo. Taka aproksimacija bo smiselna takrat, ko se vrednosti povprečij izračunanih iz enakih števil ne bosta preveč razlikovali. Z analizo dejavnikov, ki vplivajo na različno vrednost aritmetičnih oz. geometrijskih povprečij, se je podrobneje ukvarjal Zhang (1998, str. 137-147). Definiral je splošno povprečje (M; ang. "*general mean*")[50], s katerim bi lahko nadomestili P iz Definicije 1:

$$M(\gamma / a)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (3.3.),$$

kjer so a_i pozitivna realna števila, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, n je število vrednosti iz katerih računamo povprečje, γ pa je realno število, ki določi značilnost splošnega povprečja. Povprečji, ki zanimata nas, sta le dva posebna primera tega splošnega povprečja. Za vrednost parametra $\gamma=1$ postane (3.3.) aritmetično povprečje ($M(1)=A$), geometrijsko povprečje (G) pa lahko zapišemo kot limito izraza (3.3.), ko se γ približuje nič

$$\lim_{\gamma\to 0} M(\gamma)=\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (3.4.).$$

Velja $M(0)=G$. S tem sta obe povprečji, ki sta potrebni za vrednotenje azijskih opcij definirani. Ker je enačba (3.3.) monotono naraščajoča funkcija, velja, da je geometrijsko povprečje vedno manjše od aritmetičnega povprečja (tj. spodnja meja aritmetičnega povprečja - $A \geq G$). To je prva pomembna ugotovitev. Od tu naprej je mogoče analizirati razliko med njima in vzroke zanjo. Izkaže se, da je odvisna od verjetnostne porazdelitve vrednosti iz katerih računamo povprečji in da narašča, če so te vrednosti zelo različne. Če so vsa števila enaka, velja $A=G$. Razlika med obema povprečjema je torej na splošno odvisna od tega, koliko se števila iz katerih računamo povprečje med seboj razlikujejo (zanimajo nas ustrezni momenti verjetnostne porazdelitve števil, ki jih uporabimo za izračun povprečij). Morebitna aproksimacija aritmetičnega povprečja s pomočjo geometrijskega bo smiselna, če ta razlika ni prevelika.

S pomočjo splošne sredine je možno omenjeno razliko formalno izpeljati. Ker je $M(\gamma)$ zvezna funkcija γ, mora obstajati neki ψ med 0 in 1 (vrednosti parametra γ za geometrijsko oz. aritmetično povprečje), da velja $A-G=M(1)-M(0)=(1-0)M'(\psi)=M'(\psi)$, kar pomeni, da je razlika med obema povprečjema enaka prvemu odvodu splošne sredine glede na γ na neki točki (vrednosti γ) na intervalu $0<\psi<1$. Končni cilj je, da bi lahko odnos med A in G zapisali kot $A \cong \kappa G$, kjer je $\kappa \geq 1$. Do verjetnostne porazdelitve omenjene razlike pridemo s pomočjo Taylorjeve vrste. Čeprav je izpeljava razmeroma zapletena, je intuicija v ozadju

[49] Več v Taleb (1997, str. 390-392 in 408-410).

[50] Njegovo aproksimacijo bom predstavil v celoti kar na tem mestu, saj je končni rezultat njegovega postopka ključen za poznavanje dejavnikov, ki vplivajo na razlike med aritmetičnimi in geometrijskimi povprečji. Več o rešitvah ostalih avtorjev v nadaljevanju.

precej preprosta. Aritmetično in geometrijsko povprečje sta posebna primera splošnega povprečja, zato lahko njuno razliko aproksimiramo s pomočjo Taylorjeve vrste in jo zapišemo kot del geometrijskega povprečja.[51] Aritmetično povprečje je torej približno enako ustreznemu geometrijskemu povprečju, pomnoženemu s koeficientom κ, ki je *deterministična funkcija nestanovitnosti osnovnega instrumenta, števila in frekvence zajema vrednosti osnovnega instrumenta in netvegane stopnje donosnosti*. Sledi torej, da je tudi aritmetično povprečje približno lognormalno porazdeljeno, saj je κ konstanta.[52] Ko pri izračunu povprečja upoštevamo le eno vrednost (gre torej za navadno opcijo) je $\kappa=1$ in $A=G$, saj so takrat "vsa" števila v povprečju enaka. Podobno velja tudi, če je nestanovitnost osnovnega instrumenta enaka 0. Razlika med obema povprečjema se torej povečuje z nestanovitnostjo osnovnega instrumenta, saj vrednost aproksimacijskega koeficienta κ takrat narašča. Le-ta je neposredno odvisna od razpršenosti n pozitivnih števil (vrednosti osnovnega instrumenta, ki jih uporabimo pri izračun povprečja). Večja razpršenost vrednosti (kot posledica višje nestanovitnosti osnovnega instrumenta) pomeni višjo ceno (aritmetične azijske) opcije.

3.2 APO azijske opcije

Angelien Kemna in Ton Vorst (1990) sta bila prva, ki sta se ukvarjala z vrednotenjem azijskih opcij, kot jih poznamo danes.[53] Imenovala sta jih "*average value*" opcije. Izhajala sta iz predpostavk, ki veljajo v Black-Scholes modelu. Ker je cena azijske opcije odvisna tudi od povprečja P, je potrebno klasično parcialno enačbo, ki so jo razvili F. Black, M. Scholes in R. Merton in katere rešitev je cena opcije, ustrezno spremeniti (prilagoditi). V svoji originalni obliki omenjena enačba izgleda kot

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+r(S\frac{\partial f}{\partial S}-f)=0 \qquad (3.5.),$$

kjer je f vrednost opcije (izpeljava in razlaga ostalih simbolov npr. v Hull, 2000, str. 244-248). Dodati je potrebno novo neodvisno spremenljivko, ki bo predstavljala ustrezno povprečje. Omenjena enačba se spremeni v

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+S\frac{\partial f}{\partial P}+r(S\frac{\partial f}{\partial S}-f)=0 \qquad (3.6.).$$ [54]

Dodan je prvi odvod funkcije (vrednosti opcije) glede na povprečje P ($S\frac{\partial f}{\partial P}$), s čimer v osnovno parcialno diferencialno enačbo vključimo povprečje (kaj to pomeni za reševanje enačbe, glej zgoraj omenjeni članek). Oba avtorja sta prišla do ugotovitve, da izpeljava

[51] Omenjeni avtor uporabi člene do vključno drugega reda.
[52] Zanimivo je, da Zhang (1998) v svoji knjigi na posameznih delih sicer kritizira ostale avtorje zaradi njihovih aproksimacij, vendar tudi sam uporablja podobno logiko kot oni (na podoben način se aproksimacije npr. lotita tudi Turnbull, Wakeman (1991)).
[53] V članku sicer omenita Y. Bergmana, ki naj bi že leta 1981 razvil splošen postopek za vrednotenje teh opcij, vendar je njegova rešitev neuporabna, saj je predpostavljal, da je izvršilna cena take pogodbe enaka nič (0). Poleg tega svojega dela ni javno objavil. Sicer sta se ukvarjala z APO azijskimi opcijami na podlagi zveznega vzorčenja. Formulo za enako opcijo na podlagi diskretnega vzorca lahko med drugim najdemo v Zhang (1998, str. 119) ali Vorst (1992).
[54] Velja za zvezno aritmetično azijsko opcijo. Če je uporabljeno drugačno povprečje, je tudi enačba (3.6.) nekoliko drugačna.

analitičnega izraza za aritmetične azijske opcije ni mogoča, zato sta njeno vrednost ocenila s pomočjo Monte Carlo metode.

Pri geometrijskih azijskih opcijah je rešitev enostavnejša. Zvezno geometrijsko povprečje je namreč lognormalno porazdeljeno z aritmetično sredino $\frac{1}{2}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\ln(S(t))$ in varianco $\frac{1}{3}\sigma^2(T-t)$. Ustrezno vrednost geometrijske azijske opcije lahko zapišemo kot

$$C = S(t)e^{(b_a-r)(T-t)}N(d) - e^{-r(T-t)}XN(d-\sigma_a\sqrt{(T-t)} \quad (3.7.),$$

$$b_a = \frac{1}{2}(b-\frac{1}{6}\sigma^2),$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{3}},$$

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{X}\right)+(b_a+\frac{1}{2}\sigma_a^2)(T-t)}{\sigma_a\sqrt{(T-t)}},$$

kjer so C vrednost nakupne geometrijske azijske APO opcije (gre za opcijo evropskega tipa, pri kateri se doba povprečenja začne v času t), $S(t)$ tržna cena osnovnega instrumenta, $N(d)$ standardizirana normalna porazdelitev, r netvegana obrestna mera, T-t čas do dospetja, X izvršilna cena in σ nestanovitnost osnovnega instrumenta. B in b_a sta izraza, ki predstavljata t.i. "*cost-of-carry*" (b) oz. prilagojeni "*cost-of-carry*" (b_a)[55], σ_a pa je ustrezno prilagojena nestanovitnost. [56] Enačba (3.7.) ima v primerjavi z Black-Scholesovo drugačno (manjšo) nestanovitnost, ki znaša $\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$[57], pričakovana stopnja rasti delnice pa znaša $\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{6}\sigma^2\right)$. Rezultat je torej podoben osnovnemu modelu, s tem, da sta prilagojena prvi in drugi moment verjetnostne porazdelitve. Ker je geometrijsko povprečje vedno manjše (ali enako) ustreznemu aritmetičnemu povprečju (je njegova spodnja meja), velja, da je tudi vrednost nakupne geometrijske opcije, ki jo dobimo s pomočjo enačbe (3.7.) vedno spodnja meja vrednosti aritmetične azijske opcije. S to ugotovitvijo si lahko pomagamo pri vrednotenju aritmetičnih azijskih opcij z Monte Carlo metodo, saj lahko na ta način zmanjšamo standardni odklon simulacij.

Kemnova in Vorst v svojem članku nista upoštevala možnosti, ko se doba povprečenja izteka. Kljub pravilnemu razmišljanju (da je varianca povprečja vedno manjša od variance posamičnih vrednosti), sta zato prišla do (napačne) ugotovitve, da je cena azijske opcije vedno nižja oz. kvečjemu enaka ceni navadne evropske opcije.

---

[55] Omogočata, da enačbo (3.4.) na preprost način prilagodimo za primer opcije na delnico, ki izplačuje dividende (b=r-q; q je zvezna dividendna donosnost) ali npr. za valutno opcijo (b=r-r_f; r_f je tuja netvegana obrestna mera). V osnovnem Black-Scholes modelu velja b_a=b=r .

[56] Enačbo za prodajno opcijo je mogoče enostavno izpeljati s pomočjo prodajno-nakupne paritete (ang. "*put-call parity*"), ki jo bom omenil spodaj. Podrobneje Hull (2000, str. 174-175) ali Wilmott (2000, str 38-39).

[57] Gre za t.i. "pravilo $\sqrt{3}$", ki govori o tem, da je razmerje med drugima momentoma verjetnostne porazdelitve osnovnega instrumenta in povprečja približno $\sqrt{3}$. Glej npr. Levy, Turnbull (1992) ali Zhang (1998, str. 123-125).

Enačba (3.7.) ima razmeroma majhno uporabno vrednost, saj je geometrijska azijska opcija dober približek aritmetične azijske opcije le, če je nestanovitnost osnovnega instrumenta razmeroma majhna. Poleg tega gre za formulo na podlagi zveznega vzorca, ki ni nujno vedno dober približek diskretnemu. Pomembna je zato, ker je bila prva javno objavljena.

Če sta avtorja, ki sta orala ledino na področju vrednotenja aritmetičnih azijskih opcij odnehala na točki, ko sta ugotovila, da analitična rešitev ne obstaja (in sta se zadovoljila z Monte Carlo metodo), je bil nadaljnji razvoj bolj pester. Omenil sem, da aritmetično povprečje ni lognormalno porazdeljeno in zato formul tipa (3.7.) ni mogoče izpeljati. Je pa mogoče določiti vrednost momentov verjetnostne porazdelitve le-tega (izračun momentov je možen tudi, če sama porazdelitev ni poznana). Ko poznamo ustrezne momente, lahko aproksimiramo porazdelitev aritmetičnega povprečja.[58]

3.2.1 Vorstova aproksimacija

Na zelo preprost način se je aproksimacije lotil Ton Vorst (1992). Razvil je formulo za vrednotenje diskretnih geometrijskih azijskih opcij, ki jo je neposredno uporabil za vrednotenje aritmetičnih azijskih opcij, vendar je pri tem ustrezno prilagodil (zmanjšal) izvršilno ceno. Izhajal je iz dejstva, da je aritmetično povprečje vedno večje (oz. enako) ustreznemu geometrijskemu povprečju.[59] Vrednost geometrijske azijske opcije evropskega tipa na podlagi diskretnega vzorca vrednosti osnovnega instrumenta zapiše kot

$$C = e^{-r(T-t)}\left\{ e^{M+\frac{V}{2}} N\left[\frac{M-\ln(X)+V}{\sqrt{V}}\right] - XN\left[\frac{M-\ln(X)}{\sqrt{V}}\right]\right\} \qquad (3.8.),$$

kjer sta M aritmetična sredina in V varianca lnP, ostali parametri pa so enaki kot pri (3.7.).[60] Če želimo enačbo (3.8.) neposredno uporabiti za aritmetične azijske opcije, moramo izvršilno ceno X ustrezno popraviti. Popravljena izvršilna cena X' odraža pričakovano razliko med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem: $X' = X - (EA - EG)$, kjer sta EA in EG pričakovani vrednosti aritmetičnega oz. geometrijskega povprečja (njuni vrednosti sta podani v članku, str. 183, enačbi 8 in 9). Napaka tovrstne aproksimacije je tako omejena z velikostjo razlike med obema povprečjema. Enačba (3.8.) je eksplicitna formula za vrednotenje geometrijskih oz. aritmetičnih (če uporabimo X') azijskih *nakupnih* opcij. Zapis formul za *prodajne* opcije je razmeroma preprost, saj lahko izhajamo iz prodajno-nakupne paritete ($\max[X-P,0]+P=\max[P-X,0]+X$).

