

UNIVERZA V LJUBLJANI  
EKONOMSKA FAKULTETA

ZAKLJUČNA STROKOVNA NALOGA

**OPTIMIZACIJA DISTRIBUCIJE V TRGOVSKEM PODJETJU**

Ljubljana, junij 2016

ZLATKO NOVARLIĆ

## IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani Zlatko Novarlič, študent Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, avtor predloženega dela z naslovom Optimizacija distribucije v trgovskem podjetju, pripravljenega v sodelovanju s svetovalko dr. Liljano Ferbar Tratar

### IZJAVLJAM

1. da sem predloženo delo pripravil samostojno;
2. da je tiskana oblika predloženega dela istovetna njegovi elektronski obliki;
3. da je besedilo predloženega dela jezikovno korektno in tehnično pripravljeno v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani, kar pomeni, da sem poskrbel, da so dela in mnenja drugih avtorjev oziroma avtoric, ki jih uporabljam oziroma navajam v besedilu, citirana oziroma povzeta v skladu z Navodili za izdelavo zaključnih nalog Ekonomske fakultete Univerze v Ljubljani;
4. da se zavedam, da je plagiatstvo – predstavljanje tujih del (v pisni ali grafični obliki) kot mojih lastnih – kaznivo po Kazenskem zakoniku Republike Slovenije;
5. da se zavedam posledic, ki bi jih na osnovi predloženega dela dokazano plagiatstvo lahko predstavljalo za moj status na Ekonomski fakulteti Univerze v Ljubljani v skladu z relevantnim pravilnikom;
6. da sem pridobil vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v predloženem delu in jih v njem jasno označil;
7. da sem pri pripravi predloženega dela ravnal v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil soglasje etične komisije;
8. da soglašam, da se elektronska oblika predloženega dela uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;
9. da na Univerzo v Ljubljani neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve predloženega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja predloženega dela na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija Univerze v Ljubljani;
10. da hkrati z objavo predloženega dela dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v njem in v tej izjavi.

V Ljubljani, dne \_\_\_\_\_

Podpis študenta: \_\_\_\_\_

## KAZALO

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>UVOD .....</b>                                                | <b>1</b>  |
| <b>1 LINEARNO PROGRAMIRANJE.....</b>                             | <b>1</b>  |
| <b>2 REŠEVANJE SISTEMOV LINEARNIH ENAČB .....</b>                | <b>3</b>  |
| 2.1 Cramerjevo pravilo .....                                     | 3         |
| 2.2 Reševanje s pomočjo inverzne matrike .....                   | 4         |
| 2.3 Gaussova metoda.....                                         | 4         |
| <b>3 TEORETIČNE OSNOVE LINEARNEGA PROGRAMIRANJA .....</b>        | <b>6</b>  |
| 3.1 Teorija linearnega programiranja .....                       | 6         |
| 3.2 Linearni program z dvema spremenljivkama .....               | 10        |
| 3.2.1 Lastnosti linearnega programa z dvema spremenljivkama..... | 10        |
| 3.2.2 Grafična metoda reševanja linearnega programa .....        | 11        |
| 3.2.3 Obči linearni program.....                                 | 12        |
| 3.3 Simpleksna metoda.....                                       | 14        |
| 3.3.1 Osnove simpleksne metode .....                             | 14        |
| 3.3.2 Reševanje linearnega programa s simpleksno metodo .....    | 14        |
| 3.3.3 Dualni problem.....                                        | 17        |
| <b>4 MINIMIZACIJA STROŠKOV V PREUČEVANEM PODJETJU .....</b>      | <b>17</b> |
| 4.1 Stroški distribucije.....                                    | 17        |
| 4.2 Stroški reklamacij .....                                     | 22        |
| 4.3 Stroški izgubljenih poslov .....                             | 25        |
| <b>5 SKLEP .....</b>                                             | <b>26</b> |
| <b>LITERATURA IN VIRI .....</b>                                  | <b>27</b> |
| <b>PRILOGE</b>                                                   |           |

## KAZALO TABEL

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Prikaz Problema 1, zapis pogojev in namenske funkcije ..... | 20 |
| Tabela 2: Prikaz Problema 2, zapis pogojev in namenske funkcije ..... | 23 |

## KAZALO SLIK

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| Slika 1: Grafično reševanje linearnega programa..... | 12 |
| Slika 2: Osrednji del študije .....                  | 18 |



## UVOD

Managerji morajo v času globalizacije sprejemati pomembne poslovne, investicijske in finančne odločitve v podjetju, od česar je odvisna uspešnost podjetja. Ker je optimizacija podjetja za obstoj podjetja pomembna, se bom v nalogi v večji meri posvetil linearnemu programiranju kot sredstvu za optimiranje poslovanja podjetja. Podjetja se morajo v času stagnacije ali recesije prilagajati razmeram na trgu, če želijo obstati. Najbolj uspešna so tista podjetja, ki uspejo maksimirati prihodke in minimizirati stroške bolje kot njihovi konkurenti.

V zaključni strokovni nalogi bom opisal linearno programiranje in njegovo uporabo v ekonomiji. V nalogi bo bralec spoznal različne načine reševanja linearnega programiranja (grafično reševanje, metoda simpleksov, ipd.). Za lažje razumevanje različnih načinov reševanja, bom v določenih odsekih za manj podkovane matematične bralce opisal najbolj nujne termine. Za ostale pa zaradi omejenosti naloge priporočam branje dodatnih gradiv. V osrčje naloge bom postavil problem na primeru slovenskega trgovskega podjetja na debelo, ki se ukvarja s prodajo kozmetičnih izdelkov. Problem podjetja se nanaša na oskrbovalno verigo med proizvajalcem in končnim porabnikom. Z linearnim programiranjem bom poiskal optimalno rešitev danega problema. Mnogi problemi, s katerimi se srečujemo v gospodarstvu, so velikokrat predmet optimalne porabe ali delitve sredstev, ki so na razpolago v omejenih količinah, zato bom v četrtem poglavju poskušal najti optimalen program za minimizacijo stroškov distribucije med podjetjem in njegovimi kupci. V sklepu bom povzel vse pomembne ugotovitve in zapisal morebitne predloge za izboljšave procesa, ki ga vodimo ljudje.

## 1 LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje je del operacijskih raziskav, ki se ukvarja s tako imenovano optimizacijo z omejitvami. Gre za iskanje najboljše rešitve (optimiranje) danega problema pri danih pogojih, npr. maksimiranje dobička pri danih produkcijskih in tržnih omejitvah. V praksi se linearno programiranje uporablja v številnih aplikacijah na raznovrstnih področjih: ekonomiji, financah, bančništvu, logistiki, statistiki, uporabni matematiki in drugod (Winston, 1993).

Nekateri problemi optimalnosti se matematično formulirajo kot problemi vezanih ekstermov. Splošni problem vezanega ekstrema formuliramo takole: Določiti je treba ekstrem namenske funkcije več neodvisnih spremenljivk tako, da zadoščajo spremenljivke predpisanim pogojem enačbe. Vezani ekstrem tega tipa rešujemo z metodo infinitezimalnega računa, in sicer po uvedbi z znano Lagrangeovo metodo multiplikatorjev.

Med problemi vezanih ekstremov se odlikujejo tisti, pri katerih je namenska funkcija linearna glede na vse spremenljivke, in pri katerih zadoščajo spremenljivke, ki lahko zavzemajo samo nenegativne vrednosti, pogojnim enačbam ali neenačbam, ki so tudi linearne glede na vse spremenljivke. Probleme vezanih ekstremov tega tipa rešujemo z algebrskimi metodami; ti problemi so predmet linearnega programiranja. Taki optimizacijski problemi so seveda zelo preprosti in pogosto ne ustrezajo razmeram v praksi. Hotelling je v pogovoru z Dantzigom kritiziral linearno programiranje z izjavo "Pa saj vsi vemo, da je svet nelinearen." (Berden, 2009).

Po svojem zgodovinskem razvoju je linearno programiranje razmeroma mlada panoga uporabne matematike, saj segajo njegovi začetki v čas neposredno pred drugo svetovno vojno. Prve formulacije problemov linearnega programiranja in prve metode reševanja so iz leta 1939 v knjigi ruskega matematika Kantoroviča o organizaciji in planiranju proizvodnje. Neodvisno od ruskih matematikov so razvijali linearno programiranje na zahodu zlasti ameriški znanstveniki. Kot prvi med njimi je leta 1941 objavil Hitchcock študijo o nekem transportnem problemu linearnega programiranja. Leta 1947 je Dantzig odkril za reševanje linearnih programov splošno algebrsko metodo, imenovano metoda simpleksov; s to metodo je mogoče numerično rešiti vsak problem linearnega programiranja. Za prakso pomembni problemi linearnega programiranja morajo upoštevati številne okoliščine in zahtevajo zato pri numeričnem reševanju toliko računanja, da ga je mogoče praktično opraviti le z elektronskim računalnikom. V razvoju linearnega programiranja je zato pomemben mejnik leto 1952, ko je bil prvič izdelan program za elektronsko reševanje problemov linearnega programiranja po metodi simpleksov.

Z matematičnega vidika ne povzročajo problemi linearnega programiranja nobenih težav več. Matematično osnovo linearnega programiranja sestavljata teorija linearnih neenačb in enačb in teorija konveksnih poliedrov, torej dve panogi teoretične matematike, ki sta za potrebe linearnega programiranja dovolj razviti. Probleme linearnega programiranja rešujemo v splošnem z algebrskimi metodami. Matematična sredstva, ki jih pri tem uporabljamo, so odvisna od števila nastopajočih spremenljivk in od števila pogojev neenačb ali enačb. Po razsežnosti prav skromne probleme linearnega programiranja lahko rešimo z grafičnimi ali pa s kakšnimi drugimi elementarnimi aritmetičnimi metodami.

Bistveno za linearno programiranje je, da je namenska funkcija linearna in da so tudi vse pogoje neenačbe ali enačbe linearne. Z matematičnega vidika je taka enostavnost problemov linearnega programiranja pomagala v razmeroma kratkem času izdelati dobro in popolnoma ustrezno teorijo. Z vsebinskega vidika pa so ravno v linearnosti skrite mnoge nevarnosti (Vadnal, 2003). Tudi, če zveze med obravnavanimi količinami v resnici niso linearne, si v praksi delo dostikrat olajšamo s tem, da uporabimo linearen približek dejanskih zvez, se pravi, da privzamemo, da so nekatere od obravnavanih spremenljivk linearno odvisne od preostalih obravnavanih spremenljivk (Hvalica, 2002).