Svojo aproksimacijo je primerjal z rezultati Monte Carlo metode, pri čemer je izhajal iz metodologije, ki jo je razvil S. Figlewski. Le-ta je ocenjeval potrebne odklone tržnih cen opcij od njihovih teoretičnih vrednostih, ki bi omogočali arbitražo. Vorst je ugotovil, da znaša za

---

58 Avtorji običajno arbitrarno določajo koliko momentov bodo uporabili pri svoji aproksimaciji. Bouchaud, Potters (2000, str. 10) pišeta o tem, da pri lognormalni porazdelitvi poznavanje momentov le-te ni vedno dovolj za opis celotne distribucije.

59 Izvršilno ceno je popravil za celotno razliko med obema povprečjema. Levy, Turnbull (1992) navajata, da dobimo v primeru, ko je $D>T$ boljše rezultate, če izvršilno ceno popravimo le še za nepoznani del končnega povprečja.

60 P je diskretno geometrijsko povprečje, kot je definirano v drugem poglavju. Kompaktne izraze za M in V si lahko zainteresirani bralec ogleda v originalnem članku.

nestanovitnost do 20 % letno, napaka njegove aproksimacije manj od 1 %, kar naj bi bilo glede na meje, ki jih je določil Figlewski, zanemarljivo. Natančnost aproksimacije se poslabša z večjo nestanovitnostjo osnovnega instrumenta, saj je takrat razlika med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem večja.

Omenim naj še eno ugotovitev, ki je sprva nekoliko kontraintuitivna. Če vemo, da je nestanovitnost povprečja manjša od nestanovitnosti posameznih vrednosti, bi morala biti azijska opcija cenejša od navadne opcije. Vendar pa je Vorst (1992, str. 193) prišel do ugotovitve, da pogostejši zajem (več vrednosti, ki jih uporabimo pri računanju povprečja) v enakem obdobju vodi k višji ceni opcije. Učinek povprečenja razdeli na dva dela. Vrednosti, ki gredo v povprečje na začetku dobe povprečenja, imajo običajno nizko nestanovitnost, zato prispevajo k znižanju cene opcije. Na drugi strani v primeru, ko je prvi dan povprečenja fiksen in večamo število zajemov, zgodnejši zajemi (vrednosti) izgubljajo na pomenu (imajo manjšo težo). Učinek povprečenja je zato manjši. Pomembnejše postajajo kasnejše vrednosti, ki imajo običajno višjo nestanovitnost. Splošno sicer velja, da prevlada prvi učinek.

3.2.2 Levyjeva aproksimacija

Levy (1992) je poskušal aproksimirati porazdelitveno funkcijo *lnP*, pri čemer je *P* diskretno aritmetično povprečje. Pri tem je predpostavil, da je možno *lnP* aproksimirati z neko drugo lognormalno porazdelitvijo (ključno izhodišče). Če ta predpostavka drži, moramo izračunati potrebne momente verjetnostne porazdelitve *lnP*. Po njegovem mnenju naj bi zadoščala že prva dva, aritmetična sredina in varianca. Oba parametra je mogoče dobiti s pomočjo funkcije za generiranje momentov

$$E\left[P^k\right] = e^{k\alpha + \frac{1}{2}k^2 v^2} \qquad (3.9.),$$

kjer *k* označuje želeni moment. Če želimo izraziti aritmetično sredino in varianco (α in v^2), v enačbo (3.9.) vstavimo *k=1* oz. *k=2*. Ko rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama, dobimo

$$\alpha = 2\ln E(P) - \frac{1}{2}\ln E(P^2) \qquad (3.10.)$$

in

$$v^2 = \ln E(P^2) - 2\ln E(P) \qquad (3.11.).$$ [61]

Formulo za nakupno aritmetično azijsko opcijo dobimo tako, da enačbi (3.10) in (3.11.) vstavimo v enačbo (3.8.) namesto *M* oz. *V* (Haug, 1998, str. 98-99). Na ceno opcije (pričakovano) vpliva natančnost izračunane aritmetične sredine in variance.

Levy, kot eden redkih, preverjanje natančnosti svojih izračunov začne ravno pri teh dveh parametrih. Izkaže se, da je za vrednosti σ manjše od 20 % letno, aproksimacija zelo natančna. Za večje nestanovitnosti se natančnost metode precej poslabša (vrednosti opcij so precenjene). Ker upošteva le prva momenta, ne zajame morebitnih razlik med obema

[61] Kompaktne izraze za $E[P^k]$ je mogoče najti v prilogi originalnega članka (Levy, 1992, str. 488-490).

porazdelitvama (dejansko in lognormalno) v višjih momentih (v tretjem in/ali četrtem). Pri višjih nestanovitnostih te razlike niso več zanemarljive in jih je zato potrebno upoštevati.[62]

Zanimivo je, kako Levy razlaga učinek večanja (manjšanja) vzorca ($n \uparrow$ oz. $\downarrow$) iz katerega računamo povprečje. Po njegovem je logično, da je APO azijska opcija z nižjim *n* (npr. ko gre za četrtletni zajem) cenejša od sicer identične opcije z višjim *n* (npr. dnevnim zajemom). To naj bi bilo posledica dejstva, da pri opciji z nižjim *n* s prvo vrednostjo, ki gre v izračun povprečja, finančni izid določimo do večje mere, kot pri opciji z višjim *n*, in tako zmanjšamo negotovost. Ko je do dospetja le še eno četrtletje (in s tem le en zajem vrednosti za prvo opcijo),[63] je finančni izid prve opcije v večji meri že določen (upoštevali bomo le še eno vrednost), medtem, ko moramo pri drugi opciji upoštevati še vse dnevne cene v zadnjem četrtletju. Ob ugodnem gibanju cen osnovnega instrumenta bo z bližanjem dospetja opcije, APO postajala vse dražja glede na enako opcijo z večjim *n*.

3.2.3 Aproksimacija Turnbulla in Wakemana

Turnbull, Wakeman (1991) sta pravo (neznano) porazdelitev aritmetičnega povprečja *f(x)* aproksimirala tako, da sta jo s pomočjo Edgeworthove vrste razširila okoli lognormalne porazdelitve. Na ta način sta primerjala pravo porazdelitev *f(y)* z neko lognormalno porazdelitvijo a*(y)*, ki ima enaka prva dva momenta (aritmetično sredino in varianco).[64] Njuna rešitev se od Levyeve razlikuje v tem, da upoštevata tudi tretja in četrta momenta (oz. razliki med njimi). *f(y)* sta izrazila kot:

$$f(y) = a(y) + \frac{c_2}{2!}\frac{d^2a(y)}{dy^2} - \frac{c_3}{3!}\frac{d^3a(y)}{dy^3} + \frac{c_4}{4!}\frac{d^4a(y)}{dy^4} + e(y) \qquad (3.12.),$$

kjer so c_2, c_3 in c_4 konstante (podane v članku), ki so odvisne od višjih momentov *f(y)* in uporabljene lognormalne porazdelitve *a(y)*, *e(y)* pa je rezidualna napaka. Izračunati moramo torej potrebne momente *f(y)* in a*(y)*.[65] S pomočjo omenjene metode sta prišla do enake formule kot Levy (1992), s tem, da sta ji dodala (*x* je izvršilna cena)

$$\frac{c_2}{2!}a(x) - \frac{c_3}{3!}\frac{da(x)}{dy} + \frac{c_4}{4!}\frac{d^2a(x)}{dy^2} \qquad (3.13.).$$[66]

Na ta način sta odpravila zgoraj omenjeno pomanjkljivost, ko je bila uporabnost aproksimacije z večanjem nestanovitnosti čedalje manjša (zaradi razlik v simetričnosti in/ali sploščenosti obeh porazdelitev). Taka aproksimacija je precej boljša za nestanovitnosti na intervalu med 20 in 30 % letno.[67] Pričakovano je tudi, da za nestanovitnosti pod 20 %

---

[62] Rahlo je kontradiktoren samemu sebi. Na začetku članka pravi, da sta prva dva momenta dovolj in da sta Turnbull, Wakeman (1991) "pretiravala". Na koncu sam ugotovi, da je njegova metoda dobra le za nizke nestanovitnosti in da je za višje potrebno upoštevati tudi višje momente.

[63] Njegova trditev je problematična, saj bo v primeru, ko je bilo dosedanje povprečje nižje (višje) od izvršilne cene nakupna (prodajna) le stežka postala ITM.

[64] Y predstavlja diskretno aritmetično povprečje.

[65] Glej originalni članek.

[66] Kompakten izraz najdemo v Haug (1998, str. 97).

[67] Simulirane porazdelitve aritmetičnih povprečij pri visokih nestanovitnostih kažejo na nadaljnje razlike v simetričnosti in sploščenosti glede na lognormalno porazdelitev, ki jih ta metoda ne upošteva (Levy, Turnbull, 1992, str. 58).

izboljšave ni. Poleg tega se rezultati poslabšajo za $D>T$, ko pride do večjih razlik med vrednostmi aritmetičnih in geometrijskih azijskih opcij že pri nizkih nestanovitnostih (npr. 20 % letno).

Iz opisanega je jasno, da moramo biti pri zavarovanju pozicij, ki jih ustvarimo z azijskimi opcijami pozorni na odnos med D in T. Ko je $D>T$, namreč upoštevamo celotno obdobje povprečenja (D) in ne zgolj življenjske dobe opcije. V pomoč je lahko naslednji primer (povzet po originalnem članku). Do dospetja opcije je še 15 dni, promptna cena je 100, vzorec (povprečje) pa naj bo sestavljeno iz 28, 14 oz. ene vrednosti. Najprej naj bo izvršilna cena 100. V primeru, ko je $n=28$ smo 13 vrednosti že vključili v končno povprečje (predpostavimo, da je doslej poznano povprečje enako promptni ceni), zato je takšna opcija cenejša kot v primeru, ko je $n=14$ oz. $n=1$. Če je izvršilna cena 95, so cene opcij za vse tri vrednosti n zelo podobne (še vedno je sicer najnižja pri $n=28$), saj je v tem primeru nakupna opcija globoko ITM. Pozorni pa moramo biti na delto, ki je pri $n=28$ za polovico manjša od delte pri $n=14$. Omenjeno si lahko razlagamo s tem, da sta pri $n=28$ končni vzorec in s tem povprečje do precejšnje mere že določena (vključili smo že 13 od 28 vrednosti). Opcija je zato manj občutljiva na nihanja cene osnovnega instrumenta do dospetja.

3.2.4 Zhangova aproksimacija[68]

O njegovem pristopu sem nekaj napisal že pri razlagi razlik med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem, kar naj služi kot izhodišče. Problema se je lotil tako, da je razliko med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem aproksimiral s pomočjo Taylorjeve vrste. Na ta način je dobil koeficient κ (velja $\kappa>1$). Z njegovo pomočjo je, podobno kot Vorst (1992), popravil izvršilno ceno. Če je slednji izvršilno ceno popravil (zmanjšal) za pričakovano razliko med vrednostma aritmetičnega in geometrijskega povprečja, pa Zhang pogodbeno izvršilno deli s κ (X/κ), kar pomeni, da je tudi v tem primeru efektivna izvršilna cena manjša. To poveča (zmanjša) ceno nakupne (prodajne) aritmetične azijske opcije.

3.2.5 Uporaba aproksimacij

Opisane aproksimacije lahko na preprost način uporabimo tudi, ko je doba povprečenja daljša od življenjske dobe opcije ($D>T$). Povprečje P lahko razdelimo na dva dela: (a) del, ki je posledica že opazovanih cen (torej v obdobju pred nakupom opcije) in ga označimo s P^1 (njegovo vrednost poznamo, izračunali smo jo v času t_1) in na del, ki ga še ne poznamo in bo določen ob dospetju opcije (P^*, njegovo vrednost bomo računali v obdobju t_2). Velja

$$P = \frac{P^1 t_1 + P^* t_2}{t_1 + t_2} \qquad (3.14.),$$

kjer je $D=t_1+t_2$. APO azijska opcija bo izvršena, če bo P večje od izvršilne cene X. Vrednost take opcije ob dospetju bo $\max\left[\frac{P^1 t_1 + P^* t_2}{t_1 + t_2} - X, 0\right]$, kar lahko zapišemo tudi kot

68 Zhang (1998, str. 135-158). Njegove formule so zastavljene zelo široko, saj se za določene vrednosti parametrov spremenijo v osnovno Black-Scholesova formulo.

$\frac{t_2}{t_1+t_2}\max[P^*-X',0]$, kjer je X' efektivna izvršilna cena in je enaka $X'=\frac{t_1+t_2}{t_2}X-\frac{t_1}{t_2}P^*$. Vidimo, da je lahko $X'<0$. V tem primeru bo nakupna opcija izvršena, ne glede na prihodnje vrednosti osnovnega instrumenta. Tudi če so vse enake nič, bo povprečje ob dospetju večje od prave izvršilne cene, saj P^* ne more biti negativno (k P^1 bi v skrajnem primeru prišteli nič). Taka *nakupna* azijska opcija je, ne glede na prihodnje cene osnovnega instrumenta ITM (z verjetnostjo 1) in bo zato bo dražja od navadne opcije.[69] Seveda to pomeni, da bo *prodajna* azijska opcija brez vrednosti. Vidimo, da je bila ugotovitev Kemnove in Vorsta (glej zgoraj) pomanjkljiva, saj ne velja v primeru, ko je $D>T$. V primeru, ko je $X'>0$, lahko opcijo vrednotimo kot novo izdano azijsko opcijo, s tem, da izvršilno ceno X zamenjamo z efektivno izvršilno ceno X', rezultat pa pomnožimo s $\frac{t_2}{t_1+t_2}$.

Predstavljene aproksimacije dajo zadovoljive rezultate za posamezne ravni nestanovitnosti. Splošno velja, da smo lahko pri vprašanju natančnosti različnih aproksimacij do različnih rešitev nekoliko prizanesljivi, saj se napake podobnega reda pojavijo tudi pri oceni nestanovitnosti, ki je eden ključnih inputov v vseh modelih.[70] Pri visokih nestanovitnostih je vključitev višjih momentov smiselna in da razmeroma dobre rezultate, predvsem, ko smo na začetku ali v dobi povprečenja. V primeru, ko opcijo vrednotimo pred začetkom dobe povprečenja, sta bolj pomembni natančni oceni prvih dveh momentov povprečja. Univerzalne rešitve ni, zato med avtorji in uporabniki prevladuje mnenje, da je za nestanovitnosti nad 30 % letno, najbolje uporabiti Monte Carlo metodo.

3.3 ASO AZIJSKE OPCIJE

Njihova glavna značilnost je variabilna (ang. "*floating*") izvršilna cena. Če je bila pri APO azijskih opcijah nepoznana verjetnostna porazdelitev aritmetičnega povprečja, se tu soočamo še z večjo težavo. Ni namreč dovolj zgolj poznavanje porazdelitve aritmetičnega povprečja, temveč skupne porazdelitve para (P, S_D), pri čemer je S_D zadnja cena osnovnega instrumenta, katerega vrednosti opazujemo v dobi povprečenja D.[71] Predstavil bom dva članka. Oba se na podoben način ukvarjata z zveznimi aritmetičnimi ASO azijskimi opcijami, s to razliko, da drugi nadaljuje tam, kjer je prvi končal.[72]

Cilj je ustrezna aproksimacija verjetnostne porazdelitve para (P, S_D). Bouaziz, Briys, Crouhy (1994) so s pomočjo Taylorjeve vrste (pravo) porazdelitev para (P, S_D) linearno aproksimirali s skupno lognormalno porazdelitvijo. Ker njihova aproksimacija temelji na aproksimaciji lognormalne porazdelitve, bo verjetno dobra le za razmeroma majhne nestanovitnosti. Predvidevanje se izkaže za pravilno, zato jo je potrebno v primeru višjih nestanovitnosti prilagoditi. Chung, Schackleton, Wojakowski (2000) navajajo, da pride pri višjih nestanovitnostih pri uporabi formule zgoraj omenjene trojice, do podobnih napak, kot če bi za vrednotenje aritmetičnih ASO azijskih opcij uporabljali natančne formule za geometrijske

[69] Pri tej namreč v tem časovnem trenutku (ko smo opcijo kupili) ne moremo vedeti ali bo končala ITM/ATM oz. OTM.
[70] Glede na tekočo ali vgrajeno (ang. "*implied volatility*").
[71] Osredotočil se bom le na aritmetično povprečje, saj v primeru, ko je P geometrijsko povprečje, težav z ugotavljanjem ustrezne porazdelitve ni.
[72] Z vrednotenjem tovrstnih opcij se je ukvarjal tudi Zhang (1998, str. 125-128 in 155-157). Izpelje korelacijski koeficient med S_t in P ter uporabi standardno bivariatno normalno porazdelitev med obema spremenljivkama. Izpelje formule za obe vrsti povprečij, za primer diskretnega in zveznega vzorca. Pri ASO zveznih azijskih opcijah se omenjeni korelacijski koeficient spremeni v konstanto.

ASO azijske opcije. Zato poskušajo porazdelitev para (P, S_D) aproksimirati s pomočjo členov Taylorjeve vrste višjega reda.

3.3.1 Linearna aproksimacija Bouaziza, Briysa in Crouhya

Vrednost ASO azijske opcije ob dospetju lahko zapišemo kot $\max[S_T - P]^+$ (ker bo govora le o nakupnih opcijah, binarni operator izpuščam). Njeno sedanjo vrednost lahko izrazimo kot pričakovanje, pri čemer predvidevamo, da finančni investitorji ne zahtevajo premije za tveganje (ang. "*risk-neutral expectation*")[73]

$$C_t = e^{-r(T-t)} E\left[(S_T - P)^+ \right] \qquad (3.15.),$$

kjer velja $t \le T$. S_T lahko za nek $u > t_0$ (čas, ko začnemo z izračunavanjem povprečja) nadomestimo s $S_u = S_{t_0} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(u - t_0) + \sigma (W_u - W_{t_0}) \right]$ in dobimo

$$C_t = e^{-r(T-t)} E\left\{ S_{t_0} E\left[Y(t_0, T)^+ \right] \right\} \qquad (3.16),$$

kjer velja

$$Y(t_o, T) = e^{\hat{r}D + \sigma(W_T - W_{t_0})} - \frac{1}{D}\int_{t_0}^{T} e^{\hat{r}(u - t_0) + \sigma(W_u - W_{t_0})} du \qquad (3.17),$$

$$\hat{r} = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

U je nek trenutek v času (velja $u > t_0$), W_u in W_{t_0} pa vrednosti Wienerjevega proces v času *u* oz. t_0. Ostali parametri so enaki kot v predhodnih enačbah. Enačba (3.17.) je zgolj drugače zapisan izraz (3.15.). Če prvi člen na desni strani enačbe (3.17.) pomnožimo s S_{t_0}, dobimo S_u (oz. S_T). Drugi člen predstavlja zvezno aritmetično povprečje, kot je definirano v okviru Definicije 2. Naslednji korak je ustrezna aproksimacija enačbe (3.17.).[74] S pomočjo členov Taylorjeve vrste prvega reda, avtorji aproksimirajo (linearizirajo) oba eksponenta v tej enačbi

$$e^{\hat{r}\Delta t + \sigma \Delta W} \cong 1 + \hat{r}\Delta t + \sigma \Delta W \qquad (3.18.),$$

kjer je Δt enako *D* oz. u-t_0, ΔW pa (W_T-W_{t_0}) oz. (W_u-W_{t_0}).[75] Če aproksimacijo (3.18.) vstavimo v (3.17.) je aproksimirani izraz za $Y(t_0, T)$ normalno porazdeljen, z aritmetično sredino

---

[73] Podrobneje pri vrednotenju azijskih opcij s pomočjo dreves.

[74] Tu bom prikazal le primer, ko se doba povprečenja še ni začela, kar zadošča za prikaz osnovne logike. Bouaziz, Briys, Crouhy (1994) sicer obravnavajo tudi primer, ko je $D > T$, kjer lahko povprečje zopet razdelimo na poznani in nepoznani del. Glej njihov članek, str. 831-832.

[75] Taylorjeva vrsta za e^x je $1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$

$$m = \frac{\hat{r}D}{2} \tag{3.19}$$

in varianco

$$v = \frac{\sigma^2 D}{3}$$ (3.20.).[76]

Formula za ASO azijske opcije (za $D=T$ in $D<T$) je

$$C = S_t e^{rD}\left[mN\left(\frac{m}{\sqrt{v}}\right) + \sqrt{\frac{v}{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2v}} \right] \qquad (3.21.).$$

Ker s povprečenjem še nismo začeli, cena opcije ni odvisna od povprečja. Vrednost opcije je zmnožek tekoče cene (S_t) in konstante, neodvisne od t (ko je $D=t$ *je* $t=t_o=0$ in $S_t = S_0$). Taka opcija ni neposredno odvisna od časa do dospetja (kar je zelo pomembno, če npr. upoštevamo časovno vrednost pri običajni opciji). Edina odvisnost od časa je implicitna skozi S_t. Teta opcije, ki nam pove za koliko se spremeni vrednost opcije glede na enoto časa (za običajno opcijo je z nekaterimi izjemami vedno negativna, saj se s približevanjem roka zapadlosti vrednost opcije zmanjšuje, ker časovna vrednost pada) je v tem primeru enaka 0 (smo pred začetkom povprečenja). Zakaj je temu tako? Tako opcijo lahko primerjamo s stavo na konjski dirki. Nekdo, ki bo želel staviti na konja, bo pripravljen za svojo stavo plačati enako vsoto ne glede na to, kdaj pred dirko stavi. Prodajalec stave ne bo podražil pred začetkom dirke. Seveda to ne velja, ko se dirka začne (začnemo s povprečenjem), saj bo takrat finančni izid čedalje bolj gotov (v primeru, da bi med dirko stave lahko preprodajali).

Kljub temu je (3.21.) še vedno zgolj aproksimacija. Prvič, prava porazdelitev $Y(t_0, T)$ ni normalna. Drugič, upoštevamo le prva dva momenta porazdelitve in tretjič, pri aproksimaciji $Y(t_0, T)$, smo uporabili le člene Taylorjeve vrste prvega reda (*vsi* členi $\hat{r}\Delta t + \sigma\Delta W$ naj bi bili majhni, kar bi pomenilo, da so njihove višje potence še manjše in jih zato lahko zanemarimo).[77] To drži le v primeru, ko so a) $\hat{r}$, b) D in c) nestanovitnost majhni.

3.3.2 Popravki Chunga, Schackletona in Wojakowskega

Zaradi pomanjkljivosti zgornje metode, predlagajo popravke v dveh korakih. Najprej dopolnijo omenjeno linearno aproksimacijo, nato pa razvijejo še kvadratno aproksimacijo. Linearno aproksimacijo popravijo tako, da izraz (3.18.) spremenijo v

$$e^{\hat{r}\Delta t + \sigma\Delta W} \cong e^{\hat{r}\Delta t}(1 + \sigma\Delta W) \qquad (3.22.).$$

Razlika je v tem, da ne razvijejo $e^{\hat{r}\Delta t}$, kar omogoča, da je aproksimacija natančna tudi, ko pogoja a) in b) nista izpolnjena.[78] Ti popravki izboljšajo rezultate prvotne aproksimacije za

---

[76] Ponovno pridemo do t.i. "pravila $\sqrt{3}$ ".

[77] Avtorji razvijejo tudi analitično formulo za zgornjo mejo absolutne napake vrednotenja iz katere je razvidno, da je zgornja meja naraščajoča funkcija nestanovitnosti osnovnega instrumenta in dobe povprečenja.

[78] Sedaj se ustrezno spremeni (3.17.) in posledično tudi oba momenta. Glej originalni članek (str. 6-7).

nestanovitnosti osnovnega instrumenta do 45 %. Za višje nestanovitnosti je boljša prvotna metoda. Obe linearni aproksimaciji sta kljub temu nenatančni. Z naraščanjem nestanovitnosti osnovnega instrumenta raste razlika med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem. Poleg tega obe metodi predpostavljata, da so členi, kot sta σW_u in σW_D (za $u \leq D$) majhni. To torej pomeni, da bi morali biti nestanovitnost (σ) in oba izraza, ki predstavljata Wienerjev proces (W_u, W_D) majhni. Vendar pa z naraščanjem dolžine dobe povprečenja D to ne drži, saj varianci obeh izrazov ($\sigma^2 u$ in $\sigma^2 D$) naraščata linearno s časom in kvadratno z nestanovitnostjo. Obe metodi precej odstopata od Monte Carlo simuliranih vrednosti oz. od kvadratne aproksimacije (glej spodaj), ker zanemarjata nekatere člene pri razvoju Taylorjeve vrste oz. predpostavljata, da so le-ti enaki nič. Da bi vključili vpliv teh dveh efektov (višje nestanovitnosti in daljše dobe povprečenja), predlagajo kvadratno aproksimacijo. Iz dosedanje razprave bi lahko sklepali, da bo vključitev členov višjega reda Taylorjeve vrste dala bolj natančno aproksimacijo. Namesto aproksimacije (3.22.) predlagajo

$$e^{\hat{r}\Delta t+\sigma\Delta W} \cong e^{\hat{r}\Delta t}\left[1+\sigma\Delta W+\frac{1}{2}(\sigma\Delta W)^2\right] \qquad (3.23.).^{79}$$

Tako dobljena kvadratna aproksimacija je dovolj natančna za nestanovitnosti do 50 % letno, ko znaša razlika (glede na simulirane Monte Carlo vrednosti) ± 2 %. Za enake nestanovitnosti znaša napaka aproksimacije, ki so jo razvili Bouaziz, Briys, Crouhy (1994) med –6.66 % in -27.84 %.