- določitev problema v pravilni obliki,
- rešitev tega problema,
- analiza občutljivosti linearnega programa, če malo spremenimo pogoje našega problema.

## 2.1 Cramerjevo pravilo

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1)$$

Cramerjevo pravilo (Čibej & Ferbar Tratar, 2012) lahko uporabimo za reševanje sistemov  $n$  - linearnih enačb z  $n$  - neznankami, kadar je determinanta sistema različna od nič. **Determinanta** je število, ki ga priredimo kvadratni matriki. Pri matrikah drugega reda determinanto izračunamo tako, da od produkta elementov na glavni diagonali odštejemo produkt elementov na stranski diagonali.

Pri matrikah tretjega reda si pomagamo s **Sarrusovim pravilom**:

Za determinante matrik višjega reda uporabimo **izrek o razvoju determinante** (na primer po  $i$  - ti vrstici), ob tem pa je potrebno upoštevati pravila za determinante.

- Determinanto  $|A|$  po zgoraj opisanih postopkih.

- Determinanto  $|A_{x_1}|$ , ki jo dobimo tako, da koeficiente ob neznanki  $x_1$  nadomestimo z znanimi členi na desni strani enačb.
- Determinanto  $|A_{x_2}|$ , ki jo dobimo tako, da koeficiente ob neznanki  $x_2$  nadomestimo z znanimi členi na desni strani enačb.
- Determinanto  $|A_{x_n}|$ , ki jo dobimo tako, da koeficiente ob neznanki  $x_n$  nadomestimo z znanimi členi na desni strani enačb.
- Izračunamo neznanke  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kot sledi:

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}; x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|}; \dots; x_n = \frac{|A_{x_n}|}{|A|} \quad (4)$$

## 2.2 Reševanje s pomočjo inverzne matrike

Sisteme  $n$  - linearnih enačb z  $n$  - neznankami lahko rešujemo tudi s pomočjo inverzne matrike. **Inverzna matrika** dane matrike  $A$  je taka matrika  $A^{-1}$ , za katero velja  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$  (kjer je  $E$  enotska matrika). Ker moramo matrično enačbo rešiti najprej algebraično, dobimo matriko  $X$  na naslednji način: enačbo oblike  $AX = B$  pomnožimo z leve strani z  $A^{-1}$  |  $AX = B$  in dobimo neznano matriko  $X = A^{-1}B$ . Na tem mestu zapišemo še enačbo za izračun inverzne matrike (Čibej & Ferbar Tratar, 2012):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}^T; \text{ kjer elementi v matriki predstavljajo kofaktorje.} \quad (5)$$

**Kofaktor** je poddeterminanta elementa  $a_{ij}$  pomnožena z  $(-1)^{i+j}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} * \Delta_{ij}$ . Poddeterminanto  $\Delta_{ij}$ , elementa  $a_{ij}$  dobimo tako, da v determinanti matrike  $A$  izpustimo vrstico  $i$  in stolpec  $j$ . Oznaka  $T$  v obrazcu za izračun inverzne matrike predstavlja transponiranje, tj. zamenjava vrstic in stolpcev.

## 2.3 Gaussova metoda

Matriko  $A$  s pomočjo elementarnih oz. Gaussovih transformacij prevedemo v matriko, kjer bo v levem zgornjem kotu neka zgornje trikotna matrika  $T$  (diagonalni elementi različni od 0), v celem spodnjem delu pa bodo same ničle (Čibej & Ferbar Tratar, 2012):

$$A \sim \left[ \begin{array}{c|c|c} T & & B \\ \hline - & - & - \\ 0 & | & 0 \end{array} \right] \quad (6)$$

Na podlagi prevedene matrike določimo **rang matrike  $A$** ;  $r(A) = r(T) = r$ . Rang matrike  $A$  je red največje (po dimenziji) od nič različne poddeterminante.

Gaussove transformacije ohranjajo rang in so naslednje:

- Med seboj lahko zamenjamo katerikoli vrstici.
- Poljubno vrstico lahko pomnožimo s katerimkoli od nič različnim številom.
- K poljubni vrstici lahko prištejemo poljuben mnogokratnik katerekoli druge vrstice.

Transformacije lahko opravljamo tudi po stolpcih, vendar moramo biti v tem primeru bolj previdni (pri reševanju linearnih sistemov), saj se moramo zavedati, da menjava stolpca pomeni zamenjavo neznank!

Za reševanje linearnega sistema enačb uvedemo nov pojem, **razširjena matrika**, ki jo zapišemo tako, da matriki koeficientov sistema  $A$  na desni strani dodamo še desne strani enačb  $B$ . Zapis razširjene matrike:  $[A|B]$ .

Sistem imenujemo rešljiv, če ima vsaj eno rešitev, v nasprotnem primeru je nerešljiv oziroma protisloven. Rešljiv sistem ima bodisi eno samo natanko določeno rešitev, v tem primeru mu rečemo določen; ali pa je rešitev neskončno mnogo, v tem primeru sistem imenujemo nedoločen (Čibej & Ferbar Tratar, 2012):

- Sistem ni rešljiv: rang razširjene matrike in matrike  $A$  se ne ujemata  
 $r(A|B) \neq r(A) \Rightarrow$  ni rešitev
- Sistem je rešljiv in določen: ranga se ujemata in sta enaka številu neznank  
 $r(A|B) = r(A) = n \Rightarrow \exists! R$  (obstaja natanko ena, točno določena rešitev)
- Sistem je rešljiv in nedoločen: ranga se ujemata in sta manjša od števila neznank  
 $r(A|B) = r(A) < n \Rightarrow \infty R$  oziroma  $(n - r)$  parametričnih družin rešitev

Poseben primer sistemov linearnih enačb je **homogen sistem**, ki ima na desni strani enačb same ničle. V tem primeru vedno obstaja rešitev, bodisi:

- $r(A) = n \Rightarrow \exists! R; \quad x_1, \dots, x_n = 0$  ničelna ali trivialna rešitev, bodisi
- $r(A) < n \Rightarrow (n - r)$  parametričnih družin rešitev ali netrivialna rešitev.

Gaussova metoda je najbolj splošna metoda za reševanje sistemov linearnih enačb.

Seveda je potrebno upoštevati, da v primerih linearnega programiranja nastopajo neenačbe, torej je potrebno preučiti celotno naslednje poglavje teoretičnih osnov linearnega programiranja in znanje v naslednjih poglavjih še nadgraditi.



$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}, \text{ ki predstavlja stolpični vektor spremenljivk} \quad (11)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ ki predstavlja stolpični vektor prostih členov enačb ali neenačb} \quad (12)$$

$$C = [c_1 \cdots c_s], \text{ ki predstavlja vrstični vektor koeficientov namenske funkcije} \quad (13)$$

Analogno z zapisom linearnega programa v klasični matematični obliki zapišemo linearni program v matrični obliki kot:

$$1. \text{ pogoji nenegativnosti} \quad X \geq 0 \quad (14)$$

$$2. \text{ sistem linearnih omejitev} \quad AX \leq B \quad (15)$$

$$3. \text{ namenska oziroma ciljna funkcija} \quad \text{opt } f(X) = CX \quad (16)$$

V navedenih oblikah izraženi linearni program ni uporaben za numerično reševanje, kjer nastopajo pogoji oziroma omejitve v obliki neenačb. Take pogoje spremenimo v enačbe s privzemom novih tako imenovanih **dopolnilnih spremenljivk**.

Denimo, da je si iz sistema linearnih omejitev izberemo prvi pogoj in ga zapišemo kot neenačbo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s \geq b_1 \quad (17)$$

V enačbi (17) je lahko leva stran večja od desne, zato na levi strani neenačbe odštejemo pribitek, da neenačba preide v enačbo. Ta pribitek je lahko pozitiven ali kvečjemu enak 0 in ga označimo z  $x_{s+1}$ . Odštejemo pribitek in dobimo enačbo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s - x_{s+1} = b_1 \quad (18)$$

S podobnim postopkom spremenimo zaporedoma vse neenačbe v enačbe ter tudi namensko funkcijo in preobrazimo prvotni linearni program v novega:

### 1. pogoji nenegativnosti

$$x_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s; s+1, \dots, s+m) \quad (19)$$

Vsaki vrstici, ki predstavlja enačbo, smo dodali po 1 dopolnilno spremenljivko, torej smo dodali še  $m$  dopolnilnih spremenljivk.

## 2. sistem linearnih omejitev

[illegible]

### 3. namenska oziroma ciljna funkcija

$$\min f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m}) = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s + c_{s+1} x_{s+1} + \dots + c_{s+m} x_{s+m} \quad (21)$$

Novi namenski funkciji smo dodali  $x_{s+1}, \dots, x_{s+m}$ , ki jim predpišemo koeficiente  $c_{s+1}, \dots, c_{s+m}$ , ki so enaki 0. S tem se je namenska funkcija spremenila le navidežno, dejansko pa je ostala nespremenjena.

Novi linearni program še ni tak, da bi omogočil začetek numeričnega reševanja. V ta namen vrinemo v vsako pogojno enačbo še po eno spremenljivko, te spremenljivke imenujemo **umetne spremenljivke**. K prvi pogojni enačbi prištejemo na levi strani enačbe novo umetno spremenljivko  $x_{s+m+1}$  in dobimo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s - x_{s+1} + x_{s+m+1} = b_1 \quad (22)$$

Namensko funkcijo izpopolnimo s to spremenljivko tako, da ji v funkciji predpišemo koeficient  $c_{s+m+1}$ ; tako dobimo novo namensko funkcijo:

$$\begin{aligned} \min f(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+m}, x_{s+m+1}) \\ = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s + c_{s+1} x_{s+1} + \dots + c_{s+m} x_{s+m} + c_{s+m+1} x_{s+m+1} \end{aligned} \quad (23)$$

Če predpišemo koeficientu  $c_{s+m+1}$  dovolj veliko vrednost  $M$ , lahko vedno dosežemo, da ima namenska funkcija minimum samo tedaj, kadar ima umetna spremenljivka  $x_{s+m+1}$  vrednost 0. Ker dobimo zaradi tega pri optimalni rešitvi linearnega programa v vsakem primeru  $x_{s+m+1} = 0$ , se z uvedbo nove spremenljivke prva linearna enačba spremeni samo navidezno, ne da bi se pri tem lahko spremenila optimalna rešitev linearnega programa. S podobnim postopkom vrinemo zaporedoma v vse naslednje enačbe po eno umetno spremenljivko. Če pišemo indeks  $n$  namesto indeksa  $s + 2m$ , dobimo naslednji linearni program:

## 1. pogoji nenegativnosti

$$x_l \geq 0 \quad (l = 1, 2, \dots, s; s+1, \dots, s+m; s+m+1, \dots, s+2m = n) \quad (24)$$



$$x_1 = 0, \dots, x_s = 0; x_{s+1} = b_1, \dots, x_{s+m} = b_m$$

Ker je  $c_{s+1} = \dots = c_{s+m} = 0$ , ustreza tej rešitvi vrednost namenske funkcije  $f(0, \dots, 0; b_1, \dots, b_m) = 0(b_1 + \dots + b_m) = 0$ .