3.4 FAO azijske opcije[80]

Vse opisane metode so se ukvarjale z netehtanimi povprečji, kar pomeni, da so bile vse vrednosti v vzorcu enako pomembne oz., da imajo enake uteži. Dodelitev enakih uteži vsem opazovanim vrednostim v vzorcu je lahko včasih neustrezna. Izvoznik, ki se želi zavarovati pred depreciacijo valute v kateri dobiva plačila (pri čemer se njihova vrednost med seboj zelo razlikuje), bi bil v primeru, ko bi vsem denarnim pritokom dodelil enako težo, v posameznih mesecih, ko bi le-ti močneje odstopali, neustrezno zavarovan. Če bi jim pripisal različne uteži, bi lahko bolj natančno določil pomen *i*-te vrednosti osnovnega instrumenta v vzorcu iz katerega računamo povprečje. Čeprav se v praksi največ uporabljajo azijske opcije, pri katerih vsem opazovanjem pripišemo enako težo, je uporaba različnih shem uteži (ang. "*alternative weighting schemes*") za uporabnike smiselna. Uteži lahko zelo splošno določimo kot

$$W(n,i)=\frac{q(i)}{\sum_{i=1}^{n} q(i)} \qquad (3.24.),$$

pri čemer je $q(i)$ katerakoli nenegativna funkcija *i*-te (opazovane) vrednosti, n pa je število le-teh. Če izberemo $q(i)=i^{\alpha}$, se splošno določena utež (3.24.) spremeni v

$$W(n,\alpha,i)=\frac{i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}},\ \text{za } i=1, 2,...n \qquad (3.25.).$$

[79] Še vedno velja formula (3.21). Izračun obeh momentov je podan v originalnem članku.
[80] Več v Zhang (1994, 1995 in 1998, str. 163-186).

Parameter α določa pomen (težo) posameznih vrednosti. Tehtani povprečji, ki sem ju definiral v okviru Definicije 3 (točka c) lahko s pomočjo (3.24.) oz. (3.25.) dopolnimo tako, da vanju namesto ω_i vstavimo omenjena izraza. Ko povečujemo parameter α, dajemo zadnjim opazovanjem čedalje večje uteži – bolj se torej bližamo navadni opciji in klasični Black-Scholesovi formuli ($\alpha \rightarrow \infty$, velja $W(n, \alpha, n) \rightarrow 1$ in $W(n, \alpha, i) \rightarrow 0$). Pretekle opazovane vrednosti postajajo čedalje manj pomembne, na drugi strani pa kasnejše vrednosti dobivajo težo 1 (navadna opcija). V primeru, ko $\alpha \rightarrow 0$ ($W(n, \alpha, i)=1/n$) dobijo vse vrednosti enake uteži (dobimo običajno APO oz. ASO azijsko opcijo). Izpeljava formul za vrednotenje geometrijskih FAO azijskih opcij je podobna, kot pri geometrijskih APO azijskih opcijah, le da navadno geometrijsko povprečje nadomestimo s tehtanim. Pri aritmetičnih FAO azijskih opcijah je vse skupaj precej bolj kompleksno. Vsi postopki in izpeljave so prikazane v omenjenih virih.

FAO azijske opcije se razlikujejo tako od navadnih kot tudi od običajnih azijskih opcij. Poleg ostalih parametrov, ki vplivajo na delto navadnih azijskih opcij, je tu potrebno upoštevati tudi uteži (oz. funkcije, ki določajo porazdelitev uteži). Uporabnik lahko obliko uteži prilagodi svojim potrebam tako, da išče zase najbolj ustrezne vrednosti α. Če pričakuje, da bo osnovni instrument sledil nekemu trendu, išče uteži, ki mu bodo ustrezale. Ker take opcije (še) bolje zajamejo pričakovanja uporabnika oz. je njihova vrednost odvisna od dodatnega parametra, jih v tuji literaturi imenujejo tudi *trend opcije*. FAO azijske opcije omogočajo uporabnikom, da svoje specifično pričakovanje o gibanju osnovnega instrumenta v prihodnosti vgradijo v model (ceno opcije) tako, da različno ovrednotijo različno oddaljene vrednosti osnovnega instrumenta.

3.5 AZIJSKE OPCIJE AMERIŠKEGA TIPA

Osnovna značilnost opcij ameriškega tipa je v možnosti njihove predčasne izvršitve, saj jih lahko izvršimo kadarkoli v življenjski dobi. Take opcije so dražje, ker mora kupec za to dodatno ugodnost plačati posebno premijo.[81] Strokovni članki na temo vrednotenja azijskih opcij ameriškega tipa so redki. Prav tako nisem zasledil primerov o njihovi uporabi. Glavni razlog je v tem, da naj bi bila njihova uporaba v nasprotju z osnovno logiko azijskih opcij, to je znižati nestanovitnost cene osnovnega instrumenta. Taka pogodba bi bila namreč precej bolj občutljiva, saj bi lahko (teoretično) do morebitnih manipulacij s tekočo tržno ceno prihajalo vsak dan. Prav tako bi bilo zelo težko oceniti kaj povprečje, ki bi ga izračunali v nekem delu dobe povprečenja, pomeni za finančni izid (končno povprečje). Do izvršitve bi lahko prišlo še preden bi s povprečenjem sploh zmanjšali varianco. Omenim naj le članek Hansena in Jørgensona (1997). Avtorja se ukvarjata z ASO zveznimi azijskimi opcijami ameriškega tipa. Zatrjujeta, da naj bi kot prva razvila analitično formulo za njihovo vrednotenje. Ugotovila sta, da naj bi imetnik opcije, ceteris paribus, ob večji nestanovitnosti na predčasno izvršitev čakal dlje kot v primeru nizke nestanovitnosti.

3.6 DREVESA

Eno od možnosti za vrednotenje opcij predstavljajo binomska drevesa. Začetki modela segajo v leto 1975, ko se je na neki finančni konferenci v Izraelu porodila ideja, da bi Black-

[81] Več o navadnih opcijah ameriškega tipa in o njihovem vrednotenju v Hull (2000, str. 425 in 432-434).

Scholesova formulo "spremenili" v diskretno obliko. Idejo so kot prvi bolj natančno obdelali Cox, Ross, Rubinstein (1979; v nadaljevanju CRR). Spremembe (gibanje) cene osnovnega instrumenta (delnic) so predstavili v obliki binomskega drevesa. Gibanje cen delnic naj bi bilo sestavljeno iz velikega števila majhnih binomskih premikov, kar pomeni, da je lahko cena delnice v obdobju t_{n+1} glede na obdobje t_n višja ali nižja.

Model temelji na predpostavki, da so finančni investitorji indiferentni do tveganja oz. z drugimi besedami, da je vrednost delnic neodvisna od njihovih preferenc glede tveganja (ang. "*risk-neutral valuation*"). Omenjeno predpostavko lahko uporabimo, če je neko premoženje mogoče popolnoma zavarovati tako, da postane netvegano. Koncept izhaja iz ene ključnih značilnosti Black-Scholes-Mertonove diferencialne enačbe in je uporaben ne glede na zgornjo predpostavko. V tej enačbi nastopajo spremenljivke (tekoča cena delnice, čas, nestanovitnost cene delnice, netvegana obrestna mera), ki so neodvisne od preferenc tveganja finančnih investitorjev. Slednje se sicer odražajo v pričakovani donosnosti delnice (μ), vendar v enačbo ne vstopajo in zato ne morejo vplivati na njeno rešitev. Posledično je predpostavka o tem, da so investitorji nevtralni do tveganja (ang. "*risk-neutral*"), smiselna. Ker finančni investitorji ne zahtevajo kompenzacije (premije) za tveganje, je pričakovana donosnost vseh vrednostnih papirjev enaka netvegani stopnji donosa (r). S pomočjo tega spoznanja, lahko sedanjo vrednost kateregakoli denarnega toka izračunamo tako, da njegovo pričakovano vrednost diskontiramo z netvegano stopnjo donosa. Opisano precej poenostavi analizo in je eno osnovnih izhodišč pri vrednotenju izvedenih finančnih instrumentov. Čeprav je binomsko drevo sestavljeno tako, da predstavlja gibanje cen delnic v svetu, ki je nevtralen do tveganja, so, kot rečeno, dobljeni rezultati uporabni tudi v primeru, če so finančni investitorji tveganju nenaklonjeni (ang "*risk-averse*"). V tem primeru se spremenita tako pričakovana stopnja rasti cen delnic (pričakovana donosnost) kot tudi diskontna stopnja, s pomočjo katere izračunamo sedanjo vrednost izvedenega finančnega instrumenta. Oba učinka se medsebojno vedno v celoti izničita.

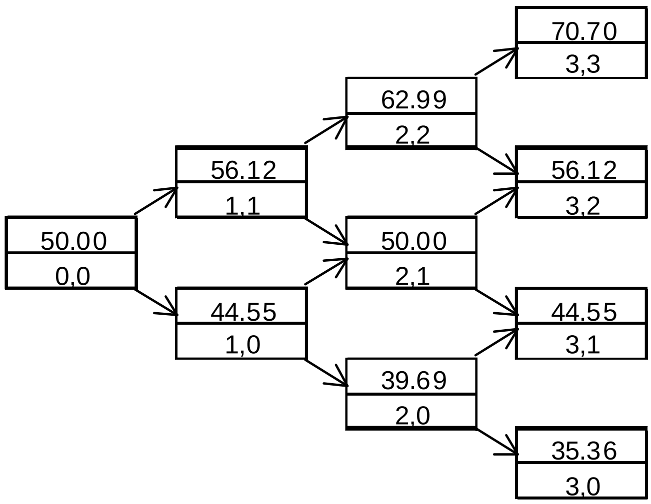
Velikosti premikov dol (gor) in verjetnosti obeh so izbrani tako, da ustrezajo prvima dvema momentoma (aritmetični sredini in varianci) porazdelitve cen delnic. To zagotavlja, da je binomsko drevo diskretna oblika geometrijskega Brownovega gibanja (časovni koraki so neki končni intervali; imamo n časovnih korakov dolžine $\Delta t=T/n$). Pri računanju opcijske premije v času t_0 izhajamo iz opcijske premije ob zapadlosti opcije T (ko je navadna opcija vredna $\max[\phi S_T-\phi X,0]$). Zaradi predpostavke o indiferentnosti do tveganja, lahko vrednost opcije na vsakem vozlu v času $T-\Delta t$ izračunamo kot pričakovano vrednost v času T, diskontirano s stopnjo r za časovno obdobje Δt. Začnemo na koncu drevesa, pri čemer izhajamo iz omenjenega mejnega pogoja. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do (pričakovane) opcijske premije v sedanjosti (pri ameriškem tipu opcije na vsakem vozlu preverimo, če je smiselna predčasna izvršitev). Z večanjem števila časovnih korakov ($n \rightarrow \infty$) vrednost opcije, ki jo izračunamo z drevesom, konvergira k tisti, izračunani s pomočjo Black-Scholesove formule (Wilmott, 2000, str. 190-191).

Pristopa ni mogoče neposredno uporabiti za vrednotenje azijskih opcij. Osnovni instrument lahko namreč na posameznih vozlih (ang. "*nodes*") zavzame različne vrednosti. To pri navadnih opcijah ne predstavlja nobenega problema, saj nas zanimajo le končne vrednosti osnovnega instrumenta. Pri azijskih opcijah iz teh vrednosti računamo povprečja. Ker število možnih različnih vmesnih in končnih vrednosti osnovnega instrumenta z večanjem drevesa (t.j. z večjim številom časovnih korakov – ang. "*time steps*") narašča eksponentno (s stopnjo 2^n, pri čemer je n število časovnih korakov), to pomeni, da število možnih različnih povprečij na vsakem vozlu prav tako raste izjemno hitro oz. enako stopnjo 2^n. V tuji strokovni literaturi je kljub temu mogoče zaslediti določene rešitve, ki poskušajo to težavo odpraviti oz. originalni pristop CRR prilagoditi tako, da je uporaben tudi za vrednotenje opcij, kakršne so azijske (ključna je njihova odvisnost od gibanja osnovnega instrumenta v dobi povprečenja). Podrobneje bom predstavil rešitev, ki sta jo ponudila Hull, White (1993) ter metodo, ki so jo razvili Chalasani, Jha, Varikooty (1998). Z njima je mogoče vrednotiti tudi ameriški tip azijskih opcij, za katerega, kot smo videli, analitičnih rešitev (skoraj) ni.

3.6.1 Hull in White[82]

Osnovna predpostavka njune rešitve je, da je vrednost obravnavanega izvedenega finančnega instrumenta v nekem trenutku t funkcija časa (t), cene osnovnega instrumenta v času t (S oz. $S(t)$) in neke funkcije, ki zajema pot oz. gibanje cene (ang. "*path followed*") osnovnega instrumenta med časom 0 in t ($F(t,S)$; v nadaljevanju funkcija poti). Njegovo vrednost lahko zapišemo kot $v(S,F,t)$.

Slika 3: CRR drevo za gibanje cene delnic



Opomba: V splošnem obstaja $i+1$ vozlov (cen delnic) v času $i\Delta t$. $j=0, 1, \ldots, i$.

Vir: Hull, White, 1993, str. 23.

Na zgornji sliki so prikazane cene delnic (zgornji kvadrat na posameznem vozlu) v binomskem drevesu s tremi časovnimi koraki ($n=3$; dolžina koraka je en mesec). Začetna vrednost delnice S(0)=50, netvegana stopnja donosa $r=10$ *%* p.a., nestanovitnost (σ) znaša 40 % letno. Cena delnice na poljubnem vozlu (i, j) znaša $S(i,j) = S(0)u^j d^{i-j}$. Izpeljava enačbe in razlaga spremenljivk u, d je podana npr. v Hull (2000, str. 388-391). Spodnja vrstica predstavlja koordinate (i, j). Če bi imeli opravka z običajno opcijo, bi s pomočjo drevesa na sliki 3 opcijsko premijo izračunali tako, da bi začeli na koncu drevesa (dospetje opcije) in bi na način, ki sem ga opisal zgoraj na vsakem vozlu izračunali opcijsko premijo, vse do sedanjosti.

[82]Opisani postopek je uporaben le za tiste azijske opcije, kjer velja $D=T$.

Vrednotenje opcij, ki so odvisne od gibanja (poti) osnovnega instrumenta, je drugačno. Izračunati moramo vrednost opcije na vsakem vozlu za vse možne vrednosti, ki jih zavzame funkcija poti $F(t, S)$. Pogoja, da je tako početje smiselno sta dva:

a) vrednost $F(t+\Delta t, S)$ je mogoče izračunati na podlagi $F(t, S)$ in $S(t+\Delta t)$, kar pomeni, da je funkcija poti markovska (F v času $(i+1)\Delta t$ je mogoče izračunati s pomočjo vrednosti F v času $i\Delta t$ in S v času $(i+1)\Delta t$) in

b) število alternativnih vrednosti $F(t, S)$ z večanjem drevesa ne sme naraščati prehitro.

Žal za azijske opcije drugi pogoj ni izpolnjen, saj je število različnih vrednosti F (ki tedaj predstavlja ustrezno povprečje) enako 2^n. Zato avtorja predlagata, da bi vrednost opcije $v(F,S,t)$ na posameznem vozlu izračunali le za neke vnaprej določene vrednosti F. Vrednosti $v(F,S,t)$ za preostale F je nato mogoče izračunati iz poznanih vrednosti z enostavno linearno interpolacijo. Odločiti se je potrebno, za katere F bomo neposredno izračunali vrednosti opcij. Smiselno je, da gre za obe mejni vrednosti F na posameznem vozlu (minimum in maksimum) in za tiste, ki so med njima enakomerno razporejene (izhodiščne vrednosti). Avtorja sta arbitrarno izbrala vrednosti, ki imajo obliko

$$S(0)e^{mh} \qquad (3.26.)$$[83],

kjer je h konstanta (predpostavita, da je $h=0.1$), m pa je celo število (pozitivno ali negativno). Na podlagi drevesa prikazanega na sliki 3, lahko največje možno povprečje v času $1\Delta t$ izračunamo kot (50.00+56.12)/2=53.06, najmanjše pa kot (50.00+44.55)/2=47.275. Če želimo zajeti vse možne vrednosti F, morajo biti vrednosti m –1, 0 oz. 1. S pomočjo (3.26.) lahko izračunamo želene izhodiščne vrednosti, ki so 45.24 ($m=-1$), 50.00 ($m=0$) in 55.26 ($m=1$). V času $2\Delta t$ za zajem vseh vrednosti vzamemo 45.24 in 55.26 in na njuni podlagi izračunamo minimum ((2*45.24+39.69)/3=43.39) oz. maksimum ((2*55.26+62.99)/3=57.84) v času $2\Delta t$. Za zajem vrednosti na tem intervalu mora biti vrednost m med –2 in 2. Vrednosti na kasnejših vozlih izračunamo na podoben način.

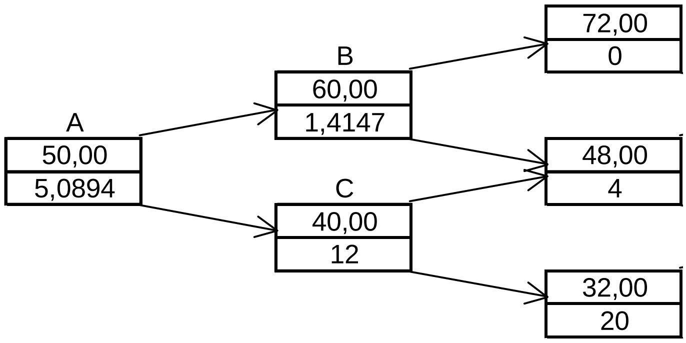
Splošno lahko k-to vrednost funkcije poti na vozlu (i,j) zapišemo kot $F_{i,j,k}$, ustrezno vrednost opcije pa z $v_{i,j,k}$. Ob dospetju je vrednost opcije enaka $v_{n,j,k}$ in je poznana za vse vrednosti j in k. Zanimajo nas torej vrednosti opcije za $i<n$. Verjetnost, da cena delnice naraste (premik na vozel $(i+1, j+1)$, kjer predpostavimo, da imamo k_u-to vrednost F) je enaka p, z verjetnostjo $1-p$ pa bo cena delnice nižja (vozel $(i+1, j)$, tu imamo k_d-to vrednost funkcije poti F). Za opcijo evropskega tipa velja[84]

$$v_{i,j,k} = e^{-r\Delta t}\left[p v_{i+1,j+1,k_u} + (1-p) v_{i+1,j,k_d} \right] \qquad (3.27.).$$

Pri opcijah ameriškega tipa, je potrebno smiselnost predčasne izvršitve preverjati na vsakem vozlu posebej, kar bo razvidno iz naslednjega primera.

[83] Zato, ker se S giblje v skladu z geometrijskim Brownovim gibanjem. Sicer za splošno uporabo predlagata tehniko poskusov in napak (ang. "*trial and error*") za določanje najboljših izhodiščnih vrednosti F.
[84] Opcija ameriškega tipa je lahko predčasno izvršena.

Slika 4: Drevo za vrednotenje navadne prodajne opcije ameriškega tipa



Opomba: Na vrhu je oznaka vozla, v drugi vrstici je cena delnice, v tretji pa cena opcije. Izvršilna cena je 52.

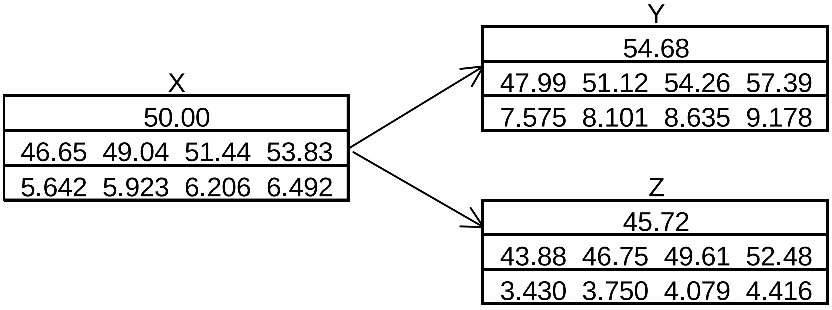
Vir: Hull, 2000, str. 210-211.

Cene na končnih vozlih so enake za opcije evropskega in ameriškega tipa. Do sprememb pride na ostalih vozlih. Na vozlu *B* je vrednost opcije enaka izračunani s pomočjo enačbe (3.27.), saj bi bila vrednost opcije ob predčasni izvršitvi negativna (52-60=-8). Na vozlu *C* dobimo z enačbo (3.27.) vrednost 9.4636, v primeru predčasne izvršitve pa 12. V tem primeru bomo opcijo izvršili, zato je v tretji vrstici vozla namesto izračunane vrednosti, zapisana vrednost v primeru predčasne izvršitve. Ko bi računali vrednost opcije na vozlu *A*, bi v konkretnem primeru za v_{i+1,j,k_d} vnesli 12. Splošno velja, da je vrednost opcije na zgodnejših vozlih, enaka večji vrednosti od izračunane s pomočjo enačbe (3.27.) in vrednosti, če bi opcijo predčasno izvršili.

Pri azijskih opcijah enačba (3.27.) sicer velja, vendar vrednosti $v_{i+1,j+1,k_u}$ in $v_{i+1,j+1,k_d}$ ne računamo nujno na vozlih *(i+1)Δt*. Vrednost $v_{i+1,j+1,k_u}$ lahko npr. določimo z interpolacijo med $v_{i+1,j+1,k_1}$ in $v_{i+1,j+1,k_2}$, pri čemer sta k_1 in k_2 izbrana tako, da sta $F_{i+1,j+1,k_1}$ in $F_{i+1,j+1,k_2}$ najbližji vrednosti funkcije *F* vrednosti $F_{i+1,j+1,k_u}$, ki imata obliko (3.26.). Velja $F_{i+1,j+1,k_1} \leq F_{i+1,j+1,k_u} \leq F_{i+1,j+1,k_2}$. Na podoben način lahko izračunamo tudi vrednost $v_{i+1,j+1,k_d}$.

Prikaz uporabe opisanega postopka povzemam po Hullu (2000, str. 473-475). Velja naslednje: *S=50*, *X=50*, *r=10 %*, *σ=40 %*, *T=1*, *n=20* (vsi simboli enaki kot zgoraj). Parametri, ki opisujejo drevo so: *Δt=0.05, u=1.0936, d=0.9144, p=0.5056* in *1-p=0.4944*. *F* je aritmetično povprečje cen delnice.

Slika 5: Del drevesa za vrednotenje aritmetične azijske opcije



Vir: Hull, 2000, str. 474.

Slika 5 prikazuje izračune, ki so narejeni na delu opisanega drevesa. Čisto na vrhu je oznaka vozla, vrstico nižje je trenutna cena delnice, še nižje so povprečja, za katera neposredno računamo *v(F,S,t)* – gre za t.i. izhodiščne vrednosti *F*, v zadnji vrstici pa so vrednosti opcije (*v(F,S,t)*), ki tem izhodiščnim vrednostim ustrezajo.[85] Vozel *X* je v času 0.20 (konec četrtega časovnega koraka), vozla *Y* in *Z* pa sta v času 0.25 in sta dosegljiva iz vozla *X*. S pomočjo zgoraj opisanega postopka, lahko ugotovimo, da je maksimalna (minimalna) povprečna cena delnice na vozlu *X* enaka 53.83 (46.65). Preostali izhodiščni vrednosti dobimo s pomočjo (3.26.). Za ponazoritev izračuna vrednosti azijske opcije za *F*, ki je različen od izhodiščnih vrednosti bomo s izračunali vrednost opcije, ko velja *F=51.44* na vozlu *X* . Če se cena delnice v naslednjem koraku poveča (pridemo na vozel *Y*), dobimo novo povprečje, , ki znaša (5*51.44+54.68)/6=51.98 (ne gre za izhodiščno vrednost). Vrednost opcije na vozlu *Y* za omenjeno povprečje lahko sedaj izračunamo z interpolacijo med vrednostma opcije, ko znaša povprečja na vozlu *Y* 51.12 in 54.26 (vidimo, da velja $F_{i+1,j+1,k_1} \leq F_{i+1,j+1,k_u} \leq F_{i+1,j+1,k_2}$). Račun je naslednji:
$\frac{(51.98-51.12)\times 8.635+(54.26-51.98)\times 8.101}{54.26-51.12}=8.247$. Če cena delnice pade (vozel *Z*), bo novo povprečje enako (5*51.44+45.7)/6=50.49, z interpolacijo pa dobimo vrednost opcije $v_{i+1,j+1,k_d}$, ki je enaka 4.182. S tema vrednostima in enačbo (3.27.) je vrednost opcije vozlu *X* (ko znaša povprečje 51.44) enaka 6.206 $(0.5056\times 8.247+0.4944\times 4.182)e^{-0.1\times 0.05}=6.206$). Ko na ta način izračunamo vse vrednosti opcij na vozlu *X*, se premaknemo proti izhodišču na korak 0.15 in postopek ponovimo. To delamo vse do sedanjosti (t=0.00), kjer je vrednost opcije 7.17 (Hull, 2000, str. 475).