Vsaka možna rešitev ima po  $n$  komponent; ker smo privzeli  $m$  dopolnilnih in  $m$  umetnih spremenljivk, je skupno število  $n = s + 2m$  komponent večje od števila  $m$  neodvisnih pogojnih enačb. Nekatere komponente možne rešitve so lahko 0, nekatere pa so lahko pozitivne. Glede na število pozitivnih komponent ločimo naslednje možne rešitve:

- Možna rešitev je **nebazna**, če ima več kot  $m$  pozitivnih komponent, in **bazna**, če nima več kot  $m$  pozitivnih komponent. Bazna možna rešitev je **nedegenerirana**, če ima natančno  $m$  pozitivnih komponent, in **degenerirana**, če ima manj kot  $m$  pozitivnih komponent.
- Možna rešitev je **optimalna**, če ustreza pogoju nenegativnosti in pogojni enačbi  $AX = B$  in če ima zanjo namenska funkcija minimum (oz. maksimum). Kot pri drugih možnih rešitvah ločimo tudi pri optimalnih možnih rešitvah nebazne, bazne, nedegenerirane in degenerirane optimalne možne rešitve.
- Možna rešitev je vektor ali točka vektorskega prostora. Pogoj nenegativnosti določuje  $n$  polprostorov, pogojna enačba  $AX = B$  pa določuje  $m$  nadravnin tega prostora; namenski funkciji ustreza v tem prostoru enoparameterska družina nadravnin. Na tej geometrični ponazoritvi temeljijo poznane grafične metode za reševanje linearnih programov (Vadnal, 2003).

## 3.2 Linearni program z dvema spremenljivkama

### 3.2.1 Lastnosti linearnega programa z dvema spremenljivkama

V primeru, ko v linearnem programu nastopata le dve spremenljivki, torej se vse skupaj dogaja v  $\mathbb{R}^2$ , si lahko pomagamo kar s skico množice možnih rešitev in lege nivojnic namenske funkcije, v splošnem pa nam do ustreznega postopka pomaga konveksnost ustrezne množice možnih rešitev oziroma posledice te konveksnosti (Hvalica, 2002).

Linearni program z dvema spremenljivkama ima naslednjo obliko:

#### 1. pogoji nenegativnosti

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{33}$$

## 2. sistem linearnih omejitev

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq b_m\end{aligned}\tag{34}$$

## 3. namenska oziroma ciljna funkcija

$$\text{opt } f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2\tag{35}$$

Pomemben izrek linearnega programiranja pravi, da če ima linearni program optimalno rešitev, potem se ta nahaja v enem od oglišč (Bergin, 2015). To ne pomeni, da je vsaka optimalna rešitev v oglišču, temveč le, da se optimalna rešitev nahaja v oglišču (če predvidevamo, da ima linearni program rešitev). Torej nam ta izrek pove, da damo večjo pozornost ogliščem dopustnih rešitev.

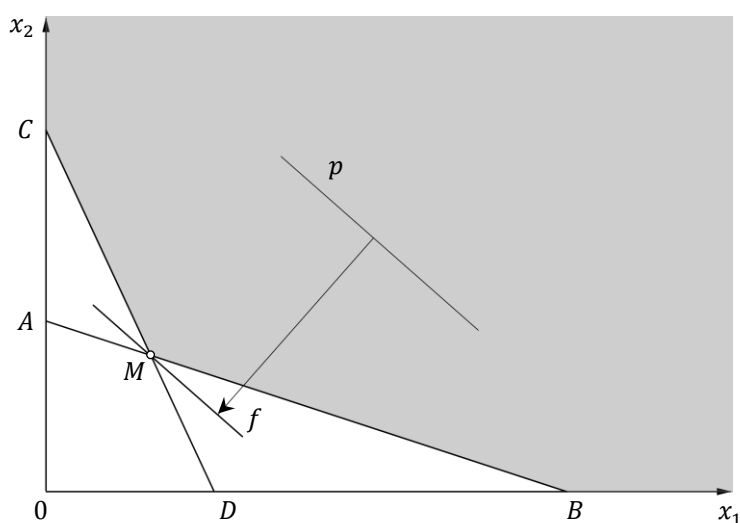
### 3.2.2 Grafična metoda reševanja linearnega programa

Linearne programe z dvema spremenljivkama je mogoče rešiti grafično z metodami ravninske analitične geometrije. Vzemimo, kakor vidimo na sliki 1, dvodimenzionalni pravokotni kartezični koordinatni sistem. Vsaka točka  $(x_1, x_2)$  tega koordinatnega sistema ponazarja urejen par dveh spremenljivk. Neenačba  $x_1 \geq 0$  predpisuje, da vrednost spremenljivke  $x_1$  ne more biti negativna, podobno predpisuje tudi neenačba  $x_2 \geq 0$ . Zaradi teh omejitev pridejo v poštev le točke iz prvega kvadranta koordinatnega sistema. O posebni pomembnosti identifikacije dopustnega območja nas opozarja Jon Curwin (Curwin & Slater, 2002). Za nek določen problem dopustno območje morda ne obstaja ali pa managerju ne da zadovoljive rešitve. Dolgoročno ni dovolj, da se poišče optimalno rešitev, temveč da se izboljša optimalno rešitev.

Enačbo  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$  ponazarja premica skozi točki A in B, ki pa je zaradi pogojev nenegativnosti kar daljica  $\overline{AB}$ . Vse točke, ki zadoščajo neenačbi  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ , ležijo nad daljico  $\overline{AB}$ . Enačbo  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$  ponazarja daljica  $\overline{CD}$ . Vse točke, ki zadoščajo neenačbi  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2$ , ležijo nad daljico  $\overline{CD}$ . Vse tiste točke, ki zadoščajo obema neenačbama, ležijo na polravnini, na kateri ni koordinatnega izhodišča. Zato pridejo v poštev samo točke na tej polravnini.

Iz vseh štirih neenačb sledi, da pridejo v poštev samo točke neomejenega konveksnega območja  $(\infty, B, M, C, \infty)$ . Točke tega območja ponazarjajo vse možne rešitve linearnega programa. Med možnimi rešitvami je treba določiti tisto ali tiste (če jih je več), za katere ima namenska funkcija minimum.

Slika 1: Grafično reševanje linearnega programa



Vir: Povzeto in prirejeno po Vadnal, A., 1977.

Grafično določimo rešitev na naslednji način: Enoparametrsko družino rešitev  $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ , kjer je  $z$  poljuben parameter, ponazarja družina vzporednih premic. Med vzporednimi premicami izberemo tisto, ki gre skozi točko  $M$ . Točko  $M$  najdemo tako, da narišemo neko premico  $p$  z zgornjo enačbo, kjer vzamemo parameter  $z$  tako velik, da gre premica skozi območje možnih rešitev. Premico  $p$  premikamo vzporedno proti izhodišču koordinatnega sistema, dokler ne zapusti tega območja. V tem primeru se to zgodi ravno v točki  $M$ . Točka  $M$  ponazarja optimalno možno rešitev. Koordinati te točke določimo tako, da izračunamo presečišče premic z enačbama  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$  in  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$  (Vadnal, 1977).

### 3.2.3 Obči linearni program

Obči linearni program v katerem nastopata samo dve spremenljivki in samo dve pogojni neenačbi lahko rešimo na naslednji način. Najprej zapišemo določene zahteve, ki jim običajno zadošča vsak praktično pomemben linearni program. Zapišimo obči linearni program in določimo optimalno možno rešitev ter največjo vrednost namenske funkcije.

#### 1. pogoji nenegativnosti

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (36)$$

#### 2. sistem linearnih omejitev

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \end{aligned} \quad (37)$$

### 3. namenska oziroma ciljna funkcija

$$\max(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (38)$$

Za koeficiente, ki nastopajo v linearnem programu zahtevajmo (Vadnal, 1977):

- Koeficienti  $a_{ij}$  so pozitivni, zato imata premici iz 2. točke negativna smerna koeficienta:  $k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$  in  $k_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$ .
- Premici nista vzporedni, ker njuna smerna koeficienta nista enaka. Iz tega sledi, da je determinanta  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  različna od nič.
- Smerni koeficient prve premice iz danih pogojev je večji od smernega koeficienta druge premice, zato velja neenačba:  $\frac{a_{11}}{a_{12}} < \frac{a_{21}}{a_{22}}$ . Tej zahtevi je vedno mogoče zadostiti, če le primerno izberemo vrstni red premic (neenakosti oziroma omejitev).
- Koeficient  $b_1$  je pozitiven; zato seka prva premica ordinatno os v točki  $B_1(0, \frac{b_1}{a_{12}})$ , ki ima pozitivno ordinato.
- Koeficient  $b_2$  je pozitiven; zato seka druga premica abscisno os v točki  $B_2(\frac{b_2}{a_{22}}, 0)$ , ki ima pozitivno absciso.
- Koeficienta  $c_1$  in  $c_2$  sta pozitivna, zato ima enoparametrična družina premic  $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$ , kjer je  $z$  poljuben parameter, negativen smerni koeficient:  $k_f = -\frac{c_1}{c_2}$ .
- Premici iz danega sistema omejitev se sekata v točki  $M(x_1^0, x_2^0)$ , ki ima obe koordinati pozitivni. Ker je  $x_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}$ ,  $x_2^0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|A_{x_2}|}{|A|}$  in ker je determinanta  $|A|$  negativna, morata biti negativni tudi obe determinanti v števcih zgornjih izrazov. Zato veljata neenakosti:  $\frac{a_{12}}{a_{22}} > \frac{b_1}{b_2}$  in  $\frac{a_{11}}{a_{21}} < \frac{b_1}{b_2}$ .
- Smerni koeficienti premic zadoščajo neenakosti:  $k_1 > k_f > k_2$ .