Omenim naj, da število časovnih korakov Δt (odvisno je od *n*) vpliva na azijske opcije ameriškega tipa bolj, kot na tiste evropskega tipa, saj z večanjem *n* število možnosti za predčasno izvršitev narašča. Ko *n* povečamo iz 20 na 80, se npr. cena azijske opcije evropskega tipa spremeni iz 4.663 na 4.687 oz. za 0.5 %. Na drugi strani se cena enake opcije ameriškega tipa poveča iz 5.197 na 5.377 oz. za 3.5 %.[86]

[85] Te izračunamo na enak način, kot če bi šlo za običajno opcijo – z računanjem nazaj v drevesu.
[86] Hull, White (1993).

3.6.2 Chalasani, Jha in Varikooty[87]

S postopkom, ki ga bom opisal v nadaljevanju, je mogoče v binomskem drevesu z n časovnimi koraki izračunati natančne spodnje in zgornje meje cen aritmetičnih azijskih opcij evropskega tipa. Ker število možnih poti v drevesu narašča izjemno hitro, jih omenjena trojka grupira v skupine. Postavijo dva pogoja. Poti v isti skupini morajo imeti

a) enako končno ceno delnice S_n in
b) enako geometrijsko povprečje.

Aritmetična povprečja poti v posamezni skupini bodo posledično verjetno podobna, zato je smiselno, če predpostavimo, da imajo vse poti v posamezni skupini enako aritmetično povprečje, ki je enako povprečju različnih aritmetičnih povprečij poti A_n, ki so v isti skupini. Njihova metoda je smiselna le, če je število možnih geometrijskih povprečij dovolj majhno (izkaže se, da je na točki k[88] ($k=0, 1, ..., n$) proporcionalno k^3). Pomembno je, da uporabimo oba pogoja. Pogoj b) bi namreč dosegli tudi z različnimi vrednostmi osnovnega instrumenta, kar bi pomenilo, da bi se aritmetično in geometrijsko povprečje med seboj precej razlikovala. Taka aproksimacija bi bila slaba. S pogojem a) dosežemo, da so poti osnovnega instrumenta iz iste skupine precej bolj podobne in bo zato omenjena pomanjkljivost odpravljena.

Grupiranje poti cen delnic v drevesu v skupine pogojujejo z določeno slučajno spremenljivko Z. Zatem za vsako skupino (povprečje v njej) preverijo, če je $A_n>X$. Na koncu tako dobljene vrednosti ob dospetju še diskontirajo z netvegano obrestno mero. Omenjeno je enako, kot če bi aproksimirali vrednost azijske opcije z neko novo opcijo, kjer so za vsak z_i, tiste poti, za katere velja $Z= z_i$, obravnavane, kot da imajo enako povprečje, ki je enako z verjetnostjo tehtanemu povprečju A_n vseh teh poti. Če bo varianca aritmetičnih povprečij v posameznih skupinah dovolj majhna, bo dal postopek dovolj dober približek vrednosti opcije. Z opisanim postopkom lahko določimo spodnjo mejo cene opcije in njeno mejo.

Če so posamezni koraki na neki poti v drevesu podani s slučajno spremenljivko $X_i=\pm 1$, $i=1, 2, \ldots, n$ (+1 za premik gor in –1 za premik dol), je pozicija take poti v času k[89] enaka

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \text{, kjer } k=1, 2, \ldots, n \qquad (3.28.).^{90}$$

Vsota teh pozicij (pozicijska vsota, ang. "*position-sum*") v času k je enaka

$$\chi_k = \sum_{i=0}^{k} X_k \text{, kjer je } k=0, 2, \ldots, n \qquad (3.29.).$$

Če bi izbrali $Z=(\chi_n,)$ ne bi mogli izračunati pričakovane vrednosti aritmetičnega povprečja v točki (času) n ob pogoju χ_n ($E(A_n|\chi_n)$), saj so lahko poti z enako χ_n različno verjetne. Enostaven izračun A_n na teh poteh ni mogoč. Upoštevajoč pogoja a) in b), lahko slučajno spremenljivko Z zapišemo kot $Z=(\chi_n, S_n)$, torej kot funkcijo χ_n ter cene delnice v času n (S_n)

87 Chalasani, Jha, Varikooty (1998).
88 V točki 3.6.1 sem namesto k pisal i.
89 Zgoraj smo uporabljali dvojec (i, j)
90 V času t=0 je nič.

in tako dosežemo dvoje. Prvič, vse poti z enakim Z imajo enako končno ceno delnice, kar pomeni, da imajo enako število premikov v drevesu gor (ang. "*up-tick*") in so zato posledično enako verjetne. Nadalje, za $k=1, 2, \ldots, n$ je število možnih vrednosti χ_k proporcionalno k^3 (v nasprotju z 2^k možnih vrednosti aritmetičnih povprečij na koraku k - A_k). Izračun pričakovane vrednosti aritmetičnega povprečja v točki (času) k in pogojih χ_k, S_k ($E(A_k|\chi_k, S_k)$), je možen v času, ki je proporcionalen n^4. Pogojevanje s parom (χ_n, S_n), da dober rezultat (aproksimacijo), saj se izkaže, da je geometrijsko povprečje enostavna funkcija χ_n. Velja

$$G_n = (S_0 \times S_1 \ldots S_n)^{1/(n+1)} = S_0 \left(u^{\sum_{i=0}^{n} X_i} \right)^{1/(n+1)} = S_0 \left(u^{\chi_n} \right)^{1/(n+1)} \tag{3.30}$$

pri čemer sta X_i in χ_n definirana v (3.28) oz. (3.29.), u pa tako, kot v originalnem CRR modelu. Ker sta pogoja dva (geometrijsko povprečje in končna cena delnice), se aproksimacija precej izboljša.

V običajnem drevesu ceno delnic na vozlu (k, h) zapišemo kot $S_0 u^h d^{k-h}$. Če s H označimo premik gor v drevesu, lahko pozicijo X_k v času k zapišemo kot razliko med številom premikov gor in številom pomikov dol v drevesu oz. $X_k=H_k-(k-H_k)=2H_k-k$, $k\geq 1$. Cena delnice v času k je ($d=1/u$) $S_k = S_0 u^{X_1+X_2+\ldots+X_i} = S_0 u^{X_k} = S_0 u^{2H_k-k}$ ($i=1, 2, \ldots k$) oz. splošno na vozlu (k, h) $S_0 u^{2h-k}$. Vidimo, da je odvisna zgolj od števila premikov gor v drevesu, zato lahko začetna pogoja zapišemo kot $Z=(\chi_n, H_n)$. Spodnja meja cene opcije je

$$E\left[\left[E(A_n | \chi_n, H_n) - X) \right]^+ \right] \tag{3.31.}$$ [91],

njena napaka pa $\frac{1}{2} E \left[\mathrm{var}(A_n | \chi_n, H_n)^{1/2} \right]$ (3.32).

Nadaljujejo tako, da vsak vozel razdelijo na $N(k, h)$ podvozlov, kar predstavlja število možnih vrednosti χ_n (oz. število možnih različnih vrednosti geometrijskega povprečja) na vozlu (k, h). Posamezne podvozle (torej različne možne vrednosti χ_n na vozlu (k,h)) zapišejo kot $\xi(k, h, 0)$, $\xi(k, h, 1)$, …, $\xi(k, h, N(k,h)-1)$. Pot v drevesu ω gre oz. doseže podvozel (k,h,i), če velja $H_k(\omega)=h$ in $\chi_n(\omega)=\xi(k, h, i)$, kjer je $i=0, 1, \ldots, N(k, h)-1$. Definirati je potrebno še $M(k\ h,i)$, ki predstavlja število poti v drevesu, ki gredo čez podvozel (k,h,i).

Za posamezno kombinacijo H_n in χ_n je notranje pričakovanje v (3.31.) oblike $\tilde{A}(k,h,i) = E\left[A_k | H_k = h, \chi_k = \xi(k,h,i) \right]$.

Na vsakem podvozlu (n, h, i) obstaja na časovnem koraku n le eno tako aritmetično povprečje, ki zadosti obema pogojema v oglatem oklepaju. Splošno lahko zapišemo, da je za podvozel (n, h, i), $\tilde{A}(n,h,i)$ pričakovana vrednost A_n (torej aritmetičnega povprečja v času n –

[91] Gre za pričakovano ceno opcije ob dospetju, pri čemer aritmetično povprečje A_n pogojujemo s pogojema a) in b), ki sem ju definiral zgoraj. Kot sem že omenil, sta taka pogoja ustrezna, o čemer priča tudi varianca vrednosti A_n znotraj posamezne skupine. Glej originalni članek, tabela 3 (str. 9).

na koncu drevesa) neke poti v drevesu, če gre le-ta skozi podvozel (*n, h, i*). Ker imajo vse poti skozi ta podvozel enako verjetnost $p^h(1-p)^{n-h}$,[92] je $\widetilde{A}(n,h,i)$ netehtano povprečje vrednosti A_n na poteh skozi podvozel (*n, h, i*). Ko izračunamo povprečja $\widetilde{A}(n,h,i)$ na vseh podvozlih na časovnem koraku *n*, lahko (3.31.) zapišemo kot tehtano vsoto vseh vrednosti $\widetilde{A}(n,h,i)$, pri čemer je utež posamezne $\widetilde{A}(n,h,i)$ enaka $P(H_n=h,\ \chi_n=\xi\ (n,\ h,\ i))$, kar je enako $p^h(1-p)^{n-h}$ $*M(k,\ h,\ i)$. Spodnjo mejo aritmetične azijske opcije končno zapišejo kot

$$E\left[\left[E(A_n|\chi_n, H_n)-X\right]^+\right]=\sum_{h=0}^{n}\sum_{i=0}^{N(k,h)-1}p^h(1-p)^{n-h}M(n,h,i)\left[\widetilde{A}(n,h,i)-X\right]^+ \qquad (3.33.).$$

Da bi vrednost tako izračunane spodnje meje omejili, avtorji določijo tudi njeno napako, ki je formalno podana z enačbo (3.32). S pomočjo natančno določene napake, lahko določimo tudi zgornjo mejo cene opcije, ki je seštevek spodnje meje (3.33.) in maksimalne vrednosti napake le-te (3.32.). Ceno opcije definirajo kot aritmetično povprečje obeh mej. Prednost takega pristopa je, da je cena opcije vedno omejena. Metoda da podobne rezultate kot model, ki sta ga razvila Hull, White (1993).

3.7 MONTE CARLO METODA

Pri vrednotenju izvedenih finančnih instrumentov (opcij) jo je prvi uporabil Phelim Boyle (1977). Pokazal je, kako je mogoče najti pravično ceno opcije s pomočjo simulacij gibanja cen osnovnega instrumenta. Metoda, podobno kot binomska drevesa, spada med numerične metode in jo je razmeroma lahko uporabljati. Poleg tega omogoča, da z njo vrednotimo tudi bolj kompleksne izvedene finančne instrumente (eksotične opcije), katerih vrednost je odvisna vsaj od ene dodatne spremenljivke (poleg *S* in *t*).

Ena njenih glavnih pomanjkljivosti je nezmožnost natančnega izračuna opcijskih mer občutljivosti, saj simulirane vrednosti opcij, ki jih dobimo s posameznimi poskusi običajno slabo konvergirajo k neki vrednosti (pravi ceni opcije). Pregled možnih rešitev najdemo v Wilmott (2000, str. 933) oz. Benhamou (2000). Poleg tega postopka ne moremo neposredno uporabiti za vrednotenje opcij ameriškega tipa

Če želimo geometrijsko Brownovo gibanje simulirati, ga moramo zapisati v diskretni obliki. Življenjsko dobo opcije razdelimo na *n* kratkih časovnih intervalov dolžine Δt. Velja $S(t+\Delta t)-S(t)=\mu S(t)\Delta t+\sigma z\sqrt{\Delta t}$, kjer je *z* slučajno število iz standardne normalne porazdelitve. Tako pridemo do diskretne aproksimacije enačbe (1.2.),

$$S(t+\Delta t)=S(t)\exp\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma z\sqrt{\Delta t}\right] \qquad (3.34.)^{93},$$

ki jo uporabimo v prvi točki. Vrednotenja azijskih opcij s pomočjo Monte Carlo metode se lotimo v naslednjem zaporedju:

[92] Gre za binomsko porazdelitev.
[93] Od enačbe (3.2.) se razlikuje po tem, da vsebuje pričakovani prirastek cene delnice.

1. S pomočjo enačbe (3.34.) simuliramo gibanje cene osnovnega instrumenta v nekem obdobju, začenši z današnjo ceno S_0 (za navadno delnico velja μ=r).

2. Izračunamo vrednost opcije ob dospetju.

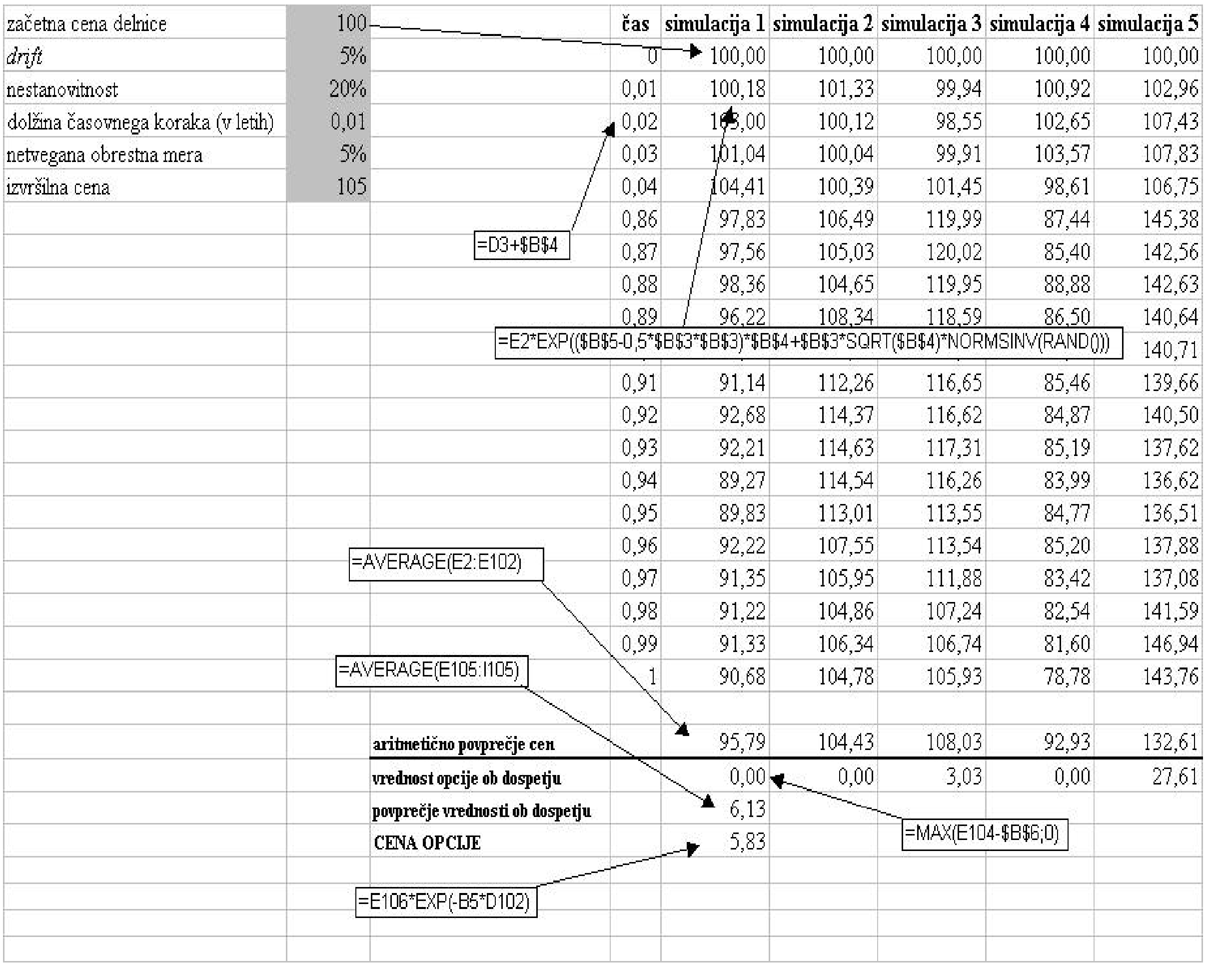
3. Ponavljamo koraka 1. in 2.

4. Izračunamo povprečje dobljenih vrednosti opcij ob dospetju. Tako dobimo oceno pričakovane vrednosti azijske opcije ob dospetju

5. Vrednost, ki jo dobimo v četrti točki, diskontiramo z netvegano obrestno mero in tako dobimo ceno azijske opcije.

Koraki od 1 do 5 so prikazani na naslednji sliki.

Slika 6: Vrednotenje aritmetičnih azijskih opcij s pomočjo Monte Carlo metode in programa Microsoft® Excel™.[94]



		čas	simulacija 1	simulacija 2	simulacija 3	simulacija 4	simulacija 5
začetna cena delnice	100						
drift	5%	0	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
nestanovitnost	20%	0,01	100,18	101,33	99,94	100,92	102,96
dolžina časovnega koraka (v letih)	0,01	0,02	1[illegible],00	100,12	98,55	102,65	107,43
netvegana obrestna mera	5%	0,03	101,04	100,04	99,91	103,57	107,83
izvršilna cena	105	0,04	104,41	100,39	101,45	98,61	106,75
		0,86	97,83	106,49	119,99	87,44	145,38
		0,87	97,56	105,03	120,02	85,40	142,56
		0,88	98,36	104,65	119,95	88,88	142,63
		0,89	96,22	108,34	118,59	86,50	140,64
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	140,71
		0,91	91,14	112,26	116,65	85,46	139,66
		0,92	92,68	114,37	116,62	84,87	140,50
		0,93	92,21	114,63	117,31	85,19	137,62
		0,94	89,27	114,54	116,26	83,99	136,62
		0,95	89,83	113,01	113,55	84,77	136,51
		0,96	92,22	107,55	113,54	85,20	137,88
		0,97	91,35	105,95	111,88	83,42	137,08
		0,98	91,22	104,86	107,24	82,54	141,59
		0,99	91,33	106,34	106,74	81,60	146,94
		1	90,68	104,78	105,93	78,78	143,76
	aritmetično povprečje cen		95,79	104,43	108,03	92,93	132,61
	vrednost opcije ob dospetju		0,00	0,00	3,03	0,00	27,61
	povprečje vrednosti ob dospetju		6,13				
	CENA OPCIJE		5,83				

Vir: Lasten prikaz.

[94] Programi, ki jih običajno uporabljamo za vrednotenje opcij s pomočjo Monte Carlo metode, imajo funkcije, ki generirajo standardno normalno porazdelitev, že vgrajene. Sicer si lahko pomagamo z navadnim generatorjem slučajnih števil in naslednjo formulo: $z = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6$, kjer so R_i neodvisna slučajna števila med 0 in 1.

Čeprav je vrednotenje aritmetičnih azijskih opcij na ta način razmeroma preprosto, mora biti število simulacij (*M*) za zadovoljive rezultate veliko (na sliki 6 je *M=5*).[95] Cene opcij izračunane iz več simulacij, se lahko med seboj precej razlikujejo. Če z μ označimo aritmetično sredino cen opcij na podlagi opravljenih simulacij in z ϖ standardni odklon vseh poskusov, je interval, na katerem je 95 % verjetnost, da se vrednost opcije (*f*) od aritmetične sredine simulacij razlikuje za ±1.96 standardnega odklona podan kot

$$\mu - \frac{1.96\varpi}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1.96\varpi}{\sqrt{M}}.$$

Negotovost glede vrednosti opcije je inverzno proporcionalna korenu števila simulacij. Za podvojitev natančnosti ocene vrednosti opcije, bi torej morali izvesti štirikrat več simulacij. Ker števila simulacij ne moremo večati v nedogled, si lahko pomagamo z nekaterimi prijemi, ki omogočajo znižanje variance le-teh. Ena od njih je, t.i. "*control variate*" tehnika.

Uporabna je, ko imamo opravka z dvema podobnima izvedenima finančnima instrumentoma, pri čemer analitične rešitve za enega od njiju ne poznamo in jo želimo oceniti numerično. Idealen primer so aritmetične in geometrijske azijske opcije. Vzporedno izvedemo dve simulaciji, z istimi slučajnimi števili in enakim časovnim korakom (Δt). Na ta način dobimo dve ocenjeni vrednosti – f_A^*, ki je v našem primeru ocena vrednosti aritmetične azijske opcije in f_G^*, ki je ocena vrednosti geometrijske azijske opcije. Izboljšano oceno vrednosti aritmetične azijske opcije dobimo s pomočjo preproste $f_A = f_A^* - f_G^* + f_G$, kjer je f_G natančna, analitična vrednost geometrijske azijske opcije. Slabost opisanega postopka je v tem, da moramo najprej priti do analitične rešitve za enega od obeh izvedenih finančnih instrumentov. Omenim naj, da so praktično vsi predstavljeni avtorji za izboljšanje simuliranih rezultatov uporabili prav to tehniko.

4 SKLEP

Pred več kot dvajsetimi leti so bile eksotične opcije resnično eksotične. B. Goldman, H. Sosin in M.A. Gatto so leta 1979 šokirali uporabnike navadnih opcij s svojo "sanjsko" opcijo, ki so jo predstavili v članku *Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High*. Predlagali so opcijo, ki bi finančnim investitorjem omogočala nakup (prodajo) osnovnega instrumenta po najnižji (najvišji) ceni v nekem obdobju.

Deset let kasneje so se v obliki, kot jih poznamo danes, prvič pojavile azijske opcije. So kompleksen in specifičen izvedeni finančni instrument, s katerim se trguje neorganizirano, na OTC trgih in brez posredovanja klirinške hiše. Namenjene so tistim uporabnikom, ki imajo posebne zahteve glede zavarovanja pred tveganji. Pogoj za njihovo uporabo je ustrezno poznavanje bolj preprostih izvedenih finančnih instrumentov. Spadajo med opcije, ki so močno odvisne od gibanja (poti) osnovnega instrumenta v nekem obdobju (ang. "*strong path-dependent*") in katerih vrednost pred dospetjem lahko zapišemo kot funkcijo treh spremenljivk: cene osnovnega instrumenta (*S*), časa do dospetja (*t*) in *poti* (gibanja cene) osnovnega instrumenta v nekem obdobju. Za azijske opcije je značilno, da je njihova vrednost odvisna od povprečja vrednosti (cen) osnovnega instrumenta v opazovanem obdobju. Ker vrednost povprečja niha precej manj od posamičnih vrednosti, se lahko uporabniki tovrstnih

[95] Poleg tega je ne moremo neposredno uporabiti za vrednotenje opcij ameriškega tipa.

opcij ustrezneje zavarujejo vedno, ko se srečujejo s situacijo, kjer so izrazitejši skoki (spremembe) v ceni osnovnega instrumenta ob bližanju dospetja pogodbe bolj pogosti (verjetni). Ker se morebitni večji odkloni zaradi izračunavanja povprečja izravnajo, je taka opcija cenejša.

Azijske opcije v osnovi delimo na podlagi (vrste) povprečja, in sicer na aritmetične ter geometrijske azijske opcije (evropskega in ameriškega tipa, ki pa zaradi svojih lastnosti niso razširjene). Izkaže se, da je vrednotenje prvih precej kompleksno vprašanje. Ena osrednjih predpostavk Black-Scholesovega modela je, da se osnovni instrument giblje v skladu z geometrijskim Brownovim gibanjem, kar pomeni, da so njegove vrednosti lognormalno porazdeljene (to velja tudi za geometrijsko povprečje). V nasprotju s tem, vsota lognormalno porazdeljenih spremenljivk ni lognormalno porazdeljena. Še več, nima neke poznane porazdelitve. Posledično analitična formula, ki je v primeru navadnih opcij in geometrijske azijske opcije razmeroma preprosta, za aritmetične azijske opcije (še) ne obstaja. Še večji problem predstavljajo ASO aritmetične azijske opcije, pri katerih bi morali poznati skupno verjetnostno porazdelitev aritmetičnega povprečja in zadnje cene osnovnega instrumenta v dobi povprečenja.

Možnih rešitev je več. Iz odnosa med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem sledi, da je geometrijsko azijsko opcijo mogoče uporabiti za spodnjo mejo, sicer identične, aritmetične azijske opcije (hkrati je potrebno ustrezno zmanjšati izvršilno ceno). Drugo možnost predstavlja aproksimacija verjetnostne porazdelitve aritmetičnega povprečja z neko lognormalno verjetnostno porazdelitvijo, pri čemer je število momentov za aproksimacijo običajno določeno arbitrarno. Aritmetične azijske opcije lahko vrednotimo tudi s pomočjo dreves, čeprav so potrebne prilagoditve v smislu zmanjšanja števila možnih aritmetičnih povprečij v določenem obdobju oz. ob dospetju. Rezultati teh treh metod so zadovoljivi za nestanovitnosti do 30 % letno. V nasprotnem primeru postaja razlika med aritmetičnim in geometrijskim povprečjem vse večja, kar pomeni, da se verjetnostna porazdelitev aritmetičnega povprečja čedalje bolj odmika od lognormalne porazdelitve. Aproksimacije zato postajajo vse slabše. Pri višjih nestanovitnostih je najbolj smiselna uporaba Monte Carlo metode. Slednja običajno služi kot merilo za natančnost posameznih, zgoraj omenjenih rešitev, čeprav mora biti število simulacij za zadovoljive rezultate veliko. Standardni odklon simulacij je mogoče z različnimi metodami precej zmanjšati. Precej pogosto se uporablja t.i. "*control variate*" tehnika.