Pri vseh naštetih zahtevah ima linearni program eno samo optimalno možno rešitev, in sicer:

$$x_1^0 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \quad x_2^0 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} \quad (39)$$

Tej ustreza največja vrednost namenske funkcije:

$$f(x_1^0, x_2^0) = \frac{c_1 |A_{x_1}| + c_2 |A_{x_2}|}{|A|} \quad (40)$$

Pri določanju optimalne možne rešitve v enačbi (39) lahko vidimo, da pridemo do rešitve s pomočjo Cramerjevega pravila (Vadnal, 1977).

### 3.3.1 Osnove simpleksne metode

### 3.3.2 Reševanje linearnega programa s simpleksno metodo

Maksimum namenske funkcije poiščemo tako, da uvedemo dopolnilne spremenljivke in dobimo sledečo obliko sistema linearnih omejitev:

namenska funkcija pa ima obliko:

14

pri čemer se vrednost namenske funkcije zaradi uvedbe dopolnilnih spremenljivk ne spremeni, saj so koeficienti  $c_{s+1} = \dots = c_{s+m} = 0$ . Za vse spremenljivke velja pogoj nenegativnosti.

Tak linearni program rešujemo v naslednjih korakih (Doba fakulteta, 2016):

- Koeficiente sistema zapišemo v začetno **simpleksno matriko** (razširjena matrika):

$$\left[ \begin{array}{c|cccc|c} f & x_1 & \dots & x_s & x_{s+1} & \dots & x_{s+m} & b \\ \hline 1 & -c_1 & \dots & -c_s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1s} & & & & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & E & & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \dots & a_{ms} & & & & b_m \end{array} \right]; \text{ kjer je } E \text{ enotska matrika dimenzije } m \times m.$$

Enotska matrika je diagonalna matrika, ki ima na diagonali same enice, drugod pa ničle.

- V simpleksni matriki poiščemo **pivot**. Najprej izberemo stolpec, ki ima v vrstici koeficientov namenske funkcije (tj. prvi vrstici) najmanjšo vrednost. Nato v vsaki vrstici (razen prvi) izračunamo količnik med vrednostjo  $b$ -jev in vrednostjo v izbranem stolpcu. Izberemo vrstico z najmanjšim količnikom. Element, ki se križa na izbranemu stolpcu in izbrani vrstici, imenujemo ključni element ali pivot.

Vrstico lahko določimo tudi, tako da izberemo tisto bazno spremenljivko, ki predstavlja za izbrano vhodno spremenljivko (tj. spremenljivka ključnega stolpca) strožji pogoj. Če imamo dve nebazni spremenljivki  $x_1$  in  $x_2$  in je vhodna spremenljivka na primer  $x_1$ , potem določimo vsem ostalim nebaznim spremenljivkam vrednost 0. Izračun za določitev ključne vrstice:

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & \Rightarrow a_{11}x_1 + x_{s+1} = b_1 \Rightarrow x_{s+1} = b_1 - a_{11}x_1 \geq 0 \quad * \Rightarrow x_1 \leq \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = 0 & \Rightarrow a_{21}x_1 + x_{s+2} = b_2 \Rightarrow x_{s+2} = b_2 - a_{21}x_1 \geq 0 \quad * \Rightarrow x_1 \leq \frac{b_2}{a_{21}} \end{aligned}$$

\* Upoštevamo pogoj nenegativnosti baznih spremenljivk!

Kot že rečeno, izberemo tisto vrstico, pri kateri bazna spremenljivka predstavlja strožji pogoj. Zaradi hitrejšega reševanja bomo pri izbiri vrstice uporabili prvi način, pri katerem izračunamo količnik med  $b$ -ji in vrednostmi v izbranem stolpcu.

- Na mestu ključnega elementa želimo imeti število ena, ki ga dobimo, tako da vse elemente vrstice delimo z vrednostjo pivota ali množimo z obratno vrednostjo pivota. Na vseh ostalih mestih v pivotnem stolpcu s pomočjo elementarnih transformacij ustvarimo ničle (več o el. transformacijah najdete v poglavju 2.3).

- V primeru, ko iščemo minimum namenske funkcije, je potrebno poleg dopolnilnih spremenljivk (ki jih v tem primeru odštejemo) uvesti tudi umetne spremenljivke. Koeficientu iz namenske funkcije  $c_{s+m+1}$  določimo dovolj veliko vrednost  $M$  (na primer nek večkratnik največjega koeficienta v namenski funkciji). Potem sistem pogojnih enačb izgleda takole:

namenska funkcija pa:

Za vse spremenljivke velja pogoj nenegativnosti.

Linearni program rešimo z naslednjimi koraki (Doba fakulteta, 2016):

- Preden koeficiente zapišemo v simpleksno matriko je potrebno s pomočjo linearnih transformacij preoblikovati namensko funkcijo tako, da bodo koeficienti umetnih spremenljivk enaki 0. Pogojnih enačb ob tem ni potrebno spreminjati.
- Zdaj koeficiente sistema zapišemo v začetno simpleksno matriko:

$$c'_j = M \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} - c_j \quad (45)$$

16

- V simpleksni matriki poiščemo pivot. Najprej izberemo stolpec, ki ima v vrstici koeficientov namenske funkcije (tj. prvi vrstici začetne simpleksne matrike) najmanjšo vrednost. Nato v vsaki vrstici (razen prvi) izračunamo količnik med vrednostjo  $b$ -jev in vrednostjo v izbranem stolpcu. Izberemo vrstico z najmanjšim količnikom.
- Na mestu pivotnega elementa želimo imeti število ena, ki ga dobimo, tako da vse elemente vrstice delimo z vrednostjo pivota. Na vseh ostalih mestih v pivotnem stolpcu s pomočjo elementarnih transformacij ustvarimo ničle.
- Postopek ponavljamo, dokler so v prvi vrstici simpleksne matrike vrednosti koeficientov pozitivne (velja za koeficiente, ki ležijo ob spremenljivkah od  $x_1$  do  $x_n$ ).
- Zdaj preberemo rešitev: v končni simpleksni matriki v stolpcu  $x_1$  poiščemo enko in odčitamo vrednost v stolpcu  $b$ . Analogno preberemo rešitve do  $x_s$ . V zadnjem stolpcu prve vrstice iste matrike odčitamo minimum namenske funkcije.

### 3.3.3 Dualni problem

V primeru, ko iščemo minimum namenske funkcije in ima sistem linearnih omejitev obliko  $\geq$ , uporabimo **dualni problem**. Vsakemu dualnemu problemu minimiranja priredimo dualni problem maksimiranja in obratno, pri čemer imata oba enaki vrednosti namenskih funkcij.

Najprej zapišemo matriko:

$$Z = \left[ \begin{array}{c|c} C & 1 \\ \hline - & - \\ A & B \end{array} \right], \text{ ki jo transponiramo v } Z^T. \text{ Iz nove transponirane matrike}$$

$$Z^T = \left[ \begin{array}{c|c} C' & 1 \\ \hline - & - \\ A' & B' \end{array} \right] \text{ zapišemo dualni program, ki ima namesto spremenljivk } x_1 \text{ do } x_s, \text{ zdaj}$$

$y_1$  do  $y_s$ . Začetni sistem za reševanje dualnega programa zapišemo s pomočjo dopolnilnih spremenljivk, za kar uporabimo spremenljivke  $x_1$  do  $x_s$ . Od tu dalje rešujemo sistem s simpleksno metodo. Rešitev primarnega programa se nahaja v zadnji vrstici končne matrike simpleksov za dualni program (Vadnal, 2003).

## 4 MINIMIZACIJA STROŠKOV V PREUČEVANEM PODJETJU

### 4.1 Stroški distribucije

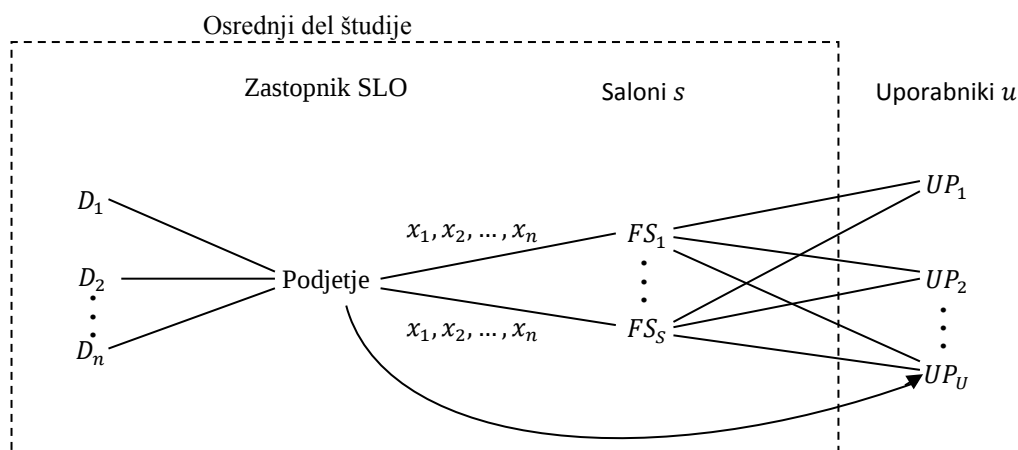
Podjetje prodaja svoje izdelke na slovenskem trgu, njihovi kupci so predvsem saloni, v veliko manjši meri pa tudi končni uporabniki. Uspešnost podjetja zavisi tudi od uspešnosti salonov in njihove nadaljnje prodaje, zato jim podjetje nudi vrsto različnih izobraževalnih

seminarjev. Med cilji podjetja ni povečanje prodaje končnim uporabnikom, pač pa le povečanje prodaje salonom. Cilj dobaviteljev pa je imeti zastopnika (v tem primeru preučevano podjetje), saj ta bolje pozna vsesplošne razmere na slovenskem trgu, kot so ekonomsko in politično stanje, kultura in demografija prebivalstva.

V tem poglavju bom zapisal linearni program na konkretnem primeru trgovskega podjetja, ki se v osnovi ukvarja s trgovino na debelo s kozmetičnimi izdelki. Vzporednice bom vlekel iz članka z naslovom Towards better coordination of a retail supply chain distribution flow, ki sta ga napisala asist. Tea Vizinger (Fakulteta za logistiko, UM) in prof. ddr. Janez Žerovnik (Fakulteta za strojništvo, UL) in ga predstavila na 19<sup>th</sup> International Working Seminar on Production Economics, 2016, Innsbruck, Austria.