V diplomskem delu sem natančno analiziral večino najpomembnejših rešitev, ki so jih različni avtorji razvili v zadnjih desetih letih. Vsi kasnejši poskusi vrednotenja azijskih opcij so izhajali iz članka Kemnove in Vorsta iz leta 1990. Čeprav sta omenjena avtorja prišla do napačnega oz. prepovršnega sklepa (da je cena navadne opcije vedno višja od cene azijske opcije), so njune ostale ugotovitve pravilne. Tako prave analitične rešitve za vrednost diskretnih aritmetičnih azijskih opcij tudi danes (še) ne poznamo. Predstavljeni poskusi vrednotenja njunega sklepa niso uspeli ovreči. Glavna slabost kasneje razvitih metod je v tem, da so ustrezne le za določene vrednosti parametrov, ki vplivajo na vrednost aritmetične azijske opcije. Ker je njihova uporabnost za druge vrednosti teh istih parametrov precej manjša, je njihov dejanski doprinos k reševanju problema vrednotenja aritmetičnih azijskih opcij omejen, če ne celo vprašljiv (čeprav so rešitve, ki so se porajale naknadno, nadgrajevale že obstoječe). V okviru diplomskega dela sem jih predstavil zato, ker kljub temu veljajo za (naj)pomembnejše. Iz napisanega bi izvzel rešitve avtorjev, ki so azijske opcije poskušali vrednotiti s pomočjo dreves, saj gre za numerične postopke, ki so relativno dobra alternativa Monte Carlo metodi in so hkrati uporabni tudi za vrednotenje opcij ameriškega tipa.

Sklenem naj z ugotovitvijo, da kljub (predvsem) številčni pestrosti rešitev, vprašanje vrednotenja aritmetičnih azijskih opcij (še) ni ustrezno rešeno. Uporabniki namreč nimajo na voljo splošneje uporabne analitične rešitve in zato še vedno uporabljajo predvsem Monte Carlo metodo (oz., premije izračunane s pomočjo posameznih rešitev primerjajo s tistimi, ki jih dobijo s takšno simulacijo). Povedano seveda ne zmanjšuje pomena in uporabnosti (aritmetičnih) azijskih opcij pri zavarovanju pred tveganji, čeprav moramo biti pri njihovem vrednotenju zaradi opisanih pomanjkljivosti zelo pozorni.

LITERATURA

1. Baxter Martin, Rennie Andrew: Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 233 str.

2. Benhamou Eric: An Application of Malliavin Calculus to Continuous Time Asian Options Greeks. Working Paper, London School of Economics, april 2000.

3. Black Fischer, Scholes Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81 (1973), 3, str. 637-659.

4. Bouaziz Laurent, Briys Eric, Crouhy Michel: The Pricing of Forward-starting Asian Options. Journal of Banking and Finance, 18 (1994), str. 823-839.

5. Bouchaud Jean-Philippe, Potters Marc: Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 218 str.

6. Boyle Phelim: Options: A Monte Carlo Approach. Journal of Financial Economics, 4 (1977), str. 323-338.

7. Boyle Phelim, Boyle Feidhlim: Derivatives: The Tools That Changed Finance. London: Risk Books, 2001. 203 str.

8. Chalasani Prasad, Jha Somesh, Varikooty Ashok: Accurate Approximations for European Asian Options. Working Paper, Carnegie Mellon University, januar 1998.

9. Chung San-Lin, Schackleton Mark, Wojakowski Rafal: Efficient Quadratic Approximation of Floating Strike Asian Option Values. Working Paper, Lancaster University, december 2000.

10. Cootner H. Paul: The Random Character of Stock Market Prices. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1964. 618 str.

11. Čibej Andrej Jože: Finance, tveganje, verjetnostni račun. Bančni vestnik, Ljubljana, 47 (1998), 9, str. 49-52.

12. Čopič Jernej: Teorija vrednotenja opcij v modelu Blacka in Scholesa. Diplomsko delo. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko, 1997. 69 str.

13. Easton A. Stephen: Valuing Bonds with Embededd Average Price Options. Australian Journal of Management, 21 (1996), 1, str. 29-40.

14. Goldman B., Sosin H., Gatto M.A.: Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High. Journal of Finance, 34 (1979), str. 1111-1127.

15. Hansen T. Asbjørn, Jørgenson Løchte Peter: Analytical Valuation of American-style Asian Options. Working Paper, University of Aaarhus, november 1997.

16. Haug G. Espen: The Complete Guide to Option Pricing Formulas. New York: McGraw-Hill, 1998. 232 str.

17. Heenk B.A, Kemna A.G.Z, Vorst A.C.F.: Asian Options on Oil Spreads. The Review of Futures Markets, 9 (1990), 3, str. 511-528.

18. Hornby A.S.: Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English. Fourth Edition. Oxford: Oxford University Press, 1989. 1492 str.

19. Hull C. John: Options, Futures and Other Derivatives. Fourth Edition. London: Prentice-Hall International, 2000. 698 str.

20. Hull John, White Alan: Efficient Procedures for Valuing European and American Path-dependent Options. The Journal of Derivatives, 1993, 1, str. 21-31.

21. Kemna A.G.Z, Vorst A.C.F: A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values. Journal of Banking and Finance, 14 (1990), str. 113-129.

22. Krugman Paul: How I Work.
[URL: http://www.wws.princeton.edu/~pkrugman/howiwork.html], 1993.

23. Lerner Josh: Where Does State Street Lead? A First Look at Finance Patents, 1971-2000. National Bureau of Economic Research.
[URL: http://www.nber.org/papers/w7916.pdf], september 2000.

24. Levy Edmond, Turnbull Stuart: Average Intelligence. RISK, 5 (1992), 2, str. 53-59.

25. Levy Edmond: Pricing European Average Rate Currency Options. Journal of International Money and Finance, 11 (1992), str. 474-491.

26. Longstaff F.A.: Hedging Interest Rate Risk with Options on Average Interest Rates. The Journal of Fixed Income, 1995, str. 37-45.

27. Marsh A. Terry, Kobayashi Takao: The Work of Fischer Black, Robert Merton and Myron Scholes, and its Continuing Legacy. Discussion Paper, University of Tokyo, januar 1998.

28. McGoun G. Elton: Post Modern Finance: Alice's Evidence. Predavanje na seminarju Financial and International Markets, Univeristet van Amsterdam, 2000, str. 32/1-32/13.

29. Merton C. Robert: Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4, str. 141-183.

30. Mikosch Thomas: Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999. 212 str.

31. Mramor Dušan: Slovar poslovnofinančnih izrazov: slovensko-angleški, angleško-slovenski. Ljubljana: Gospodarski vestnik, 1999. 116 str.

32. Mramor Dušan: Teorija poslovnih financ. Ljubljana: Ekonomska fakulteta, 2000. 191 str.

33. Neftci N. Salih: An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Second Edition. San Diego: Academic Press, 2000. 527 str.

34. Nelken Israel: Pricing, Hedging, and Trading Exotic Options: Understand the Intricacies of Exotic Options and how to Use Them to Maximum Advantage. New York: McGraw-Hill, 1999. 310 str.

35. Nelken Israel: The Handbook of Exotic Options: Instruments, Analysis and Applications. Homewood: Richard D. Irwin, Inc., 1996. 362 str.

36. Rogers L.C.G., Shi Z.: The Value of an Asian Option. Journal of Applied Probability, 32 (1995), str. 1077-1088.

37. Rubinstein Mark: Exotic Options. Finance Working Paper no. 220, University of California at Berkeley, 1992.

38. Rubinstein Mark: Rational Markets: Yes or No? The Affirmitive Case. Working Paper, University of California at Berkeley, 2000.

39. Samuelson A. Paul: Rational Theory of Warrant Pricing. Industrial Management Review, 6 (1965), str. 13-31.

40. Shiryaev N. Albert: Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999. 834 str.

41. Taleb Nassim: Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997. 506 str.

42. Taleb Nassim: Fooled by Randomness: The Hidden Role of Chance in the Markets and in Life. Texere, 2001. 220 str.

43. Turnbull M. Stuart, Wakeman Macdonald Lee: A Quick Algorithm for Pricing European Average Options. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26 (1991), 3, str. 377-389.

44. Vorst Ton: Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options. International Review of Financial Analysis, 1 (1992), 3, str. 179-193.

45. Wilmott Paul: Paul Wilmott on Quantitative Finance. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 1010 str.

46. Zhang G. Peter: Exotic Options: A Guide to Second Generation Options. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998. 692 str.

47. Zhang G. Peter: Flexible Arithmetic Asian Options. The Journal of Derivatives, 1995, 4, str. 53-63.

48. Zhang G. Peter: Flexible Asian Options. The Journal of Financial Engineering, 3 (1994), 1, str. 65-83.

VIRI

1. Derivatives: Practices and Principles [URL: http://risk.ifci.ch/136160.htm].

2. Group30 [URL: http://www.group30.org].

3. Spletna stran FinanceProfessor [URL: http://www.financeprofessor.com].

4. Zbirka DerivaQuote
[URL: http:// http://www.cob.vt.edu/finance/faculty/dmc/Derivs/DrvQt/].

5. Winterthur Insuarance [URL: http://www.winterthur.com/].

PRILOGA

SLOVAR

alternative weighting schemes	različne sheme (funkcije) uteži
asian options	azijske opcije
at-the-money option	opcija, ki je na meji
average price/average rate asian options	azijske opcije, katerih vrednost ob dospetju lahko zapišemo kot max[P -X,0], pri čemer je *P* povprečje vrednosti osnovnega instrumenta, *X* pa izvršilna cena
average strike/floating strike asian options	azijske opcije, katerih vrednost ob dospetju lahko zapišemo kot max[S_T -P,0], pri čemer je *P* povprečje vrednosti osnovnega instrumenta, S_T pa cena osnovnega instrumenta ob dospetju opcije
barrier options	opcije z mejo
brownian motion	Brownovo gibanje
commodity-linked option	opcija, katere vrednost je vezana na določeno dobrino
control variate technique	metoda, s pomočjo katere lahko izboljšamo natančnost numeričnih procedur
cost-of-carry	izraz, ki vključuje stroške skladiščenja, financiranja in dohodek, ki ga daje osnovni instrument
customer tailored options	opcije, ukrojene po meri uporabnika
customized options	opcije, ki so prilagojene uporabniku
down-and-out option	opcija z mejo, ki postane nična, če osnovni instrument preseže neko, vnaprej določeno, spodnjo mejo
drift	pričakovani prirastek cene/pričakovana donosnost delnice/pričakovana stopnja rasti
effective mean/volatility time functions	funkciji, ki določita dejanski vrednosti aritmetične sredine in variance povprečja
exotic options	eksotične opcije
flexible average asian options	azijske opcije, pri katerih je uporabimo tehtano povprečje
floored asian option	azijska opcija, pri kateri povprečje izračunamo tako, da vse cene osnovnega instrumenta, ki so nižje od izvršilne cene, zamenjamo z le-to
forward starting/deffered asian option	azijska opcija, pri kateri je doba povprečenja krajša od življenjske dobe opcije
general mean	splošno povprečje
hedging	zavarovanje pred tveganji s pomočjo finančnih instrumentov
implied volatility	tekoča ali vgrajena nestanovitnost
in-progress/in-process asian option	azijska opcija, pri kateri je doba povprečenja daljša od življenjske dobe opcije

in-the-money option	opcija, ki se splača
market makers	vzdrževalci likvidnosti
multiasset/correlation /cross asset options	opcije, ki so napisane ne več osnovnih instrumentov
node	vozel v binomskem drevesu
option knocks out	opcija postane nična
out-of-the-money option	opcija, ki se ne splača
path-dependent option	opcija, katere vrednost je odvisna od celotne poti (gibanja), ki ji (mu) sledi osnovni instrument in ne zgolj od njegove končne vrednosti
plain vanilla option	navadna opcija
position sum	pozicijska vsota
put-call parity	prodajno-nakupna pariteta
risk management products	instrumenti za upravljanje s tveganjem
risk-averse world	situacija, ko finančni investitorji zahtevajo premijo za tveganje
risk-neutral valuation	vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov ob predpostavki indiferentnosti finančnih investitorjev do tveganja
risk-neutral world	situacija, ko finančni investitorji ne zahtevajo premije za tveganje
running average	povprečje vrednosti osnovnega instrumenta do trenutka *t*
strong/hard path-dependent/strong memory options	opcije, ki so od poti (gibanja) osnovnega instrumenta močno odvisne
super asian option	azijska opcija, pri kateri povprečje izračunamo tako, da ne upoštevamo nobene cene osnovnega instrumenta, ki je nižja od izvršilne cene
timestep	časovni korak v binomskem drevesu
trial-and-error method	metoda poskusov in napak
up-tick/down-tick	premik dol/gor v binomskem drevesu
vanilla asian option	azijska opcija, pri kateri je doba povprečenja enaka življenjski dobi opcije
weak/soft path-dependent/memoryless options	opcije, ki so od poti (gibanja) osnovnega instrumenta šibko odvisne