Najprej nekaj besed o oskrbovalni verigi. Z oskrbovalno verigo označujemo mrežo osrednjih poti med skladišči in številnimi odjemnimi mesti, ki se oblikuje z namenom povečanja dobičkonosnosti verige. Učinkovitost managementa, ki skrbi za tok med členi oskrbovalne verige močno zavisi od načrtovane distribucije. Cilji distribucije so minimizacija transportnih stroškov in stroškov skladiščenja, minimizacija stroškov reklamacij povezanih s tem in na drugi strani maksimizacija ravni storitev za kupca. V članku želita avtorja oblikovati model, ki bi rešil ta kompleksen problem. Avtorja trdita, da je pristop v testni fazi in verjameta, da je dobra osnova za dokončno oblikovanje modela s tako kompleksnim problemom. Uporabnost modela ilustrirata s številčnim primerom. Moja naloga bo preveriti model v preučevanem trgovskem podjetju (v nadaljevanju podjetje). V podjetju sestavljajo oskrbovalno verigo naslednji členi:

Slika 2: Osrednji del študije



Vir: Povzeto in prirejeno po Vizinger, T., & Žerovnik, J.

Podjetje nabavlja kozmetiko od več tujih dobaviteljev, od dobavitelja  $D_1$  kupi svojo najpomembnejšo blagovno znamko  $x_1$ . Od dobavitelja  $D_2$  kupuje blagovno znamko  $x_2$ . Od ostalih dobaviteljev  $D_3$  kupuje ostale blagovne znamke  $x_3$ . Vse tri neznanke  $x_i$  predstavljajo količino prodanih enot posameznih blagovnih znamk v enem mesecu. Verjetnosti, da saloni ( $FS_1$  do  $FS_s$ ) kupijo posamezne blagovne znamke so 65 % za blagovno znamko  $x_1$ , 25 % za

$x_2$  in 10 % za  $x_3$ . Verjetnost je za blagovno znamko  $x_1$  tako velika, ker gre za prepoznavno blagovno znamko v svetu kozmetike, pa tudi zaradi širine asortimana, ki ga ta ponuja salonom in uspešnosti komercialistov pri prodaji. Blagovne znamke  $x_3$  predstavljajo le 10 odstotkov prodaje, ker te zajemajo izdelke, ki niso osnovne dobrine za salone, temveč dodatki, ki jih kupujejo manj pogosto. Blagovna znamka  $x_2$  pa se še uveljavlja na slovenskem trgu. Verjetnost sloni na podlagi preteklih podatkov o prodaji v preučevanem podjetju.

Naš namen je poiskati minimum funkcije stroškov povezanih z distribucijo, ki se nanašajo na tri različne kriterije:

$$\min C(X) = \min \{DC(X), Rekl(X), LS(X)\}, \quad (47)$$

kjer  $DC(X)$  predstavlja stroške distribucije med podjetjem in saloni,  $Rekl(X)$  predstavlja stroške reklamacij ter  $LS(X)$ , ki predstavlja stroške izgubljenih poslov.

Strošek distribucije paketa od podjetja do kupca je odvisen od način distribucije, vrednosti naročila, teže paketa, stroškov skladiščenja in oportunitetnega stroška izgube časa, ki ga izgubi potnik v primeru osebne dostave paketov. Ocenjena funkcija stroškov distribucije<sup>1</sup>, bi bila naslednja:

$$DC(X) = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3, \quad (48)$$

kjer:

- $X_1$  predstavlja paket poslan v salon, kjer v povprečju kupijo 15 izdelkov blagovne znamke  $x_1$ , 2 izdelka blagovne znamke  $x_2$  ter 1 izdelek blagovne znamke  $x_3$ ,
- $X_2$  predstavlja paket poslan v salon, kjer v povprečju kupijo 2 izdelka blagovne znamke  $x_1$ , 10 izdelkov blagovne znamke  $x_2$  ter 2 izdelka blagovne znamke  $x_3$ ,
- $X_3$  predstavlja paket poslan v salon, kjer v povprečju kupijo 2 izdelka blagovne znamke  $x_1$ , 2 izdelka blagovne znamke  $x_2$  ter 3 izdelke blagovne znamke  $x_3$ .

Pogodbe z dobavitelji  $D_1$ ,  $D_2$  in  $D_3$  določajo, da moramo prodati mesečno najmanj 6000 izdelkov  $x_1$ , 2500 izdelkov  $x_2$  in 1000 izdelkov  $x_3$ , sicer lahko dobavitelj enostransko prekine pogodbo po preteku enega leta. Da bi podjetje poslovalo pozitivno mora ustvariti najmanj 65.000 € prihodkov mesečno. Povprečna cena izdelka posamezne blagovne znamke znaša:  $p_1 = 8$  €,  $p_2 = 5$  € in  $p_3 = 3$  €. Naš namen je minimizirati stroške distribucije ob upoštevanju danih zahtev in izračunati koliko paketov je potrebno poslati za doseganje minimalnih stroškov.

---

<sup>1</sup> Strošek poštne < Strošek osebne dostave, kjer je vključen tudi oportunitetni strošek izgube časa potnika. Paketi  $X_1$  so najtežji, vendar stroški na kg z velikostjo paketa padajo. Paketi  $X_3$  so največkrat od vseh treh odpeljani osebno, zato ima podjetje s tovrstnimi paketi najvišje stroške.

Zapis linearnega programa – **Problem 1:**

1. **pogoji nenegativnosti**  $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

2. **sistem linearnih omejitev**

$$x_1 \geq 6000$$

$$x_2 \geq 2500$$

$$x_3 \geq 1000$$

$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 65000$$

3. **namenska oziroma ciljna funkcija**

$$\min DC(X) = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

Zapis v tabeli:

*Tabela 1: Prikaz Problema 1, zapis pogojev in namenske funkcije*

|                                | Bl. znamka $x_1$ | Bl. znamka $x_2$ | Bl. znamka $x_3$ | Prihodki | Str. distribucije |
|--------------------------------|------------------|------------------|------------------|----------|-------------------|
| <b>Paket <math>X_1</math></b>  | 15               | 2                | 1                | 133      | 3                 |
| <b>Paket <math>X_2</math></b>  | 2                | 10               | 2                | 72       | 4                 |
| <b>Paket <math>X_3</math></b>  | 2                | 2                | 3                | 35       | 5                 |
| <b>Pogoj <math>\geq</math></b> | 6000             | 2500             | 1000             | 65000    |                   |

Funkcijo prihodkov iz sistema linearnih omejitev sem prilagodil zahtevam naloge, zato se prihodki v petem stolpcu preglednice nanašajo na vrednosti posameznih paketov. Izračun za prihodek paketov od  $X_1$  do  $X_3$ :

$$X_1 = 8 \cdot 15 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 133$$

$$X_2 = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 72$$

$$X_3 = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 35$$

oziroma, če zapišemo pogoj:

$$133X_1 + 72X_2 + 35X_3 \geq 65000 \quad (49)$$

Ker gre v tem primeru za minimizacijo namenske funkcije, moramo v linearni program uvesti tako dopolnilne kot tudi umetne spremenljivke:

$$DC(X) = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 - 0 \cdot X_4 - 0 \cdot X_5 - 0 \cdot X_6 - 0 \cdot X_7 + M \cdot X_8 + M \cdot X_9 + M \cdot X_{10} + M \cdot X_{11} \quad (50)$$

Z uvedbo dopolnilnih spremenljivk (od  $X_4$  do  $X_7$ ), se vrednost namenske funkcije ne spremeni. Umetne spremenljivke (od  $X_8$  do  $X_{11}$ ) uvedemo zato, da lahko določimo izhodiščno

bazno možno rešitev. Umetnim spremenljivkam predpišemo nek dovolj velik koeficient  $M$ , denimo nek večkratnik največjega koeficienta baznih spremenljivk namenske funkcije  $M = 10$ .

Za dopolnilne in umetne spremenljivke prav tako velja pogoj nenegativnosti:  $X_4, \dots, X_{11} \geq 0$ .

Sistem linearnih omejitev po uvedbi dopolnilnih in umetnih spremenljivk:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccl} 15X_1 & + & 2X_2 & + & 2X_3 & - & X_4 & & & & + & X_8 & & & = & 6000 \\ 2X_1 & + & 10X_2 & + & 2X_3 & & - & X_5 & & & & + & X_9 & & = & 2500 \\ 1X_1 & + & 2X_2 & + & 3X_3 & & & - & X_6 & & & & + & X_{10} & = & 1000 \\ 133X_1 & + & 72X_2 & + & 35X_3 & & & & - & X_7 & & & & + & X_{11} & = & 65000 \end{array}$$

Začetno bazno možno rešitev (oglišče) določimo tako, da prvih sedem ( $n - m = 11 - 4 = 7$ ) spremenljivk postavimo na 0 in dobimo rešitev, ki zadošča vsem pogojem. To je rešitev:

$$X_1, \dots, X_7 = 0; X_8 = 6000; X_9 = 2500; X_{10} = 1000; X_{11} = 65000$$

Vrednost namenske funkcije v začetnem oglišču pa je:

$$DC(X) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 10 \cdot 6000 + 10 \cdot 2500 + 10 \cdot 1000 + 10 \cdot 65000 = 745000$$

Dobljena rešitev ni optimalna, zato nadaljujemo z iskanjem boljše rešitve, ki jo dobimo tako, da se premaknemo v sosednje oglišče, kjer bo vrednost namenske funkcije boljša, v našem primeru nižja. Ni vseeno v katero oglišče se premaknemo. Postavimo se v tisto, v katerem je sprememba vrednosti največja. Zapis začetne simpleksne matrike:

| $f$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_s$ | $x_{s+1}$ | $\dots$ | $x_{s+m}$ | $x_{s+m+1}$ | $\dots$ | $x_n$ | $b_i$ |   |        |               |
|-----|-------|---------|-------|-----------|---------|-----------|-------------|---------|-------|-------|---|--------|---------------|
| 1   | 1507  | 845     | 415   | -10       | -10     | -10       | -10         | 0       | 0     | 0     | 0 | 745000 |               |
| 0   | 15    | 2       | 2     | -1        | 0       | 0         | 0           | 1       | 0     | 0     | 0 | 6000   | 6000/15=400   |
| 0   | 2     | 10      | 2     | 0         | -1      | 0         | 0           | 0       | 1     | 0     | 0 | 2500   | 2500/2=1250   |
| 0   | 1     | 2       | 3     | 0         | 0       | -1        | 0           | 0       | 0     | 1     | 0 | 1000   | 1000/1=1000   |
| 0   | 133   | 72      | 35    | 0         | 0       | 0         | -1          | 0       | 0     | 0     | 1 | 65000  | 65000/133=488 |

$$y = M \cdot \sum_{i=1}^m b_i \quad y = 10 \cdot (6000 + 2500 + 1000 + 65000) = 745000$$

$$c'_j = M \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} - c_j \quad c'_1 = 10 \cdot (15 + 2 + 1 + 133) - 3 = 1507$$

Izberemo stolpec, ki ima v prvi vrstici (namenski funkciji) največjo vrednost (izbiramo med  $x_j$ ). Izberemo stolpec  $x_1$  in poiščemo ključni element tako, da delimo vrednosti stolpca  $b_i$  z vrednostmi izbranega stolpca  $x_1$ . Slednje ne velja za prvo vrstico, saj ta nima vrednosti  $b$  temveč  $y$ . Najmanjši količnik predstavlja izbrano vrstico, pivot pa je element na križišču izbranega stolpca in vrstice ter zavzame vrednost 15.

V naslednjem koraku delimo izbrano vrstico s pivotnim elementom in z elementarnimi transformacijami na ostalih mestih stolpca ustvarimo ničle.

Premik v sosednje oglišče, ki nam da boljšo rešitev:

↓

|   |   |             |        |       |     |     |     |         |   |   |   |        |               |
|---|---|-------------|--------|-------|-----|-----|-----|---------|---|---|---|--------|---------------|
| 1 | 0 | 655,07      | 214,07 | 90,47 | -10 | -10 | -10 | -100,47 | 0 | 0 | 0 | 142200 |               |
| 0 | 1 | 0,13        | 0,13   | -0,07 | 0   | 0   | 0   | 0,07    | 0 | 0 | 0 | 400    | 400/0,13=3000 |
| 0 | 0 | <b>9,73</b> | 1,73   | 0,13  | -1  | 0   | 0   | -0,13   | 1 | 0 | 0 | 1700   | 1700/9,73=174 |
| 0 | 0 | 1,87        | 2,87   | 0,07  | 0   | -1  | 0   | -0,07   | 0 | 1 | 0 | 600    | 600/1,87=321  |
| 0 | 0 | 54,27       | 17,27  | 8,87  | 0   | 0   | -1  | -8,87   | 0 | 0 | 1 | 11800  | 11800/54=217  |

V zadnjem stolpcu prve vrstice vidimo, da se je vrednost namenske funkcije znižala iz 745000 na 142200. Rešitev izboljšujemo oziroma postopek ponavljamo, dokler so v prvi vrstici simpleksne matrike vrednosti koeficientov pozitivne (velja za koeficiente, ki ležijo ob spremenljivkah od  $x_1$  do  $x_n$ ).

V naslednji matriki pa je še zadnji korak izračuna:

|   |   |   |   |   |        |        |        |     |        |        |        |         |
|---|---|---|---|---|--------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,016 | -1,530 | -0,011 | -10 | -9,984 | -8,470 | -9,989 | 2272,97 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,049  | 0,070  | -0,009 | 0   | -0,049 | -0,070 | 0,009  | 378,04  |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0,123 | 0,066  | 0,001  | 0   | 0,123  | -0,066 | -0,001 | 153,38  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,066  | -0,401 | 0,002  | 0   | -0,066 | 0,401  | -0,002 | 105,07  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,625  | 0,375  | -0,125 | -1  | -0,625 | -0,375 | 0,125  | 187,50  |

V prvi vrstici simpleksne matrike na mestih od  $x_1$  do  $x_n$  ni več pozitivnih vrednosti koeficientov, zato z računanjem zaključimo in iz matrike preberemo rešitev:  $X_1 = 379$ ,  $X_2 = 154$ ,  $X_3 = 106$  in vrednost namenske funkcije  $DC(X) = 2.272,97$  €. Rešitve, ki predstavljajo število paketov  $X_j \in \mathbb{Z}^+$ , moramo zaokrožiti navzgor, sicer ne bi izpolnjevali zahtev dobaviteljev in zahteve po minimalnih mesečnih prihodkih v podjetju.

Na primeru Problem 1 sem preveril uporabnost matrične oblike linearnega programiranja in ga zaradi omejenosti naloge zapisal v prilogi. V prilogi je tudi slika nastalega poliedra možnih rešitev in postopek izračuna oglišč.

## 4.2 Stroški reklamacij

V podjetju ločimo med dvema vrstama reklamacij:

1. Reklamacije, ki so povezane s kvaliteto izdelkov
2. Reklamacije, ki so posledica mehanskih poškodb izdelkov

V nalogi nas zanimajo predvsem reklamacije povezane z distribucijo izdelkov od podjetja do salonov. V podjetju nastajajo stroški, če saloni reklamirajo izdelke. Ti stroški so stroški dela, stroški materiala in stroški ponovnega pošiljanja paketov. Dogaja se tudi, da v paketu, ki ga sprejme naročnik, ni vseh naročenih izdelkov, torej ni nujno, da je predmet reklamacije napaka izdelka; to lahko opredelimo kot posebno skupino reklamacij. Stroški reklamacij so vsota nastalih stroškov posameznih vrst paketov iz poglavja 4.1.

Ocenjena funkcija stroškov reklamacij bi bila naslednja:

$$Rekl(X) = \frac{3,6X_1}{60} + \frac{4,8X_2}{50} + \frac{6X_3}{50} \quad (51)$$

Po izkušnjah sodeč namreč saloni reklamirajo vsak 60. paket  $X_1$ , ter vsak 50. paket  $X_2$  in paket  $X_3$ . Stroški reklamacij za ponovno distribucijo zaradi dodatnih stroškov zrastejo v povprečju za 20 % na posamezni paket. Želimo minimizirati stroške reklamacij ob danih pogojih iz Problema 1 in ugotoviti koliko paketov več pošljemo na račun reklamacij.

Ob upoštevanju danih podatkov zapišemo sledeč linearni program – **Problem 2**:

1. **pogoji nenegativnosti**  $X_1, X_2, X_3 \geq 0$
2. **sistem linearnih omejitev**

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 6000 \\ x_2 &\geq 2500 \\ x_3 &\geq 1000 \\ 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\geq 65000 \end{aligned}$$

### 3. namenska oziroma ciljna funkcija

$$\min Rekl(X) = \frac{3,6X_1}{60} + \frac{4,8X_2}{50} + \frac{6X_3}{50}$$

Tabela 2: Prikaz Problema 2, zapis pogojev in namenske funkcije

|                                | Bl. znamka $x_1$ | Bl. znamka $x_2$ | Bl. znamka $x_3$ | Prihodki | Str. distribucije |
|--------------------------------|------------------|------------------|------------------|----------|-------------------|
| <b>Paket <math>X_1</math></b>  | 15               | 2                | 1                | 133      | 3,6/60            |
| <b>Paket <math>X_2</math></b>  | 2                | 10               | 2                | 72       | 4,8/50            |
| <b>Paket <math>X_3</math></b>  | 2                | 2                | 3                | 35       | 6,0/50            |
| <b>Pogoj <math>\geq</math></b> | 6000             | 2500             | 1000             | 65000    |                   |

Začetna simpleksna matrika:

| $f$ | <div><div>↓</div><math>x_1</math></div> | $\dots$ | $x_s$ | $x_{s+1}$ | $\dots$ | $x_{s+m}$ | $x_{s+m+1}$ | $\dots$ | $x_n$ | $b_i$ |   |        |               |
|-----|-----------------------------------------|---------|-------|-----------|---------|-----------|-------------|---------|-------|-------|---|--------|---------------|
| 1   | 301,9                                   | 171,9   | 83,9  | -2        | -2      | -2        | -2          | 0       | 0     | 0     | 0 | 149000 |               |
| 0   | 15                                      | 2       | 2     | -1        | 0       | 0         | 0           | 1       | 0     | 0     | 0 | 6000   | 6000/15=400   |
| 0   | 2                                       | 10      | 2     | 0         | -1      | 0         | 0           | 0       | 1     | 0     | 0 | 2500   | 2500/2=1250   |
| 0   | 1                                       | 2       | 3     | 0         | 0       | -1        | 0           | 0       | 0     | 1     | 0 | 1000   | 1000/1=1000   |
| 0   | 133                                     | 72      | 35    | 0         | 0       | 0         | -1          | 0       | 0     | 0     | 1 | 65000  | 65000/133=488 |

$$y = M \cdot \sum_{i=1}^m b_i \quad y = 2 \cdot (6000 + 2500 + 1000 + 65000) = 149000$$

$$c'_j = M \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} - c_j \quad c'_1 = 2 \cdot (15 + 2 + 1 + 133) - \frac{3,6}{60} = 301,9$$

Izbrana vrednost  $M$  je v tem primeru 2. Za vse spremenljivke velja pogoj nenegativnosti.

Reševanje poteka tako kot v Problemu 1, izbrani pivotni element se nahaja v drugem stolpcu in drugi vrstici. Drugo vrstico delimo s ključnim elementom, da dobimo na tem mestu enko. Nato pa na ostalih mestih drugega stolpca s pomočjo elementarnih transformacij ustvarimo ničle. Postopek ponavljamo, dokler so v prvi vrstici koeficienti od  $x_1$  do  $x_n$  pozitivne vrednosti. Ko postopek končamo, preberemo rešitev iz naslednje matrike:

|   |   |   |   |   |        |        |        |    |        |        |        |        |
|---|---|---|---|---|--------|--------|--------|----|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0,001 | -0,038 | -0,000 | -2 | -1,999 | -1,962 | -2,000 | 50,01  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,049  | 0,070  | -0,009 | 0  | -0,049 | -0,070 | 0,009  | 378,04 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -0,123 | 0,066  | 0,001  | 0  | 0,123  | -0,066 | -0,001 | 153,38 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0,066  | -0,401 | 0,002  | 0  | -0,066 | 0,401  | -0,002 | 105,07 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,625  | 0,375  | -0,125 | -1 | -0,625 | -0,375 | 0,125  | 187,50 |

Izračun nam pove, da so zaradi reklamacij nastali dodatni stroški distribucije v višini 50,01 €. Koliko paketov smo morali poslati dodatno zaradi reklamacij pa prikazuje naslednji izračun:

$$\text{Št. dodatno poslanih paketov } X_1: \frac{\text{Število poslanih paketov } X_1}{60} = \frac{378,04}{60} = 6,3007 \approx 7$$

$$\text{Št. dodatno poslanih paketov } X_2: \frac{\text{Število poslanih paketov } X_2}{50} = \frac{153,38}{50} = 3,0676 \approx 4$$

$$\text{Št. dodatno poslanih paketov } X_3: \frac{\text{Število poslanih paketov } X_3}{50} = \frac{105,07}{50} = 2,1014 \approx 3$$

Obrazložitev rezultata: ker se sistem linearnih omejitev v Problemu 2 v primerjavi s Problemom 1 ne spremeni, dobimo v obeh primerih v zadnjih simpleksnih matrikah enako število paketov. Spremembe v številu paketov pa so nakazane v števcih namenske funkcije, zato je za izračun dodatno poslanih paketov potrebno izhajati iz te. Če želimo preveriti

pravilnost stroškov reklamacij, vstavimo števila prvotno poslanih paketov v namensko funkcijo in dobimo:

$$\min Rekl(X) = \frac{3,6X_1}{60} + \frac{4,8X_2}{50} + \frac{6X_3}{50} = \frac{3,6 \cdot 378,04}{60} + \frac{4,8 \cdot 153,38}{50} + \frac{6 \cdot 105,07}{50} = 50,02 \quad |^2$$

### 4.3 Stroški izgubljenih poslov

Stroške distribucije in stroške reklamacij lahko določimo na podlagi podatkov iz podjetja, medtem ko stroške izgubljenih poslov ocenimo. Strošek distribucije bi bil na prodano enoto izbrane blagovne znamke nižji, če bi podjetje imelo vedno dovolj veliko zalogo za realizacijo naročil. Razlika med naročeno in prodano količino je oportunitetni strošek izgubljenega posla. V mnogih primerih te razlike zmanjšujemo z naknadnim pošiljanjem paketov, ob tem pa nastajajo stroški ponovnega pošiljanja, dodatnega fakturiranja in drugi stroški. V nekaterih primerih kupci sploh ne prevzamejo paketa, ki 15 dni čakajo na pošti in se po tem vrnejo v podjetje.

Ocenjena funkcija stroškov izgubljenih poslov bi bila naslednja – **Problem 3**:

$$LS(X) = \frac{6X_1}{80} + \frac{6X_2}{80} + \frac{8X_3}{60} \quad (52)$$

Po naših ocenah se zgodi, da vsak 80. paket  $X_1$  in paket  $X_2$  ter vsak 60. paket  $X_3$  ni v celoti realiziran, zato tem paketom zrastejo oportunitetni stroški izgubljenih poslov. Želimo minimizirati stroške izgubljenih poslov ob danih pogojih iz Problema 1.

Pogoji oziroma sistem linearnih omejitev iz Problema 1 ostanejo nespremenjeni, zato dobimo tudi v tem primeru število poslanih paketov enako kot v obeh predhodnih izračunih; torej  $X_1 = 378,04$ ,  $X_2 = 153,38$  in  $X_3 = 105,07$ . Ker rezultate poslanih paketov že imamo, jih lahko vstavimo v namensko funkcijo, ter izračunamo oportunitetne stroške izgubljenih poslov ter po »bližnjici« pridemo do rezultata:

$$\min LS(X) = \frac{6X_1}{80} + \frac{6X_2}{80} + \frac{8X_3}{60} = \frac{6 \cdot 378,04}{80} + \frac{6 \cdot 153,38}{80} + \frac{8 \cdot 105,07}{60} = 53,87$$

V primeru, ko iz podjetja pošljemo v povprečju 378,04 paketov  $X_1$ , 153,38 paketov  $X_2$  ter 105,07 paketov  $X_3$ , nastane za 53,87 € dodatnih stroškov izgubljenih poslov.

---

<sup>2</sup> Razlika nastane zaradi zaokroževanja.

## 5 SKLEP

V nalogi sem predstavil uporabo standardne simpleksne metode na konkretnem primeru trgovine na debelo. S to metodo sem minimiziral stroške distribucije od podjetja do kupcev na podlagi štirih pogojev, to so trije pogoji dobaviteljev ter pogoj prihodkov podjetja. Rezultati, ki sem jih dobil, me ne presenečajo in so v skladu s pričakovanji, glede na to, da nudimo salonom kvalitetne izdelke in storitve distribucije. Zavedati pa se moramo, da je vedno prostor za napredek in na tem bomo delali tudi v prihodnje.

Strošek distribucije je bolj kompleksen, kot se zdi na prvi pogled, saj se z dostavo paketa do kupca postopek distribucije ne zaključi. Potrebno je vzeti v obzir, da se lahko skupni stroški distribucije precej povečajo, če je potrebno ponovno pošiljanje reklamiranih ali manjkajočih artiklov. Manjkajoči artikli lahko povečujejo dodatne stroške distribucije z naknadnim pošiljanjem oziroma zmanjšujejo prihodke, če jih ne pošljemo naknadno. Dodatni stroški distribucije nastajajo potem, ko so paketi že oddani in so odvisni od kakovosti distribucije in izdelkov ter storitev. Dodatni stroški distribucije bodo vedno prisotni, zmanjševali pa jih bodo dobavitelji z izboljšanjem kakovosti izdelkov, skladiščniki z boljšim pakiranjem, trgovski potniki z boljšim razporejanjem svojega časa, poštni uslužbenci s previdnejšim ravnanjem ter navsezadnje tudi saloni in končni uporabniki z odgovornim ravnanjem (denimo prevzemanjem paketov in pravilno uporabo izdelkov).

Z linearnim programiranjem poskušamo iztržiti, kar se da največ v dani situaciji oz. pod danimi pogoji. Nadgraditev te naloge bi bila analiza občutljivosti, ki nam pove, kako se spremenijo končne vrednosti, če se spremeni namenska funkcija.

## LITERATURA IN VIRI

1. Berden, M. (2009). *Zgodovina linearnega programiranja*. Najdeno 12. marca 2016 na spletnem naslovu <http://www.fmf.uni-lj.si/~juvan/Racunalninstvo3/gradivo/zgodovinaLP.pdf>
2. Bergin, J. (2015). *Mathematics for Economists with applications*. London: Routledge.
3. Curwin, J., & Slater, R. (2002). *Quantitative Methods for Business Decisions* (5. izdaja). London: Thomson Learning.
4. Čibej, J. A., & Ferbar Tratar, L. (2012). *Matematika za poslovno rabo*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
5. Doba fakulteta (2016). *Linearno programiranje*. Najdeno 16. aprila 2016 na spletnem naslovu [http://www.doba.si/egradiva/pms-df/Programiranje\\_male.html](http://www.doba.si/egradiva/pms-df/Programiranje_male.html)
6. Hvalica, D. (2002). *Linearno programiranje in njegova uporaba*. Ljubljana: Ekonomska fakulteta.
7. Vadnal, A. (1977). *Rešeni problemi linearnega programiranja*. Ljubljana: Državna založba Slovenije.
8. Vadnal, A. (2003). *Linearno programiranje*. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
9. Vizinger, T., & Žerovnik, J. (2016). Towards better coordination of a retail supply chain distribution flow. *19<sup>th</sup> International Working Seminar on Production Seminar* (str. 513-524). Innsbruck.
10. Winston, W. (1993). *Operations research: applications and algorithms*. Belmont: Duxbury Press.



## **PRILOGE**



## KAZALO PRILOG

|                                                                           |   |
|---------------------------------------------------------------------------|---|
| PRILOGA 1: Linearni program iz poglavja 4.1 v matrični obliki .....       | 1 |
| PRILOGA 2: Prikaz linearnih omejitev iz Problema 1 s presekom ravnin..... | 3 |
| PRILOGA 3: Simpleksna metoda iz Problema 1 v sliki .....                  | 4 |



## PRILOGA 1: Linearni program iz poglavja 4.1 v matrični obliki

Zapis linearnega programa iz poglavja 4.1 v matrični obliki:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c|c} a_{11} & \cdots & a_{13} & -1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{41} & \cdots & a_{43} & -1 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{111} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{411} \end{array} \right] \quad (53)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{11} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{bmatrix} \quad C = [c_1 \cdots c_{11}]$$

1. pogoji nenegativnosti  $X \geq 0$
2. sistem linearnih omejitev  $AX = B$
3. namenska oziroma ciljna funkcija  $\min f(X) = CX$

V matriki  $A$ , ki ima  $m$  vrstic in  $n$  stolpcev ( $n > m$ ) je  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$  podmatrik  $m \times m$ . V našem primeru je  $\frac{11!}{4!(11-4)!} = 330$  tovrstnih podmatrik (Bergin, 2015). Ker vseh podmatrik ne bom reševal, bom iz rešenega primera iz poglavja 4.1 zapisal podmatriko optimalne rešitve in prikazal način reševanja. To podmatriko označim z  $A_{opt}$ :

$$A_{opt} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 15 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 133 & 72 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

S tem zapisom sem določil, da so vse ostale spremenljivke  $X_5, \dots, X_{11} = 0$ . Zapišimo še matriko neznank  $X$  in matriko desnih strani enačb  $B$ :

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6000 \\ 2500 \\ 1000 \\ 65000 \end{bmatrix}$$

Matriko  $X$  izračunamo s postopkom opisanim v poglavju 2.2:

$$X_{opt} = A_{opt}^{-1} B \quad (54)$$

$$X_{opt} = \frac{1}{\det A_{opt}} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 6000 \\ 2500 \\ 1000 \\ 65000 \end{bmatrix}$$

Determinanto  $A_1$  dobimo s pomočjo izreka za razvoj determinante (razvoj naredimo po 4.stolpcu, saj je v njem največ ničel, kar nam skrajša čas računanja. Izračunamo še vse kofaktorje ( $A_{ij}$ ), transponiramo dobljeno matriko kofaktorjev in dobimo:

$$X_{opt} = \frac{1}{2960} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -146 & -206 & 26 \\ 0 & 364 & -196 & -4 \\ 0 & -194 & 1186 & -6 \\ -2960 & -1850 & -1110 & 370 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6000 \\ 2500 \\ 1000 \\ 65000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 378,04 \\ 153,38 \\ 105,07 \\ 187,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

V našem primeru bi med 330 matrikami  $X$  našli minimalno vrednost namenske funkcije ravno v  $X_{opt}$ :

$$\min f(X) = CX \quad (55)$$

$$C = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & X_{11} \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & M & M & M \end{bmatrix}$$

$$\min f(X_{opt}) = C_{opt} \cdot X_{opt} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 378,04 \\ 153,38 \\ 105,07 \\ 187,5 \end{bmatrix} = 2272,97$$

Rezultat minimizacije je enak kot smo ga dobili v Problemu 1 iz poglavja 4.1.

Nekaj preostalih rešitev:

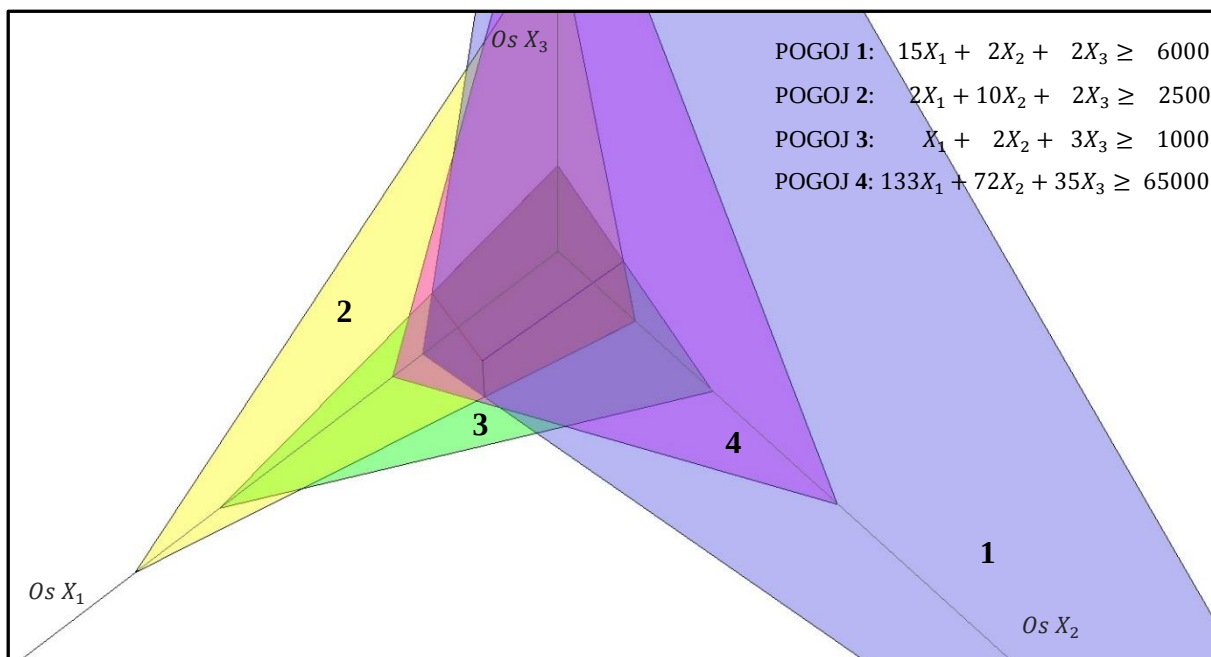
|                                                                            |                |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------|
| $X(X_1, X_2, X_3, X_5) = (363, 190, 85, 0, 300, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$      | $f(X) = 2278$  |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_6) = (343, 120, 305, 0, 0, 500, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$     | $f(X) = 3038$  |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_7) = (365, 155, 108, 0, 0, 0, 0, -1500, 0, 0, 0, 0)$   | Neustrezna     |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_8) = (378, 153, 105, 0, 0, 0, 0, 0, -188, 0, 0, 0)$    | Neustrezna     |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_9) = (363, 190, 85, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -300, 0, 0)$     | Neustrezna     |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_{10}) = (343, 120, 305, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -500, 0)$ | Neustrezna     |
| $X(X_1, X_2, X_3, X_{11}) = (365, 155, 108, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1500)$ | $f(X) = 17256$ |
| ...                                                                        |                |

Med rešitvami opazimo, da se pojavljajo tudi takšne, ki imajo negativne vrednosti spremenljivk. Te ne ustrezajo pogojem nenegativnosti, zato jih izločimo iz množice rešitev. Obstaja natanko 29 rešitev, ki ustreza danim pogojem.

V primerih, ko nastopa veliko število spremenljivk, ročno računanje kaj hitro odpove, zato je priporočljiva uporaba ustreznih orodij oz. računalniških programov za reševanje linearnih programov.

## PRILOGA 2: Prikaz linearnih omejitev iz Problema 1 s presekom ravnin

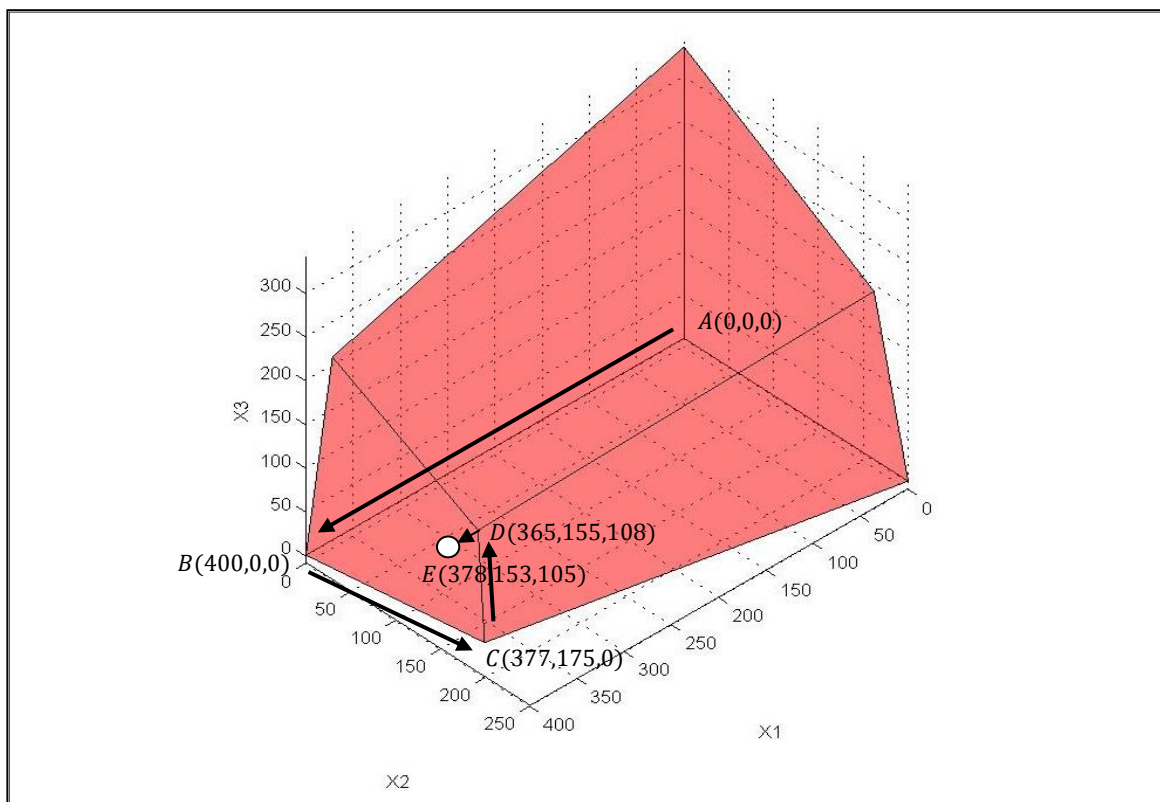
Slika 1: Problem 1, presek ravnin



Slika 1 prikazuje kako pogoji skrčijo prostor v polieder. Možne rešitve so zaradi pogojev, ki so v obliki ( $\geq$ ) zunaj tega prostora nekje v prvem oktantu. Pogoj 1, ki je obarvan z modro, določa levo stran poliedra; pogoj 2, ki je obarvan z rumeno, določa desno stran poliedra; pogoj 3 je obarvan z zeleno in določa zgornjo stran telesa; pogoj 4, ki je obarvan z magento oziroma z vijolično zaradi prelivanja barv, pa ne omejuje poliedra. Ker veljajo pogoji nenegativnosti, je polieder omejen tudi z ostalih strani. Gledano iz izhodišča koordinatnega sistema (0,0,0) bodo pogoji doseženi, ko "stopimo" iz barvnega območja. Optimalna rešitev pa je najkrajši vektor iz izhodišča koordinatnega sistema do območja, kjer so izpolnjeni vsi pogoji.

### PRILOGA 3: Simpleksna metoda iz Problema 1 v sliki

Slika 2: Problem 1, simpleksna metoda v sliki



Izhodišče simpleksne metode je začetna bazna rešitev oz. točka  $A$  s Slike 2. Naš namen je izboljšati rešitev s premiki iz oglišča v oglišče. Po prvi iteraciji zapustimo točko  $A(0,0,0)$  in naredimo največji možni premik, to je v točko  $B(400,0,0)$ . Ta točka ni naša optimalna rešitev, zato nadaljujemo z reševanjem s pomočjo metode simpleksov, dokler je moč rešitev izboljšati. Največji premik naredimo, če se iz točke  $B$  premaknemo v točko  $C(377,175,0)$ . S premikom iz točke  $C$  v točko  $D(365,155,108)$  smo našli najboljšo rešitev v rdečem poliedru, ne pa tudi v celotnem linearnem programu. Če pogledamo Sliko 1, lahko opazimo, da je za prehod iz barvnega območja na belo še ena ravnina, ki je naš pogoj (pogoj 4) in ga moramo izpolniti, tako da preidemo iz barvnega na belo območje. Ta ravnina oz. pogoj 4 teče tik ob točki  $D$ , zato pričakujemo, da se rešitev ne bo bistveno spremenila. Po zadnji iteraciji v Problemu 1 preberemo rešitev, ki jo bom tokrat zapisal v točko  $E(378,153,105)$ . V točki  $E$  izpolnjujemo vse pogoje in minimiziramo stroške distribucije. Točka  $E$  je presečišče treh ravnin, in sicer rumene, zelene in magente (torej ravnin 2, 3 in 4) iz Slike 1.

Obstaja še nekaj takih točk na presekih ravnin, ki so na robu belega območja, v katerih izpolnjujemo vse pogoje, vendar so v njih stroški distribucije višji kot v točki  $E$ . Stroške distribucije lahko izračunamo tako, da vnesemo koordinate izbrane točke  $T(X_1, X_2, X_3)$  v namensko funkcijo.